

# Kosmologie und primordiale Nukleosynthese

Bachelorarbeit  
von

Beatriz Tapia Oregui

Uni Heidelberg  
An der Fakultät für Physik und Astronomie  
Max-Planck-Institut für Kernphysik  
Abteilung für Teilchen- und Astroteilchenphysik

Erstgutachter: Dr. Rodejohann  
Zweitgutachter:  
Betreuende Mitarbeiterin:

Bearbeitungszeit: 28.03.2011 – 18.07.2011



**Abstrakt**

In dieser Arbeit wird das Standardmodell der Kosmologie, die bisher beste physikalische Theorie zur Beschreibung der dynamischen Struktur des Universums, vorgestellt. Von dem groben Bild der Entstehung des Kosmos und der späteren Expansion ausgehend wird der Zeitpunkt, zu dem sich die freien Protonen und Neutronen zu den leichtesten Atomkernen verbinden, näher betrachtet. Diese sogenannte primordiale Nukleosynthese wird auf dem Standardmodell der Kosmologie und der Teilchenphysik aufbauend erklärt. Die Häufigkeiten der leichtesten Elemente ( $D$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$ ) können somit in Abhängigkeit von dem einzigen freien Parameter, dem Baryon-Photon-Verhältnis, theoretisch berechnet und mit dem experimentellen Befund in Relation gebracht werden. Die Übereinstimmung der Werte ist eine wesentliche Stütze der zu Grunde liegenden Modelle. Andererseits stellt die Erklärung des vom Standardmodell nicht vorhergesagten aber essentiellen Baryon-Photon-Verhältnisses eine wichtige Herausforderung an die Nicht Standardmodelle. Somit ist diese Arbeit auch eine gute Motivation für die weitergehende Forschung zur Big Bang Nukleosynthese und der allgemeinen Kosmologie über die Grenzen der bisherigen unvollständigen Beschreibung hinaus.

**Abstract**

This paper introduces the Standard Cosmological Model, which at this point in time best describes the fundamental dynamic structure of the Universe. Starting from the origin of the cosmos and the subsequent expansion, it focuses on the time when free protons and neutrons combined to form the lightest nuclei. This so-called primordial nucleosynthesis, which is based on the Standard Model of Cosmology and Particle Physics, is explained. The SBBN-predicted primordial abundances of the light elements ( $D$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$ ) can be calculated as a function of the only free parameter, the baryon abundance, and are then compared to the observational data. The good overall agreement validates the underlying models. In addition, the baryon abundance, which does not result from standard models, provides a powerful constraint on possible deviations from them. Therefore this paper also represents a call to further research in the field of Big Bang Nucleosynthesis and cosmology in general, beyond the limits of the presently available, as yet incomplete description of it.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Kosmologie</b>	<b>1</b>
1.1 Kosmologisches Prinzip . . . . .	1
1.2 Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	2
1.3 Das Weylsche Postulat . . . . .	2
1.4 Robertson-Walker-Metrik . . . . .	3
1.5 Die Friedmann Differentialgleichung . . . . .	5
1.6 Lösungen der Friedmann-Gleichung als Urknallmodelle . . . . .	6
1.7 Die Beziehung zwischen Dichte und kosmischem Skalenfaktor . . . . .	6
1.8 Weltzustand . . . . .	8
1.9 Thermodynamische Expansion des Weltalls . . . . .	11
1.10 Entwicklung des Universums - nach dem Standardmodell . . . . .	15
1.11 Probleme des kosmologischen Standardmodells . . . . .	15
<b>2 Primordiale Nukleosynthese</b>	<b>17</b>
2.1 Ablauf der primordialen Nukleosynthese . . . . .	17
2.2 Nukleares statisches Gleichgewicht . . . . .	21
2.3 Häufigkeiten der leichten Elemente . . . . .	22
2.3.1 $^4\text{He}$ -Häufigkeit . . . . .	23
2.3.2 Die D-Häufigkeit . . . . .	26
2.3.3 Die $^3\text{He}$ -Häufigkeit . . . . .	27
2.3.4 $^7\text{Li}$ -Häufigkeit . . . . .	27
2.4 Zusammenfassung für SBBN . . . . .	27
2.5 Nicht-Standard Nukleosynthese . . . . .	28
2.6 Zusammenfassung für Nicht-Standard Nukleosynthese . . . . .	29
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>31</b>

## Einleitung

Das Universum, welches die Menschheit seit Jahrhunderten beschäftigt hat und die Gesamtheit des Seins umfasst, ist das zu analysierende physikalische Objekt meiner Bachelorarbeit. Mein Ziel ist es, die physikalische Beschreibung des Universums und deren zu Grunde liegende Theorie auf einer zugänglichen Art und Weise vorzustellen. Dafür werde ich im ersten Kapitel die Grundlagen der Kosmologie erläutern und insbesondere dessen Standardmodell veranschaulichen. Im zweiten Kapitel werde ich mich auf der Big Bang Nukleosynthese konzentrieren und deren Ergebnisse präsentieren, da sie eine wichtige Bestätigung dieses Modells darstellen.



# 1. Kosmologie

Kosmologie ist die physikalische Theorie, die sich mit dem Ursprung, der Entwicklung und der grundlegenden Struktur des Universums als Ganzem beschäftigt. Es setzt sich aus zwei griechischen Wörtern zusammen: Kosmos, Bezeichnung für ein geordnetes System und Antonym für Chaos, und Logos, Lehre.

Das Standardmodell der Kosmologie ist die heute anerkannte kosmologische Theorie, die viele beobachtete Phänomene beschreibt. Darin wird von einem unendlich heißen und dichten Frühzustand des Universums ausgegangen, dem sogenannten Urknall. Die Dynamik der Expansion des homogenen und isotropen Weltalls wird durch die Allgemeine Relativitätstheorie festgelegt, deren Aufkommen die Identität der Kosmologie als eigenständiger Zweig in der Wissenschaft bedeutet.

Das Urknallmodell erfährt seine erste experimentelle Bestätigung, als Hubble in 1929 die Rotverschiebung der Galaxien entdeckt und ihre Fluchtgeschwindigkeit als Folge der gesamten Expansion des Weltalls interpretiert. Mit der Entdeckung der kosmischen Hintergrundstrahlung im Jahre 1964, welche als Nachrauschen dieses Urknalls interpretiert wird, setzt sich das Urknallmodell endgültig gegen konkurrierende Modelle durch. Auch die Häufigkeiten der leichten Elemente können innerhalb dieses Modells über 10 Größenordnungen richtig vorhergesagt werden. Diese drei wichtige Beobachtungen liegen dem Standardmodell der Kosmologie zu Grunde, von denen in dieser Arbeit nur die Beschreibung der primordialen Nukleosynthese vorgestellt wird. [KKZ97]

## 1.1 Kosmologisches Prinzip

Unter dem Kosmologischen Prinzip versteht man den ursprünglichen Grundsatz der Gesetzmäßigkeiten der kosmologischen Modelle. Es enthält zwei vereinfachende Annahmen, die als Verallgemeinerung des kopernikanischen Prinzips verstanden werden können. Die kopernikanische Grundidee sagt aus, dass sich die Erde nicht im Mittelpunkt des Sonnensystems befindet. Im gleichen Sinne würde man dann auch erwarten, dass die anderen Elemente im Weltall keine besondere Position im Kosmos einnehmen. [Sch09]

Eine sprachliche Formulierung wäre:

Im Universum sind alle Positionen und Richtungen gleichwertig.

Diese Einschränkung wird durch zwei Grundannahmen geäußert, bei denen die zweite direkt aus der ersten folgt:

1. Prinzip der Isotropie: Das Universum sieht in jeder Richtung gleich aus.
2. Prinzip der Homogenität: Zu jedem beliebigen Zeitpunkt ist die Dichte überall gleich.

Da man auf „kurzen Distanzen“ eher einzelne Himmelskörper wie unterschiedliche Planeten und Sterne im Universum beobachtet, können diese Annahmen nur unter der Voraussetzung gelten, dass man Bereiche von solcher Ausdehnung betrachtet, dass in diesen die Materie im Mittel gleich verteilt ist. Diese Ausdehnung beträgt heutzutage ca.  $10^8$  bis  $10^9$  Lichtjahre. Das ist der mittlere Abstand von Superhaufen von Galaxien. Dazwischen findet man Voids, Gebiete mit deutlich weniger Galaxien. Strukturen, die größer sind als  $10^8$  Lichtjahre, gibt es nach heutigem Wissen nicht, so dass dieser Wert die Größenordnung der Skala der kosmischen Beschreibung des momentanen Weltzustands festlegt. Durch die Expansion des Kosmos gilt das Kosmologische Prinzip nur als erste Näherung für das heutige Universum, trifft aber für die Frühphase des Universums sogar ziemlich exakt zu. [Fli06], [KT94]

Die bisher überzeugendste experimentelle Bestätigung des Kosmologischen Prinzips ist die hohe Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung. Dieses Bad an thermischer Strahlung, das der im früheren Universum vom thermischen Gleichgewicht entkoppelten Photonen entspricht, zeigt eine Gleichverteilung in allen Raumrichtungen bis auf Bruchteile eines Prozents auf.

Ungeachtet des hohen Grades an Isotropie und Homogenität, den man gegenwärtig beobachtet, haben sich einige Kosmologen mit anisotropen und inhomogenen Modellen beschäftigt. Jedoch bevorzugt man die Gültigkeit des Kosmologischen Prinzips, nicht weil dieser definitiv richtig sei, sondern eher, weil es den Gebrauch von beschränkten Datensätzen erlaubt. Alle schwächeren Annahmen, wie bei anisotropen oder hierarchischen Modellen, würden auf Metriken führen, für die es zur Bestimmung der in ihnen auftretenden Funktionen nicht genügend Daten geben würde.

Modelle, die den Kosmologischen Prinzip entsprechen, können zum Olbersschen Paradoxon führen, wenn man von einem euklidischen und unendlich ausgedehnten Raum ausgeht. Unter diesen Voraussetzungen müsste nach unendlich langer Zeit Licht jedes Sterns die Erde erreicht haben und der Himmel in alle Richtungen so hell wie die Sternoberflächen erscheinen. Dieser Widerspruch zum tatsächlich beobachteten dunklen Nachthimmel heißt Olberssches Paradoxon und war ein historisch wichtiges Argument gegen diese Modelle. Im nichtrelativistischen Weltall führt das Kosmologische Prinzip zum unvermeidbaren Widerspruch, der aber im relativistischen Fall umgangen werden kann. Die allgemein akzeptierte Auflösung des Paradoxons beruht auf der Annahme, dass das Weltall nicht statisch ist, was eine unendliche Vergangenheit und somit auch eine unendliche Helligkeit implizieren würde. Stattdessen geht man von einem endlichen Alter und einer großräumigen Expansion aus. Die verrichtete Expansionsarbeit entspricht der "verlorenen" inneren Energie, die sich als Strahlungsdichte bemerkbar macht. Wenn man dann die Fluchtgeschwindigkeit groß genug wählt, wird der Energieverlust ausreichen, um die Strahlungsdichte auf das beobachtete Niveau zu reduzieren. [Sch09]

## 1.2 Allgemeine Relativitätstheorie

Da die Kosmologie das Weltall als Ganzes zu beschreiben versucht und sich nicht auf abgegrenzte Teilbereiche beschränkt, spielt nur die Gravitation eine wichtige Rolle. Die nichtgravitativen Kräfte - elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkungen - können vernachlässigt werden, weil sie teils kurzreichweitig sind oder sich wegen der Ladungsneutralität kompensieren. Sie beeinflussen die Details in der Anfangsphase der Entwicklung, können aber im großen Bild der Kosmologie außer Acht gelassen werden. Zur Bestimmung der Dynamik des Weltalls im Großen sind daher nur die Feldgleichungen der Gravitation zu lösen. [KKZ97]

## 1.3 Das Weylsche Postulat

Weyl hat zusätzlich zur Allgemeinen Relativitätstheorie und zum Kosmologischen Prinzip noch eine privilegierte Klasse von Beobachtern im Universum betrachtet, welche mit der Expansionsbewegung der Galaxien assoziiert ist. Dadurch kann er ein „Substrat“ oder Fluid postulieren, welches den Raum erfüllt und in welchem sich die Galaxien wie fundamentale Teilchen bewegen. Die Eigenschaften dieses Fluids sollen unabhängig von der inneren Struktur seiner Konstituenten sein; in der Gegenwart sind es Galaxien, früher waren es Photonen, Neutronen und Elektronen, welche trotz ihres Aufbaus keine Änderungen in der Dynamik des makroskopischen Systems hervorrufen.

Die Teilchen des Substrats bewegen sich in der Raum-Zeit auf einer Schar zeitartiger Geodäten, die von einem Punkt in der endlichen oder unendlichen Vergangenheit ausgehen. Das Weylsche Postulat fordert, dass sich die Geodäten nicht schneiden, ausgenommen in einem einzigen Punkt in der Vergangenheit und, möglicherweise, in der Zukunft. Somit geht eine und nur eine Geodäte durch jeden Punkt der Raum-Zeit und damit hat jedes fundamentale Teilchen dieser Flüssigkeit eine eindeutige Geschwindigkeit. [Olo10]

Dadurch kann die Kernaussage des Weylschen Postulats folgendermaßen erfasst werden:



Die Materie verhält sich im Universum wie eine ideale Flüssigkeit.

