

Sterile Neutrinos

Juni 16 2011

Alexander Liluashvili

Matrikel Nummer 2793121

Betreuer Dr. Werner Rodejohann

Abstract:

In following we explain the necessity of existence of neutrinos and explain the theoretical basis of neutrino oscillations in vacuum and matter. At the end we discuss the neutrino experiments and explain the evidences of existence of sterile neutrinos.

Abstrakt:

Im folgenden erklären wir die Notwendigkeit von der Existenz der Neutrinos und besprechen die theoretische Grundlagen von Neutrinooszillationen in Vakuum und Materie. Als letztes diskutieren wir die Neutrinoexperimente und zeigen die Evidenzen für das Existenz von sterilen Neutrinos

Inhaltsverzeichnis

1. Geschichte zu Entdeckung von Neutrinos und deren Eigenschaften.....	4
2. Neutrinomassen	9
3. Neutrino-Oszillationen	15
4. Z0 Zerfallsbreite.....	22
5. Evidenzen für Neutrinooszillationen und Experimente.....	26

1. Geschichte zu Entdeckung von Neutrinos und deren Eigenschaften

Wolfgang Pauli war der Erste, der 1930 das Neutrino als hypothetisches Teilchen vorhersagte um die Kontinuität des β^- Zerfalls zu erklären.

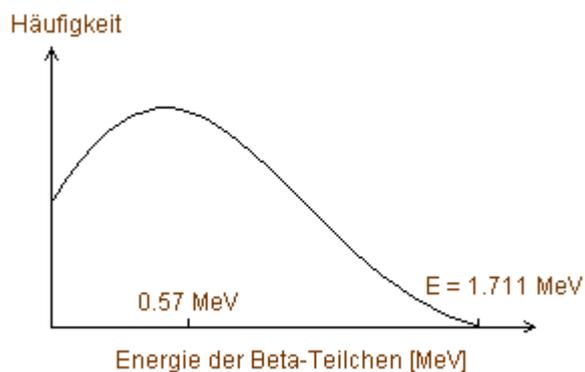
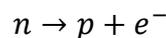


Abbildung 1: β^- -Zerfall eines radioaktiven Phosphors

Wie man weiß findet bei einem β^- Zerfall folgender Prozess statt.



Hätten wir nur diesen zwei Körper Zerfall musste unser β^- Spektrum aber diskret sein, also musste das Elektron eine konstante kinetische Energie besitzen, aber wie man in Abb. 1 sieht ist es nicht so daraus hat Pauli geschlossen dass der β^- Zerfall kein zwei Körper Zerfall ist sondern drei, und hat hypothetisch dafür das Teilchen Neutrino eingeführt. Damit nimmt unser β^- Zerfall eine andere Gestalt an.



Analog bei β^+ Zerfall



Ein zweiter Grund für die Einführung von Neutrinos war, dass ohne Neutrinos bei β Zerfall die Drehimpulserhaltung nicht gilt. Die Kerne X und Y (X' und Y') enthalten gleiche Anzahl von Nukleonen A. Deswegen besitzen diese Kerne entweder ganzzahligen oder halbzahligen Kernspin. Da aber die e^+ und e^- einen Spin von $\frac{1}{2}$ haben, wäre die Drehimpuls in β Zerfall

nicht erhalten, also müssen die hypothetischen Teilchen Neutrinos einen halbzahligen Spin haben und sind damit Fermionen.

1956 wurden die Neutrinos auch experimentell nachgewiesen. Dabei hat man folgenden Prozess beobachtet:

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$$

Nun war man sich einig dass es die Teilchen $\bar{\nu}_e$ und ν_e gab, aber da die Neutrinos keine Ladung haben und damit auch keine elektrische und magnetische Momente, stellte sich die Frage ob die beiden Teilchen doch nicht identisch sind wie z.B. es bei dem Photon der Fall ist. Man hat deshalb versucht eine Quantenzahl (L-Leptonenzahl) zu finden, welcher bei den Neutrinoprozessen vielleicht erhalten ist. Man hat den Leptonenzahl L folgendermaßen definiert, $L = +1$ für Leptonen und zugehörigen Neutrinos ($e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$) und $L = -1$ für deren Antiteilchen. In den vorherigen Prozessen (1.1) und (1.2) sieht man zwar dass die Summe der Leptonenzahl L erhalten ist, jedoch ist das Auftreten solcher Prozesse wo die Leptonenzahl nicht erhalten ist, nicht ausgeschlossen. Man hat deshalb versucht mit den $\bar{\nu}_e$ aus dem Prozess (1.1) folgende Reaktion zu beobachten:

$$\bar{\nu}_e + Cl^{37} \rightarrow e^- + Ar^{37} \quad (1.3)$$

Aber diese Reaktion wurde nie Beobachtet und man hat eine Abschätzung von Wirkungsquerschnitt von $\sigma < 0.9 * 10^{-45} cm^2$ rausbekommen. Dafür wurde folgende Reaktion mit einem viel höheren Wirkungsquerschnitt beobachtet:

$$\nu_e + Cl^{37} \rightarrow e^- + Ar^{37} \quad (1,3b)$$

Auch weitere Prozesse sprachen dafür dass Antineutrino und Neutrino verschiedene Teilchen sind, z.B. wurde es niemals ein Doppel β Zerfall beobachtet:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^-$$

$$\text{Zusammen : } 2n \rightarrow 2p + 2e^- \quad (1.4)$$

Falls gelten wurde dass: $\nu_e = \bar{\nu}_e$, dann wurde die obere Reaktion stattfinden.

Aus (1.3) und (1.4) konnte man denken, dass es bewiesen ist das die beiden Teilchen unterschiedlich sind aber es ist nicht so einfach. Das Nichtstattfinden von (1.3) und (1.4) ist zwar

eine Notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung für den Beweis, dass $v_e \neq \bar{v}_e$. Um zu verstehen wieso das keine hinreichende Bedingung ist, muss man sich die Helizität von v_e und \bar{v}_e anschauen. Helizität ist wie folgt definiert:

$H = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{S}| |\mathbf{P}|}$, wobei \mathbf{S} die Spinrichtung und \mathbf{P} die Flugrichtung ist. H kann die Werte ± 1 annehmen.

Aus Quantenfeldtheorie weiß man, dass ein Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen durch 4-komponentige Dirac Spinoren beschrieben wird, welche Dirac Gleichung erfüllen.

$$\left(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + m \right) \psi(x) = 0 \text{ mit } \alpha = (1,2,3,4) \text{ und } x = (x, y, z, it) \quad (1.5)$$

Wobei γ_α 4x4 Dirac'sche γ Matrizen sind mit:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

mit 2x2 Paul'sche Spin-Matrizen.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wir definieren $\hat{\sigma}_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$ mit $(k = 1,2,3)$

Durch einfache Matrixmultiplikation kann man folgende Relationen zeigen:

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}$$

$$\gamma_5 \gamma_\alpha + \gamma_\alpha \gamma_5 = 0 \quad (1.6)$$

man kann auch leicht nachrechnen, dass

$$\gamma_k = i\gamma_4 \gamma_5 \hat{\sigma}_k \quad (1.7)$$

Wenn wir die Gleichung (1.7) in die Dirac Gleichung einsetzen bekommen wir

$$\left(\gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + i\gamma_4 \gamma_5 \hat{\sigma}_k \frac{\partial}{\partial x_k} + m \right) \psi(x) = 0 \quad (1.8)$$

Nun multiplizieren wir die obere Gleichung von links mit γ_4 , da $\gamma_4^2 = \gamma_5^2 = 1$ erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial x_4} \psi(x) + i \hat{\sigma}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \gamma_5 \psi(x) = -m \gamma_4 \psi(x) \quad (1.9)$$

Und weiter multiplizieren wir die Gleichung von links mit γ_5 :

$$\frac{\partial}{\partial x_4} \gamma_5 \psi(x) + i \hat{\sigma}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \psi(x) = m \gamma_4 \gamma_5 \psi(x) \quad (1.10)$$

Nun addiert bzw. subtrahiert man die beiden Gleichungen (1.9) und (1.10) und erhält:

$$\frac{\partial}{\partial x_4} (1 \pm \gamma_5) \psi(x) \pm i \hat{\sigma}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (1 \pm \gamma_5) \psi(x) = -m \gamma_4 (1 \mp \gamma_5) \psi(x) \quad (1.11)$$

Wir definieren linkshändige und rechtshändige Komponente:

$$\psi_L = P_L * \psi \quad \text{mit Projektionsoperator } P_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (1.12)$$

$$\psi_R = P_R * \psi \quad \text{mit Projektionsoperator } P_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad (1.13)$$

Daraus folgt, dass: $\gamma_5 \psi_R = -\psi_R$ und $\gamma_5 \psi_L = \psi_L$.

Die Eigenwerte ± 1 von γ_5 werden Händigkeit oder Chiralität genannt. Jede Spinor lässt sich als Summe von ψ_L und ψ_R schreiben. Wir erhalten aus (1.11) für die Dirac Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x_4} \psi_{L,R} \pm i \hat{\sigma}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \psi_{L,R} = -m \gamma_4 \psi_{R,L} \quad (1.14)$$

Wenn wir nun annahmen dass die Masse von Neutrinos Null ist also $m_\nu = 0$ Erhalten wir die Schrödinger -Gleichung:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{L,R} = \pm i \hat{\sigma}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \psi_{L,R} \quad \text{mit } i \frac{\partial}{\partial t} =: E \quad \text{und} \quad -i \frac{\partial}{\partial x_k} =: P_k \quad (1.15)$$

für $m=0$ gilt $E=P$ und damit kriegen wir unseren endgültigen Ergebnis:

$$\frac{\hat{\sigma}_k P_k}{E} \psi_{L,R} = \mp \psi_{L,R} \rightarrow \frac{\hat{\sigma}_k P_k}{P} \psi_{L,R} = \mp \psi_{L,R}$$

Wir wissen dass Helizitätsoperator $H = \frac{\hat{\sigma}_k P_k}{P}$. Daraus folgt dass Helizitätsoperator Eigenwerte ± 1 hat. -1 für Teilchen und +1 für Antiteilchen.

