

17 | Mai 1955

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. Hasselmann

Über die Trägheitskräfte der isotropen Turbulenz

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Prof. Dr.-Ing. G. Weinblum

Über die Trägheitskräfte der isotropen Turbulenz.

Diplomarbeit von K. Hasselmann.

Hamburg, Mai 1955

UEBER DIE TRÄGHEITSKRÄEFTE DER ISOTROPEN TURBULENZ.

Diplomarbeit von K. Hasselmann.

Zusammenfassung: An Hand einer neuen Ableitung der Karman-Howarthschen Korrelationsgleichung werden die Trägheitskräfte der isotropen Turbulenz infolge des Impulsaustauschs zwischen einem kugelförmig abgegrenzten Gebiet und dessen Umgebung anschaulich gedeutet. Dieser Impulsaustausch wird in Uebereinstimmung mit der Heisenbergschen Theorie durch eine zusätzliche turbulente Viskosität beschrieben. Die Berechnung dieses Vorgangs erfolgt jedoch abweichend von der Heisenbergschen Theorie, wobei sich bessere Uebereinstimmung mit Meßergebnissen ergibt.

Inhalt

1. Einleitung.
2. Die mittleren Produkte und die Korrelationsgleichung.
3. Die Spektralgleichung und die Heisenbergsche Formel für die Austauschfunktion.
4. Die dreifache Korrelation als Maß für den Impulsaustausch.
5. Zusammenfassung.

Referent v Dr. K. Wieghardt
Korreferent: Prof. Dr. W. Lenz

Hamburg, Mai 1955.

1. EINLEITUNG.

Bekanntlich hat erst die statistische Theorie der isotropen Turbulenz eine ausführliche kinematische Analyse der turbulenten Strömungen ermöglicht. Jedoch stößt sie auf Schwierigkeiten bei allen Fragen, die mit dem dynamischen Verhalten der Turbulenz zusammenhängen. Der Kern dieser Schwierigkeiten liegt in der Natur der Trägheitskräfte, die man bisher noch nicht befriedigend beschreiben konnte. Um trotzdem dynamische Gesetzmäßigkeiten theoretisch ableiten zu können, hat man zusätzliche Hypothesen eingeführt, die man grob in die beiden Klassen der Aehnlichkeits- und Austauschhypothesen einteilen kann. Aus den Aehnlichkeitshypothesen können Aussagen über die Aenderung gewisser charakteristischer Größen des Turbulenzfeldes gewonnen werden, wie z.B. das Abklingungsgesetz für die Gesamtenergie; jedoch kann die innere Struktur des Turbulenzfeldes, d.h. die Form des Energiespektrums oder der Geschwindigkeitskorrelationen, nicht erklärt werden. Die Aehnlichkeitsannahmen werden im allgemeinen physikalisch nicht sehr überzeugend begründet und erweisen sich auch experimentell nur als recht grobe Approximationen. Bei den Austauschhypothesen andererseits wird auf Grund einer gewissen Vorstellung über die Einwirkung der Trägheitskräfte auf das Energiespektrum die Form des Trägheitsterms in der dynamischen Spektralgleichung einfach postuliert. Es ist schwierig, bei diesen Ausdrücken unmittelbar nachzuprüfen, ob sie gute Näherungen sind oder nicht, da der exakte Ausdruck für den Trägheitsterm der Spektralgleichung in ziemlich unübersichtlicher Weise von den Amplituden und Phasen der Fourierzerlegung des Geschwindigkeitsfeldes abhängt. Sie sind daher - ebenso wie die Aehnlichkeitsannahmen - nur als Arbeitshypothesen aufzufassen.

Obwohl der Trägheitsterm der Spektralgleichung wesentlich komplizierter ist als der entsprechende Term der mathematisch äquivalenten Korrelationsgleichung, hat man bisher die Trägheitskräfte nur an Hand der Spektralgleichung zu erklären versucht. Das liegt daran, daß der physikalische Inhalt der Spektralgleichung durchsichtiger ist, während man sich bisher für die durch die

Korrelationsgleichung beschriebenen Vorgänge noch kein physikalisch anschauliches Bild gemacht hat. Wie im folgenden gezeigt wird, ermöglicht aber eine neue Ableitung der Korrelationsgleichung die anschauliche Deutung der einzelnen Glieder. Dadurch läßt sich nun die Wirkung der Trägheitskräfte unmittelbar überblicken und kann auch, mit gewissen Vereinfachungen, quantitativ erfaßt werden. Es ergibt sich, daß sie im wesentlichen durch die Heisenbergsche Vorstellung einer auf die größeren Wirbel einwirkenden turbulenten Viskosität, die durch den Impulsaustausch mit den kleineren Wirbeln zustande kommt, beschrieben werden kann.

Die "Schwankungen einer gewissen Turbulenzstufe" werden dann allerdings anders als in der Heisenbergschen Theorie definiert, und der in der turbulenten Viskosität vorkommende Mischungsweg wird ferner nicht einer kinematisch, sondern einer dynamisch eingeführten Länge proportional angenommen.

2. DIE MITTLEREN PRODUKTE UND DIE KORRELATIONSGLEICHUNG.

Das mittlere Geschwindigkeitsprodukt m . Ordnung an n Punkten im Raum ist definiert als der Mittelwert des Produktes aus m beliebigen Geschwindigkeitskomponenten verteilt über n Punkte im Raum ($m \geq n$). Da jede der drei Geschwindigkeitskomponenten in ihre drei Orthogonalkomponenten parallel zu den Achsenrichtungen zerlegbar ist, läßt sich das allgemeine Produkt darstellen als eine Linearkombination der Komponenten des Tensors:

$$Q_{ij}^{(m)}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m; t) = \overline{u_i(\pi_1, t) u_j(\pi_2, t) \dots u_p(\pi_m, t)} \quad 2.1$$

(Von den m Ortsvektoren $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ auf der rechten Seite der Gleichung sind nur n verschieden.)

Neben den mittleren Produkten zwischen Geschwindigkeitskomponenten lassen sich ebenso mittlere Produkte zwischen Drucken, Geschwindigkeitsgradienten usw. an verschiedenen Punkten definieren. Von diesen Produkten kommt jedoch im folgenden nur der Tensor

$$u_i(\pi_1) \frac{\partial p(\pi_2)}{\partial x_{2j}}$$

vor, der wegen der Isotropie des Feldes, die wir hier voraussetzen, verschwindet (siehe unten).

Zu einer vollständigen statistischen Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes, d.h. zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten aller denkbaren Geschwindigkeitsverteilungen, sind nach der Wahrscheinlichkeitstheorie sämtliche mittleren Produkte vom Typus 2.1 notwendig (H.Cramer (7)). Wegen der analytischen Schwierigkeiten, die sich bei einer Behandlung der höheren Produkte ergeben, sind jedoch bisher nur die beiden einfachsten Produkte untersucht worden:

die zweifache Geschwindigkeitskorrelation

$$R_{ij}(\pi) = \overline{u_i(\pi_1) u_j(\pi_1 + \pi)} \quad 2.2$$

und die dreifache Geschwindigkeitskorrelation

$$S_{ijk}(\pi) = \overline{u_i(\pi_1) u_j(\pi_1) u_k(\pi_1 + \pi)} \quad (2.3)$$

Nach T. v. Karman und H.L. Howarth (11) läßt sich aus der Navier-Stokesschen Gleichung eine dynamische Beziehung zwischen den beiden Tensoren ableiten. Nach Multiplikation der i. Komponente der Navier-Stokesschen Gleichung an der Stelle π_1 mit $u_j(\pi_1 + \pi)$ und Mittelung erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i(\pi_1) u_j(\pi_1 + \pi)}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_{1k}} \left\{ \overline{u_i(\pi_1) u_k(\pi_1)} u_j(\pi_1 + \pi) \right\} \\ = -\frac{1}{\rho} \overline{u_j(\pi_1 + \pi) \frac{\partial p(\pi_1)}{\partial x_{1i}}} + \nu \overline{u_j(\pi_1 + \pi) \Delta_x u_i(\pi_1)} \end{aligned}$$

Eine ähnliche Gleichung erhält man durch Multiplikation der j. Komponente der Navier-Stokesschen Gleichung an der Stelle $(\pi_1 + \pi)$ mit $u_i(\pi_1)$:

$$\begin{aligned} \overline{u_i(\pi_1) \frac{\partial u_j(\pi_1 + \pi)}{\partial t}} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \overline{u_j(\pi_1 + \pi) u_k(\pi_1 + \pi)} \right\} u_i(\pi_1) \\ = -\frac{1}{\rho} \overline{u_i(\pi_1) \frac{\partial p(\pi_1 + \pi)}{\partial x_j}} + \nu \overline{u_i(\pi_1) \Delta u_j(\pi_1 + \pi)} \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert dann die Karman-Howarth'sche Tensorgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ij}(\pi, t) = T_{ij}(\pi, t) + 2\nu \Delta R_{ij}(\pi, t) \quad (2.4)$$

mit

$$T_{ij}(\pi, t) = 2 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} S_{ikj}(\pi, t) \quad (2.5)$$

Dabei wurden die aus der Homogenität und Isotropie folgenden Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{1i}} = - \frac{\partial}{\partial x_i}$$

und

$$\overline{u_i(u_j) u_k(u_l) u_m(u_n)} = - \overline{u_i(u_j + u) u_k(u_l + u) u_m(u_n)}$$

verwendet. Die in den beiden zu addierenden Gleichungen vorkommende Druck-Geschwindigkeitskorrelation verschwindet, da wegen der Isotropie $\overline{p(u_i) \overline{u_j(u_k + u)}} = \pi F(|u|)$ und die einzige singularitätenfreie Funktion, die der Kontinuitätsbedingung $\text{div}(\pi F(|u|)) = 0$ genügt, $F(|u|) \equiv 0$ ist.

Die Gleichung 2.4 demonstriert die in der Einleitung erwähnte Schwierigkeit, die stets bei einer statistischen Behandlung der Turbulenz in den dynamischen Gleichungen auftritt: die Anzahl der unbekannt Funktionen ist größer als die Anzahl der Bestimmungsgleichungen. Es läßt sich ohne Schwierigkeit eine weitere Tensorgleichung, die S_{ijk} enthält, aufstellen, aber es kommen dann Produkte 4. Ordnung darin vor, sodaß die Situation, die offenbar auf die verschiedenen Ordnungen der Glieder der Navier-Stokesschen Gleichung zurückzuführen ist, unverändert bleibt. Es ist also unmöglich, von den unendlich vielen, zur statistischen Beschreibung der Turbulenz notwendigen mittleren Produkten eine endliche Teilmenge, die von den anderen Produkten getrennt betrachtet werden kann, abzusondern.

Die Bedingungen der Isotropie und der Kontinuität sind in der Gleichung 2.4 noch nicht vollständig berücksichtigt worden. Es läßt sich aber mit Hilfe der Invariantentheorie und der Tensoranalysis zeigen, daß die Tensoren R_{ij} und S_{ijk} (bzw. T_{ij}) auf Grund dieser Bedingungen von nur je einer skalaren Funktion abhängen (T.v.Karman und H.L.Howarth (11), H.P.Robertson (15), S.Chandrasekhar (6)). Da die Bedingungen der Isotropie und der Kontinuität

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{Bmatrix} R_{ij} \\ \Delta R_{ij} \\ T_{ij} \end{Bmatrix} = 0$$

für jeden der drei Tensoren R_{ij} , ΔR_{ij} und T_{ij} dieselben Gleichungen ergeben, hängen die Tensoren alle in der gleichen Weise von

ihren charakteristischen skalaren Funktionen ab (die skalare Funktion für ΔR_{ij} ist dabei durch die von R_{ij} bestimmt), und die Tensorgleichung 2.4 reduziert sich somit auf eine einzige skalare Gleichung.

Obwohl die übliche Ableitung der skalaren Korrelationsgleichung aus der Tensorgleichung mathematisch sehr elegant ist, werden wir sie hier auf einem anderen Wege gewinnen, der die physikalische Bedeutung der Gleichung und der betreffenden Funktionen besser erkennen läßt.

Das allgemeine mittlere Produkt zweiter Ordnung an zwei Stellen im Raum ist:

$$R(a, b; r) = \overline{(\bar{u}(\pi_1), b)(\bar{u}(\pi_1 + r), a)} ;$$

das allgemeine mittlere Produkt dritter Ordnung an zwei Stellen im Raum ist:

$$S(a, b, c; r) = \overline{(\bar{u}(\pi_1), b)(\bar{u}(\pi_1), c)(\bar{u}(\pi_1 + r), a)}$$

wo a, b, c beliebige Einheitsvektoren sind.

Wegen der Homogenität und der Isotropie des Turbulenzfeldes kann das Koordinatensystem so gewählt werden, daß $\pi_1 = 0$, die z-Achse durch π geht und die x-z Ebene in der π - π Ebene liegt. Die Ausdrücke R und S sind dann für beliebige a, b, c als Linearkombinationen der Produkte, in denen nur die Orthogonal-komponenten vorkommen, darstellbar. Von den 6 möglichen Kombinationen dieser Produkte sind für S, wie man sofort sieht, wegen der Isotropie nur zwei von Null verschieden:

$$u^2 f(r) = \overline{u_z(0) u_z(\pi, z_0)} \quad 2.6$$

$$u^2 g(r) = \overline{u_x(0) u_x(\pi, z_0)} \quad 2.7$$

mit $u^2 = \overline{u_x^2} = \overline{u_y^2} = \overline{u_z^2}$, $z_0 =$ Einheitsvektor der z-Achse
(Die anderen Produkte wechseln das Vorzeichen bei einer Spiegelung der x- oder y- Achse.)