Obwohl die Galaxien dieser Bewegung nicht exakt folgen, sind die Abweichungen im Vergleich zur allgemeinen Expansion sehr klein, so dass das Weylsche Postulat die tatsächliche Situation im Universum gut wiedergibt. Relativgeschwindigkeiten, wie etwa das Kreisen von Planeten um einen Fixstern oder die Bewegung eines Fixsterns in einer Galaxie, können somit vernachlässigt werden. [Sch09]

## 1.4 Robertson-Walker-Metrik

Um ein Allgemein-Relativistisches System zu betrachten benötigt man eine spezielle Metrik. Die Einfachste, die die bisherigen präsentierten Annahmen berücksichtigt, ist die Robertson-Walker-Metrik. [Fli06]

Die Beschreibung der Materie als ideales Fluid führt dazu, dass man von der Vorstellung von fundamentalen Beobachtern ausgehen kann. Diese ausgezeichneten Beobachter unterliegen der kosmischen Expansion, ruhen aber relativ zu der umgebenden Materie. Um eine globale kosmische Zeit definieren zu können, führt man ein von der Expansion mitbewegtes Koordinatensystem ein, das für die privilegierte Beobachter konstant ist. [Hea]

Die Koordinate  $t$  spielt dann die Rolle einer kosmischen Zeit oder Weltzeit. Die Weltzeit definiert einen Begriff der Gleichzeitigkeit. Eine Weltkarte ist dann eine Verteilung von Ereignissen auf den Gleichzeitigkeitsflächen. Ein Weltbild ist der Anblick des Universums, der sich einem Beobachter zu irgendeinem Zeitpunkt der Weltzeit bietet, d.h. er erfasst die Ereignisse, die durch das Schauen entlang des Vergangenheitskegels des Beobachters gesehen werden, siehe Abb. 1.1. [Sch09]

Aufgrund des Äquivalenzprinzips sind in einem frei fallenden Bezugssystem auf kleinen Abstands- und Zeitskalen keine Gravitationsfelder nachweisbar, so dass lokal für die fundamentalen Beobachter die Spezielle Relativitätstheorie mit dem dazugehörigen Linienelement gilt:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1.1)$$

oder in Kugelkoordinaten umgeschrieben:

$$ds^2 = dt^2 - [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \quad (1.2)$$

Durch die Wahl der mitbewegten Koordinaten wird gewährleistet, dass sich an dem zeitlichen Term des Linienelements nichts ändert. Das ist jedoch nicht der Fall bei dem räumlichen Anteil, da die Ausdehnung des Universums noch zu berücksichtigen ist. [Hea]

Um die Expansion mit einzubringen kann man das Linienelement im allgemeinen folgendermaßen ergänzen:

$$ds^2 = dt^2 - h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.3)$$

mit  $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(t, x)$ .

Verwendet man aber die vom Kosmologischen Prinzip geforderte Tatsache, dass die dreidimensionalen Flächen isotrop und homogen sind, braucht man eine Metrik, die eine räumliche konstante Krümmung im dreidimensionalen Unterraum beschreibt. Ein solcher Unterraum heißt maximal symmetrisch. Das einfachste Linienelement, das diese Anforderungen erfüllt, lautet in Kugelkoordinaten:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[f(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (1.4)$$

wobei  $f(r) = (1 - kr^2)^{-1}$  gewählt wurde. Hierbei sind  $r$ ,  $\theta$  und  $\phi$  die drei mitbewegten Raumkoordinaten. In Gleichung 1.4 soll  $R(t)$  die Dimension einer Länge haben; dann sind  $r$  und  $k$  dimensionslos. Alle räumlichen Abstände zwischen zwei Punkten mit festen Koordinatenwerten sind proportional zu  $R(t)$ . Das Verhältnis von  $R(t)$  zu zwei verschiedenen Zeiten ist der Vergrößerungsfaktor und wird deswegen

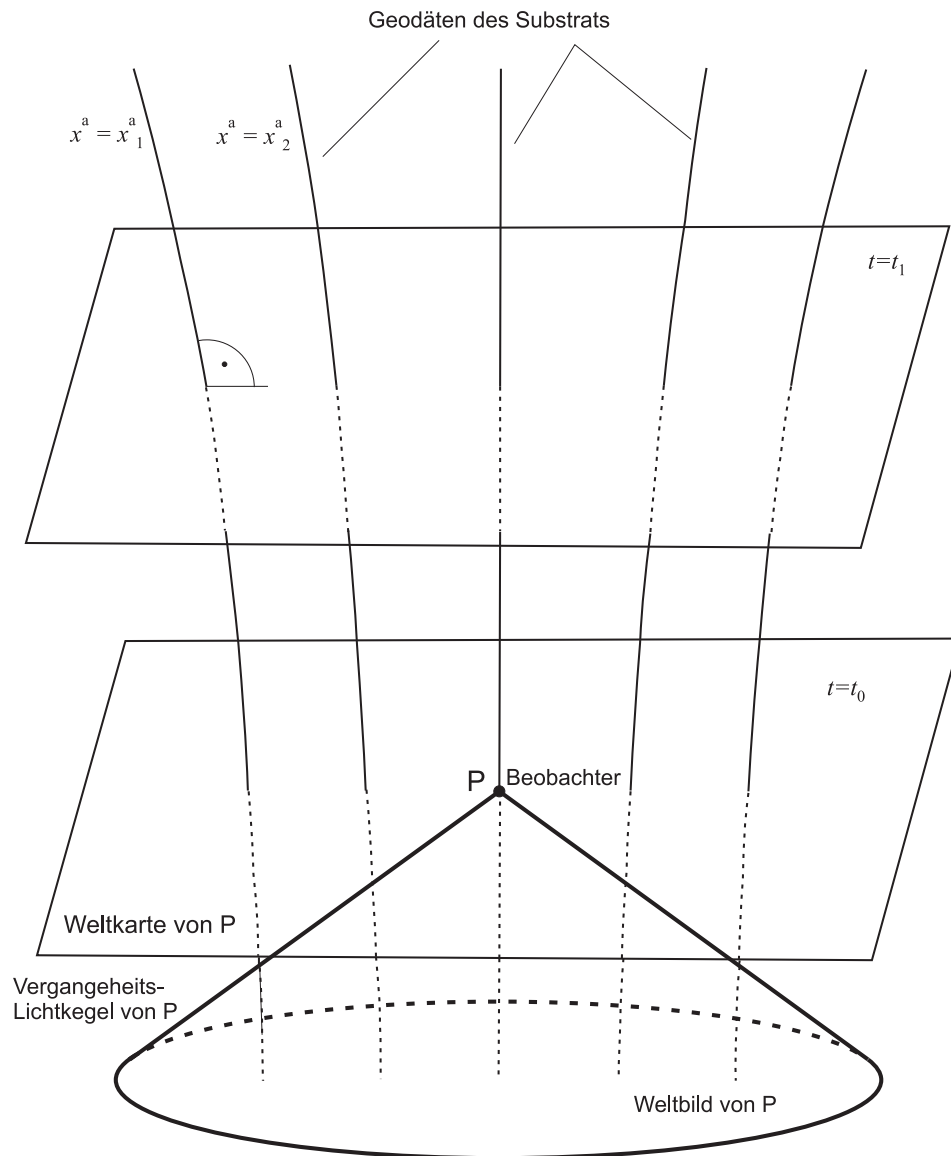


Abbildung 1.1: Kosmische Zeitscheiben und Geodäten des Substrats. Weltkarte und Weltbild des Beobachters P. [Sch09]

kosmischer Skalenfaktor genannt. Der Skalenfaktor muss reell sein, da andernfalls sich ein raumartiges Intervall mit der Zeit in ein zeitartiges Intervall verwandeln könnte. [Sch09], [KKZ97], [Fli06]

Durch Skalierung von  $r$  kann man den Parameter  $k$  auf drei Werte beschränken, welche die Krümmung des dreidimensionalen Raumes charakterisieren; [Fli06]

$$k = 0 \quad \text{flaches, euklidisches Universum,} \quad (1.5)$$

$$k = +1 \quad \text{geschlossenes Universum,} \quad (1.6)$$

$$k = -1 \quad \text{offenes, hyperbolisches Universum.} \quad (1.7)$$

## 1.5 Die Friedmann Differentialgleichung

Aus der Einsteinschen Feldgleichung lassen sich die zwei Gleichungen, 1.10 und 1.11, für die noch unbestimmten Parameter (Skalenfaktor und Krümmungskonstante) der Robertson-Walker-Metrik gewinnen. [Sch09]

Um die Einstein-Gleichung für das Universum aufstellen zu können wird allerdings die Kenntniss des Energie-Impuls-Tensors sowie des Ricci-Tensors und -Skalar vorausgesetzt, welche durch das Kosmologische Prinzip und die Analogie des Weltalls zum Modell einer perfekten Flüssigkeit festgelegt werden.

Nach dem Kosmologischen Prinzip sind die Massendichte  $\varrho$  und der Druck  $\rho$  räumlich homogen, so dass diese Größen nicht von Raumkomponenten abhängig sein können: [Fli06]

$$\varrho(r, t) = \varrho(t) \quad (1.8)$$

$$\rho(r, t) = \rho(t) \quad (1.9)$$

Somit ergeben sich zwei unabhängige Gleichungen: [Sch09]

$$3 \frac{\dot{R}(t)^2 + k}{R(t)^2} - \Lambda = 8\pi\varrho(t) \quad (1.10)$$

$$\frac{2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}(t)^2 + k}{R(t)^2} - \Lambda = -8\pi\rho(t) \quad \text{in relativistischen Einheiten,} \quad (1.11)$$

wobei  $\Lambda$  die kosmologische Konstante ist. Zur Bestimmung der zeitabhängigen Parameter braucht man noch eine dritte Beziehung. Bei Betrachtung der unterschiedlichen Elemente des Universums (Materie und Strahlung) kann man zwei Zusatzgleichungen aufstellen.

$$\rho(\varrho_{mat}) = 0 \quad (\text{Materiedominanz}) \quad (1.12)$$

$$\rho(\varrho_{str}) = \frac{\varrho_{str}}{3} \quad (\text{Strahlungsdominanz}) \quad (1.13)$$

Gleichung 1.12 entspricht einem Universum als inkohärente Ansammlung von Teilchen mit nicht-relativistischen Geschwindigkeiten. Gleichung 1.13 gilt exakt für elektromagnetische Strahlung und näherungsweise für hoch relativistische Teilchen.

In Abhängigkeit des Zeitpunkts der Entwicklung des Kosmos nimmt man an, dass entweder Strahlung oder Materie dominiert, so dass der andere Bestandteil vernachlässigt werden kann und man nur eine Zustandsgleichung benutzt. Dies ist natürlich nur zulässig wenn beide nicht miteinander wechselwirken. Zur Beschreibung des sehr frühen Universums nimmt man Gleichung 1.13 und für das heutige, Gleichung 1.12.

Wenn man an Stelle von  $\varrho(t)$  die Dichte als Summe von der Strahlungs- und Materiedichte aufschreibt,

$$\varrho(t) = \varrho_{str}(t) + \varrho_{mat}(t), \quad (1.14)$$

und diese in Gleichung 1.10 einsetzt, ergibt sich die Bewegungsgleichung für den Skalenfaktor  $R(t)$ , welche auch als Friedmann-Gleichung bekannt ist: [Fli06]

$$\dot{R}(t)^2 - \frac{8\pi R(t)^2}{3}(\varrho_{str}(t) + \varrho_{mat}(t)) - \frac{1}{3}\Lambda R(t)^2 = -k. \quad (1.15)$$

## 1.6 Lösungen der Friedmann-Gleichung als Urknallmodelle

An dieser Stelle soll die kosmologische Konstante der Einfachheit halber gleich Null gesetzt werden,  $\Lambda = 0$ , die Auswirkung wird später diskutiert. Durch Subtraktion der Gl. 1.10 von Gl. 1.11 lässt sich die Beschleunigung des kosmischen Skalenfaktors aufgrund dreier Parameter ( $R(t)$ ,  $\varrho(t)$  und  $\rho(t)$ ) aufschreiben:

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{4\pi}{3}(\varrho(t) + 3\rho(t)). \quad (1.16)$$

Von denen weiß man, dass für alle Zeiten  $t$

$$(\varrho(t) + 3\rho(t)) > 0 \quad \text{und} \quad R(t) > 0 \quad \text{gilt,} \quad (1.17)$$

so dass man für die Beschleunigung des kosmischen Skalenfaktors aussagen kann, dass diese für jeden Wert von  $t$  immer kleiner als Null ist. Daraus ergibt sich, dass das Universum in seiner gesamten Entwicklung eine Expansion durchgeführt hat.

Innerhalb einer endlichen Zeit in der Vergangenheit muss deshalb der Skalenfaktor den Wert  $R(t_{BB}) = 0$  angenommen haben. Typischerweise legt man dieses Ereignis auf den Zeitpunkt  $t_{BB} = 0$ , an dem auch viele andere kosmologische Parameter Singularitäten aufzeigen. Löst man die Friedmann-Gleichung in Abhängigkeit der Parameter  $k$ ,  $\Lambda$  und  $\varrho(t)$ , erhält man auch Lösungen, die keine Urknallmodelle ergeben. Jedoch werden diese außer Acht gelassen, um das Olberssche Paradoxon zu vermeiden. [Bra]

Abbildung 1.2 stellt die Abhängigkeit des Skalenfaktors von der Raumkrümmung bei einem materiedominierten Universum dar. Aufgrund dieser Einteilung kann man klar erkennen, dass die dynamische Entwicklung des Weltalls durch die unterschiedlichen Werte der Krümmungskonstante komplett anders ablaufen wird. Der Fall mit  $k = +1$  sagt eine Art Weltsturz vorher und kann als Wiederholungsmotiv eines oszillierendes Modell betrachtet werden. [Fli06]

## 1.7 Die Beziehung zwischen Dichte und kosmischem Skalenfaktor

An dieser Stelle werden die vorher nur vorgestellten Zustandsgleichungen 1.12, 1.13 motiviert und die zeitliche Abhängigkeit des kosmischen Skalenfaktors hergeleitet.

