AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER LITERATUR

ABHANDLUNGEN DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN KLASSE

JAHRGANG 1961 · NR. 11

Beiträge zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien

von

DR. JÜRGEN EHLERS

Hamburg

Strenge Lösungen der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie IV

von

PASCUAL JORDAN

DR. JÜRGEN EHLERS, DR. WOLFGANG KUNDT

und DR. RAINER K. SACHS

VERLAG DER

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER LITERATUR IN MAINZ

IN KOMMISSION BEI FRANZ STEINER VERLAG GMBH · WIESBADEN

Einleitung

Die Beschreibung der Materie in der Allgemeinen Relativitätstheorie kann mit Hilfe entweder des Modells des Massenpunktes oder des Modells eines stetig ausgebreiteten Mediums erfolgen. Bei dem gegenwärtigen Stand der Kenntnisse ist nur die zweite Beschreibungsweise mathematisch einwandfrei durchführbar; denn es ist bisher nicht gelungen, den Begriff einer „Singularität des metrischen Feldes, die ein Teilchen darstellt" auch nur zu definieren, geschweige denn aus einer solchen Definition Folgerungen zu ziehen.

Vom physikalischen Standpunkt aus wäre das kein entscheidender Einwand, wenn es überzeugende Gründe dafür gäbe, das erste Modell für angemessener zu halten. Das ist aber unseres Erachtens nicht der Fall; denn die Erfahrungen, die EINSTEIN zur Aufstellung seiner Theorie führten, beziehen sich auf makroskopische Vorgänge, und ob die Theorie zum Verständnis mikrophysikalischer Elementarprozesse etwas beitragen kann, ist gegenwärtig nicht zu entscheiden. (PAULI bemerkt in der Einleitung zu der 1958 erschienenen Neuausgabe seiner „Relativitätstheorie": "These differences of opinion are merging into the great open problem of the relation of relativity theory to quantum theory, which will presumably occupy physicists for a long while to come. In particular, a clear connection between the general theory of relativity and quantum mechanics is not yet in sight.") In einer makroskopischen Theorie kann aber kein Zweifel daran bestehen, daß die hydrodynamische (oder elastomechanische) Beschreibung als die primäre und die punktmechanische als approximativ-vereinfachende anzusehen sind. Die Hydrodynamik muß daher als ein wesentlicher Bestandteil der Gravitationstheorie angesehen werden.

Während die formale Übertragung der speziell-relativistischen Ausdrücke für die der Hydrodynamik entsprechenden Energietensoren und die Erhaltungssätze (Ersetzung der gewöhnlichen durch die kovariante Divergenz) schon 1916 von EINSTEIN vorgenommen wurde, ist der Versuch, systematisch eine allgemein-relativistische Hydrodynamik zu entwickeln, erst 1937 in einer schönen Arbeit von J. L. SYNGE unternommen worden, dessen Untersuchungen mit einer anderen Methode von A. LICHNEROWICZ weitergeführt wurden; die Ergebnisse des letztgenannten Verfassers sind in seinem 1955 erschienenen Werk über Relativitätstheorie dargestellt. Die Arbeiten dieser Autoren haben zu den vorliegenden Untersuchungen angeregt und bilden deren wesentliche Grundlage. Beiträge anderer Autoren zu speziellen Fragen der Hydrodynamik wollen wir nicht hier, sondern an den entsprechenden Stellen dieser Arbeit nennen.

In dieser Arbeit wird versucht, die Mitteilung einer Reihe neuer Ergebnisse mir einer systematischen, die Beiträge verschiedener Autoren von einem einheitlichen Standpunkt aus zusammenfassenden Darstellung zu verbinden. Dies scheint um so mehr angebracht, als die Standarddarstellungen der Relativitätstheorie – mit Ausnahme des oben genannten Buches von LICHNEROWICZ – dies wichtige und schöne Teilgebiet der Einsteinschen Theorie bestenfalls streifen[1] und keine Darstellung existiert, die die kinematischen, mechanischen, thermodynamischen und gaskinetischen Aspekte zusammenhängend und mit Bezugnahme auf spezielle Lösungen der Feldgleichungen behandelt, wie es hier, natürlich unter Beschränkung auf jeweils ausgewählte Teilfragen, versucht wird. (Die Behandlung von Einzellösungen insbesondere wird hier nur für den Fall inkohärenter Materie skizziert, aber die Grundlagen für eine entsprechende Beschreibung der Lösungen mit idealen Flüssigkeiten, die später erfolgen soll, werden hier mit entwickelt.)

Im ersten Kapitel werden weder (dynamische) Erhaltungssätze noch Feldgleichungen vorausgesetzt; sondern es werden allgemeine geometrische Eigenschaften einer Kongruenz zeitartiger Kurven in einem normalhyperbolischen Riemannschen Raum untersucht.

Nach einer anschaulichen Ableitung der kinematischen Grundgrößen der Theorie, die die entsprechenden Untersuchungen von SYNGE und LICHNEROWICZ vervollständigt, werden im zweiten Abschnitt spezielle Strömungen gekennzeichnet.

Die im dritten Abschnitt entwickelten Identitäten werden im vierten Paragraphen zur Ableitung von Wirbelsätzen benutzt; außerdem werden stationäre und statische Raum-Zeiten durch die in ihnen möglichen Probekörper-Relativbewegungen gekennzeichnet, und es wird ein neues Typenkriterium bewiesen.

[1] Einige wichtige Bemerkungen, aber keine systematische Darstellung enthalten auch das kürzlich erschienene Werk von J. L. SYNGE (**35**), dessen geometrische Darstellung der Relativitätstheorie hier als Vorbild dient, und das Buch von V. A. FOCK (**29**).

Die kinematischen Kennzeichnungen kosmologischer Modelle im fünften Abschnitt zeigen die Brauchbarkeit der hydrodynamischen Begriffe und Sätze für die Ableitung bzw. anschauliche Deutung bestimmter Linienelemente. Die dort gegebene Herleitung der homogen-isotropen Modelle ist trotz schwächerer Voraussetzungen einfacher als die von ROBERTSON und WALKER, auf die in der Literatur gewöhnlich verwiesen wird.

Das zweite Kapitel beginnt mit einer neuen Variante des Weyl-Paulischen Weges zur Begründung der Einsteinschen Feldgleichungen. Die beiden anschließenden Abschnitte enthalten für die einfachsten Fälle die Ableitung der thermo-hydrodynamischen Grundgesetze; die allgemein-relativistische „Navier-Stokes"-Gleichung (2.2.4) und die „Poisson"-Gleichung (2.2.10) sind wohl bisher nicht angegeben worden.

Die im vierten Paragraphen gegebene Theorie des idealen Gases unterscheidet sich von der kürzlich von SYNGE 1958 veröffentlichten dadurch, daß die Boltzmanngleichung an die Spitze gestellt, ein H-Theorem bewiesen wird und daraus „dynamisch" die Gleichgewichtsverteilungen gewonnen werden, während SYNGE (wie frühere Autoren) die Boltzmannsche Abzählmethode (mit einer etwas gewaltsamen Zusatzforderung) benutzt. Neu ist außerdem die Bestimmung der reversiblen Strömungen im Gravitationsfeld (Satz 2.4.3), die kosmologisch von Interesse ist, und die damit verknüpfte gaskinetische Ableitung des Tolmanschen Gesetzes über den Zusammenhang zwischen Gravitations- (und damit auch Zentrifugal-)potential. Zu diesem Teil der Arbeit haben Bemerkungen von A. H. TAUB[1] und M. SASAKI[2] angeregt.

Der letzte Abschnitt enthält allgemeine Aussagen über Bewegungen druckfreier Materie und eine hydrodynamische Beschreibung der bekannten strengen Lösungen. Auch dieser Abschnitt enthält einige neue Sätze; wesentlicher scheint uns aber die rein geometrische, bloß formale Ansätze vermeidende Darstellung zu sein, die einfacher als die übliche ist und zugleich ein besseres Verständnis der betreffenden Sachverhalte ermöglicht.

Zum Abschluß dieser einleitenden Bemerkungen möchte ich hervorheben, daß — wie auch diese Arbeit zeigt — ein wirkliches physikalisches Verständnis der in ihren Grundlagen so überaus überzeugenden Einsteinschen Theorie sich erst jetzt allmählich anbahnt. Der Wunsch, zu dieser Klärung einiges beizutragen, hat diese Untersuchung veranlaßt.

[1] Vgl. (37). [2] Vgl. (33).

Bezeichnungen

Gleichheit per definitionem: $\equiv$, Proportionalität: $\sim$.
Tensorindizes: $a, b, c, \cdots = 1, 2, 3, 4$; $\lambda, \mu, \nu, \cdots = 1, 2, 3$.
Symmetrisierung: ( ), z. B. $F_{(ab)} \equiv \frac{1}{2}(F_{ab} + F_{ba})$.
Antisymmetrisierung: [ ], z. B. $F_{[ab]} \equiv \frac{1}{2}(F_{ab} - F_{ba})$.
Metrischer Tensor: g_{ab}, Signatur $+++-$.
Riemanntensor: R_{abcd}.
Riccitensor: $R_{ab} \equiv R^{c}_{acb}$, Spur: $R \equiv R^{a}_{a}$.
Einsteintensor: $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$, $G \equiv G^{a}_{a}$.
Weyltensor ($=$ Konformtensor): C_{abcd}.
Partielle Differentiation nach x^c: z. B. $F_{ab|c}$.
Kovariante Ableitung nach x^c: z. B. $F_{ab||c}$; $F_{ab||cd} \equiv F_{ab||c||d}$.
Kovariante Ableitung längs $x^a(\lambda)$: $\overset{\lambda}{\nabla} k_a \equiv k_{a||b} \frac{dx^b}{d\lambda}$.
Hinweise auf das Literaturverzeichnis: z. B. (**3**).
Formelhinweise: (2.3.4) bedeutet die vierte Formel im dritten Paragraphen des zweiten Kapitels.
Einheitenkonventionen: Lichtgeschwindigkeit $c \equiv 1$, Newtonsche Gravitationskonstante $\gamma \equiv \frac{1}{8\pi}$, also Einsteinsche Gravitationskonstante $\varkappa \equiv 1$.

Inhalt

Kapitel 1. Kinematik

1. Grundbegriffe. Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten

Die Geschichte eines stetig ausgedehnten Körpers wird in der Relativitätstheorie durch eine dreidimensionale Schar zeitartiger Kurven, der *Weltlinien* der Materieelemente, beschrieben. Bezüglich eines beliebigen lokalen Koordinatensystems sei

$$x^a = x^a(y^\alpha, s) \tag{1.1.1}$$

eine Parameterdarstellung der Schar; die y^α kennzeichnen die Materieelemente, s sei die *Eigenzeit* längs deren Weltlinien[1]. Dann ist

$$u^a = \frac{\partial x^a}{\partial s} = \dot{x}^a \quad (u_a u^a = -1) \tag{1.1.2}$$

der normierte Tangentialvektor der Kurven, der gewöhnlich als *Vierergeschwindigkeit* der Substanzelemente bezeichnet wird.

Wenn

$$\delta = \delta y^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \tag{1.1.3}$$

die Variation quer zu den Weltlinien und $(\ )^{\cdot}$ die kovariante Ableitung nach s längs der Weltlinien bedeutet, gilt

$$(\delta x^a)^{\cdot} = u^a{}_{\|b}\, \delta x^b; \tag{1.1.4}$$

denn beide Seiten sind Vektoren, und bezüglich lokal ebener Koordinaten drückt (1.1.4) die Gleichheit gewisser zweiter Ableitungen der Funktionen (1.1.1) aus.

Der Tensor

$$h^a_b = \delta^a_b + u^a u_b \tag{1.1.5}$$

projiziert in jedem Weltpunkt den Tangential-Vektorraum orthogonal auf den zu u^a senkrechten dreidimensionalen Unterraum. Der Vektor

$$\delta_\perp x^a = h^a_b \delta x^b \tag{1.1.6}$$

[1] Der Transformation (1.1.1) entspricht in der klassischen Hydrodynamik der Übergang von Lagrangeschen zu Eulerschen Koordinaten.

ist also der *Ortsvektor* des Teilchens $(y^a + \delta y^a)$ in bezug auf das Teilchen (y^a), und seine *Fermi-Ableitung*

$$v^a \equiv h^a_b (\delta_\perp x^b)^{\cdot} \tag{1.1.7}$$

ist (definitionsgemäß) die *Geschwindigkeit* des Teilchens $(y^a + \delta y^a)$ relativ zu dem Teilchen (y^a).

Die (absoluten) *Beschleunigungen* der Substratelemente sind durch das raumartige Vektorfeld

$$\dot{u}^a \equiv u^a{}_{\|b} u^b \quad (u_a \dot{u}^a = 0) \tag{1.1.8}$$

gegeben. (Differentialgeometrisch ist $\dot{u}^a$ der erste Krümmungsvektor der betr. Kurve.)

Aus den Gleichungen (1.1.4) bis (1.1.8) ergibt sich das Geschwindigkeitsfeld in der infinitesimalen Umgebung eines Materieelementes:

$$v^a = u^a{}_{\|b} \delta_\perp x^b \tag{1.1.9}$$

Nach dem Muster der klassischen Hydrodynamik zerlegen wir den Tensor $u^a{}_{\|b} h^b_c$, der die Transformation $\delta_\perp x^a \to v^a$ bewirkt, in (bezüglich der Drehgruppe) irreduzible Teile:

$$u_{a\|c} h^c_b = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} \tag{1.1.10}$$

mit

$$\omega_{(ab)} = \sigma_{[ab]} = 0, \; \sigma^a_a = 0, \; \omega_{ab} u^b = \sigma_{ab} u^b = 0\,. \tag{1.1.11}$$

Die infinitesimale Transformation, die der Vektorraum $\{\delta_\perp x^a\}$ in der Zeit ds erfährt, zerfällt nach den beiden vorangehenden Formeln in eine *Drehung* $\omega^a{}_b \delta_\perp x^b$, eine drehungsfreie, volumtreue *Verzerrung* $\sigma^a{}_b \delta_\perp x^b$ und eine drehungsfreie *Ähnlichkeitstransformation* $\frac{1}{3}\Theta\,\delta_\perp x^a$. Die Abstände $\delta l = (g_{ab}\delta_\perp x^a \delta_\perp x^b)^{\frac{1}{2}} = (h_{ab}\delta x^a \delta x^b)^{\frac{1}{2}}$ benachbarter Teilchen ändern sich dabei nach der aus (1.1.7, 9, 10, 11) folgenden Gleichung

$$\frac{(\delta l)^{\cdot}}{\delta l} = \frac{1}{3}\theta + \sigma_{ab} e^a e^b, \quad \left(e^a \equiv \frac{\delta_\perp x^a}{\delta 1}, \quad e_a e^a = 1\right) \tag{1.1.12}$$

die Richtungen zu den Nachbarteilchen nach

$$h^a_b \dot{e}^b = (\omega^a{}_b + \sigma^a{}_b - \sigma_{cd} e^c e^d \delta^a{}_b)\, e^b\,. \tag{1.1.13}$$

Nach (1.1.12) und $\sigma^a{}_a = 0$ ist, wenn $\overline{}$ Richtungsmittelung und δV das Volumen eines infinitesimalen Substratteilchens bedeutet,

$$\theta = 3\,\frac{\overline{(\delta l)^{\cdot}}}{(\delta l)} = \frac{(\delta V)^{\cdot}}{\delta V}\,. \tag{1.1.14}$$

Wie (1.1.13) zeigt, gilt $h^a_b e^b = \omega^a{}_b e^b$ genau dann, wenn e^a in eine Hauptscherungsrichtung fällt. Also erfährt dasjenige materielle orthogonale Dreibein, das zu irgend einer Zeit s mit den Hauptscherungsachsen zusammenfällt, in dem Intervall $(s, s + ds)$ die durch $\omega^a{}_b$ bestimmte infinitesimale Drehung[1].