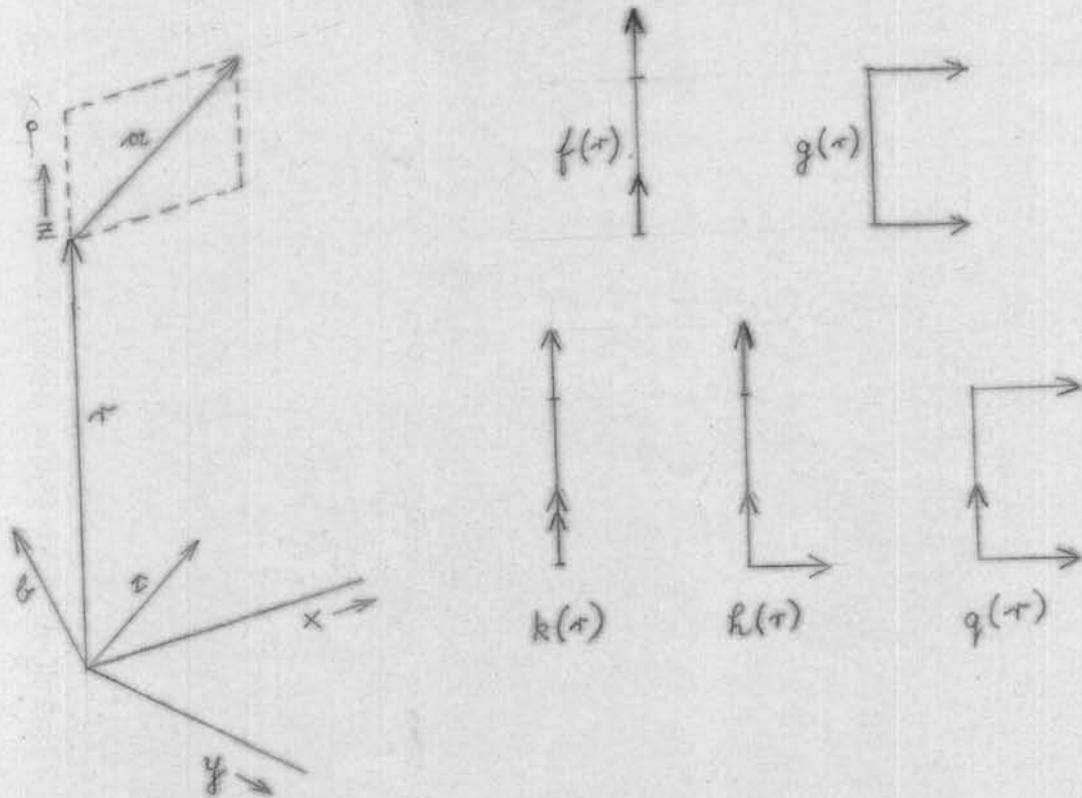


Abb. 1

Ebenso sind von den 12 möglichen Kombinationen für S nur vier von Null verschieden, und von diesen sind wiederum zwei gleich:

$$u^3 k(r) = \overline{u_z^2(0) u_z(\tau, z_0)} \quad 2.8$$

$$u^3 h(r) = \overline{u_x^2(0) u_z(\tau, z_0)} = \overline{u_y^2(0) u_z(\tau, z_0)} \quad 2.9$$

$$u^3 q(r) = \overline{u_x(0) u_z(0) u_x(\tau, z_0)} \quad 2.10$$

Die Kontinuitätsbedingung liefert eine Gleichung zwischen \$f(r)\$ und \$g(r)\$ und zwei Gleichungen zwischen \$k(r)\$, \$h(r)\$ und \$q(r)\$, so daß die allgemeinen Produkte R und S von nur je einer Funktion abhängen. Die Gleichungen lassen sich alle nach einer Methode gewinnen, die L. Prandtl zur Ableitung der Beziehung zwischen den zweifachen Korrelationen \$f(r)\$ und \$g(r)\$ angegeben hat (24).

Wir betrachten die Kontinuitätsbedingung für eine Halbkugel:

$$-\int_{\bar{K}_1} (\bar{u} d\sigma) = \int_{\bar{K}_2} (\bar{u} d\sigma)$$

(Bezeichnung: siehe Abb.2)

Nach Multiplikation der Gleichung mit der x-Komponente u_{ix} der Geschwindigkeit \bar{u}_1 im Mittelpunkt, wobei auf der rechten Seite der Gleichung $u_{ix} = u_{ir} \cos \vartheta - u_{i\vartheta} \sin \vartheta$ gesetzt wird, bilden wir den Mittelwert:

$$u^2 \int_0^r 2\pi r g(r) dr = u^2 2\pi r^2 \int_0^{\pi/2} f(r) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = u^2 \pi r^2 f(r)$$

Differentiation nach r ergibt dann:

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} f'(r) \quad 2.11$$

$$\left(f' = \frac{\partial}{\partial r} f \right)$$

Eine Beziehung zwischen $k(r)$ und $h(r)$ ist noch einfacher zu gewinnen. Die Kontinuitätsbedingung für eine Vollkugel lautet:

$$\int (\bar{u} d\sigma) = 0$$

(Kugeloberfläche)

Die Gleichung multiplizieren wir mit $\bar{u}_i^2 = u_{ir}^2 + u_{i\vartheta}^2 + u_{i\varphi}^2$ und bilden den Mittelwert:

$$u^3 \int_0^r \{ k(r) + 2h(r) \} d\Omega = 0$$

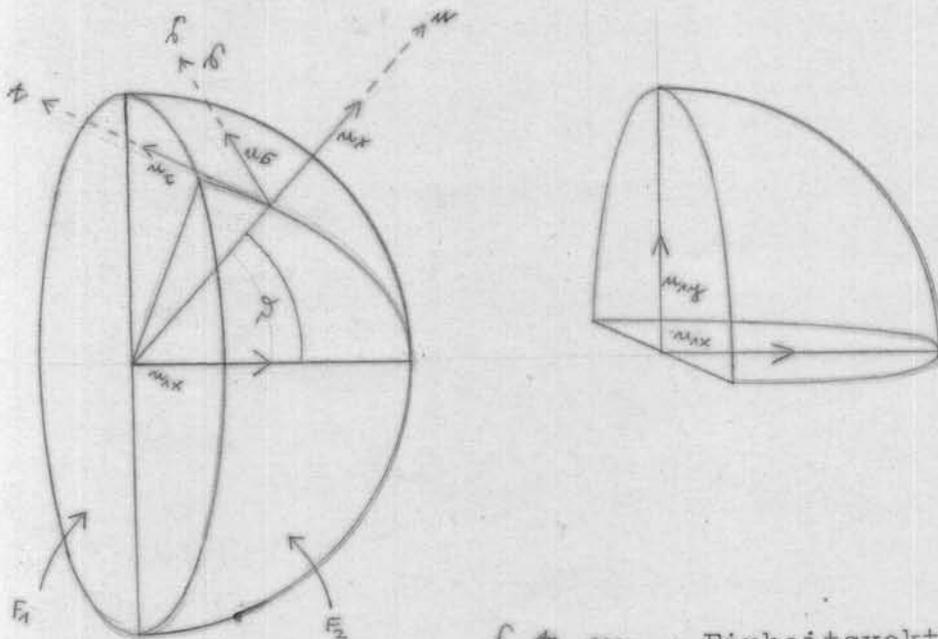
oder:

$$h(r) = -\frac{1}{2} k(r) \quad 2.12$$

Schließlich läßt sich ganz analog eine Gleichung für $k(r)$ und $q(r)$ gewinnen durch Multiplikation der Kontinuitätsgleichung für eine Viertelkugel mit $u_{ix} \cdot u_{iy}$, Mittelung und dann Differentiation nach r. Unter Berücksichtigung der Gleichung 2.12 ergibt sich:

$$q(r) = \frac{1}{2}k(r) + \frac{r}{4}k'(r)$$

2.13



δ, φ, ν : Einheitsvektoren

$d\Omega$ = Oberflächenelement

$d\sigma = \nu d\Omega$

dV = Volumenelement

Abb. 2

Als charakteristische Funktionen der allgemeinen Produkte R und S werden gewöhnlich $f(r)$ und $k(r)$ gewählt. Nach Gleichungen 2.6 und 2.8 ist $f(0)=1$ und $k(0)=0$. Da $f(r)$ bei einer Spiegelung der z-Achse in Abb. 1 unverändert bleibt, während $k(r)$ das Vorzeichen wechselt, ist $f(r)$ eine gerade und $k(r)$ eine ungerade Funktion von r . Die Entwicklung von $k(r)$ um $r=0$ beginnt mit der dritten Potenz, denn es ist

$$u^3 k'_0 = \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_z^2(\pi_1) u_z(\pi_1 + z z_0)}_{z=0} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_z^3} = 0$$

$$\left(k'_0 = \left(\frac{\partial k}{\partial r} \right)_{r=0} \right)$$

Die Abhängigkeit der Tensoren $R_{ij}(\pi)$ und $S_{ijk}(\pi)$ von ihren charakteristischen Funktionen können wir, obwohl wir sie später nicht verwenden werden, ohne Schwierigkeit gewinnen, indem wir das Koordinatensystem der Tensoren (Ortskoordinate: x_i) auf das Koordinatensystem in Abb. 1 (Ortskoordinate: \tilde{x}_i) transformieren. Es sei $(a_{\nu\mu})$ die orthogonale Transformationsmatrix. Für die zweifache Korrelation gilt dann:

$$R_{ij}(\pi) = \overline{u_i u_j(\pi)} = \sum_{\nu, \mu} a_{i\nu} a_{j\mu} \overline{\tilde{u}_\nu \tilde{u}_\mu(\tilde{\pi})}$$

$$= u^2 \left\{ a_{i3} a_{j3} f(r) + (a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2}) g(r) \right\}$$

$$= u^2 \left\{ \sum_{\nu} a_{i\nu} a_{j\nu} g(r) + (f(r) - g(r)) a_{i3} a_{j3} \right\}$$

oder:

$$R_{ij}(\pi) = u^2 \left\{ \left(f + \frac{r}{2} f' \right) \delta_{ij} - \frac{r}{2} f' \frac{x_i x_j}{r^2} \right\} \quad 2.14$$

Ebense erhalten wir für die dreifache Korrelation den Ausdruck:

$$S_{ijk}(\pi) = u^3 \left\{ \frac{k - rk'}{2r^3} x_i x_j x_k + \frac{2k + rk'}{4r} (x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ik}) - \frac{k}{2r} x_i \delta_{ij} \right\} \quad 2.15$$

Die dynamische Korrelationsgleichung zwischen $f(r)$ und $k(r)$ können wir nun unmittelbar durch Anwendung der Impulsgleichung auf eine Kugel vom Radius r gewinnen. Die Impulsgleichung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\bar{K}(\text{Kugel})} \bar{w} dV = - \int_{\sigma(\text{Oberfläche})} p \cdot d\sigma - \int_{\sigma} \bar{w}(\bar{u} d\sigma) \quad (1)$$

$$+ \int_{\sigma} \left\{ 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} u_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial \sigma} + \frac{\partial u_\sigma}{\partial r} \right) u_\sigma + \left(\frac{\partial u_r}{\partial \sigma} + \frac{\partial u_\sigma}{\partial r} \right) u_\sigma \right\} d\Omega$$

Nach skalarer Multiplikation mit \bar{u} , und Mittelung erhalten wir:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\bar{K}} (\bar{u} \bar{u}_1) dV = - \int_{\sigma} (\bar{u} \bar{u}_1) u_r d\Omega$$

$$+ \int_{\sigma} \left\{ 2 u_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_{r\sigma} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \sigma} + \frac{\partial u_\sigma}{\partial r} \right) + u_{\sigma r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \sigma} + \frac{\partial u_\sigma}{\partial r} \right) \right\} d\Omega$$

Sämtliche Produkte dieser Gleichung lassen sich durch die Funktionen $f(r)$ und $k(r)$ ausdrücken:

$$\overline{(\bar{u} \bar{u}_1)} = u^2 (f + 2g) = u^2 (3f + r f')$$

$$\overline{(\bar{u} \bar{u}_1) u_r} = u^3 (-k - 2g) = u^3 \left(-2k - \frac{r}{2} k' \right)$$

$$\overline{u_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r}} = u^2 f''$$

$$\overline{u_{r\sigma} \frac{\partial u_\sigma}{\partial r}} = \overline{u_{\sigma r} \frac{\partial u_r}{\partial \sigma}} = u^2 g' = u^2 \left(\frac{3}{2} f' + \frac{r}{2} f'' \right)$$

$$\overline{u_{r\sigma} \frac{\partial u_r}{\partial \sigma}} = \overline{u_{\sigma r} \frac{\partial u_r}{\partial \sigma}} = u^2 \left(\frac{f-g}{r} \right) = -\frac{u^2}{2} f'$$

Nach der Substitution läßt sich das Integral über das Volumen ausführen, und nach Division durch $2\pi r^2$ erhalten wir die Karman-Howarthsche Korrelationsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^2 f) = u^3 \left(k' + \frac{4k}{r} \right) + 2\nu u^2 \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right) \quad 2.16$$

Die Größen dieser Gleichung haben alle anschauliche physikalische Bedeutung. Aus der Berechnung der linken Seite der Impulsgleichung ergibt sich eine alternative, kugelsymmetrische Definition der longitudinalen Korrelation: es ist $3u^2 f(r)$ der Mittelwert des Produkts aus der Mittelpunktsgeschwindigkeit einer Kugel vom Radius r mit deren mittleren Geschwindigkeit. $f(r)$ ist somit ein Maß für die räumlichen Geschwindigkeitsschwankungen innerhalb einer Kugel vom Radius r und gibt an, in wie weit der Kugel eine einheitliche Geschwindigkeit zugeschrieben werden kann. Das erste Glied der rechten Seite der Gleichung stellt die Änderung der Größe $u^2 f(r)$ durch Vermischung der Flüssigkeit innerhalb der Kugel mit der Flüssigkeit ausserhalb dar. Das zweite Glied gibt den Einfluß der Zähigkeitskräfte an der Oberfläche der Kugel wieder. Wir werden eine ausführlichere **Besprechung** dieser Gleichung jedoch auf den letzten Abschnitt verschieben und zunächst eine zweite Gleichung betrachten, die sich zwar durch Differentiation und Division durch r direkt aus der Gleichung 2.16 ableiten läßt, aber auch unabhängig von 2.16 von physikalischem Interesse ist.

Es ist naheliegend, neben der Impulsgleichung der Kugel vom Radius r auch die Drehimpulsgleichung zu untersuchen. Nach Multiplikation der Drehimpulsgleichung mit der Rotation ($\text{rot } \vec{u}$), der Geschwindigkeit im Mittelpunkt der Kugel und Mittelung ergibt sich nach ähnlichen Rechnungen wie bei der Ableitung der Gleichung 2.16:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2 f'}{r} \right) = u^3 \left(\frac{k''}{r} + \frac{4k'}{r^2} - \frac{4k}{r^3} \right) + 2\nu u^2 \left(\frac{1}{r} f''' + \frac{4}{r^2} f'' - \frac{4}{r^3} f' \right) \quad 2.17$$

Die Größen dieser Gleichung haben ähnliche physikalische Bedeutung wie die Größen der Gleichung 2.16. Es ist die bis auf den Faktor $-15/4$ in der linken Seite der Gleichung vorkommende Größe

$-\frac{15}{4} \frac{u^2}{r} f'$ der Mittelwert der Drehung im Mittelpunkt der Kugel ($\frac{1}{2}(\text{rot } \vec{n})$) multipliziert mit deren mittleren Drehung (definiert als die Drehgeschwindigkeit der starren Kugel vom gleichen Radius mit dem gleichen Drehimpuls). Die Funktion liefert offenbar die gleiche Beschreibung der Größe und Intensität der "Flüssigkeitswirbel" eines Turbulenzfeldes wie $3u^2 f(r)$ für die "Flüssigkeitsballen". Die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung geben dann ganz analog zu Gleichung 2.16 den Einfluß der Konvektion von Drehimpuls zwischen Kugel und Umgebung bzw. die Bremsung der Drehung durch die Reibungsspannung an der Oberfläche der Kugel wieder. Eine ausführlichere Besprechung auch dieser Größen verschieben wir auf den letzten Abschnitt.