Die allgemeine Zustandsgleichung kann als

$$\rho(t) = w(t)\varrho(t) \quad (1.18)$$

aufgeschrieben werden. Im Fall des Standardmodells der Kosmologie nimmt man zusätzlich an, dass der Faktor  $w$  zeitunabhängig ist. [Ryd03]

Wenn man das Universum als abgeschlossenes System betrachtet und Energieerhaltung fordert, ergibt sich der erste Hauptsatz der Thermodynamik für einen adiabatischen Prozess ( $dQ = 0$ ):

$$d(\varrho(t)R(t)^3) = -\rho(t)d(R(t)^3) \quad (1.19)$$

$$\text{analog zu} \quad dU = dW \quad \text{mit} \quad dW = -\rho dV. \quad (1.20)$$

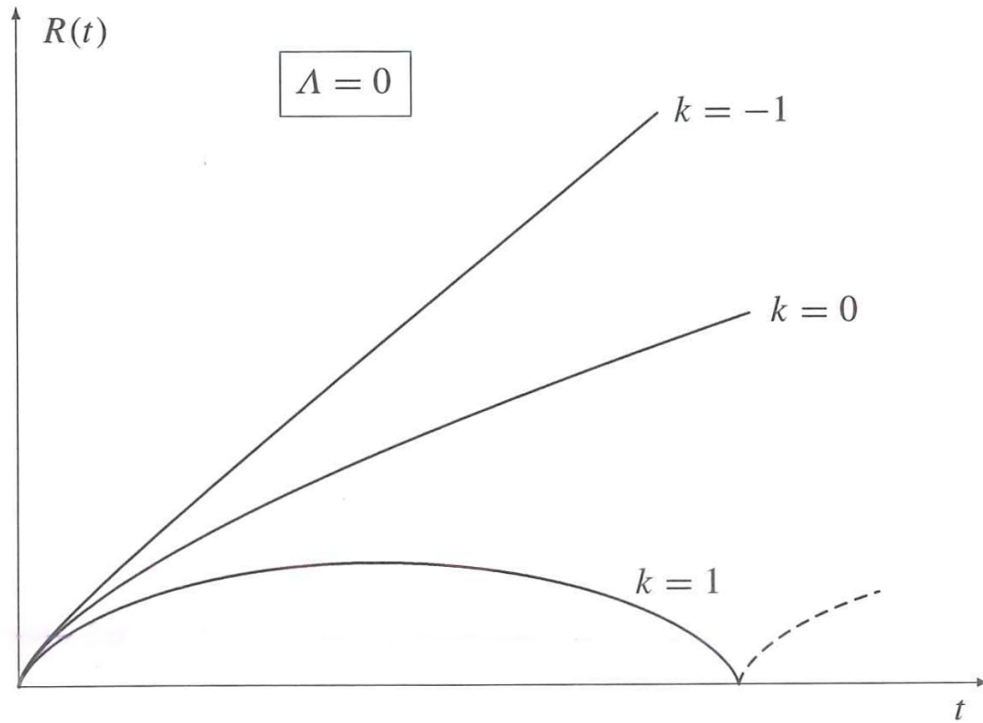


Abbildung 1.2: Zeitabhängigkeit des kosmischen Skalenfaktors  $R(t)$  für  $\Lambda = 0$  und für einen flachen, offenen oder geschlossenen Kosmos. [Fli06]

Dies bedeutet gerade, dass die Energieänderung in einem mitbewegten Volumenelement gleich dem negativen Produkt aus Druck und Volumenänderung ist. Durch einsetzen von Gl. 1.18 in 1.19 ergibt sich:

$$d(\varrho(t)R(t)^3) = -w\varrho(t)d(R(t)^3), \quad (1.21)$$

wobei  $w$  eine zeitunabhängige, dimensionslose Konstante ist.

Diese Gleichung kann man nun in mehreren Schritten weiter umformen und zuletzt integrieren, so dass sich der Zusammenhang zwischen Dichte und Skalenfaktor klar darstellen lässt: [KKZ97]

$$\varrho(t) \propto R(t)^{-3(1+w)}. \quad (1.22)$$

Für die verschiedenen Energiedichten ergeben sich dann unter Benutzung der aus der Thermodynamik bekannten Zustandsgleichungen für die zwei Grenzfälle - relativistisches Gas und kalte, druckfreie Materie - die dazugehörigen Werte für  $w$ :

$$w = 0 \quad \text{Materie,} \quad (1.23)$$

$$w = \frac{1}{3} \quad \text{Strahlung.} \quad (1.24)$$

Einsetzen von 1.22 in 1.15 mit  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$  und integrieren ergibt eine einfache Zeitabhängigkeit für den Skalenfaktor, nämlich

$$R(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \quad \text{Materie,} \quad (1.25)$$

$$R(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad \text{Strahlung.} \quad (1.26)$$

Die von Einstein für die Beschreibung eines statischen Universums eingeführte kosmologische Konstante  $\Lambda$  kann als Energiedichte des Vakuums,  $\epsilon_v$ , verstanden werden:

$$\epsilon_v = \rho_v = \frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (1.27)$$

Wie in den modernen Quantenfeldtheorien ist das Vakuum nämlich nicht ein Zustand der Energie Null, sondern der niedrigsten Energie. [GB05], [KKZ97]

Die Zustandsgleichung für das Vakuum

$$\rho_v = -\rho_v \quad (1.28)$$

ergibt eine Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors von:

$$R(t) \propto \exp(Ht) \quad \text{für } k = 0 \quad (1.29)$$

$$R(t) \propto \sinh(Ht) \quad \text{für } k = -1 \quad (1.30)$$

$$R(t) \propto \cosh(Ht) \quad \text{für } k = +1 \quad (1.31)$$

wobei

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_v}{3} \quad \text{und} \quad \rho_v > 0. \quad (1.32)$$

Anhand des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik, Gl. 1.19, kann man sich die Zustandsgleichung des Vakuums vor Augen führen: bei einem expandierenden Universum muss die durch den Druck verrichtete Arbeit ausreichend sein, um die Energiedichte konstant zu halten,  $\rho \sim \text{konstant}$ . Ein positives  $\Lambda$  bedeutet eine Beschleunigung der Expansion, während ein negatives  $\Lambda$  abbremsend wirkt. Die drei Lösungen des Skalenfaktors beschreiben eine extrem rasche Expansion des Universum, die unmittelbar nach dem Urknall stattgefunden haben soll, wobei die letzten beiden Lösungen (Gl. 1.30 und 1.31) im Grenzfall für große Zeiten die erste Lösung (Gl. 1.29) ergeben. Eine sogenannte inflationäre Phase kommt in Modellen mit Vakuumenergie ( $\Lambda \neq 0$ ) vor, die eine Erklärung für die Expansion jenseits einer bloßen Anfangsbedingung liefern. [Hea], [KKZ97]

Ein materiedominiertes Universum, als Einstein-de Sitter Modell bekannt, zeigt eine Abhängigkeit des Skalenfaktors von  $R(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$ . Für eine endliche Zeit in der Vergangenheit des Kosmos gilt  $R(t) \rightarrow 0$ , die Dichte divergiert und die Annahme einer kalten, druckfreien Materie ist nicht mehr gerechtfertigt. Jedoch ist die fundamentale Voraussage eines Big Bangs als Startpunkt immer noch gültig. Durch dieses Modell kommt man auch zu einem Zeitskalenproblem, weil das somit berechnete Alter des Universums geringer als die nach heutigen Abschätzungen ermittelte Alter der ältesten Sterne ist.

Für hohe Werte der Dichte und Temperatur in einer frühen Phase der Entwicklung eignet sich die strahlungsdominierte Beschreibung besser. Dies führt auch zu einer Verringerung des Zeitskalenproblems, da bei einem strahlungsdominierten Universum der Skalenfaktor langsamer mit der Zeit wächst ( $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ ). [Hea]

Alle drei Grenzfälle sind in Abb. 1.3 zu sehen. [Ryd03]

## 1.8 Weltzustand

Von der bisher präsentierten Theorie aufbauend wird anschließend das zu unseren heutigen experimentellen Beobachtungen am besten passende Weltmodell vorgestellt. Anstatt durch die abstrakten Werte  $k$  und  $R$  kann die Beschreibung auch durch  $H_0$  und  $q_0$ , welche experimentell zugänglicher sind, erfolgen.

Der zeitabhängige Hubble-Parameter beschreibt die Expansionsrate und ist definiert durch

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad (1.33)$$

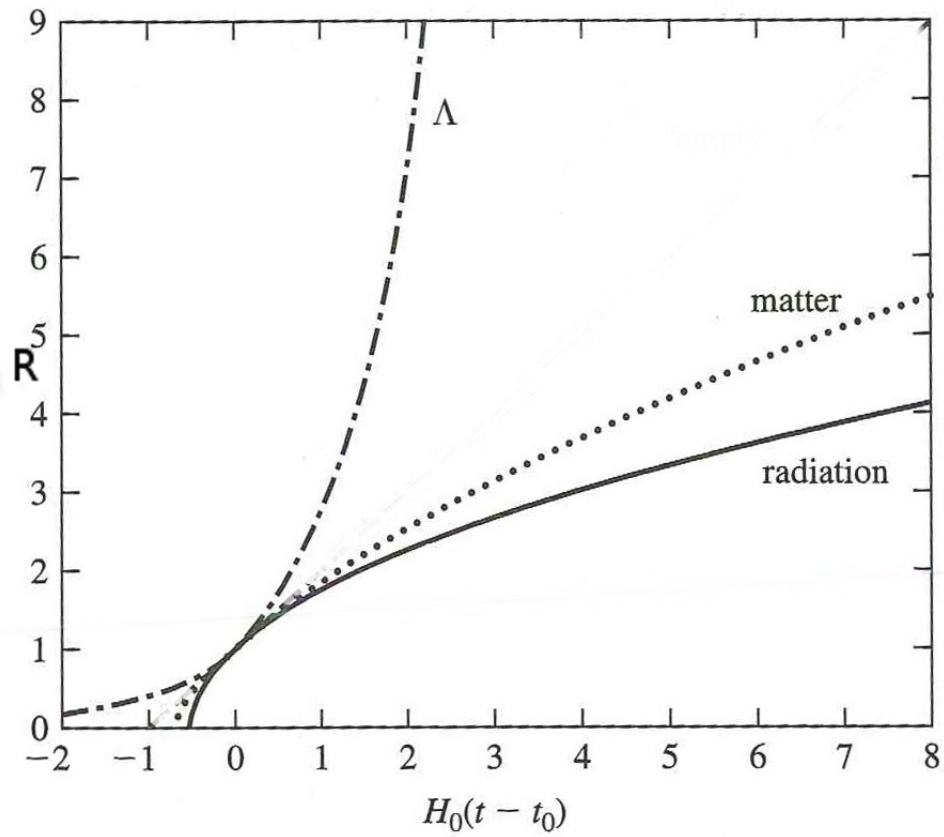


Abbildung 1.3: Skalenfaktor als Funktion der Zeit für ein flaches, materiedominiertes Universum (gepunktete Linie), für ein flaches, strahlung-dominiertes Universum (durchgezogene Linie) und für ein flaches,  $\Lambda$ -dominiertes Universum (gepunktet-gestrichelte Linie). [Ryd03]

so dass er die Dimension einer inversen Zeit hat. Der heutige Wert des Hubble-Parameters,  $H(t_0)$ , wird als Hubble-Konstante,  $H_0$ , bezeichnet. [KKZ97]

Aus den Beobachtungen leitete Hubble empirisch ein Gesetz her, das die Entfernung einer Galaxie,  $d$ , und ihre Geschwindigkeit,  $v$  linear miteinander verknüpft:

$$v = H \cdot d. \quad (1.34)$$

Vom Urknallmodell ausgehend muss dann das Alter des Universums der rückgängigen Zeit entsprechen, die bis zu einem vernachlässigbar kleinen Abstand zwischen Galaxien nötig ist.

$$d(t) = v(t) \cdot t = \frac{v(t)}{H} \quad (1.35)$$

Der Kehrwert  $1/H_0$  der Hubblekonstante wird Hubblezeit genannt. Bei gleichförmiger Expansion in einem leeren Universum wäre sie gleich dem Weltalter, d.h. der seit dem Urknall vergangenen Zeit. Je nach dem Gehalt des Universums an Materie, dunkler Materie und dunkler Energie kann die Expansion aber verzögert oder beschleunigt werden, so dass das Weltalter von der Hubblezeit verschieden ist und eigentlich durch ein Integral dargestellt werden muss, Gl. 1.38. [Tre00]

Der Verzögerungsparameter

$$q(t) = -\frac{\dot{R}(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}(t)^2} \quad (1.36)$$

misst bei einem positiven Wert die Rate, mit der sich die Expansion des Universums verlangsamt. Aus  $R(t) > 0$  und  $\dot{R}(t) > 0$  (expandierendes Universum) folgt, dass [Fli06]

$$\ddot{R}(t) < 0 \implies q(t) > 0. \quad (1.37)$$

Zum heutigen Zeitpunkt,  $t_0$ , kann das Alter der Welt folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$T_{Welt} = t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m/x + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_k}}, \quad (1.38)$$

wobei  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$  und  $\Omega_k$  die Massendichte, die kosmologische Konstante und die Krümmung charakterisieren;

$$\Omega_m \equiv \frac{\varrho_{mat}(t_0)}{\varrho_{kr}(t_0)}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{1}{3} \frac{\Lambda}{H_0^2}, \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{R_0^2 H_0^2} \quad (1.39)$$

und

$$\varrho_{kr}(t_0) \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi}. \quad (1.40)$$

Die dimensionslose Variable

$$x(\tau) \equiv \frac{R(t)}{R_0} \quad \text{und} \quad \tau = H_0 t \quad (1.41)$$

ermöglicht so eine Umschreibung der Friedmann-Gleichung 1.15 aufgrund der neuen Parameter:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \frac{\Omega_m}{x} - \Omega_\Lambda x^2 = \Omega_k. \quad (1.42)$$



Rückblickend soll hiermit die Bezeichnung von  $\varrho_{kr}(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi}$  als kritische Dichte kurz erklärt werden. Für  $\varrho_{mat}(t_0) = \varrho_{kr}(t_0)$ ,  $\Lambda = 0$  gilt:

$$\Omega_m \equiv \frac{\varrho_{mat}(t_0)}{\varrho_{kr}(t_0)} = \frac{\varrho_{kr}(t_0)}{\varrho_{kr}(t_0)} = 1 \quad (1.43)$$

$$(1.44)$$

Einsetzen in Gleichung 1.47 ergibt:

$$1 = 1 + 0 + \Omega_k \implies \Omega_k = 0. \quad (1.45)$$

Wenn die Massendichte dagegen den kritischen Wert überschreitet oder nicht erreicht, erhält man eine geschlossene ( $k=1$ ) oder bzw. offene Lösung ( $k=-1$ ). Deswegen ist dieser Wert für die Dichte als kritisch bekannt, da es eine Grenze zwischen zwei sehr unterschiedlichen Beschreibungen des Universums und somit der Vorhersagen seiner Entwicklung darstellt, siehe Abb. 1.2.