Die Zwei-Komponenten-Theorie besagt, dass die Neutrino Spinoren ψ_ν in schwacher Wechselwirkung immer die folgende Form haben:

$\psi_\nu = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_\nu = \psi_L \Rightarrow \psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_\nu = 0$ also wirkt ein ν immer linkshändig und ein $\bar{\nu}$ immer rechtshändig. Für $m=0$ ist also $H = -1$ für ν und $H = +1$ für $\bar{\nu}$. Jetzt müssen wir noch zeigen dass die Spinoren ψ_L und ψ_R jeweils nur zwei unabhängige Komponenten haben. Sei $\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$ mit $\psi_a = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ und $\psi_b = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ dann wissen wir

$$\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \mp I \\ \mp I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$\varphi := \frac{1}{2}(\psi_a - \psi_b) \text{ und}$$

$$\chi := \frac{1}{2}(\psi_a + \psi_b)$$

erhalten wir $\psi_L = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\varphi \end{pmatrix}$ und $\psi_R = \begin{pmatrix} \chi \\ \chi \end{pmatrix}$ aus 4 komponentigen Dirac-Spinoren eine 2 Komponentige Weyl-Spinor. Die für $m=0$ entkoppeln lässt.

$$E\varphi = -\sigma * P * \varphi, \text{ und } E\chi = +\sigma * P * \chi$$

Aus dieser Herleitung wissen wir, dass wenn das Neutrino masselos ist besitzt es feste Helizität, also für Neutrino ist es -1 und für Antineutrino ist es +1. Wenn wir nun den oberen Gleichung (1.4) anschauen sehen wir, dass der Prozess auch dann nicht stattfinden würde, wenn Neutrino und Antineutrino identische Teilchen wären, da die Helizität von Antineutrino aus dem Prozess: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ nicht mit den von Prozess $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$ übereinstimmt. Also wenn die Masse von Neutrino Null ist können wir zwischen Dirac Neutrino ν^D : ($\bar{\nu}_e \neq \nu_e$) und Majorana Neutrino ν^M : ($\bar{\nu}_e = \nu_e$) nicht unterscheiden. Genauer werden wir die Neutrinomassen in Kapitel 2 untersuchen. Man weiß dass zu der Leptonenfamilien nicht nur Elektronen gehören, sondern auch Myonen und Tauonen. Jetzt stellt sich die Frage, haben die Myonen und Tauonen Gleiche Neutrinos wie Elektronen, oder sind die doch verschieden. Man geht analog vor wie in der obere Abschnitt, also schaut man sich verschiedene Reaktionen an und bestimmt deren Wirkungsquerschnitte. Man hat gesehen dass die Prozesse:

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$$

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$$

einen viel größeren Wirkungsquerschnitt haben als die folgenden Prozesse:

$$\nu_\mu + n \rightarrow e^- + p$$

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow e^+ + n$$

Daraus hat man geschlossen, dass $\nu_\mu \neq \nu_e$. Analog bestimmt man auch dass die Tauon Neutrino nicht identisch mit den Elektron und Myon Neutrino ist. So erhält man Quantenzahlen (Leptonenzahlen) die in Standardmodell der Teilchenphysik in Kernreaktionen erhalten sein sollen.

Tabelle 1: Leptonenzahlen

	e^-, ν_e	μ^-, ν_μ	τ^-, ν_τ	$e^+, \bar{\nu}_e$	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$
L_e	1	0	0	-1	0	0
L_μ	0	1	0	0	-1	0
L_τ	0	0	1	0	0	-1
L	1	1	1	-1	-1	-1

Natürlich muss jedes der drei Leptonenzahl erhalten sein und damit auch das gesamte Leptonenzahl $L = L_e + L_\mu + L_\tau$

[1]

2. Neutrinomassen

Wie wir in Kapitel 1 gesehen haben ist die Frage ob die Neutrinos eine Masse haben sehr wichtig, da man dann entscheiden kann ob die Neutrinos Majorana Teilchen sind, oder Dirac Teilchen. Wurde man rausbekommen, dass die Neutrinos eine Masse von $m_\nu \neq 0$ haben, konnten die ν und $\bar{\nu}$ nicht mit fester Helizität von $H = \pm 1$ auftraten und das wurde von Standardmodell der Teilchenphysik abweichen. In weiteren schreiben wir die Helizitätseigenwerte als Index bei Neutrino. Nun wollen wir genauer den Unterschied zwischen Dirac Neutrino und Majorana Neutrino anschauen. Der Operator der aus Teilchen ein Antiteilchen macht heißt Ladungskonjugation $C = \gamma_4 \gamma_2$ also wenn man C auf einen Zustand $|f(x, t)\rangle$ anwendet erhält man:

$$C|f(x, t)\rangle = \pm|\bar{f}(x, t)\rangle$$

Da aber in schwacher Wechselwirkung die C-Erhaltung nicht gilt, wendet man normalerweise den CPT (Charge Pariti Time) Operator anstelle von C Operator an. Machen wir nun die Fall-

unterscheidung. Wenn die Neutrinos nicht masselos sind: führt der CPT Operator den ν_- Teilchen in ein $\bar{\nu}_+$ Teilchen und da $m_\nu \neq 0$ gibt es ein Bezugssystem was sich schneller bewegt als das Teilchen und damit wird durch die Lorenztransformation aus $\bar{\nu}_+$ ein $\bar{\nu}_-$. Also mit CPT Transformation und Lorenz Transformation erhält man aus ν_- vier verschieden Zustände ν_- , $\bar{\nu}_+$, $\bar{\nu}_-$, ν_+ die mit 4-komponentigen Dirac Spinor beschrieben werden können. Im Falle von Dirac Neutrinos gilt $\nu_- \neq \bar{\nu}_-$ und $\nu_+ \neq \bar{\nu}_+$ und im Falle von Majorana Neutrinos gilt $\nu_- = \bar{\nu}_-$ und $\nu_+ = \bar{\nu}_+$. Falls die Neutrinos masselos sind, haben sie Lichtgeschwindigkeit und laut spezielle Relativitätstheorie kann es kein Bezugssystem geben was schneller ist als das Teilchen. Deshalb existiert die Lorenz-Transformation $\nu_- \rightarrow \nu_+$ und $\bar{\nu}_+ \rightarrow \bar{\nu}_-$ nicht. Also man erhält dass in Standardmodell nur die beiden Zustände ν_- und $\bar{\nu}_+$ auftreten. Die anderen beide Zustände ν_+ und $\bar{\nu}_-$ (sterile Neutrinos) treten nicht auf. Jetzt wollen wir die Theorie zu Dirac-Masse und Majorana-Masse anschauen. Die Lagrange Dichte für ein freies Teilchen ohne Wechselwirkung lautet:

$$-L = \bar{\psi} \left(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + m_D \right) \psi \quad (2.1)$$

Wobei m_D die Dirac-Masse ist. Nach der zweiten Quantisierung in QFT wird von $\psi(x)$ die Vernichtung eines Teilchens bzw. Erzeugung eines Antiteilchens und von $\bar{\psi}(x)$ die Vernichtung eines Antiteilchens bzw. Erzeugung eines Teilchens beschrieben. Dabei gilt:

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma_4 \quad (2.2)$$

Da wir uns nur für die Dirac-Masseterm interessieren bekommen wir:

$$-L_D = m_D \bar{\psi} \psi \quad (2.3)$$

Der Term $\bar{\psi} \psi$ ist hermitesch und Lorenz-invariant. Damit auch die Dirac-Masseterm hermitesch ist muss die Dirac-Masse reell sein, da

$$-L_D^\dagger = m_D^* (\psi^\dagger \gamma_4 \psi)^\dagger = m_D^* \psi^\dagger \gamma_4 \psi = m_D^* \bar{\psi} \psi = -L_D \quad (2.4)$$

Also muss gelten $m_D^* = m_D$

Nun können wir den L_D in chirale Komponente zerlegen. Mit $\psi = \psi_L + \psi_R$ erhalten wir:

$$-L_D = m_D (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (2.5)$$

Wie man in der Gleichung (2.5) sieht benötigt man für Dirac-Masseterm sowohl rechtshändige als auch linkshändige Dirac-Neutrinos die in Standardmodell nicht existieren, also muss die Dirac-Masse $m_D = 0$ sein. Nun beschränken wir uns nicht nur auf Dirac Fall und nähmen noch zusätzlich die ψ^c die CP konjugierte von Dirac Spinor ψ hinzu. Der C Operator macht aus Teilchen ein Antiteilchen und der Paritätsoperator ändert die Händigkeit. Wenn wir die ψ^c dazunehmen haben wir in Lagrangedichte noch drei weitere Lorentz-Skalare, also außer $\bar{\psi}\psi$ haben wir noch zusätzlich $\bar{\psi}^c\psi^c$, $\bar{\psi}\psi^c$ und $\bar{\psi}^c\psi$. Der Term $\bar{\psi}^c\psi^c$ ist wie $\bar{\psi}\psi$ hermitesch und ist zu $\bar{\psi}\psi$ äquivalent. Wegen $(\bar{\psi}\psi^c)^+ = (\psi^+\gamma_4\psi^c)^+ = (\psi^c)^+\gamma_4\psi = \bar{\psi}^c\psi$ sind die Terme $\bar{\psi}\psi^c$ und $\bar{\psi}^c\psi$ zueinander hermitesch konjugiert und wir erhalten zusätzlich zu Dirac Masseterm die Majorana Masseterm L_M mit:

$$-L_M = \frac{1}{2}(m_M\bar{\psi}\psi^c + m_M^*\bar{\psi}^c\psi) = \frac{1}{2}m_M\bar{\psi}\psi^c + H.K. \quad (2.6)$$

(Wobei H.K. hermitesch konjugierter Term ist.)

Jetzt wollen wir uns anschauen wie sich die Lorentz-Skalare unter Phasentransformation verhalten

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}, \quad \psi^c \rightarrow e^{-i\alpha}\psi^c, \quad \bar{\psi}^c \rightarrow e^{i\alpha}\bar{\psi}^c \quad (2.7)$$

Also man kann aus (2.7) sehen dass $\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi$ und $\bar{\psi}^c\psi^c \rightarrow \bar{\psi}^c\psi^c$, also sind damit die Terme $\bar{\psi}\psi$ und $\bar{\psi}^c\psi^c$ und auch die Dirac Masseterme invariant unter der Phasentransformation was mit der Erhaltung von Quantenzahl L zusammenhängt. Die Terme $\bar{\psi}^c\psi^c$ bewirken Übergänge der Form $l \rightarrow l$ mit $\Delta l=0$ und der Term $\bar{\psi}\psi$ beschreibt Übergänge der Form $\bar{l} \rightarrow \bar{l}$ mit $\Delta l=0$. Die restlichen Terme beschreiben Prozesse mit $\Delta l = \pm 2$ und existieren deshalb in Standardmodell nicht. Wenn wir Standardmodell außer Acht lassen können wir nun die Majorana Masseterme in der chiralen Komponente zerlegen.

$\psi = \psi_L + \psi_R$ und $\psi^c = \psi_L^c + \psi_R^c$, wobei hier folgende Notation verwendet wird:

$$\psi_{L,R}^c = (\psi^c)_{L,R}$$

Damit erhalten wir für die Majorana Masseterm $L_M = L_M^L + L_M^R$ und nach einsetzen in (2.6) erhält man:

$$-L_M^L = \frac{1}{2}m_L(\bar{\psi}_L\psi_R^c + \bar{\psi}_R^c\psi_L) = \frac{1}{2}m_L\bar{\psi}_L\psi_R^c + H.K. \quad (2.8)$$

$$-L_M^R = \frac{1}{2} m_R (\overline{\psi_R} \psi_L^c + \overline{\psi_L^c} \psi_R) = \frac{1}{2} m_R \overline{\psi_L^c} \psi_R + H.K. \quad (2.8)$$

Nun definieren wir

$$\varphi_1 := \psi_L + \psi_R^c, \quad \varphi_2 := \psi_R + \psi_L^c \quad (2.9)$$

Es gilt:

$$\frac{1}{2} m_L \overline{\varphi_1} \varphi_1 = \frac{1}{2} m_L (\overline{\psi_L + \psi_R^c}) * (\psi_L + \psi_R^c) = \frac{1}{2} m_L (\overline{\psi_L} \psi_R^c + \overline{\psi_R^c} \psi_L) = -L_M^L \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2} m_R \overline{\varphi_2} \varphi_2 = \frac{1}{2} m_R (\overline{\psi_R + \psi_L^c}) * (\psi_R + \psi_L^c) = \frac{1}{2} m_R (\overline{\psi_R} \psi_L^c + \overline{\psi_L^c} \psi_R) = -L_M^R \quad (2.11)$$

Nun kann man die Dirac und Majorana-Masseterme zusammenfassen und man

bekommt:

$$-2L_{DM} = m_D (\overline{\psi_L} \psi_R + \overline{\psi_R} \psi_L) + m_L (\overline{\psi_L} \psi_R^c + \overline{\psi_R^c} \psi_L) + m_R (\overline{\psi_R} \psi_L^c + \overline{\psi_L^c} \psi_R) + H.K. \quad (2.12)$$

