

Fakultät für Physik und Astronomie
Universität Heidelberg

Bachelorarbeit
Im Studiengang Physik
vorgelegt von

Tim Michael Heinz Wolf

geboren in Heppenheim (Deutschland)

2011

Neutrinomassen

Die Bachelorarbeit wurde von Tim Wolf
ausgeführt am
Max-Planck Institut für Kernphysik Heidelberg
unter der Betreuung von
Herr Dr. Werner Rodejohann

Zusammenfassung

Neutrinos gelten im Standardmodell der Teilchenphysik als masselos. Weiterhin gibt es nur linkshändige Neutrinos und rechtshändige Anti-Neutrinos. Experimente zu Neutrinooszillationen weisen jedoch eine nichtverschwindende Masse nach. Als Konsequenz daraus ergibt sich, dass Neutrinos nicht mehr feste Händigkeiten besitzen. Die Dirac-Gleichung wird als grundlegende Gleichung für die Beschreibung relativistischer Fermionen hergeleitet. Durch eine Neutrinomasse wird auch die Frage aufgeworfen, ob Neutrinos Dirac-Teilchen oder Majorana-Teilchen sind, ob also Neutrino und Anti-Neutrino tatsächlich verschiedene Teilchen sind oder nicht. Einen Test dieser Fragestellung stellen die Experimente zum Neutrinolosen Doppel-Beta-Zerfall dar. Der $0\nu\beta\beta$ -Zerfall widerspricht dem Standardmodell der Teilchenphysik und verletzt die Leptonzahl um $\Delta L = 2$. Die theoretische Beschreibung der Neutrinooszillationen wird ebenfalls vorgenommen. Ausgehend von der Annahme, dass Flavoureigenbasis und Masseneigenbasis verschieden sind, werden Folgerungen gezogen.

Abstract

In the standard-model of particle physics neutrinos are considered as massless. Furthermore there only exist lefthanded neutrinos and righthanded anti-neutrinos. Experiments concerning neutrino-oscillations show that neutrinos have a mass. A consequence of this is that neutrinos don't have fixed chirality. The Dirac-equation as the fundamental equation for relativistic fermions is deduced here as well. Through the neutrino mass the question shows up if neutrinos are Dirac-particles oder Majorana-particles. In the case of Dirac-particles neutrino and anti-neutrino are different particles. In the case of Majorana-particles neutrino and anti-neutrino are indistinguishable. Neutrino and Anti-Neutrino are the same particle then. Experiments which can give an answer to this question are the experiments concerning the neutrinoless double-beta-decay. The $0\nu\beta\beta$ -decay violates the lepton number by 2 units ($\Delta L = 2$). The theoretical description of neutrino-oscillations is also given in here. Based on the assumption that flavour-eigenbasis and mass-eigenbasis are different, one arrives at several conclusions.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Dirac-Gleichung	2
3	Lösung der Dirac-Gleichung	7
4	Teilchen-Antiteilchen-Konjugation, Diraceteilchen, Majoranateilchen	12
5	Neutrinomassen	17
6	Neutrinooszillationen	24
7	Neutrinoloser Doppel-Beta-Zerfall	30
8	Zusammenfassung	36

1 Einführung

Im Standardmodell der Teilchenphysik gelten Neutrinos als masselos. Deshalb bewegen sie sich mit Lichtgeschwindigkeit. Weiterhin besitzen Neutrino und Antineutrino feste Helizitäten. ($H = -1$ für ν , $H = +1$ für $\bar{\nu}$)

Vergange Experimente legen jedoch nahe, dass Neutrinos eine nichtverschwindende Masse besitzen. Damit ist folgendes denkbar: Da Neutrinos eine nichtverschwindende Masse besitzen bewegen sie sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit. Damit existiert also eine Lorentztransformation, sodass man sich schneller als ein ν oder $\bar{\nu}$ bewegt. Damit ändern sich jedoch die Helizitäten. Es stellt sich also die Frage, ob es tatsächlich anders als im Standardmodell erklärt ν mit $H = +1$ und $\bar{\nu}$ mit $H = -1$ existieren.

Da Neutrinos Leptonen ohne elektrische Ladung sind besteht für sie die Möglichkeit, dass sie ihr eigenes Antiteilchen sind so wie man es beispielsweise vom π^0 -Meson kennt. Man spricht in diesem Fall von Majorana-Teilchen. Dieser Gedanke ist naheliegend, da man bisher keine ν mit $H = +1$ und keine $\bar{\nu}$ mit $H = -1$ beobachtet hat. In diesem Falle wäre die Helizität eine Eigenschaft des selben Teilchens. Es stellt sich also die Frage, ob ν mit $H = -1$ und $\bar{\nu}$ mit $H = -1$ das gleiche Teilchen sind oder nicht. Wenn es sich um verschiedene Teilchen handelt, so spricht man von Dirac-Teilchen.

Die theoretische Beschreibung dieses Sachverhalts ist Gegenstand dieser Arbeit. Da die Neutrinos Fermionen sind, die sich relativistisch bewegen, benötigt man eine lorentzkovariante Beschreibung von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Diese ist durch die Dirac-Gleichung gegeben. Die Dirac-Gleichung wird im ersten Teil der Arbeit hergeleitet und im zweiten Teil Lösungen betrachtet.

Im Hinblick auf die Frage, ob Neutrinos Dirac- oder Majorana-Teilchen sind, wird im dritten Abschnitt die Teilchen-Antiteilchen-Konjugation eingeführt und Unterschiede zur Ladungskonjugation verdeutlicht. Weiterhin werden Bedingungen und mathematische Definitionen von Dirac- und Majorana-Teilchen eingeführt.

Zentraler Punkt ist wie ein Massenterm in der Dirac-Gleichung entsteht, bzw. welche Konsequenzen verschiedene Massenterme für die Beschreibung von Neutrinos haben.

Die Experimente, die Hinweise auf nichtverschwindende Neutrinomassen geben, weisen Neutrinooszillationen der verschiedenen Lepton-Flavours nach. Die theoretische Beschreibung hiervon wird ebenfalls geliefert.

Der β -Zerfall des Neutron $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ist gut verstanden. Ebenso ist der $2\nu\beta\beta$ -Zerfall ($2n \rightarrow 2p + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$) experimentell nachgewiesen. Falls Neutrinos massebehaftete Majorana-

Teilchen sind, ist ebenfalls der bisher noch nicht nachgewiesene Prozess $2n \rightarrow 2p + 2e^-$ denkbar. Eine genauere Betrachtung wird ebenfalls vorgenommen. Er stellt eine Möglichkeit dar, um den Majorana- oder Dirac-Charakter von Neutrinos nachzuweisen.

2 Dirac-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik beschreibt Quantensysteme und ihre Zeitentwicklung. Sie lautet ($\hbar = 1$):

$$\left(-\frac{1}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right)\psi(\vec{x}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) \quad (1)$$

Offensichtlich ist diese Gleichung nicht relativistisch invariant, da in ihr verschiedene Ordnungen der Ableitungen von Raum und Zeit auftreten. Ein Ansatz um eine relativistisch invariante Gleichung zu erhalten, ist die relativistische Energie-Impulsbeziehung $E^2 = p^2 + m_0^2$ ($c = 1$) durch die quantenmechanischen Operatoren zu ersetzen. Mit den Ersetzungen $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$, $p \rightarrow \frac{\nabla}{i}$ gelangt man zur Klein-Gordon-Gleichung.

$$(-\Delta + m_0^2)\psi(\vec{x}, t) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{x}, t) \quad (2)$$

Mit Hilfe des Impuls-Vierer-Vektors $p^\mu = (E, \vec{p})$, entsprechender Ersetzung durch quantenmechanische Operatoren, sowie dem Zusammenhang $p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu$ (Einstein'sche Summenkonvention, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$) lautet die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\bar{p}_\mu p^\mu - m_0^2)\psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (3)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung ist somit lorentzinvariant, beschreibt allerdings nur Spin-0-Teilchen. Um zu einer relativistisch invarianten Gleichung für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen zu gelangen, verwendet man folgenden Ansatz: [Wac05]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = \mathbb{H}\psi(\vec{x}, t) \quad (4)$$

An \mathbb{H} werden nun folgende Anforderungen gestellt:

- \mathbb{H} ist linear und hermitesch.
- \mathbb{H} darf nur räumliche Ableitungen 1. Ordnung enthalten, da die Gleichung sonst keinesfalls lorentzinvariant ist.
- \mathbb{H}^2 muss die relativistische Energie-Impulsbeziehung reproduzieren.

Damit ergibt sich für \mathbb{H} folgender Ansatz:

$$\mathbb{H} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m_0 \quad (5)$$

Wobei hier $\mathbf{p} = \frac{\nabla}{i}$ ist.

Weiterhin soll gelten:

$$\mathbb{H}^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2 \quad (6)$$

Hierbei ist zu erwähnen, dass für α und β bisher keine Einschränkungen gemacht wurden. α kann man aber als 3-komponentigen Vektor auffassen. In der weiteren Rechnung wird sich die Struktur der beiden Größen klären. [Wac05], [BjD66]

Setzt man in Gleichung (5) die Definition des Impulsoperators ein und quadriert, so erhält man:

$$\mathbb{H}^2 = -\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \partial_i\right) \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \partial_j\right) + m_0^2 \beta^2 + \frac{1}{i} \left[\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \partial_i\right) \beta + \beta \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \partial_i\right) \right] \quad (7)$$

$$= -\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \partial_i\right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \partial_i \partial_j + m_0^2 \beta^2 + \frac{1}{i} \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i \quad (8)$$

Wobei für den zweiten Summanden in Gleichung (8) folgendes verwendet wurde:

$$\sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}}^3 \alpha_i \alpha_j \partial_i \partial_j = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \partial_i \partial_j$$

Ein Vergleich von (6) und (8) zeigt, dass die α_i und β keine gewöhnlichen Zahlen sein können. Um die Gleichheit von (6) und (8) zu gewährleisten, muss folgendes gelten:

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \quad (i \neq j) \quad (9)$$

Hierbei bezeichnet $\{ , \}$ den Antikommutator. Da \mathbb{H} hermitesch sein soll, gilt: $\alpha_i = \alpha_i^\dagger$ und $\beta = \beta^\dagger$. α_i und β sind also quadratische Matrizen. Die Dimension ist bisher noch unbekannt. Um die Dimension herauszufinden, betrachtet man zunächst die Spur der α_i und von β . Hierfür gilt:

$$\text{tr}(\alpha_i) = \text{tr}(\alpha_i \beta^2) = \text{tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{tr}(\alpha_i) = 0 \quad (10)$$

Wobei die zyklische Vertauschbarkeit der Spur im zweiten Schritt und die Antikommutatorrelation aus (9) im dritten Schritt verwendet wurde. Für β gilt das gleiche Argument.

Da $\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$ sind als Eigenwerte für α_i und β nur ± 1 möglich. Mit Gleichung (10) folgt dann, dass die Zahl positiver und negativer Eigenwerte gleich ist, da die Spur invariant unter Basiswechsel ist.

Damit folgt, dass die Dimension n der α_i und von β gerade ist. Es werden also 4 spurlose, hermitesche und paarweise antikommutierende Matrizen gesucht. Für $n = 2$ bilden die 3 paarweise antikommutierenden Pauli-Matrizen σ_i eine Basis des Untervektorraums der spurlosen und hermiteschen Matrizen. Eine weitere (vierte) spurlose, hermitesche 2×2 -Matrix kann also als Linearkombination der Pauli-Matrizen dargestellt werden und kann damit nicht mehr mit allen σ_i paarweise antikommutieren.

Für $n = 4$ können die Bedingungen aus Gleichung (10) erfüllt werden. In der sogenannten Dirac-Darstellung lauten α_i und β :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Hierbei sind σ_i die drei 2×2 -Pauli-Matrizen. Es gibt noch weitere Darstellungen der α_i und von β , die aber hier nicht benötigt werden. Im folgenden wird bei Berechnungen die Dirac-Darstellung verwendet.

Die Dirac-Gleichung kann also durch den Ansatz in (4) mit Hilfe der Matrizen aus (11) geschrieben werden. Die Lösungen der Dirac-Gleichung sind also 4-komponentige Spinoren.

Zunächst wird die Dirac-Gleichung umformuliert. Dazu führt man die vier Matrizen γ^μ ($\mu \in \{0, \dots, 3\}$) ein, die folgendermaßen definiert sind: $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha_i$ $i \in \{1, 2, 3\}$. Für die γ -Matrizen gilt wegen der Eigenschaften von α_i und β aus Gleichung (9), sowie der Forderung der Hermitizität von α_i und β : [Wac05]

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\dagger} = g^{\mu\mu}\gamma^\mu = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad (12)$$

In Dirac-Darstellung lauten die γ -Matrizen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Den vier γ -Matrizen wird eine weitere Matrix γ^5 hinzugefügt. Es gilt:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (14)$$

γ^5 antivertauscht mit allen γ^μ :

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (15)$$

In Dirac-Darstellung gilt für γ^5 :

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Dirac-Gleichung lässt sich schreiben als:

$$[\gamma^\mu p_\mu - m_0]\psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (16)$$

Wobei $p_\mu = i\partial_\mu = i\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$ [Wac05]

Hierbei sei zunächst angemerkt, dass es sich bei γ^μ nicht um einen Vierervektor handelt. Das Transformationsverhalten der γ^μ ist noch nicht bestimmt. Die Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung soll nun noch gezeigt werden. Lorentz-Kovarianz liegt vor, wenn die Gleichung ihre Gestalt unter Lorentz-Transformation nicht ändert. Es soll also in einem anderen Inertialsystem gelten:

$$[\gamma'^\mu p'_\mu - m_0]\psi'(\vec{x}', t') = 0 \quad (17)$$

Wobei $\psi'(\vec{x}', t')$ den selben physikalischen Zustand im neuen Inertialsystem beschreibt wie $\psi(\vec{x}, t)$ im alten Inertialsystem. Die Transformation in ein anderes Inertialsystem lässt die Eigenschaften der γ -Matrizen aus (12) unberührt. Es gilt, dass eine unitäre Transformation zwischen γ'^μ und γ^μ vermittelt, also dass gilt:

$$\gamma'^\mu = U^\dagger \gamma^\mu U, \quad U^\dagger = U^{-1} \quad (18)$$

Der Beweis hierzu ist sehr länglich und mitunter kompliziert. Er soll hier nicht vorgestellt werden. Er ist in [Rei08] zu finden.