Der heutige Weltzustand kann dann durch fünf kosmologische Parameter

$$\text{Weltzustand} := (\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k, H_0, q_0) \quad (1.46)$$

beschrieben werden, von denen aber nur drei dieser Größen voneinander unabhängig sind. Die verbindenden Beziehungen lauten:

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (1.47)$$

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \quad (1.48)$$

und können aus Gl. 1.42 hergeleitet werden.

Von den folgenden Werten ausgehend

$$\text{Heutiger Kosmos} : (\Omega_m; \Omega_\Lambda; \Omega_k) = (0, 3; 0, 7; 0), \quad H_0 = 70 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}, \quad q_0 = -0, 6 \quad (1.49)$$

erhält man die in Abb. 1.4 gezeigte Kurve als Lösung der Gl. 1.42. [Fli06]

## 1.9 Thermodynamische Expansion des Weltalls

Bisher wurden nur die wichtigsten Parameter ( $R(t)$ ,  $k$ ,  $\Lambda$ ) zur Veranschaulichung der Dynamik des Universums erläutert. Jedoch liegt der Schwerpunkt dieser Arbeit nicht in der Beschreibung seiner Gesamtmechanik, sondern in den Prozessen und beteiligten Bestandteilen, die dieses Systems während seiner Entwicklung beinhaltet. Insbesondere ist das Ziel eine anschauliche Beschreibung ab den ersten drei Minuten nach seiner Entstehung bis zu 20 Minuten später, so dass weder  $k$  noch  $\Lambda$  eine wesentliche Rolle spielen.

Um diese Teilchen und seine jeweiligen Wechselwirkungen erklären zu können, wendet man die Gesetze der Thermodynamik auf ein mitbewegtes Volumenelement an. Das Universum als thermodynamisches System ist isoliert, da man keine Umgebung außerhalb dieses in Betracht nimmt, sogar ein eingrenzendes Vakuum ist als Eigenschaft des Weltalls selbst als kosmische Konstante oder Vakuumdichte mitberücksichtigt. Die Expansion des Raumelements erfolgt demnach adiabatisch, wie auch in Gl. 1.19 erläutert wurde, da kein Energieaustausch mit der Umgebung stattfinden kann. [KKZ97]

An dieser Stelle werden zwei wichtige Konzepte zusammengefasst, um das Verständnis zu erleichtern, da diese öfters innerhalb dieser Arbeit auftauchen werden:

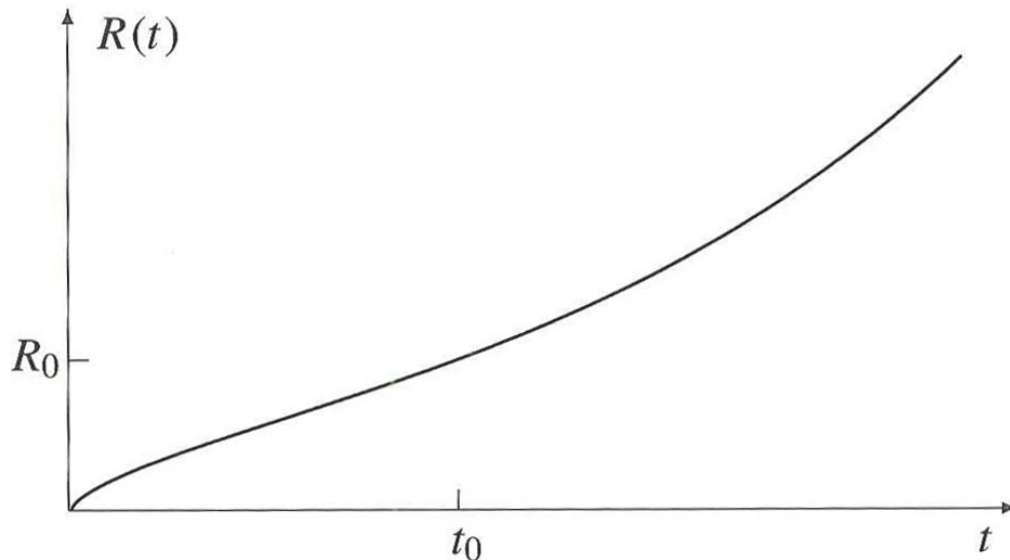


Abbildung 1.4: Kosmischer Skalenfaktor  $R(t)$  als Funktion der Zeit. Zum heutigen Zeitpunkt gilt  $R(t_0) = R_0$ . Früher dominierte der Term  $\Omega_m/x$  (negative Krümmung), in der Zukunft erwartet man eine beschleunigte Expansion wegen der heutigen Dominanz des Terms  $\Omega_\Lambda x^2$  (positive Krümmung). [Fli06]

### Thermodynamisches Gleichgewicht

Ein thermodynamisches oder thermisches Gleichgewicht bezeichnet einen stationären Zustand eines Vielteilchensystems, welches dann durch einige wenige makroskopische Größen beschrieben werden kann, da sich diese zeitlich nicht ändern.

Die unterschiedlichen Zustände des makroskopisch betrachteten Systems werden in der Statistik mit Wahrscheinlichkeiten belegt. Ein Vielteilchensystem wird von einem Zustand niedriger Wahrscheinlichkeit in einen anderen höherer Wahrscheinlichkeit übergehen. Ein Zustand maximaler Wahrscheinlichkeit würde sich demnach nicht weiter verändern können, er wäre stationär.

Solche stationären Zustände maximaler Wahrscheinlichkeit, Gleichgewichtszustände, werden dadurch definiert,

- a) dass sie unabhängig von ihrer Vorgeschichte eindeutig und vollständig durch makroskopische Variablen charakterisiert werden können,
- b) sich im Laufe der Zeit nicht verändern, und
- c) dass in ihnen keine makroskopischen Transportvorgänge stattfinden.

Es sind die Zustände, die sich in abgeschlossenen Systemen nach hinreichend langer Zeit von selbst einstellen. [Reb05]

In dieser Beschreibung des Universum als thermodynamisches System wird keine Aussage über diese ungenaue „hinreichend lange“ Zeit getroffen, implizit wird sie als vernachlässigbar klein geschätzt. In unseren Fall ändern sich die makroskopischen Größen wie Volumen und Temperatur ständig als Konsequenz der schnellen Expansion, jedoch nimmt man an, dass sich zu jeder Zeit der Entwicklung, d.h. zu jedem Wert der makroskopischen Größen, das thermische Gleichgewicht einstellt.

## Chemisches Gleichgewicht

Ein chemisches Gleichgewicht bezeichnet den Zustand eines chemischen Prozess, bei den die Ausgangsstoffe als auch die Reaktionsprodukte nebeneinander vorhanden sind und deren Häufigkeit sich nicht mehr über die Zeit ändert.

Grundsätzlich kann sich bei jeder umkehrbaren chemischen Reaktion ein Gleichgewicht einstellen, da die Hin- und Rückreaktion ablaufen kann. Im Gleichgewichtszustand ist die Geschwindigkeit für beiden genau gleich groß, das heißt pro Zeiteinheit reagiert ebenso viel Edukt zu Produkt, wie Produkt von Edukt konsumiert wird. Die Anzahl der Edukte und Produkte sind deswegen nicht zeitabhängig, aber temperaturabhängig und für jede Reaktion charakteristisch.

Im Falle des chemischen Gleichgewichts erfüllt die Summe der chemischen Potentiale,  $\mu$ , welche jeweils die Möglichkeiten eines Stoffes, mit anderen Stoffen zu reagieren charakterisieren; [Reb05]

$$i + j \longleftrightarrow k + l \quad (1.50)$$

$$\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l. \quad (1.51)$$

Von der guten Näherung einer Entwicklung des frühen Universums im thermischen Gleichgewicht ergeben sich dann aus der Thermodynamik für ein Teilchengas mit  $g$  internen Freiheitsgraden, die Anzahldichte  $n$ , die Energiedichte  $\varrho$  und der Druck  $\rho$  zu

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p \quad (1.52)$$

$$\varrho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3p \quad (1.53)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3E} f(\vec{p}) d^3p \quad (1.54)$$

mit  $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$ . Die Phasenraumverteilung  $f(\vec{p})$  ist je nach Teilchen gegeben durch die Fermi-Dirac-Verteilung (+ -Zeichen in Gl. 1.55) oder Bose-Einstein-(- -Zeichen in Gl. 1.55) Verteilung

$$f(\vec{p}) = [\exp((E - \mu)/kT) \pm 1]^{-1}. \quad (1.55)$$

Hierbei bedeutet  $\mu$  das chemische Potential der entsprechenden Teilchensorte.

Zu einer beliebigen Temperatur  $T$  des Gases kann man nicht-relativistische Teilchen ( $m \gg T$ ), welche einen exponentiell geringeren Beitrag zur Energiedichte ergeben, im Vergleich zu relativistischen Teilchen ( $m \ll T$ ) vernachlässigen und erhält für die strahlungsdominierte Phase

$$\varrho_{str} = \frac{\pi^2}{30} g_{eff} T^4 \quad (1.56)$$

$$\rho_{str} = \frac{\varrho_{str}}{3} = \frac{\pi^2}{90} g_{eff} T^4. \quad (1.57)$$

Obwohl die Anzahldichte der nicht-relativistischen Teilchen für die dynamische Beschreibung im frühen Universum nicht zu berücksichtigen ist, wird diese Lösung für Gl. 1.52 auch an dieser Stelle präsentiert, da sie für die Berechnung der Häufigkeiten der leichten Elemente eine wichtige Rolle spielt. Sie wird sowohl im Abschnitt des Ablaufs der primordialen Nukleosynthese für die Nukleonen als auch des

nuklearen statischen Gleichgewichts für die Atomkerne wieder aufgegriffen. Für nicht-relativistische Teilchen ( $m \gg T$ ) lautet die Anzahldichte:

$$n = g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mu - m}{T}\right), \quad (1.58)$$

welche nicht zwischen Bosonen oder Fermionen unterscheidet.

Zurück zur Energiedichte von relativistischen Teilchen, stellt  $g_{eff}$  die Summe aller effektiv beitragenden masselosen Freiheitsgrade dar und ist gegeben durch [KKZ97]

$$g_{eff} = \sum_{i=Bosonen}^n g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=Fermionen}^n g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4. \quad (1.59)$$

Somit ist  $g_{eff}$  von der Temperatur abhängig, da die Summe nur die Teilchen berücksichtigt bei denen  $m_i \ll T$  gilt. In der primordialen Nukleosynthese werden für die Berechnung des  $g_{eff}$  und der davon abhängigen Energiedichte Photonen, Neutrinos, Elektronen und Positronen aufsummiert. Für die erste Generation der Leptonen werden 4 Freiheitsgrade betrachtet,  $g_e = 4$ , die den zwei möglichen Werten der Helizität pro Teilchen und Antiteilchen entsprechen. Photonen können sich in zwei unterschiedlichen Polarisationszuständen befinden, d.h.  $g_{ph} = 2$ . Jedoch ist man sich über die Natur der Neutrinos noch nicht im klaren, so dass man entweder  $g_\nu = 4$  oder  $g_{\nu m} = 2$  für Majorana Fermionen, dessen Teilchen ihren eigenen Antiteilchen gleichen, verwendet. Außerdem kann die Gleichgewichtstemperatur  $T_i$  der Teilchen  $i$  von der Photonentemperatur  $T$  verschieden sein. [GB05], [KT94]

Bei einem reversiblen Prozess ist die Entropie eine Erhaltungsgröße,  $dS = 0$ , und ist gegeben durch:

$$S = \frac{R^3(\rho + p)}{T}. \quad (1.60)$$

oder im speziellen Fall relativistischer Teilchen durch

$$S = \frac{2\pi}{45} g_s T^3 R^3 \quad (1.61)$$

mit

$$g_s = \sum_{i=Bosonen}^n g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=Fermionen}^n g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3. \quad (1.62)$$

Für einen Großteil der Entwicklung des Universums sind die beiden Größen  $g_{eff}$  und  $g_s$  identisch. Im thermodynamischen Gleichgewicht ist die Entropie pro mitbewegtem Raumelement eine Erhaltungsgröße, was mit konstantem  $g_s$  zu der Bedingung

$$T^3 R^3 = \text{konstant} \Rightarrow R \sim \frac{1}{T} \quad (1.63)$$

führt.

Anhand von Gl. 1.25 und 1.26 ist eine Umrechnung von Zeit in Temperatur oder Energie für den unterschiedlichen Phasen des Universums möglich,

$$t \propto T^{-3/2} \quad \text{Materie} \quad (1.64)$$

$$t \propto T^{-2} \quad \text{Strahlung.} \quad (1.65)$$

[KKZ97]

## 1.10 Entwicklung des Universums - nach dem Standardmodell

Die Entstehung des Universums, konkreter von Materie, Raum und Zeit, wird als Urknall bezeichnet. Dieser Begriff ist die Bezeichnung eines formalen Punktes, der durch naive Extrapolation erreicht wird. Zur Singularität selbst, ihrer Ursache oder zum Zustand der Welt vor ihrer Entstehung werden keine Aussagen getroffen.