Wir definieren nun:

$$M := \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \quad \Psi_L := \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_L^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ (\psi_R)^c \end{pmatrix} \text{ also } (\Psi_L)^c = \begin{pmatrix} (\psi_L)^c \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R^c \\ \psi_R \end{pmatrix} =: \Psi_R^c$$

Damit vereinfacht sich der Gestalt von unser Dirac-Majorana-Masseterm zu:

$$-2L_{DM} = \overline{\Psi_L} M \Psi_R^c + \overline{\Psi_R^c} M \Psi_L \quad (2.13)$$

In der Standardmodell treten die Felder ψ_L und ψ_R^c auf, die den ν_L und den $\bar{\nu}_R$ entsprechen, die nennt man auch aktive Neutrinos da sie an den Reaktionen von Standardmodell teilnehmen. Die Felder ψ_R und ψ_L^c , die den ν_R und den $\bar{\nu}_L$ entsprechen, treten in Standardmodell nicht auf, diese Neutrinos nennt man auch sterile Neutrinos, weil sie nicht an den Prozessen von Standardmodell teilnehmen. Nun wollen wir die Masseeigenwerte und Eigenzustände berechnen. Aus Lineare Algebra ist bekannt, dass man die Matrix M mit Transformationsmatrix T auf Diagonalgestallt bringen lässt. Es gilt mit

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M} = T^+ M T = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_2 \end{pmatrix}, \text{ wobei die } \tilde{m} \text{ die Masseeigenwerte sind. Um die } \tilde{m} \text{ zu berechnen}$$

bestimmt man die Nullstellen von charakteristischem Polynom und man erhält:

$$\tilde{m}_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(m_L + m_R) \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right] \quad (2.14)$$

Die Matrix T ist unitär also es gilt $TT^+ = 1$ damit lässt sich unsere Gleichung (2.13) umschreiben zu:

$$-2L_{DM} = \overline{\Psi}_L T T^+ M T T^+ \Psi_R^c + \overline{\Psi}_R^c T T^+ M T T^+ \Psi_L \quad (2.15)$$

Wir definieren nun:

$$\tilde{\Psi}_L = T^+ \psi_L = \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Psi}_R^c = T^+ \psi_R^c = \begin{pmatrix} \psi_{1R}^c \\ \psi_{2R}^c \end{pmatrix}$$

Einsetzen in Gleichung (2.15) ergibt:

$$-2L_{DM} = \tilde{m}_1 (\overline{\tilde{\Psi}}_L \tilde{\Psi}_R^c + \overline{\tilde{\Psi}}_R^c \tilde{\Psi}_L) + (\overline{\tilde{\Psi}}_{2L} \tilde{\Psi}_{2R}^c + \overline{\tilde{\Psi}}_{2R}^c \tilde{\Psi}_{2L}) \quad (2.16)$$

Die Masseeigenzustände kann man mit gegebener Transformationsmatrix sehr leicht ausrechnen und man erhält:

$$\begin{aligned} \psi_{1L} &= \cos \theta \psi_L - \sin \theta \psi_L^c, & \psi_{1R}^c &= \cos \theta \psi_R^c - \sin \theta \psi_R \\ \psi_{2R}^c &= \sin \theta \psi_R^c + \cos \theta \psi_R, & \psi_{2L} &= \sin \theta \psi_L + \cos \theta \psi_L^c \end{aligned}$$

mit $\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L}$

Wenn man sich nun die Formel (2,14) anschaut sieht man, dass die Ergebnisse sowohl positiv als auch negativ sein können, deshalb schreiben wir die Masseeigenwerte in folgenderweise hin:

$$\tilde{m}_i = \varepsilon_i * m_i \text{ mit } \varepsilon = \pm 1 \text{ und } m_i = |\tilde{m}_i|$$

Um unser Dirac-Majorana-Masseterm zu vereinfachen definieren wir hier ähnlich wie bei (2.9) unser Majorana Felder folgendermaßen: $\varphi_i = \psi_{iL} + \varepsilon_i \psi_{iR}^c$

Damit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$-2L_{DM} = m_1 \overline{\varphi}_1 \varphi_1 + m_2 \overline{\varphi}_2 \varphi_2 \quad (2.17)$$

Wir schauen uns nun ein wichtiges Beispiel an. Wenn $m_L = m_R = 0$ dann gilt wegen Gleichung (2.14) dass die Masseeigenwerte $m_{1,2} = m_D$, $\varepsilon_{1,2} = \mp 1$ und $\theta=45^\circ$. Unser Dirac-Majorana-Masseterm sieht folgendermaßen aus:

$$L_{DM} = -\frac{1}{2}m_D(\bar{\varphi}_1\varphi_1 + \bar{\varphi}_2\varphi_2) = -\frac{1}{2}m_D(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) * (\varphi_1 + \varphi_2) \quad (2.18)$$

Für die Majorana Felder kriegt man raus:

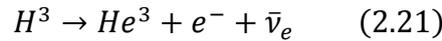
$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^c), \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^c) \quad (2.19)$$

Setzt man nun die (2.19) in Gleichung (2.18) ein erhält man:

$$L_{DM} = -m_D\bar{\psi}\psi = L_D \quad (2.20)$$

Also aus Gleichung (2.20) sieht man, dass der Dirac Fall ein Spezialfall von der allgemeineren Majorana Fall ist. Durch die obere Quantenfeldtheoretische Überlegungen hat man gesehen, dass in Standartmodell die Neutrinos keine Masse haben können.

Nun wollen wir sehr grob die obere Grenze von Elektron Neutrino experimentell bestimmen. Dafür schaut man sich die β^- Zerfall des Tritiums an.



Wegen der Energieerhaltung bekommt man folgende Gleichung:

$$m_H = E_{He} + E_e + E_\nu \quad \text{mit} \quad E_{He} = m_{He} + T_{He} \quad (2.22)$$

Wobei wegen der Vereinfachung angenommen wird, dass die Kerne H^3 und He^3 nackte Kerne sind dann muss man die Coulomb Kräfte nicht berücksichtigen.

Nun kann man die maximale kinetische Energie des Elektrons ausrechnen

$$E_{e \max} = \frac{m_H^2 + m_e^2 - (m_{He} + m_\nu)^2}{2m_H} \quad (2.23)$$

Also wenn man die maximale kinetische Energie des Elektrons bestimmt, kann man die Ruhemasse von Neutrino bestimmen. Um die kinetische Energie des Elektrons zu bestimmen schaut man sich die Kurie-Plot (Abbildung 2) an, dabei ist die Energie des Elektrons gegen die Intensität aufgetragen. Wenn die Masse des Neutrinos null ist, ist die Kurie-Plot einfach eine Gerade, aber wenn es größer ist als null, hat man gegen Ende einen steilen Abfall von Intensität. Die größte Schwierigkeit bei dieser Methode ist die genaue Bestimmung von $E_{e \max}$ da die Masse von Neutrinos sehr gering sind braucht man eine sehr gute Auflösung um die Masse zu bestimmen. Das Hauptproblem ist das Rauschen, da man zum Ende hin sehr

geringe Intensitäten hat ist es kaum von Rauschen zu trennen, deshalb kann man die Masse nicht genau bestimmen und nur eine obere Grenze angeben. Ein Beispiel für die Obergrenze der Masse für das Elektron-Neutrino ist: $m_{\nu_e} < 2,3eV$. 2012 soll das Experiment KATRIN in Betrieb gehen und eine kleinere Obergrenze für die Neutrinomasse bestimmen. Erwartet ist eine Obergrenze von $m_{\nu_e KATRIN} < 0,2eV$.

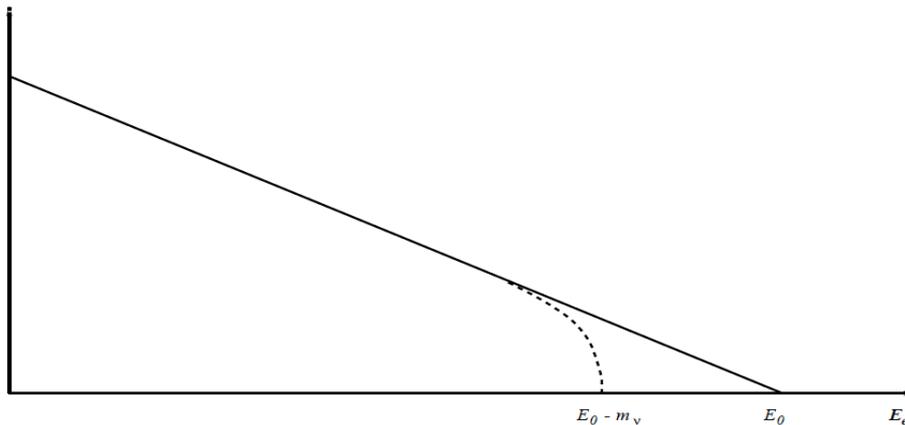


Abbildung 2 Kurie-Plot

3. Neutrino-Oszillationen .

Weitere Prozesse die auf die Masse von Neutrino deuteten, sind die Neutrino-Oszillationen in Vakuum. Neutrino-Oszillation bedeutet dass sich die Neutrino Flavour ändert, also ist dabei die Leptonenquantenzahl L nicht erhalten, d.h. sie ist in Standardmodell nicht erlaubt. Neutrino-Oszillationen sind folgende Prozesse:

$$\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta \text{ mit } \alpha, \beta = e, \mu, \tau$$

Ein notwendiger Bedingung, dass Neutrino-Oszillation auftritt, ist dass alle Massen nicht gleich groß sind, insbesondere nicht alle null. Das ist sofort ein Widerspruch zu Standardmodell.

Jetzt wollen wir theoretisch sehen wieso es notwendig ist, dass nicht alle Massen gleich sein sollen. Im allgemeinen Fall haben wir:

$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ - die orthonormierte Flavoureigenzustände und $\langle \nu_i | \nu_j \rangle = \delta_{ij}$ - die orthonormierte Masseneigenzustände mit: $\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij}$. Durch die Transformationsmatrix oder Mischungsmatrix hängen die Flavoureigenzustände mit Masseeigenzuständen zusammen. Es gilt:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle, \quad |\nu_i\rangle = \sum_\alpha (U_{\alpha i})^+ |\nu_\alpha\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle \quad (3.1)$$

Mit der unitären Transformationsmatrix $U^+ U = I$

Aus Quantenmechanik weiß man dass die Zeitentwicklung eines Eigenzustandes folgendermaßen geschrieben werden kann

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (3.2)$$

Wobei die Eigenenergien E_i folgendermassen geschrieben werden können:

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p} \approx E + \frac{m_i^2}{2E} \quad (3.3) \quad \text{da wegen sehr geringer Masse } E = p$$

Nun wollen wir die Übergangsamplitude berechnen. Die Übergangsamplitude hat keine physikalische Bedeutung aber dessen Betragsquadrat entspricht genau die Übergangswahrscheinlichkeit.

