

Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Das Standardmodell der Teilchenphysik

Bachelorarbeit in Physik
von

Ana Rešetar

geboren in Varaždin (Kroatien)

18. April 2011 - 11. Juli 2011

Diese Bachelorarbeit wurde von Ana Rešetar verfasst
unter der Betreuung von
Dr. Werner Rodejohann
Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg

Zusammenfassung

Schon längst hat man durch verschiedene Experimente, von den Rutherford'schen Streuver suchen bis zu den modernen Entdeckungen an Teilchenbeschleunigern, einen Einblick in die Welt der subatomaren Teilchen bekommen. Um die fundamentalen Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen und von ihnen Aufgebauten zu beschreiben, wurde das Standardmodell der Teilchenphysik entwickelt. Es baut auf sogenannten Eichtheorien auf, bei denen man lokale Eichinvarianz der Lagrangedichten verschiedener Felder fordert, es handelt sich somit um Feldtheorien. Im Laufe dieser Bachelorarbeit wird gezeigt, wie sich als Konsequenz dieser Forderung Eichbosonen, die Vermittler der Kräfte, mit ihren charakteristischen Eigenschaften ergeben. Wegen Erhaltung der Eichinvarianz bleiben sie allerdings im Rahmen der Eichtheorien masselos, um daher die Massen der schweren W^\pm - und Z^0 -Bosonen, den Austauscheteilchen der schwachen Wechselwirkung zu generieren, verwendet man das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung. Es findet Anwendung in dem bekannten Higgs-Mechanismus, der das Problem der Massen löst, jedoch neue Fragen öffnet. Das Higgs-Teilchen, das als Folge des Higgs-Mechanismus auftaucht, wird immernoch gesucht.

Abstract

We have been able to look into the World of the subatomic particles through various experiments, from Rutherford's scattering experiments, to the modern discoveries at particle accelerators. To describe the fundamental interactions between the elementary particles a theory called Standard Model of particle physics has been developed. It is build on the so-called gauge theories, that demand local gauge invariance of Lagrangians for different fields. As a consequence of this demand, the modified Lagrangians yield gauge bosons, mediators of the forces with specific characteristics for each field, in order to conserve invariance. Issues occur by the description of the weak interaction, because unlike the Photon and Gluons, the gauge bosons W^\pm und Z^0 of the weak interaction have masses, that are not provided within the gauge theories. They are even prohibited in order to preserve invariance. This is fixed by the Higgs mechanism, which uses the principle of the spontaneous symmetry breaking, but on the other hand, it opens some new questions, like the Higgs particle predicted by the theory, but not yet found.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Entstehung der Teilchenphysik	4
1.2	Elementarteilchen	4
1.3	Fundamentale Wechselwirkungen	4
1.4	Symmetrien und Erhaltungssätze	5
1.5	Eichtheorien	6
2	Lagrange-Formalismus	8
2.1	Hamiltonisches Prinzip	8
2.2	Lagrangedichte	10
2.3	Felder und Feldgleichungen	11
2.3.1	Neutrale skalare Felder	11
2.3.2	Komplexes skalares Feld	12
2.3.3	Dirac Gleichung	12
2.4	Noether-Theorem	14
3	Quantenelektrodynamik und Quantenchromodynamik	15
3.1	Elektromagnetismus	15
3.2	Quantenchromodynamik	17
4	Spontane Symmetriebrechung	19
4.1	Das Konzept	19
4.2	Das Nambu-Goldstone-Modell	20
4.3	Higgs-Mechanismus	21
4.4	Brechung der $SU(2)$ -Symmetrie	23
5	Die elektroschwache Wechselwirkung	25
5.1	Schwache Wechselwirkung	25
5.2	Eichtheorien allgemein	27
5.3	Kinetische Energie der Eichfelder	29
5.4	Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung	30
5.5	Brechung der Symmetrie	31
5.6	Fermionen-Massen	33
5.7	Lagrangedichte des Weinberg-Salam-Modells	34

1 Einleitung

1.1 Entstehung der Teilchenphysik

Ein Hinweis darauf, dass Materie aus kleineren Bauelementen besteht, war schon die Existenz des Periodensystems, das über hundert Elemente mit sich periodisch wiederholenden Eigenschaften aufweist. Tatsächlich hat man zu Beginn des 20. Jahrhunderts durch die Rutherford Streuexperimente den Kern, umgeben von einer Elektronwolke, als elementaren Aufbau des Atoms festlegen können. Später kamen Proton und Neutron dazu, man postulierte in den 30er Jahren das Neutrino, um den beobachteten β -Zerfall in Einklang mit den Erhaltungssätzen für Energie, Impuls und Drehimpuls zu bringen. In den 50er und 60er Jahren stellte sich durch Experimente an den Teilchenbeschleunigern heraus, dass Proton und Neutron nur Vertreter einer großen Teilchenfamilie sind, die man heute Hadronen nennt. Da diese auch in Gruppen von Teilchen mit ähnlichen Eigenschaften auftauchten, wie die Atome im Periodensystem, nahm man an, dass sie nicht als fundamentale Bausteine der Materie anzusehen sind. Somit entstand das Quark-Modell, um Ordnung in den „Hadronen-Zoo“ zu bringen. Man konnte alle bekannten Hadronen als eine Kombination aus drei Quarks oder einem Quark-Antiquark Paar erklären. Die Grundlagen des Standardmodells sind in jedem Standardwerk, das sich mit Teilchenphysik beschäftigt zu finden, für diese Arbeit wurde [PRSZ09] verwendet.

1.2 Elementarteilchen

Bis jetzt wurde festgestellt, dass es zwei Arten von Elementarteilchen gibt, die als solche gelten, da man keine angeregten Zustände gefunden hat: Leptonen und Quarks, beide mit Spin $1/2$, also Fermionen. Streuexperimente haben gezeigt, dass sie kleiner als 10^{-18}m sind, drei Größenordnungen kleiner als das Proton. Man kennt sechs verschiedene Leptonen und Quarks, sowie dazugehörige Antiteilchen, die man mit aufsteigender Masse in sogenannte „Generationen“ oder „Familien“ einordnet, wie in Tabelle 1.1 dargestellt.

1.3 Fundamentale Wechselwirkungen

Vier fundamentale Kräfte, auf denen alle physikalischen Phänomene beruhen sind bekannt: die Gravitation, elektromagnetische Kraft, starke Wechselwirkung und die schwache Wechselwirkung. Die Wechselwirkungen werden laut der heutigen Vorstellung durch Austausch von Vektorbosonen (auch Eichbosonen genannt) mit Spin 1 vermittelt. Im Falle des Elektromagne-

Fermionen	Familie			el. Ladung	Farbe	Spin	schwacher Isospin	
	1	2	3				linkshdg.	rechtshdg.
Leptonen	ν_e	ν_μ	ν_τ	0	-	1/2	1/2	-
	e	μ	τ	-1	-		1/2	-
Quarks	u	c	t	+2/3	r, g, b	1/2	1/2	-
	d	s	b	-1/3				

Tabelle 1.1: Die Leptonen und Quarks werden in Familien gruppiert, ([PRSZ09], S.173)

tismus ist es das Photon, acht Gluonen mit Farbladung (starke Ladung) sind für die starke und W^\pm - mit schwacher Ladung und Z^0 -Bosonen für die schwache Wechselwirkung verantwortlich. Als Austauschteilchen der Gravitation wird das Graviton postuliert, welches bislang noch nicht entdeckt wurde. Ein Teilchen unterliegt nur dann einer Wechselwirkung, wenn es die entsprechende Ladung trägt, so tragen Leptonen und Quarks schwache Ladung, elektrisch geladen sind Quarks und einige Leptonen, wie z.B. das Elektron und Farbgeladen sind nur Quarks. Gluonen wechselwirken auch untereinander, da sie Farbe haben, sowie die Vektorbosonen der schwachen Wechselwirkung ebenfalls untereinander interagieren. Die W - und Z -Bosonen sind mit $M_w \approx 80 \text{ GeV}/c^2$ und $M_z \approx 91 \text{ GeV}/c^2$ sehr schwer, daher können sie als virtuelle Austauschteilchen bei Streuprozessen nach der Heissenberg'schen Unschärferelation nur für sehr kurze Zeit erzeugt werden, haben also eine kurze Reichweite von 10^{-13} fm . Die Ruhemasse des Photons und der Gluonen ist 0. Allerdings haben Gluonen, im Gegensatz zu Photonen, keine unendliche Reichweite, da sie untereinander wechselwirken und reelle Quark-Antiquark Paare erzeugen können, wofür schon Abstände $\gtrsim 1 \text{ fm}$ ausreichend sind.

Wechselwirkung	koppelt an	Austauschteilchen	Masse [GeV/c^2]	J^P
stark	Farbe	8 Gluonen (g)	0	1^-
elektromagnetisch	el.Ladung	Photon (γ)	0	1^-
schwach	schwache Ladung	W^\pm, Z^0	80, 91	1^-

Tabelle 1.2: Die Eichbosonen (Austauschbosonen) der Wechselwirkung; J steht für Drehimpuls, P für Parität

1.4 Symmetrien und Erhaltungssätze

Symmetrien sind ein zentraler Punkt in der Physik, sie bedeuten nämlich, dass ein System nach bestimmten Änderungen (*Transformationen*) gleich bleibt (*invariant*). Man kennt schon aus der klassischen Physik Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls, die sich aus der Zeit-, Translations- und Rotationsinvarianz ergeben. Ausser diesen, gibt es in der Elementarteilchentheorie weitere Symmetrien:

- *Parität* P manifestiert sich in der Spiegelsymmetrie der Wellenfunktion, d.h. je nach dem ob sich das Vorzeichen ändert oder nicht, spricht man von negativer, bzw. positiver Parität. Sie bleibt bei der starken und elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten, jedoch nicht bei der Schwachen. Der geladene Strom der schwachen Wechselwirkung ist maximal paritätsverletzend, denn er koppelt nur an linkshändige Fermionen; der neutrale schwache Strom ist teilweise paritätsverletzend, da er in unterschiedlicher Stärke an rechts- und linkshändige Fermionen und Antifermionen koppelt.
- *Ladungskonjugation* \mathcal{L} wurde eingeführt um aus Teilchen Antiteilchen zu machen, indem es das Vorzeichen der Ladung umdreht. Es verhält sich bei verschiedenen Wechselwirkungen wie die Parität.
- Der starke, bzw. schwache *Isospin* charakterisiert die Zustände in den Multipletts. Der Betrag des Isospins, sowie die dritte Komponente bleiben bei der starken Wechselwirkung erhalten, elektromagnetische erhält nur die dritte Komponente. Da nur geladene Ströme der schwachen Wechselwirkung Quarkflavour ändern und Leptonen in andere Leptonen umwandeln können, bleiben die dazugehörigen Quantenzahlen (Strangeness (S), Charm (C), Isospin usw.) nur unter schwacher Wechselwirkung nicht erhalten.
- Bei allen drei Wechselwirkungen bleiben Energie, Impuls, Drehimpuls, Baryonenzahl (Baryonen=Zusammensetzung von drei Quarks), Leptonenzahlen (L_e, L_μ, L_τ), Ladung und Farbe erhalten.

Symmetrien spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Elementarteilchen, dem Standardmodell. Es umfasst die vereinheitlichte Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung und der Quantenchromodynamik, Theorie der starken Wechselwirkung, und basiert auf lokal eichinvarianten Lagrangedichten. Dieses Konzept wird ausführlicher im nächsten Abschnitt erklärt.