Aus der Zerlegungsformel (1.1.10) und den Bedingungen (1.1.11) leitet man folgende Ausdrücke für die *Wirbelgeschwindigkeit* ω_{ab}, die *Scherungsgeschwindigkeit* σ_{ab} und die *Expansionsgeschwindigkeit* θ ab:

$$\omega_{ab} = u_{[a\|b]} + \dot{u}_{[a} u_{b]} , \tag{1.1.15}$$

$$\sigma_{ab} = u_{(a\|b)} + \dot{u}_{(a} u_{b)} - \frac{1}{3}\,\theta h_{ab} , \tag{1.1.16}$$

$$\theta \quad = u^a{}_{\|a} . \tag{1.1.17}$$

Statt des Wirbeltensors ω_{ab} kann man den *Wirbelvektor*

$$\omega^a = \frac{1}{2}\eta^{abcd} u_b \omega_{cd} = \frac{1}{2}\eta^{abcd} u_b u_{c|d} \quad (u_a \omega^a = 0) \tag{1.1.18}$$

einführen; ω^a ist in dem durch u^a bestimmten Ruhraum zu ω_{ab} dual:

$$\omega_{ab} = \eta_{abcd}\,\omega^c u^d . \tag{1.1.19}$$

Die hieraus folgende Gleichung

$$\omega_{ab}\omega^b = 0 \tag{1.1.20}$$

bedeutet nach (1.1.9, 10), daß ω^a die Drehachse bestimmt. Der Vektor ω ist nach (1.1.18) raumartig und steht nach (1.1.20) auf der durch den einfachen raumartigen Bivektor ω_{ab} bestimmten Ebene senkrecht.

Eine Schar zeitartiger Kurven hat im allgemeinen genau *neun* (voneinander unabhängige) *Invarianten* erster Ordnung: Die sechs unabhängigen Komponenten der Vektoren $\dot{u}^a$ und ω^a bezüglich des Eigenvierbeins des Tensors $\sigma^a{}_b$, zwei unabhängige Eigenwerte[2] von $\sigma^a{}_b$, und θ. Diese Größen bestimmen (bei gegebener Metrik g_{ab}) die Kurvenschar in der infinitesimalen Umgebung erster Ordnung eines Punktes bis auf homogene Lorentztransformationen eindeutig, wie aus der mit (1.1.10) gleichwertigen Relation

$$u_{a\|b} = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\,\theta h_{ab} - \dot{u}_a u_b \tag{1.1.21}$$

hervorgeht.

[1] Dabei dreht sich dieses Dreibein i. a. aus den Hauptscherungsrichtungen hinaus. Eine Ausnahme wird in Korrolar 2 zu Satz 2 in § 4 angegeben.

[2] oder algebraisch einfacher $\sigma^a{}_b\sigma^b{}_a$ und $\sigma^a{}_b\sigma^b{}_c\sigma^c{}_a$.

Außer θ wollen wir wegen späterer Anwendungen die Skalare

$$\dot{u} = (\dot{u}_a \dot{u}^a)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega = (\omega_a \omega^a)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\,\omega_{ab}\omega^{ab}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \left(\frac{1}{2}\,\sigma_{ab}\sigma^{ab}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.22}$$

explizit einführen. Sie sind nichtnegativ und verschwinden nur gleichzeitig mit den zugehörigen Tensoren.

Während die physikalische Bedeutung der durch die Formeln (1.1.12, 14) beschriebenen Deformation eines Substratelementes durch die axiomatisch festgelegte Interpretation der metrischen Fundamentalform $g_{ab}dx^a dx^b$ unmittelbar bestimmt ist, enthält die oben gegebene Definition der Drehung eine darüber hinausgehende *Konvention:* Diese Drehung bezieht sich auf ein vom Zentralteilchen in dessen Ruhraum mitgeführt gedachtes Fermi-verschobenes Dreibein. ($v^a = 0$ in (1.1.7) bedeutet, daß $\delta_\perp x^a$ Fermi-verschoben wird.) Wie sich eine solche Drehung dynamisch bemerkbar macht, kann natürlich nicht rein kinematisch entschieden werden.

2. Spezielle Strömungen. Rotverschiebung

Mit Hilfe der im vorigen Abschnitt eingeführten Begriffe ist es möglich und im Hinblick auf Anwendungen zweckmäßig, besondere Bezeichnungen für einige Arten von Strömungen einzuführen.

Wir sprechen von einer *Trägheitsströmung*, wenn die Substratelemente dem „Führungsfeld" folgen, d. h. wenn die Materieweltlinien geodätisch sind $\dot{u} = 0$).

Eine *wirbelfreie* Strömung ist durch $\omega = 0$ gekennzeichnet, eine *volumtreue* durch $\theta = 0$.

Wenn infinitesimale Substratelemente bei der Strömung zu sich selbst ähnlich bleiben, wofür nach (1.1.12) $\sigma = 0$ charakteristisch ist, liegt eine *scherungsfreie* Strömung (isotrope Expansion oder Kompression) vor.

Wenn eine Strömung volumtreu und scherungsfrei ist, wenn also alle Abstände benachbarter Teilchen zeitlich konstant sind, ist die Strömung *starr* ($\theta = \sigma = 0$).

Symmetrieeigenschaften einer durch die Kurvenschar K in der Raum-Zeit W (oder in einem Gebiet von W) bestimmten Strömung werden beschrieben durch Gruppen[1] isometrischer (oder konformer) Abbildungen von W in sich, die K in sich transformieren. Wenn ξ^a erzeugender Vektor einer eindimensionalen Gruppe G_1 und u^a Tangentialvektor einer Kurven-

[1] darunter sollen hier auch *lokale* Lie-Gruppen, die sogar am wichtigsten für uns sind, verstanden werden.

schar K ist, drückt sich die Invarianz von K unter G_1 durch

$$u_{a|b}\xi^b + u_b \xi^b{}_{|a} = 0 \tag{1.2.1}$$

aus. Ist K unter einer Isometriegruppe G_1 invariant und sind die Trajektorien von G_1 in W zeitartig, so heißt die Strömung *stationär* und im Spezialfall hyperflächennormaler Trajektorien *statisch*. Wenn K stationär und $\xi^a \sim u^a$ ist, soll die Strömung *isometrisch* und in dem allgemeineren Fall, wo $\xi^a \sim u^a$ und G_1 konform ist, soll sie *konform* genannt werden.

Unmittelbar aus den Definitionen gehen folgende Aussagen hervor:

1. Trägheitsströmungen sind durch das Bestehen der Gleichung

$$\omega_{ab} = u_{[a|b]} \tag{1.2.2}$$

gekennzeichnet.

(Wir erwähnen diese einfache Feststellung deshalb, weil (1.2.2) das *formale* Analogon der Gleichung $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ aus der klassischen Hydrodynamik ist, das also nur eingeschränkt gilt. Nach (1.1.17) gilt im momentanen Ruhsystem eines Substratelementes immer $(\omega^\nu) = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$, das entspricht *inhaltlich* der üblichen Formel.)

2. Eine Strömung ist genau dann wirbelfrei, wenn es (notwendig raumartige) Orthogonalhyperflächen zu den Materieweltlinien gibt[1], d. h. wenn (lokal) ein nicht konstanter Skalar t mit

$$\dot{t}\,u_a = -t_{|a} \,(\longleftrightarrow h^a_b t_{|b} = 0) \tag{1.2.3}$$

existiert[2].

Die Gleichung (1.2.3) ist zugleich kennzeichnend dafür, daß die durch t längs der Materieweltlinien definierten Zeitskalen im Einsteinschen Sinne synchron sind[3]. Nur für Trägheitsströmungen stimmt eine solche globale Zeitkoordinate t mit den Eigenzeiten s überein; für solche wirbelfreien Trägheitsströmungen ist $u_a = -t_{|a}$ und t eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$t_{|a}t^{|a} + 1 = 0 \tag{1.2.4}$$

für freie Teilchen im Gravitationsfeld.

3. Wirbelfreie Strömungen sind genau dann volumtreu, wenn die Orthogonalhyperflächen der Stromlinien minimal sind[4]. ($u^a{}_{||a} = 0$ ist nämlich

[1] Synge 1937 (**3**).

[2] Wir benutzen, daß $u_a dx^a$ genau dann einen integrierenden Faktor hat, wenn $u_{[a}u_{b;c]} = 0$ ist.

[3] Diese Synchronisationsbedingung wird gewöhnlich nicht kovariant und ohne Bezugnahme auf ihre weltgeometrische Bedeutung formuliert, vgl. z. B. (**1**), S. 259/260.

[4] Lichnerowicz 1955 (**2**).

die Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation des Volumens der zu u^a orthogonalen Hyperfläche.)

Eine ähnliche, für die Geometrie statischer Materiefelder nützliche Aussage ist.

4. Eine wirbelfreie Strömung ist genau dann starr, wenn ihre Orthogonalhyperflächen total geodätisch sind.

(Sei nämlich $\omega = 0$ und $x^a(\lambda)$ eine Geodätische, $\frac{dx^a}{d\lambda} = t^a$. Dann ist $\frac{d}{d\lambda}(u_a t^a) = u_{a\|b} t^a t^b = \left(\sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} - \dot{u}_a u_b\right) t^a t^b$, also pflanzt sich die Eigenschaft $u_a t^a = 0$ längs $x^a(\lambda)$ genau dann fort, wenn $\sigma = \theta = 0$ ist.)

5. Konforme Strömungen sind durch

$$\sigma = 0\,, \quad \left(\dot{u}_{[a} - \frac{1}{3}\theta u_{[a}\right)_{\|b]} = 0 \tag{1.2.5}$$

gekennzeichnet. Für sie existiert also ein Skalar U mit

$$\dot{u}_a - \frac{1}{3}\theta u_a = U_{|a} \quad \left(\dot{U} = \frac{1}{3}\theta\right). \tag{1.2.6}$$

(Die Bedingungen (1.2.5) besagen, daß ein Skalar U existiert derart, daß für $\xi^a = e^U u^a$ die verallgemeinerte Killing-Gleichung $\xi_{(a\|b)} = (e^U)^{\cdot}\, g_{ab}$ gilt.)

Daraus ergibt sich als Spezialfall:

6. Isometrische Strömungen sind durch

$$\sigma = \theta = 0\,, \quad \dot{u}_{[a|b]} = 0 \tag{1.2.7}$$

gekennzeichnet[1]. Für sie existiert also ein „*Beschleunigungspotential*":

$$\dot{u}_a = U_{|a}\,. \tag{1.2.8}$$

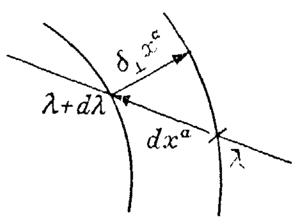
((1.2.7) bedeutet, daß ein Killingvektor mit u^a kollinear ist, nämlich $\xi^a = e^U u^a$ mit U nach 1.2.8).)

Die Relativbewegung zweier Teilchen gegeneinander und die durch $\dot{u}_a$ beschriebene „absolute Bewegung" jedes einzelnen äußern sich z. B. in der *Wellenlängenänderung*, die i.a. eintritt, wenn das eine dieser Teilchen monochromatische Strahlung aussendet, die das andere empfängt. Wir wollen uns (vor allem im Hinblick auf kosmologische Modelle) vorstellen, daß die Materieelemente des von uns betrachteten Substrates Licht aussenden und empfangen, und wollen für das Licht, das ein Teilchen von seinen Nachbarteilchen empfängt, $\frac{d\lambda}{\lambda}$ durch die kinematischen Größen der Strömung ausdrücken.

[1] Salzmann-Taub 1954 (4).

Ein Lichtstrahl wird in der geometrischen Optik durch eine geodätische Nullinie[1] $x^a(v)$ beschrieben: $k^a = \frac{dx^a}{dv}$, $k_a k^a = 0$, $\overset{r}{\nabla} k^a = 0$. Für monochromatisches Licht kann und soll k^a so gewählt werden, daß für einen Beobachter mit der Vierergeschwindigkeit u^a $-k_a u^a = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist[2]. Längs eines Strahls in unserem Substrat ist also nach (1.1.21) $\overset{r}{\nabla}(-u_a k^a)$ $= -u_{a||b} k^a k^b = -\left(\sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} - \dot{u}_a u_b\right) k^a k^b$. Außerdem ist (s. Figur)

$$\delta l^2 = h_{ab} dx^a dx^b = (u_a k^a)^2 dv^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 dv^2 .$$



Damit ergibt sich

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-\lambda}{2\pi} d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \left(\sigma_{ab} e^a e^b + \frac{1}{3}\theta\right)\delta l - \dot{u}_a \delta_\perp x^a ,$$

also nach (1.1.12) schließlich

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = (\delta l)^{\cdot} - \dot{u}_a \delta_\perp x^a . \tag{1.2.9}$$

Daraus ziehen wir zwei Folgerungen. Erstens schließen wir mittels (1.1.12):

7. Für ein Licht empfangendes Substratteilchen ist $\frac{d\lambda}{\lambda}$ genau dann unabhängig von der Richtung der infinitesimal benachbarten, strahlenden Teilchen, wenn seine Weltlinie L geodätisch ist und längs L die Scherungsgeschwindigkeit verschwindet; dann ist

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{3}\theta\delta l . \tag{1.2.10}$$

Zweitens verbinden wir (1.2.9) mit der Bemerkung **5.** und erhalten:

8. In einer konformen Strömung ist λe^{-U} längs eines Lichtstrahls konstant[3].

Die letzte Feststellung enthält die Theorie der Rotverschiebung in stationären und statischen Feldern und in den Friedmannschen kosmologischen Modellen[4]. In ersteren ist $\theta = 0$, $\dot{u} \neq 0$ und U (definitionsgemäß)

[1] Das Substrat soll den Brechungsindex $n = 1$ haben. [2] Vgl. z. B. (5), S. 16.

[3] Das folgt auch direkt daraus, daß das Skalarprodukt aus dem erzeugenden Vektor einer infinitesimalen Konformtransformation und dem (parallelverschobenen) Tangentenvektor einer Nullgeodätischen längs dieser Geodätischen konstant ist.

[4] Siehe Abschnitt 5.

das skalare Gravitationspotential[1], in letzteren ist $\theta \neq 0$, $\dot{u} = 0$ und e^U nach (1.2.6) proportional zum Krümmungsradius des Raumes[2], wenn in beiden Fällen als Weltlinien des Substrats die Trajektorien der zeitartig wirkenden Isometrie- bzw. Konformgruppe genommen werden.

3. Differentialidentitäten für kinematische Größen

Die Ableitungen der in 1. eingeführten kinematischen Größen sind nicht unabhängig voneinander, sondern erfüllen gewisse Identitäten, in die i.a. die Krümmungstensoren der Raum-Zeit eingehen. Diese Gleichungen sind von Bedeutung für die Herleitung von Fortpflanzungs- bzw. Erhaltungsgesetzen und für die Untersuchung der Beziehungen zwischen Feldgleichungen und Kurvenscharen. Wir wollen diese Identitäten hier allgemein, d. h. ohne einschränkende Voraussetzungen über die betrachteten Metriken oder Kurvenscharen, aufstellen.

Zunächst bestimmen wir die *Relativbeschleunigung* benachbarter Teilchen. Wir definieren sie analog zur Relativgeschwindigkeit v^a (s. (1.1.7)) durch

$$b^a = h^a_b \dot{v}^b \tag{1.3.1}$$

und erhalten für sie aus (1.1.9) unter Benutzung der Ricci-Identität den Ausdruck

$$b^a = (R^a{}_{bcd} u^b u^d + h^a_b \dot{u}^b{}_{||c} + \dot{u}^a \dot{u}_c)\, \delta_\perp x^c\,, \tag{1.3.2}$$

der die bekannte Formel für die geodätische Deviation[3] verallgemeinert.