Das bedeutet nun, dass die γ -Matrizen in den verschiedenen Inertialsystemen nur eine andere Darstellung haben. Man kann deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die γ -Matrizen mit den γ' -Matrizen übereinstimmen. [Wac05]

Die Dirac-Gleichung im gestrichenen System lautet damit:

$$[\gamma^\mu p'_\mu - m_0]\psi'(\vec{x}', t') = 0 \quad (19)$$

Durch die Bispinorttransformation $D(\Lambda)$ gelangt man von $\psi(\vec{x}, t)$ zu $\psi'(\vec{x}', t')$. Da die Lorentztransformation linear ist, muss auch die Bispinorttransformation linear sein. Im folgenden wird das Argument als x bzw. x' zusammengefasst. Es gilt also:

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = D(\Lambda)\psi(x) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \quad (20)$$

Genauso gilt:

$$\psi(x) = D^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = D^{-1}(\Lambda)\psi'(\Lambda x) \quad (21)$$

Ebenfalls gilt:

$$\psi(x) = D(\Lambda^{-1})\psi'(x') \quad (22)$$

Da Gleichung (21) und (22) für alle Lösungen der Dirac-Gleichung gelten sollen, ergibt sich folgender Zusammenhang für die Bispinortransformation. [Wac05]

$$D^{-1}(\Lambda) = D(\Lambda^{-1}) \quad (23)$$

Nun soll eine Gleichung gefunden werden, die D näher charakterisiert. Dazu werden die Größen der gestrichenen Dirac-Gleichung (19) durch die entsprechenden transformierten ungestrichenen Größen ersetzt. Damit folgt:

$$[\gamma^\mu p_\nu [\Lambda^{-1}]^\nu_\mu - m_0] D(\Lambda)\psi(x) = 0 \quad (24)$$

Wobei hier verwendet wurde, dass p_ν sich kovariant transformiert. Multipliziert man (24) mit $D^{-1}(\Lambda)$ von links, so ergibt sich:

$$[D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu p_\nu [\Lambda^{-1}]^\nu_\mu D(\Lambda) - m_0]\psi(x) = 0 \quad (25)$$

Lorentzkovarianz liegt also vor, falls es für jede Lorentztransformationen Λ eine Matrix $D(\Lambda)$ gibt, sodass gilt:

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu [\Lambda^{-1}]^\nu_\mu D(\Lambda) = \gamma^\nu \quad (26)$$

Die Existenz von $D(\Lambda)$ ist bis hierher nicht klar. Sie soll im weiteren Verlauf auch nicht bewiesen werden. Es sei aber angemerkt, dass die Existenz der Matrix $D(\Lambda)$ gezeigt werden kann. Erwähnenswert ist jedoch noch, dass die Matrix $D(\Lambda)$ im allgemeinen nicht unitär ist. Man kann für sie folgende Beziehungen zeigen. [Wac05]

$$D^\dagger(\Lambda) = b\gamma^0 D^{-1}(\Lambda)\gamma^0, \quad b = \frac{\Lambda^0_0}{|\Lambda^0_0|} \quad (27)$$

Damit ist die Dirac-Gleichung lorentzinvariant.

Bei der Bildung von lorentzinvarianten Skalaren mit Hilfe von ψ als Lösung der Dirac-Gleichung ist es notwendig eine Größe zu haben, die sich invers zu ψ unter Lorentztransformation verhält. Eine solche Größe ist der adjungierte Bispinor $\bar{\psi}$. Er lautet:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

Der adjungierte Bispinor löst die adjungierte Dirac-Gleichung:

$$-p_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m_0 \bar{\psi} = 0 \quad (28)$$

In Dirac-Darstellung lautet er damit:

$$\bar{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$$

Wie angemerkt verhält sich $\bar{\psi}$ invers zu ψ unter Lorentztransformation, denn es gilt:

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0 = [D(\Lambda)\psi(x)]^{\dagger}\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)D^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 = b\psi^{\dagger}(x)\gamma^0 D^{-1}(\Lambda) \quad (29)$$

$$= b\bar{\psi}(x)D^{-1}(\Lambda) \quad (30)$$

Wobei hier im vorletzten Schritt (27) verwendet wurde.

Es gilt also:

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}D^{-1}(\Lambda)D(\Lambda)\psi = \bar{\psi}\psi \quad (31)$$

Die Größe $\bar{\psi}\psi$ transformiert sich also wie ein Lorentzskalar. [Wac05]

3 Lösung der Dirac-Gleichung

Wie bereits erwähnt sind die Lösungen der Dirac-Gleichung 4-komponentige Spinoren. Um Lösungen der Dirac-Gleichung zu erhalten, wird ein Ansatz einer ebenen Welle gewählt.

$$\psi_{-}(x) = ue^{-ip_{\mu}x^{\mu}} = ue^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} \quad (32)$$

$$\psi_{+}(x) = ve^{ip_{\mu}x^{\mu}} = ve^{i(Et - \vec{p}\vec{x})} \quad (33)$$

Hierbei ist p_{μ} kein Operator, sondern der Impuls-Vierervektor. u und v sind zeitlich und räumlich konstante Spinoren. Dabei stellt (32) Lösungen mit positiver Energie dar und (33) Lösungen mit negativer Energie, welche zunächst unphysikalisch erscheinen. Lösungen negativer Energie können jedoch als Antiteilchen-Wellenfunktion interpretiert werden. [Gro89]

Dieser Zusammenhang wird im nächsten Kapitel näher erläutert.

Es müssen damit die Spinoren u und v bestimmt werden. Sie sind durch Lösung folgender Gleichung gegeben.

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu} - m_0)u = 0 \quad (34)$$

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu} + m_0)v = 0 \quad (35)$$

Hierbei sei nochmals betont, dass p_{μ} hierbei kein Operator ist, sondern die Eigenwerte von ψ_{\pm} aus (32) und (33). Führt man die Matrixmultiplikationen aus so gelangt man für u zu:

$$(E - m_0)u_{1/2} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_{3/4} = 0 \quad (36)$$

$$(E + m_0)u_{3/4} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) u_{1/2} = 0 \quad (37)$$

Hier zeigt sich bereits, dass das Gleichungssystem für $m_0 = 0$ entkoppelt. Die Gleichungen sind dann linear abhängig und der Lösungsraum der Dirac-Gleichung ist dann nur zweidimensional. Für v verhält es sich genauso. Durch Nachrechnen verifiziert man, dass folgende Spinoren für u und v die Gleichungen lösen. [Gro89]

$$u(p) = \sqrt{E + m_0} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m_0} \chi_s \end{pmatrix}, \quad v(p) = \sqrt{E + m_0} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m_0} \hat{e} \chi_s^* \\ \hat{e} \chi_s^* \end{pmatrix} \quad (38)$$

Hierbei sind χ_s nichtrelativistische zweikomponentige Pauli-Spinoren. Der Index s deutet an, dass noch ein weiterer Freiheitsgrad bei der Wahl der Pauli-Spinoren vorhanden ist. Es handelt sich hierbei um den Spin. Durch Angabe des Energievorzeichens, des Impulses sowie einer Projektion des Spins sind die Zustände bestimmt. \hat{e} in (38) ist dabei folgende Matrix. [Gro89]

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist zunächst nicht klar, warum ein Zusammenhang zwischen den Spinoren in u und v besteht. Dieser wird durch die Teilchen-Antiteilchen-Konjugation vermittelt. Dieser Sachverhalt wird im nächsten Kapitel genauer behandelt.

Es scheint hier zweckmäßig die Zustände χ_s als Eigenzustände zum Helizitätsoperator $\mathcal{H} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ wählen. Die Eigenwerte von \mathcal{H} sind ± 1 , abhängig davon, ob Spinprojektion und Impuls parallel oder antiparallel ausgerichtet sind. Folgendes ist hierbei auffällig: Ein Teilchen, für das $m_0 \neq 0$ gilt, bewegt sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit. Es existiert also eine Lorentztransformation in ein Bezugssystem, in dem der Impuls in die entgegengesetzte Richtung zeigt. In diesem Bezugssystem hat der Eigenwert der Helizität ein anderes Vorzeichen. Der Helizitätsoperator ist also für $m_0 \neq 0$ nicht lorentzinvariant. Für $m_0 = 0$ existiert die obige Lorentztransformation nicht, sodass in diesem Fall der Helizitätsoperator lorentzinvariant ist. Man wählt nun die Pauli-Spinoren χ_+ und χ_- als Eigenzustände zu \mathcal{H} : [Schm97], [Gro89], [Moh98]

$$\mathcal{H}\chi_+ = \chi_+, \quad \mathcal{H}\chi_- = -\chi_- \quad (39)$$

Hierbei hat man noch die Freiheit einer Phase zwischen χ_+ und χ_- . Fordert man, dass die Relation $-i\hat{e}\chi_{\pm} = \chi_{\mp}$ gelten soll, so ergibt sich als mögliche Basis der Pauli-Spinoren: $\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}$, welche die Forderung erfüllt. Diese Wahl der Basis der Pauli-Spinoren ist für \vec{p} in $+z$ -Richtung sinnvoll. Die Lösungen der Dirac-Gleichung lauten damit: [Gro89]

$$u_{\pm} = \sqrt{E + m_0} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m_0} \chi_{\pm} \end{pmatrix} = \sqrt{E + m_0} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \pm \frac{|\vec{p}|}{E + m_0} \chi_{\pm} \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$v_{\pm} = \sqrt{E + m_0} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m_0} \hat{e}\chi_{\pm}^* \\ \hat{e}\chi_{\pm}^* \end{pmatrix} = -i\sqrt{E + m_0} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m_0} \chi_{\mp} \\ \mp\chi_{\mp} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Hierbei wurde verwendet, dass $\hat{e}\chi_{\pm}^* = \pm i\chi_{\mp}$ gilt.

Im Standardmodell der Teilchenphysik werden Neutrinos als masselos beschrieben. Daher ist es sinnvoll sich die Lösungen der Dirac-Gleichung für $m_0 = 0$ anzuschauen. Die Spinoren aus (40) und (41) werden dann, wegen $E = p$ zu:

$$u_{\pm}^0 = \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \pm\chi_{\pm} \end{pmatrix}, \quad v_{\pm}^0 = -i\sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\mp} \\ \mp\chi_{\mp} \end{pmatrix} \quad (42)$$

In Gleichung (42) wird erneut deutlich, dass die Dirac-Gleichung für den Fall $m_0 = 0$ vollständig entkoppelt und die Lösungen linear abhängig werden und sich somit nur ein zweidimensionaler Lösungsraum anstatt des für $m_0 \neq 0$ vierdimensionalen Lösungsraums ergibt. Die lineare Abhängigkeit zeigt sich anhand folgender Beziehung: [Gro89]

$$u_{\pm}^0 = iv_{\mp}^0 \quad (43)$$

Die Dirac-Gleichung besteht in diesem Falle aus zwei linear abhängigen Gleichungen für die Pauli-Spinoren χ_{\pm} . Es gilt: (geändert aus [Gro89])

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu})u = \left[E \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \vec{p} \right] \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \pm\chi_{\pm} \end{pmatrix} = 0 \quad (44)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{E}[E \mp \vec{\sigma}\vec{p}]\chi_{\pm} = 0 \\ \sqrt{E}[\mp E + \vec{\sigma}\vec{p}]\chi_{\pm} = 0 \end{cases} \quad (45)$$

Unabhängig davon, ob das obere oder das untere Vorzeichen betrachtet wird, sind die beiden Gleichungen linear abhängig. Damit wird deutlich, dass zweikomponentige Spinoren zur Beschreibung von masselosen Fermionen, also auch zur Beschreibung von Neutrinos im Rahmen des Standardmodells, ausreichen. Diese zweikomponentigen Spinoren sind gegeben durch die Lösung von folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 - \mathcal{H})\chi_{+} &= 0 \\ \frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 + \mathcal{H})\chi_{-} &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Wobei wieder $E = p$ verwendet wurde. Die Lösungen χ_{\pm} für $m_0 = 0$ nennt man Weyl-Spinoren. Bei den beiden Operatoren aus (46) handelt es sich um Projektionsoperatoren. Dazu fehlt noch folgendes:

$$\left[\frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 \mp \mathcal{H}) \right]^2 \chi_{\mp} = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 \mp \mathcal{H}) \chi_{\mp} = \chi_{\mp} \quad (47)$$

Diese Gleichung ist aber offensichtlich erfüllt, da χ_{\pm} Eigenzustände zu \mathcal{H} sind. Für $m_0 = 0$ besitzen die Lösungen der Dirac-Gleichung also feste Helizitäten wie man durch Anwenden des erweiterten Operators

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 \mp \mathcal{H}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 \mp \mathcal{H}) \end{pmatrix}$$

auf u bzw. v nachweist. Dies ist im Einklang mit der Beschreibung von Neutrinos im Standardmodell.

Um nun einen lorentzinvarianten Operator zu erhalten, der auch für $m_0 \neq 0$ Sinn hat, fordert man, dass dieser Operator für $m_0 = 0$ die gleichen Eigenzustände haben soll, die in (42) als Lösungen der Dirac-Gleichung für $m_0 = 0$ zu sehen sind. Die Chiralitäts-Operatoren erfüllen diese Forderung. Sie sind definiert als: $P_{R,L} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma^5)$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)u_{\pm}^0 &= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)\sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \pm\chi_{\pm} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \pm \chi_{\pm} \\ \pm\chi_{\pm} + \chi_{\pm} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)u_+^0 = u_+^0, \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)u_-^0 = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Für $\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)$ gilt analog die gewünschte Eigenschaft:

$$\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)u_-^0 = u_-^0, \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)u_+^0 = 0 \quad (49)$$

Beim Anwenden des Chiralitäts-Operators auf v muss jedoch folgendes beachtet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)v_{\pm}^0 &= \frac{-i\sqrt{E}}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5) \begin{pmatrix} \chi_{\mp} \\ \mp\chi_{\mp} \end{pmatrix} = \frac{-i\sqrt{E}}{2} \begin{pmatrix} \chi_{\mp} \mp \chi_{\mp} \\ \mp\chi_{\mp} \mp \chi_{\mp} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)v_+^0 = 0, \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)v_-^0 = v_-^0 \end{aligned} \quad (50)$$

Für $\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)$ folgt analog:

$$\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)v_+^0 = v_+^0, \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)v_-^0 = 0 \quad (51)$$

Dies zeigt, dass für $m_0 = 0$ die Begriffe der Chiralität und der Helizität zusammenfallen.

Während $\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)u^0$ den rechtshändigen Anteil eines Spinors herausprojiziert, also den Anteil des Spins, der parallel zum Impuls gerichtet ist, so liefert $\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)v^0$ den linkshändigen Anteil, der antiparallel zum Impuls gerichtet ist. Definitionsgemäß gilt jedoch für den händigen Anteil einer Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} \psi_R &\equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5)\psi = P_R\psi \\ \psi_L &\equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)\psi = P_L\psi \end{aligned} \quad (52)$$

Im Zusammenhang zu massiven Neutrinos stellt sich nun die Frage, ob die händigen Komponenten eines beliebigen Spinors noch immer die Dirac-Gleichung lösen. Unter Verwendung von (38) gilt für $m_0 \neq 0$: [Gro89]

$$u_L(p) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)u(p) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5)\sqrt{E + m_0} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m_0}\chi_s \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{E + m_0} \begin{pmatrix} \chi_s - \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m_0}\chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m_0}\chi_s - \chi_s \end{pmatrix} \neq u_-(p) \quad (54)$$

Gleichung (54) stellt aber keine Lösung der Dirac-Gleichung dar (gegeben in (38)). Falls Neutrinos also Masse besitzen, so besitzen sie keine feste Chiralität. Eine Lösung der Dirac-Gleichung u_- hat also auch rechtshändige Anteile. Die in (48) bis (51) dargestellten Gleichungen gelten also für $m_0 \neq 0$ nicht.