Aus beiden Gleichungen 2.16 und 2.17 ergeben sich für $r = 0$ wichtige spezielle Gleichungen. 2.16 geht über in die Dissipationsgleichung:

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} = 10\nu u^2 f_0'' f_0''' = -\frac{10\nu u^2}{\lambda^2} \quad 2.18$$

wo

$$\frac{1}{\lambda^2} = -f_0'' = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{r=0}$$

λ wird als die Taylorsche Dissipationslänge oder als das Mikromaß der Turbulenz bezeichnet (G.I. Taylor (19) hat die Gleichung 2.18 unabhängig von 2.16 direkt aus der Dissipationsgleichung $\frac{3}{2} \frac{du^2}{dt} = -\nu (\text{rot } \vec{n})^2$ abgeleitet). Neben dem Mikromaß λ kommen gelegentlich auch die longitudinalen und transversalen Integralmaße L_1 und L_2 vor, mit

$$L_1 = \int_0^{\infty} f(r) dr \quad 2.20$$

$$L_2 = \int_0^{\infty} g(r) dr \quad 2.21$$

Nach 2.11 ist $L_1 = \dots$ 2.22

Aus 2.17 ergibt sich für $r = 0$ die Änderung der für die Energiedissipation verantwortlichen mittleren Rotation des Turbulenzfeldes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u'^2}{\lambda^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{(\text{rot } \vec{u})^2}}{15} = -\frac{7}{3} u' k_0''' - \sqrt{\frac{14}{3}} u' f_0'' \quad (2.23)$$

Aus Messungen der Korrelationen $f(r)$ und $k(r)$ ist festgestellt worden, daß $f_0'' > 0$ und $k_0''' < 0$ (G.K. Batchelor und A.A. Townsend (2)). Nach Gleichung 2.23 wird also die mittlere Rotation des Turbulenzfeldes durch die Zähigkeit gedämpft und durch den Vermischungsvorgang vergrößert. Auch auf diesen Sachverhalt werden wir im letzten Abschnitt zurückkommen.

3. DIE SPEKTRALGLEICHUNG UND DIE HEISENBERGSCHES FORMEL FÜR DIE AUSTAUSCHFUNKTION.

Neben den mittleren Produkten wird zur Analyse des Turbulenzfeldes häufig eine andere Gruppe von Funktionen verwendet, die sich aus der Fourierzerlegung des Geschwindigkeitsfeldes ergeben (G.I. Taylor (21), W. Heisenberg (8), G.K. Batchelor (1), J. Kampé de Fériet (10)). Die Spektralfunktionen können durch Fouriertransformationen aus den Korrelationen gewonnen werden und umgekehrt; sie sind also eine äquivalente Darstellungsform der Turbulenz. Wir können hier nur einige der Zusammenhänge zwischen Spektralfunktionen und Korrelationen zitieren und weisen für eine ausführlichere Darstellung auf z.B. Batchelors Buch "The Theory of Homogeneous Turbulence" (1).

Die Fourierzerlegung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes innerhalb eines großen Würfels der Kantenlänge L sei:

$$\bar{u}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \bar{u}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{r}\mathbf{k})} \quad 3.1$$

wo $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \{n_1, n_2, n_3\}$, $n_i = \text{ganze Zahl}$

und $\bar{u}_{-\mathbf{k}} = \bar{u}_{\mathbf{k}}^* = \text{konj. kompl. von } \bar{u}_{\mathbf{k}}$.

Die mittlere Energie des Würfels setzt sich dann additiv aus den Energien der einzelnen ^{Wellen} Wellen zusammen:

$$\frac{3}{2} \bar{u}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\bar{u}_{\mathbf{k}}|^2 \quad 3.2$$

In der Grenze $L \rightarrow \infty$ läßt sich die Summe in 3.2 durch ein Integral ersetzen:

$$\frac{3}{2} \bar{u}^2 = \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{k}) dk_x dk_y dk_z \quad 3.3$$

$F(k)$ ist die Energiedichte der Turbulenz im Wellenzahlenraum und hängt wegen der Isotropie des Feldes nur von $|\vec{k}| = k$ ab. Häufiger als die auf die Koordinaten k_x, k_y, k_z bezogene Energiedichte $F(k)$ wird die auf $|\vec{k}|$ bezogene Energiedichte $E(k)$ verwendet, nämlich:

$$\frac{3}{2} \overline{u'^2} = \int_0^{\infty} E(k) dk \quad 3.4$$

$$E(k) = 4\pi k^2 F(k) \quad 3.5$$

Die Fourier-Darstellung der Korrelationstensoren bekommt man, indem für jede Geschwindigkeitskomponente der Tensoren die Fourier-Reihe 3.1 eingesetzt wird. Wir werden uns im folgenden aber nur für die skalare Korrelation $f(r)$ interessieren, die durch die Spektrumsfunktion $E(k)$ darstellbar ist:

$$\overline{u'^2} f(r) = \int_0^{\infty} \frac{2E(k)}{k^2 r^2} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) dk \quad 3.6$$

Die Umkehrung von 3.6 lautet:

$$E(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{u'^2} f(r) k r^2 \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) dr \quad 3.7$$

Für das Energiespektrum $E(k)$ kann ebenso wie für die Korrelation $f(r)$ eine dynamische Gleichung aufgestellt werden (W. Heisenberg (8), G.K. Batchelor (1)). Sie lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k) = T(k) - 2\nu k^2 E(k) \quad 3.8$$

mit

$$T(k) = 2\pi i k^2 \sum_{\vec{k}'} \left\{ \left(\vec{k} \cdot \vec{u}_{\vec{k}'} \right) \left(\vec{u}_{\vec{k}-\vec{k}'} \cdot \vec{u}_{\vec{k}} \right) - \left(\vec{k} \cdot \vec{u}_{\vec{k}'} \right) \left(\vec{u}_{\vec{k}-\vec{k}'} \cdot \vec{u}_{-\vec{k}} \right) \right\} \quad 3.9$$

Die Gleichung 3.8 stellt die Energiebilanz der Wellenzahlen vom Betrage k dar. Die Änderung der Energie setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: den Zähigkeitsverlusten $2\nu k^2 E(k)$, die nur von

der Energie der Wellenzahlen vom Betrage k selber abhängen und die wegen des Gewichtungsfaktors k^2 besonders bei höheren Wellenzahlen eine Rolle spielen, und dem Energieaustausch $T(k)$, der die Trägheitswechselwirkungen der Wellen untereinander beschreibt. Die Austauschfunktion $T(k)$ der Gleichung 3.8 entspricht der dreifachen Korrelation $u^3_k(r)$ der Korrelationsgleichung, und es sind auch $T(k)$ und $u^3_k(r)$, ebenso wie $E(k)$ und $u^2_f(r)$, durch Transformationsgleichungen gegenseitig bestimmt. Wir werden aber die Gleichungen, die etwas komplizierter sind als 3.6 und 3.7, im folgenden nicht verwenden.

Die Gleichung 3.8 ist im allgemeinen ebensowenig lösbar wie die Korrelationsgleichung, denn die Funktion $T(k)$, die von den unbekannt Phasen der Geschwindigkeitsamplituden in Gleichung 3.9 abhängt, läßt sich nicht unmittelbar durch die Energieverteilung $E(k)$ ausdrücken. Zur Formulierung von Austauschhypothese hat man jedoch bisher die Spektralgleichung wegen ihrer unmittelbar verständlichen physikalischen Bedeutung der Korrelationsgleichung vorgezogen. Sie wird dabei gewöhnlich in Form ihres Integrals nach k angewandt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k) dk = -S(k) - S_E(k) \quad 310$$

wo

$$S(k) = - \int_0^k T(k') dk', \quad S_E(k) = 2\nu \int_0^k k'^2 E(k') dk'$$

$S_E(k)$ ist der aus dem Spektrumsgebiet $k' < k$ in Wärme abfließende Dissipationsstrom, während $S(k)$ den durch die Trägheitswechselwirkungen erzeugten Strom vom Gebiet $k' < k$ zum Gebiet $k' > k$ darstellt. Der Energiestrom fließt in Richtung der größeren Wellenzahlen des Spektrums. Die Einwirkung der Trägheitskräfte kann man also als einen "Kaskadenprozeß", bei dem die größeren Wirbel ständig in kleinere zerfallen, auffassen. Da der Energiefluß nach den größeren Wellenzahlen das Integral

$$2.2 \int_0^\infty k^2 E(k) dk = (\text{rot } \bar{u})^2 / \dots$$

vergrößert, ist dieses nur ein anderer Ausdruck für das nach der Ableitung der Gleichung 2.23 erwähnte experimentelle Ergebnis, daß die Trägheitswechselwirkungen die Tendenz haben, die Rotation des Feldes zu vergrößern.

Für diesen Kaskadenprozeß sind verschiedene Erklärungen vorgeschlagen worden, von denen die überzeugendste wohl die von C.F. v. Weizsäcker (23) und W. Heisenberg (8) ist. Zur Erklärung des Energiestroms übernehmen v. Weizsäcker und Heisenberg die Vorstellungen der Prandtl'schen Mischungswegtheorie und beschreiben die Trägheitswechselwirkungen durch eine zusätzliche turbulente Viskosität ν_t , die auf die größeren Wirbel infolge des Impulsaustauschs mit den kleineren Wirbeln einwirkt. Heisenberg setzt demnach für die Änderung der Energie der Wellen mit Wellenzahlen kleiner als k :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k') dk' = -(\nu + \nu_t) \int_0^k 2k'^2 E(k') dk' dt \quad 3.11$$

also

$$S(k) = 2\nu_t \int_0^k k'^2 E(k') dk' \quad 3.12$$

Für diese von den Wellen mit Wellenzahlen $k' > k$ abhängige turbulente Viskosität ν_t führt Heisenberg als einfachsten Ausdruck von richtiger Dimension ein:

$$\nu_t = \alpha \int_k^\infty \frac{E(k')}{k'} dk' \quad (\alpha = \text{const.}) \quad 3.13$$

Aus den Gleichungen 3.11 und 3.13 ist dann das Abklingen des Spektrums bei vorgegebener Anfangsverteilung berechenbar. Heisenberg betrachtet die Lösung für zwei Spezialfälle: für den Fall sehr hoher Reynoldsscher Zahlen, bei denen das Dissipationsgebiet des Spektrums im Gleichgewicht ist, und ferner für den Fall, daß die statistischen Funktionen während des Abklingens nur eine Ähnlichkeitstransformation erfahren.

Im ersten Falle kann die Lösung nicht im einzelnen nachgeprüft werden, da die vorausgesetzten hohen Reynoldsschen Zahlen bei den Messungen in Windkanälen nicht realisierbar sind. Jedoch erscheinen zwei Merkmale der Lösung unwahrscheinlich:

1) Die Lösung geht bei hohen Wellenzahlen asymptotisch in das Potenzgesetz $E(k) = k^{-7}$ über. Ein solches Potenzgesetz für $k \rightarrow \infty$ würde aber nach 3.6 bedeuten, daß die höheren Ableitungen von $f(r)$ bei $r = 0$ - und damit die Mittelwerte der höheren räumlichen Ableitungen der Geschwindigkeit - unendlich würden. Bei den gemessenen Spektren findet man aber immer, daß $E(k)$ bei hohen k schneller als nach einem Potenzgesetz abklingt, da $\frac{d \log E(k)}{d \log k}$ monoton abnimmt, und zwar bis auf gemessene Werte unterhalb -10 (R.W. Stewart und A.A. Townsend (18)).

2) Für den von dem ersten Koeffizienten der Entwicklung von $k(r)$ abhängigen Schiefefaktor

$$S = -\lambda^3 k_0''' \quad 3.14$$

ergibt die Heisenbergsche Lösung einen Wert, der um den Faktor drei höher liegt, als man bei mittleren Reynoldsschen Zahlen gemessen hat (Abb. 10.. Die eingezeichneten theoretischen Werte beziehen sich nicht auf die Heisenbergsche Theorie). Bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen, wo das Spektrum in erster Näherung nur durch die Zähigkeitskräfte bestimmt ist und daher exakt angegeben werden kann, bekommt man für S sogar einen Wert, der über hundert mal höher als die Meßwerte in Abb. 10 liegt. Wenn auch S bisher weder bei sehr hohen noch bei sehr niedrigen Reynoldsschen Zahlen gemessen worden ist, scheinen diese theoretischen Ergebnisse wegen der geringen Variation von S in dem Reynoldszahlenbereich der Windkanalmessungen unwahrscheinlich.

Die Heisenbergsche Aehnlichkeitslösung des Spektrums ist von S.Chandrasekhar (5), I.Proudman (14) und J.C.Rotta (16) (in einer von der Heisenbergschen Arbeit (9) unabhängig erschienenen Veröffentlichung) für einige Reynoldssche Zahlen numerisch berechnet worden. Zum besseren Vergleich mit der Erfahrung hat

Proudman die theoretischen Spektralfunktionen auf die Korrelationen $f(r)$ und $k(r)$ transformiert. Abb. 3 und 4 zeigen als typisches Beispiel den Grad der Uebereinstimmung zwischen den theoretischen Kurven und den Meßwerten, wenn für \mathcal{R} bei den verschiedenen Reynoldsschen Zahlen eine Schwankung zwischen den Werten 0,4 und 0,5 zugelassen wird. Es kann aber aus diesen Kurven wenig auf den Heisenbergschen Ansatz für $S(k)$ selber geschlossen werden, da, wie sich später herausstellte, die vorausgesetzte Aehnlichkeit der statistischen Funktionen nur sehr grob erfüllt ist (R.W.Stewart und A.A.Townsend (18)). In Abb. 5 und 6 sind die von Stewart und Townsend im Windkanal gemessenen Funktionen $f(r)$ und $k(r)$ für mehrere Gitterabstände (also verschiedene Abklingungszeiten) dimensionslos aufgetragen. Man sieht, daß die Funktionen nicht zusammenfallen, wie sie es im Falle der Aehnlichkeit tun müßten. Ein ausführlicherer Vergleich der Heisenbergschen Theorie mit dem Experiment ist in Proudmans Arbeit (14) zu finden, aus der die meisten der obigen Ergebnisse zitiert sind.