Für $t=0$ kann ein beliebiger reiner Zustand folgendermaßen geschrieben werden:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle$$

Damit erhält man für die Zeitentwicklung:

$$|\nu(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle = \sum_i \sum_\beta U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_\beta\rangle \quad (3.4)$$

Die Übergangsamplitude ist definiert als:

$$A(\alpha \rightarrow \beta; t) := \langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \quad (3.5)$$

Einsetzen von (3.3) ergibt:

$$A(\alpha \rightarrow \beta; t) = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{m_i^2}{2E} t} \quad (3.6)$$

Nun setzen wir die Lichtgeschwindigkeit auf 1, um das Ganze zu vereinfachen. Die Länge L zwischen Neutronenquelle von ν_α und den Detektor wo man die ν_β detektiert, kann man auch als $L=ct=t$ schreiben, daraus folgt nun für die Übergangsamplitude:

$$A(\alpha \rightarrow \beta; L) = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{m_i^2}{2E} L}$$

Nun wollen wir die Übergangswahrscheinlichkeit damit ausrechnen:

$$P(\alpha \rightarrow \beta; t) = |A(\alpha \rightarrow \beta; t)|^2 = \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i E_i t} \right|^2 = \sum_i \sum_j U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)t}$$

Nun definieren wir die Phasendifferenz $\Delta_{ij} = (E_i - E_j)t = \frac{\delta m_{ij}^2}{2} * \frac{L}{E}$ mit $\delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$

Damit erhalten wir für die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P(\alpha \rightarrow \beta; t) = \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} e^{-i \Delta_{ij}} \quad (3.7)$$

Wegen der Unitarität von U kann man die Gleichung auch umschreiben zu

$$P(\alpha \rightarrow \beta; t) = \delta_{\alpha\beta} - 2 \operatorname{Re} \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} (1 - e^{-i \Delta_{ij}}) \quad (3.8)$$

In der Gleichung (3.8) sieht man nun deutlich, dass wenn alle Neutrinos die gleiche Masse haben der Phasendifferenz verschwindet und wir erhalten für die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P(\alpha \rightarrow \beta; t) = \delta_{\alpha\beta}$$

Also Wahrscheinlichkeit von 1 für gleiche Neutrinos und 0 für verschiedene. Damit haben wir also keine Oszillation. Diese einfache Betrachtung zeigt, dass die Neutrino-Oszillation schon über das Standardmodell hinausgeht.

Wenn wir annehmen dass die CP-Invarianz gilt, sind die Einträge von der unitären Matrix U reell und damit kann man die Gleichung (3.8) noch etwas vereinfachen:

$$P(\alpha \rightarrow \beta; t) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\alpha j} U_{\beta i} U_{\beta j} \sin^2 \frac{\Delta_{ij}}{2} \quad (3.9)$$

Nun wollen wir als ein einfaches Beispiel die Übergangswahrscheinlichkeit ausrechnen.

Wir nehmen den einfachsten aller Beispiele mit $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$

Als Mischungsmatrix hat man einfach die Drehmatrix $U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ mit einem Mischungswinkel von θ . Damit erhält man für die Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) = P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu) = 1 - 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \frac{\Delta}{2} \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta}{2} \end{aligned}$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu) = P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad (3.10)$$

Man sieht, dass damit die Oszillationen in (3.10) auftraten, muss die Mischungswinkel $\theta \neq 0$ sein und die Massendifferenz $\delta m^2 \neq 0$

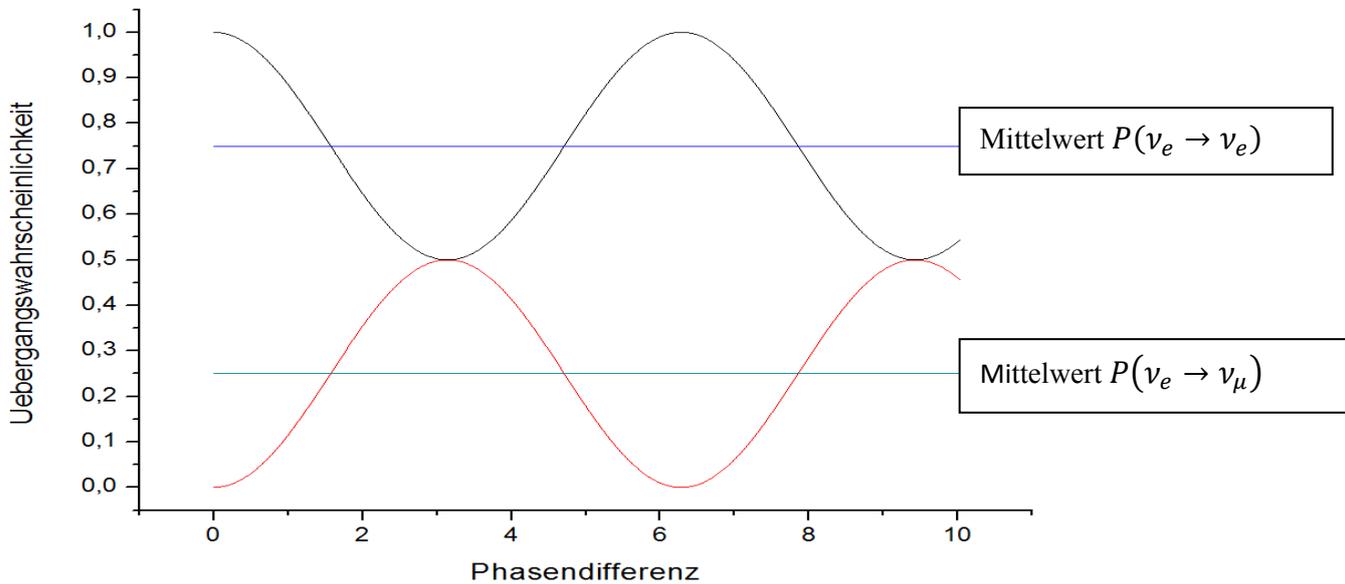


Abbildung 3. Elektron Myon Neutrino-Oszillation bei einer Mischungswinkel von $\frac{\pi}{8}$

Genauso kann man für mehrere Neutrinos die Neutrino-Oszillationen berechnen. Diese Rechnung war für die Neutrino-Oszillationen in Vakuum. Nun wollen wir die Neutrino-Oszillationen in der Materie anschauen. Neutrino-Oszillationen in Materie unterscheiden sich

deutlich von der in Vakuum. Wenn die Neutrinos in der Materie sich fortbewegen wechselwirken sie mit den Elektronen und ändern die Oszillationsverhalten deutlich. Das wollen wir uns nun theoretisch anschauen. Die zeitabhängigen Masseeigenzustände in Vakuum waren gegeben durch die $\nu_i(t)$, die ein Orthonormalbasis bilden und die Massematrix M hat in Darstellung von $|\nu_i\rangle$ Diagonalgestalt. Jetzt wollen wir uns anschauen was mit Massematrix passiert wenn man kein Vakuum mehr hat. Wir fangen wieder mit den Masseeigenzuständen $\nu_i(t)$ an, für die Zeitentwicklung gilt:

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (3.10)$$

Für die Energie gilt genauso wie für Vakuum

$$E_i \approx E + \frac{m_i^2}{2E} \approx p + \frac{m_i^2}{2p} \quad (3.11)$$

Durch differenzieren von (3.11) nach der Zeit ergibt:

$$i \frac{d\nu_i(t)}{dt} = \frac{m_i^2}{2p} \nu_i(t)$$

Schreiben wir das Ganze in die Matrixdarstellung dann erhalten wir:

$$i \frac{d\mathbf{\nu}(t)}{dt} = H^i \mathbf{\nu}(t) \text{ wobei } \mathbf{\nu}(t) = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} \text{ und } H_{ij}^i = \frac{m_i^2}{2p} \delta_{ij} \quad (3.12)$$

Die H^i ist Hamiltonmatrix und entspricht die uns schon bekannte Massematrix in $|\nu_i\rangle$ Darstellung. Wie wir auch in Vakuum Fall gesehen haben sind die Masseeigenzustände mit Flavoureigenzustände mit der unitären Transformationsmatrix oder Mischungsmatrix U verknüpft. Also es gilt:

$$|\mathbf{\nu}\rangle = U^+ |\tilde{\mathbf{\nu}}\rangle \text{ mit } |\tilde{\mathbf{\nu}}\rangle = \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \vdots \\ \nu_{\alpha n} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Mit der unitären Matrix U erhalten wir die Hamilton-Matrix H^α in $|\nu_\alpha\rangle$ Darstellung. Für die Hamilton-Matrix gilt: $H^\alpha = UH^i U^+$. Um eine einfache Rechnung zu haben beschränken wir uns wieder auf die einfachste Oszillationsfall $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ mit

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Die beiden Hamilton-Matrizen also in Darstellung von $|v_i\rangle$ und $|v_\alpha\rangle$ lauten nun:

$$H^i = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}$$

$$H^\alpha := \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_{ee}^2 & m_{e\mu}^2 \\ m_{\mu e}^2 & m_{\mu\mu}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^2 \cos^2 \theta + m_2^2 \sin^2 \theta & (m_2^2 - m_1^2) \sin \theta \cos \theta \\ (m_2^2 - m_1^2) \sin \theta \cos \theta & m_1^2 \sin^2 \theta + m_2^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Nun definieren wir $\Sigma := m_1^2 + m_2^2, D := m_2^2 - m_1^2$ damit vereinfacht sich die Gleichung (3.15)

$$H^\alpha = \frac{1}{4p} \Sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4p} D \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Wenn sich nun die Neutrinos durch die Materie bewegen ändert sich deren Oszillationsverhalten entsprechend. Die Neutrinos wechselwirken mit verschiedenen Teilchen. Die elastische Wechselwirkung mit Quarks ist eine reine NC Wechselwirkung durch Austausch von Z^0 Boson. Da alle drei Neutrino Arten wegen der Neutrino Universalität gleich mit Quarks Wechselwirken, ergibt sich für die elastische Quark-Streuung eine gemeinsame Phasenfaktor, und hat damit keine physikalische Bedeutung. Bei elastischer Neutrino-Elektron-Streuung sieht das ganze anders aus. Die ν_μ und ν_τ Wechselwirken zwar auch nur durch Austausch von Z^0 Boson aber die Wechselwirkung von ν_e mit dem Elektron kann auch durch Austausch von W^\pm Boson passieren. Damit ergibt sich kein gemeinsamer Phasenfaktor und muss berücksichtigt werden. Für die $f_\alpha(0)$ den Vorwärtsstreuamplitude gilt:

$$f_e(0) - f_\mu(0) = -\frac{G_f p}{\sqrt{2}\pi} \quad (3.17)$$

Wobei G_f der Fermi-Konstante ist. Die Bewegungsgleichung bei ν_e Streuung lässt sich mit Brechungsindex n ausdrücken. Wobei gilt dass die $n_e \neq n_\mu$. Die Wellenfunktion von Neutrino $\psi = \exp[i(px - Et)]$ muss entsprechen geändert werden, denn für die de Broglie Wellenlänge gilt: $\lambda = \frac{h}{p}$ und $\lambda_m = \frac{\lambda}{n}$. Daraus erhalten wir als zusätzlichen Phasenfaktor $(n - 1)px$.

Damit erhalten wir folgende Transformation von Vakuum zu Materie:

$$m_{ee}^2 \rightarrow m_{eem}^2 - 2p^2(n_e - n_\mu) \quad (3.18)$$

Der Brechungsindex hängt mit Vorwärtsstreuamplitude folgendermaßen zusammen:

$$n_\alpha - 1 = \frac{2\pi N_e}{p^2} f_\alpha(0) \quad \text{mit} \quad N_e = \frac{Y_e \rho}{m_N} \quad (3.19)$$

Wobei N_e Elektronendichte, Y_e Elektronen pro Nukleon und m_N Masse von Nukleon ist. Für unsere Berechnungen nehmen wir an, dass $Y_e \approx 1/2$.