Es gilt $\mathbb{1} = P_L + P_R$ wie man aus (52) erkennen kann. Damit können Lösungen der Dirac-Gleichung in Teile definierter Händigkeit zerlegt werden. $u_-(p) = P_L u_-(p) + P_R u_-(p)$. Führt man diese Rechnung mit der Lösung für $u_-(p)$ aus (40) aus so folgt: [Gro89]

$$\begin{aligned} u_-(p) &= (\mathbb{1} - \gamma^5)u_-(p) + (\mathbb{1} + \gamma^5)u_-(p) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{E + m_0} \left[\left(1 + \frac{|\vec{p}|}{E+m_0}\right) \begin{pmatrix} \chi_- \\ -\chi_- \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{|\vec{p}|}{E+m_0}\right) \begin{pmatrix} \chi_- \\ \chi_- \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (55)$$

Führt man der unter Verwendung der Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = p^2 + m_0^2$ und unter Berücksichtigung von $m_0 \ll E$ in (55) eine Taylorentwicklung durch so gelangt man zu:

$$u_-(p) \approx \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_- \\ -\chi_- \end{pmatrix} + \frac{m}{2\sqrt{E}} \begin{pmatrix} \chi_- \\ \chi_- \end{pmatrix} \quad (56)$$

Für $m_0 = 0$ gilt $u_{+,-}^0 = u_{R,L}^0$. Unter Verwendung von (42) gelangt man in (56) zu: [Gro89]

$$u_-(p) \approx u_L^0(p) + \frac{m_0}{2E} u_R^0(-p) \quad (57)$$

Physikalisch bedeutet das, dass massebehaftete Neutrinos sowohl rechts- als auch linkshändige Anteile aufweisen. Diese Erkenntnis wird später bei der Betrachtung des Neutrinolosen Doppel-Beta-Zerfalls noch von Bedeutung sein.

4 Teilchen-Antiteilchen-Konjugation, Dirac-Teilchen, Majoranateilchen

Die Wellenfunktionen für Teilchen und Anti-Teilchen sind nicht unabhängig. Zwischen ihnen vermittelt die Teilchen-Antiteilchen-Konjugation \hat{C} . Um dies zu verstehen ist es am sinnvollsten die Löcher-Theorie Diracs zu betrachten. Fügt man in der Dirac-Gleichung noch das elektromagnetische Potential A_μ hinzu, so dient sie auch zur Beschreibung von geladenen Fermionen wie Elektronen. Diracs Interpretation der Lösungen negativer Energie war, dass die negativen Energieniveaus mit Elektronen aufgefüllt werden. Dabei wird das Pauli'sche Ausschlussprinzip beachtet. Der Vakuumzustand ist dann derjenige Zustand in dem alle Elektronen negative Energieniveaus besetzen und kein Elektron in einem positiven Energieniveau ist. Als Konsequenz dieser Annahme wird die Absorption von Strahlung durch Elektronen möglich. Ein Elektron negativer Energie wird dann durch Absorption in einen Zustand positiver Energie angehoben. Durch die Absorption fehlt also ein Elektron negativer Energie im See der negativen Energien. Dieses Fehlen wird relativ zum Vakuum als Anwesenheit eines Teilchens mit Ladung $-e$ ($e < 0$) und Energie $+E$ wahrgenommen, einem Positron. Es wird aber ebenfalls ein Elektron mit Ladung $+e$ und Energie $+E$ beobachtet. Damit ist aus physikalischer Sicht einzusehen, dass die Wellenfunktionen für Teilchen und Antiteilchen nicht vollständig unabhängig sind. [Wac05], [BjD66]

Die Dirac-Gleichung mit elektromagnetischem Potential lautet:

$$[\gamma^\mu(p_\mu - eA_\mu) - m_0]\psi(x) = 0 \quad (58)$$

Nach den obigen Überlegungen soll für die Antiteilchen-Wellenfunktion gelten:

$$[\gamma^\mu(p_\mu + eA_\mu) - m_0]\psi^C(x) = 0 \quad (59)$$

Nun wird eine Transformation gesucht, die den Übergang von (58) zu (59) vermittelt. Beim Übergang ändert sich das Vorzeichen vor A_μ . Dies ist durch komplexe Konjugation zu erreichen, denn es gilt:

$$i\partial_\mu = -(i\partial_\mu)^*, \quad A_\mu = A_\mu^*.$$

Setzt man das in (58) ein, so gelangt man zu: [BjD66]

$$[\gamma^{\mu*}(p_\mu + eA_\mu) + m_0]\psi^*(x) = 0 \quad (60)$$

Um (60) auf die Form von (59) zu bringen, muss das relative Vorzeichen zwischen m_0 und dem Rest geändert werden. Dies ist möglich, wenn man eine invertierbare Matrix $C\gamma^0$ findet, die folgende Eigenschaft erfüllt: [BjD66]

$$(C\gamma^0)\gamma^{\mu*}(C\gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu \Leftrightarrow (C\gamma^0)\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu(C\gamma^0)$$

Mit dieser Bedingung gelangt man durch Linksmultiplikation von $C\gamma^0$ in (60) zu:

$$[\gamma^\mu(p_\mu + eA_\mu) - m_0]C\gamma^0\psi^*(x) = 0 \quad (61)$$

Daraus kann man ablesen, dass:

$$C\gamma^0\psi^*(x) = C\bar{\psi}^T = \psi^{\mathcal{C}} \quad (62)$$

Die Matrix C ist in Dirac-Darstellung gegeben durch:

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$$

Damit folgt für die Antiteilchen-Wellenfunktion wegen $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$:

$$\psi \xrightarrow{\mathcal{C}} \psi^{\mathcal{C}} = i\gamma^2\psi^* \quad (63)$$

Hieraus folgt wegen $(\gamma^2)^2 = -\mathbb{1}$ die wichtige Eigenschaft:

$$\psi^{\mathcal{C}\mathcal{C}} = i^2(\gamma^2)^2\psi = \psi \quad (64)$$

Nun kann auch der zunächst unklare Zusammenhang der Spinoren u und v also den Lösungen positiver und negativer Energie in (38) erklärt werden. Die Operation $\hat{\mathcal{C}}$ vermittelt zwischen Teilchen und Anti-Teilchen. Damit verlangt man zwischen u und v den Zusammenhang:

$$\begin{aligned} u(p, s) &\xrightarrow{\mathcal{C}} u^{\mathcal{C}}(p, s) = i\gamma^2 u^*(p, s) = v(p, s) \\ v(p, s) &\xrightarrow{\mathcal{C}} v^{\mathcal{C}}(p, s) = i\gamma^2 v^*(p, s) = u(p, s) \end{aligned} \quad (65)$$

Gleichung (38) erfüllt diese Forderung wie man nachrechnen kann. [Gro89], [BjD66]

Bisher wurde nur von der Teilchen-Antiteilchen-Konjugation gesprochen. Weiterhin gibt es noch die Ladungskonjugation \mathcal{C} . Sie ändert alle ladungsartigen Quantenzahlen eines Zustands. Durch Ladungskonjugation werden beispielsweise Ladung oder Leptonzahl invertiert. Alle anderen Quantenzahlen bleiben davon jedoch unberührt. So ist beispielsweise die Helizität oder die Händigkeit nach Ladungskonjugation die gleiche wie zuvor. Das ladungskonjugierte Feld eines linkshändigen Neutrinos ist also ein linkshändiges Antineutrino, da die Leptonzahl geändert

wird, aber die Händigkeit/Helizität erhalten bleibt. Linkshändige Antineutrinos werden in der Natur aber nicht beobachtet. Die schwache Wechselwirkung der Neutrinos unterliegen, ist nicht invariant unter Ladungskonjugation \mathcal{C} . [Akh00]

Im Vergleich dazu liefert die Teilchen-Antiteilchen-Konjugation $\hat{\mathcal{C}}$, die man auf die chiralen Projektionen $P_{L,R}$ anwendet folgendes:

$$\psi_{L,R}^c \equiv (\psi^c)_{L,R} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \mp \gamma^5)(i\gamma^2\psi^*) = i\gamma^2\left(\frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma^5)\psi\right)^* = (\psi_{R,L})^c \quad (66)$$

Hierbei wurde die Antikommutatorrelation der γ -Matrizen (15) verwendet.

Das Antiteilchen-Feld eines linkshändigen Neutrinos ist also ein rechtshändiges Anti-Neutrino. Rechtshändige Antineutrinos sind in Experimenten bestätigt, sodass diese Operation im Hinblick auf Neutrinos physikalisch sinnvoll ist.

In der Einführung wurde bereits erwähnt, dass es Teilchen gibt, die identisch mit ihrem Antiteilchen sind. Diese Möglichkeit besteht grundsätzlich nur für elektrisch neutrale Teilchen, da sonst eine Verletzung der Ladungserhaltung auftritt. [Akh00]

In Zusammenhang mit Neutrinos ist diese Frage besonders spannend. Sie sind die bisher einzigen bekannten elektrisch neutralen Fermionen, sodass für sie als einzige Fermionen die Möglichkeit besteht, dass Teilchen und Antiteilchen identisch sind. In Experimenten wurden bisher keine rechtshändigen Neutrinos ν_R und keine linkshändigen Anti-Neutrinos $\bar{\nu}_L$ beobachtet. Damit stellt sich die Frage, ob die Händigkeit nicht eine Eigenschaft des selben Teilchens ist. Falls Neutrino und Anti-Neutrino verschieden sind, so spricht man von Dirac-Neutrinos. Falls Neutrino und Anti-Neutrino identisch sind, so spricht man von Majorana-Neutrinos. Es gilt für die beiden Arten im mathematischen Sinne: [Moh98]

$$\begin{aligned} \text{Dirac-Neutrinos:} \quad & \nu \neq \bar{\nu} \text{ bzw. } \psi \neq \psi^c \\ \text{Majorana-Neutrinos:} \quad & \nu = \bar{\nu} \text{ bzw. } \psi = e^{i\theta}\psi^c \end{aligned} \quad (67)$$

Diese Fragestellung ist vor folgendem Hintergrund zu sehen: Wenn Neutrinos exakt masselos sind, so besitzen sie feste Chiralität und feste Helizität wie im vorigen Abschnitt gezeigt. Wenn es sich um Dirac-Neutrinos handelt, so existieren 4 verschiedene Neutrinos ν_L , $\bar{\nu}_R$ sowie ν_R , $\bar{\nu}_L$. Die beiden erstgenannten sind nachgewiesen. Da es sich bei den letztgenannten um nicht bestätigte Teilchen handelt, spricht man bei ihnen von sterilen Neutrinos. Zur Beschreibung der Natur reichen damit für eine Generation aber die beiden Neutrinofelder ν_L und $\bar{\nu}_R$ aus. Hierbei sei bemerkt, dass ν_L und $\bar{\nu}_R$ von einander durch Teilchen-Antiteilchen-Konjugation hervorgehen. Dies steht in Einklang mit dem vorherigen Kapitel als gezeigt wurde, dass der

Lösungsraum der Dirac-Gleichung für $m_0 = 0$ nur zweidimensional ist.

Falls Neutrinos Majoranateilchen sind so ist die entsprechende Gleichung in (67) erfüllt. Teilchen und Antiteilchen sind nicht von einander zu unterscheiden. Händigkeit/Helizität von Neutrinos sind dann Eigenschaften des selben Teilchens.

Falls an der schwachen Wechselwirkung wirklich nur linkshändige Felder teilnehmen ($\psi_R^c = (\psi_L)^C$), so ist für $m_0 = 0$ nicht zwischen dem Dirac-Fall und dem Majorana-Fall zu unterscheiden. Die sterilen Neutrinos des Dirac-Falls haben dann keine Bedeutung, da sie nicht nachweisbar sind und auch nicht existieren müssen. [Schm97], [Gro89]

Der Sachverhalt, dass Neutrino und Anti-Neutrino feste Händigkeit besitzen, ist wie im vorigen Kapitel dargestellt nur für $m_0 = 0$ richtig. Für $m_0 > 0$ ist folgendes denkbar. Da $m_0 > 0$ bewegen sich Neutrinos mit $v < c$. Damit gibt es eine Lorentz-Transformation mit der der Impuls in die andere Richtung zeigt. Die Helizität ändert sich und ist keine gute Quantenzahl mehr wie es im vorigen Kapitel erläutert wurde. Durch Lorentz-Transformation wird für $m_0 > 0$ also aus einem Neutrino mit $H = -1$ ein Neutrino mit $H = +1$. Die Frage bzgl. Dirac-Teilchen oder Majorana-Teilchen lautet nun, ob dieses durch Lorentz-Transformation gewonnene ν_+ mit $\bar{\nu}_+$ übereinstimmt oder nicht. Falls sie übereinstimmen, also $\nu = \bar{\nu}$, so handelt es sich um Majorana-Teilchen. Falls sie nicht übereinstimmen, also $\nu \neq \bar{\nu}$, so handelt es sich um Dirac-Teilchen. Damit wird auch deutlich, dass die Frage nach Dirac- oder Majoranacharakter von Neutrinos für $m_0 = 0$ nicht zu beantworten ist, da sich Neutrinos dann mit Lichtgeschwindigkeit bewegen und dann die Lorentz-Transformation nicht existiert. Weiterhin hindert die Linkshändigkeit der Schwachen Wechselwirkung daran eine Aussagen über Dirac-Charakter oder Majorana-Charakter zu treffen. [Schm97], [Gro89]

Gleichung (67) legt nahe, dass Majorana-Felder Eigenzustände zur Teilchen-Antiteilchen-Konjugation sind. Majorana-Felder können in folgender Weise realisiert werden: [Schm97]

$$\hat{\psi}^M = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\psi} + \eta_C \hat{\psi}^C) \text{ mit } \eta_C = \lambda_C e^{2i\phi}, \lambda_C = \pm 1 \quad (68)$$

Diese Definition erfüllt die Majorana-Eigenschaft aus (67), denn mit (64) folgt:

$$(\hat{\psi}^M)^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\psi}^C + \lambda_C e^{-2i\phi} \hat{\psi}) = \lambda_C e^{-2i\phi} \hat{\psi}^M \quad (69)$$

Durch Phasentransformation $\hat{\psi} \xrightarrow{e^{-i\phi}} \psi$ erreicht man, dass der Eigenwert reell wird, denn:

$$\hat{\psi}^M \rightarrow \hat{\psi}^M e^{-i\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\psi} e^{-i\phi} + \lambda_C \hat{\psi}^C e^{i\phi}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \lambda_C \psi^C) = \psi^M \quad (70)$$

Und damit gilt:

$$(\psi^M)^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^C + \lambda_C \psi) = \lambda_C \psi^M \quad (71)$$

Es ist also möglich sich durch Phasentransformation für Majoranafelder sich auf den Fall von Eigenwerten mit $\lambda_C = \pm 1$ zurückzuziehen. Es sei weiterhin bemerkt, dass an ψ keine Anforderungen gestellt wurde. ψ kann also eine Wellenfunktion sein für die die Dirac-Eigenschaft aus (67) gilt. Aus Dirac-Feldern können also Majorana-Felder aufgebaut werden.

Weiterhin ist es zweckmäßig die Paritätstransformation \mathcal{P} zu betrachten. Die Parität führt eine Spiegelung der Raumkoordinaten durch. Anwenden der Parität ändert die Helizität eines Teilchens, da es sich bei der Helizität um ein Pseudoskalar handelt. Die Parität ist folgendermaßen definiert: [Wac05]

$$\psi(\vec{x}, t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \lambda_P \gamma^0 \psi(-\vec{x}, t), \text{ mit } \lambda_P^4 = 1 \quad (72)$$

Wendet man die Parität auf ein linkshändiges Neutrino an, so ergibt sich ein rechtshändiges Neutrino. Unter Paritätstransformation sind Neutrinos also nicht invariant, da in der Natur keine rechtshändigen Neutrinos beobachtet werden.