1.5 Eichtheorien

Das Standardmodell ist eine Feldtheorie, das heißt ihre fundamentalen Größen sind Felder in der vierdimensionalen Raumzeit. Sie entwickelte sich stürmisch, nachdem in den 70er Jahren die Renormierbarkeit der nicht-abelschen Eichtheorien bewiesen wurde. Um dem vorherigen Satz Bedeutung zu verleihen, muss man einige Begriffe klären, fangen wir mit dem Begriff der Eichtheorie an. Unter einer Eichtheorie versteht man eine Feldtheorie, die einer lokalen Eichsymmetrie genügt. Anschaulich bedeutet dies, dass die von der Theorie vorhergesagten Wechselwirkungen sich nicht ändern, wenn eine bestimmte Größe lokal frei gewählt wird. Das erste Beispiel einer erfolgreichen Eichtheorie war der Elektromagnetismus, in dem man an die Lagrangedichte des Systems die natürliche Anforderung stellte invariant unter lokaler Phasentransformation zu sein, d.h. ändert man die Phase des elektromagnetischen Feldes an einem bestimmten Ort, so bleiben die physikalischen Gesetze unverändert. Diese Anforderung

fürte zu einem neuen Vektorfeld (Eichfeld), was mit dem masselosen Photon identifiziert wurde und die Quantenelektrodynamik entstand.

Heute können alle in der Natur auftretenden Kräfte im Rahmen der Eichtheorien beschrieben werden. Die Eichtransformationen gehören bestimmten Gruppen an, wie z.B. die Phasentransformation $\exp(i\theta)$ im QED Fall der Gruppe $U(1)$ gehört. Die schwache Wechselwirkung hat die nicht-abelsche Gruppe $SU(2)$, die spezielle Gruppe aller unitären 2×2 -Matrizen deren Generatoren (Pauli-Matrizen) untereinander nicht kommutieren (nicht-abelsch). Die Symmetriegruppe der starken Wechselwirkung ist die ebenfalls nicht-abelsche $SU(3)$. Wie im Verlauf dieser Arbeit noch gezeigt wird, ergeben sich aus der Tatsache, dass die Symmetriegruppen der Quantenchromodynamik und schwachen Wechselwirkung nicht zur Klasse der abelschen Gruppen gehören, die spezifischen Wechselwirkungen zwischen den Eichbosonen. Eine weitere Forderung, die an diese Theorien gestellt wird ist Endlichkeit, insbesondere sollen alle Felder und Ableitungen die Dimension ≤ 4 haben [Kugo97], was bedeutet, dass die Theorien renormierbar sein müssen. Es wurden Theorien entwickelt, die im bemerkenswerten Einklang mit den experimentellen Befunden stehen, ein Beispiel davon ist die vereinheitlichte elektroschwache Wechselwirkung im Rahmen des Weinberg-Salam-Modells, sowie Quantenchromodynamik. Beide sind nicht-abelsche Eichtheorien oder Yang-Mills-Theorien. Die Theorie der Elementarteilchen ist also mit Hilfe des Lagrange-Formalismus aufgebaut worden, indem man bestimmte Anforderungen an die Lagrangedichte stellte und verlangte, dass diese invariant unter ihnen bleibt, mit anderen Worten, man verlangte lokale Eichinvarianz. Im nächsten Kapitel wird der Lagrange-Formalismus genauer besprochen, anschließend wird das Prinzip am Beispiel des Elektromagnetismus und der Quantenchromodynamik gezeigt. In den letzten Kapiteln wird das Konzept der spontanen Symmetriebrechung und des Higgs-Mechanismus behandelt, um das Weinberg-Salam-Modell der elektroschwachen Vereinheitlichung zu ermöglichen.

2 Lagrange-Formalismus

Die eleganteste Art Quantenfeldtheorien zu beschreiben, ist durch den Lagrange-Formalismus, der von Joseph Louis Lagrange eingeführt wurde, um die klassische Mechanik zu beschreiben. Die ersten Abschnitte über den klassischen Lagrange-Formalismus dieses Kapitels wurden mit Hilfe von [LL07] verfasst.

2.1 Hamiltonisches Prinzip

In der klassischen Mechanik ist ein geschlossenes System vollkommen durch die Angabe einer Lagrange-Funktion charakterisiert

$$L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \quad (2.1)$$

wobei $\mathbf{q} = q_1, q_2, \dots, q_s$ und $\dot{\mathbf{q}} = \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten des Systems mit s Freiheitsgraden sind. Die Bewegung zwischen zwei Punkten $\mathbf{q}(t_1)$ und $\mathbf{q}(t_2)$ verläuft so, dass das Wirkungsintegral S den kleinsten möglichen Wert annimmt

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt. \quad (2.2)$$

Das ist das Prinzip der kleinsten Wirkung oder das Hamiltonische Prinzip. Dies gilt zumindest, wenn man einen genügend kleinen Abschnitt der Bahn betrachtet, für die Bahn im Ganzen kann jedoch gezeigt werden, dass (2.2) einen extremalen Wert annimmt, nicht notwendig den Minimalen. Das Wirkungsintegral bleibt also stationär für einen bestimmten Weg im q -Raum, der durch die Bewegungsgleichungen festgelegt ist.

Um das Minimum des Integrals zu finden, wird seine Variation betrachtet (2.3), die nach Potenzen von $\delta\mathbf{q}$ und $\delta\dot{\mathbf{q}}$ entwickelt wird. Die notwendige Bedingung, dass S ein Minimum hat, ist das Verschwinden der Gesamtheit der Glieder erster Ordnung oder mit anderen Worten, die erste Variation muss null sein.

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Eine partielle Integration des zweiten Terms aus (2.3), wobei man ausnutzt, dass die Variationen der Koordinaten in den Endpunkten null sind, $\delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0$, liefert folgendes Ergebnis

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt. \quad (2.4)$$

Die erste Variation des Wirkungsintegrals soll nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung für beliebige Werte von δq_i null sein. Dies ist erfüllt, wenn der Integrand verschwindet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.5)$$

Somit hat man Differentialgleichungen gefunden, die die Koordinaten, Beschleunigungen und Geschwindigkeiten miteinander verknüpfen, wenn die Lagrange-Funktion des Systems bekannt ist. Sie stellen in der nichtrelativistischen Mechanik das Analogon zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen dar. Die Gleichung (2.5) heißt Euler-Lagrange-Gleichung.

Die Lagrange-Funktion eines Systems ist nicht eindeutig. Addiert man die totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion $f(\mathbf{q}, t)$ zu (2.1), so ergibt sich nach Einsetzen in (2.2)

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt \\ &= S + f(\mathbf{q}(t_2), t_2) - f(\mathbf{q}(t_1), t_1). \end{aligned}$$

Die Wirkungen S und S' unterscheiden sich durch ein Zusatzglied, das bei der Variation verschwindet ($\delta f(\mathbf{q}(t_2)) = \delta f(\mathbf{q}(t_1)) = 0$), so dass die Form der Bewegungsgleichungen unverändert bleibt.

Energieerhaltung

In einem geschlossenen System, wo die Teilchen nur untereinander wechselwirken, sollte man eine Lagrange-Funktion konstruieren können, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Diese Forderung folgt aus der Homogenität der Zeit.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right] \quad (2.7)$$

Die Größe, die während der Bewegung des System erhalten bleibt, heißt Energie (2.7). Der Energieerhaltungssatz gilt nicht nur für abgeschlossene Systeme, sondern auch für Systeme, die sich in einem konstanten (zeitunabhängigen) Feld bewegen. Die Lagrange-Funktion kann noch geschrieben werden als

$$L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) . \quad (2.8)$$

Setzt man nun Gleichung (2.8) in den Ausdruck für die Energie (2.7) ein, erhält man

$$E = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q}) . \quad (2.9)$$

Somit kann die kinetische Energie mit T verbunden werden, die potentielle mit V.

Definiert man jetzt noch den generalisierten Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} ,$$

so kann die Hamilton-Funktion des Systems angegeben werden, die ebenfalls der Energie entspricht

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L . \quad (2.10)$$

Die Hamilton-Funktion (2.10) hat eine große Bedeutung in der Physik, insbesondere bei dem Übergang von der klassischen in die Quantenphysik.

2.2 Lagrangedichte

Es bietet sich an den Formalismus auf kontinuierliche Koordinaten zu erweitern, wobei gleich die vierer-Vektor Schreibweise verwendet wird. Dadurch werden diskrete Koordinaten $q_i(t)$ in Felder transformiert $\phi(x^\mu) = \phi(x^0, \vec{x})$, d.h Funktionen der kontinuierlichen Parameter $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, [HM84].

$$L(q_i, \dot{q}_i) \longrightarrow \mathcal{L} = \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) \quad (2.11)$$

In Gleichung (2.11) is \mathcal{L} die Lagrangedichte, die wie folgt definiert wird

$$L = \int \mathcal{L} d^3x . \quad (2.12)$$

Oft werden die Abkürzungen für die partiellen Ableitungen benutzt

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) , \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) .$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung (2.14) kann wieder aus der Variation des Wirkungsintegrals

gewonnen werden

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (2.14)$$

Die grundlegende Eigenschaft der Felder in der Feldtheorie ist Lorenzinvarianz. Das Volumenelement aus (2.13) ist ein Lorenzskalar und ändert sich nicht unter Lorenztransformationen, damit aber auch S die selbe Invarianz zeigt, muss sich \mathcal{L} wie ein skalares Feld ändern. Die Lagrangedichte (2.11) ist Lorenzinvariant, insbesondere hängt sie in jedem Punkt der Raumzeit nur von dem Feld und seiner ersten Ableitung ab. So eine Feldtheorie heißt lokal, was sich als eine wichtige Eigenschaft des Standardmodells erweisen wird. Die Feldgleichungen (2.14) können also durch (2.13) und der Bedingung, dass das Feld für sehr große Entfernungen verschwindet, $\phi(x^\mu) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, gewonnen werden [CG07].

2.3 Felder und Feldgleichungen

Wie schon erwähnt, ist in der Feldtheorie, das Feld, welches sowohl ein skalares oder ein Vektorfeld sein kann, eine fundamentale Größe. Im Folgenden werden die Lagrangedichten reeller und komplexer skalarer, sowie des Dirac-Feldes behandelt. Das eindimensionale skalare Feld eignet sich zur Beschreibung von spinlosen Teilchen, für Fermionen ist es notwendig komplexe Dirac-Spinoren einzuführen. Im beiden Fällen bekommt man durch Anwenden der Euler-Lagrange-Gleichung bekannte Feldgleichungen: Klein-Gordon für spinlose Teilchen und die Dirac-Gleichung für Teilchen mit Spin.

2.3.1 Neutrale skalare Felder

Sei $\phi(x^\mu)$ ein skalares Feld, dann ist die allgemeinste Form, die die Lagrangedichte annehmen kann ([Kugo97], S.18)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (2.15)$$

Der erste Term heißt Bewegungsterm, $V(\phi)$ ist das Potential, das man nach Taylor entwickeln kann, wobei man die linear in ϕ auftretenden Terme verschwinden lässt.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{V^{(n)}(0)}{n!} V(\phi)^n = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{3!} g \phi^3 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 + \dots \quad (2.16)$$

Das Potential sollte spiegelsymmetrisch sein und mit der Renormierbarkeitsforderung im Einklang stehen. Für ein skalares Feld im 4-dimensionalen Raum heißt das, es soll die Dimension +1 haben. Somit ergibt sich für das gesuchte Potential

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4. \quad (2.17)$$

Die Lagrangedichte (2.15) zusammen mit dem Potential (2.17) bilden die einfachste Feldtheorie, das sogenannte $\lambda\phi^4$ -Modell.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (2.18)$$

Die Feldgleichungen erhält man, indem man (2.18) in die Euler-Lagrange (2.14) einsetzt

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{6}\phi^3 - \partial_\mu\partial^\mu\phi \\ (\square + \mu^2)\phi &= -\frac{\lambda}{6}\phi^3. \end{aligned} \quad (2.19)$$

In (2.19) wurde der D'Alembert'sche Operator $\square = \partial_\mu\partial^\mu$ verwendet. Feldtheoretisch ist μ die Masse und $-\frac{\lambda}{6}\phi^4$ der Wechselwirkungsterm. Im Falle eines freien Teilchens mit verschwindender Wechselwirkung wird aus (2.19) die *Klein-Gordon-Gleichung*, eine relativistische Feldgleichung, welche die Kinematik freier skalarer Felder bzw. Teilchen (d.h. Spin 0) bestimmt

$$(\square + \mu^2)\phi = 0. \quad (2.20)$$

2.3.2 Komplexes skalares Feld

Die Lagrangedichte eines komplexen skalaren Feldes hat in dem $\lambda\phi^4$ -Modell folgende Form ([Kugo97], S.19)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - \mu^2\varphi^*\varphi - \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2 \quad (2.21)$$

wobei jetzt φ ein komplexes Feld ist und φ^* das komplex-konjugierte davon. Die Form der Lagrangedichte (2.21) ist auf (2.18) zurückzuführen, da man φ mit reellen Komponenten ausdrücken kann $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(\phi_1) + \mathcal{L}(\phi_2), \quad (2.22)$$

wodurch man für ein freies Teilchen ($\frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2 = 0$) auf dasselbe Ergebnis der Klein-Gordon-Gleichung wie in (2.20) kommt (statt ϕ wird $(\phi_1 + \phi_2)$ verwendet).