Die Beschreibung der Entwicklung des Universums nach dem Urknall wird immer spekulativer, je mehr man sich der Singularität nähert. Der früheste Anblick, an dem unsere heutige Beschreibung einsetzen kann, ist die Planck-Skala, etwa  $10^{-43}$  s nach dem Urknall. Davor ist eine quantenmechanische Erklärung der Gravitation nötig, die jedoch bis jetzt nicht konsistent existiert. Alle Teilchen sind hochgradig relativistisch, und das Universum ist strahlungsdominiert. Danach findet die GUT-Symmetriebrechung statt, die von einer zweiten Symmetriebrechung der in heutigen Teilchenbeschleuniger beobachtbaren Wechselwirkungen gefolgt wird.

Bei einem Weltallalter von  $10^{-6}$  s vernichten sich Antiquarks und Quarks, deren Überschuss die gesamte baryonische Materie darstellt und sich im Baryon-Photon-Verhältnis widerspiegelt.

Nach ca  $10^{-5}$  s liegt ein weiterer Phasenübergang vor. Er ist verbunden mit der Brechung der chiralen Symmetrie in der starken Wechselwirkung und dem Übergang freier Quarks in Form eines Quark-Gluon-Plasmas in Baryonen und Mesonen.

In dem Zeitraum von  $10^{-2}$  bis  $10^2$  s findet der Prozess der primordialen Nukleosynthese statt. Etwas vorher entkoppeln die Neutrinos und entwickeln sich als kosmischer Neutrinohintergrund unabhängig weiter. Später vernichten sich Positronen und Elektronen fast vollständig. Der Überschuss an Elektronen wird erst 150 000 Jahre später mit den Atomkernen rekombinieren.

Hierdurch wird die Thomson Streuung sehr stark nachlassen, die Strahlung entkoppelt von der Materie, was zu einem durchsichtigen Universum führt und es erfolgt die Entstehung der kosmischen Hintergrundstrahlung. Dies ist auch der Zeitpunkt, ab dem Dichtefluktuationen wachsen können und damit die Bildung großräumiger Strukturen, wie Galaxien, beginnen kann. Zu etwa der gleichen Zeit geht das Universum vom strahlungs- in den materiendominierten Zustand über. [KKZ97], [SU02]

## 1.11 Probleme des kosmologischen Standardmodells

Das hier vorgestellte kosmologische Standardmodell ist teilweise experimentell belegt und teilweise spekulativ. Die noch unklaren Punkte werden kurz erläutert.

Zum einen liegt das sogenannte **Flachheitsproblem** vor. Die Metrik ist als Anfangsbedingung eine ein für allemal festgelegte Größe, die die zukünftige Entwicklung maßgeblich bestimmen wird. Unter Betrachtung der im Abschnitt des Weltzustands eingeführten Parameter, die speziell auf den heutigen Zeitpunkt,  $t_0$ , bezogen sind, ist eine einfache Überlegung möglich. Verallgemeinert man als erstes diese Parameter für einen beliebigen früheren Zeitpunkt,  $t$ ;

$$\Omega(t) = \frac{\varrho(t)}{\varrho_{kr}(t)}, \quad \Omega_\Lambda(t) = \frac{1}{3} \frac{\Lambda}{H(t)^2}, \quad \Omega_k(t) = -\frac{k}{R(t)^2 H(t)^2} \quad (1.66)$$

und

$$\Omega = \Omega_{mat} + \Omega_{str}, \quad \varrho_{kr}(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi}. \quad (1.67)$$

so gilt für  $t \rightarrow 0$ :

$$\Omega_\Lambda(t) \rightarrow 0, \quad \Omega_k(t) \rightarrow 0 \quad (1.68)$$

Dies entspricht bei Berücksichtigung von Gl. 1.47:

$$\Omega(t) \rightarrow 1. \quad (1.69)$$

Dadurch kann man behaupten, dass unabhängig von den genauen heutigen Werten der kosmologischen Parameter das Universum in der Frühzeit extrem flach, die Massendichte fast exakt gleich der kritischen Massendichte und  $\Omega_\Lambda$  fast exakt gleich null war.

Das Problem liegt dann daran, dass eine mit den heutigen Beobachtungen konsistente Beschreibung einer sehr strikten Feinabstimmung der Anfangsparameter bedarf. Das kosmologische Standardmodell liefert aber keine Erklärung dafür, dass diese Größen  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_k$  und  $|\Omega - 1|$  fast exakt gleich null waren. [KKZ97], [Fli06]

Zum anderen ist das **Horizontproblem** hervorzuheben. Für das heutige Universum ist ein hohes Grad an Homogenität und Isotropie auf einer großen Skala beobachtbar, sogar zwischen Bereichen, die zur Zeit nicht mehr im kausalen Zusammenhang sind. Um einen solchen Weltzustand zu erreichen, müsste es in der früheren Geschichte auch hochgradig homogen und isotrop gewesen sein. [Sch09]

Diese hochgradige Isotropie ist mit der Heisenbergschen Unschärferelation nicht vereinbar, gemäß der ein anfänglicher Temperaturunterschied tatsächlich seit dem Urknall fortbestehen sollte, da es auch ziemlich unwahrscheinlich ist, dass sich das Universum überall mit genau den gleichen Eigenschaften entwickelt hat.

Somit steht das kosmologische Standardmodell nicht im Widerspruch zu der beschriebenen Flachheit, Isotropie und Homogenität des Universums. Das Problem liegt vielmehr darin, dass das Modell diese wesentlichen Eigenschaften nicht erklärt. [Fli06]

## 2. Primordiale Nukleosynthese

Als primordiale Nukleosynthese bezeichnet man eine physikalische Theorie, die die Entstehung der leichten Elemente im frühen Universum beschreibt.

Das kosmologische Standardmodell benutzt die Allgemeine Relativitätstheorie um die Struktur und Entwicklung des Universums vorherzusagen. Das Standardmodell der Big Bang Nukleosynthese beschreibt die primordiale Häufigkeit der vier leichtesten Elemente im Rahmen des Standard-Urknallmodells. Angenommen wird auch das Standardmodell der Elementarteilchenphysik, d.h. dass man insbesondere von drei Generationen von sehr leichten rechts-händigen Neutrinos und der dazu gehörigen links-händigen Antineutrinos ausgeht. [Bra], [Ste07]

Durch Vergleich der theoretischen Vorhersagen und der beobachteten Ergebnissen der unterschiedlichen Elementhäufigkeiten ist es möglich eine Selbstkritik dieses Modells und somit auch der grundlegenden Modelle (Standard-Urknallmodell und SM) durchzuführen.

Im Standardmodell der primordialen Nukleosynthese ist der einzige freie Parameter das Baryon-Photon-Verhältnis, welches die Baryonenasymmetrie quantifiziert. Diese Asymmetrie der Materie gegenüber der Antimaterie ist eines der wichtigsten noch nicht verstandenen Phänomene der Teilchenphysik, da sie nicht durch das SM erklärt werden kann. Darüber hinaus wird dieser bedeutende Parameter auch durch die Kosmische Hintergrundstrahlung (CMB) festgelegt, welcher wir einen Anblick des Weltalls um 400.000 Jahre nach der Elementenentstehung verdanken.

Somit ist das durch die Analyse der primordialen Nukleosynthese und der kosmischen Hintergrundstrahlung gewonnene Baryon-Photon-Verhältnis das Mittel zur Hinterfragung der Konsistenz der beiden Standardmodelle und die Einschränkung anderer Nicht-Standardmodelle. [Ste07]

### 2.1 Ablauf der primordialen Nukleosynthese

Die primordiale Nukleosynthese beginnt etwa eine Zentelsekunde nach dem Urknall, wenn die Temperatur schon auf einen Wert von  $10^{11}$  K abgesunken ist. [Wei87]

Wenn die thermische Energie,  $E_{th} = k_B T$ , die zweifache Ruhenergie,  $E_{ruhe} = mc^2$ , eines Elementarteilchens überschreitet, können Teilchen-Antiteilchenpaare entstehen. Zu einem früheren Zeitpunkt des Weltzustands ist diese Bedingung für Hadronen erfüllt, so dass die thermische Strahlung stark-wechselwirkende Teilchen enthält. Dadurch wird die Beschreibung wesentlich komplizierter, so dass dieser Ablauf bei einer erheblich geringeren Temperatur anfängt, als die die nötig ist um Pionen, die leichtesten Mesonen, aus den anwesenden Photonen zu erzeugen. [SU02], [Wei87]

Da die Energie zur Bildung der Elektronen und Positronen, die einer Temperatur von  $5,93 \cdot 10^9$  K entspricht, weit unterhalb von  $10^{11}$  K liegt, sind diese Teilchen die einzigen, die mit den Photonen, Neutrinos und Antineutrinos eine wichtige Rolle spielen. Ihre kinetische Energie ist sehr viel größer als die ihrer Ruhemasse. Deswegen verhalten sie sich auch wie masselose Elemente, die zur Strahlungsdichte, siehe Gl. 1.56, beitragen. Eine anschauliche Äquivalenz der Energiedichte des Universums zu diesem Zeitpunkt wären  $3,8 \cdot 10^9 \frac{kg}{l}$ .

Die hohe Dichte und mittlere Temperatur sorgt dafür, dass kinetisches und thermodynamisches Gleichgewicht herrscht. Somit ist dieser Zustand nur durch die Gesetze der Statistik bestimmt und ist nicht von früheren Ereignissen abhängig. [Wei87], [Reb05]

Damit die Teilchen im thermischen Gleichgewicht bleiben, müssen die Reaktionsraten ihrer Wechselwirkungen größer als die Expansionsrate des Universums sein ( $\Gamma > H$ ). Ansonsten verlassen diese das Gleichgewicht und frieren aus. Die durch die Baryonenasymmetrie übriggebliebenen freien Neutronen und Protonen werden durch die Reaktionen der schwachen Wechselwirkung ineinander umgewandelt:

$$p + e^- \longleftrightarrow n + \nu_e \quad (2.1)$$

$$n + e^+ \longleftrightarrow p + \bar{\nu}_e \quad (2.2)$$

Der Gleichgewichtswert des Neutron-Proton-Verhältnisses unterliegt der Maxwell-Boltzmann-Verteilung, Gl. 1.58, und ist dann durch ihre Massendifferenz  $\Delta m = m_n - m_p = 1,293 \text{ MeV}$  [unter der Vernachlässigung der chemischen Potentiale,  $(\mu_e - \mu_\nu) \ll T$ ] gegeben:

$$\frac{n}{p}(T) = \exp\left(-\frac{\Delta m}{T}\right). \quad (2.3)$$

Dieser Gleichgewichtszustand [Gl. 2.3] kann jedoch nur aufrecht erhalten werden solange  $\Gamma > H$ . Um diese Bedingung näher zu betrachten und die Temperatur zu bestimmen, ab der der Gleichgewichtszustand zwischen Protonen und Neutronen nicht mehr gegeben ist, wird hier das Verhältnis der Reaktionsrate pro Teilchen  $\Gamma$  zur Expansionsrate  $H$  in Abhängigkeit der Temperatur dargestellt.

Die Reaktionsrate ist definiert als:

$$\Gamma = n\sigma |v|, \quad (2.4)$$

wobei  $n$  für die Anzahldichte,  $\sigma$  für den Wirkungsquerschnitt und  $|v|$  für die gemittelte Relativgeschwindigkeit steht. Die obigen Reaktionen erfolgen über die schwache Wechselwirkung, so dass massive Austauschteilchen beteiligt sind und somit

$$\sigma \simeq G_F^2 T^2 \quad (2.5)$$

gilt.  $G_F^2$  ist die Fermikonstante. Für  $n \simeq T^3$  nach Gl. 1.56, folgt:

$$\Gamma \simeq G_F^2 T^5. \quad (2.6)$$

Die Temperaturabhängigkeit des Hubbleparameters lässt sich auch einfach von den bisherigen Ergebnissen berechnen:

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (2.7)$$

$$R(t) \sim t^{\frac{1}{2}} \quad \text{nach Gl. 1.26} \quad \longrightarrow \quad \dot{R}(t) \sim t^{-\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

$$\implies H(t) \sim t^{-1} \quad \implies H \sim T^2 \quad \text{mit Gl. 1.65.} \quad (2.9)$$

Somit ergibt sich für das Verhältnis der Reaktionsrate pro Teilchen zur Expansionsrate folgendes Resultat:

$$\frac{\Gamma}{H} \approx \left(\frac{T}{0,8 \text{ MeV}}\right)^3, \quad (2.10)$$

wenn man die Proportionalitätskonstanten miteinnimmt. [KKZ97], [KT94], [GB05]

Bei einer Temperatur von etwa 1 MeV, entkoppeln Neutrinos von den Photonen und den  $e^\pm$  Paare, jedoch wechselwirken die Elektron-Neutrinos und ihre Antiteilchen weiterhin mit den Nukleonen



über die schwache Kraft bis die Temperatur die 0,8 MeV erreicht hat. Die Temperatur von 0,8 MeV,  $T_{gl}$ , markiert somit eine wichtige Grenze; die Neutrinos frieren aus und der Gleichgewichtszustand [Gl. 2.3] zwischen Protonen und Neutronen ist nicht mehr gegeben. Beide physikalischen Änderungen unterliegen dem selben Grund: die Reaktionsrate der schwachen Wechselwirkung ist ungefähr gleich der Expansionsrate des Universums, was Gl. 2.10 verdeutlicht. Ein Austausch über dieser Art von Wechselwirkung wird ab diesen Zeitpunkt immer unwahrscheinlicher.

Die Neutrinos werden als freie Teilchen weiterhin der Expansion unterlegt sein, werden aber bis auf die gravitative Anziehung keinen Einfluss auf der weiteren Entwicklung des Universums haben. Sie bilden die sogenannte kosmische Neutrino-Hintergrundstrahlung.