Durch die Ladungskonjugation \mathcal{C} werden linkshändige Neutrinos in linkshändige Antineutrinos überführt. Diese treten in der Natur aber nicht auf. Wendet man auf linkshändige Neutrinos die Parität \mathcal{P} an, so erhält man rechtshändige Neutrinos. Diese treten auch nicht auf. Es herrscht also weder \mathcal{C} - noch \mathcal{P} -Invarianz in der schwachen Wechselwirkung. Es stellt sich daher die Frage, ob Neutrinos einer \mathcal{CP} -Symmetrie unterliegen oder nicht, denn durch Anwenden von \mathcal{CP} gelangt man wie es scheint von linkshändigen Neutrinos zu rechtshändigen Antineutrinos. \mathcal{CP} -Verletzung kann jedoch vorliegen, unabhängig davon, ob Neutrinos Dirac- oder Majorana-Teilchen sind. Diese Thematik wird im Kapitel zu Neutrinooszillationen näher behandelt.

Der Unterschied zwischen Ladungskonjugation und Teilchen-Antiteilchen-Konjugation soll noch einmal näher beleuchtet werden. Die Teilchen-Antiteilchen-Konjugation und die Ladungskonjugation sind eng miteinander verwandt. Wendet man beide Operationen auf massive Fermion-Wellenfunktionen an, die wie gezeigt keine feste Händigkeit besitzen so wirken die beiden Operationen gleich. Beim Anwenden auf die händigen Projektionen ergibt sich jedoch ein Unterschied zwischen Ladungskonjugation und der Teilchen-Antiteilchen-Konjugation. Die Ladungskonjugation ändert die Händigkeit nicht, während die Teilchen-Antiteilchen-Konjugation das tut. Die Aussage, dass Ladungskonjugation und Teilchen-Antiteilchen-Konjugation für massive Fermionen zusammenfallen ist unabhängig vom Majorana- oder Dirac-Charakter der Fermionen wahr. Ladungskonjugation ändert ein Majorana-Fermion nicht, da es keine Ladungen besitzt. Per Definition ändert die Teilchen-Antiteilchen-Konjugation keine physikalischen Eigenschaften

von Majorana-Teilchen. Für Dirac-Teilchen ist der Sachverhalt folgendermaßen: [Akh00]

$$\begin{aligned} \hat{C} : \psi = \psi_L + \psi_R &\rightarrow (\psi_L)^C + (\psi_R)^C = (\psi^C)_R + (\psi^C)_L \\ C : \psi = \psi_L + \psi_R &\rightarrow \tilde{\psi} = \tilde{\psi}_L + \tilde{\psi}_R \equiv (\psi^C)_L + (\psi^C)_R \end{aligned} \quad (73)$$

Für massive Fermionen sind Teilchen-Antiteilchen-Konjugation und Ladungskonjugation äquivalent. Bei der Anwendung auf die händigen Projektionen muss jedoch unterschieden werden. Teilchen-Antiteilchen-Konjugation und die \mathcal{CP} -Operation weisen ebenfalls Ähnlichkeiten auf. Mit beiden Transformationen gelangt man wie es scheint von $\nu_L \rightarrow \bar{\nu}_R$. Deshalb nennt man den durch Teilchen-Antiteilchen-Konjugation gewonnenen Zustand $\bar{\nu}_R$ auch häufig den \mathcal{CP} -Partner von ν_L . [Schm97]

Die Unterschiede zwischen Dirac-Teilchen und Majorana-Teilchen werden in folgender Abbildung noch einmal anschaulich gemacht.

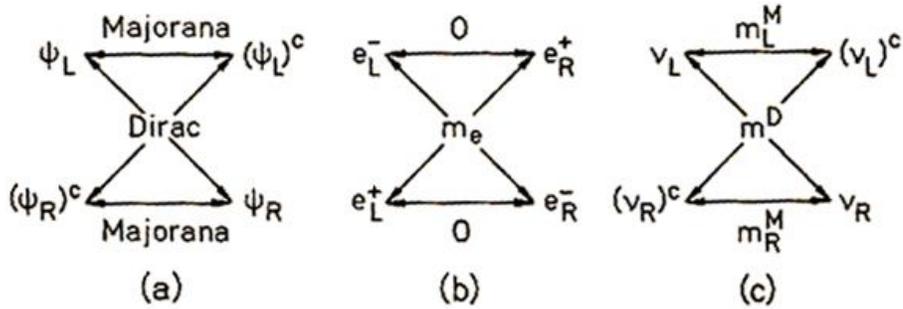


Abbildung 1: Kopplungsschema für Fermionenfelder durch Majorana- und Dirac-Massen. a) Allgemeines Kopplungsschema für links- und rechtshändige Felder und ihre ladungskonjugierten Felder. b) Kopplungsschema für Elektronen. Aufgrund der Ladung kommt nur die Dirac-Kopplung in Frage. c) Kopplungsschema für Neutrinos. Nur bei Neutrinos können sowohl Dirac- als auch Majorana-Kopplung auftreten. (entnommen aus [Gro89])

5 Neutrinomassen

Bisher wurden die Unterschiede zwischen masselosen und massebehafteten Neutrinos betrachtet. Nun soll gezeigt werden wie solch ein Massenterm in der Dirac-Gleichung auftreten kann. Die Frage, ob Neutrinos Majorana-Teilchen oder Dirac-Teilchen sind, ist mit der Frage nach der Neutrinomasse eng verbunden. Im folgenden wird für den Dirac-Fall die Masse mit m_D bezeichnet und für den Majorana-Fall entsprechend mit m_M . Die Dirac-Gleichung wie sie hergeleitet

wurde, kann durch die Euler-Lagrange-Gleichung aus folgender Lagrange-Dichte gewonnen werden.

$$-\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(\gamma^\mu \partial_\mu + m_D \right) \psi \quad (74)$$

Für die weiteren Betrachtungen ist nur der Massenterm relevant. Für ihn gilt: [Schm97]

$$-\mathcal{L}_D = m_D \bar{\psi} \psi = -m_D (\bar{\gamma}^5 \bar{\psi}) (\gamma^5 \psi) \quad (75)$$

Hierbei wurde verwendet, dass $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$, sowie $\gamma^{5\dagger} = \gamma^{5-1}$ und die Antivertauschungsrelation $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$. Es wurde bereits gezeigt, dass der Term $\bar{\psi} \psi$ sich wie ein Lorentzskalar transformiert. Aus der Forderung der Hermitizität der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_D^\dagger = \mathcal{L}_D$ folgt:

$$-\mathcal{L}_D^\dagger = m_D^* (\psi^\dagger \gamma^0 \psi)^\dagger = m_D^* \psi^\dagger \gamma^0 \psi = m_D^* \bar{\psi} \psi \stackrel{!}{=} m_D \bar{\psi} \psi = -\mathcal{L}_D \quad (76)$$

Die Dirac-Masse m_D ist also reell. Die Projektionsoperatoren P_L und P_R können dazu verwendet werden, um die Wellenfunktionen in Teile definierter Händigkeit zu zerlegen. Es gilt für adjungierte Diracspinoren $\bar{\psi}$:

$$\overline{\psi_{R,L}} = \overline{P_{R,L} \psi} = (P_{R,L} \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_{R,L} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_{L,R} = \bar{\psi} P_{L,R} \quad (77)$$

Hierbei wurde die Hermitizität von $P_{L,R}$, sowie die Antikommutatorrelation für γ^5 verwendet. Damit gilt allgemein für zwei Spinoren:

$$\bar{\psi} \phi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) (\phi_L + \phi_R) = \bar{\psi}_L \phi_R + \bar{\psi}_R \phi_L \quad (78)$$

Hierbei wurde (77) verwendet sowie, dass $P_{R,L} P_{L,R} \psi = 0$. Damit vereinfacht sich die Zerlegung in chirale Komponenten unter Verwendung von (78) zu: [Schm97]

$$-\mathcal{L}_D = m_D (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (79)$$

Gleichung (79) verlangt also sowohl rechts- als auch linkshändige Komponenten für Neutrinos, wie es auch in Gleichung (57) gezeigt wurde. Im Standardmodell der Teilchenphysik treten aber nur linkshändige Neutrinos auf. Damit muss der Dirac-Massenterm im Standardmodell verschwinden. Neutrinos sind hier also masselos. Im folgenden wird nach weiteren Möglichkeiten gesucht, um lorentzinvariante Größen aus der Wellenfunktion ψ zu erhalten. Sie können womöglich einen nichtverschwindenden Massenterm beisteuern. Weitere Lorentzskalare sind die Größen $\bar{\psi}^c \psi^c$, $\bar{\psi} \psi^c$ und $\bar{\psi}^c \psi$. Die Lorentzinvarianz folgt genauso wie in (31) dargestellt. Weiterhin gilt $(\bar{\psi} \psi^c)^\dagger = \bar{\psi}^c \psi$, was durch Einsetzen der jeweiligen Definitionen und Ausnutzen von $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$

deutlich wird. Dies ermöglicht es einen Majorana-Massenterm in der Lagrange-Dichte anzusetzen.

$$-\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(m_M \bar{\psi}\psi^c + m_M^* \bar{\psi}^c\psi) \quad (80)$$

Dass die Hermitizität des Ausdrucks gegeben ist, ist durch die Konstruktion klar. Interessant ist nun der Effekt einer globalen Phasentransformation $e^{i\alpha}$ auf die verschiedenen Lorentzskalare. Es gilt: [Schm97]

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}, \quad \psi^c \rightarrow e^{-i\alpha}\psi^c, \quad \bar{\psi}^c \rightarrow e^{i\alpha}\bar{\psi}^c \quad (81)$$

Damit hat die globale Phasentransformation folgenden Effekt auf die jeweiligen Lorentzskalare.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}\psi, & \bar{\psi}^c\psi^c &\rightarrow \bar{\psi}^c\psi^c \\ \bar{\psi}\psi^c &\rightarrow e^{-2i\alpha}\bar{\psi}\psi^c, & \bar{\psi}^c\psi &\rightarrow e^{2i\alpha}\bar{\psi}^c\psi \end{aligned} \quad (82)$$

Die Größen $\bar{\psi}\psi$ und $\bar{\psi}^c\psi^c$, also auch \mathcal{L}_D sind also invariant unter einer globalen Phasentransformation. Wendet man hier nun das Noether-Theorem an, so folgt aus dieser Symmetrie, die auch für die geladenen Leptonen gilt eine Erhaltungsgröße, nämlich die Leptonenzahl. Dieser Fall liegt in Gleichung (75) vor. Im Standardmodell der Teilchenphysik gilt also Leptonzahlerhaltung.

Die Terme $\bar{\psi}\psi^c$ und $\bar{\psi}^c\psi$ sind jedoch nicht invariant unter einer globalen Phasentransformation, was eine Leptonzahlverletzung in \mathcal{L}_M zur Folge hat. Betrachtet man ψ nicht mehr als Wellenfunktion, sondern als Feldoperator, so wird dies auch deutlich. Hierbei gilt, dass $\bar{\psi}$ ein Teilchen erzeugt, bzw. ein Antiteilchen vernichtet. ψ wirkt umgekehrt. $\bar{\psi}\psi^c$ beispielsweise erzeugt ein Teilchen und vernichtet ein Antiteilchen, was eine Änderung der Leptonzahl um $\Delta L = 2$ bedeutet. Falls Neutrinos also massebehaftete Majorana-Teilchen sind [siehe (80)], so ist damit eine Leptonzahlverletzung um $\Delta L = 2$ verbunden. Im Rahmen des Standardmodells muss damit auch ein Majorana-Massenterm verschwinden, da dort Leptonzahlerhaltung gilt. Umgekehrt gilt die Aussage aber auch. Eine Leptonzahlverletzung um $\Delta L = 2$ impliziert die Majorana-Eigenschaft, da dann Teilchen in Anti-Teilchen umgewandelt werden. - Falls dies der Fall ist, hat es aber keinen Sinn mehr von „Teilchen“ und „Antiteilchen“ zu sprechen, da sich diese Worte auf die erhaltene Leptonzahl beziehen. „Teilchen“ und „Antiteilchen“ sind dann nicht unterscheidbar wie es für Majorana-Teilchen der Fall ist. Es sei nochmals angemerkt, dass die Überlegung, ob Teilchen Majorana- oder Dirac-Teilchen sind nur für elektrisch neutrale Teilchen sinnvoll ist. Wären geladene Leptonen Majorana-Teilchen, so wäre die Ladungserhaltung verletzt, da beispielsweise Übergänge der Form $e^- \rightarrow e^+$ erlaubt wären. Ladung kann jedoch als sehr gut bestätigte Erhaltungsgröße angenommen werden. [Schm97], [Gro89], [Moh98]

Nun wird auch der Majorana-Massenterm in der Lagrange-Dichte (80) in chirale Komponenten zerlegt. Beispielsweise wird ein linkshändiges $\bar{\nu}$ durch ψ_L^c beschrieben. Eine Zerlegung in chirale Komponenten von (80) sieht also folgendermaßen aus: [Schm97]

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_M^L &= \frac{1}{2}m_L (\bar{\psi}_L\psi_R^c + \bar{\psi}_R^c\psi_L) \\ -\mathcal{L}_M^R &= \frac{1}{2}m_R (\bar{\psi}_L^c\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L^c) \end{aligned} \quad (83)$$

Da die beiden Summanden jeweils hermitesch Konjugierte zueinander sind, ist die Hermitizität der Ausdrücke nur für reelle $m_{L,R}$ gegeben. Nun werden die folgende Wellenfunktionen betrachtet.

$$\varphi_1 = \psi_L + \psi_R^c, \quad \varphi_2 = \psi_R + \psi_L^c \quad (84)$$

Hierbei handelt es sich um Majorana-Felder, denn es gilt $\varphi_{1,2}^c = \varphi_{1,2}$, wobei Eigenschaft (66) benutzt wird. Damit kann (83) unter Verwendung von (78) geschrieben werden als: [Schm97]

$$-\mathcal{L}_M^L = \frac{1}{2}m_L\bar{\varphi}_1\varphi_1, \quad -\mathcal{L}_M^R = \frac{1}{2}m_R\bar{\varphi}_2\varphi_2 \quad (85)$$

Die Zustände $\psi_{L,R}$ stellen Flavoureigenzustände dar. $\varphi_{1,2}$ hingegen stellen Masseneigenzustände dar. Falls Masseneigenzustände und Flavoureigenzustände verschieden sind, so haben Neutrinos, die als Flavoureigenzustände definiert sind keine festen Massen. So werden auch Neutrinooszillationen der verschiedenen Flavours ermöglicht. Dies wird später noch beleuchtet.

Der allgemeinste Massenterm für freie Neutrinos besteht aus einem Dirac-Anteil (79) und einem Majorana-Anteil (83). Der Dirac-Majorana-Massenterm lautet:

$$-2\mathcal{L}_{DM} = m_D(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_L^c\psi_R^c) + m_L\bar{\psi}_L\psi_R^c + m_R\bar{\psi}_L^c\psi_R + \text{H.K.} \quad (86)$$

Hierbei bezeichnet H.K. das hermitesch Konjugierte des ersten Teils. Kompakter kann (86) geschrieben werden, indem man zur Notation übergeht, die die Massenmatrix beinhaltet: [Schm97]

$$-2\mathcal{L}_{DM} = \underbrace{\left(\bar{\psi}_L, \bar{\psi}_L^c\right)}_{\bar{\Psi}_L} \underbrace{\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}}_{=:M} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_R^c \\ \psi_R \end{pmatrix}}_{\Psi_R^c} + \text{H.K.} \quad (87)$$

Dies impliziert also die Definitionen:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_L^c \end{pmatrix}, \quad \Psi_R^c = \begin{pmatrix} \psi_R^c \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (88)$$

Äquivalent zu (87) ist offensichtlich:

$$-2\mathcal{L}_{DM} = \bar{\Psi}_L M \Psi_R^c + \bar{\Psi}_R^c M \Psi_L \quad (89)$$

Die Massenmatrix M ist symmetrisch und im Falle von \mathcal{CP} -Invarianz reell. Um den Argumentationsfluss nicht zu behindern, wird die \mathcal{CP} -Invarianz hier einfach verwendet und später an geeigneter Stelle erläutert. M ist damit diagonalisierbar. Durch Lösen des Charakteristischen Polynoms erhält man folgende Eigenwerte für M :

$$\det(M - m \cdot \mathbf{1}) = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{m_L + m_R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_L - m_R}{2}\right)^2 + m_D^2} \quad (90)$$

Die Eigenwerte in (90) können positiv und negativ sein. Dem wir später noch Rechnung getragen, da negative Massen physikalisch keinen Sinn ergeben.