Das Neue an der Lagrangedichte (2.21) ist, dass sie unter U(1)-Transformationen invariant bleibt, d.h. Transformationen der Form

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{i\theta}\varphi(x), \quad \varphi^*(x) \rightarrow \varphi^{*'}(x) = e^{-i\theta}\varphi^*(x). \quad (2.23)$$

2.3.3 Dirac Gleichung

Diracs Idee Wie schon erwähnt, ist die Klein-Gordon-Gleichung als relativistische Schrödinger-Gleichung anzusehen. Sie hat aber das Problem, dass sie sowohl positive, als auch negative Energiewerte hat, wobei die letzteren ein große Umständlichkeit waren. Dies würde nämlich bedeuten, dass Teilchen unendlich hohe negative Energie haben können und damit verbun-

dene negative Wahrscheinlichkeitsdichten, was mit dem damaligen physikalischen Bild nicht vereinbar war. Dirac wollte daher das Problem lösen, indem er die Klein-Gordon-Gleichung für Elektronen linear in $\partial/\partial t$ und ∇ formulierte [HM84]. Trotzdem blieb die negative Energie vorhanden. Er erklärte dies mit Hilfe des Pauli Prinzips: alle negativen Zustände des Elektrons sind besetzt und das Vakuum ist ein unendlicher „See“ von Elektronen mit $E < 0$. Wenn man ein Elektron anregt, erhält es positive Energie, wodurch an der bestimmten Stelle im Niveau ein Loch entsteht. Die Abwesenheit des Teilchens mit negativer Energie und Ladung $-e$ ist erklärt durch Anwesenheit seines Antiteilchens mit positiver Energie und entgegengesetzter Ladung $+e$. Die Theorie ist auf Bosonen nicht anwendbar, da es bei ihnen kein Ausschlussprinzip gibt. In der Quantenfeldtheorie werden die Zustände negativer Energie als Erzeugungsoperatoren für Antiteilchen positiver Energie interpretiert, wodurch der Dirac-See unnötig wird.

Dirac postulierte die allgemeine Form des Hamilton Operators für seine Interpretation der relativistischen Schrödinger-Gleichung [HM84]

$$H\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} + \beta m)\psi. \quad (2.24)$$

In der obigen Gleichung sind $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und β Matrizen, \mathbf{P} der Impuls und m die Masse. Quadriert man H und vergleicht es mit der relativistischen Energie-Impuls Beziehung $H^2\psi = (\mathbf{P}^2 + m^2)\psi$, erhält man nötige Eigenschaften der Matrizen.

$$\begin{aligned} H^2\psi &= (\alpha_i^2 P_i^2 + (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) P_i P_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) P_i m + \beta^2 m^2) \psi \\ &\Rightarrow \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = \mathbf{1}, \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Die niedrigste Dimension der Matrizen, die diese Eigenschaften erfüllen ist 4×4 . Die Dirac-Pauli Darstellung lautet

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

mit $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, die drei Pauli Matrizen und $\mathbf{1}$ ist die Einheitsmatrix. Der vierkomponentige Vektor ψ heißt Dirac-Spinor. Er hat die allgemeine Form

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix},$$

wobei ψ_1 und ψ_2 beide zweikomponentige komplexe Vektoren sind. Um die kovariante Form zu erhalten, wird (2.24) von der linken Seite mit β multipliziert

$$\begin{aligned} i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -i\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + m\psi \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Gleichung (2.27) stellt die bekannte Dirac-Gleichung da. Die vier Dirac-Matrizen γ^μ sind wie folgt definiert:

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\alpha). \quad (2.28)$$

Man will jetzt eine Lagrangedichte konstruieren, die die Dirac-Gleichung liefert, da sich diese besonders gut zur Beschreibung von Fermionen eignet. Dazu muss zuerst die adjungierte Version des Spinors ψ definiert werden, $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$. Die gesuchte Lagrangedichte eines Dirac Feldes lautet

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (2.29)$$

2.4 Noether-Theorem

Im Kapitel 1 (Einleitung) wurde erwähnt, wie wichtig Symmetrien in der Physik sind. Energieerhaltung folgt aus der Zeitinvarianz, Impulserhaltung aus der Translationsinvarianz, Eichsymmetrien sind die Bausteine des Standardmodells. Das Noether-Theorem macht die Aussage, dass jeder Symmetrie in der Wirkung eine Erhaltungsgröße in der Theorie entspricht.

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_i(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i(x))} \right) = 0 \quad (2.30)$$

Allgemein betrachtet man infinitesimale Transformationen der Felder und von ihnen beeinflusste Änderung der Lagrangedichte [Kugo97]

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = \phi + \epsilon G(\phi) \\ \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \epsilon \partial_\mu X^\mu(\phi) \quad \text{oder :} \end{aligned} \quad (\text{I})$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \quad (\text{II}) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \epsilon G(\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \epsilon G(\phi) \quad , \text{ mit Euler-Lagrange Beziehung} \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \epsilon G(\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \epsilon G(\phi). \end{aligned}$$

In den obigen Gleichungen steht ϵ für einen Parameter, G eine bestimmte Änderung des Feldes und $\epsilon \partial_\mu X^\mu(\phi)$ für die Änderung der Lagrangedichte. Vergleicht man (I) und (II) unter der Annahme, dass der Transformationsparameter G nicht direkt von x abhängt, bekommt man ein Erhaltungsgesetz [Kugo97]

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} G(\phi) - X^\mu(\phi) \right) = 0 \quad \equiv \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.31)$$

Der vierkomponentige Vektor j^μ ist der Noetherstrom. Eine weitere wichtige Erhaltungsgröße ist die Ladung Q , die man aus dem Strom erhält.

$$Q = \int d^3x j^0(x), \quad \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2.32)$$

3 Quantenelektrodynamik und Quantenchromodynamik

In diesem Kapitel wird an Beispielen gezeigt, wie man von der allgemeinen Form der Lagrangedichte eines Dirac-Feldes zu den konkreten Lagrangedichten der Quantenelektrodynamik und Quantenchromodynamik kommt, aus denen sich die Phänomenologien der elektromagnetischen und starken Wechselwirkung ergeben.

3.1 Elektromagnetismus

Um aus der Sicht der Eichtheorien Elektromagnetismus beschreiben zu können, muss zuerst eine passende Lagrangedichte gefunden werden, das Prinzip ist ausführlich in ([Kugo97], S.28-29) beschrieben. Da es sich bei Elektronen um Fermionen handelt, geht man von der Lagrangedichte eines Dirac-Feldes aus (2.29). Sie ist invariant unter globalen Phasentransformation $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta}\psi(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi'(x) \\ &= e^{-i\theta} \bar{\psi}(x) \left(i\gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\theta} \psi(x)) - m e^{i\theta} \psi(x) \right) \\ \mathcal{L}' &= \mathcal{L} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Diese Invarianz impliziert, dass sich das Feld überall im Raum auf die selbe Art ändert [Kugo97], was aber etwas unphysikalisch erscheint. Man fordert daher Invarianz der Lagrangedichte unter lokalen Phasentransformationen, indem man die Phase θ ortsabhängig macht $\theta \rightarrow \theta(x)$. Solche Transformationen werden U(1)-Symmetrietransformationen genannt, da $e^{i\theta}$ ein Element dieser unitären abelschen Gruppe ist. Möchte man nun die Invarianz der lokal transformierten Lagrangedichte prüfen, stößt man auf ein Problem - sie ist nicht mehr invariant.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}(x) \left[i\gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\theta(x)} \psi(x)) - m e^{i\theta(x)} \psi(x) \right] \\ &= \bar{\psi}(x) (-\gamma^\mu \partial_\mu \theta(x) + i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \\ \mathcal{L}' &\neq \mathcal{L} \end{aligned}$$

Der Term $\gamma^\mu \partial_\mu \theta(x)$ zerstört die Invarianz. Um diese wieder herzustellen, muss man den Ableitungsterm modifizieren, was zu einer sogenannten kovarianten Ableitung führt. Sie wird mit

Hilfe eines neu eingeführten vektoriellen Eichfeldes A_μ definiert

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (3.2)$$

Das Eichfeld transformiert sich folgendermaßen

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)v. \quad (3.3)$$

Führt man jetzt bei der kovarianten Ableitung die Eichtransformation durch, kommt es zu keinen Asymmetrien mehr

$$\begin{aligned} D'_\mu\psi'(x) &= (\partial_\mu - ieA'_\mu(x))\psi'(x) \\ &= \left[\partial_\mu - ie \left(A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \right) \right] e^{i\theta(x)}\psi(x) \\ &= (i\partial_\mu\theta(x) + \partial_\mu - ieA_\mu(x) - i\partial_\mu\theta(x)) e^{i\theta(x)}\psi(x) \\ D'_\mu\psi'(x) &= e^{i\theta(x)}D_\mu\psi(x). \end{aligned}$$

Die Transformationen der Felder $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$ und $A_\mu \rightarrow A_\mu + 1/e \partial_\mu\theta$ nennt man Eichtransformationen. Die lokal eichinvariante Lagrangedichte bekommt man nun, indem man die normale durch die kovariante Ableitung ersetzt.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Im obigen Ausdruck ist der neue Term $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ aufgetaucht. Er legt die Wechselwirkung des Vektorfeldes A_μ mit dem Dirac-Teilchen ψ fest, im konkreten Falle des Elektromagnetismus bedeutet dies, dass das elektromagnetische Feld des ungeladenen Photons A_μ an das Elektron mit Ladung $-e$ koppelt. Möchte man also A_μ als das Photon-Feld identifizieren, muss man zu dem Ausdruck (3.4) seine kinetische Energie addieren. Diese soll unter der Transformation (3.3) invariant sein, also wird aus dem Eichfeld eine entsprechende Größe konstruiert, der Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.5)$$

womit der kinetische Term des Eichfelds zu

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.6)$$

wird. Vereinigt man alle gewonnen Terme, nimmt die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik die Form (3.7) an.

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.7)$$

\mathcal{L}_{QED} beinhaltet den Bewegungsterm des Elektrons, sowie seine Masse m , den Wechselwirkungsterm zwischen Photon und Elektron und kinetische Energie des Photon-Feldes. Aber nicht seine Masse. Würde man die Masse des Photons addieren wollen, etwa einen Term wie $1/2 m_A^2 A_\mu A^\mu$, wäre \mathcal{L}_{QED} unter Eichtransformationen nicht mehr invariant. Um das zu sehen reicht es, den neuen Massenterm auf Invarianz zu prüfen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_A^2 A'_\mu A'^\mu &= \frac{1}{2} m_A^2 \left[\left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right) \left(A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} m_A^2 \left[A_\mu A^\mu + \frac{1}{e} (A_\mu \partial^\mu + A^\mu \partial_\mu) \theta + \frac{1}{e^2} \partial_\mu \partial^\mu \theta \right] \\ &\neq \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu \end{aligned}$$

Der Massenterm des Photons ist nicht invariant unter Eichtransformationen und kann nicht zu der Lagrangedichte \mathcal{L}_{QED} addiert werden, das Photon bleibt also masselos. Um kurz zusammenzufassen: Man hat an die allgemeine Lagrangedichte eines Dirac-Feldes die intuitive Forderung lokaler Eichinvarianz gestellt. Um die Invarianz zu gewährleisten, führte man ein neues vektorielles Eichfeld $A_\mu(x)$ ein, mit dessen Hilfe man die kovariante Ableitung definierte. Das Eichfeld darf keine Masse haben, braucht aber kinetische Energie, so wurde der Feldstärketensor eingeführt.