Im Hinblick auf den nächsten Abschnitt wollen wir noch kurz auf das Abklingungsgesetz für die Gesamtenergie eingehen. Aus der Aehnlichkeit der statistischen Funktionen läßt sich unabhängig von jeder Annahme über die Form der Trägheitswechselwirkungen auf dimensionsanalytischem Wege (wie hier nicht gezeigt werden kann) folgern, daß die Reynoldssche Zahl der Turbulenz, definiert z.B. als $R_\lambda = u'\lambda/v$, während des Abklingens konstant bleibt.

Aus

$$R_\lambda = \text{const.} \quad 3.15$$

ergibt sich dann aus 2.18 das Abklingungsgesetz

$$u'^2 = \text{const. } v/(t - t_0) \quad 3.16$$

$$\lambda^2 = 10v(t - t_0) \quad 3.17$$

Obwohl die Aehnlichkeitsannahme eine grobe Approximation ist, zeigt sich, daß das Abklingungsgesetz 3.16 bei den verschieden-

5
sten Reynoldsschen Zahlen in der ersten Periode des Abklingens in guter Näherung erfüllt ist (G.K.Batchelor und A.A.Townsend (3)).

4. DIE DREIFACHE KORRELATION ALS MASS FÜR DEN IMPULSAUSTAUSCH.

Bei der obigen Besprechung der Heisenbergschen Theorie wurde gezeigt, daß sie zwar im großen und ganzen zu richtigen Ergebnissen führt, aber in verschiedenen Punkten noch unbefriedigend ist. Wir werden nun sehen, daß diese Unstimmigkeiten der Heisenbergschen Theorie verschwinden, wenn wir das der Theorie zugrundeliegende Bild des Austauschvorganges nicht durch die Wellen des Spektrums, sondern durch eine andere - von dem Spektrum zunächst unabhängige - Definition der Geschwindigkeitsschwankungen einer gewissen Turbulenzstufe beschreiben.

Die Vorstellung einer auf die größeren Geschwindigkeitsschwankungen wirkenden zusätzlichen turbulenten Viskosität, die durch die Impulsübertragung der kleineren Schwankungen zustande kommt, bezieht sich auf einen lokalen Vorgang. Es erscheint daher richtiger zur Beschreibung dieses Vorgangs zuerst eine lokale Unterscheidung zwischen der Bewegung im großen und den kleineren Schwankungen zu treffen und dann durch Mittelung über den Raum eine Aussage für das gesamte Turbulenzfeld zu bekommen, als von vornherein die vom gesamten Turbulenzfeld abhängigen Wellen des Spektrums heranzuziehen. Man gelangt auf diesem Wege zu einer Darstellung des Austauschvorganges durch die Korrelation $f(r)$, die ja auch als Mittelwert einer lokalen Eigenschaft des Turbulenzfeldes definiert ist. Den Ausdruck, der sich dabei für die dreifache Korrelation $k(r)$ ergibt, werden wir dann unabhängig von dem Begriff der Schwankungen verschiedener Turbulenzstufen auf einem

anderen, etwas befriedigenderen Wege direkt aus unserer Ableitung der Korrelationsgleichung in Abschnitt 2 gewinnen. Außer durch diese Unterscheidung zwischen großen und kleinen Wirbeln werden wir später auch insofern von der Heisenbergschen Theorie abweichen, als wir den Mischungsweg der kleinen Schwankungen nicht einer kinematisch, sondern einer dynamisch definierten Länge proportional setzen werden.

Wir bezeichnen zunächst an einem Ort \mathcal{M}_0 des Turbulenzfeldes zur Zeit t als die "Geschwindigkeit der Schwankungen größer als r " die mittlere Geschwindigkeit $\mathcal{U}(r, \mathcal{M}_0, t)$ der Flüssigkeitskugel vom Radius r mit Mittelpunkt in \mathcal{M}_0 . Die Bezeichnung große oder kleine Geschwindigkeitsschwankung bezieht sich hier wie im folgenden nicht auf die Größe der Geschwindigkeit selber, sondern auf die räumliche Ausdehnung der Schwankung. Die Energie dieser mittleren Bewegung der Kugel ist $\frac{1}{2} \overline{\mathcal{U}^2(r, \mathcal{M}_0, t)}$, sodaß wir als die Energie der Schwankungen größer als r den räumlichen Mittelwert $\frac{1}{2} \overline{\mathcal{U}^2(r, t)}$ definieren können. Die Energie der Schwankungen kleiner als r ist dann

$$\frac{3}{2} \overline{u'^2} - \frac{1}{2} \overline{\mathcal{U}^2}$$

Wir können den Mittelwert $\frac{1}{2} \overline{\mathcal{U}^2(r, t)}$ durch das Energiespektrum $E(k)$ ausdrücken: Aus 3.1 berechnet man

$$\mathcal{U}(r, \mathcal{M}_0, t) = \sum_{\mathbf{k}} \overline{u_{\mathbf{k}}} \frac{3}{k^2 r^2} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) e^{i(\mathcal{M}_0 \cdot \mathbf{k})} \quad 4.2$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{1}{2} \overline{\mathcal{U}^2(r, t)} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{|M_{\mathbf{k}}|^2}{2} \left\{ \frac{3}{k^2 r^2} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) \right\}^2$$

oder:

$$\frac{1}{2} \overline{\mathcal{U}^2(r, t)} = \int_0^{\infty} S^2(kr) dk \quad 4.3$$

mit

$$q(x) = \frac{3}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \quad 4.4$$

Durch Multiplikation von 4.2 mit $\bar{u}(r_0, t)$ und Mittelung bestätigen wir die bereits in Abschnitt 3 zitierte Formel für $u'^2 f(r)$:

$$\frac{3}{2} u'^2 f(r) = \int_0^{\infty} q(kr) E(k) dk$$

Wenn wir nun die Funktion $q(x)$ um den Faktor $1/\sqrt{2}$ längs der Abszissenachse zusammenziehen, sodaß die Krümmung der entstehenden Funktion $q(\sqrt{2}x)$ mit der von $q^2(x)$ im Punkt $x = 0$ übereinstimmt, so zeigt Abb. 17, daß die beiden Funktionen nicht nur im parabolischen, sondern auch im größten Teil des Bereichs, wo sie wesentlich von Null verschieden sind, gut übereinstimmen. Wir können also für nicht zu große r den Gewichtsfaktor $q^2(kr)$ in 4.3 durch $q(kr\sqrt{2})$ ersetzen und bekommen:

$$\frac{1}{2} \overline{u^2(r, t)} = \frac{3}{2} u'^2 f(\sqrt{2}r, t) \quad 4.5$$

Die Energie der Schwankungen kleiner als r wird dann:

$$\frac{3}{2} u'^2 (1 - f(\sqrt{2}r, t))$$

Diese Approximation ist gut, solange nicht zu viel Energie in das Gebiet fällt, wo die Gewichtsfaktoren $q^2(x)$ und $q(x\sqrt{2})$ nicht mehr übereinstimmen, also etwa im Bereich $r < 3\lambda$.

Nach der v. Weizsäckerschen und Heisenbergschen Vorstellung läßt sich nun die Einwirkung der kleinen turbulenten Schwankungen auf die größeren als eine zusätzliche Viskosität auffassen, sodaß man nach der Korrelationsgleichung 2.16 schreiben kann:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ u'^2 f(r) \} = 2u'^2 (v + v_t) \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right) \quad 4.6$$

mit

$$v_t = \nu l \quad 4.7$$

wo v eine charakteristische Geschwindigkeit der Schwankungen kleiner als $r/\sqrt{2}$ ist, also z.B.

$$v = u' \sqrt{1-f}, \quad 4.8$$

während l den Mischungsweg der kleinen Schwankungen darstellt. Für die dreifache Korrelation $k(r)$ bekommen wir nach 2.16 und 4.6 die Gleichung:

$$\left(\left(k' + \frac{4}{r} k \right) \right) = \frac{2\sqrt{2}}{u'} \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right) \quad 4.9$$

Bevor wir auf die möglichen Ansätze für l eingehen, wollen wir noch die Gleichungen 4.6 - 4.9 unmittelbar aus der Korrelationsgleichung ableiten.

Es ist zunächst verständlich, daß die Korrelation zwischen der Geschwindigkeit \bar{w}_1 im Mittelpunkt der Kugel und dem Impulsfluß durch die Oberfläche einen negativen Wert hat, denn die herausfließende Flüssigkeit, die vor dem Verlassen der Kugel näher zum Mittelpunkt war, wird im allgemeinen eine größere Impulskomponente in Richtung \bar{w}_1 haben als die Flüssigkeit, die aus einem vom Mittelpunkt weiter entfernt liegendem Gebiet in die Kugel einfließt. Es kommt bei diesem Effekt offenbar nicht auf die absolute Geschwindigkeit, sondern nur auf die Geschwindigkeit relativ zu \bar{w}_1 an, wie wir auch rechnerisch direkt bestätigen können. Wenn wir die relative Geschwindigkeit $\bar{w} - \bar{w}_1$ mit \bar{w} bezeichnen, so folgt aus den Gleichungen 2.12 und 2.13 für die dreifachen Korrelationen $k(r)$, $h(r)$ und $q(r)$:

$$- \int_0^r \overline{(\bar{w}_1 \bar{w})} (\bar{w} d\sigma) = - \frac{1}{2} \int_0^r \overline{(\bar{w}_1 \bar{w})} (\bar{w} d\sigma) \quad 4.10$$

Die mit der Geschwindigkeit \bar{w}_r aus der Kugel (die sich jetzt mit der Mittelpunktsgeschwindigkeit \bar{w}_1 bewegt) herausgetragene Größe $(\bar{w}_1 \bar{w})$ hat den Mittelwert

$$\overline{(\bar{w}_1, \bar{w} - \bar{w}_1)} = u'^2 (f + 2g - 3) = u'^2 (3f + rf' - 3)$$

Da $(\overline{u_r v(r)})$ vom Radius abhängt, werden wir eine Korrelation zwischen $(\overline{u_r v})$ und der radialen Geschwindigkeit v_r erwarten, die wir in erster Näherung ausdrücken können als

$$\overline{(u_r v) v_r} = \left\{ \overline{(u_r v)} - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u_r v}) v_r \tau \right\} v_r = -\tau \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u_r v}) v_r^2, \quad 4.11$$

wo τ eine charakteristische Vermischungszeit ist. Mit

$$\overline{u_r^2} = \overline{(u_r - u_{cr})^2} = 2u^2(1-f(r))$$

erhalten wir also nach 4.10 und 4.11:

$$-\int_0^R \overline{(u_r v) v_r} v_r^2 dr = 4\pi r^2 \tau u^4 (1-f) (r f'' + 4f') f \quad 4.12$$

Die Korrelationsgleichung ergibt sich aus der mit der Mittelpunktsgeschwindigkeit der Kugel korrelierten Impulsgleichung, von der 4.12 den Beitrag der Trägheitskräfte wiedergibt, nach Division durch $2\pi r^3$ zu :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{u^2 f\} = 2u^2 (v + v_t) (f'' + \frac{4}{r} f')$$

mit

$$v_t = u^2 (1-f) \tau \quad 4.13$$

Das ist dasselbe Ergebnis wie oben, mit

$$l = v\tau$$

Bei dieser, etwas überzeugenderen Ableitung der Gleichung 4.6 haben wir keine Einschränkung ihres Gültigkeitsbereichs machen müssen, sodaß wir die Gleichung auch im Gebiet $r > 3\lambda$ anwenden können. (Bei sehr großen r erfüllt die Gleichung nicht die Loitsianskysche Bedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} kr^4 = 0$ (L.G. Loitsiansky (13)), denn $\lim_{r \rightarrow \infty} kr^4$ ist zwar endlich, aber $\neq 0$. In dem im folgenden betrachteten

r-Bereich kommen wir jedoch nicht über das Maximum von kr^4 hinaus, und es ist ohnehin fraglich, ob bei den Versuchen in Windkanälen die Annahme der Homogenität des Turbulenzfeldes bei noch größeren r infolge des Energiegradienten in Strahlrichtung zulässig ist.)

Unser Problem reduziert sich jetzt auf eine Bestimmung der Mischungsweglänge l oder der Vermischungszeit τ .

Als einfachsten Ansatz für die Mischungsweglänge kann man l proportional einer charakteristischen, kinematisch definierten Länge der für die turbulente Viskosität verantwortlichen Schwankungen annehmen. Wenn $u'^2(1-f(r))$ die Energie der Schwankungen kleiner als $r/\sqrt{2}$ ist, so ist $-\frac{3}{2} u'^2 f' \cdot dr$ die Energie der turbulenten Schwankungen zwischen $r/\sqrt{2}$ und $(r+dr)/\sqrt{2}$, sodaß wir für l den Ansatz

$$l = \eta \frac{\int_0^r -f' \cdot r \cdot dr}{\int_0^r -f' \cdot dr} = \eta \frac{\int_0^r f \cdot dr - f \cdot r}{(1-f)} \quad (4.15) \quad (\eta = \text{const.})$$

versuchen können. Für v_t und für $k(r)$ erhalten wir dann die Gleichungen:

$$v_t = \eta u' \frac{\int_0^r f \cdot dr - f \cdot r}{\sqrt{1-f}} \quad (4.16)$$

$$k' + \frac{4k}{r} = 2\eta \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right) \frac{\int_0^r f \cdot dr - f \cdot r}{\sqrt{1-f}} \quad (4.17)$$

Nach 4.16 ist v_t für kleine r proportional r^2 , also $k(r)$ proportional r^3 , wie es nach der exakten Beziehung $k_0' = 0$ (Abschnitt 2) auch sein muß, während man für große r das plausible Ergebnis $v_t = \eta u' \int_0^r f(\tau) d\tau = \eta u' L_1$ erhält.