Durch die orthogonale Matrix T wird die Massenmatrix M diagonalisiert. Es gilt:

$$T^T M T = \tilde{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (91)$$

Die Spalten von T sind orthonormiert. Damit kann man $T = (t_1, t_2)$ mit orthonormalen Spaltenvektoren t_1 und t_2 schreiben. Aus Gleichung (91) folgt: [Schm97]

$$M T = T \tilde{M} \Leftrightarrow M \cdot (t_1, t_2) = (m_1 t_1, m_2 t_2) \quad (92)$$

Hierbei wurde $(t_1, t_2) \cdot \text{diag}(m_1, m_2) = (m_1 t_1, m_2 t_2)$ verwendet, was sich durch nachrechnen ergibt. t_1 und t_2 sind also Eigenvektoren zu M mit Eigenwerten m_1 und m_2 . Um nun die Masseneigenzustände zu berechnen, nutzt man die Orthogonalität von T aus, indem man in (89) schreibt:

$$\overline{\Psi}_L M \Psi_R^C = \overline{\Psi}_L \underbrace{T T^T}_{\mathbf{1}} M \underbrace{T T^T}_{\mathbf{1}} \Psi_R^C = \underbrace{\overline{\Psi}_L T}_{\tilde{\Psi}_L} \tilde{M} \underbrace{T^T \Psi_R^C}_{\tilde{\Psi}_R^C} \quad (93)$$

Für den hermitesch konjugierten Term verhält es sich analog.

Es gilt also:

$$\tilde{\Psi}_L = T^T \Psi_L = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{1L} \\ \tilde{\psi}_{2L} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Psi}_R^C = T^T \Psi_R^C = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{1R}^c \\ \tilde{\psi}_{2R}^c \end{pmatrix} \quad (94)$$

Damit gilt für die Komponenten von $\tilde{\Psi}_L$ und $\tilde{\Psi}_R^C$: [Schm97]

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{1L} &= \cos \theta \cdot \psi_L - \sin \theta \cdot \psi_L^c, & \tilde{\psi}_{1R}^c &= \cos \theta \cdot \psi_R^c - \sin \theta \cdot \psi_R \\ \tilde{\psi}_{2L} &= \sin \theta \cdot \psi_L + \cos \theta \cdot \psi_L^c, & \tilde{\psi}_{2R}^c &= \sin \theta \cdot \psi_R^c + \cos \theta \cdot \psi_R \end{aligned} \quad (95)$$

Schreibt man die Matrixbeziehungen aus (92) aus, so ergeben sie für jeden Eigenwert bzw. Eigenvektor zwei Gleichungen. Nach Umformungen gelangt man zu: [Schm97]

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{m_R - m_1}{m_D}, \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{m_L - m_1}{m_D} \quad (96)$$

Um nun θ zu bestimmen benötigt man folgendes Additionstheorem des Tangens:

$$\tan(2\theta) = \frac{2}{\frac{1}{\tan\theta} - \tan\theta}$$

Damit ergibt sich für θ : [Schm97]

$$\tan(2\theta) = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \quad (97)$$

Setzt man die Ergebnisse aus (94) und (93) in (89) ein so gelangt man zu:

$$-2\mathcal{L}_{DM} = m_1(\overline{\tilde{\psi}_{1L}}\tilde{\psi}_{1R}^c + \overline{\tilde{\psi}_{1R}^c}\tilde{\psi}_{1L}) + m_2(\overline{\tilde{\psi}_{2L}}\tilde{\psi}_{2R}^c + \overline{\tilde{\psi}_{2R}^c}\tilde{\psi}_{2L}) \quad (98)$$

Vergleicht man (98) und (83) so zeigt sich, dass der allgemeine Fall auf den Majorana-Fall zurückgeführt werden kann. Nun ist es naheliegend wie in (84) und (85) aus den chiralen Komponenten $\tilde{\Psi}_L$ und $\tilde{\Psi}_R^c$ wieder Majorana-Felder zu bilden. Man definiert: [Schm97]

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tilde{\psi}_{1L} + \epsilon_1 \tilde{\psi}_{1R}^c \\ \varphi_2 &= \tilde{\psi}_{2L} + \epsilon_2 \tilde{\psi}_{2R}^c \end{aligned} \quad (99)$$

Dass es sich bei den φ_k um Majorana-Felder handelt, gilt wegen:

$$\varphi_k = \tilde{\psi}_{kL} + \tilde{\psi}_{kR}^c \rightarrow \varphi_k^c = (\psi_{kL})^c + \epsilon_k \psi_{kL} = \epsilon_k (\epsilon_k \psi_{kR} + \psi_{kL}) = \epsilon_k \varphi_k \quad (100)$$

$\epsilon_k = \pm 1$ ist also der \mathcal{CP} -Eigenwert des Majorana-Neutrinos. Hierbei wird ϵ_k jedoch so gewählt, dass $\epsilon_k m_k = m'_k > 0$. m'_k ist die physikalisch sinnvolle Masse, da negative Massen ohne Bedeutung sind. [Schm97], [Akh00]

Fasst man alle Definitionen zusammen gelangt man zu dem zu (85) korrespondierenden Ausdruck:

$$-2\mathcal{L}_{DM} = m'_1 \overline{\varphi_1} \varphi_1 + m'_2 \overline{\varphi_2} \varphi_2 \quad (101)$$

Nun ist es zweckmäßig Extremfälle zu betrachten:

Zunächst sei $M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix M wird bei einem Winkel von $\theta = 45^\circ$ von T diagonalisiert. Nach Einsetzen aller bisherigen Rechnungen gelangt man zu Eigenwerten $m_{1,2} = \mp m_D$ und $\epsilon_{1,2} = \mp 1$. Es ergeben sich die beiden Majoranzustände: [Schm97]

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_L - \psi_R^c - \psi_L^c + \psi_R) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^c) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_L + \psi_R^c + \psi_L^c + \psi_R) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^c) \end{aligned} \quad (102)$$

Man erhält hierbei also zwei entartete Majorana-Neutrinos gleicher Masse, entgegengesetzten \mathcal{CP} -Eigenwerten und einen maximalen Mischungswinkel. Interessanterweise lässt sich hieraus ein Dirac-Feld konstruieren:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2) = \psi \quad (103)$$

Hierauf wird im Kapitel zum Neutrinolosen Doppel-Beta-Zerfall noch einmal eingegangen.

Der Massenterm der Lagrangedichte lautet damit wie man durch einsetzen nachrechnet:

$$-2\mathcal{L}_{DM} = m_D(\overline{\varphi_1}\varphi_1 + \overline{\varphi_2}\varphi_2) = m_D(\overline{\psi}\psi + \overline{\psi^c}\psi^c) = 2m_D\overline{\psi}\psi = -2\mathcal{L}_D \quad (104)$$

Dies ist wie zu erwarten war der reine Dirac-Fall wie in (75).

Falls die Massen m_R und m_L nicht völlig verschwinden sondern lediglich gilt: $m_D \gg m_L, m_R$ so ist $\theta \approx 45^\circ$. Die beiden Majoranazustände $\varphi_{1,2}$ sind dann fast entartet. Für die Eigenwerte bzw. physikalischen Massen gilt dann $m'_{1,2} \approx m_D \pm \frac{(m_L+m_R)}{2}$. In diesem Fall spricht man von einem Pseudo-Dirac-Neutrino. [Schm97], [Akh00]

Diese beiden Fälle sind wichtig im Hinblick auf den Neutrinolosen Doppel-Beta-Zerfall, der später noch bearbeitet. Auf diese Fälle wird später noch einmal eingegangen.

Weiterer Spezialfall ist $m_D = 0$. M ist dann bereits diagonal, sodass $\theta = 0$. Als Massen ergeben sich $m'_{1,2} = m_{L,R}$ sowie $\epsilon_{1,2} = 1$. Damit ergeben sich zwei Majoranafelder mit $\varphi_1 = \psi_L + \psi_R^c$, sowie $\varphi_2 = \psi_R + \psi_L^c$. Es liegt hierbei der reine Majorana-Fall vor.

Bisher konnte erklärt werden wie Neutrinos anhand von lorentzinvarianten Termen in der Lagrange-Dichte der Dirac-Gleichung eine Masse erhalten. Hierbei bleibt aber unklar, warum die Massen der Neutrinos so viel kleiner sind als die Massen der geladenen Leptonen der gleichen Familie. Eine mögliche Erklärung dafür liefert das Seesaw-Modell. Hierfür wird neben dem bekannten leichten linkshändigen Neutrino ν_L ($m_L \approx 0$) ein schweres rechtshändiges Majorana-Neutrino N_R ($m_R \gg m_D$) eingeführt. In der Notation von oben gilt: $\psi_L \rightarrow \nu_L$ sowie $\psi_R \rightarrow N_R$. Die Lagrange-Dichte lautet damit: [Schm97]

$$-\mathcal{L}_{DM} = \frac{1}{2} \left(\overline{\nu_L}, \overline{N_R^c} \right) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R^c \\ N_R \end{pmatrix} + \text{H.K.} \quad (105)$$

Bestimmt man von (105) die Eigenwerte wie sie in (90) gegeben sind, so ergibt sich:

$$m_{\nu,N} = \frac{m_R \pm \sqrt{m_R^2 + 4m_D^2}}{2} \quad (106)$$

Damit folgt für die Eigenwerte nach Taylorentwicklung der Wurzel:

$$|m_\nu| \approx \frac{m_D^2}{m_R}, \quad m_N \approx m_R \quad (107)$$

Identifiziert man m_D mit der Masse der geladenen Fermionen m_f , die Dirac-Teilchen sind so ergibt sich der bekannte Zusammenhang, dass $m_\nu \ll m_f$. Der Seesaw-Mechanismus bietet also eine Erklärung für die Tatsache, dass die Neutrinomasse so viel kleiner ist als die Masse der

zugehörigen geladenen Leptonen.

Im bisherigen Verlauf wurde nur eine Neutrinoart behandelt. Dieser Fall lässt sich jedoch leicht auf n Neutrinoarten erweitern. Die bisher aufgetretenen Spinoren ψ_L , ψ_R^c , ψ_R , ψ_L^c werden dann durch Vektoren mit n Komponenten ersetzt. Sie lauten dann: [Schm97]

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \vdots \\ \psi_{nL} \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} \psi_{1R} \\ \vdots \\ \psi_{nR} \end{pmatrix} \quad (108)$$

Hierbei stellt jede Komponente der beiden Vektoren einen Weyl-Spinor dar wie er vorher auch verwendet wurde. Die Massen m_D , m_L , und m_R sind nun keine Skalare mehr, sondern bilden komplexe $n \times n$ -Matrizen M_D , M_L und M_R . Die Matrizen M_L und M_R sind dabei symmetrisch, sodass insgesamt die $2n \times 2n$ -Massenmatrix symmetrisch ist: [Schm97]

$$M = \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} \quad (109)$$

Die Vektoren $\Psi_{L,R}$ werden wegen (108) zu $2n$ -komponentigen Vektoren. Man erhält also im Falle von n Generationen $2n$ massive Majoranafelder. Der Dirac-Majorana-Massenterm lässt sich schreiben schreiben als: [Schm97]

$$-2\mathcal{L}_{DM} = \overline{\Psi}_L M \Psi_R^c + \overline{\Psi}_R^c M^\dagger \Psi_L \quad (110)$$

Diese Matrix müsste analog zu vorher wieder diagonalisiert werden.

6 Neutrinooszillationen

Im folgenden soll das Phänomen der Neutrinooszillationen untersucht werden. Diese können auftreten, wenn die Flavoureigenbasis und die Masseneigenbasis verschieden sind.

Zunächst seien n orthonormierte Flavoureigenzustände $|\nu_\alpha\rangle$ gegeben. Die Masseneigenzustände $|\nu_i\rangle$ müssen durch unitäre Transformation U aus den $|\nu_\alpha\rangle$ hervorgehen, da sonst Wahrscheinlichkeiten nicht erhalten wären, was physikalisch nicht sinnvoll ist. Die Matrix U wird auch Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata Matrix (PMNS Matrix) genannt. Es gilt also: [Schm97]

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^n U_{\alpha i} |\nu_i\rangle, \quad |\nu_i\rangle = \sum_{\alpha=1}^n (U^\dagger)_{i\alpha} |\nu_\alpha\rangle = \sum_{\alpha=1}^n U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle \quad (111)$$

Die Unitarität von U bedeutet:

$$U^\dagger U = \mathbb{1}, \quad \text{also: } \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* = \delta_{ij} \quad (112)$$

Für Antineutrinos gilt die Relation mit der komplexkonjugierten Matrix $U_{\alpha i}^*$.

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_i^n U_{\alpha i}^* |\bar{\nu}_i\rangle \quad (113)$$

Da die $|\nu_i\rangle$ Masseneigenzustände sind, entwickeln sie sich zeitlich nur mit einem Phasenfaktor.

$$|\nu_i(\vec{x}, t)\rangle = e^{-i(Et - \vec{p}_i \vec{x})} |\nu_i\rangle \quad (114)$$

Der Faktor $e^{i\vec{p}_i \vec{x}}$ begründet sich mit der Überlagerung ebener Wellen der verschiedenen Massenkomponenten. Mit $|\vec{p}_i| \gg m_i$, sowie $E \approx |\vec{p}_i|$ als mittlere Neutrinoenergie folgt durch Taylorentwicklung: [Schm97], [Gro89]

$$|\vec{p}_i| = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \approx E - \frac{m_i^2}{2E} \quad (115)$$

Für die Entwicklung eines Flavoureigenzustands gilt damit:

$$|\nu(L)\rangle = e^{-iEt} \sum_{i=1}^n U_{\alpha i} |\nu_i\rangle e^{i\vec{p}_i \vec{x}} = e^{-iEt} \sum_{i=1}^n U_{\alpha i} |\nu_i\rangle e^{iEt - \frac{im_i^2}{2} \frac{L}{E}} = \sum_{i,\delta}^n U_{\alpha i} U_{\delta i}^* e^{-\frac{im_i^2}{2} \frac{L}{E}} |\nu_\delta\rangle \quad (116)$$

Es wurde hier $L = |\vec{x}| \approx t$ verwendet, da sich Neutrinos mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegen. Es werden nur Orte \vec{x} entlang der Impulsrichtung betrachtet sodass man $\vec{p}_i \cdot \vec{x} = |\vec{p}_i| |\vec{x}|$ gilt. Die Übergangsamplitude für $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ ist die Projektion $\langle \nu_\beta | \nu(L) \rangle$ und lautet damit unter Verwendung, dass die Flavoureigenzustände orthonormiert sind ($\langle \nu_\kappa | \nu_\lambda \rangle = \delta_{\kappa\lambda}$): [Schm97], [Gro89]

$$A(\alpha \rightarrow \beta, L) = \langle \nu_\beta | \nu(L) \rangle = \langle \nu_\beta | \sum_{i,\delta}^n U_{\alpha i} U_{\delta i}^* e^{-\frac{im_i^2}{2} \frac{L}{E}} |\nu_\delta\rangle = \sum_i^n U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-\frac{im_i^2}{2} \frac{L}{E}} \quad (117)$$

Für Antineutrinos erhält man analog:

$$A(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}, L) = \sum_i^n U_{\alpha i}^* U_{\beta i} e^{-\frac{m_i^2}{2} \frac{L}{E}} \quad (118)$$

Der Vergleich der Übergangsamplituden für Übergänge zwischen Neutrinos und Antineutrinos ergibt: [Schm97]

$$A(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}) = A(\beta \rightarrow \alpha) \neq A(\alpha \rightarrow \beta) \quad (119)$$

Diese Beziehung steht in Einklang mit dem \mathcal{CPT} -Theorem, das besagt, dass die physikalischen Gesetze \mathcal{CPT} -invariant sind. Die Ladungskonjugation \mathcal{C} vermittelt dabei zwischen Teilchen und Antiteilchen. Die Parität \mathcal{P} sorgt für den Helizitätsflip, sodass Antineutrinos rechtshändig sind, die Zeitumkehr \mathcal{T} lässt den Übergang in die zeitlich andere Richtung verlaufen. Falls U

keine \mathcal{CP} -verletzende Phase aufweist, also \mathcal{CP} -Invarianz vorliegt, so ist U reell. Damit sind die Übergangsamplituden dann gleich für Neutrinos und Antineutrinos:

$$A(\bar{\alpha} \rightarrow \beta) = A(\alpha \rightarrow \beta) = A(\bar{\beta} \rightarrow \bar{\alpha}) = A(\beta \rightarrow \alpha) \quad (120)$$

Der Vergleich der Neutrinooszillationen $A(\alpha \rightarrow \beta)$ und $A(\beta \rightarrow \alpha)$ bietet also eine Möglichkeit nach \mathcal{CP} -Verletzung zu suchen.