Auf eine analoge Weise wird die Lagrangedichte der Quantenchromodynamik, die die starke Wechselwirkung der Quarks und Gluonen beschreibt, gewonnen.

3.2 Quantenchromodynamik

Analog zur QED, die nur die Wechselwirkung elektrisch geladener Teilchen betrifft, behandelt die QCD ausschließlich Teilchen mit „Farbladung“, Quarks. Quarks können drei verschiedene Farbladungen haben, die als rot, grün und blau bezeichnet werden. Dementsprechend wird die grundlegende Lagrangedichte (2.29) zu ([HM84], S. 317)

$$\mathcal{L} = \bar{q}_j (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.8)$$

dabei sind q_1, q_2, q_3 die Felder der drei Quarkfarben. Die Vorgehensweise ist die selbe, wie im vorherigen Abschnitt, der Unterschied liegt in der Symmetriegruppe der Eichtransformationen: an Stelle von $U(1)$ tritt die nicht-abelsche $SU(3)$. Ihre Eigenschaften werden im Laufe des Textes erläutert.

Man betrachtet wieder lokale Eichtransformationen einer Farbe

$$q(x) \rightarrow U(x)q(x) = e^{i\alpha_a(x)T^a} q(x). \quad (3.9)$$

$U(x)$ ist eine unitäre 3×3 -Matrix, die allgemein als $U(x) = e^{i\alpha_a(x)T^a}$ ausgedrückt werden kann, wobei $\alpha_a(x)$ die reellen Parameter sind und T_a acht hermitesche Gell-Mann-Matrizen

(die Wahl nach Konvention), die Erzeugenden der Gruppe SU(3). Über den Index a wird summiert. Das SU(3) nicht-abelsch ist, bedeutet, dass ihre Erzeugenden nicht miteinander kommutieren

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad f_{abc} : \text{reelle Strukturkonstante der Gruppe.} \quad (3.10)$$

Die Invarianz der Lagrangedichte (3.8) ist mit solchen lokalen Transformationen gebrochen, denn [HM84]

$$\partial_\mu q'(x) = \underbrace{[i\partial_\mu \alpha_a(x)T_a + \partial_\mu]}_{\text{bricht Invarianz}} e^{i\alpha_a(x)T_a} q(x).$$

Man führt, um das Problem zu lösen, acht Eichfelder G_μ^a ein, acht, weil man genau so viele Erzeugende der Symmetriegruppe hat. Sie transformieren sich analog zu der Transformation des Photon-Feldes (3.3)

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha_a(x) - f_{abc}\alpha_b G_\mu^c. \quad (3.11)$$

Der dritte Term $f_{abc}\alpha_b G_\mu^c$ kommt hinzu, weil die Gruppe SU(3) nicht-abelsch ist. Somit kann man die kovariante Ableitung definieren, die in der Lagrangedichte die normale ersetzt

$$D_\mu = \partial_\mu + igT_a G_\mu^a. \quad (3.12)$$

Was noch fehlt ist der kinetische Term des Eichfeldes, der durch Feldstärketensoren definiert wird. Der Feldstärketensor ist im Falle der SU(3)

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - gf_{abc}G_\mu^b G_\nu^c. \quad (3.13)$$

Der Term $gf_{abc}G_\mu^b G_\nu^c$ taucht auf, wieder wegen der Tatsache, dass die Elemente der SU(3) nicht kommutieren. Seine Bedeutung ist von großer Wichtigkeit, es besagt nämlich, dass die Eichteilchen untereinander wechselwirken mit Kopplungskonstante g . Die Lagrangedichte der Quantenchromodynamik (für eine Farbe und Flavour) lautet [HM84]

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) - g(\bar{q}\gamma^\mu T_a q)G_\mu^a - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Da die Quarks drei Farben aufnehmen können, braucht man acht Gluonen, jeweils mit verschiedenen Farbladungen, um die Wechselwirkung zwischen Quarks zu übermitteln. Dies wird durch die Eichtheorie mit SU(3)-Symmetriegruppe gegeben. Wie im Falle des Elektromagnetismus, verbietet die Erhaltung der Invarianz der Lagrangedichte Gluonen-Massen. Die Tatsache, dass Gluonen selbst Farbladung tragen, wird aus dem kinetischen Term sichtbar ($gf_{abc}G_\mu^b G_\nu^c$), der auch Wechselwirkungen zwischen den Gluonen selbst impliziert. Insbesondere erhält man Terme mit gG^3 und g^2G^4 , also 3-Gluon- und 4-Gluon-Vertices. Die Theorien die nicht-abelsche Eichinvarianz betrachten werden Yang-Mills-Theorien genannt.

4 Spontane Symmetriebrechung

Im vorherigen Kapitel wurde anhand von Beispielen gezeigt, welche Folgen das Verlangen einer lokalen Eichinvarianz an die allgemeine Lagrangedichte hat, es haben sich nämlich die Lagrangedichten der QED und QCD ergeben. In beiden Fällen sind die Eichteilchen, das Photon und die Gluonen masselos, was den experimentellen Beobachtungen auch entspricht. Schon vor der Entdeckung der W^\pm - und Z^0 -Bosonen in den 80er Jahren am CERN, war akzeptiert, dass die schwache Wechselwirkung von schweren Austauschpartikeln vermittelt wird. Einfache Addition eines Massenterms wie $M^2 W^\mu W_\mu$ zu der Lagrangedichte ist auszuschließen, da es die Symmetrie bricht. Um das Problem der Bosonen-Massen zu lösen, benutzt man ein Konzept aus der Physik der Phasenübergänge, der unsymmetrische Grundzustände des Vakuums postuliert - *Spontane Symmetriebrechung*.

4.1 Das Konzept

Der Effekt der spontanen Symmetriebrechung wird am Beispiel des Meissner-Ochsenfeld-Effekts bei Supraleitern veranschaulicht, um auf eine vereinfachte Weise die Erzeugung einer Masse, durch unsymmetrische Grundzustände des Vakuums zu beschreiben. Als Hilfe wurde das Standardwerk [PRSZ09] benutzt. Oberhalb einer Sprungtemperatur breiten sich Magnetfelder ungehindert im Leiter aus. Beim Absenken der Temperatur unterhalb dieser, also beim Übergang in die supraleitende Phase, bilden die Leitungselektronen korrelierte Cooper-Paare, die einen Strom erzeugen, so dass das Magnetfeld aus dem Leiter „verdrängt“ wird. Es kann nur von der Oberfläche aus exponentiell abfallend in den Leiter hineindringen. Ein Beobachter im Supraleiter würde dem Magnetfeld eine endliche Reichweite zuschreiben und dem Photon daher eine endliche Masse. In der supraleitenden Phase haben die Leitungselektronen (Cooper-Paare) eine definierte Energie des supraleitenden Grundzustands, was für den Beobachter im Leiter der Grundzustand des Vakuums ist. Die Symmetriebrechung des Grundzustandes findet in der Hinsicht statt, dass die Leitungselektronen jetzt, wie schon erwähnt, korrelierte Cooper-Paare bilden, sie können sich nicht mehr frei im Raum orientieren, sondern ihre Phase hängt von der Phase der Anderen ab - Grundzustandssymmetrie gebrochen. Die Massen der W^\pm - und Z^0 -Bosonen werden auf eine analoge Weise erklärt, d.h. wir befinden uns unterhalb einer bestimmten Energie, wo die Austauschpartikeln der schwachen Wechselwirkung Masse haben, insbesondere absorbieren sie Goldstone-Moden des Higgs-Feldes und werden massiv. Diese Theorie heißt Higgs-Mechanismus, er wurde von Englert, Brout, Higgs, Guralnik, Hagen und Kibble postuliert.

4.2 Das Nambu-Goldstone-Modell

Das einfachste Beispiel für ein Modell mit spontaner Symmetriebrechung ist das Nambu-Goldstone-Modell [Kugo97]. Dazu nimmt man die Lagrangedichte eines einfachen komplexen skalaren Feldes (2.21) und ändert das Vorzeichen des Massenterms. Somit ändert sich das Minimum der Potentialfunktion, d.h. der Vakuumzustand.

$$V(\varphi) = -\mu^2|\varphi|^2 + \frac{\lambda}{2}|\varphi|^4 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d|\varphi|} = 0 &\Rightarrow -2\mu^2|\varphi| + 2\lambda|\varphi|^3 = 0 \\ &|\varphi|(-\mu^2 + \lambda|\varphi|^2) = 0 \\ &|\varphi| = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = \frac{v}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Das Extremum bei $\varphi = 0$ ist instabil. Denkt man sich einen dreidimensionalen Raum, wo die x- und y-Achsen den $\text{Re}\varphi$ und $\text{Im}\varphi$ entsprechen und die z-Achse das Potential ist, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, bilden die möglichen Grundzustände einen Kreis am Bodenring der „Weinflasche“ mit Radius $v/\sqrt{2}$. Wählt man irgendeinen Punkt auf diesem Kreis als stabiles Vakuum, dann bleibt dieser unter einer U(1)-Transformation nicht erhalten, da er sich beliebig auf dem Kreis drehen kann. Die U(1)-Symmetrie des Vakuums ist also gebrochen. Man kann nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Vakuumzustand $\varphi(x) = v$ an der reellen Achse nehmen und ihn um Fluktuationsterme, die sich aus der Störungstheorie ergeben, erweitern.

$$\varphi_v(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \psi(x) + i\chi(x)) \quad (4.2)$$

Die Felder $\psi(x)$ und $\chi(x)$ sind reell.

Das Einsetzen von (4.2) in die Lagrangedichte eines komplexen skalaren Feldes (2.21) ergibt, nach dem kompletten Ausklammern:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &\frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{\mu^2}{2}v^2 + \mu^2v\psi + \frac{\mu^2}{2}\psi^2 + \frac{\mu^2}{2}\chi^2 - \frac{\lambda}{8}v^4 - \frac{\lambda}{2}v^3\psi \\ &- \frac{3}{4}\lambda v^2\psi^2 - \frac{\lambda}{2}v\psi^3 - \frac{\lambda}{8}\psi^4 - \frac{\lambda}{4}v\chi^2 - \frac{\lambda}{2}v\chi^2\psi - \frac{\lambda}{4}\chi^2\psi^2 - \frac{\lambda}{8}\chi^4. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Substituiert man $v = \sqrt{2\mu^2/\lambda}$, heben sich die Massenterme in χ^2 auf, sowie die Terme linear in ψ . Nach Gruppierung der restlichen Terme erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &-V_0(v) + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\psi)^2 - 2\mu^2\psi^2] + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 \\ &- \frac{\sqrt{2\mu^2\lambda}}{2}\psi(\psi^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{8}(\psi^2 + \chi^2)^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Somit hat das Feld $\psi(x)$ eine Masse, nämlich $m^2 = 2\mu^2$ mit richtigem Vorzeichen, $\chi(x)$

ist dagegen masselos und entspricht dem Nambu-Goldstone-Teilchen, das als Folge der spontan gebrochenen U(1)-Symmetrie auftritt. Das Photon und postulierte Graviton kann man als solche Teilchen interpretieren, sie treten bei spontaner Symmetriebrechung auf, müssen aber nicht beobachtbar sein, da diese nicht zum physikalischen Teil des Spektrums gehören müssen.