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichungen (1.3.2) bringt den Einfluß der Weltkrümmung (in der Einsteinschen Theorie: des Gravitationsfeldgradienten) auf die Relativbeschleunigung zum Ausdruck. Der in ihm enthaltene Tensor $R_{abcd} u^d$ kann wegen der Ricci-Identität und (1.1.21) durch erste Ableitungen der kinematischen Größen ω_{ab}, σ_{ab}, θ, $\dot{u}_a$, u_a ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R_{abcd} u^d = {} & \omega_{c[a||b]} + \sigma_{c[a||b]} + \frac{1}{3} h_{c[a} \theta_{|b]} - \dot{u}_{c||[b} u_{a]} \\ & + \frac{1}{3} \theta \Big(u_c \omega_{ab} - u_c \dot{u}_{[a} u_{b]} - u_{[a} \omega_{b]c} \\ & + \sigma_{c[b} u_{a]} + \frac{1}{3} \theta g_{c[b} u_{a]} \Big) - \dot{u}_c (\omega_{ab} - \dot{u}_{[a} u_{b]})\,. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Durch Verjüngen erhält man hieraus $R_{ab} u^b$ und dessen Bestandteile $R_{ab} u^a u^b$, $h^{ab} R_{bc} u^c$. Nach Vereinfachung durch partielle Differentiation,

[1] Diese Definition wird nahegelegt durch (1.2.8) und erweist sich auch künftig als zweckmäßig. Vgl. dazu (2.2.10), Satz 2.3.2, Satz 2.4.4 und (**32**), ch. 2.

[2] Siehe Abschnitt 5. [3] Synge und Schild 1952 (**6**).

wobei die in 1. angegebenen Gleichungen (1.1.11, 21, 22) benutzt werden, ergeben sich die Formeln

$$R_{ab}u^a u^b = \dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - \dot{u}^a{}_{\|a} + 2(\sigma^2 - \omega^2) \tag{1.3.4}$$

und

$$h^{ab}R_{bc}u^c = h^a_b\left(\omega^{bc}{}_{\|c} - \sigma^{bc}{}_{\|c} + \frac{2}{3}\theta^{|b}\right) + (\omega^a{}_b + \sigma^a{}_b)\,\dot{u}^b\,. \tag{1.3.5}$$

Um schließlich noch den in (1.3.2) auftretenden Tensor $R_{abcd}u^b u^d$ durch kinematische Größen auszudrücken, überschieben wir (1.3.3) mit u^b und vereinfachen den zunächst noch sehr komplizierten Ausdruck durch Symmetrisieren bezüglich der Indizes a, c und Überschieben mit $h^a_e h^c_f$, was die linke Seite nicht ändert. Wir bekommen

$$\begin{aligned} R_{abcd}u^b u^d = {} & \omega_a\omega_c - \omega^2 h_{ac} + \sigma_{ab}\sigma^b_c + \frac{\ddot{l}}{l}h_{ac} - \dot{u}_a\dot{u}_c \\ & + h_{ab}h_{cd}(l^{-2}(l^2\sigma^{bd})^{\cdot} - \dot{u}^{(b\|d)})\,. \end{aligned} \tag{1.3.6.}$$

Dabei haben wir eine auch künftig nützliche Hilfsgröße l eingeführt durch

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{3}\theta\,, \quad \Rightarrow \frac{1}{3}\left(\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2\right) = \frac{\ddot{l}}{l}\,. \tag{1.3.7}$$

(l ist nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt, der längs der Stromlinien[1] konstant ist.)

Während die Gleichungen (1.3.4) bzw. (1.3.6) die Ableitungen der Größen θ bzw. σ_{ab} längs der Stromlinien enthalten, tritt bis jetzt $\dot{\omega}^a$ nicht auf[2]. Durch einige Umformungen kann man aber aus der Identität $R_{a[bc]d}u^a u^d = 0$ und (1.3.3) oder durch direkte Berechnung mittels der Definition (1.1.18) eine Fortpflanzungsgleichung für den Wirbelvektor ableiten, die verhältnismäßig einfach ist:

$$h^a_b(l^2\omega^b)^{\cdot} = \sigma^a{}_b l^2\omega^b + \frac{l^2}{2}\eta^{abcd}u_b\dot{u}_{c\|d} \tag{1.3.8}$$

oder gleichwertig damit

$$h^a_b(l^3\omega^b)^{\cdot} = u^a{}_{\|b}l^3\omega^b + \frac{l^3}{2}\eta^{abcd}u_b\dot{u}_{c\|d}\,. \tag{1.3.9}$$

Für den Wirbelskalar ergibt sich daraus

$$l^{-4}(l^4\omega^2)^{\cdot} = 2\sigma_{ab}\omega^a\omega^b + \omega_{ab}\dot{u}^{a\|b}\,. \tag{1.3.10}$$

[1] Stromlinien = Materieweltlinien.

[1] Daß für $\dot{u}^a$ keine Fortpflanzungsgleichung gilt, ist klar, weil u^a, $\dot{u}^a$, $\ddot{u}^a$ längs einer Kurve beliebig vorgegeben werden können unabhängig von den Nachbarkurven.

Der Vollständigkeit wegen geben wir noch die aus der Definition des Wirbelvektors folgende, im Hinblick auf die klassische Hydrodynamik etwas überraschende Identität

$$\omega^a{}_{||a} = 2\dot{u}_a\omega^a \tag{1.3.11}$$

an.

4. Wirbelsätze und Sätze über starre Kongruenzen

Als erste Anwendung der im letzten Abschnitt zusammengestellten Formeln wollen wir einige Sätze beweisen, die den *Wirbelsätzen* der klassischen Hydrodynamik entsprechen.

Wir bezeichnen als *Wirbellinien* einer Strömung die (raumartigen) Kurven, die den Wirbelvektor als Tangentenvektor haben; nach (1.1.18) schneiden sie die Stromlinien orthogonal.

Vorausgeschickt sei der

Hilfssatz. Die Stromlinien sind genau dann geodätisch bezüglich der Metrik $\bar{g}_{ab} = w^2 g_{ab}$ $(w > 0)$, wenn (bezüglich g_{ab})

$$\dot{u}_a = - h^b_a(\log w)_{|b} \tag{1.4.1}$$

ist.

Der Beweis ergibt sich z. B. daraus, daß (1.4.1) die Eulerschen Gleichungen zu dem Variationsproblem

$$\delta \int w\, ds = 0 \tag{1.4.2}$$

darstellen. – Nach (1.2.6) gilt (1.4.1) speziell für konforme Strömungen.

Wir erinnern ferner daran, daß zwei Vektorfelder ξ^a, η^a genau dann Flächen aufspannen, wenn ihr Kommutator $\xi^a{}_{|b}\eta^b - \eta^a{}_{|b}\xi^b$ (punktweise) linear von ihnen abhängt. Daraus und aus (1.3.9) folgt der

Satz 1.4.1. Die Strom- und Wirbellinien spannen genau dann Flächen („Wirbelflächen") auf, wenn

$$u^{[a}\omega^b\eta^{c]def}u_d\dot{u}_{e||f} = 0 \tag{1.4.3}$$

ist[1].

Die im Satz genannte Eigenschaft bedeutet anschaulich, daß die Wirbellinien zu allen Zeiten aus denselben Substratteilchen bestehen.

[1] Dieser und der folgende Satz hängen eng mit den von SYNGE (3), LICHNEROWICZ (2), FOURES-BRUHAT (7), GÖDEL (8), SCHÜCKING und HECKMANN (9) angegebenen Wirbelsätzen zusammen.

Die Bedingung (1.4.3) ist insbesondere für Trägheitsströmungen und allgemeiner für Strömungen mit (1.4.1) erfüllt. Aus (1.4.1) folgt nämlich

$$\frac{1}{2}\eta^{abcd}u_b\dot{u}_{c||d} = -\frac{\dot{w}}{w}\omega^a \qquad (1.4.4)$$

Diese Gleichung erlaubt, die Beziehungen (1.3.8, 9) zu vereinfachen und zu schließen:

Satz 1.4.2. In einer Strömung mit (1.4.1) gilt die Fortpflanzungsgleichung

$$h^a_b(wl^2\omega^b)^{\cdot} = \sigma^a{}_b wl^2\omega^b\,, \qquad (1.4.5)$$

der Vektor $\varepsilon wl^3\omega^a$ verbindet (für infinitesimales ε) benachbarte Teilchen, und für eine (dünne) Wirbelröhre ist die Wirbelstärke $w\omega\delta F$ zeitlich konstant: $(w\omega\delta F)^{\cdot} = 0$. ($\delta F$ sei der Flächeninhalt eines materiellen, zu ω^a senkrechten Querschnitts der Wirbelröhre.)

Korrolar 1. Wirbel können an einer bestimmten Materiestelle weder entstehen noch vergehen.

Korrolar 2. Die Richtung der lokalen Drehachse ist genau dann längs einer Stromlinie (im Sinne der Fermi-Verschiebung) konstant, wenn sie in eine Hauptscherungsrichtung fällt.

Zweitens wenden wir uns starren Strömungen zu. Für sie gilt der

Satz 1.4.3. In einer starren Strömung ist u^a längs der Wirbellinien und $R_{ab}u^au^b + \frac{1}{2}R + 3\omega^2$ längs der Stromlinien konstant. Ist außerdem u^a Ricci-Eigenvektor, so ist auch ω längs der Stromlinien konstant. Wenn zusätzlich (1.4.1) gilt und $\omega \neq 0$ ist, ist die Strömung isometrisch[1].

Beweise: Sei $\theta = \sigma = 0$. Dann folgt aus (1.1.21), (1.1.20) und (1.1.18) $u^a{}_{||b}\omega^b = 0$, also die erste Behauptung. – Aus (1.3.5) und den Definitionen in 1. folgt

$$q^a = h^{ab}R_{bc}u^c = \omega^{ab}{}_{||b} + \omega^{ab}\dot{u}_b - 2\omega^2u^a \qquad (1.4.6)$$

und daraus

$$q^a{}_{||a} + \dot{u}_aq^a = -2(\omega^2)^{\cdot} - \omega^{ab}\dot{u}_{a||b}\,, \qquad (1.4.7)$$

also wegen (1.3.10) (mit $l = 1$ wegen $\theta = 0$)

$$q^a{}_{||a} + \dot{u}_aq^a = -3(\omega^2)^{\cdot}\,. \qquad (1.4.8)$$

Um die zweite Behauptung zu beweisen, benötigen wir außerdem den „Erhaltungssatz" für den Einsteintensor $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$. Wegen

[1] RAYNER 1959 (10).

$\theta = \sigma = 0$ und (1.1.21) gilt $0 = u_a G^{ab}{}_{||b} = (u_a G^{ab})_{||b} + G^{ab} \dot{u}_a u_b$. Andererseits ist nach Definition $G^{ab} u_b = q^a - u^a G_{bc} u^b u^c$, folglich

$$q^a{}_{||a} + \dot{u}_a q^a = (G_{ab} u^a u^b)^{\cdot} \; . \tag{1.4.9}$$

Subtrahiert man hiervon (1.4.8), so erhält man die zweite Aussage des Satzes. – Die dritte Behauptung ergibt sich aus (1.4.8); denn $q^a = 0$ bedeutet ja, daß $R^a{}_b u^b$ proportional zu u^a ist. – Sei schließlich auch noch (1.4.1) erfüllt. Dann zeigt (1.4.6), daß

$$\omega^{ab}{}_{||b} - \omega^{ab} (\log w)_{|b} - 2\,\omega^2 u^a = 0 \tag{1.4.10}$$

gilt. Die Divergenz hiervon ergibt wegen $\dot{\omega} = 0$: $\omega^{ab}{}_{||a} (\log w)_{|b} = 0$. Überschieben von (1.4.10) mit $(\log w)_{|a}$ ergibt also $\omega^2 \dot{w} = 0$, so daß für $\omega \neq 0$ $\dot{w} = 0$ sein muß. Dann ist aber nach (1.4.1) $\dot{u}_a$ ein Gradient, so daß nach (2.**6**) eine isometrische Strömung vorliegt.

Dieser Satz enthält die merkwürdige Feststellung, daß ein starrer Körper in einem speziellen Einsteinraum ($R_{ab} = 0$) seine Winkelgeschwindigkeit nicht ändern kann. Das ist für den Spezialfall des Minkowski-Raumes früh bemerkt und als Argument gegen die Brauchbarkeit des Begriffs des starren Körpers in der speziellen Relativitätstheorie benutzt worden.

In dem nächsten Satz wollen wir die in (2.**6**) formal charakterisierten isometrischen Strömungen durch anschauliche kinematische Eigenschaften kennzeichnen:

Satz 1.4.4. Die isometrischen Strömungen sind unter den starren Strömungen dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen der Wirbelvektor längs der Stromlinien Fermi-verschoben wird und der Beschleunigungsvektor eines Teilchens stets auf dieselben Nachbarteilchen gerichtet ist:

$$\theta = \sigma = 0 \; : \; \dot{u}_{[a|b]} = 0 \Longleftrightarrow \{h^a_b \dot{\omega}^b = 0,\; h^a_b \ddot{u}^b = \omega^a{}_b \dot{u}^b\} \tag{1.4.11}$$

Beweis: Aus (1.3.8) folgt für $\theta = \sigma = 0$ die erste der beiden Äquivalenzaussagen

$$h^a_b \dot{\omega}^b = 0 \Longleftrightarrow u_{[a} \dot{u}_{b||c]} = 0 \Longleftrightarrow \{\dot{u}_{[a|b]} = u_{[a} p_{b]} \quad \text{mit } p_a = h^b_a \ddot{u}_b - \omega_{ab} \dot{u}^b\}. \tag{1.4.12}$$

Die zweite Äquivalenz ist richtig, da beide Gleichungen aussagen, daß $\dot{u}_{[a||b]}$ ein *einfacher*, u_a enthaltenden Bivektor ist. Der Wert von p_a folgt durch Überschieben der Gleichung $\dot{u}_{[a||b]} = u_{[a} p_{b]}$ mit u^b unter Benutzung der Orthogonalitätsforderung $u_a p^a = 0$ und der Identitäten $\dot{u}_a u^a = 0$ und (1.1.21). Aus (1.4.12) ist die Richtigkeit der Behauptung (1.4.11) abzulesen.

Der Satz 1.4.4 enthält eine anschauliche und rein kinematische, d. h. von Feldgleichungen unabhängige *Kennzeichnung stationärer* und speziell statischer *Raum-Zeiten:* Eine Welt ist genau dann stationär, wenn (mindestens) eine Wolke von Probekörpern sich darin unter dem Einfluß innerer, nichtgravischer Kräfte starr und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit zu bewegen vermag. Ein Probekörper der Ruhmasse m bewegt sich nämlich nach der Gleichung $m\dot{u}^a = K^a (u_a K^a = 0)$, und wir können annehmen, daß bei starrer Bewegung die auf ein Teilchen von den übrigen ausgeübte Kraft der Größe nach konstant ist und ihre Orientierung zu den Nachbarteilchen sich nicht ändert. Statische Welten sind dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen Probekörperbewegungen der eben beschriebenen Art ohne Drehung möglich sind.