Um nun die Übergangswahrscheinlichkeiten zu bestimmen, müssen die $|A(\alpha \rightarrow \beta, t)|^2$ bestimmt werden. [Schm97]

$$P(\alpha \rightarrow \beta, L) = |A(\alpha \rightarrow \beta, L)|^2 = \sum_{i,j}^n U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i\Delta_{ij}} \quad (121)$$

$$= \sum_i^n |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 + 2\text{Re} \sum_{\substack{i,j \\ (j>i)}}^n U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i\Delta_{ij}} \quad (122)$$

Mit $\Delta_{ij} = \frac{m_i^2 - m_j^2}{2} \frac{L}{E}$. Vom Übergang von (121) zu (122) wurde die Summe zunächst in die Summen über $i = j$ und $i \neq j$ aufgeteilt. Für die zweite Summe treten immer Terme der Form $U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i\Delta_{ij}} + U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha i}^* U_{\beta i} e^{+i\Delta_{ij}}$ auf, die zueinander komplex konjugiert sind und somit der doppelte Realteil übrig bleibt unter der Einschränkung, dass ein Index größer als der andere ist. [Schm97]

Gleichung (122) beschreibt hierbei die Wahrscheinlichkeit ein Neutrino, das bei der Quelle im reinen Flavourzustand $|\nu_\alpha\rangle$ emittiert wurde im Abstand L im Flavourzustand $|\nu_\beta\rangle$ anzutreffen. Der erste Term stellt dabei eine mittlere Übergangswahrscheinlichkeit dar. Der zweite Term beschreibt die Neutrino-Oszillationen. Verwendet man in (121) die Unitaritätsbedingung für U aus (112), so ergibt sich: [Schm97]

$$P(\alpha \rightarrow \beta, L) = \delta_{\alpha\beta} - 2\text{Re} \sum_{\substack{i,j \\ (j>i)}}^n U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} [1 - e^{-i\Delta_{ij}}] \quad (123)$$

Hierbei wurde $\delta_{\alpha\beta} = |\sum_i^n U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 = \sum_i^n |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 + 2\text{Re} \sum_{j>i}^n U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j}$ verwendet.

(123) lässt sich weiter umformen zu:

$$\begin{aligned}
P(\alpha \rightarrow \beta, L) &= \delta_{\alpha\beta} - 2\text{Re} \sum_{\substack{i,j \\ (j>i)}}^n U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} [\cos^2 \Delta_{ij} + \sin^2 \Delta_{ij} - (e^{-\frac{i\Delta_{ij}}{2}})^2] \\
&= \delta_{\alpha\beta} - 2\text{Re} \sum_{\substack{i,j \\ (j>i)}}^n U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} [2 \sin^2 \frac{\Delta_{ij}}{2} - i \sin \Delta_{ij}] \\
&= \delta_{\alpha\beta} - 4\text{Re} \sum_{\substack{i,j \\ (j>i)}}^n U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} \sin^2 \frac{\Delta_{ij}}{2} \\
&\quad + 2\text{Im} \sum_{\substack{i,j \\ (j>i)}}^n U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} \sin \Delta_{ij}
\end{aligned} \tag{124}$$

Die Gleichungen (123) und (124) zeigen, dass man einen Neutrinozustand $|\nu_\beta\rangle$ im Abstand L , welcher bei der Quelle als reiner Zustand $|\nu_\alpha\rangle$ emittiert wurde nur finden kann, wenn $\Delta_{ij} \neq 0$ ist. Neutrinooszillationen können also nur auftreten, wenn $m_i^2 - m_j^2 \neq 0$. Damit können nicht alle Neutrinos masselos sein, falls Oszillationen stattfinden.

Wenn \mathcal{CP} -Invarianz angenommen wird, also keine \mathcal{CP} -verletzenden Phasen in U auftreten, sind alle $U_{\alpha i}$ reell und man kann in (124) ablesen: [Schm97]

$$P(\alpha \rightarrow \beta, L) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{\substack{i,j \\ (j>i)}}^n U_{\alpha i} U_{\alpha j} U_{\beta i} U_{\beta j} \sin^2 \frac{\Delta_{ij}}{2} \tag{125}$$

Hier zeigt sich erneut, dass Oszillationen nur mit nichtverschwindenden Differenzen von Massenquadraten möglich sind.

Zu Beginn dieses Kapitels wurde bereits erwähnt, dass im Falle von Neutrinooszillationen Flavoureigenbasis und Masseneigenbasis verschieden sind. Dies hat zur Folge, dass die Neutrinos, die als Flavoureigenzustände definiert sind keine festen Massen besitzen. Der Massenoperator M ist in der Basis der Flavoureigenzustände nicht diagonal. Für die Matrixelemente des Massenoperators gilt: [Schm97]

$$m_{\alpha\beta} \equiv \langle \nu_\beta | M | \nu_\alpha \rangle = \sum_{i,j}^n \langle \nu_\beta | \nu_i \rangle \langle \nu_i | M | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle = \sum_i^n m_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \tag{126}$$

Hier wurde verwendet, dass $\mathbb{1} = \sum_i^n |\nu_i\rangle\langle\nu_i|$, sowie $\langle \nu_i | \nu_\alpha \rangle = U_{\alpha i}$, was aus (111) folgt, sowie $\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij}$, da die $|\nu_i\rangle$ orthonormale Eigenzustände zu M sind. In Gleichung (126) zeigt sich, dass falls alle m_i gleich sind, also $m_i = m$, man m aus der Summe ziehen kann und unter Verwendung von (112) dann erhält, dass $\langle \nu_\beta | M | \nu_\alpha \rangle = m \delta_{\alpha\beta}$. Neutrinooszillationen sind in diesem Fall nicht möglich wie man an (123) wieder erkennen kann. Für die Erwartungswerte

der Massen der Flavoureigenzustände folgt aus (126): [Schm97]

$$m_\alpha = \langle \nu_\alpha | M | \nu_\alpha \rangle = \sum_i^n |U_{\alpha i}|^2 m_i \quad (127)$$

Die $|U_{\alpha i}|^2$ sind dabei die Entwicklungskoeffizienten für den Basiswechsel von der Flavoureigenbasis in die Masseneigenbasis.

Nun wird der Fall $n = 2$ betrachtet. U hat dann als unitäre 2×2 -Matrix 2 reelle Parameter. Davon ist ein Parameter ein Mischungswinkel θ und ein Parameter eine Phase, die allerdings durch Phasentransformation entfernt werden kann. Für $n = 2$ tritt also keine \mathcal{CP} -verletzende Phase auf. Somit ist \mathcal{CP} erhalten. Bei zwei Massen gibt es nur eine Massendifferenz. Damit wird aus $\Delta_{ij} = \Delta = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2} \frac{L}{E}$. Die Transformation von Masseneigenbasis in Flavoureigenbasis lautet dann. [Schm97]

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (128)$$

Da U für $n = 2$ keine \mathcal{CP} -verletzenden Phasen aufweist gilt (120) und es gilt für alle Übergangswahrscheinlichkeiten gilt:

$$\begin{aligned} P(\alpha \rightarrow \alpha, L) &= 1 - 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \frac{\Delta}{2} \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta}{2} \\ P(\alpha \rightarrow \beta, L) &= \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta}{2} \end{aligned} \quad (129)$$

Hierbei wurden trigonometrische Additionstheoreme verwendet. Neutrinooszillationen können nur dann auftreten, wenn $\theta \neq 0$ und $\Delta \neq 0$ gilt, also $m_1^2 - m_2^2 \neq 0$. Die Massen sind also nicht gleich und können damit nicht beide verschwinden. Der Nachweis von Neutrinooszillationen belegt also, dass die Neutrinomasse von 0 verschieden ist. [Schm97]

Im folgenden wird der Fall $n = 3$ betrachtet. Es wird hierbei auch auf den Unterschied zwischen Dirac- und Majorana-Neutrinos eingegangen. Die Matrix U ist nun eine unitäre 3×3 -Matrix. Allgemein hat eine 3×3 -Matrix 18 freie, reelle Parameter. Die Unitarität verringert die freien Parameter um $3^2 = 9$ Parameter auf 9 freie Parameter. Wäre die Matrix U reell, so wäre eine Parametrisierung durch die 3 Eulerwinkel gegeben. Im komplexen Fall kommen dazu also noch weitere 6 Phasen. U kann als unitäre 3×3 -Matrix also durch 3 Winkel und 6 Phasen parametrisiert werden. [Moh98]

Die geladenen Ströme der schwachen Wechselwirkung lassen sich schreiben als:

$$\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{l,\alpha} U_{l\alpha} \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_{\alpha L} W_\mu^- + \text{H.K.} \quad (130)$$

Die Frage ist nun, ob man durch Eichtransformationen an den Leptonen die Zahl der auftretenden Phasen in U reduzieren kann. l bezeichnet in (130) die geladenen Leptonen.

Falls Neutrinos Dirac-Teilchen sind, so sind globale Phasen nicht festzustellen und es kann durch Umeichen erreicht werden, dass 3 Phasen in U wegfallen. Das gleiche Argument scheint auch für die geladenen Leptonen, die ebenfalls Dirac-Teilchen sind, zu gelten. Eichet man aber alle Neutrinos und alle geladenen Leptonen mit der gleichen Phase um, so bleibt U in (130) davon unberührt. Es ergibt sich also eine Bedingung an die Phasen des Eichens. Es dürfen nicht alle Phasen gleich sein. Damit lässt sich der allgemeine Fall einer unitären 3×3 -Matrix mit 3 Winkeln und 6 Phasen im Falle von Dirac-Neutrinos auf 3 Winkel und $6 - 5 = 1$ Phase (\mathcal{CP} -Verletzung) reduzieren. [Moh98]

Für Majorana-Neutrinos ist diese Argumentation so aber nicht durchzuführen. Durch Eichtransformation an den geladenen Leptonen können 3 Phasen in U eliminiert werden (Dirac-Teilchen). Doch die Majorana-Neutrinos können keine Phasen absorbieren. Damit verringert sich die Zahl der Phasen in U auf lediglich auf 3.

Für Majorana-Neutrinos wird die Mischungsmatrix U durch 3 Winkel und 3 Phasen beschrieben.

Im folgenden wird der Fall von Majorana-Neutrinos angenommen und später die entsprechenden für den Dirac-Fall überflüssigen Phasen entfernt. Für U kann folgende Parametrisierung gewählt werden: [Schm97], [PDG10]

$$\begin{aligned}
U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha_{21}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\alpha_{31}}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & & s_{13}e^{i(\frac{\alpha_{31}}{2}-\delta)} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & (c_{23}c_{12} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta})e^{i\frac{\alpha_{21}}{2}} & s_{23}c_{13}e^{\frac{\alpha_{31}}{2}} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & (-c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta})e^{i\frac{\alpha_{21}}{2}} & c_{23}c_{13}e^{\frac{\alpha_{31}}{2}} \end{pmatrix} \quad (131)
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ und $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$.

Die Phase $e^{i\delta}$ ist die Phase, die für U immer auftritt, egal ob man Dirac- oder Majorana-Neutrinos betrachtet. Die Phasen $e^{i\frac{\alpha_{21}}{2}}$ und $e^{i\frac{\alpha_{31}}{2}}$ sind Phasen, die wegen der angenommenen Majorana-Eigenschaft von Neutrinos hier hinzukommen.

Betrachtet man nun (124) so zeigt, sich dass für die \mathcal{CP} -Verletzung nur der Imaginärteil in der

Summe entscheidend ist. Es muss also folgender Term betrachtet werden:

$$\text{Im} \sum_{\substack{i,j \\ (j>i)}}^n U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} \sin \Delta_{ij} \quad (132)$$

α bzw. β gibt dabei jeweils die Zeile von U an und ist für jede betrachtete Oszillation fest. In den letzten beiden Spalten von (131) steht die Phase $e^{i\frac{\alpha_{21}}{2}}$ bzw. $e^{i\frac{\alpha_{31}}{2}}$. Diese Phasen fallen in (132) weg, da bei Termen wie $U_{\alpha i} U_{\beta i}^*$ die Phase verschwindet. Die beiden Phasen, die in U auftauchen, weil man Neutrinos als Majoranateilchen betrachtet hat, haben also keinen Einfluss auf die \mathcal{CP} -Verletzung bei den Neutrinooszillationen. Die beiden zusätzlichen Phasen, die durch die Betrachtung von Majorana-Neutrinos zunächst entstehen, können also für den Sachverhalt der Neutrinooszillationen vernachlässigt werden. Die Beschreibung von U mit nur einer \mathcal{CP} -verletzenden Phase ist also ausreichend.

Experimente, die Neutrinooszillationen nachweisen können daher keine Antwort auf die Frage geben, ob Neutrinos Dirac- oder Majorana-Teilchen sind. Allerdings weisen sie nach, dass nicht alle Neutrinomassen gleich sein können und somit auch nicht alle verschwinden können, da dann Neutrinooszillationen nach (123) nicht möglich wären. Ebenfalls können dadurch die Mischungswinkel bestimmt werden.

7 Neutrinoloser Doppel-Beta-Zerfall

Unter dem Doppel-Beta-Zerfall versteht man einen Prozess bei dem zwei Neutronen in einem instabilen Kern (A, Z) (A Zahl der Nukleonen, Z Zahl der Protonen) durch β -Zerfall zerfallen. Es wird dabei zwischen dem Normalen Doppel-Beta-Zerfall ($2\nu\beta\beta$ -Zerfall) und dem Neutrinolosen Doppel-Beta-Zerfall ($0\nu\beta\beta$ -Zerfall) unterschieden. Der Normale Doppel-Beta-Zerfall läuft folgendermaßen ab: [Schm97]

$$\begin{aligned} (A, Z) &\rightarrow (A, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \\ 2n &\rightarrow 2p + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \end{aligned} \quad (133)$$

Als Feynman-Diagramm verläuft der Normale Doppel-Beta-Zerfall wie in Abbildung 2 dargestellt.