Das Neutron-Proton-Verhältnis beim ausfrieren der schwachen Wechselwirkung, d.h. zu  $T_{gl} = 0,8 \text{ MeV}$ , hat nach Gl. 2.3 folgenden Wert:

$$\frac{n}{p}(T_{gl}) = \exp\left(-\frac{\Delta m}{T_{gl}}\right) \simeq \frac{1}{6}. \quad (2.11)$$

Anschließend, wenn die Energie des Universums unter die zur Erzeugung von Elektron-Positron Paaren notwendigen Mindestenergie gesunken ist (0,5 MeV), kommt es zur Vernichtung dieser Leptonengeneration. Die durch die Annihilation frei werdende Energie führt dazu, dass die Temperaturabnahme langsamer verläuft. Jedoch hat es keinen Einfluss mehr auf die Hintergrundstrahlung der Neutrinos, die dann um 8% kühler ist als die Photonen.

Man würde hier nun schon eine signifikante Produktion der leichten Kerne erwarten, da die typischen Bindungsenergien pro Nukleon in der Größenordnung 1 bis 8 MeV liegen, siehe Tab. 2.1. Jedoch verhindert die große Entropie, welche sich im frühen strahlungsdominierten Universum im sehr kleinen Baryon-Photon-Verhältnis äußert, eine solche Bildung bis herunter zu etwa 0,1 MeV. Die genaue Temperatur, die den Anfang der Big Bang Nukleosynthese festlegt, hängt nur von der Anzahl der Nukleonen pro Photonen ab.

Ca. drei Minuten und zwei Sekunden nach dem Urknall haben sich alle Elektronen und Positronen bis auf einen kleinen Überschuss der ersteren gegenseitig vernichtet. Dieser verbelebende Anteil an negativ geladenen Leptonen schätzt man in der Größenordnung der Baryonenasymmetrie, damit die Ladungsneutralität gegeben ist. Das Plasma hat eine um 35% höhere Temperatur als die Hintergrundstrahlung der Neutrinos. Die atomaren Kerne von  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$  und  $^4\text{He}$  würden bei diesem Zustand schon stabil sein, aber Deuteriumkerne können noch nicht lange genug gebunden bleiben um schwerere Kerne zu bilden. Dieser einschränkende Faktor wird auch als Deuterium-Flaschenhals bezeichnet. [Wei87], [KKZ97], [KT94]

Das anfängliche  $\frac{n}{p}$ -Verhältnis ist zwischenzeitig durch den Zerfall der freien Neutronen,

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (2.12)$$

$$n(t) = n_{gl} \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right), \quad (2.13)$$

auf etwa  $\frac{1}{7}$  abgesunken;

$$\frac{n}{p}(t_{nuk}) = \frac{n_{gl} \exp\left(-\frac{t_{nuk}}{\tau_n}\right)}{p_{gl} + [n_{gl} - n(t_{nuk})]} = \frac{\exp\left(-\frac{t_{nuk}}{\tau_n}\right)}{6 + [1 - \exp\left(-\frac{t_{nuk}}{\tau_n}\right)]} \simeq \frac{1}{7} \quad (2.14)$$

mit  $\frac{n_{gl}}{p_{gl}} = \frac{1}{6}$ ,  $t_{nuk} = 200 \text{ s}$  und  $\tau_n = 886 \text{ s}$ .

Das Gleichgewichtsverhältnis, folgend aus einem weitergehenden Verlauf nach Gl. 2.3, hätte bei einer Temperatur von  $T_{nuk} = 0,3 \text{ MeV}$  einen Wert von  $\frac{n}{p} = \frac{1}{74}$  angenommen.

Die wirkliche Nukleosynthese der leichten Elemente fängt etwas später an, wenn die Deuteriumkerne zusammen bleiben können. Ein schneller Ablauf der Kettenreaktionen erfolgt und fast alle vorhandenen Neutronen bleiben in Heliumkerne gebunden.

Die Nukleosynthese erfolgt durch 12 fundamentale Reaktionen, die in Abb. 2.1 dargestellt sind. Synthetisiert werden Deuterium, Tritium, Helium, Beryllium und Lithium. In dem Schaubild fällt auf, dass alle Pfeile der Reaktionen bei  ${}^4\text{He}$  enden. Dieses Element wird hauptsächlich, die übrigen Elemente zu wesentlich geringeren Anteilen gebildet.

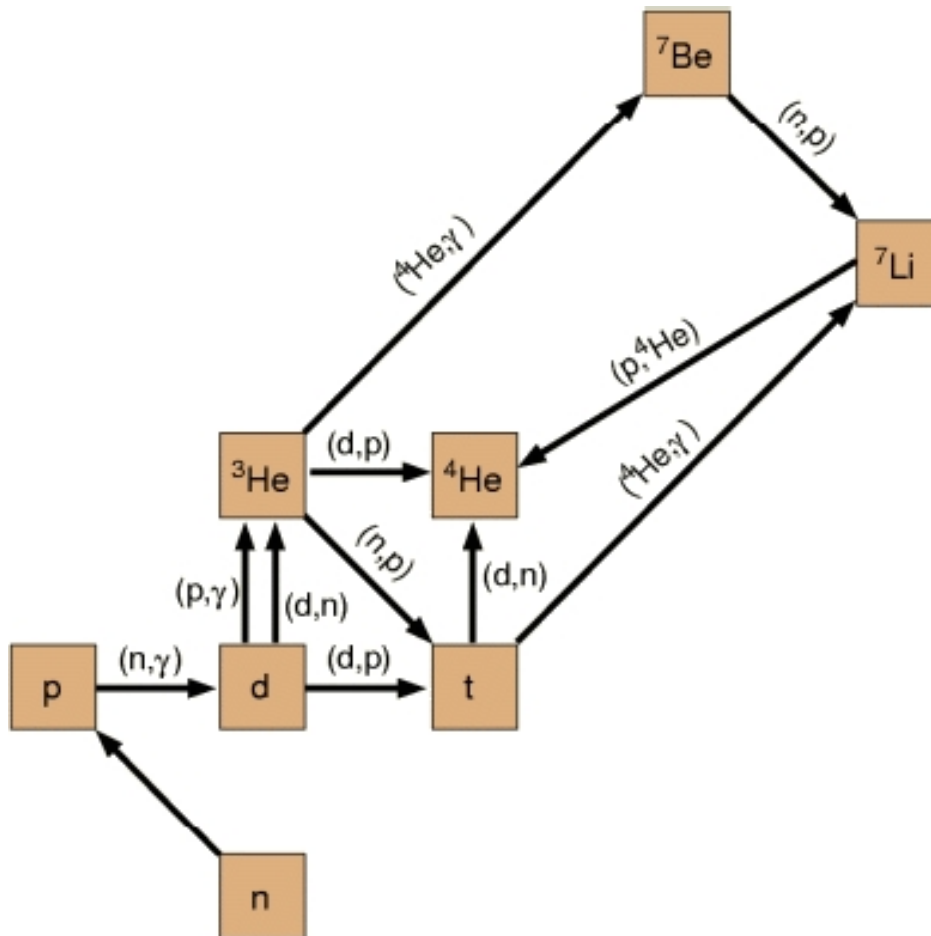


Abbildung 2.1: Kernreaktionen der primordialen Nukleosynthese [Bler]

Etwa fünf Minuten nach dem Urknall sind die Temperatur und die Teilchendichte des Universums durch die fortgeschrittene Expansion bereits so gering, dass die primordiale Nukleosynthese im wesentlichen abgeschlossen ist. Aufgrund der hohen Bindungsenergie des  ${}^4\text{He}$ -Kerns, die durch die abgesunkenen Energie mehr bemerkbaren Coulombbarrieren und weil kein stabiler Kern mit Massenzahl 5 bzw. 8 existiert, wird  ${}^4\text{He}$  kaum abgebaut. Die noch freien Neutronen zerfallen im Verlauf der nächsten Minuten. Die Theorie sagt ein Massenverhältnis 75% Wasserstoff (Protonen) zu 25% Helium voraus, wenn man von einem Neutron zu Proton Verhältnis von  $\frac{1}{7}$  ausgeht. Die übrigen Elemente, insbesondere die mit höheren Ordnungszahlen, liegen höchstens in Spuren vor. [KKZ97], [KT94], [Wei87], [Bra]

## 2.2 Nukleares statisches Gleichgewicht

Um die Häufigkeiten der leichten Elemente in dieser Phase zu berechnen, wird davon ausgegangen, dass sich die Teilchen im Nuklearen Statischen Gleichgewicht (NSE) befinden, d.h. dass alle freien Protonen und Neutronen sich mit eventuell vorhandenen leichten Kernen sowohl im thermischen, als auch chemischen Gleichgewicht befinden. In diesem Zustand ist die Maxwell-Boltzmann-Verteilung anwendbar. Somit gilt hier die im Abschnitt der thermodynamischen Expansion des Weltalls schon vorgestellte Gl. 1.58 speziell für die Teilchenzahldichte eines Korns,  $n_A$ , mit Massenzahl  $A$  und Ladungszahl  $Z$ :

$$n_A = g_A \left( \frac{m_A T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mu_A - m_A}{T}\right), \quad (2.15)$$

wobei  $g_A$  für die Anzahl der internen Freiheitsgrade,  $\mu_A$  für das chemische Potential des Elements und  $m_A$  für die Kernmasse steht.

Chemisches Gleichgewicht kann nur dann vorliegen, wenn die Rate der Kernreaktionen zur Entstehung des Elements verglichen mit der Expansionsrate des Universums sehr hoch ist. Falls diese Bedingung erfüllt ist, lautet das chemische Potential,  $\mu_A$ :

$$\mu_A = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n. \quad (2.16)$$

Die Bindungsenergie eines Korns,  $B_A$ , ist wie folgt definiert:

$$B_A \equiv Zm_p + (A - Z)m_n - m_A \quad (2.17)$$

mit  $m_p$ : Protonenmasse und  $m_n$ : Neutronenmasse.

Durch Einsetzen von 2.16 und 2.17 in 2.15 und weitere Umformungen lässt sich die Teilchenzahldichte nach der folgenden Gleichung berechnen:

$$n_A = g_A \cdot A^{\frac{2}{3}} \cdot s^{-A} \cdot \left( \frac{2\pi}{m_N T} \right)^{\frac{3(A-1)}{2}} \cdot n_p^Z \cdot n_n^{A-Z} \cdot \exp\left(\frac{B_A}{T}\right), \quad (2.18)$$

mit  $m_N$ : Masse der Nukleonen,  $n_p$ ,  $n_n$ : Teilchenzahldichte der Protonen bzw. Neutronen.

In Tabelle 2.1 sind die Bindungsenergien und Anzahlen interner Freiheitsgrade für einige leichte Atomkerne gezeigt. Die Teilchenzahldichte eines Elements ändert sich mit der Zeit, da das expandierende Universum eine zeitliche Volumenänderung erfährt. Deshalb ist es günstiger, den Massenanteil  $X_A$  eines Elementes zu betrachten, bei dem die Teilchenzahldichte  $n_A$  durch die Teilchenzahldichte aller im Universum vorhandenen Nukleonen  $n_N$  dividiert wird:

$$X_A \equiv \frac{n_A A}{n_N} \quad \text{und} \quad \sum_i X_i = 1. \quad (2.19)$$

Die Gleichung zur Berechnung des Massenanteils eines Elementes im NSE, die sich durch Einsetzen von 2.18 in 2.19 ergibt, ist folgende: [KT94]

$$X_A = g_A [\zeta(3)]^{A-1} \pi^{\frac{1-A}{2}} 2^{\frac{3A-5}{2}} A^{\frac{5}{2}} \left( \frac{T}{m_N} \right)^{\frac{3(A-1)}{2}} \eta^{A-1} X_p^Z X_n^{A-Z} \exp\left(\frac{B_A}{T}\right) \quad (2.20)$$

mit  $\zeta(3)$ : Riemannsche Zeta-Funktion von 3.

Eine wesentliche Größe in Gl. 2.20 ist das vorher schon erwähnte Baryonen-zu-Photonen Verhältnis  $\eta$ , das als Quotient der Teilchenzahldichte der Baryonen,  $n_B$ , bzw. Nukleonen,  $n_N$ , und der Teilchenzahldichte der Photonen,  $n_\gamma$ , definiert ist. [Ste07]

Element ${}^AZ$	Bindungsenergie $B_A$ in MeV	Anzahl interner Freiheitsgrade $g_A$
${}^2\text{H}$	2,22	3
${}^3\text{H}$	6,92	2
${}^3\text{He}$	7,72	2
${}^4\text{He}$	28,3	1
${}^{12}\text{C}$	92,2	1

Tabelle 2.1: Bindungsenergie und Anzahl interner Freiheitsgrade für ausgewählte leichte Elemente [KT94]

Die Temperatur  $T_{NSE}$ , ab der der Zustand eines Atomkerns gegenüber dem Zustand der einzelnen Nukleonen thermodynamisch favorisiert wird, kann mit Hilfe von Gl. 2.20 grob geschätzt werden. Man löst nach der Temperatur  $T$  auf, setzt das Massenverhältnis des Atomkerns  $X_A \simeq 1$  und nimmt  $X_n \simeq X_p \simeq 1$  an. Damit folgt: [KT94]

$$T_{NSE} \simeq \frac{B_A/(A-1)}{\frac{1}{\ln(\frac{1}{\eta})} + 1,5 \ln(\frac{m_N}{T})}. \quad (2.21)$$

Die Temperaturen  $T_{NSE}$  für die leichten Elemente, die nach Gl. 2.21 berechnet werden, sind in Tab. 2.2 aufgeführt.

Element ${}^AZ$	$T_{NSE}$ in MeV
${}^2\text{H}$	0,07
${}^3\text{He}$	0,11
${}^4\text{He}$	0,28
${}^{12}\text{C}$	0,25

Tabelle 2.2: Ungefähre Temperaturen, ab denen die leichten Elemente im Zustand stabiler Atomkerne vorliegen.