Damit lässt sich die Gleichung (3.18) umschreiben zu:

$$m_{ee}^2 \rightarrow m_{eem}^2 - 2p^2 \frac{2\pi N_e}{p^2} [f_e(0) - f_\mu(0)] = m_{eem}^2 + 2\sqrt{2}G_f N_e p \quad (3.19)$$

Wir definieren nun $2\sqrt{2}G_f N_e p = A$

Also damit vereinfacht sich die Gleichung (3.19) zu:

$$m_{ee}^2 \rightarrow m_{eem}^2 + A \quad (3.20)$$

Jetzt schreiben wir die Hamilton-Matrix von Gleichung (3.16) entsprechend für die Materie um und wir erhalten:

$$H_m^\alpha = H^\alpha + \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_{ee}^2 + A & m_{e\mu}^2 \\ m_{\mu e}^2 & m_{\mu\mu}^2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Nun vereinfachen wir das Ganze und erhalten:

$$H_m^\alpha = \frac{1}{4p} (\Sigma + A) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4p} \begin{pmatrix} A - D \cos 2\theta & D \sin 2\theta \\ D \sin 2\theta & -A + D \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Jetzt transformieren wir die H_m^α mit der schon bekannten Beziehung $H^\alpha = UH^iU^+$ in Darstellung von $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ und erhalten für die Hamilton-Matrix:

$$H_m^i = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_1^2 + A \cos^2 \theta & A \sin \theta \cos \theta \\ A \cos \theta \sin \theta & m_2^2 + A \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Man sieht nun dass die Massematrix in der Materie nicht mehr diagonal ist und damit sind die Masseeigenzustände $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ keine Eigenzustände von H_m^i und die Masseeigenwerte m_i sind keine Eigenwerte von H_m^i .

Um die Masseeigenzustände und Eigenwerte zu bestimmen müssen wir die Matrix wieder diagonalisieren, also wir bestimmen wieder den charakteristischen Polynom und bestimmen die Nullstellen. Für die Masseeigenwerte erhalten wir:

$$m_{1,2m}^2 = \frac{1}{2} \left[(\Sigma + A) \mp \sqrt{(A - D \cos 2\theta)^2 + D^2 \sin^2 2\theta} \right] \quad (3.24)$$

Für die Massendifferenz ergibt sich:

$$D_m := m_{2m}^2 - m_{1m}^2 = D \sqrt{\left(\frac{A}{D} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta} \quad (3.25)$$

Damit erhalten wir nun den Zusammenhang zwischen Flavoureigenzustände und Masseeigenzustände:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1m} \\ \nu_{2m} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Mit einem Mischungswinkel von θ_m die gegeben ist durch:

$$\tan 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - \frac{A}{D}} \text{ und } \sin 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\left(\frac{A}{D} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta}} \quad (3.27)$$

Damit erhalten wir letztendlich für die Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta_m * \sin^2 2 \frac{\Delta_m}{2} \text{ wobei } \Delta_m = \frac{D_m}{2} * \frac{L}{p} \quad (3.28)$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$$

L ist die Oszillationslänge und ist gegeben durch:

$$L_m = \frac{\sin 2\theta_m}{\sin 2\theta} * L_0$$

L_0 ist die Oszillationslänge in Vakuum.

Wie man an den Gleichung (3.28) sieht, hat die Übergangswahrscheinlichkeit in der Materie eine ähnliche Form wie die im Vakuum.[1]

4. Z^0 Zerfallsbreite

Jetzt kommen wir zu einem wichtigen Thema, die schwache Wechselwirkung mit W^\pm und Z^0 Bosonen. Die schwachen Vektor-Bosonen W^\pm und Z^0 wurden im Jahre 1983 in SPS (Super-Proton-Synchrotron) entdeckt, der Grund für die so späte Entdeckung liegt darin, dass die Ruhemasse von den Vektorbosonen sehr groß ist $m_{W^\pm} \approx 80$ GeV und

$m_{Z^0} \approx 90 \text{ GeV}$. Diese Vektorbosonen entstehen durch Proton-Antiproton Kollisionen. Dabei haben wir folgende Prozesse.

$$\bar{d} + u \rightarrow W^+ \rightarrow \begin{cases} e^+ + \nu_e \\ \mu^+ + \nu_\mu \end{cases} \quad (CC - \text{Prozess}) \quad (4.1)$$

$$\bar{u} + d \rightarrow W^- \rightarrow \begin{cases} e^- + \bar{\nu}_e \\ \mu^- + \bar{\nu}_\mu \end{cases} \quad (CC - \text{Prozess}) \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u} + u \\ \bar{d} + d \end{array} \right\} \rightarrow Z^0 \rightarrow \begin{cases} e^+ + e^- \\ \mu^+ + \mu^- \end{cases} \quad (NC - \text{Prozess}) \quad (4.3)$$

Um die Anzahl von möglichen leichten (also $m_\nu < \frac{m_Z}{2}$) Neutrinoarten zu bestimmen sehen wir uns die Gesamtzerfallsbreite von Z^0 Boson an.

Wie wir in Prozess (4.3) sehen zerfällt die Z^0 in ein Fermion und Antifermion: $Z^0 \rightarrow f\bar{f}$,

Man weiß dass für die instabile Teilchen folgende Wahrscheinlichkeit für den Zerfall aus dem Zerfallsgesetz geschrieben werden kann:

$$W(t) = e^{-kt} \text{ mit Zerfallskonstante } k, \text{ und Lebensdauer } \tau \text{ so dass } k = \frac{1}{\tau}$$

Da die instabilen Teilchen keine scharfen Massen haben, sondern nur eine Massenverteilung $W(m)$, erhalten wir mit Breit-Wiegner-Resonanzformel:

$$W(m) \propto \frac{1}{(m - m_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (4.4)$$

Wobei Γ die Zerfallsbreite ist mit $\Gamma = \hbar k$ und entspricht die Breite von halben Maximum. Da die meisten instabile Teilchen durch mehrere Zerfallsarten zerfallen, ist die gesamte Zerfallsbreite die Summe von alle partiellen Zerfallsbreiten.

$$\Gamma_Z = \sum_f \Gamma_f \quad (4.5)$$

Die Zerfälle von Z^0 Boson können in drei Teile aufgeteilt werden.

1. Z^0 Boson zerfällt in Quark-Antiquark Paar, dabei ist die gesamte Zerfallsbreite Γ_h gegeben als:

$$\Gamma_h = \Gamma_u + \Gamma_d + \Gamma_s + \Gamma_c + \Gamma_b$$

Wobei der Top Quark Zerfall nicht auftritt da die Masse von Top Quark viel größer ist als die halbe Z^0 Boson Masse.

2. Zerfälle in geladenen Leptonen. Dabei ist die gesamte Zerfallsbreite Γ_l gegeben durch:

$$\Gamma_l = \Gamma_e + \Gamma_\mu + \Gamma_\tau$$

3. Zerfälle in leichte Neutrinos. Hier ist die gesamte Zerfallsbreite Γ_ν gegeben durch:

$$\Gamma_\nu = N_\nu * \Gamma_e$$

Wobei hier angenommen wurde, dass wegen den sehr niedrigen Massen von Neutrinos die Zerfallsbreiten von Neutrinos gleich groß sind.

Die Zerfallsbreite Γ_ν kann dabei nicht gemessen werden deshalb versucht man die Γ_ν folgendermaßen zu bestimmen:

$$\Gamma_\nu = \Gamma_Z - \Gamma_h - 3\Gamma_l \quad (4.6)$$

Wenn man die Zerfallsbreite Γ_ν bestimmt hat kann man die leichte Neutrinoanzahl bestimmen. Für die Anzahl von Neutrinos kriegt man raus:

$$N_\nu = \frac{1}{\Gamma_e} (\Gamma_Z - \Gamma_h - 3\Gamma_l) \quad (4.7)$$

Theoretisch kann man die partiellen Zerfallsbreiten berechnen mit:

$$\Gamma_f = \frac{G_f m_Z^3}{6\sqrt{2}\pi} c_f \left[(g_V^f)^2 + (g_A^f)^2 \right] = c_f \left[(g_V^f)^2 + (g_A^f)^2 \right] * \Gamma_0 \quad (4.8)$$

$$\text{mit } \Gamma_0 = \frac{G_f m_Z^3}{6\sqrt{2}\pi} = 0.332 \text{ GeV}$$

Mit Fermi-Konstante $G_f = 1.1664 * 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$, Ruhemasse von Boson $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$, c_f ist der Farbfaktor (für Quarks ist es 3 und für Leptonen ist es 1), g_V^f und g_A^f sind die Vektor-Axialvektor Kopplungskonstante, und können in Standardmodell folgendermaßen ausgerechnet werden:

$$g_V^f = \sqrt{\rho} (I_{3f} - 2Q_f s_w^2) \text{ mit } s_w = 0.23$$

$$g_A^f = \sqrt{\rho} I_{3f}$$

I_3 ist die dritte Komponente des Isospins und Q_f die Ladung des Fermions. ρ ist die Veltman-Parameter und in der Standard Modell gilt $\rho = 1$. Mit den ganzen Formeln kann man die theoretischen partiellen Zerfallsbreiten ausrechnen. Für Z^0 Boson erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}\Gamma_u = \Gamma_c = 0.286 \text{ GeV}, \quad \Gamma_d = \Gamma_s = \Gamma_b = 0.369 \text{ GeV}, \\ \Gamma_l = 0.084 \text{ GeV}, \quad \Gamma_\nu = 0.166 \text{ GeV}\end{aligned}$$

Wenn man nun die gesamte Zerfallsbreite Γ_Z bestimmt kann man die Anzahl der leichten Neutrinos bestimmen. In Bornsche Näherung beschreibt die Breit-Wiegner-Resonanzformel die Abhängigkeit zwischen Wirkungsquerschnitt und die Schwerpunktsenergie \sqrt{s} .

$$\sigma_f(s) = \sigma_f^0 \frac{s\Gamma_Z^2}{(s - m_Z^2) + s^2\Gamma_Z^2/m_Z^2} \quad \text{mit} \quad \sigma_f^0 = \frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_f}{m_Z^2\Gamma_Z^2} \quad (4.9)$$

Analoges gilt für die Hadronen:

$$\sigma_h(s) = \sigma_h^0 \frac{s\Gamma_Z^2}{(s - m_Z^2) + s^2\Gamma_Z^2/m_Z^2} \quad \text{mit} \quad \sigma_h^0 = \frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_h}{m_Z^2\Gamma_Z^2} \quad (4.10)$$

Durch messen von Wirkungsquerschnitt $\sigma_f(s)$ und $\sigma_h(s)$ kann Γ_Z, Γ_l und Γ_h bestimmt werden. Mit den theoretischen Wert von Γ_e kann man durch die Verwendung von (4.7) die Anzahl der Neutrinos bestimmen. Aber in Wirklichkeit muss man in Formel (4.7) noch einen zusätzlichen Strahlungsfaktor berücksichtigen. Genau Gründe dafür werden hier nicht diskutiert.