Der Normale Doppel-Beta-Zerfall erhält also die Leptonzahl $\Delta L = 0$. Dieser Prozess ist in Einklang mit dem Standardmodell. Neutrinos sind Dirac-Teilchen mit $\nu \neq \bar{\nu}$.

Interessanter ist die Möglichkeit eines Neutrinolosen Doppel-Beta-Zerfalls. Dieser Prozess läuft

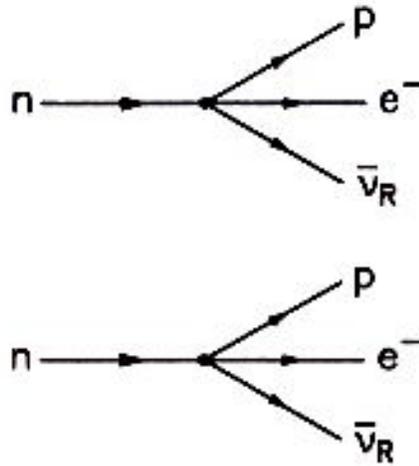


Abbildung 2: Feynman-Diagramm des Normalen Doppel-Beta-Zerfalls [Schm97]

in folgender Weise ab: [Schm97]



Dieser Zerfall verletzt die Leptonzahlerhaltung des Standardmodells um $\Delta L = 2$. Dieser Prozess ist also im Standardmodell verboten. Eine mögliche schematische Erklärung hierfür ist im Feynman-Graphen in Abbildung 3 dargestellt. Am Vertex I wird ein $\bar{\nu}_R$ emittiert, was am

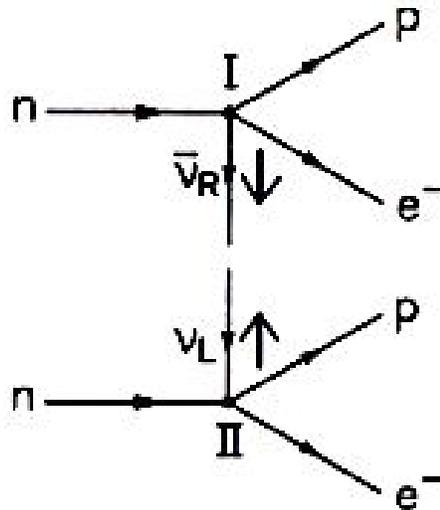


Abbildung 3: Feynman-Diagramm des Neutrinosen Doppel-Beta-Zerfalls [Schm97]

Vertex II als ν_L absorbiert wird. Dieser Prozess ist nur möglich, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind: [Schm97], [Gro89]

1. Neutrinos sind Majorana-Teilchen, also $\nu = \bar{\nu}$.
2. (a) Die Helizität des Neutrinos bei Emission in Vertex I und Absorption in Vertex II wird umgekehrt. Dies ist nur möglich, wenn das Neutrino eine nichtverschwindende Majorana-Masse besitzt.
 - (b) Eine weitere Möglichkeit ist eine rechtshändige Komponente des schwachen leptoni- schen Stroms. - Diese Möglichkeit wird im folgenden nicht weiter verfolgt.

Neutrinos haben nach 1. zwei Chiralitätszustände mit $\nu = \nu_L$ und $\bar{\nu} = \bar{\nu}_R$. Damit ist nach (80) bzw. (82) eine Leptonzahlverletzung um $\Delta L = 2$ verbunden. Das im Vertex I emittierte Antineutrino wird im Vertex II als Neutrino absorbiert.

Für 2. (a) wurde in Gleichung (57) bereits gezeigt, dass massebehaftete Majorana-Neutrinos neben der linkshändigen Komponente auch eine rechtshändige Komponente aufwei- sen. Mit der Wahrscheinlichkeit $(\frac{m_0}{2E})^2$ hat das Neutrino eine rechtshändige Komponente. Dies erklärt auch, dass die Übergangsamplitude in Abbildung 4 proportional zu m_ν ist. Durch Be- stimmen der Übergangsrates erhält man Informationen über die Neutrinomasse. Abbildung 4 zeigt den $0\nu\beta\beta$ -Zerfall auf Quarkniveau. Es wird nur der sogenannte m_ν -Mechanismus betrachtet. Weiterer Mechanismus ist der RHC-Mechanismus (right-handed current), also der Fall, der in 2. (b) angesprochen wird. Der $0\nu\beta\beta$ -Zerfall stellt also eine Möglichkeit da, sowohl die Majorana-

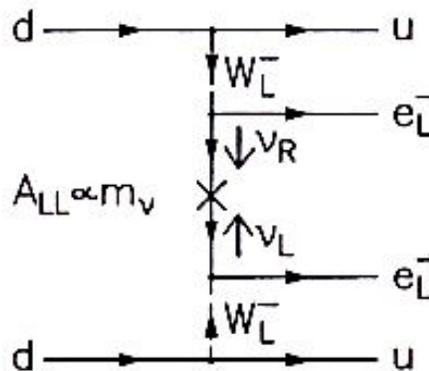


Abbildung 4: $0\nu\beta\beta$ -Zerfall auf Quarkenebene für den m_ν -Mechanismus [Schm97]

Eigenschaft des Neutrinos als auch die Neutrinomasse anhand der Übergangsrates zu bestimmen. Der Neutrinolose Doppel-Beta-Zerfall ist nur für massebehaftete Majorana-Neutrinos möglich. [Schm97], [Gro89]

Es wurden bereits weitere Mechanismen des $0\nu\beta\beta$ -Zerfalls angesprochen. Um zu zeigen, dass je- der Mechanismus die Majorana-Eigenschaft von Neutrinos erfordert, ist das Black-Box-Theorem

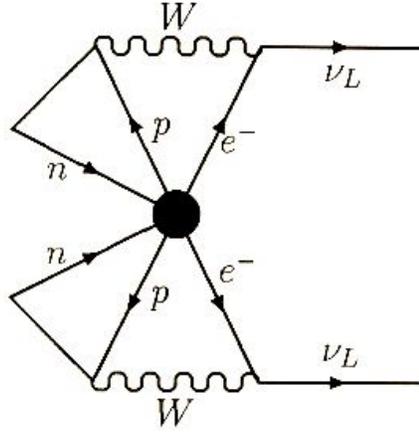


Abbildung 5: Diagramm des Black-Box-Theorems

ein wichtiger Bestandteil. Abbildung 5 zeigt das entsprechende Diagramm. Der $0\nu\beta\beta$ -Zerfall wird dabei als Prozess $2n \rightarrow 2p + 2e^-$ betrachtet. Der genaue Mechanismus im Inneren des schwarzen Punkts ist dabei unbekannt (Black Box). Schließt man mit Hilfe von W-Bosonen die Vertices zwischen p und e^- so verlangt das Standardmodell, dass ν entstehen und die Leptonenzahl wiederum um $\Delta L = 2$ verletzt ist. Dass eine Leptonzahlverletzung um $\Delta L = 2$ die Majorana-Eigenschaft erfordert wurde bereits gezeigt. Dies ist die Rechtfertigung dafür, dass im bisherigen Verlauf nur der m_ν -Mechanismus betrachtet wurde. [Moh98]

Betrachtet man Abbildung 4 so ist zu beachten, dass nur Flavoureigenzustände an das W-Boson koppeln, eine physikalische Masse aber nur den Masseneigenzuständen zuzuschreiben ist. Den Übergang von Flavoureigenbasis zu Masseneigenbasis vermittelt die PMNS-Matrix, die zu Beginn von Kapitel 6 eingeführt wurde. Bei jedem der beiden Vertices aus Abbildung 4 bei dem das Neutrino beteiligt ist, geht diese Matrix ein. Da nicht klar ist welcher Zustand ausgetauscht wird, wird über die 3 Möglichkeiten gemittelt und man gelangt zu Definition der effektiven Neutrinomasse: [Gro89], [Moh98], [Kla95]

$$|\langle m \rangle| = \left| \sum_{\alpha=1}^3 U_{e\alpha}^2 m_\alpha \right| \quad (135)$$

Hierbei sei beachtet, dass die Quadrate der Mischungsmatrix eingehen und nicht wie zuvor bei den Neutrinooszillationen deren Betragsquadrate. Es ist also möglich, dass destruktive Interferenzen eintreten, also $|m_i| > |\langle m \rangle|$. Dass dies bei \mathcal{CP} -Verletzung möglich ist, ist offensichtlich, da dann die Elemente der Mischungsmatrix komplex sein können. Aber auch im Falle von \mathcal{CP} -Invarianz sind destruktive Interferenzen möglich. Es sei bemerkt, dass hierbei die in der PMNS Matrix auftretenden Majorana-Phasen hier nun von Bedeutung sind. Gleichung (135) lässt sich

umschreiben als: [Moh98]

$$|\langle m \rangle| = \left| \sum_{\alpha=1}^3 |U_{e\alpha}|^2 \epsilon_{\alpha} m_{\alpha} \right| \quad (136)$$

Dies lässt sich verstehen, wenn man den geladenen schwachen Strom betrachtet: [Moh98]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC} &= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_l (\bar{\nu}_l \gamma^{\mu} P_L l W_{\mu}^{+} + \bar{l} \gamma^{\mu} P_L \nu_l W_{\mu}^{-}) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{l,\alpha} (U_{l\alpha}^{*} \bar{\nu}_{\alpha} \gamma^{\mu} P_L l W_{\mu}^{+} + U_{l\alpha} \bar{l} \gamma^{\mu} P_L \nu_{\alpha} W_{\mu}^{-}) \end{aligned} \quad (137)$$

Wobei hier die Mischungsmatrix U auftaucht, da von Flavoureigenbasis zu Masseneigenbasis übergegangen wird. l bezeichnet die geladenen Leptonen. Betrachtet man den ersten Term aus (137) und wendet die Operation \mathcal{CP} darauf an, so ergibt sich: [Moh98]

$$U_{l\alpha}^{*} \bar{\nu}_{\alpha} \gamma^{\mu} P_L l W_{\mu}^{+} \xrightarrow{\mathcal{CP}} U_{l\alpha}^{*} \epsilon_{\alpha}^{*} \bar{l} \gamma^{\mu} P_L \nu_{\alpha} W_{\mu}^{-} \quad (138)$$

\mathcal{CP} -Invarianz in (137) kann also erreicht werden, der erste Term \mathcal{CP} -konjugiert zum zweiten ist. Damit folgt: [Moh98]

$$U_{l\alpha} = U_{l\alpha}^{*} \epsilon_{\alpha}^{*} \quad (139)$$

Mit (139) wird der Zusammenhang zwischen (135) und (136) deutlich und es ist einzusehen, dass auch im Falle von \mathcal{CP} -Invarianz, also reeller Mischungsmatrix destruktive Interferenzen in der effektiven Masse auftreten können. [Moh98]

In Kapitel 4 als Beispiele für Majorana- und Dirac-Charakter besprochen wurden, wurde zunächst in der Massenmatrix $m_L = m_R = 0$ gesetzt [siehe (102) f.]. Es ergaben sich zwei Majorana-Zustände mit entgegengesetzten \mathcal{CP} -Eigenwerten aber gleicher physikalischer Masse. Daraus lies sich ein Dirac-Neutrino aufbauen für das der $0\nu\beta\beta$ -Zerfall nicht möglich ist. Mit der Definition in (136) lässt sich dies nun auch verstehen. Für die effektive Masse gilt dann $|\langle m \rangle| = 0$ und die Übergangsamplitude verschwindet. Der $0\nu\beta\beta$ -Zerfall kommt für Dirac-Teilchen nicht vor. Ist jedoch $m_D \gg m_L, m_R$, so ist der Zerfall möglich, jedoch sehr stark unterdrückt, da die effektive Masse sehr klein ist. [Akh00]

Mit Daten aus der Particle Data Group soll im Folgenden ein Plot für die effektive Masse angefertigt werden. Als Werte für die benötigten Größen wird folgendes verwendet: [Schw10]

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12} &= 0,318_{-0,016}^{+0,019} \\ \Delta m_{21}^2 &= (7,59_{-0,18}^{+0,23}) \cdot 10^{-5} \text{eV}^2 \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0,50_{-0,06}^{+0,07} \\ |\Delta_{31}^2| &= (2,40_{-0,11}^{+0,12}) \cdot 10^{-3} \text{eV}^2 \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0,013_{-0,009}^{+0,013} \end{aligned} \quad (140)$$

Da das Vorzeichen von Δm_{31}^2 nicht bekannt ist, ergeben sich zwei Möglichkeiten der Ordnung der Massen.

$$\begin{aligned} \text{Normale Hierarchie: } & m_1 < m_2 < m_3 \\ \text{Invertierte Hierarchie: } & m_3 < m_1 < m_2 \end{aligned} \quad (141)$$

Die verschiedenen Massenhierarchien können wie folgt veranschaulicht werden: Wenn zwei Diffe-

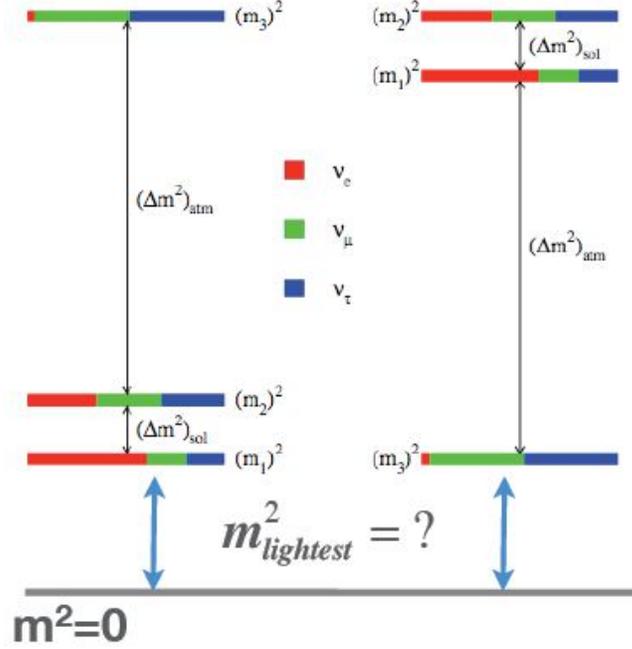


Abbildung 6: links: Normale Massenhierarchie, rechts: Invertierte Massenhierarchie. [Bau10] Hierbei gilt $(\Delta m^2)_{atm} = \Delta m_{32}^2$ und $(\Delta m^2)_{sol} = \Delta m_{21}^2$

renzen von Massenquadraten bekannt sind, sowie die Mischungswinkel, kann man für verschiedene Phasen abhängig von der Masse des leichtesten Neutrinos den Graphen der effektiven Masse $|\langle m \rangle|$ plotten. Die Funktion, die zur Bestimmung der effektiven Masse $|\langle m \rangle|$ geplottet werden muss, lautet mit (131):

$$\begin{aligned} |\langle m \rangle| &= (m_1(c_{12})^2 + m_2(s_{12})^2)(c_{13})^2 e^{i\alpha_{21}} + m_3(s_{13})^2 e^{i\alpha_{31} - 2\delta} \\ \text{Normale Hierarchie: } & m_2 = \sqrt{\Delta m_{21}^2 + m_1^2}, \quad m_3 = \sqrt{|\Delta m_{31}^2| + m_1^2} \\ \text{Inverse Hierarchie: } & m_1 = \sqrt{|\Delta m_{31}^2| + m_3^2}, \quad m_2 = \sqrt{\Delta m_{21}^2 + |\Delta m_{31}^2| + m_3^2} \end{aligned} \quad (142)$$

Die Abbildungen 7, 8 und 9 zeigen die Werte der effektiven Massen abhängig von der Masse des leichtesten Neutrinos der jeweiligen Hierarchie. Es zeigt sich, dass die verschiedenen Phasen wie zu erwarten war zum Teil großen Einfluß auf den Wert der effektiven Masse haben, da so destruktive Interferenzen möglich sind. Dies zeigt sich besonders in Abbildung 7, die die effektive Masse bei Normaler Massenhierarchie zeigt. Durch entsprechende Phasen kommt es zu

destruktiver Interferenz und vollständiger Auslöschung von $|\langle m \rangle|$. Ebenfalls auffällig ist, dass die Werte für die effektive Masse für die Inverse Hierarchie generell über den Werten für die Normale Hierarchie liegen.