Satz 1.4.5. Die Trajektorien einer isometrischen Strömung sind genau dann Ricci-Eigenlinien, wenn ein Skalar V mit[1]

$$\omega_a = e^{-2U} V_{|a} \tag{1.4.13}$$

existiert. Wenn das zutrifft, genügt V der Gleichung

$$(e^{-4U} V^{|a})_{||a} = 0 \,. \tag{1.4.14}$$

Beweis: Aus den Definitionen der kinematischen Größen folgt die Identität $h^a_b \omega^{bc}{}_{||c} + \omega^{ab}\dot{u}_b = -\eta^{abcd} u_b(\omega_{c|d} + 2\omega_c \dot{u}_d)$, so daß wir aus (1.3.5) für $\theta = \sigma = 0$ schließen können:

$$u_{[a} R_{b]c} u^c = 0 \Longleftrightarrow u_{[a}\omega_{b||c]} + 2 u_{[a}\omega_b \dot{u}_{c]} = 0 \,. \tag{1.4.15}$$

Wenn wir die rechts stehende Gleichung mit u^a überschieben, die Voraussetzung $\dot{u}_a = U_{|a}$ und die daraus nach Satz 1.4.4 folgende Beziehung $h^a_b \dot{\omega}^b = 0$ benutzen und $\omega_a u^a = 0$ berücksichtigen, erhalten wir aus (1.4.15) für isometrische Strömungen die schärfere Äquivalenz

$$u_{[a} R_{b]c} u^c = 0 \Longleftrightarrow \omega_{[a|b]} + 2\omega_{[a} U_{|b]} \Longleftrightarrow (e^{2U}\omega_{[a})_{|b]} = 0$$

und damit die erste Aussage des Satzes. Die zweite Aussage folgt direkt aus (1.4.13), (1.3.11) und $\dot{u}_a = U_{|a}$.

Zum Abschluß dieser Erörterungen beweisen wir noch einen Satz, der – in Analogie zu gewissen Sätzen aus der Theorie der reinen Gravitationsstrahlungsfelder[2] – zeigt, daß Kurvenscharen mit bestimmten kinematischen Eigenschaften u. U. nur in Raum-Zeiten existieren können, deren Konformkrümmungstensoren einem bestimmten *Petrov-Typ* angehören.

[1] U sei durch (1.2.8) definiert.

[2] Vgl. dazu JES 1961 (**13**) und die dort angegebene Literatur.

Satz 1.4.6. In einer Raum-Zeit W sei K eine wirbel- und scherungsfreie Schar zeitartiger Kurven. Wenn außerdem K starr oder u^a ein Ricci-Eigenvektor ist, sind die Kurven von K Ricci-Eigenlinien, der Konformtensor von W hat den Typ I und reelle Eigenwerte, und u^a ist ein Weyl-Hauptvektor.

Beweis: Sei $\sigma = \theta = \omega = 0$. Dann zeigt ein Blick auf (1.3.3), daß

$$u_{|a} R_{bc|de} u^e = 0 \tag{1.4.16}$$

ist, und (1.3.5) reduziert sich auf

$$u_{|a} R_{b|c} u^c = 0 \,. \tag{1.4.17}$$

Aus der Definitionsgleichung für den Konformtensor C_{abcd} und den beiden vorangehenden Relationen ergibt sich

$$u_{a[} C_{bc|de} u^e = 0 \quad \text{oder} \quad -{}^*C_{abcd} u^b u^d \equiv H_{ac} = 0 \,. \tag{1.4.18}$$

Das ist aber kennzeichnend für die behaupteten Eigenschaften. Wird andererseits $\sigma = \omega = 0$ und (1.4.17) vorausgesetzt, so ist nach (1.3.5) $\theta_{,a} \sim u_a$, also gilt wieder (1.4.16), so daß der Beweis erbracht ist.

Wir bemerken noch, daß unter den Voraussetzungen des letzten Satzes $E_{ac} \equiv -C_{abcd} u^b u^d$ mittels (1.3.4, 5, 6) durch R und kinematische Größen ausgedrückt werden kann und daß der Satz eine bekannte Aussage über statische Vakuumfelder[1] verallgemeinert.

5. Kinematische Kennzeichnungen kosmologischer Modelle

Unter den aus einem vierdimensionalen nomalhyperbolischen Riemannraum W und einer in ihn eingebetteten Schar K zeitartiger Kurven bestehenden Strukturen (W, K) sind diejenigen, die in kosmologischen Theorien als Modelle für die Maßverhältnisse des Kosmos und die (mittlere) Bewegung seiner Materie benutzt werden, durch hohe Symmetrie ausgezeichnet. Wir wollen sie aus möglichst schwachen und anschaulichen Forderungen ableiten.

Definition. Eine Strömung (W, K) heißt *isotrop* bezüglich $k \in K$, wenn eine Gruppe G isometrischer Abbildungen von W auf sich existiert mit den Eigenschaften

a) Die Abbildungen aus G lassen k punktweise fest

b) Die Abbildungen aus G induzieren Permutationen von K

c) G ist transitiv bezüglich der von k ausgehenden, auf k senkrechten Richtungen.

[1] PIRANI 1957 (**11**), JEK 1960 (**12**).

Wenn (W, K) bezüglich k isotrop ist, sind alle aus g_{ab} und u^a konstruierten Tensoren invariant unter G. Deshalb muß dann längs k $\omega = \sigma = \dot{u} = 0$ und $\theta^{|a} \sim u^a$ sein; denn sonst würden ω^a, $\sigma^a{}_b$, $\dot{u}^a$, $h^{ab}\theta_{|b}$ ausgezeichnete Raumrichtungen bestimmen, was mit c) unvereinbar ist[1].

Sei (W, K) bezüglich aller $k \in K$ isotrop. Dann ist also K eine wirbelfreie Trägheitsströmung und nach (2.2) $u_a dx^a = -dt$ mit geeignetem Skalar t. Wegen $\theta_{|a} \sim u_a$ ist $\theta = \theta(t)$, also können wir die in (1.3.7) eingeführte Größe l so wählen, daß $l = l(t)$ ist. Aus a) und b) folgt, daß die (zu K orthogonalen) Hyperflächen $t =$ const. durch G auf sich abgebildet werden. Nach c) und dem Satz von SCHUR sind diese Hyperflächen Räume konstanter Krümmung $K(t)$. Sie werden durch K wegen $\sigma = 0$ konform aufeinander abgebildet (siehe (1.1.12)); deshalb kann der bis jetzt nur bis auf einen konstanten Faktor festgelegte „Expansionsradius" $l(t)$ so gewählt werden, daß $K = \varepsilon l^{-2}$ $(\varepsilon = \pm 1, 0)$ ist. Da die metrische Fundamentalform G nach der Definition (1.1.5) von h_{ab} gleich $h_{ab}dx^a dx^b - (u_a dx^a)^2$ ist, folgt weiter, daß bei Benutzung eines Koordinatensystems (x^a) mit $(x^\nu)^\cdot = 0$, $x^4 = t$

$$G = l^2(t)\, d\sigma^2 - dt^2, \quad u^a = \delta^a_4 \tag{1.5.1}$$

ist, worin $d\sigma^2$ eine (nur von x^ν abhängende) Metrik eines 3-Raumes konstanter Krümmung ε ist. Die durch (1.5.1) beschriebenen (W, K) sind isotrop und sogar homogen; es gilt also der

Satz 1.5.1. (W, K) ist genau dann bezüglich aller $k \in K$ isotrop, wenn K eine wirbel- und scherungsfreie Trägheitsströmung in W beschreibt, die Orthogonalhyperflächen R_t zu K Räume konstanter Krümmung sind und die Expansionsgeschwindigkeit längs der R_t konstant ist; eine Normalform für (g_{ab}, u^a) ist (1.5.1). In einer isotropen Strömung sind die Kurven von K Ricci-Eigenlinien.

In der Literatur werden die Modelle (1.5.1) gewöhnlich nach ROBERTSON 1933 (**14**) aus folgenden Postulaten abgeleitet: 1) $\dot{u} = 0$ 2) $\omega = 0$ 3) Isotropie 4) Homogenität. Dabei wird gelegentlich darauf hingewiesen, daß 4) überflüssig ist. Unser naheliegender Beweis zeigt, daß 1) und 2) und damit die Existenz einer kosmischen Zeit („Weylsches Postulat", vgl. (**14**) und (**15**)) auch aus 3) folgen, und zwar ohne formale Hilfsmittel aus der Gruppentheorie. Der hier gegebene Beweis kann als Durchführung der von EINSTEIN 1950 (**16**), App. I, skizzenweise gegebenen Überlegungen aufgefaßt werden.

Es sei noch bemerkt, daß eine isotrope Strömung wegen $u_a = -t_{|a}$, $\sigma = 0$ und $l = l(t)$ konform ist (vgl. (2.5)) mit lu^a als erzeugendem Vektor, so daß nach **8** längs eines Lichtstrahls $\frac{\lambda}{l}$ konstant ist, und daß nach

[1] Wegen $\sigma^a{}_a = 0$ hat $\sigma^a{}_b$ für $\sigma \neq 0$ (mindestens) einen zu u^a orthogonalen nichtentarteten Eigenvektor.

(1.1.9, 10) bzw. nach (1.3.2, 6) das lokale Relativgeschwindigkeits- bzw. Relativbeschleunigungsfeld durch

$$v^a = \frac{\dot{l}}{l}\,\delta_\perp x^a\,, \quad b^a = \frac{\ddot{l}}{l}\,\delta_\perp x^a \tag{1.5.2}$$

gegeben ist.

Kinematisch ausgezeichnete Spezialfälle der durch Satz 1 gekennzeichneten Modelle sind

A) die statischen ($\dot{l} = 0$, $\to v^a = 0$), die (unabhängig von Satz 1) durch $\dot{u} = \omega = \sigma = \theta = 0$ ($\Longleftrightarrow u_{a||b} = 0$) charakterisiert sind,

B) das de Sittersche ($\Longleftrightarrow$ „Steady-State") Modell ($l \sim e^{Ht}$, $\varepsilon = 0$), gekennzeichnet durch stationäre Expansion, d. h. $\theta \neq 0 = \dot{\theta} = \dot{K}$,

C) das Milnesche Modell ($\varepsilon = -1$, $l \sim t$, $\to b^a = 0$), gekennzeichnet durch die Flachheit von W.[1]

Wir wollen nun die einfachsten kosmologischen *Modelle mit rotierendem Substrat* kinematisch kennzeichnen.

Satz 1.5.2. 1) (W, K) beschreibe eine Trägheitsströmung mit folgenden Eigenschaften: (a) In der infinitesimalen räumlichen Umgebung jedes Substratteilchens sei die Richtung der Drehachse konstant, d. h. es sei $\left(\frac{\omega^a}{\omega}\right)_{||b}\delta_\perp x^b = 0$. (b) Die Drehachse sei eine Hauptscherungsrichtung. Dann läßt sich (g_{ab}, u^a) auf die Normalform

$$u^a = \delta^a_4\,,\ G = dz^2 + \gamma_{AB}(x^A, t)\,dx^A dx^B - (dt + u_A(x^B)\,dx^A)^2 \quad (A = 1, 2) \tag{1.5.3}$$

bringen, und diese Normalform ist für die genannten Eigenschaften kennzeichnend.

2) (W, K) habe die in 1) genannten Eigenschaften, und es sei $\sigma = 0$. Dann ist $\theta = 0$, in (1.5.3) $\gamma_{AB|t} = 0$, und ω ist in den Wirbelflächen konstant.

3) Ist zusätzlich zu 2) u^a Ricci-Eigenvektor, so ist ω konstant (und damit $\omega_{a||b} = 0$).

Beweis: 1) Aus $\dot{u} = 0$, (b) und Satz 1.4.2 folgt $\left(\frac{\omega^a}{\omega}\right)^{\cdot} = 0$; daraus und aus (a) folgt $\left(\frac{\omega^a}{\omega}\right)_{||b} = 0$. Danach zerfällt W direkt, d. h. $G = dz^2 + G'(x^A, t)$ mit $\omega^a = \omega\,\delta^a_3$ ($z = x^3$). Wegen $u^a\omega_a = 0$, also $u^3 = 0$, sind die natürlichen Projektionen der Stromlinien in den 3-Raum (x^A, t) Geodätische bezüglich G', also ist (1.3.5) erreichbar. Die Umkehrung ist trivial.

2) Aus der Normalform (1.5.3) ist abzulesen, daß benachbarte Teilchen mit gleichen x^A starr verbunden sind, so daß aus $\sigma = 0$ wegen (1.1.12)

[1] $R_{ab} = 0$ würde genügen, da alle Modelle (1.5.1) konform flach sind wegen der Existenz einer dreidimensionalen Isotropiegruppe, vgl. z. B. JEK, S. 43.

$\theta = 0$ und daraus weiter $\gamma_{AB\|t} = 0$ folgt. Nach Satz 1.4.2 wird jetzt ω^a längs der Stromlinien parallel verschoben, also ist $\omega_{;a} u^a = 0$. Außerdem ist nach (1.3.11) $0 = \left(\frac{\omega^a}{\omega}\right)_{\|a} = \omega_{a|} \omega^a$, folglich ist $\omega = \omega(x^4)$.

3) Nach Satz 1.4.5 ist jetzt $\omega_a = \omega z_{|a}$ ein Gradient, also $\omega = \omega(z)$. Andererseits war $\omega = \omega(x^4)$; beides zusammen ergibt $\omega =$ const.

Dieser Satz wird uns später eine einfache Ableitung des Gödelschen kosmologischen Modells ermöglichen.

Bei starrer Trägheitsströmung sind nach (1.1.9, 10) und (1.3.2, 6) Relativgeschwindigkeit und -beschleunigung durch die Formeln

$$v^a = \omega^a{}_b \delta_\perp x^b, \quad b^a = \omega^a \omega_c \delta_\perp x^c - \omega^2 \delta_\perp x^a \tag{1.5.4}$$

der elementaren Kinematik gegeben. Nach (2.**8**) tritt bei solchen Bewegungen (auch zwischen endlich entfernten Teilchen) keine Änderung der Frequenz von Lichtsignalen auf. Der transversale Doppler-Effekt wird hier – korrespondenzmäßig gesprochen – durch die gravische „Rotverschiebung" kompensiert. (In der Minkowskiwelt sind starre Strömungen notwendig nicht geodätisch, so daß die eben beschriebene Kompensation nicht auftreten kann.)

Kapitel 2. Dynamik

1. Die Gravitationsfeldgleichungen. Ähnlichkeitsgesetz

Die empirisch mit großer Genauigkeit nachgewiesene, im Rahmen des Begriffssystems der Newtonschen Mechanik und Gravitationstheorie aber nur durch eine Hypothese ad hoc formulierbare lokale Äquivalenz von Trägheits- und Gravitationskräften hat EINSTEIN zu der Vermutung geführt, daß diese beiden „Kräfte" Äußerungen ein und derselben Struktureigenschaft der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit sind, für die Weyl die suggestive Bezeichnung *Führungsfeld* geprägt hat. Die lokale Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie veranlaßt dazu, diese Struktureigenschaft mathematisch durch eine normalhyperbolische Riemannsche Metrik darzustellen[1].

Da einerseits die Materie das Gravitationsfeld erzeugt und die Poissonsche Gleichung dies erfahrungsgemäß gut beschreibt, andererseits in der neuen Theorie g_{ab} die Zustandsgröße des Führungsfeldes ist, und weil in der speziellen Relativitätstheorie die mechanischen Eigenschaften der Materie durch den *Energie-Impuls-Spannungstensor* T_{ab} beschrieben werden, liegt es nahe anzunehmen:

1) Die Komponenten T_{ab} des Materietensors sind gleich quasilinearen Differentialausdrücken zweiter Ordnung in den Komponenten g_{ab} des Maßtensors.

Allein aus dieser sehr allgemeinen Annahme folgt nach einem von WEYL bewiesenen Satz[2], daß die Feldgleichung die Form[3]

$$G_{ab} + (MG - \Lambda)\, g_{ab} = -\varkappa T_{ab} \tag{2.1.1}$$

hat; darin sind Λ, M und $\varkappa$ ($\neq 0$) Konstanten der Dimensionen[4] bzw. -2, 0, 0.

[1] Die hier skizzierte Darstellung der Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie folgt — mit einigen Modifikationen und Ergänzungen — WEYL 1921 (18) und PAULI 1921 (19). [2] (18), 4. Aufl., Anhang II.