Abb. 8 zeigt die aus den experimentellen Kurven a und e der longitudinalen Korrelationen in Abb. 5 nach 4.17 berechneten

Funktionen $k(r)$ mit $\eta = 0,25$ heben den Meßwerten. Die qualitative Uebereinstimmung ist nicht schlecht, die theoretischen Werte liegen aber bei kleinen r zu hoch. Am größten ist die Abweichung in dem kubischen Gebiet in der Nähe von $r = 0$. Der erste Koeffizient der Entwicklung von $k(r)$ berechnet sich nach 4.17 zu

$$\frac{1}{6} k_0''' = - \frac{10\sqrt{2}}{21} \frac{\eta}{\lambda^2}$$

also, mit $\eta = 0,25$:

$$S = -\lambda^3 k_0''' = 1,0$$

Gemessen wurde dagegen ein Wert zwischen 0,4 und 0,5.

Man könnte natürlich noch andere kinematische Ansätze für l versuchen, es ist aber unwahrscheinlich, daß das Ergebnis dadurch wesentlich geändert würde. Denn eine kinematische Definition der Mischungsweglänge ist eigentlich nur dann befriedigend, wenn die Zähigkeit vernachlässigbar ist. Da das hier nicht der Fall ist, wird man erwarten, daß die kleineren Schwankungen, bei denen die Zähigkeit eine größere Rolle spielt, einen im Vergleich zu ihrer charakteristischen Dimension (also l , definiert durch 4.15) kürzeren Mischungsweg haben als die größeren, wie es sich bei unserem Ansatz auch zeigt.

Eine bessere Uebereinstimmung mit dem Experiment bekommen wir jedoch wenn wir nicht vom Mischungsweg l , sondern von der Vermischungszeit τ ausgehen, die wir dynamisch definieren. Die dynamische Gleichung für die Energie $\frac{3}{2} u^2(1-f)$ der Schwankungen kleiner als $r/\sqrt{2}$ lautet nach 2.16 und 2.18:

$$\frac{\partial}{\partial t} u^2(1-f) = -u'^3 \left(k'' + \frac{4}{r} k \right) - 2\nu u^2 \left(\frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4}{r} f' \right) \quad 4.18$$

Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung stellt die Energiezunahme der kleinen Schwankungen durch die Wechselwirkung mit den großen Schwankungen der Energie $u'^2 f(r)$ dar, während das zweite Glied den Energieverlust der kleinen Schwankungen durch die

Zähigkeit und durch die Trägheitswechselwirkungen unter sich wiedergibt. Obwohl das zweite Glied ein reines Reibungsglied ist, enthält es ebenso wie das Reibungsglied der Dissipationsgleichung 2.18 auch den Einfluß der Trägheitskräfte, da diese eine Wanderung der Energie zu kleineren Schwankungen und dadurch eine erhöhte Dissipation durch die Zähigkeit bewirken. Als Folge der Trägheitswechselwirkungen mit den größeren Schwankungen und untereinander, sowie der Bremsung durch die Zähigkeitskräfte, werden sich nun die kleinen Turbulenzelemente vermischen und auflösen. Wir können also die Tendenz zur Auflösung der kleinen Turbulenzelemente durch die Summe der Beträge der beiden Glieder auf der rechten Seite der Gleichung 4.18 ausdrücken und bekommen dann für die Vermischungszeit τ :

$$\tau \tau_t = \frac{\delta}{2} \frac{u^2(1-f)u'(1+f)}{2\nu u^2(\frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4}{\lambda} f') - u^3(k' + \frac{4}{\lambda} k)} \quad (\delta = \text{const}) \quad 4.19$$

oder, nach Gleichung 4.9:

$$\tau \tau_t = \frac{\delta}{2} \frac{(1-f)}{\nu(\frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4}{\lambda} f') - \nu(f'' + \frac{4}{\lambda} f')(1-f)} \quad 4.20$$

Für ν_t erhalten wir also nach 4.13 die quadratische Gleichung:

$$\nu_t = \frac{\delta}{2} \frac{u^2(1-f)^2}{\nu(\frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4}{\lambda} f') - \nu_t(f'' + \frac{4}{\lambda} f')(1-f)} \quad 4.21$$

Bei kleinen r ist ν_t proportional r^2 , wie es für das kubische Verhalten von $k(r)$ sein muß, und bei großen r ist $\nu_t = \frac{\delta u^2 \lambda^2}{10\nu}$. Wenn wir die gesamte Energiedissipation als das Resultat von Trägheitskräften auffassen, also $\frac{\partial u'^2}{\partial t} = -\text{const.} \frac{u'^3}{L}$ schreiben, wo L eine charakteristische Länge dieser Trägheitskräfte ist (experimentell ist L ungefähr proportional $L_1 = \int_0^{\infty} f \cdot dr$), so können wir nach der Dissipationsgleichung 2.18 $\lambda^2/10\nu$ durch $\text{const.} L/u'$ ersetzen und erhalten für große r den plausiblen Ausdruck $\nu_t = \text{const.} u' L$.

Da zur Berechnung von v_t nach Gleichung 4.21 die Konstante γ bekannt sein muß, andererseits γ erst durch den Vergleich der theoretisch berechneten Kurve $k(r)$ mit der experimentellen bestimmt werden kann, gehen wir iterativ vor. In erster Näherung kann außerhalb des kubischen Bereichs von $k(r)$ das Glied $-\nu_t \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right)$ im Nenner von 4.21 vernachlässigt werden, sodaß γ nur als Faktor auftritt und approximativ bestimmt werden kann. Mit diesem γ können wir nun nach 4.21 v_t , und damit $k(r)$, genauer ausrechnen und dann γ neu ermitteln. Es genügt bereits dieser erste Iterationsschritt, um den Fehler soweit zu verringern, daß er unterhalb der durch die Messungenauigkeiten entstehenden Fehler fällt.

Die theoretisch berechneten $k(r)$ -Kurven sind in Abb. 8 aufgetragen. Die Übereinstimmung mit den Meßwerten ist gut, wenn man berücksichtigt, daß der Abszissenmaßstab festgelegt ist; mit der einzigen frei verfügbaren Konstanten γ , die in erster Linie den Ordinatenmaßstab bestimmt, wird eine ganze Schar von Kurven richtig wiedergegeben, soweit man es nach der ungenauen experimentellen Differentiation an $f(r)$ in Gleichung 4.9 überhaupt erwarten kann.

In Abb. 9 sind zwei weitere theoretische $k(r)$ -Kurven neben den Meßpunkten angegeben, und zwar bei Gitter-Reynoldszahlen $R_M = UM/\nu$ ($U =$ Strahlgeschwindigkeit, $M =$ Maschenweite des Gitters), die um die Faktoren 4 bzw. 8 größer sind als in Abb. 8. Auch hier ist die Übereinstimmung gut, wenn man für γ Werte von $\gamma = 0,27$ bzw. $0,25$ einsetzt, anstelle von $\gamma = 0,37$ bei der kleinen Gitter-Reynoldszahl in Abb. 8. In unserem Ansatz 4.19 für τ ist zwar γ eigentlich als eine absolute Konstante eingeführt worden; eine schwache Abhängigkeit von der Gitter-Reynoldszahl ist jedoch wegen der qualitativen Form des Ansatzes nicht überraschend.

Die theoretischen Kurven der Abb. 8 und 9 sind aus den gemessenen Korrelationen $f(r)$ nur für r außerhalb des kubischen Gebiets mit einiger Genauigkeit zu bestimmen. Zum Nachprüfen der theoretischen Korrelationen bei kleinen r vergleichen wir daher am besten direkt die theoretischen und gemessenen ersten Koeffizienten $k_0'''/6$ der Entwicklung von $k(r)$. Die Größe k_0''' , die nach 3.14 durch den Schiefefaktor S ausgedrückt werden kann, ist bei

+ mehreren Gitter-Reynoldszahlen und Abständen gemessen worden (G.K. Batchelor und A.A. Townsend (2)), da sie nach der Rotationsgleichung 2.23 den wichtigen Einfluß der Trägheitskräfte auf die mittlere Rotation und damit die Dissipation des Turbulenzfeldes wiedergibt. Nach unserem Ansatz 4.9 und 4.21 bekommen wir für S die quadratische Gleichung

$$\frac{G}{R_\lambda} = \frac{45}{49} S - \frac{S}{2} \quad 4.22$$

mit

$$G = \lambda^4 f_0 \bar{N}, \quad R_\lambda = \frac{u' \lambda}{\nu}$$

Da sämtliche in 4.22 vorkommenden Größen gemessen worden sind, könnten wir die Gleichung unmittelbar durch Einsetzen der Meßwerte nachprüfen. Der Vergleich wird jedoch etwas übersichtlicher, wenn neben der Gleichung 4.22 gleichzeitig auch das experimentelle Abklingungsgesetz 3.16 ($u'^2 \sim 1/t$, $\lambda^2 = 10\nu t$, $R_\lambda = \text{const.}$) an Hand der gemessenen Größen S, G und R_λ nachgeprüft wird.

Nach Multiplikation mit $3\lambda^3/7u'^3$ lautet die Rotationsgleichung 2.23:

$$\frac{3}{7} \frac{\lambda^3}{u'^3} \frac{\partial(u'^2)}{\partial t (\lambda^2)} = S - 2 \frac{G}{R_\lambda} \quad 4.23$$

Unter Berücksichtigung des Abklingungsgesetzes 3.16 ergibt sich daraus (Batchelor und Townsend (2)):

$$\frac{30}{7} \frac{\nu}{R_\lambda} = \frac{G}{R_\lambda} - \frac{S}{2} \quad 4.24$$

Aus 4.22 und 4.24 können wir nun G und S in Abhängigkeit von R_λ auflösen. Da R_λ während des Abklingens konstant bleibt, werden auch G und S Konstanten sein, in Uebereinstimmung mit dem experimentellen Befund. Die Abbildungen 10 und 11 zeigen die theoretischen und experimentellen Werte von G und S in Abhängigkeit von R_λ , bzw., was auf dasselbe hinauskommt, in Abhängigkeit von

R_M . Wiederum ist die Uebereinstimmung befriedigend, wenn berücksichtigt wird, daß weder S noch G mit großer absoluter Genauigkeit gemessen werden können.

Es ist noch interessant, die theoretischen Kurven in die beiden Bereiche sehr kleiner und sehr großer R_λ außerhalb des Meßbereichs zu verfolgen. Da nach der exakten Lösung für $f(r, t)$ bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen $\lim_{R_\lambda \rightarrow 0} G(R_\lambda) = 3$ (G.K. Batchelor und A.A. Townsend (4)), muß nach 4.22

$$\lim_{R_\lambda \rightarrow 0} S(R_\lambda) = 0 \quad 4.25$$

Bei sehr großen R_λ dagegen ist nach der Kolmogoroffschen Theorie (12) das Dissipationsgebiet des Spektrums im Gleichgewicht, d.h., die linke Seite $\frac{1}{15} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \omega)^2$ der Rotationsgleichung 2.23 ist gegen die Glieder der rechten Seite vernachlässigbar, sodaß die Gleichung 4.23 übergeht in:

$$S = \frac{2G}{R_\lambda}$$

Aus 4.22 erhalten wir dann die beiden Gleichungen

$$S = \sqrt{\frac{8.45}{49}} \approx 0,5 \quad 4.26$$

$$G = \frac{R_\lambda}{2} \sqrt{\frac{8.45}{49}} \approx \frac{R_\lambda}{4} \quad 4.27$$

wenn $\gamma \approx 0,25$ auch bei diesen sehr hohen Reynoldsschen Zahlen angenommen wird. Der Schiefefaktor S ändert sich also nicht mehr wesentlich jenseits des Reynoldszahlenbereichs der Windkanalmessungen, während sich $G(R_\lambda)$ asymptotisch der Geraden $G = R_\lambda/4$ nähert. Es sei noch erwähnt, daß wir das asymptotische Verhalten von S und G bei sehr kleinen und sehr großen R_λ unabhängig von dem Abklingungsgesetz 3.16 abgeleitet haben, das ja nur bei mittleren Reynoldsschen Zahlen mit Sicherheit gilt.

Man hat bisher bei einer physikalischen Deutung der dreifachen Korrelation $k(r)$ nur den ersten Koeffizienten der Entwicklung betrachtet. Wie man leicht bestätigen kann, läßt sich dieser folgendermaßen schreiben:

$$\frac{k_0'''}{b} = - \frac{(\text{rot } \bar{u})^2 \frac{\partial u_s}{\partial s}}{105 u^3} \quad 4.28$$

wo u_s die Komponente von \bar{u} und ds das Linienelement in Richtung $\text{rot } \bar{u}$ ist. Die Vergrößerung der Rotation durch die Trägheitskräfte ist demnach mit einer mittleren Dehnung der Rotationslinien verbunden. G.I. Taylor sah die Zunahme der Rotation als Resultat dieser Dehnung an, die er durch die Diffusion, - d.h. die Tendenz zweier Flüssigkeitsteilchen, sich voneinander zu entfernen - erklärte. Nun ist aber die Diffusion ein Vorgang, der sich erst nach einer gewissen Zeitspanne auswirken kann, während es in einem bestimmten Augenblick gleich wahrscheinlich ist, daß sich zwei beliebige Flüssigkeitsteilchen nähern oder von einander entfernen. Insbesondere gilt, wenn u_σ die Komponente von \bar{u} und $d\sigma$ das Linienelement einer beliebigen festen Raumrichtung ist, $\frac{\partial u_\sigma}{\partial \sigma} = 0$, wie sofort aus der Kontinuität und der Isotropie folgt. Die Diffusion an sich kann also das Wesentliche der Gleichung 4.28 nicht erklären, nämlich die Kopplung zwischen den Richtungen der Rotation und der Ausdehnung.

Nach unserem Ansatz ist die Zunahme der Rotation durch die Trägheitskräfte als ein Ergebnis der turbulenten Viskosität zu verstehen. Wir erkennen das am besten an der Drehimpulsgleichung 2.17 für eine Flüssigkeitskugel vom Radius r , die wir aus der Impulsgleichung 2.16 durch Differentiation gewinnen. Aus 4.6 erhalten wir dann die Drehimpulsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{r} f \right) = 2(\nu + \nu_e) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right) + 2 \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial t} \quad 4.29$$

Die beiden von der turbulenten Viskosität ν_t abhängigen Glieder der rechten Seite von 4.29 können wir nun folgendermaßen deuten: Im ersten Glied tritt ν_t neben ν wie eine zusätzliche Viskosität auf und läßt sich ganz analog der Bedeutung von ν_t in der Impulsgleichung erklären. Das zweite von der Ableitung $\frac{\partial}{\partial r} \nu_t$ abhängige Glied ist dagegen negativ und führt daher zu einer Zunahme der Korrelation $-\frac{15}{4} \frac{u'^2}{r} f'$ zwischen der mittleren Drehgeschwindigkeit der Kugel und der Drehgeschwindigkeit im Mittelpunkt (die wir in der gleichen Näherung wie bei der Definition der Energie der Schwankungen einer gewissen Turbulenzstufe dem mittleren Quadrat der Drehgeschwindigkeit einer Kugel vom Radius $r/\sqrt{2}$ gleichsetzen können). Diese Zunahme der mittleren Drehgeschwindigkeit ist verständlich, da durch die von den Trägheitskräften bewirkte Viskosität ν_t die Energie von den größeren zu den kleineren Turbulenzelementen wandert, wodurch alle von den kleinen Turbulenzelementen abhängigen Größen der Dimension Geschwindigkeit / Länge zunehmen müssen. Die Abhängigkeit von der Ableitung von ν_t ist dann auch einleuchtend, da eine Verschiebung der Energie, im Gegensatz zu dem Verlust als Ergebnis der eigentlichen Viskosität ν , nur dann zustande kommt, wenn ν_t mit dem Radius zunimmt.