Damit erhalten wir:

$$N_\nu = \frac{\Gamma_\nu}{\Gamma_l} * \left(\frac{\Gamma_l}{\Gamma_e}\right)_{SM} \quad (4.11)$$

Der Wert von $\left(\frac{\Gamma_l}{\Gamma_e}\right)_{SM}$ ist experimentell bestimmt und beträgt $\left(\frac{\Gamma_l}{\Gamma_e}\right)_{SM} = 1.992 \pm 0.003$

Damit erhalten wir endgültig für die Anzahl der Neutrinos:

$$N_\nu = \left[\sqrt{\frac{12\pi R_l}{m_Z^2\sigma_h^0}} - R_l - 3 \right] * \left(\frac{\Gamma_l}{\Gamma_e}\right)_{SM} \quad \text{wobei} \quad R_l := \frac{\Gamma_h}{\Gamma_l} \quad (4.12)$$

In den Diagramm 6 sieht man nun die Resonanzkurve mit Vorhersagen von Standartmodell für $N_\nu = 2,3,4$ und durch schwarze punkte sind die Ergebnisse von ALEPH Experiment aufgetragen. Man sieht, dass die experimentellen Werte sehr gut mit der Vorhersage für 3 leichte

Neutrinos übereinstimmen. Experimentell bekommt man aus Resonanzkurve für die Anzahl $N_\nu = 2.991 \pm 0.016$ raus. Daraus folgert man dass es in Standardmodell nur 3 leichte Neutrinos gibt.[1]

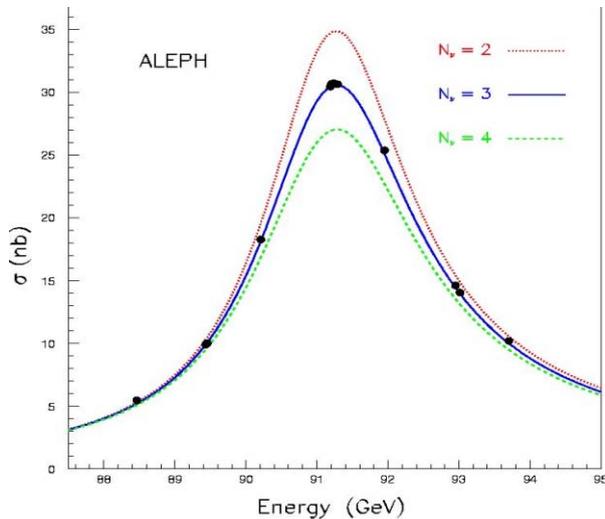


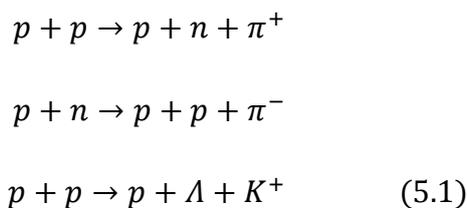
Abbildung 4 Resonanzkurve bei ALEPH Experiment.[1]

Sterile Neutrinos

5. Evidenzen für Neutrinooszillationen und Experimente

In Standardmodell haben wir gesehen, dass es keine Neutrinooszillationen erlaubt sind. Dann stellt sich die Frage, wieso man überhaupt glaubt, dass es die Neutrinooszillationen vorkommt. Wir untersuchen in Folgenden die Neutrinos die aus dem Reaktoren, Atmosphäre und der Sonne kommen.

Von Weltaal fliegen die primären Teilchen wie Proton und Neutron in die Erdatmosphäre und wechselwirken mit Sauerstoff oder Stickstoff, die sich in der Atmosphäre befinden. Dabei können folgende Prozesse stattfinden:



Wobei $\Lambda = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$ und $K^+ = \begin{pmatrix} u \\ \bar{s} \end{pmatrix}$

Nun können die entstandene Teilchen folgendermaßen zerfallen:

$$\begin{aligned}
 \pi^+ &\rightarrow \mu^+, e^+ + \nu_\mu, \nu_e \\
 \pi^- &\rightarrow \mu^-, e^- + \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_e \\
 K^+ &\rightarrow \mu^+, e^+ + \nu_\mu, \nu_e \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

Die erzeugten sekundären Neutrinos können nun mit Hilfe von Detektoren detektiert werden. Als man das Verhältniss von $\frac{\nu_\mu}{\nu_e}$ gemessen hat war es auffallend, dass der Wert kleiner war als die theoretisch berechneten Werte. Das Defizit von ν_μ kann mit Neutrinooszillation der Form $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ erklärt werden.

Wir wollen nun für die atomosphärischen Neutrinos die Oszillationswahrscheinlichkeit für den 3-Flavour Oszillation von $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ ausrechnen. In allgemeinen Fall haben wir ausgerechnet, dass die Übergangswahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet werden kann:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad (5.3)$$

Wobei die U unitäre Mischungsmatrix ist mit dem die Flavoureigenzustände und die Masse-eigenzustände zusammenhängen. In 3-Dimensionen erhalten wir damit:

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Und die Mischungsmatrix kann man durch drei Eulerwinkel beschreiben, in diesem Falle lassen wir die Phase weg und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 U &= R_{12}(\theta_{12}) * R_{13}(\theta_{13}) * R_{23}(\theta_{23}) \\
 R_{12}(\theta_{12}) &= \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{13}(\theta_{13}) = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}, R_{23}(\theta_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \\
 U &= \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13} & s_{23}c_{13} \\ s_{13}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

Wobei hier die Abkürzungen $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ und $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ benützt wurden. Wenn man nun die Übergangswahrscheinlichkeit $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)$ berechnen möchte, sieht man, dass es sehr aufwendig ist, aber wenn man als Vereinfachung annimmt dass $\Delta m_{12}^2 \ll \Delta m_{13}^2 \approx \Delta m_{23}^2$ kann man den Term $\sin^2 \frac{\Delta_{12}}{2} \approx 0$ vernachlässigen und damit vereinfacht sich die Rechnung deutlich.

$$\begin{aligned}
P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) &= -4 \left[U_{\mu 1} U_{\tau 1} * \left(U_{\mu 2} U_{\tau 2} * \sin^2 \frac{\Delta_{12}}{2} + U_{\mu 3} U_{\tau 3} * \sin^2 \frac{\Delta_{13}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + U_{\mu 2} U_{\tau 2} U_{\mu 3} U_{\tau 3} \sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2} \right] \approx -4 [U_{\mu 1} U_{\tau 1} U_{\mu 3} U_{\tau 3} + U_{\mu 2} U_{\tau 2} U_{\mu 3} U_{\tau 3}] \sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2} \\
&= -4 U_{\mu 3} U_{\tau 3} [U_{\mu 1} U_{\tau 1} + U_{\mu 2} U_{\tau 2}] \sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2} = -4 U_{\mu 3} U_{\tau 3} [-U_{\mu 3} U_{\tau 3}] \sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2} \\
&= 4 U_{\mu 3}^2 U_{\tau 3}^2 \sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2} \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Wobei in den vorletzten Schritt die Identität

$$\sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}$$

verwendet wurde.

Durch Einsetzen von Mischungsmatrix erhalten wir:

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = 4 \sin^2 \theta_{23} \cos^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{23} \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2} = \sin^2 2\theta_{23} \cos^4 \theta_{13} \sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2}$$

Da der Winkel θ_{13} sehr klein ist können wir folgende Näherung machen $\cos^4 \theta_{13} \approx 1$ und damit erhalten wir.

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) \approx \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2} \tag{5.7}$$

Hier sieht man, wenn wir die ganze Näherungen machen, bekommen wir genau das heraus was auch mit 2-Flavour Formalismus.

In zweiten Argument von Gleichung (5.7) steht die vorher definierte Phasendifferenz Δ_{23} .

$$\Delta_{ij} = \frac{\delta m_{ij}^2}{2} * \frac{L}{E} \text{ oder } \frac{\Delta_{ij}}{2} = 1.27 \delta m_{ij}^2 [eV^2] * \frac{L[km]}{E[GeV]}$$

Wenn man den Wert $\frac{L}{E}$ viel kleiner wählt als δm_{23}^2 beobachtet man keinen Oszillation, oder wenn man den Wert zu groß nimmt beobachtet man sehr viele Oszillationen und man kann die Oszillationen nicht mehr auflösen, also muss folgendes gelten:

$$\frac{\delta m_{ij}^2}{eV^2} \approx 1.27 \frac{E/GeV}{L/km} \quad (5.8)$$

Also wenn man experimentell einen Oszillation beobachtet muss die Gleichung (5.8) gelten. Die Energie des Neutrinos kann mit Kallorimeter oder Cherenkov Detektor bestimmt werden. Und die Länge kann man variieren. Wenn man nun für die atmosphärische Neutrinos die Länge 1000 km und die Energie von 1 GeV einsetzt, bekommt man $\delta m_{23}^2 \approx 2.5 * 10^{-3} eV^2$. Und experimentell hat man auch den Mischungswinkel $\theta_{23} \approx \frac{\pi}{4}$ bestimmt.

In die 3-Flavour Formalismus haben wir 5 unabhängige Parameter. Die Mischungswinkel θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} , und die Massendifferenzen δm_{12}^2 , $\delta m_{13}^2 \approx \delta m_{23}^2$. Davon haben wir zwei Werte durch die atmosphärische Neutrinooszillationen der Art $\nu_{\mu} \leftrightarrow \nu_{\tau}$ bestimmt.

Um die anderen Werte zu bestimmen betrachten wir nun die solaren Neutrinos. Die solaren Neutrinos entstehen durch verschiedene Prozesse in der Sonne. Experimente haben gezeigt, dass die gemessene Werte von ν_e in Vergleich zu theoretisch berechneten Werten kleiner sind. Dieser Defizit kann durch die Oszillationen der Art $\nu_e \rightarrow \nu_{\mu}$ oder $\nu_e \rightarrow \nu_{\tau}$ erklärt werden. In diesem Fall ist der Wert $\frac{L}{E}$ sehr groß, da $L \approx 10^8 km$ und $E \approx MeV$, hier muss erwähnt werden, dass die Neutrinos nicht unbedingt auf der Oberfläche von Sonne entstehen, deshalb muss die Materieeffekte die davor besprochen wurden, berücksichtigt werden. Aber der Wert ist trotzdem zu groß so dass folgende Näherung gemacht werden kann:

$$\sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2} \approx \sin^2 \frac{\Delta_{13}}{2} \approx \frac{1}{2} \quad (5.9)$$

Diese Näherung kommt zustande, weil man die Oszillationenn nicht auflösen kann. Deshalb wird es über die Zeit gemittelt und die zeitliche Mitte von $\sin^2(x)$ ist $\frac{1}{2}$. Damit bekommen wir für die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_{\mu}) &= -4 \left[U_{e1} U_{\mu 1} \left(U_{e2} U_{\mu 2} \sin^2 \frac{\Delta_{12}}{2} + U_{e3} U_{\mu 3} \sin^2 \frac{\Delta_{13}}{2} \right) + U_{e2} U_{\mu 2} U_{e3} U_{\mu 3} \sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2} \right] \\ &\approx -4 \left[U_{e1} U_{\mu 1} U_{e2} U_{\mu 2} \sin^2 \frac{\Delta_{12}}{2} + \frac{1}{2} (U_{e1} U_{\mu 1} U_{e3} U_{\mu 3} + U_{e2} U_{\mu 2} U_{e3} U_{\mu 3}) \right] \\ &\approx \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\Delta_{12}}{2} \quad (5.10) \end{aligned}$$

Wobei in den letzten Schritt benützt wurde, dass der Winkel θ_{13} sehr klein ist und damit $\cos \theta_{13} \approx 1$ und $\sin \theta_{13} \ll 1$.

Aus Experimenten erhält man für die Mischungswinkel $\theta_{12} \approx 33^\circ$ und für die Masse $\delta m_{12}^2 \approx 7.910^{-5}$.

Bei der Bestimmung von δm_{12}^2 sieht man deutlich, dass die Materieeffekte eine sehr große Rolle gespielt haben, weil wenn man die Oszillation im Vakuum berechnet hätte, würde man einen viel kleineren Wert rausbekommen ($\delta m_{12}^2 \approx 10^{-11}$).