[3] G_{ab} = Einsteintensor, s. S. 6, $G \equiv G^a{}_a$.

[4] Bezüglich der Länge; $c = 1$, $\gamma = \frac{1}{8\pi}$, vgl. S. 6.

Diese Gleichung ist in den g_{ab} nichtlinear, d. h. die Annahme 1) enthält bereits, daß das Maßfeld eine Wechselwirkung zwischen materieerfüllten Weltkanälen vermittelt.

Die Symmetrie des Materietensors braucht hier nicht wie in der speziellen Relativitätstheorie als eine unabhängige Hypothese (Äquivalenz von Impuls- und Energiestromdichte) eingeführt zu werden, sondern folgt — wenn man das Postulat 1) als implizite Definition von T_{ab} betrachtet — aus dem genannten Weylschen Satz; es gibt nämlich im Riemannschen Raum keinen quasilinearen, invarianten Bivektor 2. Ordnung der Metrik g_{ab}. Die Symmetrie des Materietensors ist in der allgemeinen Relativitätstheorie eine notwendige Bedingung dafür, daß er als Quelle des Maßfeldes im Sinne von 1) auftreten kann.

Aus (2.1.1) folgt $-G(1 + 4M) + 4\Lambda = \varkappa T$, also ist, weil nicht immer $T = \text{const.}$ ist, $1 + 4M \neq 0$. Daraufhin erhält man aus (2.1.1) wegen der Bianchi-Identität die Divergenzgleichung

$$T^{b}_{a\|b} = e T_{|a} \quad \left(e = \frac{M}{1 + 4M}\right). \tag{2.1.2}$$

Für den besonders einfachen Fall nur gravisch wechselwirkender Materie mit der Eigendichte ϱ der Ruhmasse und der Vierergeschwindigkeit u^a ist nach den oben skizzierten Grundgedanken der Theorie

$$T_{ab} = \varrho u_a u_b \quad (\varrho > 0) \tag{2.1.3}$$

zu setzen[1]. (2.1.2) ist dann mit dem Gleichungssystem

$$(\varrho u^a)_{\|a} = e\dot{\varrho}\,, \quad \dot{u}_a = -e h^b_a (\log \varrho)_{|b} \tag{2.1.4}$$

äquivalent.

Die bisher eingeführten Annahmen führen also zu einer Theorie, in der sich inkohärente Materie auf Geodätischen der Metrik $\bar{g}_{ab} = \varrho^{2e} g_{ab}$ bewegt (1.4, Hilfssatz) und in der spontan Ruhmasse mit der Produktionsdichte $e\dot{\varrho} = \frac{e}{e-1}\varrho\theta$ entsteht.

Wenn man entweder die Zusatzannahme

2a) Die Ruhmasse nur gravisch wechselwirkender Materie bleibt erhalten

oder

2b) Die Stromlinien nur gravisch wechselwirkender Materie sind Geodätische bezüglich der „natürlichen" Metrik g_{ab}

[1] Siehe dazu die Abschnitte 4 und 5 dieses Kapitels.

macht, folgt $e = M = \mathbf{0}$, und wir erhalten aus (2.1.1) die *Einsteinsche Feldgleichung*

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} = -\varkappa T_{ab} \tag{2.1.5}$$

und daraus den sogenannten *Erhaltungssatz*

$$T^{ab}{}_{||b} = 0\,, \tag{2.1.6}$$

der für (2.1.3) wieder auf 2a) und 2b) als Folgerungen führt.

Da gegenwärtig kein Anlaß besteht, die einfache Annahme 2a) zu verwerfen und unabhängig davon 2b) in der einfachsten Weise der Idee des Führungsfeldes entspricht[1], legen wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit die klassische Gleichung (2.1.5) zugrunde.

Die allgemeinere Theorie mit $e \neq 0$ kann leicht entwickelt werden und führt für $|e| \ll 1$ auf eine zur Jordanschen „erweiterten Gravitationstheorie" (**25**), (2. und 3. Buch) und zur Hoyleschen kosmologischen Theorie[2] ähnliche, aber einfachere und, wie uns scheint, vom Standpunkt der lokalen Physik aus besser begründete Theorie (s. o.); wir führen keine neue Hypothese ein, sondern lassen nur eines der Axiome der Einsteinschen Theorie, und zwar das mathematisch unwichtigste, weg. Es ist leicht zu sehen, daß diese Theorie mit einem stationären Zustand im Sinne des PCP von Bondi und Gold[2] unvereinbar ist. Wir bemerken noch, daß in der Theorie mit $e \neq 0$ für ein Maxwell-Feld (2.1.6) gilt, so daß die Theorie der Lichtfortpflanzung ungeändert bleibt.

Durch Betrachtung der zentralsymmetrischen Lösungen[3] von (2.1.5) ergibt sich, daß (bei unserer Einheitenwahl, s. S. 6)

$$\varkappa = 1 \tag{2.1.7}$$

gesetzt werden muß. Darin kommt zum Ausdruck, daß Materie gravisch anzieht und nicht abstößt.

Das *kosmologische Glied* Λg_{ab} in (2.1.5) kann man ausschließen ($\Lambda = 0$) durch jede der folgenden zwei Annahmen:

3a) Die Feldgleichungen enthalten außer der Lichtgeschwindigkeit und der Newtonschen Gravitationskonstante keine dimensionsbehaftete Konstante.

3b) Im Vakuum ist (entsprechend der Laplaceschen Gleichung in der Newtonschen Theorie) die Spur des Tensors, der den relativen Ortsvektor

[1] Vgl. dazu M. Fierz 1956 (**26**).

[2] Vgl. Bondi 1960 (**15**), Heckmann-Schücking 1959 (**27**) und die dort zitierten Arbeiten.

[3] oder mittels (2.2.10) oder auch (2.5.1), indem zunächst $\varkappa$ beibehalten und dann durch Korrespondenz mit entsprechenden Gleichungen der Newtonschen Theorie festgelegt wird.

benachbarten freier Probekörper in deren Relativbeschleunigung transformiert, gleich Null[1].

Obwohl wir die Spezialisierung $\Lambda = 0$ aus methodischen Gründen für zweckmäßig halten, solange nicht bestimmte Erfahrungen auf $\Lambda \neq 0$ hinweisen, wollen wir doch wegen der mathematischen Allgemeinheit nur dann $\Lambda = 0$ setzen, wenn diese Einschränkung sonst nicht gültige Sätze abzuleiten erlaubt.

Nach den Gesetzen der klassischen Hydrodynamik (mit Gravitationswechselwirkung) gibt es zu jeder Strömung eine zweiparametrische Schar ähnlicher Strömungen. Das hängt eng damit zusammen, daß in die Grundgleichungen nur eine dimensionsbehaftete universelle Konstante, die Gravitationskonstante, eingeht, so daß nur eine der drei Grundgrößen Länge, Masse, Zeit durch Wahl einer „rationellen" Einheit (etwa für die Masse) eliminiert werden kann. In der Relativitätstheorie enthält schon die Kinematik eine Konstante, nämlich c; man wird also für $\Lambda \neq 0$ keine und für $\Lambda = 0$ eine einparametrige Schar ähnlicher Strömungen zu einer gegebenen Strömung erwarten.

Tatsächlich zeigt die Feldgleichung (2.1.5), daß für $\Lambda = 0$ (und nur dann) aus jeder Lösung (g_{ab}, T_{ab}) eine Schar ähnlicher Lösungen $(\bar{g}_{ab}, \overline{T}_{ab})$ durch $\bar{g}_{ab} = m^2 g_{ab}$, $\overline{T}_{ab} = T_{ab}$ $(m > 0)$ gewonnen werden kann. Die Raum-Zeit $\overline{W}$ ist nur dann zu W äquivalent, wenn W eine homothetische Abbildung auf sich gestattet.

Bei einer Klassifikation strenger Lösungen von (2.1.5) mit $\Lambda = 0$ ist es danach zweckmäßig, die Lösungen nach Scharen untereinander ähnlicher zu ordnen und als kennzeichnende Daten einer speziellen Lösung einen „Ähnlichkeitsparameter" (proportional zu dem obigen m) und solche Invarianten oder Eigenschaften zu wählen, die die ganze Schar charakterisieren[2].

Zum Beispiel ist innerhalb der Schar der Schwarzschild-Vakuumfelder der Gravitationsradius ein solcher Ähnlichkeitsparameter, und die Schar als solche ist durch die Eigenschaft „Kugelsymmetrie" gekennzeichnet. Beispiele dafür, daß die obige Ähnlichkeitstransformation zu äquivalenten Welten führt, stellen Levi-Civitas statische zylindersymmetrische Vakuumfelder dar.

2. Erhaltung der Ruhmasse, Energiesatz und Bewegungsgleichung für ponderable Materie

Um festzustellen, ob und in welchem Sinne die Divergenzgleichung (2.1.6) auch in Gravitationsfeldern ($R_{abcd} \neq 0$) die Erhaltung von Energie

[1] Vgl. (1.3.2) für $\alpha = 0$. 3b) ist PIRANIS Kennzeichnung spezieller Einsteinräume, s. PIRANI 1956 (28).

[2] Zu letzteren gehören etwa der Petrov-Typ des Konformtensors und der Strukturtensor einer Isometriegruppe.

und Impuls beschreibt, kann man sie[1] entweder durch Addition eines Affintensors in eine gewöhnliche Divergenzgleichung verwandeln und so zwei außer materiellen auch gravische Energien bzw. Impulse enthaltende lokale Erhaltungsbilanzen für endliche Volumina aufstellen — was bekanntlich aus mehreren Gründen bis jetzt nicht zu klaren Einsichten geführt hat — oder eine *mittlere Vierergeschwindigkeit* u^a der Materie einführen und substantielle, auf ein Materieelement bezogene Bilanzen aufstellen. Das zweite, der Thermo-Hydrodynamik entsprechende Verfahren wollen wir kurz beschreiben[2].

Zunächst kann man einen symmetrischen Tensor T_{ab} bezüglich eines beliebigen zeitartigen Einheitsvektors u^a eindeutig so zerlegen:

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + 2 u_{(a} q_{b)} + \pi_{ab} \tag{2.2.1}$$

mit h_{ab} nach (1.1.5),

$$q_a u^a = 0, \quad \pi_{ab} u^b = 0\,, \quad \pi^a{}_a = 0\,. \tag{2.2.2}$$

Durch Überschieben von (2.1.6) mit u_a, partielle Differentiation und Benutzung der mittels u_a gebildeten, in 1.1 definierten kinematischen Größen leitet man dann die Gleichung

$$\dot{\mu} + (\mu + p)\,\theta + \frac{1}{2}\,\pi_{ab}\sigma^{ab} + q^a{}_{||a} + q_a \dot{u}^a = 0 \tag{2.2.3}$$

ab. Entsprechend ergibt sich aus dem „räumlichen" Anteil der Gleichung (2.1.6)

$$(\mu + p)\,\dot{u}_a + h^b_a(\dot{q}_b + p_{|b} + \pi^c_{b||c}) + (\omega_{ab} + \sigma_{ab})\,q^b + \frac{4}{3}\,\theta q_a = 0. \tag{2.2.4}$$

Diese beiden Gleichungen sind bei gegebener Zerlegung (2.2.1) mit der Relation (2.1.6) gleichwertig.

Die Gleichungen (2.1.5) und (2.2.3, 4) erhalten erst einen konkreten physikalischen Inhalt, wenn die Art der felderzeugenden Materie angegeben wird und die eingeführten Hilfsgrößen dementsprechenden Zustandsgleichungen unterworfen werden.

Für (makroskopisch betrachtet) stetig ausgebreitete, ponderable Materie ist es erlaubt anzunehmen, daß für eine eindeutig bestimmte Vierergeschwindigkeit[3] u^a der Hauptanteil der Energiedichte μ die positive,

[1] oder die entsprechende Gleichung für die Tensordichte $(-g)^{1/2}\,T^{ab}$.

[2] Wir folgen im wesentlichen Eckart 1940 (**20**), dessen Ergebnisse wir durch die „Navier-Stockes"-Gleichung (2.2.4) vervollständigen.

[3] die lokale „baryzentrische" Geschwindigkeit, vgl. dazu z. B. Meixner und Reik 1959 (**21**).

erhalten bleibende *Eigendichte* ϱ *der Ruhmasse* ist,

$$(\varrho u^a)_{||a} = 0 \quad (\Leftrightarrow \varrho \dot{v} = 0,\ v = \frac{1}{\varrho} = \text{spez. Volumen}) \qquad (2.2.5)$$

Die (i.a. nur wenig von 1 abweichende) Größe $u = \frac{\mu}{\varrho}$ ist dann die *spezifische innere Energie*. Unter dieser Voraussetzung ist die aus (2.2.3, 5) folgende Beziehung

$$\varrho \frac{du + p\,dv}{ds} + q^a{}_{||a} + \frac{1}{2}\pi_{ab}\sigma^{ab} + q_a \dot{u}^a = 0 \qquad (2.2.6)$$

als die ***substantielle, thermodynamische Energiebilanz***, die Gleichung (2.2.4) als die *Impulsbilanz* oder *Bewegungsgleichung*[1] und sind die Größen p, q^a und π_{ab} bzw. als *Druck*, *Energiestromdichte* relativ zur Materie (herrührend von Transportvorgängen wie Diffusion und Wärmeleitung) und *Reibungsdruck*tensor zu bezeichnen.

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den entsprechenden nichtrelativistischen nur um die durch die Trägheit der Energie bedingten, sehr kleinen Glieder $q_a \dot{u}^a$ bzw. $h^b_a \dot{q}_b + \left(\omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{4}{3}\theta h_{ab}\right) q^b$ und dadurch, daß in (2.2.4) $(\mu + p)$ statt ϱ als *effektive Dichte der trägen Masse* auftritt.

Aus der Definition (1.3.7) von l und (2.2.5) geht hervor, daß die Erhaltung der Ruhmasse auch in der besonders anschaulichen Form

$$\varrho l^3 = \text{const. (längs der Stromlinien)} \qquad (2.2.7)$$

geschrieben werden kann.

Aus der Definition des Einsteintensors, (2.1.5), (2.2.1) und (2.2.2) folgt

$$R = 3p - \mu - 4\Lambda,\quad R_{ab}u^a u^b = \Lambda - \frac{1}{2}(\mu + 3p),\quad h^{ab}R_{bc}u^c = q^a. \qquad (2.2.8)$$

Also sind die Stromlinien der Materie genau dann Ricci-Eigenlinien, wenn kein Energiestrom relativ zur Materie stattfindet.

Die letzte Bemerkung und (2.2.8) erlauben eine dynamische Interpretation einiger Aussagen in den Abschnitten 1.4 und 1.5.

Aus (1.3.4), (1.3.7) und (2.2.8) ergibt sich die Gleichung

$$3\frac{\ddot{l}}{l} + 2(\sigma^2 - \omega^2) - \dot{u}^a{}_{||a} + \frac{1}{2}(\mu + 3p) - \Lambda = 0\,. \qquad (2.2.9)$$

[1] LICHNEROWICZ (2) hat unter Benutzung der in 2.3 erwähnten Hilfsmetrik für eine Klasse formal definierter Medien eine andere relativistische Bewegungsgleichung vorgeschlagen, die wir für physikalisch nicht begründet halten.

Sie zeigt, daß die Größe $-\Lambda + \frac{1}{2}(\mu + 3p) - 2\omega^2$ bei starren Strömungen die Quelldichte des Beschleunigungsfeldes ist. Diese Aussage kann als relativistisches Analogon des Gaußschen Satzes div $\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\varrho + 2\omega^2$ ($\mathbf{F}$ = Feldstärke des Gravitations- und Zentrifugalfeldes in einem starr rotierenden System) aufgefaßt werden[1]. Bei isometrischen Strömungen erhält man wegen (1.2.8) die „Poisson"-Gleichung

$$U^{\|a}_{\ a} = -\Lambda + \frac{1}{2}(\mu + 3p) - 2\omega^2 \quad (\dot{U} = 0)\,. \tag{2.2.10}$$

Die Umformung in eine dreidimensionale Divergenzgleichung legt nahe, $(\mu + 3p)\, e^U$ als *effektive Dichte der aktiven Gravitationsmasse* zu bezeichnen[2].