5. ZUSAMMENFASSUNG.

Zusammenfassend geben wir einen kurzen Ueberblick der oben dargestellten Theorie der Trägheitskräfte der isotropen Turbulenz. Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Karman-Howarth'sche Korrelationsgleichung, die mit Hilfe der Impulsgleichung einer Flüssigkeitskugel physikalisch anschaulich gedeutet wird. Insbesondere können dann die Trägheitskräfte durch den Impulsaustausch zwischen einem kugelförmigen Gebiet und dessen Umgebung beschrieben werden. Dieser Austausch läßt sich in Uebereinstimmung mit der Heisenbergschen Theorie durch eine bei den größeren Turbulenzelementen zusätzlich auftretende turbulente Viskosität ausdrücken, die auf die Impulsdiffusion infolge der kleineren Turbulenzelemente zurückzuführen ist. Die Einteilung der Energie nach größeren und kleineren Turbulenzelementen geschieht jedoch nicht, wie in der Heisenbergschen Theorie, mittels des Energiespektrums, sondern auf Grund einer lokalen Unterscheidung zwischen den Geschwindigkeitsschwankungen verschiedener räumlicher Abmessung. Der Ausdruck für die turbulente Viskosität wird aus der charakteristischen Geschwindigkeit und der charakteristischen Vermischungszeit der kleinen Turbulenzelemente gewonnen, wobei die Vermischungszeit nach einem dimensionsanalytischen Ansatz aus der dynamischen Gleichung der Energieänderung der kleinen Wirbel ermittelt wird.

Die theoretisch berechneten dreifachen Korrelationen stimmen bei den verschiedensten Reynoldsschen Zahlen mit den gemessenen gut überein. Da man bereits nachgeprüft hat (R.W. Stewart (17)), daß die gemessenen drei- und zweifachen Korrelationen innerhalb der Meßgenauigkeit der Karman-Howarth'schen Korrelationsgleichung genügen und die theoretischen dreifachen Korrelationen innerhalb der Meßgenauigkeit ihrerseits mit den experimentellen übereinstimmen, können wir schließen, daß durch die obige Beschreibung der Trägheitskräfte das dynamische Verhalten der isotropen Turbulenz richtig wiedergegeben wird. Insbesondere wurde direkt bestätigt, daß das experimentelle Abklingungsgesetz 3.16 mit der Theorie in Uebereinstimmung steht, ohne das irgendwelche

Aehnlichkeitshypothesen eingeführt werden mußten. Es ist auch im allgemeinen nach der obigen Darstellung keine Aehnlichkeit der Turbulenz zu erwarten, da das Abklingen der Turbulenz, d.h. der Abfall der Gesamtenergie und die Aenderung der Korrelationen, allein durch die zufällige Energieverteilung im Anfangszustand bestimmt ist. Bezüglich des Zusammenhangs zwischen dem Abklingungsgesetz 3.16 für $R_\lambda = \text{const.}$ und der Aehnlichkeit läßt sich leicht nachweisen, daß auch nach unserem Ansatz für die Trägheitskräfte das Abklingungsgesetz 3.16 nur dann exakt gelten kann, wenn die Turbulenz ähnlich bleibt. Wir müssen daraus folgern, daß das Abklingungsgesetz zwar eine gute Approximation ist, aber infolge der Aehnlichkeitsabweichungen der größeren Turbulenzelemente nicht exakt gelten kann. Tatsächlich findet man auch die größten Abweichungen von dem Abklingungsgesetz 3.16 an den Stellen, wo die Korrelationen ihre Form am schnellsten verändern, wie aus einem Vergleich des Verlaufs von R_λ und von $f(r/\lambda)_{r/\lambda = 2}$ (entnommen aus Abb. 5) in Abb. 12 zu erkennen ist. Nach dem Abklingungsgesetz 3.16 müßte nämlich R_λ , im Falle der Aehnlichkeit $f(r/\lambda)_{r/\lambda = 2}$ konstant sein.

LITERATUR.

1. Batchelor, G.K.: The Theory of Homogenous Turbulence, Camb. Univ. Press, 1953.
2. Batchelor, G.K. and Townsend, A.A.: Decay of vorticity in isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc. Lond., A, Bd.190, S.534 (1947).
3. Batchelor, G.K. and Townsend, A.A.: Decay of isotropic turbulence in the initial period, Proc. Roy. Soc. Lond., A, Bd.,193, S.539 (1948).
4. Batchelor, G.K. and Townsend, A.A.: Decay of turbulence in the final period, Proc. Roy. Soc. Lond., A, Bd.194, S.527 (1948).
5. Chandrasekhar, S.: On Heisenberg's elementary theory of isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc. Lond., A, Bd.200, S.20 (1949).
6. Chandrasekhar, S.: Some aspects of the statistical theory of isotropic turbulence, Proc. Symp. Appl. Math., Bd.4 (1953).
7. Cramer, H.: Mathematical methods in statistics, Princetown University Press (1951).
8. Heisenberg, W.: Zur statistischen Theorie der Turbulenz, Z.f.Phys., Bd.124, S.628 (1948).
9. Heisenberg, W.: On the theory of statistical and isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc. Lond., A, Bd.195, S.402 (1948).
10. Kampé de Fériet, J.: Le tenseur spectral de la turbulence homogène non isotrope dans un fluide incompressible, Proc. 7. Intern. Cong. Appl. Mech., S.4 (1948).
11. v.Kármán, T. and Howarth, H.: On the statistical theory of isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc. Lond., A, Bd.164, S.192 (1938).
12. Kolmogoroff, A.N.: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds' numbers, C.R. Acad. Sci. URSS, Bd.30, S.301 (1941).
13. Loitsiansky, L.G.: Some basic laws of isotropic turbulent flow, Rep. Cent. Aero. Hydrodyn. Inst. (Moskau), Nr.440 (1939). (Engl. Uebers.: Tech. Mem. N.A.C.A., Wash., Nr.1079).
14. Proudman, I.: A comparison of Heisenberg's spectrum of turbulence with experiment, Proc. Camb. Phil. Soc., Bd.47, S.158 (1951).
15. Robertson, H.P.: The invariant theory of isotropic turbulence, Proc. Camb. Phil. Soc., Bd36, S.209 (1940).
16. Rotta, J.C.: Neue Rechnungen zur statistischen isotropen Turbulenz, Z.a.M.M., Bd.29, S.12 (1949).
17. Stewart, R.W.: Triple velocity correlations in isotropic turbulence, Proc. Camb. Phil. Soc., Bd.47, S.146 (1951).

18. Stewart, R.W. and Townsend, A.A.: Similarity and self-preservation in isotropic turbulence, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., A, Bd.243, S.359 (1951).
19. Taylor, G.I.: The statistical theory of turbulence, Parts 1-4, Proc. Roy. Soc. Lond., A, Bd.151, S.421 (1935).
20. Taylor, G.I.: The statistical theory of turbulence, Part 5 Proc. Roy. Soc. Lond., A, Bd.156, S.307 (1936).
21. Taylor, G.I.: The spectrum of turbulence, Proc. Roy. Soc. Lond., A, Bd.164, S.476 (1938).
22. Tollmien, W.: Fortschritte der Turbulenzforschung (Z.B.), Z.a.M.M., Bd.33, S.200 (1953).
23. v.Weizsäcker, C.F.: Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen, Z.f.Phys., Bd.124, S.614 (1948).
24. Wieghardt, K.: Z.B. über Arbeiten zur statistischen Turbulenztheorie, Luftfahrtforschung, Bd.18, (1941).

Abb. 3

— : nach Heisenberg,
 $\alpha = 0,40; R_\lambda = 40,1$

× : gemessene Korrelation, $R_\lambda = 60$
 $R_\lambda = 40,1$ (17)
 (Stewart (17))

$M_\lambda =$ Maschenweite des Gitters

(nach Proudman (14))

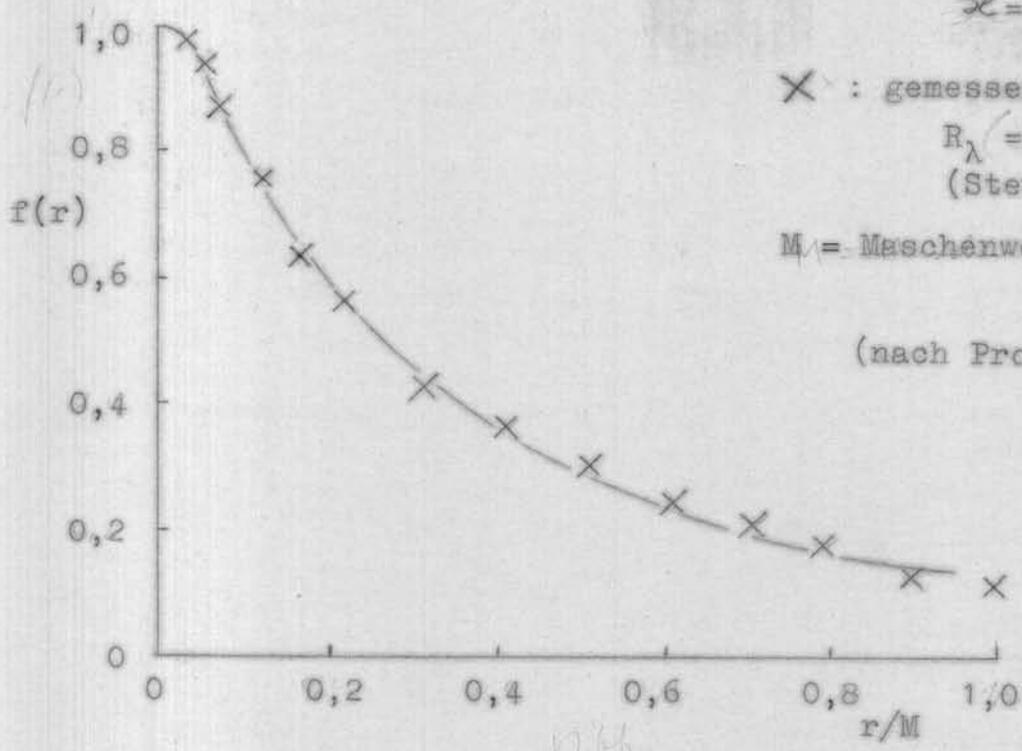
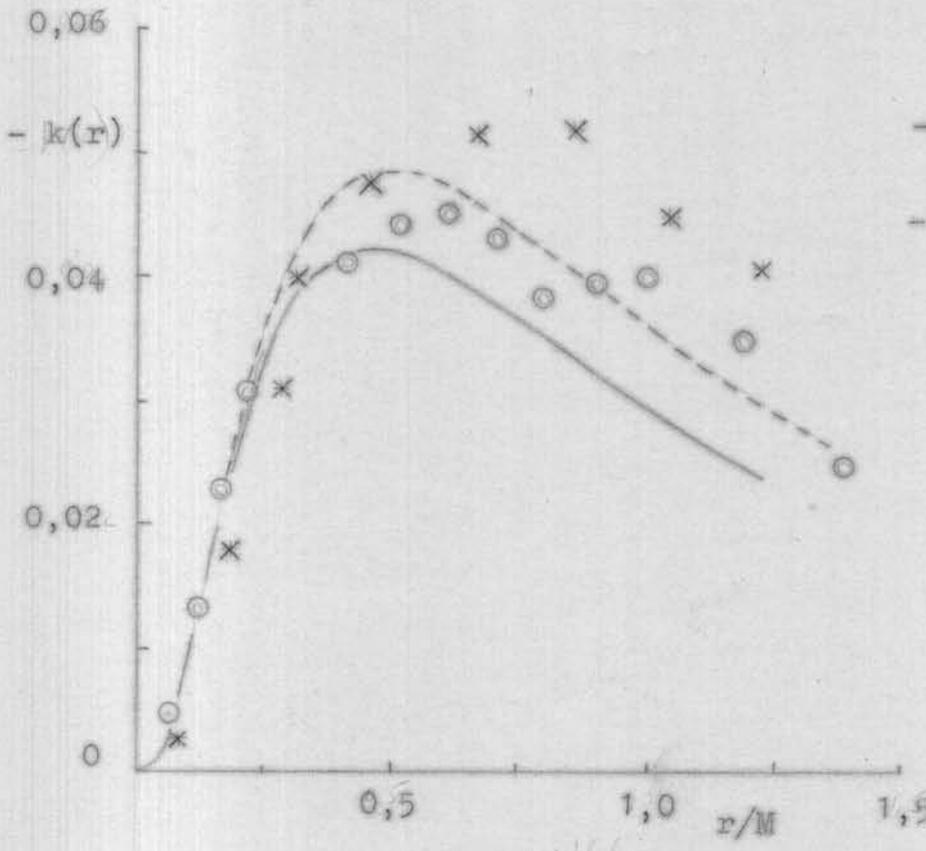


Abb. 3



○ : gemessen, $R_\lambda = 56,2$
 × : gemessen, $R_\lambda = 20,0$
 — : nach Heisenberg,
 $\alpha = 0,40; R_\lambda = 30,2$
 - - - : nach Heisenberg,
 $\alpha = 0,45; R_\lambda = 26,9$
 (aus Proudman (14)) $\lambda = 26,1$

Abb. 4

Abb. 5 u. 6 :

$R_M = 5300$

Abb. 5 u. 6 :

$R_M = \frac{x}{M} = 5300$

- a : $\frac{x}{M} = 20$
- b : $\frac{x}{M} = 30$
- c : $\frac{x}{M} = 60$
- d : $\frac{x}{M} = 90$
- e : $\frac{x}{M} = 120$