Nun betrachten wir noch die Neutrinos aus dem Reaktoren. Wir schauen uns die Oszillationen der Form $\nu_e \rightarrow \nu_e$ an. Als Parameter haben wir hier für die Länge $L \sim km$ und für die Energie $E \sim MeV$ damit erhalten wir aus Formel (5.8), dass das Experiment sensistiv auf Massendifferenz von $\delta m^2 \sim 10^{-3} eV^2$ ist. Diese Massendifferenz entspricht den atmosphärischen Massendifferenz. Wenn wir nun die Oszillationswahrscheinlichkeit ausrechnen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 - 4 \sum_{j>i} U_{ei}^2 U_{ej}^2 * \sin^2 \left(\frac{\Delta_{ij}}{2} \right) \\
 &= 1 - 4 \left[U_{e1}^2 U_{e2}^2 * \sin^2 \left(\frac{\Delta_{12}}{2} \right) + U_{e1}^2 U_{e3}^2 * \sin^2 \left(\frac{\Delta_{13}}{2} \right) + U_{e2}^2 U_{e3}^2 * \sin^2 \left(\frac{\Delta_{23}}{2} \right) \right] \\
 &\approx 1 - 4 U_{e3}^2 [U_{e1}^2 + U_{e2}^2] * \sin^2 \left(\frac{\Delta_{13}}{2} \right) \approx 1 - 4 U_{e3}^2 (1 - U_{e3}^2) * \sin^2 \left(\frac{\Delta_{13}}{2} \right) \\
 &= 1 - 4 \sin^2 \theta_{13} (1 - \sin^2 \theta_{13}) * \sin^2 \left(\frac{\Delta_{13}}{2} \right) \\
 &= 1 - 4 \sin^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{13} * \sin^2 \left(\frac{\Delta_{13}}{2} \right) \\
 &= 1 - \sin^2 2\theta_{13} * \sin^2 \left(\frac{\Delta_{13}}{2} \right) \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Für die Mischungsmatrix erhält man in 3-Flavour Formalismus:

$$U = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 & \ll 1 \\ 0.4 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Der Winkel θ_{13} ist sehr schwer zu bestimmen, da es so klein ist. Und deshalb kann nur eine obere Grenze von $\theta_{13} < 0.158$ angegeben werden.

Nun kann man unter Benutzung der Formel (5.4) die Erwartungswerte, dass der Flavourzustand α sich in Masseneigenzustand i befindet, ausrechnen:

$$|\nu_e\rangle = U_{e1} |\nu_1\rangle + U_{e2} |\nu_2\rangle + U_{e3} |\nu_3\rangle$$

$$|\nu_\mu\rangle = U_{\mu 1}|\nu_1\rangle + U_{\mu 2}|\nu_2\rangle + U_{\mu 3}|\nu_3\rangle$$

$$|\nu_\tau\rangle = U_{\tau 1}|\nu_1\rangle + U_{\tau 2}|\nu_2\rangle + U_{\tau 3}|\nu_3\rangle$$

Nun erhalten wir für die Erwartungswerte:

$$|\langle \nu_1 | \nu_e \rangle|^2 = |U_{e1}|^2 \approx 0.64, \quad |\langle \nu_1 | \nu_\mu \rangle|^2 = |U_{\mu 1}|^2 \approx 0.16, \quad |\langle \nu_1 | \nu_\tau \rangle|^2 = |U_{\tau 1}|^2 \approx 0.16$$

$$|\langle \nu_2 | \nu_e \rangle|^2 = |U_{e2}|^2 \approx 0.25, \quad |\langle \nu_2 | \nu_\mu \rangle|^2 = |U_{\mu 2}|^2 \approx 0.36, \quad |\langle \nu_2 | \nu_\tau \rangle|^2 = |U_{\tau 2}|^2 \approx 0.36$$

$$|\langle \nu_3 | \nu_e \rangle|^2 = |U_{e3}|^2 < 0.02, \quad |\langle \nu_3 | \nu_\mu \rangle|^2 = |U_{\mu 3}|^2 \approx 0.49, \quad |\langle \nu_3 | \nu_\tau \rangle|^2 = |U_{\tau 3}|^2 \approx 0.49$$

Nun kann man das ganze Graphisch darstellen um es besser zu veranschaulichen (Abbildung 5), wobei links in Diagramm die normale Hierarchieanordnung ($m_3 > m_2 > m_1$) der Massen und rechts die invertierte Hierarchieanordnung ($m_2 > m_1 > m_3$) dargestellt ist.

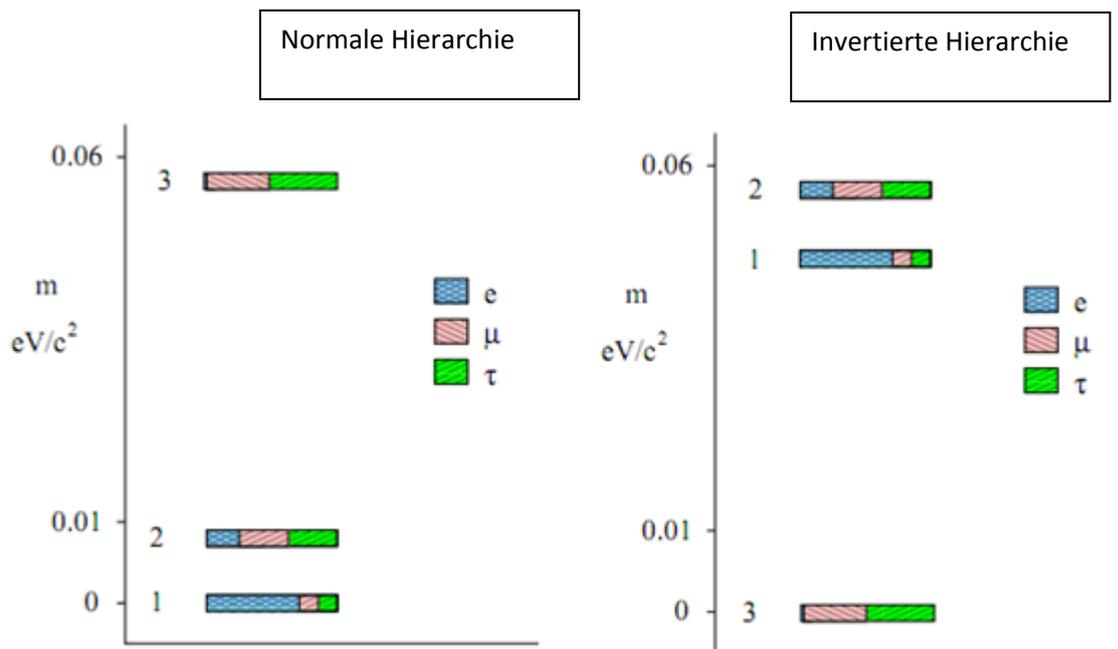


Abbildung 5: Erwartungswerte von verschiedenen Flavoureigenzuständen in Masseeigenzuständen.[4]

Wir haben bis jetzt zwar die Evidenzen für die Neutrino Oszillationen gesehen aber keine Evidenzen für die Existenz von sterile Neutrinos. Durch das Anschauen von der Z^0 Breite haben wir zwar Existenz von mehr als 3 Neutrinos mit einer Masse von $m_\nu < 45 GeV$ ausgeschlossen, aber das gilt nur für die aktive Neutrinos, die an das Z^0 Boson koppeln. Die sterilen Neutrinos sind rechtshändig und koppeln nicht an Z^0 Boson und damit ist die Existenz nicht ausgeschlossen.

LSND-Experiment (Liquid Scintillator Neutrino Detector)

Bei der LSND Experiment hat man die Oszillationen der Form $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ untersucht. Dabei hat man einen Protonenstrahl der Energie von 800 MeV auf ein Wassertarget geschossen. Dabei entstanden Pionen wie bei der Reaktion (5.1), die dann in Myonen und Neutrinos zerfielen. Die Parameter L und E waren so abgestimmt dass $\frac{L}{E} \approx \frac{1[m]}{1[MeV]}$. Nun weiß man aus Gleichung (5.8), dass das Experiment sensitiv auf $\Delta m^2 \approx 1eV^2$ ist. Diese Massendifferenz passt aber zu keinem Massendifferenz aus der 3 Neutrino Oszillationen. Als Erklärung hat man gesagt, dass es eine sterile Neutrino sein soll, der zwar in keine Reaktionen von Standard Modell teilnimmt aber die Neutrino mit einem anderen Flavour können zu ihm oszillieren. In Diagramm 6 sieht man von LSND erlaubte Bereiche in Δm^2 und $\sin^2 2\theta$ Ebene.

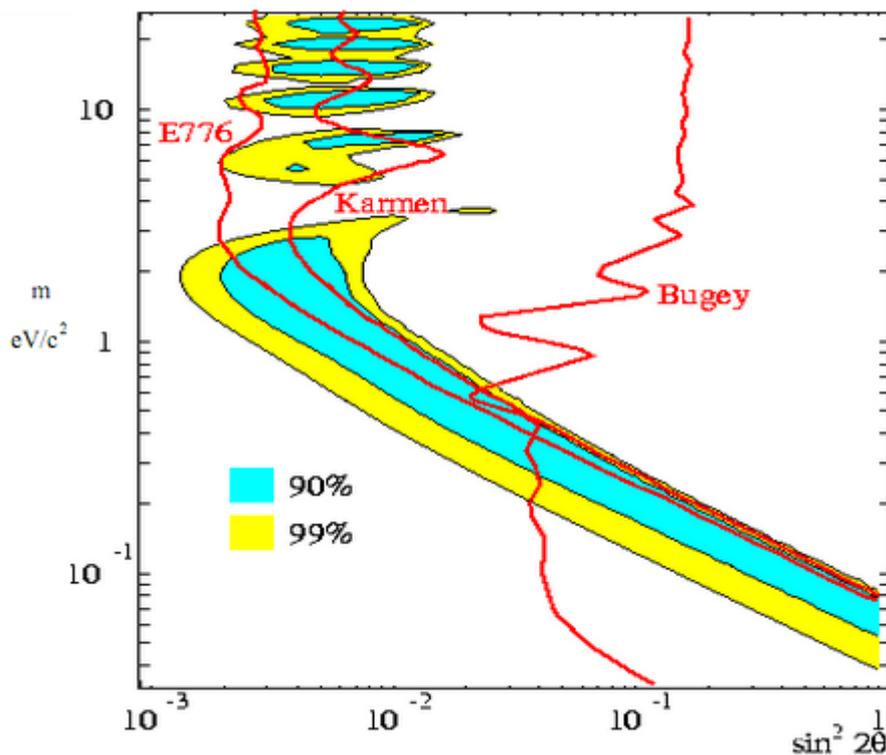


Abbildung 6: Erlaubte bereiche für die Δm^2 [9]

Wenn wir 4 Neutrinos haben ist auch die Mischungsmatrix eine 4x4 Matrix die folgendermassen aussieht:

$$U = R_{34}\tilde{R}_{24}\tilde{R}_{14}R_{23}\tilde{R}_{13}R_{12}P$$

Wobei die R_{ij} Rotationsmatrizen in der ij Richtung sind und P ein Diagonalmatrix mit Majoranaphasen:

$$\tilde{R}_{14} = \begin{pmatrix} c_{14} & 0 & 0 & s_{14}e^{-i\delta_{14}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_{14}e^{i\delta_{14}} & 0 & 0 & c_{14} \end{pmatrix}, \tilde{R}_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{24} & 0 & s_{24}e^{-i\delta_{24}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s_{24}e^{i\delta_{24}} & 0 & c_{24} \end{pmatrix}$$

$$R_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{34} & s_{34} \\ 0 & 0 & -s_{34} & c_{34} \end{pmatrix}$$

Wenn wir die Rotationsmatrizen nun einsetzen erhalten wir:

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} & U_{e4} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} & U_{\mu4} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} & U_{\tau4} \\ U_{s1} & U_{s2} & U_{s3} & U_{s4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13}c_{14} & c_{13}c_{14}s_{12} & c_{14}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & s_{14}e^{-i\delta_{14}} \\ & & & \end{pmatrix} P$$

Übersichtlichkeitshalber wurden nur die Mischungsterme von Elektron Neutrino eingetragen. Der zusätzliche Term $|U_{e4}|^2 = 0.023$ ist wie man sieht sehr klein und damit ist auch der Mischungswinkel θ_{14} sehr klein.