3. Entropiesatz. Ideale Flüssigkeiten. Isentropische Strömungen

Eine genaue Beschreibung der Materie erfordert außer den im vorigen Abschnitt eingeführten Begriffen und Gesetzen weitere thermodynamische Betrachtungen, die hier nicht allgemein ausgeführt werden sollen; wir verweisen für die relativistische Thermodynamik irreversibler Prozesse auf den schönen Handbuchartikel von Meixner und Reik 1959 (**21**), die dort zitierten Arbeiten und auf Just 1958 (**22**).

Nur ein Beispiel wollen wir im Hinblick auf den nächsten Abschnitt und wegen der gleich zu behandelnden idealen Flüssigkeiten skizzieren: Die einkomponentige Flüssigkeit[3].

Von einer solchen verlangen wir zunächst die Existenz einer (kalorischen) *Zustandsgleichung*

$$u = u(p, v)\,; \tag{2.3.1}$$

folglich existieren (skalare) Funktionen $T(p, v)$ und $s(p, v)$ mit

$$du + p\,dv = T\,ds\,. \tag{2.3.2}$$

Damit können wir unter Berücksichtigung von (2.2.5) den Energiesatz (2.2.6) in (2.3.3)

$$\varrho \dot{s} + \left(\frac{q^a}{T}\right)_{\|a} = \left(\varrho s u^a + \frac{q^a}{T}\right)_{\|a} = \eta\,, \quad \eta = -\frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}\pi_{ab}\sigma^{ab} + q_a(\dot{u}^a + (\log T)^{|a})\right)$$

[1] Für den Spezialfall $\omega = 0$ vgl. dazu Whittaker 1935 (**30**).

[2] Vgl. dazu Pirani 1956 (**28**). [3] Nach Eckart loc. cit.

umformen. Unter der weiteren Annahme $T > 0$ liegt es nahe, T als *Temperatur*, s als *spezifische Entropie* und diese Gleichung als *Entropiebilanz* zu deuten, was — im Einklang mit den Bedeutungen von π_{ab}, σ_{ab} (siehe (1.1.12)), q^a und T — zu den phänomenologischen Gleichungen

$$\pi_{ab} = -\lambda\sigma_{ab} \quad (\lambda(p, v) = \text{Viskositätskoeffizient}), \tag{2.3.4}$$

$$q_a = -\varkappa h^b_a(T_{|b} + T\dot{u}_b) \quad (\varkappa(p, v) = \text{Wärmeleitfähigkeit}) \tag{2.3.5}$$

führt. Der Entropiesatz verlangt, daß die *Entropieerzeugungsdichte* η nichtnegativ ist, folglich muß

$$\lambda \geqq 0\,, \quad \varkappa \geqq 0 \tag{2.3.6}$$

sein. Der Vierervektor

$$S^a = \varrho s u^a + \frac{q^a}{T} \tag{2.3.7}$$

ist als *Entropiestromdichte* zu bezeichnen. Er erscheint in (2.3.7) in einen Konvektionsanteil $\varrho s u^a$ und einen Leitungsanteil $\frac{q^a}{T}$ aufgespalten und hat stets nichtnegative Divergenz.

In den Gleichungen (2.2.3, 4) sind die π_{ab} und q^a enthaltenden Glieder oft sehr klein im Verhältnis zu den übrigen; man wird daher insbesondere dann, wenn man die (durch die kovarianten Ableitungen implizit berücksichtigte) Wechselwirkung der Materie mit dem Gravitationsfeld studieren will, diese Glieder vernachlässigen. Das führt zur Einführung des Modells der *idealen Flüssigkeit*, die wegen (2.3.4, 5) durch

$$\lambda = 0\,, \quad \varkappa = 0 \tag{2.3.8}$$

definiert wird.

Für eine ideale Flüssigkeit ist also nach (2.2.1) und (1.1.5)

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} = (\mu + p)\, u_a u_b + p g_{ab} \tag{2.3.9}$$

(Da $-u^a u_b$ und h^a_b zueinander orthogonale Projektionen sind, ist die erste Gleichung (2.3.9) die Spektralzerlegung von T^a_b.)

Energie- und Impulssatz vereinfachen sich zu

$$\dot{u} + p\dot{v} = 0\,, \tag{2.3.10}$$

$$(\mu + p)\,\dot{u}_a + h^b_a p_{|b} = 0\,, \tag{2.3.11}$$

und für eine chemisch homogene ideale Flüssigkeit[1] ist nach (2.3.2) immer

$$s = \text{const. längs der Stromlinien;} \tag{2.3.12}$$

[1] bei chemischen Umwandlungen muß (2.3.2) durch die Gibbssche Fundamentalgleichung ersetzt werden, und (2.3.12) gilt i. a. nicht.

alle Vorgänge in ihr verlaufen (adiabatisch-) reversibel. Die Stromlinien sind nach (2.3.9) und (2.2.5) Ricci-Eigenlinien.

Nach den Regeln der Thermodynamik kann die *spezifische Enthalpie*

$$w = w(s, p) = u + pv = \frac{\mu + p}{\varrho} \tag{2.3.13}$$

als thermodynamisches Potential benutzt werden; durch Elimination von s aus den Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial s} = T, \quad \frac{\partial w}{\partial p} = v \tag{2.3.14}$$

erhält man die thermische Zustandsgleichung $T = T(p, v)$ und weiter die kalorische Zustandsgleichung (2.3.1). Nach (2.3.13) und (2.3.14) ist längs einer Isentropen

$$w(s, p) = w(s, p_0) \exp\left(\int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\mu + p}\right). \tag{2.3.15}$$

Eine Strömung heißt *isentropisch*, wenn sogar im ganzen Strömungsgebiet $s =$ const. ist[1].

In einer isentropischen Strömung sind μ, p und ϱ paarweise funktional abhängig, und nach (2.3.15) und (2.3.13) ist

$$\frac{dw}{w} = \frac{dp}{\mu + p}, \quad \frac{dp}{dw} = \frac{\mu + p}{w} = \varrho. \tag{2.3.16}$$

Die Bewegungsgleichung (2.3.12) ist also äquivalent zu

$$\dot{u}_a = -h_a^b (\log w)_{|b}. \tag{1.4.1}$$

Daraus ist zu entnehmen:

Satz 2.3.1. In einer isentropischen Strömung einer einkomponentigen idealen Flüssigkeit ist der Druck eine Funktion der spezifischen Enthalpie. Materietensor, Ruhmassendichte und spezifische Energie sind durch die Formeln

$$T_{ab} = \varrho w u_a u_b + p g_{ab}, \quad \varrho = \frac{dp}{dw}, \quad u = w - \frac{p}{\varrho} \tag{2.3.17}$$

$\left(\text{mit } w > 0, \frac{dp}{dw} > 0\right)$ bestimmt. Die Divergenz von T_{ab} verschwindet genau dann, wenn $(\varrho u^a)_{||a} = 0$ ist und die Stromlinien in der Hilfsmetrik $\bar{g}_{ab} = w^2 g_{ab}$ geodätisch sind[2]. Der Energiesatz (2.3.10) ist infolge der letzten beiden Gleichungen (2.3.17) identisch erfüllt.

[1] Vgl. dazu SALZMANN und TAUB 1954 (4) sowie TAUB 1956 (38).

[2] Diese Geodäsie hat EISENHART 1924 (24) auf anderem Wege erkannt. Wegen der formalen Analogie zwischen (1.4.2) und dem Fermat-Prinzip der geometrischen Optik hat SYNGE (3) w, dessen thermodynamische Bedeutung er nicht erwähnt, als „Index" der Flüssigkeit bezeichnet.

Statt der Variablen (w, u^a) und der Funktion $p(w)$ können auch[1] (p, u^a) mit $\mu(p)$ oder mit[2] $\varrho(p)$ genommen werden; die im Satz gewählte Darstellung ist aber wegen (1.4.1) die einfachste. Wir erwähnen noch die oft benutzte[2], aus (2.3.16, 17) folgende Darstellung

$$T_{ab} = \varrho\left(\overset{\circ}{w} + \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho}\right) u_a u_b + p g_{ab} \quad (\overset{\circ}{w} = w(p_0),\ \varrho(p)) \tag{2.3.18}$$

in der gewöhnlich die unnötige und manchmal unmögliche Spezialisierung $p_0 = 0$, $\overset{\circ}{w} = 1$ vorgenommen wird.

Nach Satz 1.4.1 und (1.4.4) spannen die Strom- und Wirbellinien Wirbelflächen auf (**2**), und aus Satz 1.4.2 folgt für isentropische Strömungen der dynamische Wirbelsatz (1.4.5) (mit der jetzigen Bedeutung von w); (2.3.15) zeigt den Einfluß des Drucks auf die Wirbelgeschwindigkeit.

In einer isentropischen Strömung hat $\theta = 0$ zur Folge, daß w längs der Stromlinien konstant ist, so daß mit (1.4.1) nach Hilfssatz 1.2.**6** gilt Satz 2.3.2. Eine starre isentropische Strömung ist nur in einem stationären Gravitationsfeld möglich (**4**). $\xi^a = \frac{u^a}{w}$ ist dann ein Killingvektor und $U = -\log w$ das (in 1.2.**6** definierte und in (2.2.10) auftretende) skalare Gravitationspotential. Der Wirbelvektor ω^a ist (Fermi-)konstant längs der Stromlinien (Satz 1.4.4) und genügt den Gleichungen (1.4.13, 14).

Abschließend bemerken wir, daß nach Satz 1.4.6 eine wirbel- und scherungsfreie, isentropische Strömung nur in einem Gravitationsfeld möglich ist, dessen Konformtensor vom Typ I ist und reelle Eigenwerte hat. Das entspricht der Vorstellung, daß solche Felder keine Gravitationswellen, die ja wahrscheinlich immer mit Scherungsbewegungen der mit dem Feld wechselwirkenden Materie verbunden sind[3], enthalten.

4. Kinetische Gastheorie. H-Theorem. Gleichgewichtsverteilungen im Gravitationsfeld

In diesem Abschnitt wollen wir die Materie nicht von vornherein als ein Kontinuum idealisieren, sondern sie durch das Modell einer statistischen Gesamtheit von Teilchen der Ruhmasse m, die nur durch elastische Stöße miteinander wechselwirken, beschreiben. Wir nehmen an, daß die Raum-Zeit in „physikalisch unendlich kleinen" Bereichen, wie sie zur

[1] Zum Beispiel SYNGE (**3**), LICHNEROWICZ (**2**).
[2] Zum Beispiel PAULI (**19**), FOCK (**29**). [3] Vgl. dazu (**31**) und (**32**), sec. 2–4.8.

Definition der Momente der Verteilungsfunktion und vor allem zur Formulierung der Boltzmannschen Stoßgleichung erforderlich sind, als flach betrachtet werden kann, obwohl das „Gas" als Ganzes sich in einem Gravitationsfeld befinden darf, das dann als das „makroskopische" Feld (in Analogie zur Elektronentheorie ausgedrückt) anzusehen ist.

Zur Definition der (Einteilchen-)*Verteilungsfunktion* $F(x, p)$[1] denken wir uns in dem (beliebigen) Ereignis x ein infinitesimales Raumelement, charakterisiert durch den (Pseudo-)Vektor $d\overset{*}{x}_a$, und im Impulsraum[2] eine infinitesimale Zelle an der Stelle p^a des Massenhyperboloids

$$p_a p^a = -m^2\,, \tag{2.4.1}$$

zu der dann analog ein $d\overset{*}{p}_a$ gehört. F ist dadurch definiert, daß

$$F(x^a, p^a)\,|d\overset{*}{x}_a d\overset{*}{p}{}^a| \tag{2.4.2}$$

die Anzahl derjenigen Teilchen ist, deren Weltlinien das Raumelement $d\overset{*}{x}_a$ schneiden und deren Impulse in der Zelle $d\overset{*}{p}_a$ liegen. Offenbar ist F ein Skalar.

Für F gilt die von SASAKI 1958 (**33**) relativistisch formulierte *Boltzmanngleichung*[1]

$$p^a F_{|a} = \iiint (F''F''' - FF')\, W(p, p'; p'', p''')\, dP' dP'' dP'''\,. \tag{2.4.3}$$

Die partielle Ableitung $F_{|a}$ ist bezüglich x^a gemeint bei parallelverschobenem p^a. Das erste Argument in den F ist immer x, das zweite bzw. p'', p''', p, p'; außerdem ist

$$d\overset{*}{p}_a = p_a dP \tag{2.4.4}$$

u.c. gesetzt. $W(p, p'; p'', p''')$ beschreibt die *Wahrscheinlichkeit* für Stöße $p, p' \to p'', p'''$ (mit entsprechenden Spielräumen). Wir setzen voraus:

$$W(p, p'; p'', p''') = W(p', p; p''', p'') = W(p'', p'''; p, p')\,. \tag{2.4.5}$$

Für das *erste Moment*

$$g^a(x) = \int g(p)\, p^a F(x, p)\, dP \tag{2.4.6}$$

einer beliebigen Funktion $g(p)$ folgt aus (2.4.3, 5):

$$g^a{}_{||a} = \frac{1}{4} \iiiint (g + g' - g'' - g''')\,(F''F''' - FF')\, W\, dP dP' dP'' dP''' \tag{2.4.7}$$

Diese *Transportgleichung* gilt sinngemäß auch für Tensoren $g^{ab\cdots}$ statt g.

[1] Wir lassen bei den Argumenten die Indizes weg; $p \equiv (p^a)$ usw.

[2] Dieser kann mit dem Tangentialraum in x identifiziert werden.

[3] Vgl. dazu auch TAUB 1948 (**37**).

Wenn g eine additive Stoßinvariante ist, gilt also $g^a{}_{||a} = 0$. Daraus folgt:

1. Die *materielle Stromdichte*

$$\varrho u^a = \int m p^a F dP \quad (u_a u^a = -1) \tag{2.4.8}$$

($g = m$) genügt der Kontinuitätsgleichung

$$(\varrho u^a)_{||a} = 0 \,. \tag{2.2.5}$$

(ϱ ist nach (2.4.2, 4, 8) die Dichte der Ruhmasse in dem durch die mittlere Vierergeschwindigkeit u^a bestimmten lokalen Ruhsystem.)

2. Der *Materietensor*

$$T^{ab} = \int p^a p^b F dP \tag{2.4.9}$$

($g \to p^a$) ist divergenzfrei:

$$T^{ab}{}_{||a} = 0 \,. \tag{2.1.6}$$

Als nächstes definieren wir durch

$$S^a = -\int p^a F \log F dP \tag{2.4.10}$$

die *Entropiestromdichte* unseres Gases. Es gilt

$$S^a{}_{||a} = -\int (1 + \log F) F_{|a} p^a dP \,,$$

woraus man mit derselben Umformung, die zu (2.4.7) führte,

$$S^a{}_{||a} = \frac{1}{4} \int\int\int\int \log\left(\frac{F''F'''}{FF'}\right) (F''F''' - FF')\, W dP dP' dP'' dP''' \tag{2.4.11}$$

bekommt. Es gilt also folgende kovariante, relativistische Form des Boltzmannschen H-Theorems:

Satz 2.4.1. Die Entropieerzeugungsdichte

$$S^a{}_{||a} = \eta$$

ist nichtnegativ und verschwindet nur dann in einem Weltbereich, wenn dort an jeder Stelle $\log F$ eine additive Stoßinvariante ist[1].