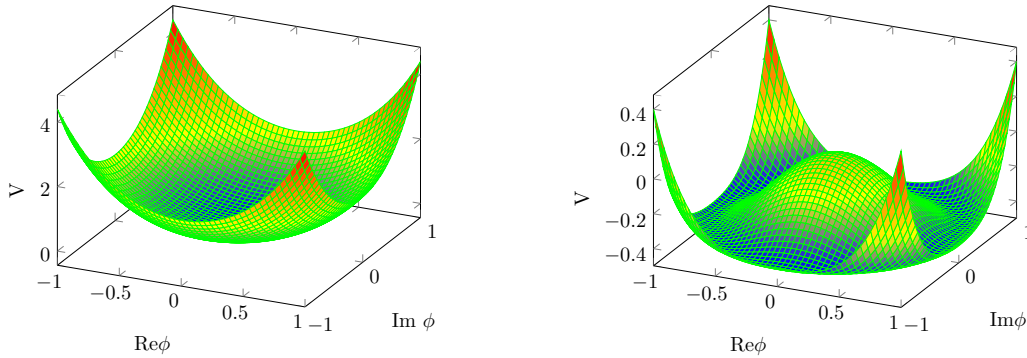


Abbildung 4.1: *Links*: Das ungebrochene Potential ($\mu^2 > 0$). *Rechts*: Das gebrochene Potential oder Higgs-Potential, $|\varphi| = v/\sqrt{2}$ bildet einen Ring am Boden des Potentials

4.3 Higgs-Mechanismus

Das Goldstone-Theorem lässt sich nur auf globale Symmetrien anwenden, die Brechung lokaler Symmetrien wird mit dem Higgs-Mechanismus beschrieben, nachdem bei den Eichfeldern keine masselosen Goldstone-Teilchen auftreten. Würde man in die lokal U(1)-invariante Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.5)$$

den Vakuumswert, wie im Goldstone-Theorem (4.2) einführen, so würde man einen zusätzlichen Freiheitsgrad durch die auftretende Masse des Eichfeldes A_μ bekommen und dem einen Freiheitsgrad des masselosen Teilchens, womit die endliche Lagrangedichte mehr Freiheitsgrade hätte als die ursprüngliche. Dies sollte wegen einer einfachen linearen Verschiebung des Feldes nicht passieren, weswegen der Vakuumzustand anders parametrisiert wird:

$$\phi_v(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h(x)) e^{i\pi(x)/v} \quad (4.6)$$

Der kinetische Term wird mit dem Vakuumzustand zu:

$$\begin{aligned}
 (D^\mu \phi_v)^\dagger (D_\mu \phi_v) &= (\partial^\mu + igA^\mu) \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h(x)) e^{-i\pi(x)/v} \cdot (\partial_\mu - igA_\mu) \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h(x)) e^{i\pi(x)/v} \\
 &= \frac{1}{2} \left(-i\partial^\mu \pi + \partial^\mu h - \frac{i}{v} h \partial^\mu \pi + igA^\mu (v + h) \right) e^{-i\pi/v} \cdot \\
 &\quad \left(i\partial_\mu \pi + \partial_\mu h + \frac{i}{v} h \partial_\mu \pi - igA_\mu (v + h) \right) e^{i\pi/v} \\
 \text{Linke Klammer :} & \qquad \qquad \qquad \text{Rechte Klammer :} \\
 -i\partial^\mu \pi \left(1 + \frac{h}{v} \right) + \partial^\mu h + igA^\mu (v + h) & \quad i\partial_\mu \pi \left(1 + \frac{h}{v} \right) + \partial_\mu h - igA_\mu (v + h) \\
 \partial^\mu h - i \left[\partial^\mu \pi \left(1 + \frac{h}{v} \right) - gA^\mu (v + h) \right] & \quad \partial_\mu h + i \left[\partial_\mu \pi \left(1 + \frac{h}{v} \right) - gA_\mu (v + h) \right] \\
 \Rightarrow (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) &= (\partial_\mu h)^2 - i^2 \left(\partial_\mu \pi \left(1 + \frac{h}{v} \right) - gA_\mu (v + h) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2} g^2 (h + v)^2 \left(A_\mu - \frac{\partial_\mu \pi}{gv} \right)^2. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Lagrangedichte (4.5):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2} g^2 (v + h)^2 \left(A_\mu - \frac{\partial_\mu \pi}{gv} \right)^2 + \frac{\mu^2}{2} (v + h)^2 - \frac{\lambda}{8} (v + h)^4 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{4.8}$$

Substituiert man $gv \equiv M$ und $\sqrt{2\mu^2} \equiv m$ in die obige Lagrangedichte, erhält sie nach Gruppierung der entsprechenden Terme die Form [Kugo97]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu h(x))^2 - m^2 h(x)^2] + \frac{1}{2} M^2 \left(1 + \frac{g}{M} h(x) \right)^2 \left(A_\mu(x) - \frac{1}{M} \partial_\mu \pi(x) \right)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} m \sqrt{\lambda} h(x)^3 - \frac{\lambda}{8} h(x)^4 - V_0(v) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Das Feld $h(x)$ hat die Masse m , $\pi(x)$ ist ohne Masse geblieben und ist somit ein Kandidat für das Goldstone-Teilchen. Es tritt allerdings in Kombination mit dem Eichfeld $A_\mu(x)$ in $(A_\mu - 1/M \partial_\mu \pi)^2$ auf. Man kann daher ein neues Vektorfeld einführen, U_μ , das sich analog zur Transformation des Eichfeldes (3.3) aus Kapitel 3 ändert.

$$U_\mu \equiv A_\mu - \frac{1}{M} \partial_\mu \pi, \quad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu \tag{4.10}$$

Das masselose Feld $\pi(x)$ ist somit weggeicht und tritt nicht mehr in der Lagrangedichte auf, wodurch das neue Eichfeld U_μ die Masse M erhalten hat. Man hat also das Eichfeld A_μ gemäß (4.10) transformiert, $A_\mu \rightarrow U_\mu$, damit hat das masselose A_μ das Goldstone-Teilchen absorbiert und ist zum massiven Eichfeld geworden. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist somit konstant geblieben. Dies nennt man den Higgs-Mechanismus.

4.4 Brechung der SU(2)-Symmetrie

Die spontane Brechung der lokalen SU(2)-Symmetrie erfolgt auf dieselbe Weise, wie im U(1)-Fall, nur dass hier der allgemeine Zustand ein 2-komponentiger Spinor ist.

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}, \quad \text{wobei die Felder } \phi_A \text{ und } \phi_B \text{ aus reellen Feldern bestehen :} \quad (4.11)$$

$$\phi_A = \phi_1 + i\phi_2$$

$$\phi_B = \phi_3 + i\phi_4$$

Die Lagrangedichte hat die bekannte Form

$$\mathcal{L} = (D^\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} \quad (4.12)$$

Der Feldstärketensor $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ ist aus dem neuen Eichfeld \mathbf{W}_μ , das eine 2×2 -Matrix ist, zusammengesetzt. Seine Form wird im nächsten Kapitel gezeigt. Als Minimum des Potentials erhält man wieder $|\Phi| = \sqrt{\mu^2/\lambda} = v/\sqrt{2}$. Man wählt nun den Vakuumzustand, so dass $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$ und erweitert ihn um Fluktuationsterme mit derselben Parametrisierung wie im vorherigen Abschnitt.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}(x)/v}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1(x) \\ \pi_2(x) \\ \pi_3(x) \end{pmatrix}, \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Die Felder $\pi_i(x)$ sind reell, σ_i sind die Pauli-Matrizen. Es ist ausreichend, infinitesimal kleine Schwankungen um den Grundzustand zu betrachten, so dass der obige Zustand nach Taylorentwicklung zur ersten Ordnung näherungsweise geschrieben werden kann als:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pi_2 + i\pi_1 \\ v + h - i\pi_3 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Es wird wieder zuerst der Bewegungsterm berechnet. Da er sehr umfangreich ist, wird hier nur die ausgeklammerte Version von $D_\mu \Phi$ gezeigt. Den Ausdruck für $(D^\mu \Phi)^\dagger$ erhält man durch komplexe Konjugation und Heben der Indizes. Wie man sehen wird, wird der Bewegungsterm einige neue Terme bekommen, deren Bedeutung im nächsten Kapitel erläutert wird.

$$D_\mu \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu - ig' \mathbf{W}_\mu(x)) \begin{pmatrix} \pi_2(x) + i\pi_1(x) \\ v + h(x) - i\pi_3(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_\mu \pi_2 + i\partial_\mu \pi_1 - ig' W_\mu^3 (\pi_2 - i\pi_1) - ig' (W_\mu^1 + W_\mu^2)(v + h) - g' \pi_3 (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \\ \partial_\mu h - i\partial_\mu \pi_3 - ig' (W_\mu^1 + iW_\mu^2)(\pi_2 + i\pi_1) + ig' W_\mu^3 (v + h) + g' W_\mu^3 \pi_3 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Somit folgt für den Bewegungsterm [Kugo97]

$$\begin{aligned}
 (D^\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{g'^2 v^2}{8} \left(\vec{W}_\mu - \frac{2}{g'v} \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \right)^2 + \frac{g'^3}{4} \vec{W}_\mu^2 h \\
 &+ \frac{g'}{2} \vec{W}_\mu (\boldsymbol{\pi} \partial_\mu h - h \partial_\mu \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\pi}) + \frac{g'^2}{8} \vec{W}_\mu (h^2 + \boldsymbol{\pi}^2)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Der neue Ausdruck $\vec{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$ steht für einen dreikomponentigen Vektor, \mathbf{W}_μ hingegen ist eine hermitesche 2×2 -Matrix. Der Vollständigkeit halber wird auch das Potential ausführlich hingeschrieben. Das Einsetzen des Vakuums (4.14) ergibt somit:

$$\begin{aligned}
 -V(\Phi) &= \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 = \mu^2 (\pi_2^2 + \pi_1^2 + (v+h)^2 + \pi_3^2) - \frac{\lambda}{2} (\boldsymbol{\pi}^2 + (v+h)^2)^2 \\
 &= \frac{\mu^2}{2} \boldsymbol{\pi}^2 + \frac{\mu^2 v^2}{2} + \mu^2 v h + \frac{\mu^2 h^2}{2} - \frac{\lambda}{8} \boldsymbol{\pi}^4 - \frac{\lambda}{4} v^2 \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{\lambda}{2} v h \boldsymbol{\pi}^2 \\
 &- \frac{\lambda}{4} h^2 \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{\lambda}{8} v^4 - \frac{\lambda}{2} h v^3 - \frac{3}{4} \lambda v^2 h^2 - \frac{\lambda}{2} v h^3 - \frac{\lambda}{8} h^4 \\
 \Rightarrow -V(\Phi) &= -\frac{1}{2} m^2 h^2 - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} m h (h^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{8} (h^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 - V_0(v).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Mit der Masse $m = \sqrt{2\mu^2}$. Substituiert man $M = g'v/2$ in (4.16), ergibt das Zusammensetzen von Bewegungsterm und Potential die komplette Lagrangedichte der gebrochenen SU(2)-Symmetrie (4.18), ([Kugo97], S. 273). Man sieht, dass das Higgs-Feld $h(x)$ die Masse m erhalten hat und das vektorielle, früher masselose \mathbf{W}_μ hat durch die Transformation $\mathbf{W}_\mu \rightarrow \vec{W}_\mu - 1/M \partial_\mu \boldsymbol{\pi}$, die Masse M bekommen. Insbesondere sind es die drei Felder $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3$, die die drei reellen, masselosen π_1, π_2, π_3 absorbierten und dadurch massiv wurden.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu h)^2 - m^2 h^2] + \frac{1}{2} M^2 \left(\vec{W}_\mu - \frac{1}{M} \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \right)^2 + \frac{g'}{2} \vec{W}_\mu (\boldsymbol{\pi} \partial_\mu h - h \partial_\mu \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\pi}) \\
 &- \frac{\sqrt{\lambda}}{2} m h (h^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + \frac{g'}{2} h M \vec{W}_\mu^2 + \frac{g'^2}{8} \vec{W}_\mu (h^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{8} (\boldsymbol{\pi}^2 + h^2)^2 - V_0(v) \\
 &- \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

5 Die elektroschwache Wechselwirkung

Die grundlegende Idee des Standardmodells ist die Konstruktion einer Lorenzinvarianten Lagrangedichte, die auch unter lokalen Eichtransformationen der relevanten Symmetriegruppe invariant bleibt. In den vorherigen Kapiteln wurde die Lagrangedichte der elektromagnetischen und der starken Wechselwirkung hergeleitet, was bleibt ist die schwache. Bei der Konstruktion möchte man die schwache mit der elektromagnetischen Wechselwirkung in einer einheitlichen Lagrangedichte verbinden, die dann unter lokaler $U(1)_Y$ Symmetrietransformationen der schwachen Hyperladung und $SU(2)_L$ -Transformationen des schwachen Isospins invariant ist. Das Modell der elektroschwachen Vereinheitlichung wurde in den 60er Jahren von Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg theoretisch beschrieben, trägt auch den Namen Weinberg-Salam-Modell. Die relevante Symmetriegruppe ist die $SU(2) \times U(1)$. Vor der schrittweisen Konstruktion dieser Lagrangedichte, möchte ich ein paar Hintergrundinformationen zu der schwachen Wechselwirkung geben, die ich mit Hilfe von [HM84] zusammengefasst habe.