[KT94]

## 2.3 Häufigkeiten der leichten Elemente

Anhand eines Codes ist es möglich, die theoretischen Werte der Häufigkeiten der leichten Elemente mit einem Fehler von einem Prozent numerisch zu berechnen. Die wichtigsten Parameter für die primordiale Nukleosynthese sind folgende:

1. Massendichte der baryonischen Materie,  $\Omega_B$ : Je größer die Baryondichte im frühen Universum ist, desto häufiger sind Zusammenstöße zwischen Neutronen und Protonen, was sich auf die Reaktionsraten auswirkt. Dieser wichtige Parameter wird analog zu  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_k$  folgendermaßen definiert:

$$\Omega_B \equiv \frac{\rho_B}{\rho_{kr}} \quad (2.22)$$

wobei  $\rho_{kr}(t_0) \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi}$  die kritische Dichte und  $H_0$  die Hubble-Konstante sind. [Ste07]

2. Verhältnis von Baryonen- zu Photonenanzahl,  $\eta$ : bestimmt ab welcher Temperatur die Deuteronen lange genug gebunden bleiben können um weitere signifikante Anteile an schwereren Kernen zu bilden. Je mehr Photonen pro Baryon zur Verfügung stehen, desto häufiger kommen Deuteronenspaltungen vor. [Wei87] Um dessen Abhängigkeit von der Massendichte der baryonischen

Materie und dadurch auch der Hubble- und Newton-Konstante<sup>1</sup> zu verdeutlichen, wird  $\eta$  durch diese Parameter ausgedrückt:

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} = 2,74 \cdot 10^{-8} \Omega_B h^2 \quad (2.23)$$

wobei  $h$ , der Hubble-Konstante in Einheiten von  $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  entspricht. Mit

$$\Omega_B h^2 = 0,0223 \pm 0,0007 \quad (\text{nicht aus der BBN entnommen}) \quad (2.24)$$

erhält man einen Wert von

$$\eta = (6,11 \pm 0,20) \cdot 10^{-10}. \quad (2.25)$$

[Ste07]

3. Hubble-Parameter,  $H$  : bestimmt den Zeitpunkt, ab dem  $\Gamma < H$  wird und dadurch das Neutron-Proton-Verhältnis des chemischen Gleichgewichts vor dem Anfang der Nukleosynthese.
4. Lebensdauer  $\tau_n$  von freien Neutronen: bestimmt wie viele Neutronen zwischen dem Ausfrieren des Neutron-Proton-Verhältnisses und dem Beginn der Deuteronen-Produktion zerfallen.

Die Reaktionen, welche hier behandelt werden, sind der Kernphysik hinlänglich bekannt. Daher kann man für jedes der leichten Elemente eine zeitabhängige Massenhäufigkeit angeben wie sie in Abb. 2.2 aufgetragen wurden. Im Schaubild erkennt man, dass die Kurve des Verhältnis von Deuteronen zu Protonen erst nach einer bestimmten Zeit rasch ansteigt und von einer ähnlichen Zunahme der Helium-Häufigkeit befolgt wird. [KT94]

Andererseits ermöglicht ein Festhalten der Zeit bei abgeschlossenem Vorgang eine grafische Darstellung der Massenanteile gegen das Verhältnis von Baryonen- zu Photonenzahl, siehe Abb. 2.3. Die Häufigkeit  $X_A$  eines Kerns  $A(Z)$  zeigt im Gleichgewicht eine Abhängigkeit vom Baryon-Photon-Verhältnis gemäß Gl. 2.20, d.h.  $X_A \propto \eta^{A-1}$ . Dies bedeutet für größere Werte von  $\eta$  eine frühere Erzeugung von  $D$ ,  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$  und damit wegen des größeren Neutron-Proton-Verhältnisses auch von mehr Helium. Für kleinere Werte von  $\eta$  werden die Reaktionsraten für  $D$  und  ${}^3\text{H}$  zu  ${}^4\text{He}$  geringer, so dass die verbleibenden Häufigkeiten von diesen Elementen im Vergleich zu  ${}^4\text{He}$  größer sind, da ein geringerer Anteil weiter reagiert.

Viel drastischer wirkt sich  $\eta$  bei  ${}^7\text{Li}$  aus. Dieser entsteht durch zwei verschiedene Prozesse. Für  $\eta \leq 3 \cdot 10^{-3}$  dominiert die Reaktion  ${}^4\text{He}({}^3\text{H}, \gamma){}^7\text{Li}$ , während für größere Werte die Reaktion  ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, \gamma){}^7\text{Be}$  mit anschließendem Elektroneneinfang zu  ${}^7\text{Li}$  dominant ist. Dies verursacht das Minimum bei etwa  $3 \cdot 10^{-10}$  und macht  ${}^7\text{Li}$  zu einem besonders empfindlichen Test für  $\eta$ .

Das aufgetragene Verhältnis der Häufigkeiten von Helium zu Wasserstoff hält sich innerhalb der selben Größenordnung, weil sie von der Anzahl an Neutronen begrenzt wird, welche nicht so stark wie die anderen Elementhäufigkeiten von  $\eta$  abhängig ist.

In beiden Grafiken sieht man, dass die Häufigkeiten 9-10 Größenordnungen umspannen, was auch die doppelt logarithmische Auftragung notwendig macht. [KKZ97]

### 2.3.1 ${}^4\text{He}$ -Häufigkeit

Unter der Annahme, dass nahezu alle am Anfang der Nukleosynthese,  $t_{\text{nuk}}$ , freien Neutronen 20 Minuten später in Heliumkerne gebunden sein werden, kann man die Heliumhäufigkeit als obere Grenze theoretisch berechnen;

$$X_4 \simeq \frac{4n({}^4\text{He})}{n_N} = \frac{4(n_n/2)}{n_n + n_p} = \frac{2(n/p)_{\text{nuk}}}{1 + (n/p)_{\text{nuk}}} \quad (2.26)$$

$$X_4 = Y_{\text{prim}} \simeq 0,25 \quad \text{mit} \quad (n/p)_{\text{nuk}} \simeq 1/7. \quad (2.27)$$

<sup>1</sup>bis jetzt wegen der relativistischen Einheiten unterdrückt

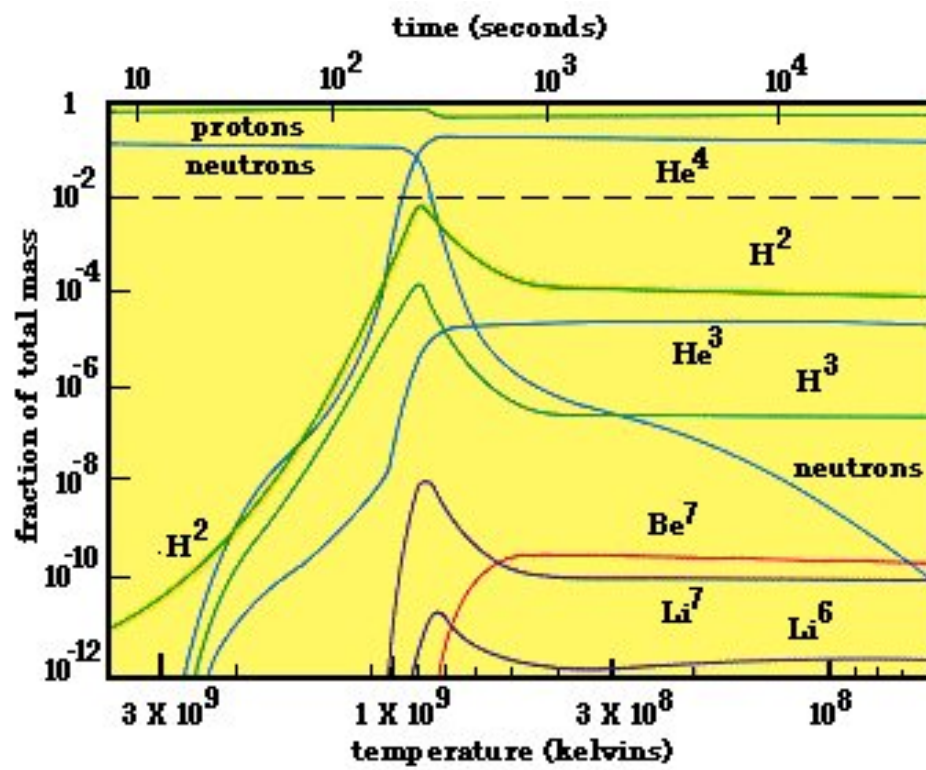
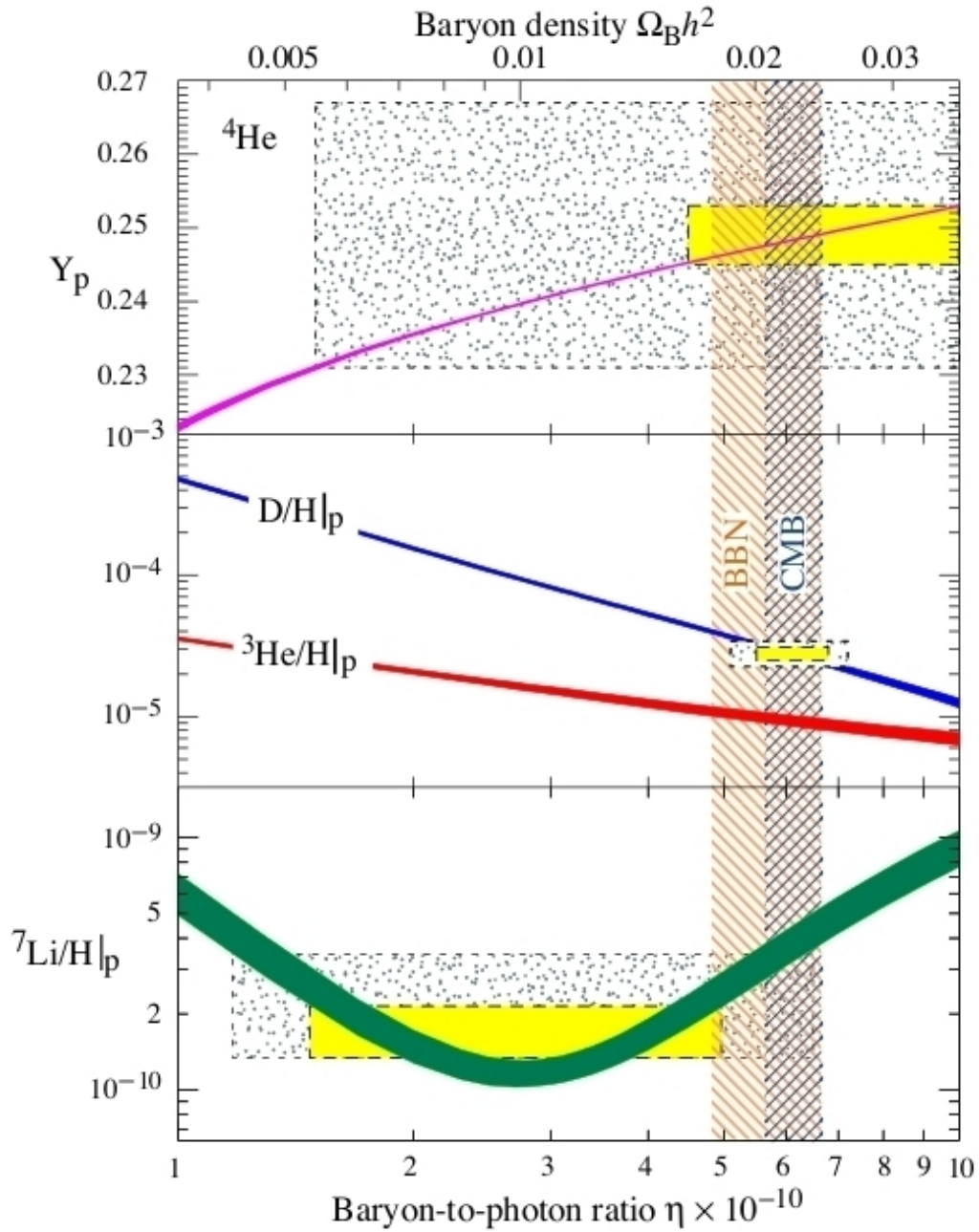


Abbildung 2.2: Zeitliche Entwicklung der Elementhäufigkeiten [hw]

Abbildung 2.3: Primordiales Vorkommen der leichten Elemente in Abhängigkeit von  $\eta$  [Weh]

Hierbei wird die Atomkernzahl von Helium mit der Anzahl an Heliumkernen multipliziert und durch die gesamte Zahl an vorhandenen Nukleonen geteilt um den Massenanteil,  $X_A$ , dieses Elements nach Gl. 2.19 zu berechnen. Da jeder Heliumkern aus zwei Neutronen und zwei Protonen aufgebaut wird, entstehen insgesamt  $n/2$  Heliumkerne. Schließlich findet man in diesem Quotienten, sobald man durch  $n_p$  teilt, das Neutronen-Protonen-Verhältnis, welches sich durch den Wert aus Gl. 2.14 ersetzen lässt.

Für die experimentelle Bestimmung muss man berücksichtigen, dass Helium sowohl zu schwereren Teilchen fusioniert, wie auch aus Wasserstoff gebildet wird. Insgesamt wird die primordiale Häufigkeit im Laufe der Zeit mit in Sternen erzeugtem Helium angereichert, so dass die gemessene Häufigkeit als Obergrenze dient. Anhand der Analyse von Emissionsspektren von sogenannten HII-Regionen ist es möglich Aussagen über die Häufigkeit dieses Elements zu treffen. HII-Regionen sind Wolken aus leuchtendem Gas, bestehend aus einem großen Anteil an ionisiertem Wasserstoff, welchem sie ihren Namen verdanken. Diese sehr helle Objekte sind der Geburtsort neuer Sterne.

Trägt man die Quotienten  $[He/H]$  sowie  $[O/H]$ , welche man den Emissionsspektren einer Vielzahl von Wolken entnommen hat, gegeneinander auf, erkennt man einen linearen Zusammenhang zwischen der Heliumhäufigkeit und der Metallizität in der Wolke. Die Korrelation zwischen  $Y$  und dem Massenanteil der Metalle  $Z$ ;

$$Y = Y_{prim} + \frac{dY}{dZ} \cdot Z, \quad (2.28)$$

macht den primordiale Anteil zugänglicher, der dann aus einer Extrapolation für  $Z = 0$  folgt. Nun wird Sauerstoff meist in massiven Sternentwicklungen erzeugt, während Helium und z.B. Stickstoff eher in intermediären Massenbereichen erzeugt werden. Man geht deswegen dazu über, die Stickstoffhäufigkeit heranzuziehen.