Wenn wir die auf Grund der relativistischen Stoßgesetze sehr plausible Annahme machen, daß (entsprechend dem Gradschen Satz[2] in der nichtrelativistischen Theorie) die allgemeine Stoßinvariante die Form $c + \xi_a p^a$ hat, folgt aus Satz 2.4.1, daß die Gleichgewichtsverteilungen eines rela-

[1] Deshalb ist in der speziellen Relativitätstheorie nur dann die „Gesamtentropie zu einer festen Zeit" ein Skalar, wenn eine Gleichgewichtsverteilung vorliegt.

[2] GRAD 1949 (34).

tivistischen Gases die Gestalt

$$\overset{\circ}{F}(x, p) = C(x) \exp(\xi_a(x)\, p^a) \tag{2.4.12}$$

haben.

Daraus und aus (2.4.8, 9) folgt der

Satz 2.4.2[1]. Bei lokalem Gleichgewicht hat die Verteilungsfunktion eines idealen Gases die Form

$$\overset{\circ}{F}(x, p) = \frac{\varrho(x)\,\xi}{4\pi m^3 K_2(m\xi)} \exp(\xi u_a p^a) \,. \tag{2.4.13}$$

Der zugehörige Materietensor ist gleich dem einer idealen Flüssigkeit (2.3.9) mit der Zustandsgleichung

$$u = G\left(\frac{1}{pv}\right) - pv \,, \tag{2.4.14}$$

worin

$$G(y) = \frac{2}{y} - \frac{K_2'(y)}{K_2(y)}, \quad K_2(y) = \int\limits_0^\infty \exp(-y\cosh z)\cosh(2z)\, dz \tag{2.4.15}$$

ist. Der Verteilungsparameter ξ ist durch

$$m\xi = \frac{\varrho}{p} \tag{2.4.16}$$

mit Dichte und Druck verknüpft.

Wir stellen nun fest, welche Bedingungen die Boltzmanngleichung (2.4.3) den Zustandsfeldern $\varrho(x)$, $\xi(x)$ und $u^a(x)$ auferlegt:

Satz 2.4.3. Eine Gleichgewichtsverteilung (2.4.13) ist nur in einem stationären Gravitationsfeld möglich, und zwar muß $\xi^a = \xi u^a$ ein Killingvektor, die Strömung also isometrisch sein. Außerdem muß im Strömungsfeld

$$\frac{p\,\xi^2}{K_2(m\xi)} = A = \text{const.} \tag{2.4.17}$$

sein. Diese Bedingungen sind auch hinreichend.

Beweis: (2.4.3) reduziert sich für eine Verteilungsfunktion (2.4.12) wegen der Viererimpulserhaltung bei Stößen auf die Liouville-Gleichung

$$p^a \overset{\circ}{F}_{|a} = 0 \,, \tag{2.4.18}$$

also ausgeschrieben mit $\log C = c$ auf

$$c_{|a} p^a + \xi_{a\|b} p^a p^b = 0 \,. \tag{2.4.19}$$

[1] Synge 1957 (35), § 14. Dort auch weitere Literaturangaben.

Diese Gleichung muß an jeder Stelle x für alle p^a mit $p_a p^a = -m^2$, die im Vorwärtslichtkegel liegen, erfüllt sein. Daraus folgt (z. B. durch Einsetzen einiger spezieller Werte für die p^a)

$$c_{;a} = 0\,, \quad \xi_{(a\|b)} = 0\,, \tag{2.4.20}$$

womit wegen (2.4.12, 13, 16) der Satz bewiesen ist, da aus (2.4.20) natürlich auch wieder (2.4.18) folgt.

Der Vergleich dieses Satzes mit dem entsprechenden Satz der nichtrelativistischen Theorie[1] zeigt:

Die reversiblen Strömungen eines relativistischen idealen Gases sind kinematisch stärker eingeschränkt als die eines unrelativistischen; sie sind nämlich nicht nur scherungsfrei, sondern auch volumtreu. Man kann in den isotrop expandierenden Modellen der relativistischen Kosmologie das Substrat also nicht — wie in den entsprechenden Newtonschen Modellen[2] — als ein ideales Gas in lokalem Gleichgewicht auffassen[3].

Als nächstes wollen wir den Entropiefluß (2.4.10) nach dem Muster der Gleichung (2.3.7) in einen Konvektions- und einen Leitungsanteil zerlegen:

$$S^a = \rho s u^a + s^a \quad (u_a s^a = 0)\,. \tag{2.4.21}$$

Für eine Gleichgewichtsverteilung verschwindet s^a nach (2.4.10, 12), und für s erhält man nach kurzer Rechnung (im Ruhsystem) einen Ausdruck, der mit u aus (2.4.14) durch $\xi(du + pdv) = ds$ verknüpft ist. Damit ist $\frac{1}{\xi} = T$ als *Temperatur* identifiziert und die Verbindung zur phänomenologischen Theorie im vorigen Abschnitt hergestellt — jedenfalls für den Gleichgewichtsfall.

Die Beziehung $\xi = \frac{1}{T}$, Satz 2.4.3 und die Bemerkung 1.2.**6** ergeben den Satz 2.4.4. Für ein ideales Gas besteht im thermodynamischen Gleichgewicht in einem Gravitationsfeld die Beziehung

$$T e^U = \text{const.} \tag{2.4.22}$$

zwischen Temperatur T und Gravitationspotential U.

Die Beziehung (2.4.22) hat Tolman (**42**) für ein (phänomenologisch beschriebenes) isotropes Strahlungsfeld in einem statischen Gravitations-

[1] Boltzmann 1895 (**39**), vgl. (**36**).

[2] Siehe Heckmann 1942 (**40**) und Heckmann und Schücking 1956 (**41**).

[3] Damit wird eine von Heckmann loc. cit. S. 50 aufgeworfene Frage jedenfalls in einem einfachen Fall beantwortet.

feld abgeleitet; für den allgemeinen stationären Fall ist sie in Satz 2.3.2 enthalten, wenn man für die dort betrachtete „Flüssigkeit" isotrope Strahlung nimmt, was zulässig ist.

Es ist hervorzuheben, daß in U bei rotierendem Gas auch das Zentrifugalpotential enthalten ist; die für diesen Fall durch (2.4.22) behaupteten Temperaturdifferenzen sind von der Größenordnung derjenigen, die kürzlich von POUND und REBKA (**43**) durch transversalen Dopplereffekt mittels des Mößbauereffekts gemessen wurden.

Durch Benutzung von Verteilungsfunktionen, die nur so wenig von (2.4.13) abweichen, daß noch $\log F \approx \log \overset{\circ}{F}$ gesetzt werden darf, kann man auch noch mittels der Definitionen von q^a ((2.2.1), (2.4.8, 9)) und s^a ((2.4.21, 10)) bestätigen, daß $s^a = \frac{1}{T} q^a$ ist; damit ist dann der phänomenologische Entropiesatz ((2.3.3) mit $\eta \geqq 0$) als Folge des statistischen H-Theorems 2.4.1 erkannt. Die phänomenologischen Gleichungen (2.3.4, 5) hat SASAKI (loc. cit.) (ohne Benutzung des Entropiebegriffs) statistisch begründet; seine Ansätze scheinen uns aber nicht hinreichend allgemein zu sein.

Wir erwähnen noch, daß die von SYNGE bei der Behandlung von Stoßwellen in Gasen gemachte Annahme über die Zeitrichtung (loc. cit. S. 54) aus dem H-Theorem folgt. Es ist aber zu betonen, daß die Benutzung der Gleichung (2.4.14 bis 16) wegen Satz 2.4.3 strenggenommen bei allgemeinen Strömungen nicht erlaubt ist.

5. Dynamik inkohärenter Materie

Inkohärente Materie ist formal durch den Materietensor

$$T_{ab} = \varrho u_a u_b \tag{2.1.3}$$

definiert. Man erhält diesen Ausdruck, wenn man in der allgemeinen Darstellung (2.2.1) den Druck p, die Eigenwerte des Reibungstensors π_{ab} und den Betrag der Energiestromdichte q^a als vernachlässigbar klein im Verhältnis zur Energiedichte μ ansieht (und dann $\mu = \varrho$ setzt wegen (2.2.5)). Wenn man das im vorigen Abschnitt behandelte statistische Modell der Materie zugrunde legt, zeigen die Formeln (2.4.8, 9) oder die Verteilungsfunktion (2.4.13), daß (2.1.3) genau dann zustande kommt, wenn F im Impulsraum an der Stelle $p_a = m u_a$ ein scharfes Maximum hat (Grenzfall $T \to 0$).

In diesem Abschnitt sei (2.1.3) vorausgesetzt.

Fast alle früher ausgesprochenen Sätze lassen sich auf (2.1.3) anwenden; wir stellen einige hier zusammen:

1. Die Stromlinien sind Geodätische: $\dot{u} = 0$.
2. Die (Eigen-)Masse bleibt erhalten: $\varrho l^3 = M$, $\dot{M} = 0$.
3. Bei wirbelfreier Strömung existiert eine Zeitkoordinate t, die längs der Stromlinien gleich den miteinander synchronisierten Eigenzeiten ist; die Hyperflächen $t = \text{const.}$ sind geodätisch parallel.
4. Konforme, nichtstarre Strömungen sind wirbelfrei (s. (1.2.6)).
5. Starre Strömungen sind isometrisch; u^a erzeugt dann eine Translationsgruppe, und ω^a ist harmonisch[1].
6. Für die Rotverschiebung infinitesimal benachbarter Teilchen gilt die gewöhnliche Dopplerformel $\frac{d\lambda}{\lambda} = (\delta l)^{\cdot}$.
7. Strom- und Wirbellinien spannen Flächen auf (s. (1.4.3)).
8. Bei scherungsfreier Bewegung ist $(l^2\omega^a)^{\cdot} = 0$, also $l^2\omega = \Omega$, $\dot{\Omega} = 0$. (Mit **2.**: Der (Newtonsche) Drehimpuls einer (aus bestimmten Materieteilchen bestehenden) Kugel vom Radius l ist $J = \frac{8\pi}{15} M\Omega$, $\Rightarrow \dot{J} = 0$.)
9. Die Stromlinien sind Riccilinien: (s. (1.3.5))

$$h^a_b\left(\omega^{bc}{}_{\|c} - \sigma^{bc}{}_{\|c} + \frac{2}{3}\,\theta^{|b}\right) = 0\,. \tag{2.5.1}$$

10. Krümmungsskalar, Dichte und kosmologische Konstante stehen in der Beziehung $R = -\varrho - 4\Lambda$ (s. (2.2.8)).
11. Es gilt die „Expansionsgleichung"[2] (s. (2.2.9))

$$3\,\frac{\ddot{l}}{l} + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{1}{2}\,\varrho - \Lambda = 0\,. \tag{2.5.2}$$

12. Die Feldgleichungen (2.1.5) mit (2.1.3) sind gleichwertig mit **9, 11** und

$$-h_{ab}R^{bc}h_{cd} = \left(\Lambda + \frac{1}{2}\,\varrho\right)h_{ad}\,. \tag{2.5.3}$$

(**11** entsteht nämlich durch Überschieben der Feldgleichung mit $u^a u^b$, **9** mit $u^a h^{bc}$, **12** mit $h_{ac}h_{bd}$.)

Aus **11** folgt der bemerkenswerte

Satz 2.5.1[3]. Wenn längs einer Stromlinie $\frac{1}{2}\Lambda + \omega^2 \leq \frac{1}{4}\varrho + \sigma^2$ ist (insbesondere also für $\omega = 0$, $\Lambda \leq 0$) und $\theta(s) > 0$ ist zu einer (Eigen-)zeit s, dann gibt es ein (endliches) $s_0 < s$ so, daß $\lim\limits_{s \to s_0 + 0} (\varrho s^2) = +\infty$ ist: Zur Zeit $s = s_0$ hat sich eine singuläre Explosion abgespielt. Bei gegebenem $\theta(s)$

[1] d. h. wirbel- und divergenzfrei; s. Satz 1.4.5

[2] Diese Gleichung ist in einem speziellen Koordinatensystem von RAYCHAUDHURI 1955 (**44**) aufgestellt worden.

[3] RAYCHAUDHURI loc. cit., KOMAR 1956 (**45**).

wird $s - s_0$, das „Alter" der Geodätischen, durch Vergrößerung von ω oder Λ erhöht, durch Vergrößerung von σ oder ϱ erniedrigt.

(Diese Aussagen ergeben sich sofort aus **11**, wenn man beachtet, daß $\ddot{l}$ die Krümmung des Graphen der Funktion $l(s)$ und $\theta = \frac{\dot{l}}{l}$ ist.)

Bei scherungsfreier Strömung, $\sigma = 0$, kann man wegen **2** und **8** aus **11** eine gewöhnliche Differentialgleichung für $l(s)$ gewinnen. Diese Gleichung kann einmal integriert werden:

13. Bei scherungsfreier Strömung gilt die vereinfachte Expansionsgleichung

$$3\dot{l}^2 + \frac{2\Omega^2}{l^2} - \frac{M}{l} - \Lambda l^2 = 10\,E \qquad (2.5.4)$$

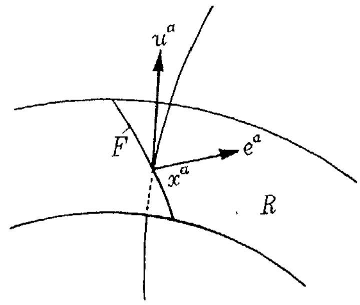
mit (längs der Stromlinien) konstanten Parametern Ω, M und E.

In einer wirbelfreien Strömung bedeutet (2.5.3) eine Bedingung für die Krümmungen der Raumschnitte $t = \text{const.}$ $(u_a dx^a = -dt)$. Aus den Definitionen der Größen θ, σ_{ab} geht nämlich hervor, daß in diesem Fall $(\omega = 0,\ \dot{u} = 0)\left(\sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab}\right)\delta_\perp x^a \delta_\perp x^b$ (bis auf einen konventionellen Faktor) längs $t = \text{const.}$ die zweite Fundamentalform dieses Raumschnittes ist, so daß nach Formeln der Differentialgeometrie[1] die linke Seite der Gleichung (2.5.2) auf die Riccitensoren der Raumschnitte zurückgeführt werden kann. Es gilt der

Satz 2.5.2. Bei einer wirbelfreien Strömung ist

$$K(x^a, e^a) = \frac{1}{3}\left(\Lambda + \varrho + \sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2\right) + l^{-3}(l^3\sigma_{ab})^{\cdot}\, e^a e^b \qquad (2.5.5)$$

die Gaußsche Krümmung derjenigen Fläche F, die in der das Ereignis x^a enthaltenden Orthogonalhyperfläche R zu den Stromlinien von den (bezüglich der induzierten Metrik gebildeten) von x^a ausgehenden, auf e^a in x^a senkrechten Geodätischen erzeugt wird; dabei ist $e_a u^a = 0$ (s. Figur).



(Eine Raumdimension ist unterdrückt.)

[1] Gleichungen von Gauss und Codazzi, siehe z. B. (46), sec. 43 oder (12), Gl. (2.2.4a).

Dieser Satz ist ein einfaches Beispiel dafür, wie in der Einsteinschen Theorie die Krümmung des Ruhraumes der Materie durch deren Verteilung und Relativbewegung bestimmt ist; der zweite Term zeigt, daß gestaltändernde Bewegungen der Materie i.a. mit einer Anisotropie der Raumkrümmung verbunden sind[1].