5.1 Schwache Wechselwirkung

Aus dem Elektromagnetismus ist die Wechselwirkung zwischen Elektron und Photon schon bekannt, sie kann geschrieben werden als

$$-ie j_\mu^{em} A^\mu = -ie(\bar{\psi} \gamma_\mu \mathbf{Q} \psi) A^\mu. \quad (5.1)$$

In Gleichung (5.1) ist j_μ^{em} die vierkomponentige Stromdichte, A_μ das Eichfeld des Photons, ψ der Zustand (Dirac-Spinor). Die neue Größe \mathbf{Q} ist der Ladungsoperator, dessen Eigenwerte der Ladung der relevanten Teilchen entsprechen, für das Elektron ist $Q = -1$. Um mit einem analogen Ausdruck schwache Prozesse beschreiben zu können, muss man j_μ^{em} mit dem Isospin-Triplett des schwachen Stroms \mathbf{J}_μ ersetzen, das mit den drei Vektorbosonen in \mathbf{W}_μ koppelt, wobei die Kopplungskonstante g_1 ist.

$$-ig_1 \mathbf{J}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu = -ig_1 \bar{\chi}_L \gamma_\mu \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}^\mu \chi_L \quad (5.2)$$

Der Zustand χ_L ist ein Isospin-Dublett der linkshändigen Fermionen, etwa

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix}$$

Das Isospin-Triplett \mathbf{J}_μ hat folgende Form

$$J_\mu^i(x) = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{1}{2} \sigma_i \chi_L, \quad \text{mit } \sigma_i, i = 1, 2, 3 \text{ den Pauli Matrizen} \quad (5.3)$$

γ_μ Dirac Matrizen .

Die entsprechenden Ladungen

$$T^i = \int J_0^i(x) d^3x \quad (5.4)$$

können als Generatoren der $SU(2)_L$ -Gruppe aufgefasst werden, entsprechend wird auch Q als Generator der $U(1)$ bezeichnet. Das Suffix L bei $SU(2)_L$ steht für linkshändig, d.h. der Strom des schwachen Isospins koppelt nur an linkshändige Fermionen. Ferner gibt es einen schwachen Isospin-Singulett j_μ^Y mit Symmetriegruppe $U(1)_Y$, er koppelt an das Vektorfeld β_μ gemäß

$$-i \frac{g_2}{2} j_\mu^Y \beta^\mu = -i \frac{g_2}{2} \bar{\psi} \mathbf{Y} \psi \beta^\mu. \quad (5.5)$$

Der Faktor $1/2$ bei der Kopplungskonstante g_2 kommt aufgrund von Konvention dazu, Y ist Erzeugender der $U(1)_Y$ -Gruppe, dessen Eigenwert der schwachen Hyperladung entspricht. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}, \quad T^3 \text{ ist die dritte Komponente,} \quad (5.6)$$

was zu der Beziehung führt

$$j_\mu^{em} = J_\mu^3 + \frac{1}{2} j_\mu^Y. \quad (5.7)$$

Das heißt, der elektromagnetische Strom ist eine Kombination aus zwei neutralen Strömen J_μ^3 und j_μ^Y , was die schwache mit der elektromagnetischen Wechselwirkung vereinbart und eine gemeinsame Symmetriegruppe erzeugt, die $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Dies verletzt auch nicht die links- oder rechtshändigkeit des elektromagnetischen Stroms, da es bekannt ist, dass er aus beiden Komponenten besteht

$$j_\mu^{em} = -\bar{e} \gamma_\mu e = -\bar{e}_R \gamma_\mu e_R - \bar{e}_L \gamma_\mu e_L.$$

Die vereinbarte elektroschwache Wechselwirkung hat nun die Form

$$-i g_1 \mathbf{J}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu - i \frac{g_2}{2} j_\mu^Y \beta^\mu. \quad (5.8)$$

Um die geladenen massiven W^\pm -Bosonen zu beschreiben, führt man neue Felder ein, bzw. Linearkombinationen von W_μ^1 und W_μ^2

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2). \quad (5.9)$$

Die verbleibenden W_μ^3 und β_μ sind neutrale Felder, die später bei der spontanen Symmetriebre-

Tabelle 5.1: Quantenzahlen des schwachen Isospins T , T^3 , Ladung Q und Hyperladung Y , ([HM84], S. 295)

Leptonen					Quarks				
	T	T^3	Q	Y		T	T^3	Q	Y
ν_e	1/2	1/2	0	-1	u_L	1/2	1/2	2/3	1/3
e_L^-	1/2	-1/2	-1	-1	d_L	1/2	-1/2	-1/3	1/3
e_R^-	0	0	-1	-2	u_R	0	0	2/3	4/3
					d_R	0	0	-1/3	-2/3

chung und Erzeugung der Bosonen-Massen in die physikalischen Felder A_μ und Z_μ eingebaut werden.

$$\begin{aligned}
 A_\mu &= \beta_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W \quad \rightarrow \text{masselos} \\
 Z_\mu &= -\beta_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W \quad \rightarrow \text{massiv}
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Der Winkel θ_W heißt Weinberger-Winkel.

Für die Wechselwirkung des neutralen Stroms folgt mit (5.10)

$$\begin{aligned}
 -i g_1 J_\mu^3 W_3^\mu - i \frac{g_2}{2} j_\mu^Y \beta^\mu &= -i \overbrace{\left(g_1 \sin \theta_W J_\mu^3 + \frac{g_2}{2} \cos \theta_W j_\mu^Y \right)}^{\text{elektromagnetische Wechselwirkung}} A_\mu \\
 &\quad - i \left(g_1 \cos \theta_W J_\mu^3 - \frac{g_2}{2} \sin \theta_W j_\mu^Y \right) Z_\mu.
 \end{aligned}$$

Der Term, der die elektromagnetische Wechselwirkung beschreibt muss die Form $e j_\mu^{em} A_\mu$ haben, somit folgt $g_1 \sin \theta_W = g_2 \cos \theta_W = e$.

5.2 Eichtheorien allgemein

Es gibt zwei verschiedene Lagrangedichten, die sich dazu eignen Materie zu beschreiben:

$$\begin{aligned}
 \text{des Dirac Feldes } \mathcal{L}_D &= \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \\
 \text{und des skalaren Feldes } \mathcal{L}_S &= (\partial^\mu \Phi)^\dagger \partial_\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi)
 \end{aligned}$$

Die Lagrangedichte \mathcal{L}_D beschreibt Teilchen mit Spin, aus \mathcal{L}_S werden mit Hilfe des Higgs-Mechanismus die Massen der Bosonen erzeugt. Im Folgenden wird an einem allgemeinem Zustand $\varphi(x)$ beschrieben, wie man für die entsprechenden Symmetriegruppen die Eichfelder und kovarianten Ableitungen findet. Ausführlich wird dieses Thema auch in [Kugo97] behandelt.

U(1)-Symmetriegruppe Ein allgemeines Element der U(1)-Gruppe hat die Form $U = e^{i\theta}$ und somit ist eine globale U(1)-Transformation in (5.11) dargestellt. Um eine lokale

Transformation zu gewährleisten, macht man den Parameter ortsabhängig, $\theta \rightarrow \theta(x)$.

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x)e^{i\theta} \quad (5.11)$$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x)e^{i\theta(x)} \approx (1 + i\theta(x))\varphi(x) \quad (5.12)$$

Die Erhaltung der Eichinvarianz der Lagrangedichte verlangt die Einführung eines neuen Eichfeldes. Man definiert das Eichfeld, als die Größe, die das Feld $\varphi(x)$ parallel zum Punkt $(x + dx)$ verschiebt. Im Allgemeinen stehen die Felder $\varphi(x)$ und $\varphi(x + dx)$ nicht parallel. Das verschobene $\varphi_{||}$ sieht dann wie folgt aus

$$\varphi_{||}(x + dx) = \varphi(x) + ig\beta_{\mu}(x)\varphi(x)dx^{\mu}. \quad (5.13)$$

In Gleichung (5.13) ist nun $\beta_{\mu}(x)$ das Eichfeld und g ein Parameter. Zwischen $\varphi_{||}(x + dx)$ und dem eigentlichen Feld im Punkt, $\varphi(x + dx)$ gibt es einen Unterschied, aus dem die kovariante Ableitung gebildet wird

$$\begin{aligned} \varphi(x + dx) - \varphi_{||}(x + dx) &= [\partial_{\mu}\varphi(x) - ig\beta_{\mu}(x)\varphi(x)] dx^{\mu} \equiv D_{\mu}\varphi(x)dx^{\mu} \\ \Rightarrow D_{\mu} &= \partial_{\mu} - ig\beta_{\mu}(x). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Das gefundene Eichfeld wird allgemein in einer Symmetriegruppe G transformiert [Kugo97]

$$\begin{aligned} \beta_{\mu}(x) \rightarrow \beta'_{\mu}(x) &= \frac{i}{g}U(x)\partial_{\mu}U^{\dagger}(x) + U(x)\beta_{\mu}(x)U^{\dagger}(x), \quad U(x) \in G \\ \text{im Falle } G = U(1), &= \frac{i}{g}e^{i\theta(x)}\partial_{\mu}e^{-i\theta(x)} + e^{i\theta(x)}\beta_{\mu}(x)e^{-i\theta(x)} \\ &= \beta_{\mu}(x) + \frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta(x). \end{aligned} \quad (5.15)$$

SU(2)-Symmetriegruppe Ein allgemeines Element der speziellen unitären Gruppe SU(2) ist $e^{i\alpha\sigma}$, wobei α ein 3-komponentiger Vektor ist und $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ein Vektor bestehend aus den drei Pauli-Matrizen, die die Erzeugenden der Gruppe sind. Eine lokale SU(2)-Transformation hat also die Form wie in (5.16), wobei entsprechend das allgemeine Feld $\varphi(x)$ als zweikomponentiger Vektor anzusehen ist.

$$\varphi'(x) = e^{i\alpha(x)\sigma}\varphi(x). \quad (5.16)$$

Wieder sollen Eichfelder gefunden werden, in diesem Falle aber drei, da es immer so viele Eichfelder gibt, wie Erzeugende der Symmetriegruppe. Die Eichfelder werden auf eine zu U(1) analoge Weise gefunden.

$$\begin{aligned} \varphi_{||}(x + dx) &= \varphi(x) + ig'\mathbf{W}_{\mu}(x)\varphi(x)dx^{\mu} \\ \Rightarrow D_{\mu} &= \partial_{\mu} - ig'\mathbf{W}_{\mu}(x) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Das Eichfeld $\mathbf{W}_\mu(x)$ ist eine Matrix, die in der Basis der Erzeugenden der Gruppe dargestellt werden kann [CG07]

$$\mathbf{W}_\mu = \sum_{k=1}^3 W_\mu^k \sigma^k = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

$\mathbf{W}_\mu(x)$ ist somit eine hermitesche Matrix mit Spur 0, die sich transformiert gemäß der allgemeinen Formel aus (5.15).