Nun hat man durch die LSND, solare und atmosphärische Experimente die drei Massendifferenzen bestimmt, damit kann man über die absolute Massen jedoch nichts aussagen. Dass es verschiedene hierarchische Anordnung gibt sieht man auch in Diagramm 7.

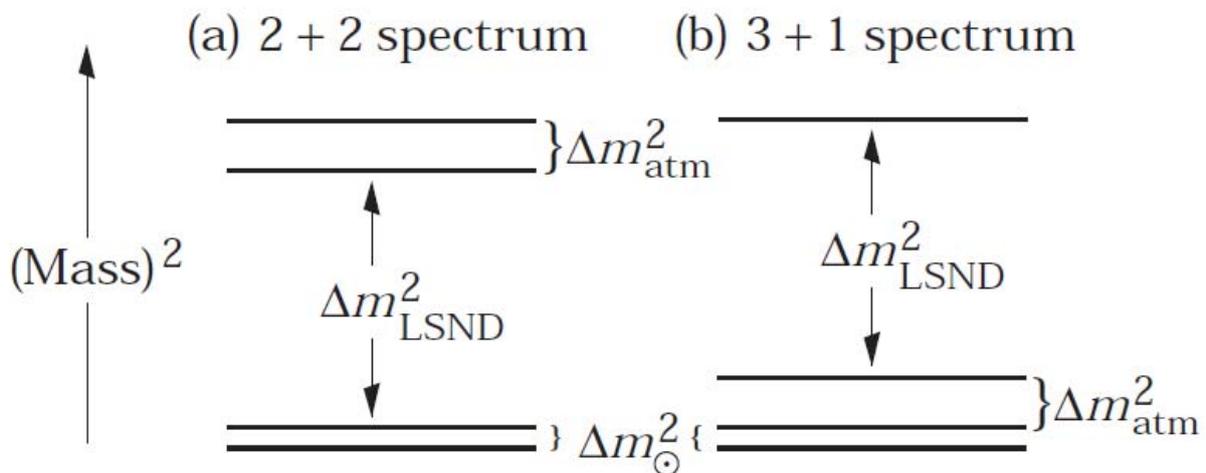


Diagramm 7: Verschiedene Neutrino-Masse Spektren.[8]

Wenn wir 4 Neutrinos haben, haben wir also 3+1 Modell und damit drei weitere Parameter: Δm^2_{41} , $|U_{e4}|$ und $|U_{\mu 4}|$ und da man nur einen Massendifferenz hat ist es nicht möglich die CP Verletzung mit dem Modell zu erklären. Was zur Folge hat, dass es die Oszillationen der Form $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ genauso oft beobachtet werden wie die Oszillationen $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$. Um das zu überprüfen hat man einen neuen Experiment gemacht.

Experiment MiniBooNE:

Um die Ergebnisse von LSND zu testen hat man einen weiteren Experiment gemacht namens MiniBooNE. Dabei hat man einen Protonenstrahl mit einer Energie von 8 GeV auf einen Beriliumtarget geschossen. Dabei entstanden ähnlich wie bei den Prozessen (5.2) Neutrinos und Antineutrinos. Die Untersuchungen haben gezeigt, dass es keine Evidenzen für die Oszillationen der Form $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ gab, aber ähnlich wie bei der LSND Experiment, Evidenzen für die Oszillationen der Form $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ (Diagramm 8). Also ist die CP bei den Prozessen nicht erhalten und da die CP Verletzung mit der 3+1 Modell nicht erklärt werden kann, braucht man noch einen zusätzlichen sterilen Neutrino. In Diagramm 8 sieht man dass man ein Kandidat für das zweite sterile Neutrino ungefähr bei $\Delta m^2 \approx 7eV^2$ hat.

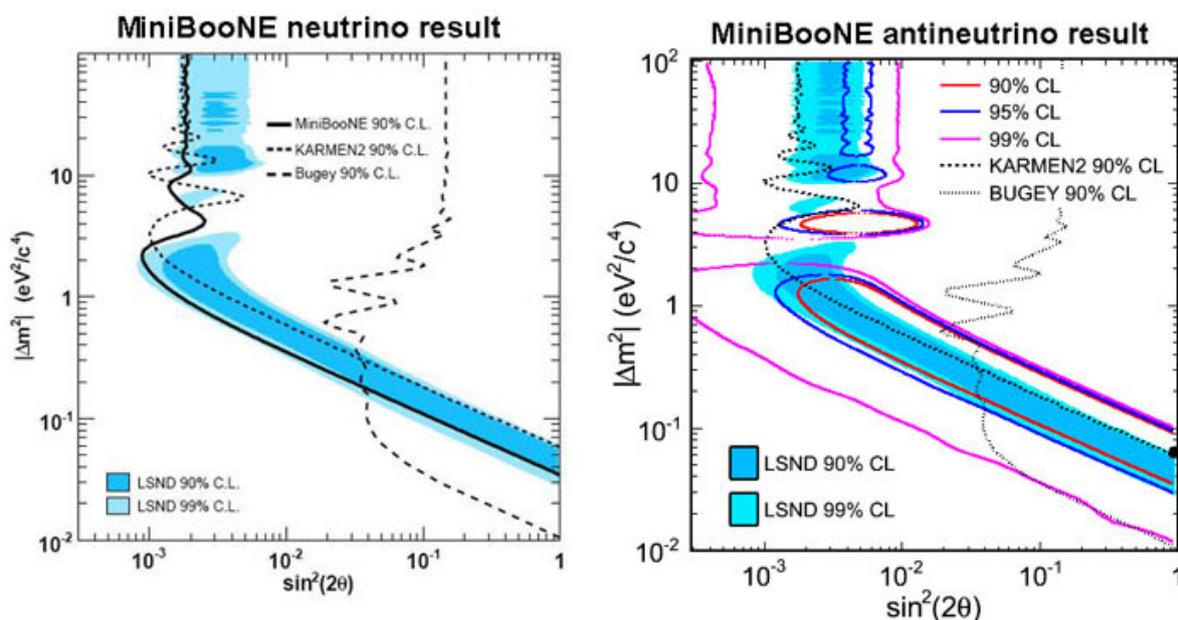


Diagramm 8: Vergleich von Neutrinooszillation mit Antineutrinooszillation.[7]

Damit haben wir dann eine 3+2 Modell und unser Mischungsmatrix ist damit auch automatisch komplizierter geworden. Nun haben wir für die Mischungsmatrix eine 5x5 Matrix die folgendermaßen als Produkt von 9 Rotationsmatrizen geschrieben werden kann.

$$U = \tilde{R}_{35}R_{34}R_{25}\tilde{R}_{24}R_{23}\tilde{R}_{15}\tilde{R}_{14}\tilde{R}_{13}R_{12}P$$

Die Rotationsmatrizen sind analog wie für den 4-Neutrino Modell definiert. Wobei hier erwähnt werden soll, dass man eigentlich 10 Rotationsmatrizen hat aber der Matrix R_{45} hat keine physikalische Bedeutung, da es die Mischung zwischen zwei sterile Neutrinos beschreibt.

Wenn wir nun die Mischungsmatrix ausrechnen, erhalten wir:

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} & U_{e4} & U_{e5} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} & U_{\mu4} & U_{\mu5} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} & U_{\tau4} & U_{\tau5} \\ U_{s11} & U_{s12} & U_{s13} & U_{s14} & U_{s15} \\ U_{s21} & U_{s22} & U_{s23} & U_{s24} & U_{s25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13}c_{14}c_{15} & c_{13}c_{14}c_{15}s_{12} & c_{14}c_{15}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & s_{15}s_{14}e^{-i\delta_{14}} & s_{15}e^{-i\delta_{15}} \end{pmatrix} P$$

Hier sind auch nur die Mischungsterme von Elektron Neutrino eingetragen. Die Werte sieht man in Tabelle 2. Wenn wir nun 5 Neutrinos haben, haben wir also 4 verschieden Massendiferenzen, und analog zu Diagramm 7 kann man nun 3+2/2+3 oder 1+3+1 Modelle untersuchen. Die Ergebnisse zeigen, dass es keine große Unterschiede gibt, aber man konnte doch feststellen, dass das Modell 1+3+1 einen etwas besseren Fit hatte als das 3+2/2+3. [6]

	parameter	Δm_{41}^2 [eV]	$ U_{e4} ^2$	Δm_{51}^2 [eV]	$ U_{e5} ^2$
3+1/1+3	best-fit	1.78	0.023		
	2σ	1.61–2.01	0.006–0.040		
3+2/2+3	best-fit	0.47	0.016	0.87	0.019
	2σ	0.42–0.52	0.004–0.029	0.77–0.97	0.005–0.033
1+3+1	best-fit	0.47	0.017	0.87	0.020
	2σ	0.42–0.52	0.004–0.029	0.77–0.97	0.005–0.035

Tabelle 2 : Ergebnisse von LSND und MiniBooNe Experimenten[6]

Mit zwei zusätzliche Neutrinos kann man die CP Verletzung erklären, dafür betrachten wir die Oszillationswahrscheinlichkeit $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$, dabei verwenden wir, dass $\Delta_{41} \approx \Delta_{42} \approx \Delta_{43}$, $\Delta_{51} \approx \Delta_{52} \approx \Delta_{53}$ und die Massendiferenz von m_{12} , m_{23} , m_{13} sehr klein sind.

$$\begin{aligned}
 P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &\approx |2U_{\mu 5}^* U_{e 5} \sin \Delta_{51} e^{-i\Delta_{54}} + 2U_{\mu 4}^* U_{e 4} \sin \Delta_{41}|^2 \\
 &= 4|U_{\mu 5}|^2 |U_{e 5}|^2 \sin^2 \Delta_{51} + 4|U_{\mu 4}|^2 |U_{e 4}|^2 \sin^2 \Delta_{41} + 8|U_{\mu 5}| |U_{e 5}| |U_{\mu 4}| |U_{e 4}| \\
 &\quad * \sin \Delta_{51} \sin \Delta_{41} \cos(\Delta_{54} + \delta_{54}) \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

Wobei $\delta_{54} = \pm \arg(U_{\mu 5}^* U_{e 5} U_{\mu 4} U_{e 4}^*)$ positiv für $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ und negativ für $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ ist.

Der letzte Term in Gleichung (5.12) ist der Interferenzterm, der für $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ konstruktiv sein kann und für $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ destruktiv. Damit kann $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e) > P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ und die CP Verletzung erklärt werden.[3]

Fazit:

Wenn man auf die Experimente LSND und MiniBooNe vertrauen kann und die sterilen Neutrinos wirklich existieren, wären die gute Kandidaten (da die in keinen Reaktionen teilnehmen), um die dunkle Materie zu erklären.

Ich habe das Bachelorarbeit unter Verwendung von den angegebenen Referenzen selber geschrieben. Alexander Liluashvili

Referenzen:

[1] N.Schmitz Neutrinophysik.

[2] J.M.Conrad Neutrino Experiments

[3] Jennifer A Thomas, Patricia L Vahle Neutrino Oscillations

[4] Chris Waltham Neutrino Oscillations for Dummies

[5] Joachim Kopp, Michele Maltoni, Thomas Schwetz Are there sterile Neutrinos in eV scale?

[6] James Barry, Werner Rodejohann, He Zhang: Light Sterile Neutrinos: Models and Phenomenology.

[7] <http://www.fnal.gov/pub/today/images10/MiniBooNEcombinedMixingmodels.jpg>

[8] http://pdg.lbl.gov/2002/neutrino_mixing_s805.pdf

[9] <http://dnp-old.nsl.msui.edu/images/loglik.gif>