(Stewart u. Townsend (18))

(Stewart u. Townsend (18))

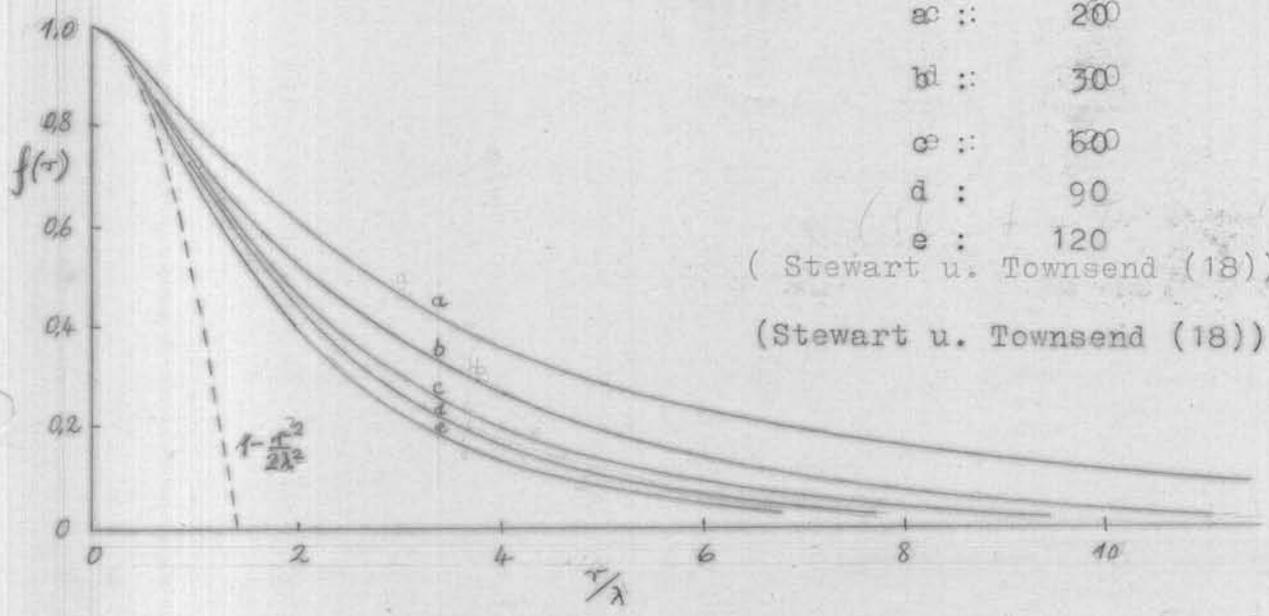


Abb. 5

- ($R_M = \frac{UM}{v}$)
- U = Strahlgeschwindigkeit
- M = Maschenweite des Gitters
- x = Gitterabstand
- x = Gitterabstand

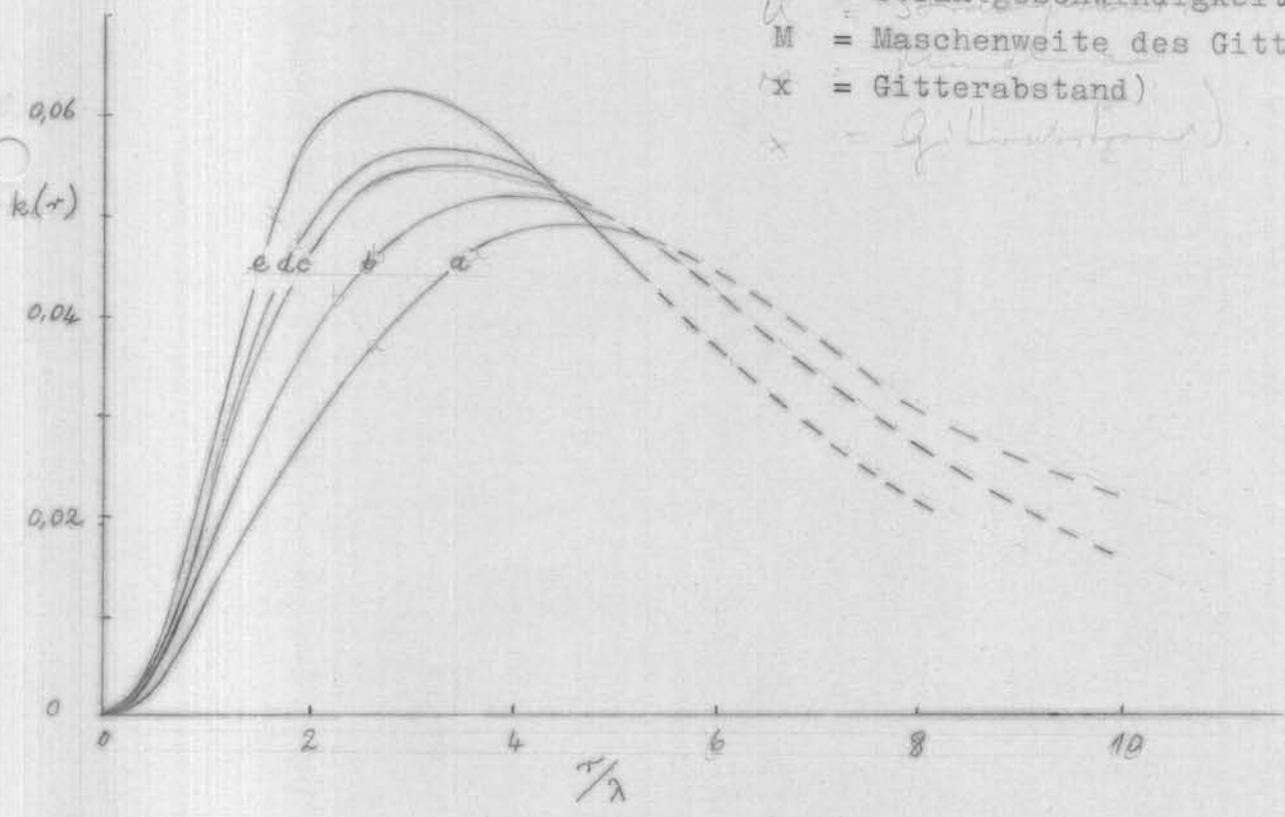


Abb. 6

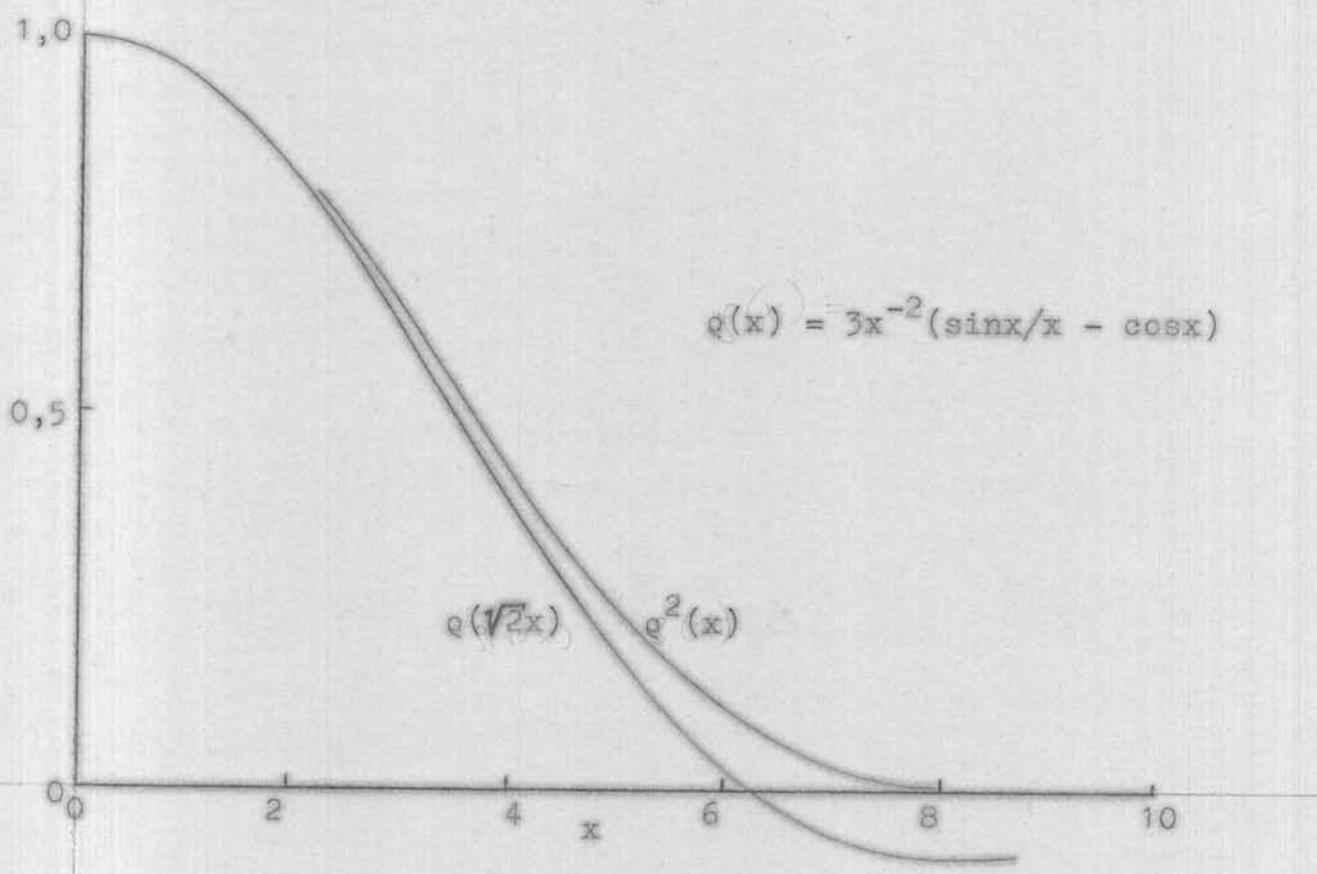


Abb. 7

$$R_M = 5300$$

~~$$R_M = 5300$$~~

$x/M = 20$	$x/M = 120$
$M = 20$	$M = 120$
X	o

gemessen :
 theoretisch nach kinematischem
 Ansatz für die Mischungsweg-
 länge l ($\eta = 0,25$) :
 theoretisch nach dynamischem
 Ansatz für die Vermischungs-
 zeit τ ($\gamma = 0,37$) :

(1) X (2) o
 (3) (4)

(Messwerte aus Stewart u. Townsend (18))

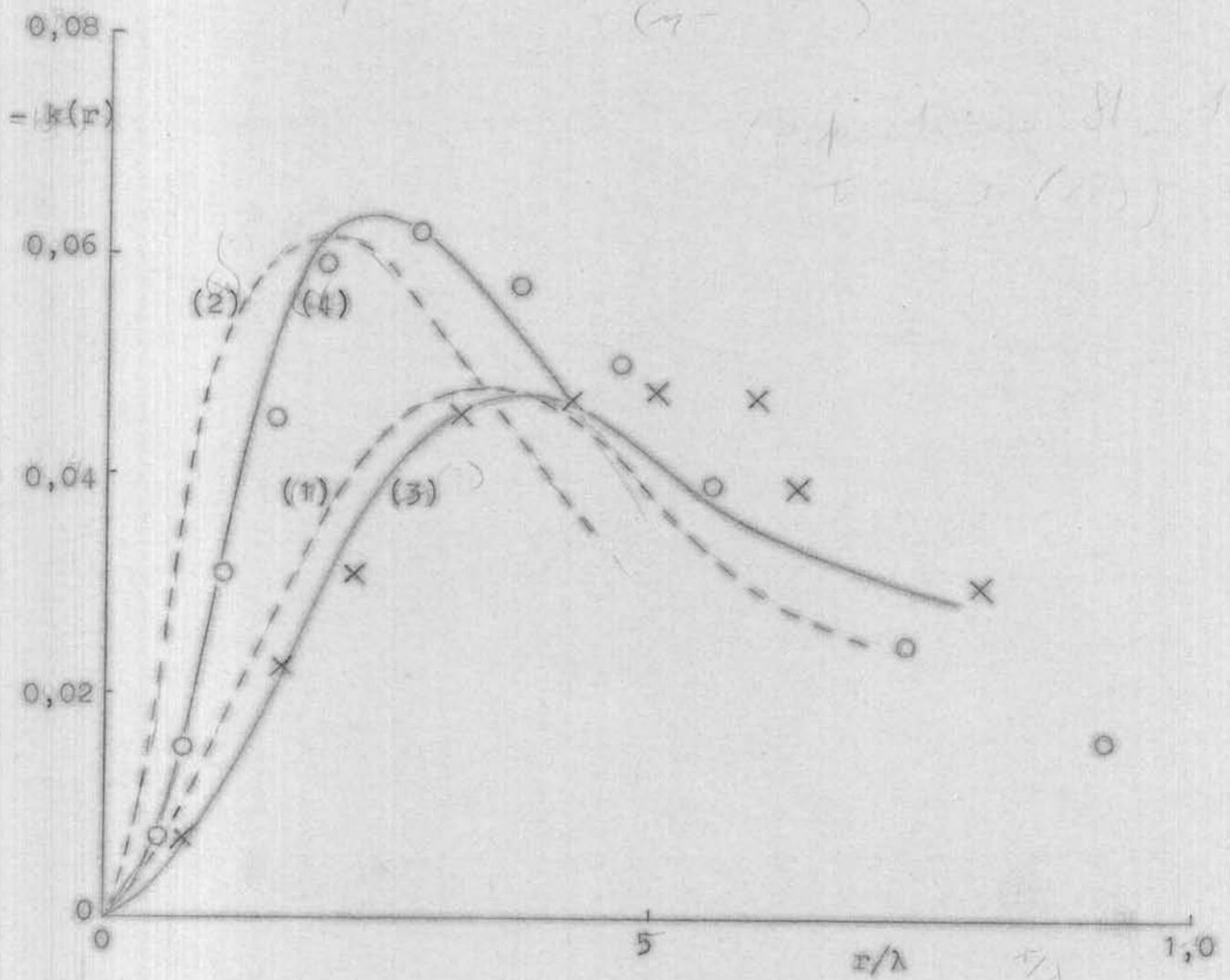


Abb. 8

Theoretische dreifache Korrelation $k(r)$ nach
 dynamischem Ansatz für die Vermischungszeit τ .