In allen Plots finden sich auch entsprechende Fehler. Hierzu wurde der oben angegebene größere Fehler der jeweiligen Größe verwendet und anschließend mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung der Fehler der effektiven Masse ermittelt. Die geplotteten Daten wurden mit Hilfe eines C++-Programms ermittelt und anschließend mit GNUplot geplottet. Im Anhang findet sich der Quellcode des C++-Programms.

8 Zusammenfassung

Die Dirac-Gleichung als maßgebliche Gleichung zur Beschreibung von relativistischen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen wurde in klassischer Weise hergeleitet und kovariant formuliert. Die Dirac-Gleichung wurde ohne elektromagnetisches Feld gelöst, was für die Beschreibung von Neutrinos als elektrisch neutralen Teilchen ausreicht. Der Unterschied zwischen Dirac-Teilchen und Majorana-Teilchen, sowie die möglichen Fälle wie ein Massenterm für Neutrinos in der Dirac-Gleichung entstehen kann, wurden ebenso behandelt. Es zeigte sich, dass der allgemeine Fall eines Dirac-Majorana-Massenterms in der Lagrange-Dichte für die Dirac-Gleichung durch Basiswechsel auf den Majorana-Fall zurückgeführt werden kann. Ausgehend von der Annahme, dass Flavour-eigenbasis und Masseneigenbasis verschieden sind, wurden die Bedingungen für Neutrinooszillationen hergeleitet und anschließend auch in Zusammenhang mit möglichem Majorana- oder Dirac-Charakter von Neutrinos diskutiert. Es zeigte sich als zentrales Resultat, dass im Falle von Neutrinooszillationen die Neutrinomasse nicht für alle Generationen verschwinden kann. Als vielversprechender Ansatz die Neutrinomasse experimentell zu bestimmen, zeigen sich die Experimente zum Neutrinolosen Doppel-Beta-Zerfall. Hierfür wurde die einfachste mögliche Erklärung diskutiert. Zum Abschluss wurden Plots der effektiven Masse im Neutrinolosen Doppel-Beta-Zerfall angefertigt. Sie zeigen die verschiedenen Auswirkungen der möglichen Phasenfaktoren in der PMNS-Mischungsmatrix auf die Werte der effektiven Masse.

Anhang

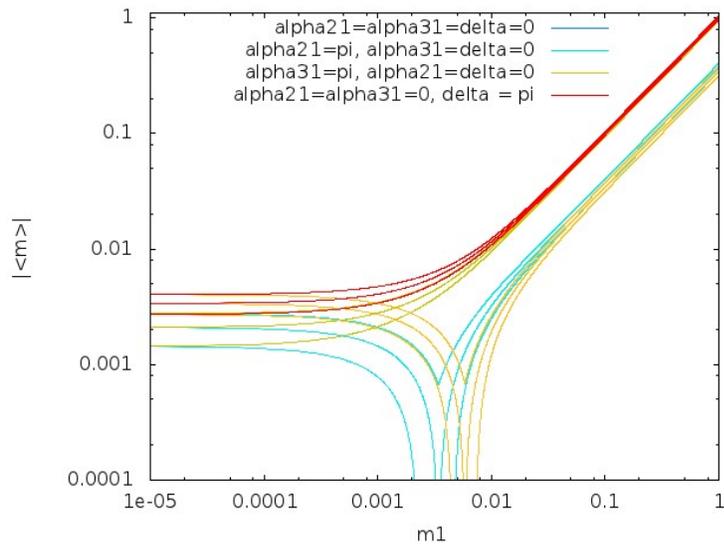


Abbildung 7: Plot der effektiven Masse $|\langle m \rangle|$ für die Normale Hierarchie bei verschiedenen Phasen $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \delta$

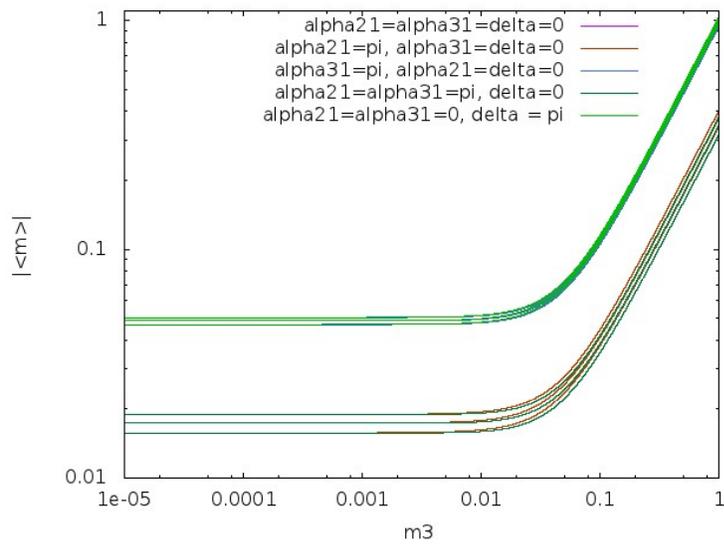


Abbildung 8: Plot der effektiven Masse $|\langle m \rangle|$ für die Inverse Hierarchie bei verschiedenen Phasen $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \delta$

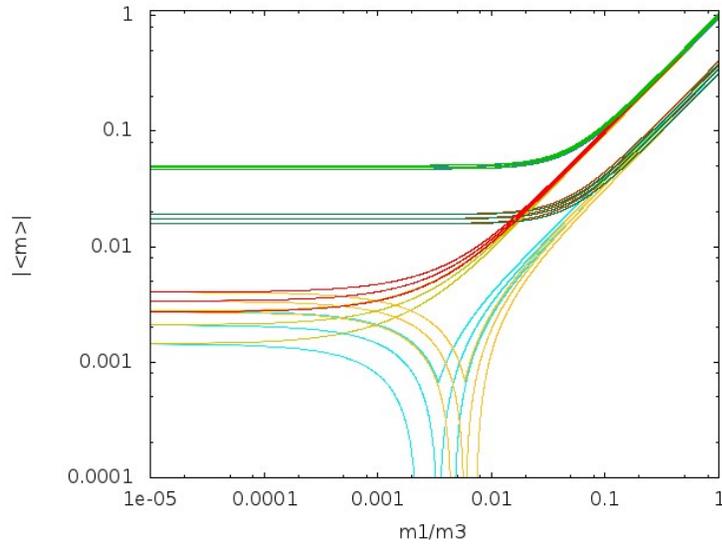


Abbildung 9: Plot der effektiven Masse $|\langle m \rangle|$ für Normale Hierarchie und Inverse Hierarchie

Listing 1: C++-Code zur Generierung der Daten des Plots

```

#include<cmath>
#include<fstream>
#include<iostream>
#include<string>
#include<complex>
#include<stdio.h>
#include<cstring>
int main()
{
std::complex<double> i(0,1.0);
std::complex<double> Delta21 = 7.59*pow(10,-5);
std::complex<double> errm21 = 0.23*pow(10,-5);
std::complex<double> Delta31 = 2.40*pow(10,-3);
std::complex<double> errm31 = 0.12*pow(10,-3);
std::complex<double> c12_square = 0.682;
std::complex<double> err12up = 0.019;
std::complex<double> s12_square = 0.318;
std::complex<double> c13_square = 0.987;

```

```

std::complex<double> s13_square = 0.013;
std::complex<double> err13up = 0.013;
double alpha21;
double alpha31;
double delta;
std:: string y;
  for(int i=0;i<5;i++)
  {
    if(i==0)
    {
      y = "NormaleHierarchie0.txt";
      alpha21 = 0.0;
      alpha31 = 0.0;
      delta = 0.0;
    }
    if(i==1)
    {
      y = "NormaleHierarchie1.txt";
      alpha21 = 3.1415;
      alpha31 = 0.0;
      delta = 0.0;
    }
    if(i==2)
    {
      y = "NormaleHierarchie2.txt";
      alpha21 = 0.0;
      alpha31 = 3.1415;
      delta = 0.0;
    }
    if(i==3)
    {
      y = "NormaleHierarchie3.txt";

```

```

    alpha21 = 3.1415;
    alpha31 = 3.1415;
    delta = 0.0;
}
if(i==4)
{
    y = "NormaleHierarchie4.txt";
    alpha21 = 0.0;
    alpha31 = 0.0;
    delta = 3.1415;
}
remove( y.c_str() );
std::ofstream myfile;
myfile.open ( y.c_str() , std::ios_base::app);
for(double m1=0.0; m1 < 1; m1=m1+0.00001)
{
    std::complex<double> m2 = sqrt(Delta21+(m1*m1));
    std::complex<double> errm2 = 1.0/(2.0*m2)*errm21;
    std::complex<double> m3 = sqrt(Delta31+(m1*m1));
    std::complex<double> errm3 = 1.0/(2.0*m3)*errm31;
    double value = abs(m1*c12_square*c13_square +
        m2*s12_square*c13_square*(std::cos(alpha21)+
        i*std::sin(alpha21))+m3*s13_square*
        (std::cos(alpha31-2*delta)
        +i*std::sin(alpha31-2*delta)));
    double err = abs(sqrt(pow(((m1*c12_square+m2*s12_square*
        (std::cos(alpha21)+i*std::sin(alpha21)))*err13up),2)
        +pow(m1*c13_square*err12up,2)+pow(m2*c13_square*(std::cos
        (alpha21)+i*std::sin(alpha21))*err12up,2)
        +pow(m3*(std::cos(alpha31-2*delta)
        +i*std::sin(alpha31-2*delta))*err13up,2)
        +pow((s12_square*c12_square*(std::cos(alpha21)

```

```

+i*std::sin(alpha21))*errm2),2))
+pow(s13_square*(std::cos(alpha31-2*delta)
+i*std::sin(alpha31-2*delta))*errm3,2));
myfile<< m1 << "_____" << value << "_____" << value+err
    << "_____" << value - err << std::endl;
}
myfile.close();
}
for (int i=0;i<5;i++)
{
    if(i==0)
    {
        y = "InvertierteHierarchie0.txt";
        alpha21 = 0.0;
        alpha31 = 0.0;
        delta = 0.0;
    }
    if(i==1)
    {
        y = "InvertierteHierarchie1.txt";
        alpha21 = 3.1415;
        alpha31 = 0.0;
        delta = 0.0;
    }
    if(i==2)
    {
        y = "InvertierteHierarchie2.txt";
        alpha21 = 0.0;
        alpha31 = 3.1415;
        delta = 0.0;
    }
    if(i==3)

```

```

{
  y = "InvertierteHierarchie3.txt";
  alpha21 = 3.1415;
  alpha31 = 3.1415;
  delta = 0.0;
}
if(i==4)
{
  y = "InvertierteHierarchie4.txt";
  alpha21 = 0.0;
  alpha31 = 0.0;
  delta = 3.1415;
}
remove( y.c_str() );
std::ofstream myfile;
myfile.open (y.c_str(), std::ios_base::app);
for(double m3=0.0; m3 < 1; m3= m3+0.00001)
{
  std::complex<double> m1 = sqrt(Delta31+m3*m3);
  std::complex<double> errm1 = 1.0/(2.0*m1)*errm31;
  std::complex<double> m2 = sqrt(Delta21+Delta31+m3*m3);
  std::complex<double> errm2 =
    1.0/(2.0*m2)*sqrt(errm31*errm31+errm21*errm21);
  double value = abs(m1*c12_square*c13_square +
    m2*s12_square*c13_square*(std::cos(alpha21)
    + i*std::sin(alpha21))
    +m3*s13_square*(std::cos(alpha31-2*delta)
    +i*std::sin(alpha31-2*delta)));
  double err = abs(sqrt(pow(((m1*c12_square+m2*s12_square
    *(std::cos(alpha21)+i*std::sin(alpha21)))
    *err13up),2)+pow(m1*c13_square*err12up,2)
    +pow(m2*c13_square*(std::cos(alpha21)

```

```

+i*std::sin(alpha21))*err12up,2)
+pow(m3*(std::cos(alpha31-2*delta)
+i*std::sin(alpha31-2*delta))*err13up,2)
+pow(c12_square*c13_square*errm1,2)
+pow(s12_square*c13_square*(std::cos(alpha21)
+i*std::sin(alpha21))*errm2,2));
myfile<< m3 << "_____" << value << "_____"
<< value + err << "_____" << value - err
<< std::endl;
}
myfile.close();
}
}

```

Literatur

- [Akh00] E. Kh. Akhmedov: Neutrino physics, Report FISIST/1-2000/CFIF, arXiv:hep-ph/0001264v2
- [Bau10] Prof. Dr. Laura Baudis, Universität Zürich, *Vorlesungskript: Kern- und Teilchenphysik II 03.06.10*, http://www.physik.unizh.ch/~lbaudis/kt_phy211/kt2_doppelbeta.pdf
- [BjD66] James D. Bjorken, Sidney D. Drell: *Relativistische Quantenmechanik*, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, ISBN 3-411-0098-8
- [Gro89] Dr. rer. nat. Klaus Grotz, Prof. Dr. rer. nat. Hans Volker Klapdor: *Die schwache Wechselwirkung in Kern, Teilchen- und Astrophysik*, Teubner Studienbücher: Physik, ISBN 3-529-03035-7
- [Kla95] Prof. Dr. rer. nat. Hans Volker Klapdor-Kleingrothaus, Dr. rer. nat. Andreas Staudt: *Teilchenphysik ohne Beschleuniger*, Teubner Studienbücher Physik, ISBN 3-519-03088-8
- [Moh98] Rabindra N Mohapatra, Palash B Pal: *Massive Neutrinos In Physics And Astrophysics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., ISBN 981-02-3373-6
- [PDG10] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G 37, 075021 (2010)
- [Rei08] Peter Reineker, Michael Schulz, Beatrix Mercedes Schulz: *Theoretische Physik IV, Quantenmechanik 2*, Wiley-VCH, ISBN 978-3-527-40643-2
- [Schm97] Prof. Dr. rer. nat. Norbert Schmitz: *NeutrinoPhysik*, Teubner Studienbücher: Physik, ISBN 3-519-03236-8
- [Schw10] T. Schwetz, M. Tortola, and J.W. F. Valle, *Three-flavour neutrino oscillation update* arXiv:0808.2016.
- [Wac05] Dr. Armin Wachter: *Relativistische Quantenmechanik*, Springer Berlin Heidelberg New York, ISBN 3-540-22922-1

Erklärung:

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 20.06.11