SU(2) × U(1) Die kovariante Ableitung der Symmetriegruppe $SU(2) \times U(1)$ setzt sich auf eine einfache Weise aus (5.14) und (5.17) zusammen

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\beta_\mu(x) - ig'\mathbf{W}_\mu(x). \quad (5.19)$$

Es gilt ferner

$$(D_\mu\varphi)' = D'_\mu\varphi' = e^{i\theta(x)}U(x)D_\mu\varphi \quad (5.20)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} D'_\mu\varphi'(x) &= (\partial_\mu - ig\beta'_\mu(x) - ig'\mathbf{W}'_\mu(x)) e^{i\theta(x)}U(x)\varphi(x) \\ &= \left[\partial_\mu - ig \left(\beta_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta \right) - ig' \left(U\mathbf{W}_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^\dagger \right) \right] e^{i\theta}U\varphi \\ &= \partial_\mu (e^{i\theta}U\varphi) - ig\beta_\mu e^{i\theta}U\varphi - i\partial_\mu\theta e^{i\theta}U\varphi - ig'U\mathbf{W}_\mu U^\dagger e^{i\theta}U\varphi + U\partial_\mu U^\dagger e^{i\theta}U\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nebenrechnung: } \partial_\mu U + U (\partial_\mu U^\dagger) U &= \partial_\mu e^{i\alpha\sigma} + e^{i\alpha\sigma} (\partial_\mu e^{-i\alpha\sigma}) e^{i\alpha\sigma} \\ &= i(\partial_\mu\alpha)\sigma e^{i\alpha\sigma} - e^{i\alpha\sigma} i(\partial_\mu\alpha)\sigma e^{-i\alpha\sigma} e^{i\alpha\sigma} \\ &= i(\partial_\mu\alpha)\sigma e^{i\alpha\sigma} - i(\partial_\mu\alpha)\sigma e^{i\alpha\sigma} = 0 \end{aligned}$$

Mit Nebenrechnung folgt:

$$D'_\mu\varphi'(x) = e^{i\theta(x)}U(x) (\partial_\mu - ig\beta_\mu(x) - ig'\mathbf{W}_\mu(x)) \varphi(x) = e^{i\theta(x)}U(x)D_\mu\varphi(x).$$

5.3 Kinetische Energie der Eichfelder

Für den kinetischen Term der Lagrangedichte ist der Feldstärketensor verantwortlich

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (5.21)$$

wobei $A'_\mu(x)$ ein allgemeines Eichfeld ist. Im Falle des Elektromagnetismus hatte man die abelsche U(1)-Gruppe als Symmetriegruppe und der Kommutator aus (5.21) verschwand. Die Gruppe SU(2) ist nicht-abelsch, da die Pauli-Matrizen die Beziehung $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ erfüllen,

somit wird (5.21) zu

$$W_{\mu\nu}^{SU(2)} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - ig'(\mathbf{W}_\mu \mathbf{W}_\nu - \mathbf{W}_\nu \mathbf{W}_\mu). \quad (5.22)$$

Das heißt, genau so wie im Falle von $SU(3)$ aus Kapitel 3, werden Wechselwirkungsterme zwischen den Eichbosonen auftauchen. Allgemein transformiert der Feldstärketensor in einer Symmetriegruppe G [Kugo97]

$$F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}U^\dagger(x), \quad U(x) \in G \quad (5.23)$$

und der kinetische Teil der Lagrangedichte, der ebenfalls invariant unter lokalen Eichtransformationen sein muss hat die Form

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}N^{-1}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}\sum_a F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (5.24)$$

Der zweite Ausdruck mit der Summierung über den Gruppenindex a erfolgt aufgrund der Tatsache, dass die Erzeugenden der Symmetriegruppe die Beziehung $\text{Tr}(T_a T_b) = N\delta_{ab}$ erfüllen, wobei N der Normierungsfaktor ist. Kombiniert man den Feldstärketensor der $U(1)$ -Symmetriegruppe mit (5.22), so erhält man den kinetischen Term der $SU(2) \times U(1)$ -Gruppe

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{em}F_{em}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^3 W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} \quad (5.25)$$

5.4 Lagrangedichte der elektroschwachen Wechselwirkung

Bis jetzt wurden die kovarianten Ableitungen und dazugehörige Eichfelder gefunden, die die gesuchte Lagrangedichte unter lokalen $SU(2) \times U(1)$ -Eichtransformationen invariant lassen. Da Leptonen sowie Quarks einen Spin tragen, eignet sich die Lagrangedichte des Dirac-Feldes zur Beschreibung ihrer Wechselwirkung, in die das Isospin-Dublett der linkshändigen Fermionen χ_L und das schwache Isospin-Singulett der rechtshändigen Fermionen e_R eingesetzt wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D = & \bar{\chi}_L \left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_2 \frac{\mathbf{Y}}{2} B_\mu(x) - ig_1 \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_\mu(x) \right) \right] \chi_L \\ & + \bar{e}_R \left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_2 \frac{\mathbf{Y}}{2} B_\mu(x) \right) \right] e_R - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Die Lagrangedichte (5.26) beschreibt die Wechselwirkung des schwachen Isospins und schwacher Hyperladung, allerdings sind die dort enthaltenden Fermionen und Eichbosonen masselos. Um die nötigen Massen zu erzeugen, wird der Higgs-Mechanismus verwendet. Dazu muss man zu \mathcal{L}_D weitere Lagrangedichten addieren, die die Massen der Bosonen und Fermionen enthalten. Zuerst werden die Bosonen-Massen erzeugt mit der Lagrangedichte \mathcal{L}_H , die schon

im Kapitel 4 gesehen wurde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H &= (D^\mu\Phi)^\dagger D_\mu\Phi + \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{2}(\Phi^\dagger\Phi)^2 \\ &= \left| \left(\partial_\mu - ig_2 \frac{\mathbf{Y}}{2} B_\mu(x) - ig_1 \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_\mu(x) \right) \Phi \right|^2 - V(\Phi)\end{aligned}\quad (5.27)$$

Das Feld Φ muss so gewählt werden, dass es zu der Gruppe $SU(2) \times U(1)$ gehört und damit die relevanten Massen erzeugt werden können. Am Besten eignet sich die Wahl

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Effektiv hat man vier skalare Felder $\phi_i(x)$. Für das Minimum der Potentialfunktion $V(\phi)$ ergibt sich wieder $|\Phi| = \sqrt{\mu^2/v} = v/\sqrt{2}$, mit dessen Hilfe man den Vakuumzustand Φ_v auf eine bekannte Art definiert

$$\Phi_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Diese Wahl des Vakuums ist gerechtfertigt dadurch, dass man nur Massen für W^\pm - und Z^0 -Bosonen generieren möchte, das Photon soll weiterhin masselos bleiben. In der Lagrangedichte \mathcal{L}_D ist die elektromagnetische Wechselwirkung ebenfalls enthalten, da die Stromdichte j_μ^{em} direkt in Verbindung zu den neutralen schwachen Strömen steht. Die spezielle Wahl von Φ_v hat nämlich mit $\phi_3 = v$ die Quantenzahlen $T = 1/2$, $T^3 = -1/2$ und $Y = 1$. Somit wird die $SU(2)_L$ - und $U(1)_Y$ -Symmetrie gebrochen, die $U(1)_{em}$ bleibt erhalten. Dies kann man sehen, wenn man den Generator der $U(1)_{em}$ in dieser Wahl betrachtet, $Q = T^3 + Y/2 = 0$. Somit bleiben die $U(1)_{em}$ -Transformationen invariant: $v' \rightarrow v e^{i\alpha(x)Q} = v$, für $Q = 0$.

5.5 Brechung der Symmetrie

Zur Erzeugung der Bosonen- und Fermionen-Massen wird das Vakuum mit Polarkoordinaten parametrisiert

$$\Phi_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} e^{i\sigma\pi(x)/v} \quad (5.30)$$

In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass bei der spontanen Symmetriebrechung die drei Felder $\pi(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x))$ masselos bleiben und durch eine spezielle Eichung weggeeicht werden können, so dass sie in der Lagrangedichte nicht mehr vorkommen. Es reicht daher das Feld

$$\Phi_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

in \mathcal{L}_H einzusetzen um die Massen der Eichbosonen zu generieren.

Bewegungsterm Zuerst wird der Bewegungsterm betrachtet

$$\begin{aligned}
 (D^\mu \Phi_v)^\dagger D_\mu \Phi_v &= |D_\mu \Phi_v|^2 = \left| \left(\partial_\mu - i \frac{g_2}{2} B_\mu(x) - i \frac{g_1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_\mu(x) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu h \end{pmatrix} - \frac{ig_2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B_\mu(v+h) \end{pmatrix} - \frac{ig_1}{2} \begin{pmatrix} (W_\mu^1 - iW_\mu^2)(v+h) \\ -W_\mu^3(v+h) \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{8} \left| \begin{matrix} -ig_1 (W_\mu^1 - iW_\mu^2)(v+h) \\ \partial_\mu h - ig_2 B_\mu(v+h) + ig_1 W_\mu^3(v+h) \end{matrix} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{8} \left[g_1^2 (v+h)^2 [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] + 4(\partial_\mu h)^2 + [g_2 B_\mu(v+h) - g_1 W_\mu^3(v+h)]^2 \right] \\
 &= \frac{1}{4} g_1^2 (v+h)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \frac{(v+h)^2}{8} (g_2 B_\mu - g_1 W_\mu^3)^2 \\
 &= \frac{1}{4} g_1^2 (v+h)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \frac{(v+h)^2}{8} (g_2^2 + g_1^2) \left(\frac{g_2 B_\mu - g_1 W_\mu^3}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \right)^2 \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

Aus dem Resultat der langen Rechnung in (5.32) kann man schon die Massen der Bosonen identifizieren. Die geladenen W^\pm -Bosonen haben die Masse $M_W = \frac{1}{2} g_1 v$. Es bleibt noch das neutrale Z^0 zu finden. Dazu verwendet man die Tatsache, dass die Felder Z_μ^0 und A_μ Linearkombinationen aus den neutralen Feldern B_μ und W_μ^3 , wie in (5.10) dargestellt, sind, d.h.

$$\begin{aligned}
 A_\mu &= B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W \\
 Z_\mu &= -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W
 \end{aligned} \quad (5.33)$$

In (5.32) gibt es nur eine solche Linearkombination der neutralen Felder, die als Z^0 identifiziert wird, da sie Masse trägt, das Photon soll masselos bleiben.

$$\frac{-g_2 B_\mu + g_1 W_\mu^3}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \equiv Z^0, \quad M_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g_2^2 + g_1^2} \quad (5.34)$$

Vergleicht man (5.33) und (5.34), sieht man, dass $\cos \theta_W$ und $\sin \theta_W$ ausgedrückt werden können als

$$\sin \theta_W = \frac{g_2}{g_1^2 + g_2^2}, \quad \cos \theta_W = \frac{g_1}{g_1^2 + g_2^2}. \quad (5.35)$$

Setzt man nun alle gefundenen Massen und Eichbosonen wieder in den Bewegungsterm ein, so erhält er eine komprimierte Form

$$\begin{aligned}
 |D_\mu \Phi_v|^2 &= M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + h g_1 M_W W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{g_1^2}{4} h^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{h}{2} M_Z Z_\mu Z^\mu + \frac{h^2}{8} (g_2^2 + g_1^2) Z_\mu Z^\mu. \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

Die Masse des Photons wäre in Analogie zu (5.34)

$$A_\mu = \frac{g_2 W_\mu^3 + g_1 B_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}},$$

tritt in der Lagrangedichte nicht auf und das Photon bleibt masselos [HM84].

Das W-Boson wurde noch in den 80er Jahren am CERN im Rahmen der Experimente UA1 und UA2 entdeckt. Einige Monate später fand man auch das Z^0 -Boson. Die aktuellen Massenwerte kann man der Internetseite der Particle Data Group entnehmen ([PBG], Stand 2010):

$$M_W = (80,399 \pm 0,023) \text{ GeV}$$

$$M_Z = (91,1876 \pm 0,0021) \text{ GeV}$$

Tatsächlich sieht man, aufgrund der Beziehung (5.35), dass die theoretischen Massen nicht übereinstimmen, ihr Verhältnis entspricht $M_W/M_Z = \cos \theta_W$. Mit den obigen Daten für die Massen, beträgt der Weinberger-Winkel $\theta_W = (28,1533^\circ \pm 0,0005^\circ)$.