$x/M = 30$

- | | | |
|--|---|---------------|
| $\pi \circ$: gemessen | } | $R_M = 21200$ |
| (1) : theoretisch
($\gamma = 0,27$) | | |
| \times : gemessen | } | $R_M = 42400$ |
| (2) : theoretisch
($\gamma = 0,25$) | | |

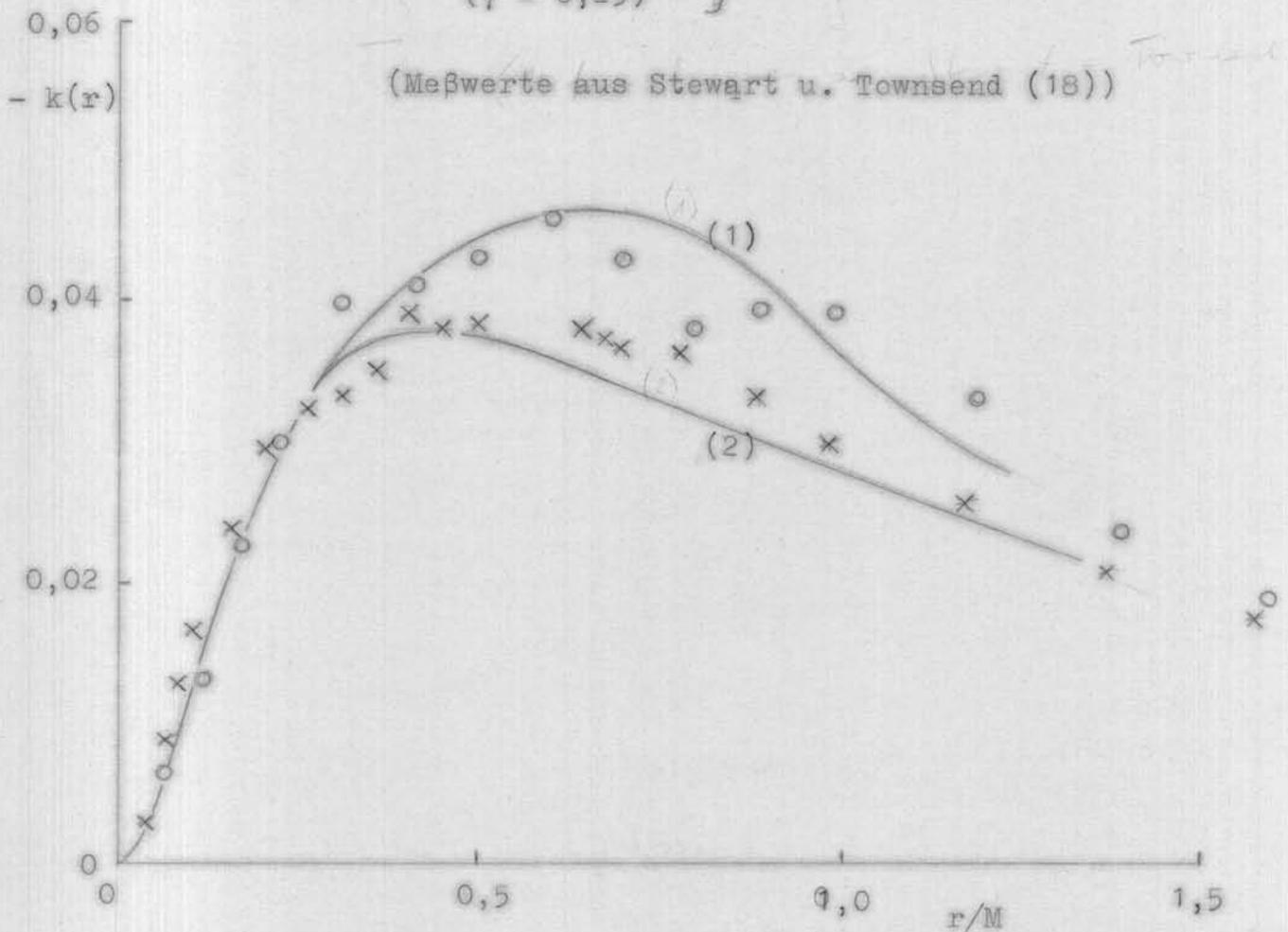


Abb. 9

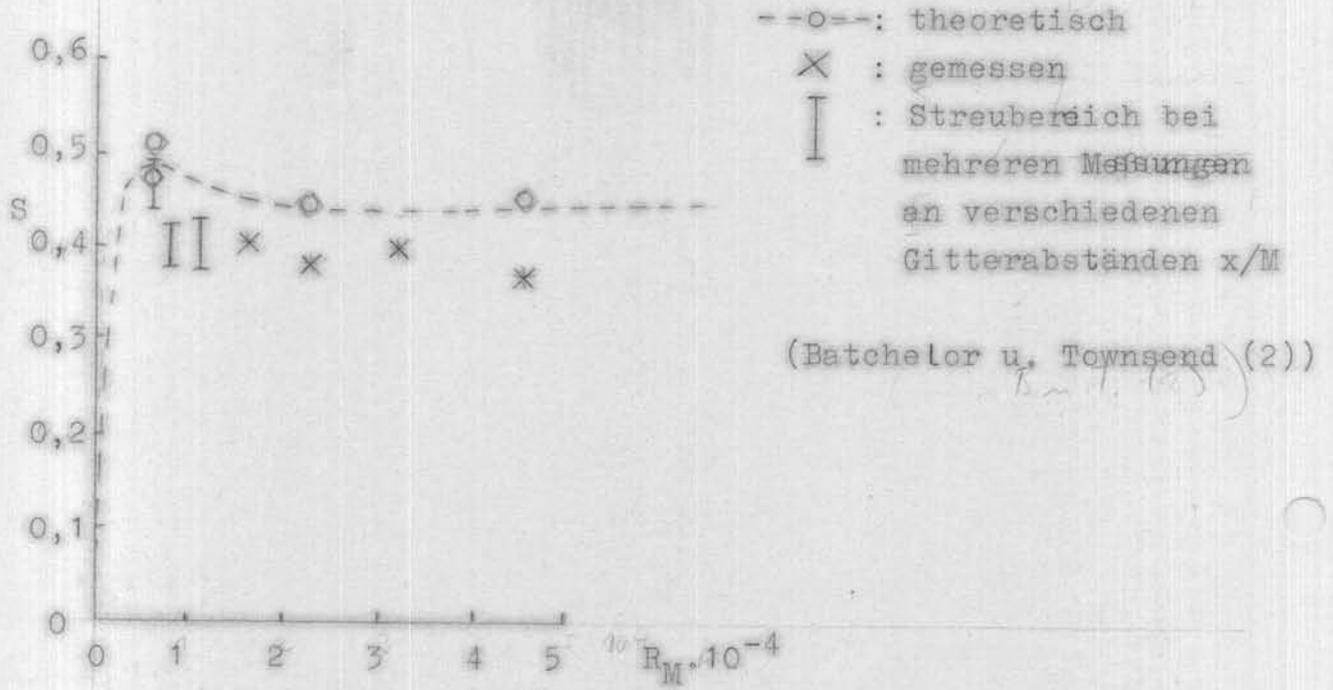


Abb. 10

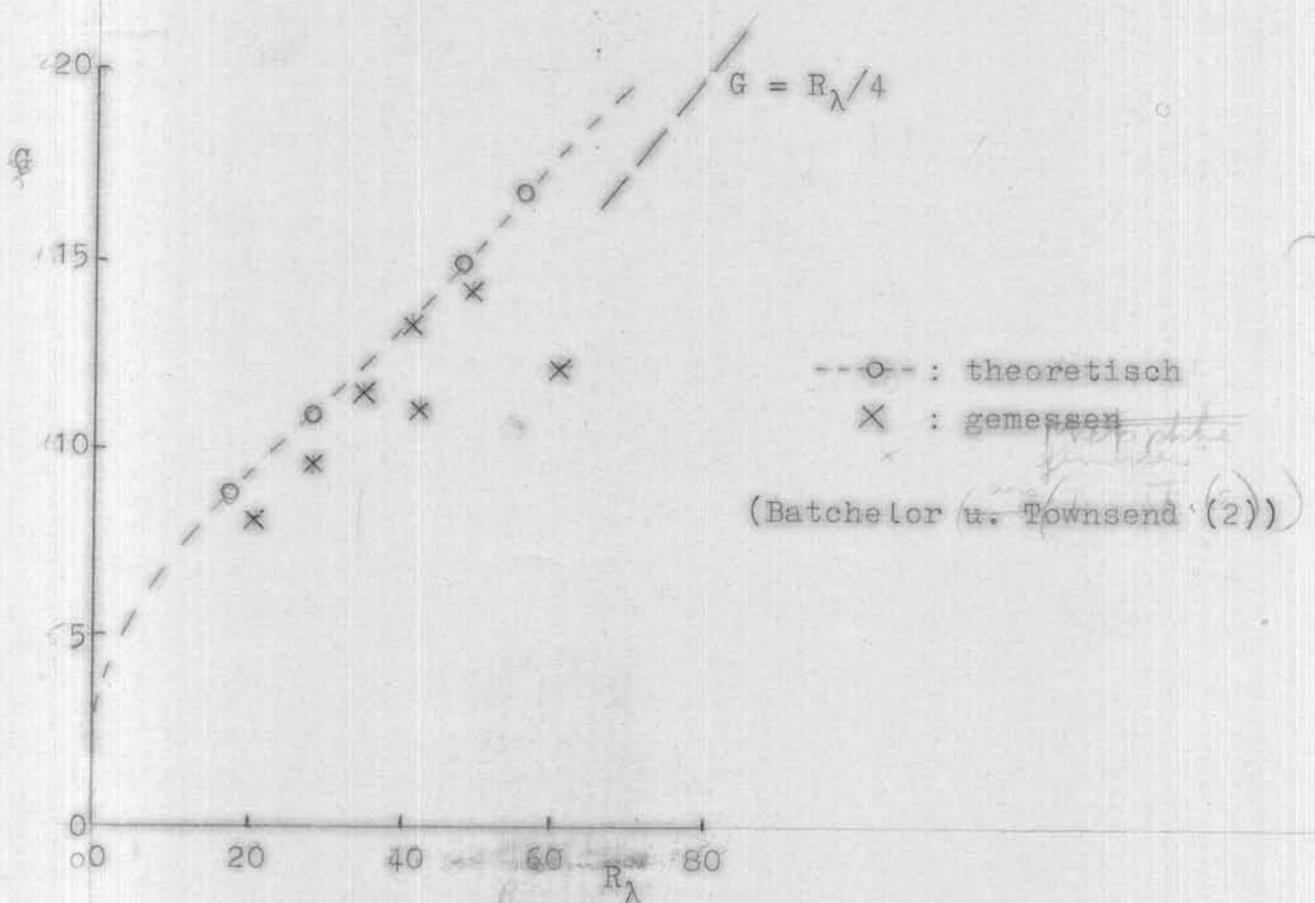


Abb. 11

○ : R_λ \times $R_M = 5620$ (Batchelor u. Townsend (2))
 $R_M = 5620$ (Batchelor u. Townsend (2))

× : $f(r/\lambda)_{r/\lambda = 2}$
 $R_M = 5300$ (nach Abb. 5)

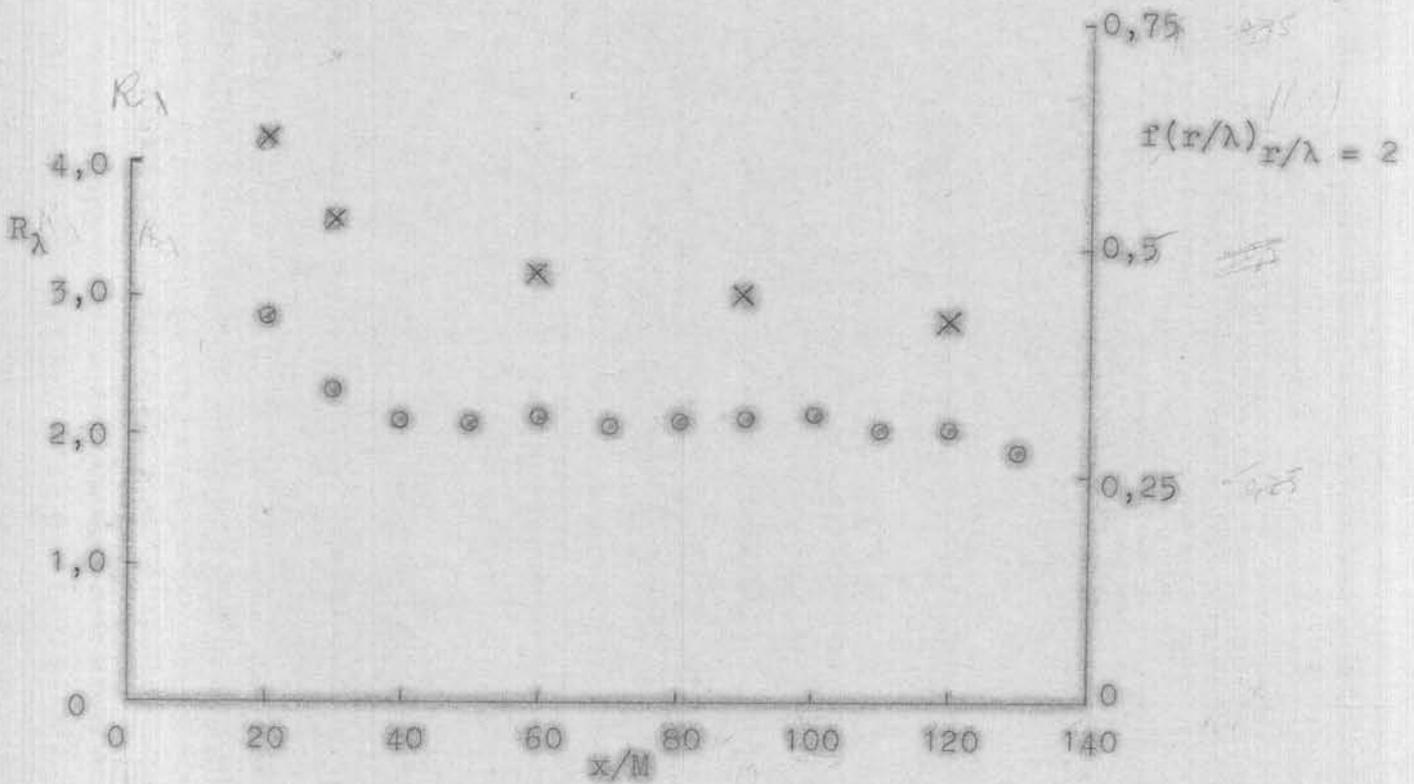


Abb. 12