Für  ${}^4\text{He}$ -Massenanteil ergibt sich ein heutiger Wert von:

$$Y_{prim} = 0,23 \pm 0,02 \quad (2.29)$$

Der Messfehler ist bisweilen schwer unter Kontrolle zu bekommen, aber es ist zumindest klar, dass die systematischen Fehler den statistischen überwiegen. Obwohl die systematischen Abweichungen an dieser Stelle schwer einzuschätzen sind, ist dieser Wert für Helium ganz gut in Übereinkunft mit dem vorhergesagten. [KKZ97], [Ste07], [KT94]

### 2.3.2 Die D-Häufigkeit

Im Gegensatz zu Helium hängt Deuterium sehr stark von der Baryonendichte ab, was dessen Häufigkeit zu einem sensitiven Instrument zur Bestimmung letzterer macht und dadurch verstärkt in den Fokus der Kosmologie rückt.

Von der primordialen Nukleosynthese abgesehen, entsteht nirgends im Weltall Deuterium, nur im Sterninneren, wo es aber gleich zu  ${}^3\text{He}$  weiterverarbeitet wird. Daher lässt sich das beobachtbare Deuteriumvorkommen als Untergrenze verstehen und auf den Urknall zurückführen.

Die heutige Deuteriumhäufigkeit beträgt:

$$10^{-5} \leq \frac{D}{H} \leq 2 \cdot 10^{-4} \quad (2.30)$$

Dieses Resultat befindet sich in einigermaßen guter Übereinstimmung mit anderen Möglichkeiten die Baryonendichte zu messen, wobei zu berücksichtigen ist, dass, falls bessere Messungen in der Zukunft den Wert von  $[D/H]$  anders bestimmen, sich auch die Baryonendichte wieder ändern würde. [KKZ97], [Ste07]



### 2.3.3 Die $^3\text{He}$ -Häufigkeit

Der Umstand, dass sich  $^3\text{He}$  und  $^4\text{He}$  sehr ähnlich verhalten, erschwert das Auffinden von  $^3\text{He}$  erheblich, während bei  $^4\text{He}$  der geringe Bruchteil gar keine Rolle spielt. Außerdem unterliegt  $^3\text{He}$  stärker als die anderen behandelten Stoffe einer heftigen chemischen Entwicklung, da es durch stellare Nukleosynthese weiterhin produziert wurde. Deswegen stellt die niedrigste beobachtete Häufigkeit die Obergrenze der  $^3\text{He}$ -Häufigkeit dar;

$$1,2 \cdot 10^{-5} \leq \frac{^3\text{He}}{\text{H}} \leq 1,5 \cdot 10^{-4}. \quad (2.31)$$

Diese hält dem Vergleich mit der Theorie durchaus Stand. [KKZ97], [Ste07]

### 2.3.4 $^7\text{Li}$ -Häufigkeit

$^7\text{Li}$  ist sehr schwer nachzuweisen, und man kann hierfür eigentlich nur Sternatmosphären mit all den daraus folgenden Nachteilen benutzen. Zur Beobachtung verwendet man entweder sehr alte, metallarme Population-II-Sterne oder jüngere Population-I-Sterne. Leider ergeben sich aus den beiden Messungen Werte für die Lithiumkonzentration, die sich um einen Faktor zehn voneinander unterscheiden. Jedoch wird die in den alten Population-II-Sternen beobachtete Häufigkeit für eine Abschätzung der primordialen  $^7\text{Li}$ -Häufigkeit herangezogen:

$$\frac{^7\text{Li}}{\text{H}} = (1.4 \pm 0.2) \cdot 10^{-10} \quad (2.32)$$

Hier stoßen wir auf die bisher größte Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis, da der vorhergesagte Wert doppelt bis dreimal so groß ist ( $[\frac{\text{Li}}{\text{H}}]_{\text{theo}} = (5 \pm 2) \cdot 10^{-10}$ ). Es muss allerdings betont werden, dass dieses Problem, dessen Ursache bisher noch nicht entdeckt wurde, eher noch eine Angelegenheit der Feinabstimmung darstellt. Die Tatsache, dass die Größenordnung korrekt ist, sowie dass sich Theorie und Messung, wie in Abb. 2.3 schneiden, stellt durchaus einen Erfolg dar. [KKZ97], [Ste07]

## 2.4 Zusammenfassung für SBBN

Die theoretisch vorhergesagten sowie die beobachteten Häufigkeiten und der Bereich der Übereinstimmungen sind in Abb. 2.3 dargestellt. Die beobachteten Häufigkeiten sind als Rechtecke in dem Diagramm im Schaubild dargestellt, wobei die gelben Felder die Werte unter Berücksichtigung statistischer Fehler ( $\pm 2s$ ) darstellen während bei den gestrichelten Feldern statistische und systematische Fehler ( $\pm 2s$ ) berücksichtigt werden.

Die beobachteten Häufigkeiten der leichten Elemente sind schwer durch einen Fehler einzubetten. Von den statischen Fehlern abgesehen sind die systematischen nicht einfach zu bestimmen, deswegen werden diese meisten auch separat angegeben. Dank der verschiedenen Messmethoden und beobachteten Objekte sind die Werte für  $D$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  und  $^7\text{Li}$  nicht mit dem selben systematischen Fehler behaftet.

Das schraffierte Feld, das durch alle drei Abschnitte des Diagramms verläuft, markiert die Bereiche der Übereinstimmungen von beobachteten und theoretischen Werten mit einem Vertrauensintervall von 95% für die verschiedenen Elemente. Das schmalere Feld bezieht sich auf Ergebnisse der Untersuchung der Hintergrundstrahlung.

Die theoretischen Häufigkeiten sind stark von  $\eta$  abhängig. Durch die Forderung der Übereinstimmung mit den Beobachtungen lässt sich der Zahlenwert des Baryonen-zu-Photonen Verhältnisses  $\eta$  eng eingrenzen:

$$4 \cdot 10^{-10} \leq \eta \leq 7 \cdot 10^{-10} \quad (2.33)$$

Innerhalb der Fehler, sind die von der SBBN vorhergesagten und experimentell beobachteten Häufigkeiten von  $D$ ,  ${}^3\text{He}$  und  ${}^4\text{He}$  sind in guter Übereinstimmung, was eine wichtige Unterstützung für das Standardmodell der Teilchenphysik und Kosmologie bedeutet.

Allerdings, ist  ${}^7\text{Li}$  noch ein Problem. Da Nicht Standard BBN einen zweiten freien Parameter,  $S$  or  $\Delta N_\nu$  ermöglicht, ist es interessant zu sehen in wie fern man auf diese Weise zu einer geringeren Abweichung für Lithium kommt. Umgekehrt kann man auch von den experimentellen Werten ausgehend die Kombination dieser in den Standardmodellen festen Parameter,  $S = 1$  und  $\Delta N_\nu$ , einschränken und somit Aussagen treffen, in wie fern eine Abweichung von den Standardmodellen möglich ist. [KKZ97], [Ste07], [KT94]

## 2.5 Nicht-Standard Nukleosynthese

Bisher wurde hier nur die Beschreibung vorgestellt, die auf dem Standardmodell der Kosmologie und der Teilchenphysik aufbaut. Jedoch ist die vom Standardmodell vorgeschlagene Erklärung nicht vollständig, so dass man eine bessere Interpretation außerhalb dessen sucht.

Viele Nicht-Standardmodelle postulieren eine Abweichung der Expansionsrate des frühen, strahlungsdominierten Universums,  $H \rightarrow H'$ . Eine Änderung des Hubbleparameters kann durch Definition einer Variablen folgendermaßen quantifiziert werden:

$$S \equiv H'/H. \quad (2.34)$$

Dabei steht  $H$  für den vom Standardmodell bestimmten Parameter und  $H'$  charakterisiert den möglichen unterschiedlichen Wert. Für das Standardmodell war  $S = 1$ , da der Hubbleparameter als feste, durch die Friedmanngleichung bestimmte Variable angenommen wurde. Die Betrachtung von  $S \neq 1$  kann auf zwei unterschiedlichen Gründen zurückgeführt werden.

Die Abweichung kann z.B. von der Existenz einer größeren Anzahl an Neutrinogenerationen stammen, als die drei vom Standardmodell postulierten. Dadurch würde die Energiedichte im früheren Universum dementsprechend zunehmen:

$$\rho_{str} \rightarrow \rho'_{str} \equiv \rho_{str} + \Delta N_\nu \rho_{str} \quad (2.35)$$

mit  $\Delta N_\nu \equiv N_\nu - 3$ .

Für eine einfachere Untersuchung der Ursache schreibt man  $S$  als Funktion der nicht ausgeschlossenen "neuen" Neutrinos:

$$S = (1 + 0,163\Delta N_\nu)^{\frac{1}{2}} \quad \text{vor der Annihilation der } e^\pm \text{ Paare} \quad (2.36)$$

$$S = (1 + 0,134\Delta N_\nu)^{\frac{1}{2}} \quad \text{nach der Annihilation der } e^\pm \text{ Paare.} \quad (2.37)$$

Jedoch kann die Annahme eines unterschiedlichen Wertes der Gravitationskonstante,  $G$ , im früheren Universum auch auf  $\Delta N_\nu \neq 0$  zurückgeführt werden, so dass  $\Delta N_\nu < 0$  auch möglich ist. Somit lässt sich

$$S = (G'/G)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta G}{G} = 7\Delta N_\nu/43 \quad (2.38)$$

schreiben.

Auch wenn bei den meisten Modellen eine Leptonenasymmetrie der gleichen Größenordnung wie die Baryonasymmetrie angenommen wird, ist diese Aussage apriori nur bei den geladenen Leptonen

über eine Ladungsneutralität argumentierbar. Jedoch ist es nicht so der Fall bei den Neutrinos. Ein relativ großer Überschuss von Elektron-, Myon- und Tauon-Neutrinos über die dazugehörigen Antiteilchen wird von den experimentellen Messungen nicht ausgeschlossen. Eine um acht Größenordnungen ausgeprägtere Elektroneneutrino-Asymmetrie als die Baryonenasymmetrie würde den Neutron-Proton-Verhältnis vor den Anfang der Nukleosynthese beeinflussen und zu unterschiedlichen Elementhäufigkeiten führen. [Ste07], [Ste10]

## 2.6 Zusammenfassung für Nicht-Standard Nukleosynthese

Ungeachtet dessen, dass nicht alle experimentellen Elementhäufigkeiten im Rahmen ihrer Fehler mit den theoretischen Werten des Standardmodells zu vereinbaren sind, können diese zur Einschränkung der Parameter der Nicht-Standard Nukleosynthese dienen:

$$S = (0,95 \pm 0,04 - 1,02 \pm 0,01) \quad (2.39)$$

äquivalent zu

$$N_\nu = (2,4 \pm 0,4 - 3,5). \quad (2.40)$$

Unter der Annahme, dass  $N_\nu = 3$  ist, wird die Abweichung von  $S$  auf die Gravitationskonstante  $G$  zurückgeführt:

$$G'/G = (0,77 - 1.09). \quad (2.41)$$

Jedoch ist auch bei Variation von  $S$  und des möglichen Überschuss der Neutrinos über ihre Antiteilchen das Lithium-Problem nicht zu lösen. Also ist eine Abweichung vom Standardmodell zwar möglich, führt aber nicht wirklich zu einer besseren Beschreibung der Big Bang Nukleosynthese. [Ste07], [Ste10]



# Literaturverzeichnis

- [Bra] Bastian Brandt: *Das Standardmodell der Kosmologie, Die Friedmann-Gleichung.*
- [Fli06] T. Fließbach: *Allgemeine Relativitätstheorie.* Spektrum, Akad. Verl., 2006.
- [GB05] J. Garcia-Bellido: *Cosmology and astrophysics.* Arxiv preprint astro-ph/0502139, 2005.
- [Hea] Alan Heavens: *Astrphysical Cosmology.*
- [hw] <http://www.astro.ucla.edu/wright/BBNS.html>: *Big Bang Nukleosynthesis.*
- [KKZ97] H.V. Klapdor-Kleingrothaus und K. Zuber: *Teilchenastrophysik.* Vieweg+ Teubner, 1997.
- [KT94] E.W. Kolb und M.S. Turner: *The early universe.* Westview Press, 1994.
- [Olo10] R. Oloff: *Geometrie der Raumzeit: Eine mathematische Einführung in die Relativitätstheorie.* Vieweg+ Teubner, 2010.
- [Reb05] E. Rebhan: *Theoretische Physik. 2. Quantenmechanik, relativistische Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie, Elementarteilchentheorie, Thermodynamik und Statistik.* Spektrum Akad. Verl., 2005.
- [Ryd03] B.S. Ryden: *Introduction to cosmology.* Addison-Wesley, 2003.
- [Sch09] G. Schäfer: *Einführung in die Relativitätstheorie.* VCH, 2009.
- [Ste07] G. Steigman: *Primordial nucleosynthesis in the precision cosmology era.* Arxiv preprint arXiv:0712.1100, 2007.
- [Ste10] G. Steigman: *Primordial Nucleosynthesis: The Predicted and Observed Abundances and Their Consequences.* Arxiv preprint arXiv:1008.4765, 2010.
- [SU02] R.U. Sexl und H.K. Urbantke: *Gravitation und Kosmologie. Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie,* Band 1. 2002.
- [Tre00] M. Treichel: *Teilchenphysik und Kosmologie: Eine Einführung in Grundlagen und Zusammenhänge.* Springer Verlag, 2000.
- [Weh] Nadine Wehmeier: *Primordiale Nukleosynthese.*
- [Wei87] S. Weinberg: *Die ersten drei Minuten: der Ursprung des Universums.* Deutscher Taschenbuch-Verlag, München, 1987.



# Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den ...,