Potential Der Bewegungsterm (5.36) soll um das Potential erweitern werden.

$$\begin{aligned} V(\Phi_v) &= -\mu^2 \Phi_v^\dagger \Phi_v + \frac{\lambda}{2} (\Phi_v^\dagger \Phi_v)^2 = -\frac{\mu^2}{2} (v+h)^2 + \frac{\lambda}{8} (v+h)^4 \\ &= -\frac{\mu^2}{2} h^2 + \frac{\lambda}{2} v h^3 + \frac{\lambda}{8} h^4 + V_0(v) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Die komplette Lagrangedichte \mathcal{L}_H setzt sich nun aus dem Bewegungsterm und Potential zusammen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu h)^2 - \frac{m_H^2}{2} h^2 \right] + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + g_1 h M_W W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{g_1^2}{4} h^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{h}{2} M_Z Z_\mu Z^\mu + \frac{h^2}{8} (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu - \frac{\lambda}{2} v h^3 - \frac{\lambda}{8} h^4 - V_0(v). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Die obige Lagrangedichte hat somit massive Eichbosonen, Wechselwirkungsterme der Eichbosonen mit dem Higgs-Feld, sowie die Masse des Higgs-Feldes, $m_H = \sqrt{2}\mu^2$. Mit Hilfe des Higgs-Mechanismus wurden Massen der Eichbosonen erzeugt, jedoch nicht der Leptonen und Quarks, die auch in der ursprünglichen \mathcal{L}_D fehlten, wegen Erhaltung der Eichinvarianz. Die Vorgehensweise zur Erzeugung der Fermionen-Massen wird in den nächsten Abschnitten erläutert. Diese wurden mit [HM84] verfasst.

5.6 Fermionen-Massen

Leptonen Man benutzt das bekannte Higgs-Dublett (5.31), dass man in die folgende Lagrangedichte einsetzt

$$\mathcal{L}_L = -G_1 \bar{L} \Phi_v R = -G_1 [\bar{L} \Phi_v R + \bar{R} \Phi_v L]. \quad (5.39)$$

L steht für linkshändige Lepton-Dubletts, R für rechtshändige Singulets. Am Beispiel des Myons wird gezeigt, wie die Massen generiert werden.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_L &= -G_\mu \left[(\bar{\nu}_\mu, \bar{\mu})_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \mu_R + \bar{\mu}_R \frac{1}{\sqrt{2}} (0, v + h(x)) \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \right] \\
 &= -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} [\bar{\mu}_L(v+h)\mu_R + \bar{\mu}_R(v+h)\mu_L] \\
 &= -\frac{G_\mu v}{\sqrt{2}} (\bar{\mu}_L\mu_R + \bar{\mu}_R\mu_L) - \frac{G_\mu h}{\sqrt{2}} (\bar{\mu}_L\mu_R + \bar{\mu}_R\mu_L) = -\frac{G_\mu v}{\sqrt{2}} \bar{\mu}\mu - \frac{G_\mu h}{\sqrt{2}} \bar{\mu}\mu \\
 &= -M_\mu \bar{\mu}\mu - \frac{M_\mu h(x)}{v\sqrt{2}} \bar{\mu}\mu
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Somit wäre die Masse des Myons $M_\mu = G_\mu v/\sqrt{2}$, wobei G_μ ein beliebiger Parameter ist, was bedeutet, dass die Größe der Masse nicht vorhersehbar ist. Der zweite Term aus (5.40) gibt die Wechselwirkung des Higgs-Bosons mit dem Myon an, die im Vergleich zu der Wechselwirkung zwischen $h(x)$ und W^\pm oder Z^0 viel schwächer ist.

Quarks Quarks bilden, genau so wie Leptonen, linkshändige Dubletts und rechtshändige Singulett Zustände. Bei den Leptonen wurden die Neutrino-Massen vernachlässigt, im Falle der schweren Quarks muss man jedoch beide Teilchen aus dem Dublett in Betracht ziehen. Um dies zu gewährleisten wird das Higgs-Dublett umgeformt

$$\Phi_c = -i\sigma_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} -\phi_b^* \\ \phi_a^* \end{pmatrix} \xrightarrow{Vakuum} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + h(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Wegen der speziellen Eigenschaft der $SU(2)$, transformiert sich Φ_c genau so wie Φ_v , mit dem Unterschied, dass es zu Φ_v die entgegengesetzte schwache Hyperladung hat, $Y = -1$. Die Lagrangedichte, die die Quark-Massen liefert hat die selbe Struktur wie (5.39).

$$\mathcal{L}_Q = -G_i [\bar{\mathbf{q}}_L^i \Phi_v \mathbf{q}_R^i + \bar{\mathbf{q}}_R^i \Phi_v \mathbf{q}_L^i] - G_j [\bar{\mathbf{q}}_L^j \Phi_c \mathbf{q}_R^j + \bar{\mathbf{q}}_R^j \Phi_c \mathbf{q}_L^j] \tag{5.42}$$

Die Massen der Quarks und Leptonen sind mit Hilfe des Higgs-Mechanismus erfolgreich generiert worden, ihre Werte sind jedoch freie Parameter der Theorie, die mit experimentellen Befunden ersetzt werden müssen. Die Wechselwirkung der Fermionen mit dem Higgs-Teilchen ist proportional zu ihrer Masse, das Higgs-Teilchen selbst bleibt jedoch weiterhin unentdeckt.

5.7 Lagrangedichte des Weinberg-Salam-Modells

Die endgültige Lagrangedichte des Weinberg-Salam-Modells setzt sich nun aus allen bislang gefunden zusammen

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_Q. \tag{5.43}$$

\mathcal{L}_D beschreibt die Wechselwirkung der Fermionen mit den Eichbosonen und beinhaltet die kinetische Energie der Eichfelder im Rahmen des Feldstärketensors, \mathcal{L}_H liefert die Massen der Eichbosonen, sowie deren Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld, \mathcal{L}_L und \mathcal{L}_Q geben die Massen der Fermionen und ihre Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld.

Zusammenfassung

Die Theorie, die die Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen beschreibt, das Standardmodell, ist eine Quantenfeldtheorie, deren Grundlage die Eichtheorien sind. Die Eichtheorien selbst sind ein komplexes, umfangreiches Thema, in dieser Bachelorarbeit wurde daher nur ihre Rolle in der Entwicklung des Standardmodells beschrieben. Der Ausgangspunkt sind Lagrangedichten von komplexen skalaren Feldern, wenn man Teilchen ohne Spin beschreiben möchte, insbesondere finden solche Felder in der spontanen Symmetriebrechung im Higgs-Mechanismus Anwendung, oder Dirac-Felder für Teilchen mit Spin. Man fordert Invarianz unter lokalen Symmetrie-Transformationen der jeweiligen Symmetriegruppe, d.h. die Physik eines System soll sich nicht ändern, wenn eine Größe lokal frei gewählt wird. So gehört Quantenelektrodynamik der Symmetriegruppe $U(1)$, Quantenchromodynamik hat sich aus Forderung lokaler Eichinvarianz unter $SU(3)$ -Transformationen entwickelt und die vereinheitlichte elektroschwache Wechselwirkung gehört der $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie. Um die Invarianz der Lagrangedichte unter solchen Transformationen zu erhalten, führte man kovariante Ableitungen statt den normalen ein, die man mit Hilfe von neuen vektoriiellen Eichfelder definierte. Diese sind Vermittler der fundamentalen Kräfte und wechselwirken auch selbst mit den physikalischen Teilchen, wobei ihre Eigenschaften von der Gruppenstruktur abhängen. So tragen Photonen der abelschen Gruppe $U(1)$ keine Ladung und wechselwirken nicht untereinander, im Gegensatz zu den Gluonen der nicht-abelschen $SU(3)$. Die Eichtheorien generieren masselose vektorielle Austauschbosonen der verschiedenen Wechselwirkungen, dies reichte, wegen den massiven W^\pm - und Z^0 -Bosonen jedoch nicht aus. Die Eichsymmetrie musste spontan gebrochen werden, wie es im Kapitel 4 beschrieben wurde. Es stellte sich heraus, bricht man die Symmetrie global mit dem Nambu-Goldstone-Theorem, bekam man ein neues massives skalares Teilchen und ein masseloses Goldstone-Boson. Im Rahmen des Higgs-Mechanismus mit einer alternativ gewählten Grundzustands-Parametrisierung konnte das Goldstone-Boson unter einer speziellen unitären Eichung aus der Lagrangedichte entfernt werden, so dass nur das massive Higgs-Boson und das Eichboson, das das Goldstone-Teilchen „absorbierte“ und dadurch massiv wurde, geblieben sind. Der Higgs-Mechanismus fand Anwendung in der Theorie der elektroschwachen Vereinheitlichung, dem Weinberg-Salam-Modell, indem man mit dessen Hilfe Massen der schweren Austauschbosonen der schwachen Wechselwirkung, sowie Massen der Quarks und Leptonen generierte.

Somit sind alle fundamentalen Wechselwirkungen, bis auf die Gravitation, im Rahmen des Standardmodells mit seinen Theorien (QED, QCD und Weinberg-Salam-Modell) beschrieben. Das Standardmodell ist jedoch nicht vollständig, laut [PBG-GUT] gibt es noch 19 freie Parame-

ter, deren Werte den experimentellen Daten angepasst werden. Diese sind z.B. die Kopplungskonstanten g_1 und g_2 der $SU(2)_L$ und $U(1)_Y$. Die „Grand Unification Theories“ versuchen die starke und elektroschwache Wechselwirkung einheitlich mit einer gemeinsamen Symmetriegruppe und Kopplungskonstante α_G zu beschreiben. In dieser Absicht geben die SUSY GUTs oder Supersymmetric GUTs mit ihren drei wichtigsten Punkten (Vereinheitlichung der Kopplungskonstanten auf einer Skala von $M_G \sim 3 \times 10^{16}$ GeV, niederenergetische Supersymmetrie und Nukleonen Zerfall) am meisten Hoffnung. Vielleicht wird man dann, wie [PBG-GUT] schreibt, die CP Verletzung, die Ursache der kosmologischen Materie-Antimaterie Asymmetrie oder die Natur der dunklen Materie verstehen können.

Literaturverzeichnis

- [HM84] Francis Halzen, Alan D. Martin; *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*; Verlag John Wiley and Sons, Inc., 1. Auflage Februar 1984, ISBN 0-471-88741-2
- [Kugo97] Taichiro Kugo, *Eichtheorie*; Verlag Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1. Auflage Oktober 1997, ISBN 3-540-62063-X
- [PRSZ09] Povh, Bogdan; Rith, Klaus; Scholz, Christoph; Zetsche, Frank; *Teilchen und Kerne: Eine Einführung in die physikalischen Konzepte*; Verlag Springer Berlin Heidelberg, 8. Auflage 2009, e-ISBN 978-3-540-68080-2
- [CG07] Cottingham, William N. ; Greenwood, Derek A.; *An introduction to the standard model of particle physics*; Verlag Cambridge University Press, 2. Ausgabe 2007, e-ISBN 978-0-511-43886-8 eBook(MyLibrary)
- [LL07] Landau, L.D. ; Lifschitz E.M. ; *Lehrbuch der theoretischen Physik: 1 Mechanik*; Verlag Harri Deutsch, 14. Auflage 2007, ISBN 978-3-8171-1326-2
- [PBG-GUT] Autoren: K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G 37, 075021 (2010) (URL http://pdg.lbl.gov/2011/html/authors_2010.html); *2010 Review of Particle Physics : 15. GRAND UNIFIED THEORIES* , URL <http://pdg.lbl.gov/2011/reviews/rpp2011-rev-guts.pdf>; am 30. Juli 2010, 14:36h
- [PBG] Autoren: K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G 37, 075021 (2010) (URL http://pdg.lbl.gov/2011/html/authors_2010.html); *Gauge and Higgs Bosons*; URL <http://pdg.lbl.gov/2011/tables/rpp2011-sum-gauge-higgs-bosons.pdf> ; am 16. Juni 2011, 12:05h
- [Bartelmann] Matthias Bartelmann; Skript: *Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*; WS 2009/2010, Institut für Theoretische Astrophysik, Universität Heidelberg

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 11. April 2011,
Ana Rešetar