Die Gleichung (2.5.2) gilt auch in der Newtonschen Mechanik druckfreier, nur gravisch wechselwirkender Materie; für die Einsteinsche Theorie typisch ist erst die Beziehung (2.5.5). Die erste Bemerkung weist uns an, die Gleichung (2.5.4) als Energiesatz zu deuten. Tatsächlich sind in der Newtonschen Theorie die Expansionsenergie, Rotationsenergie, innere potentielle Gravitationsenergie einer aus Substratteilchen bestehenden (kleinen) Materiekugel vom Radius l bzw. gegeben durch die mit $\frac{2\pi}{15} M$ multiplizierten ersten drei Glieder in (2.5.4). Addiert man zu diesen eine Λ-Energie der Größe $-\frac{2\pi}{15} M l^2 \Lambda$, so besagt (2.5.4) die Erhaltung der Energie $\frac{4\pi}{3} l^3 \varrho E$ dieser Kugel. Dieser mechanische Energiesatz muß aber von dem (für inkohärente Materie trivialen) thermodynamischen Energiesatz (2.2.6) unterschieden werden. Der erste bezieht sich auf ein endlich ausgedehntes System und enthält dementsprechend einen Gravitationsanteil, der zweite auf ein infinitesimales Substratteilchen, in dem sich wegen des Äquivalenzprinzips die Gravitation nicht bemerkbar macht.

Die für eine Materiekugel K unter der Voraussetzung $\sigma = 0$ geltenden dynamischen Erhaltungssätze **8** und **13** gelten, obwohl K kein abgeschlossenes System ist. Bei Ausschöpfen von K durch kleinere Kugeln k_i verhalten sich die Energien nicht additiv; die E_i beziehen sich ja auf relativ zueinander bewegte lokale Inertialsysteme, und außerdem wechselwirken die k_i durch Gravitation.

Wir fragen nun nach den kinematisch einfachsten Lösungen der Gravitationsgleichungen mit inkohärenter Materie

A ($\omega = \theta = \sigma = 0$) Die einfachste Strömung ist die wirbelfreie und starre Bewegung; sie ist nach **11** und Satz 2.5.2 nur möglich, wenn $\varrho = 2\Lambda$ ist und der Ruhraum der Materie die konstante, positive Krümmung $K = \Lambda$ hat, und diese Bedingungen sind nach **12** und **9** auch hinreichend: Einstein-Kosmos.

B ($\omega = \sigma = 0$, $\theta \neq 0$) Die nächsteinfache Möglichkeit ist, daß nur σ und ω verschwinden. Dann gelten (2.5.4) und (2.5.5) und ergeben die Friedmann-Lemaitre-Modelle. Die Ruhräume haben die konstante Krüm-

[1] Für die Ausnahmen siehe Satz 2.5.5.

mung $K = -\frac{10}{3}\frac{E}{l^2} = \frac{k}{R^2}$ $(k = \pm 1,0)$. Diese Krümmung ist also gleich der oben definierten Energie einer l-Kugel, dividiert durch $-\frac{4}{10}\pi\varrho l^5$. (Daß θ und ϱ in den Ruhräumen konstant sind, folgt aus (2.5.2) und (2.5.5).) Die hier entwickelten Sätze und Satz 1.5.1 erlauben, ohne weitere Rechnung den Schluß zu ziehen:

Satz 2.5.3[1]. Die einzigen Welten mit scherungs- und wirbelfreier Bewegung inkohärenter Materie sind diejenigen unter den in Satz 1.5.1 gekennzeichneten, überall isotropen Modellen, deren Krümmungsradien der Friedmann-Lemaîtreschen Gleichung (2.5.4) (mit $l = R$, $\Omega = 0$, $10E = -3k$) genügen[2].

Im Hinblick auf die Anwendung dieser Modelle auf das System der extragalaktischen Nebel ist es zweckmäßig, die Forderungen $\omega = 0$ und $\sigma = 0$ bzw. zu ersetzen durch Isotropie der Dichteverteilung[3] ($h_a^b \varrho_{|b} = 0$) und der Rotverschiebung[4]; daraus folgen nämlich nach 1.2.2 und 1.2.7 $\omega = 0$ und $\sigma = 0$. Beide Eigenschaften sind im Prinzip beobachtbar.

C $(\theta = \sigma = 0, \omega \neq 0)$ Unter den scherungsfreien Strömungen mit Rotation sind diejenigen am einfachsten, die den in Satz 1.5.2 formulierten Bedingungen genügen. Für sie gilt in passenden Koordinaten

$$G = dz^2 + d\sigma^2 - (dt + u_A(x^B)\,dx^A)^2, \quad u^a = \delta_4^a, \qquad (1.5.3)$$

wobei $d\sigma^2 = \gamma_{AB}(x^C)\,dx^A dx^B$ eine Flächenmetrik ist. Nach (2.5.2) muß $\frac{1}{2}\varrho = \Lambda + 2\omega^2$, also nach Satz 1.5.2 $\varrho = \text{const.}$ und $\omega = \text{const.}$ sein. Da G direkte Summe[5] der z-Geraden und einer V_3 ist, muß nach (2.5.3) $\Lambda + \frac{1}{2}\varrho = 0$ sein. Es folgt also $\varrho = 2\omega^2 = -2\Lambda$, und da ω_a konstant ist, braucht nur noch die Gleichung $h_{ab}R^{bc}h_{cd} = 0$ für (1.5.3) gelöst zu werden, was z. B. mit den Hilfsformeln in JEK ((2.3.3), S. 36) leicht auszuführen ist und den Gödel-Kosmos[6] ergibt:

Satz 2.5.4. Der Gödel-Kosmos ist die einzige Welt mit inkohärenter Materie, in der die Bewegung des Substrats scherungsfrei erfolgt und die Richtung der Drehachse in der infinitesimalen räumlichen Umgebung jedes Teilchens konstant ist.

Wie der Satz zeigt, ist eine starre, räumlich konstante Rotation nur für $\Lambda < 0$ mit den Feldgleichungen verträglich; die Rotation muß dann so

[1] Dies hat mit einer anderen Methode RAYCHAUDHURI 1955 (44) bewiesen.

[2] Für $\Lambda = 0$ unterscheidet k die drei Klassen untereinander (im Sinne von Abschnitt 2.1) ähnlicher Lösungen; in jeder Klasse ist M Ähnlichkeitsparameter.

[3] GÖDEL 1952 (48). [4] EHLERS 1957 (47). [5] Siehe z. B. JEK Kap. 1.4.

[6] GÖDEL 1949 (17). Siehe dazu auch (47), (49), (50), (51).

stark sein, daß die Materie nur durch die (gewöhnliche) Gravitation und die Λ-Attraktion zusammengehalten werden kann. Verlangt man aber keine Konstanz von ω, so lassen sich für $\Lambda = 0$ die Strömungsfelder mit starrer Rotation mit Hilfe der Bemerkungen **5, 8, 9, 11, 12** überraschend einfach auf die statischen Lösungen der Vakuumfeldgleichungen $R_{ab} = 0$ zurückführen[1]. Da das bereits ganz in Sinne der hier benutzten Methode dargestellt worden ist[2], verzichten wir hier auf eine Wiedergabe und bemerken nur: In diesen Lösungen ist $\varrho = 4\omega^2$; $\varrho > 0$ braucht also nicht zusätzlich gefordert zu werden. Lösungen mit (räumlich) konstanter Dichte existieren – abweichend von der Newtonschen Theorie, wo aus $\theta = \sigma = 0$ $\varrho =$ const. folgt[3] – nicht[4], ebenso existieren keine Lösungen mit kompaktem orientierbarem Raum[2]. Axialsymmetrische Lösungen dieser Art sind – ohne Zurückführung auf Vakuummetriken – früher von VAN STOCKUM 1937 (**54**) konstruiert worden. Dieser Autor hat auch die einzige bis jetzt bekannte singularitätenfreie Lösung dieser Art, einen rotierenden Zylinder mit daran anschließendem statischen (!) Vakuumfeld, gefunden; Lösungen, die singuläre Punkte, Flächen usw. enthalten, lassen sich in großer Zahl bilden[5]. Es ist eine interessante Frage, ob diese Singularitäten durch Einführung physikalisch annehmbarer Drucke oder Anschluß an Vakuumfelder eliminiert werden können.

D ($\omega = 0$) Die nächsteinfache Strömung wäre eine wirbel- und volumtreue; nach **11** ist sie höchstens für $\Lambda = \frac{1}{2}\varrho + 2\sigma^2 (> 0)$ möglich. Lösungen dieser Art sind (außer für $\sigma = 0$, s. **A**) meines Wissens nicht angegeben worden. Unter den komplizierteren Voraussetzungen $\omega = 0$, $\theta \neq 0 \neq \sigma$ sind zunächst die zentralsymmetrischen Strömungen bestimmt und von mehreren Verfassern ausführlich untersucht worden[6]; im Rahmen dieser Darstellung wären sie mit Hilfe der Sätze **11, 9** und 2.5.2 übersichtlich zu behandeln.

Aus dem Satz 2.5.2, **9** und **11** ergibt sich der

Satz 2.5.5. In einer wirbelfreien Strömung inkohärenter Materie haben die Ruhräume des Substrats genau dann konstante Krümmungen $K(t)$, wenn der Tensor $l^3\sigma_{ab}$ längs der Stromlinien konstant ist. Für solche Strömungen sind die Einsteinschen Feldgleichungen äquivalent mit **9, 11** (für $\omega = 0$) und

$$K(t) = \frac{k}{R^2} = \frac{1}{3}\left(\Lambda + \varrho + \sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2\right) \tag{2.5.6}$$

[1] EHLERS 1957 (**47**), § 29, Satz IV. [2] EHLERS 1959 (**52**), vgl. auch (**53**).
[3] HECKMANN und SCHÜCKING 1955 (**41**), I. [4] EHLERS 1957 (**47**), § 29, Satz III.
[5] EHLERS 1957 (**47**), § 29, Satz IV. [6] BONDI 1947 (**55**), JUST 1956 (**56**).

Die entsprechenden Strömungen sind natürliche Verallgemeinerungen der Friedmann-Lemaitrê-Modelle; Beispiele dafür sind (von einer anderen Fragestellung aus und mit anderer Methode) von SCHÜCKING und HECKMANN bestimmt worden, vgl. (**9**).

Es ist klar, daß zur Kennzeichnung allgemeinerer Strömungen das Verschwinden oder Nichtverschwinden oder die Konstanz kinematischer Größen nicht ausreichend ist, sondern weitere Invarianten herangezogen werden müssen, und daß für $\omega \neq 0$ als Raummetrik die durch h_{ab} bestimmte Metrik des dreidimensionalen Raumes der Stromlinien genommen werden muß, wenn der zu Satz 2.5.2 analoge Sachverhalt formuliert werden soll. Wir wollen diese Fragen hier nicht untersuchen; es kam uns darauf an, die Einfachheit und Angemessenheit der im Riemannraum geometrisch formulierten Hydrodynamik für die Behandlung strenger Lösungen an den einfachsten Beispielen darzulegen[1].

[1] Allgemeinere Lösungen, die räumlich homogen sind, haben HECKMANN, SCHÜCKING und OZSVATH bestimmt; die Arbeiten sind noch unveröffentlicht (private Mitteilung).

Literatur

(1) L. LANDAU und E. LIFSHITZ, *The Classical Theory of Fields*, Cambridge, Mass. 1951.
(2) A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et d'électromagnetisme*, Paris 1955.
(3) J. L. SYNGE, Proc. Lond. Math. Soc. **43** (1937).
(4) G. SALZMAN und A. H. TAUB, Phys. Rev. **95**, 1659 (1954).
(5) P. JORDAN, J. EHLERS, R. K. SACHS, Akad. Wiss. Mainz Abh. math.-nat. Kl. 1961 Nr. 1. (Zitiert als JES).
(6) J. L. SYNGE und A. SCHILD, *Tensor Calculus*, Toronto 1952.
(7) Y. FOURES-BRUHAT, C. R. **246**, 3319 (1958).
(8) K. GÖDEL, Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass.) 30 Aug. bis 5. Sept. 1950, 1 p. 175 (1952).
(9) E. SCHÜCKING und O. HECKMANN, Ber. Solvay Konf. Brüssel 1958.
(10) C. B. RAYNER, C. R. Paris **248**, 929, 2725; **249**, 1327 (1959).
(11) F. A. E. PIRANI, Phys. Rev. **105**, 1089 (1957).
(12) P. JORDAN, J. EHLERS und W. KUNDT, Akad. Wiss. Mainz Abh. math.-nat. Kl. 1960 Nr. 2. (Zitiert als JEK.)
(13) K. JUST, Z. Physik **145**, 235 (1956).
(14) H. P. ROBERTSON, Rev. Mod. Phys. **5**, 62 (1933).
(15) H. BONDI, Cosmology, Cambridge 1960.
(16) A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, 3. Aufl.; Princeton 1949.
(17) K. GÖDEL, Rev. Mod. Phys. **21**, 447 (1949).
(18) H. WEYL, *Raum Zeit Materie*, 4. Aufl. 1921, 5. Aufl. Berlin 1923.
(19) W. PAULI, *Relativitätstheorie*, Enzykl. d. math. Wiss. V 2, S. 539, Leipzig 1921.
(20) C. ECKART, Phys. Rev. **58**, 919 (1940).
(21) J. MEIXNER und W. REIK, Handb. d. Phys. III, 2 Berlin 1959.
(22) K. JUST, Habilitationsschrift FU Berlin, 1958.
(23) G. BIRKHOFF, *Hydrodynamics*, Princeton 1950.
(24) L. P. EISENHART, Trans. Amer. Math. Soc. **26**, 205–220 (1924).
(25) P. JORDAN, *Schwerkraft und Weltall*, 2. Aufl. Braunschweig 1955.
(26) M. FIERZ, Helv. phys. Acta **29**, 128 (1956).
(27) O. HECKMANN und E. SCHÜCKING, Handb. d. Phys. LIII, 519, Berlin 1959.
(28) F. A. E. PIRANI, Acta Phys. Polonica **15**, 389 (1956).
(29) V. FOCK, *Theorie von Raum, Zeit und Gravitation*, Berlin 1960.
(30) E. T. WHITTAKER, Proc. Roy. Soc. **149**, 384 (1935).
(31) H. BONDI, F. A. E. PIRANI und I. ROBINSON, Proc. Roy. Soc. A **251**, 519 (1959).

(32) L. WITTEN (Editor), *The Theory of Gravitation: An Introduction to Current Research*, erscheint bei Wiley, New York.
(33) M. SASAKI, Planck-Festschrift 1958, S. 129.
(34) H. GRAD, Comm. pure appl. Math. **2**, 331 (1949).
(35) J. L. SYNGE, *Relativity: The General Theory*, Amsterdam 1960.
(36) H. GRAD, Handb. d. Phys. XII, Berlin 1959.
(37) A. H. TAUB, Phys. Rev. **74**, 328 (1948).
(38) A. H. TAUB, Phys. Rev. **103**, 454 (1956).
(39) L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über Gastheorie* **1**, Leipzig 1895.
(40) O. HECKMANN, *Theorien der Kosmologie*, Berlin 1942.
(41) O. HECKMANN und E. SCHÜCKING, Z. Ap. **38**, 95 (1955) (I); **40**, 81 (1956) (II).
(42) R. C. TOLMAN, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*, Oxford 1934.
(43) R. V. POUND und G. A. REBKA, Phys. Rev. letters, März 1960.
(44) A. RAYCHAUDHURI, Phys. Rev. **98**, 1123 (1955).
(45) A. KOMAR, Phys. Rev. **104**, 544 (1956).
(46) L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton 1956.
(47) J. EHLERS, Dissertation, Universität Hamburg 1957.
(48) H. BONDI, Monthly Notices of the Roy. Astr. Soc. **107**, 410 (1947).
(49) W. KUNDT, Diplomarbeit Universität Hamburg 1955.
(50) W. KUNDT, Z. Phys. **145**, 611 (1956).
(51) A. EINSTEIN, *Library of Living Philosophers*, ed. P. A. SCHILPP, Evanston 1949.
(52) J. EHLERS, Referat auf der Konferenz über allgemeine Relativitätstheorie, Royaumont Juli 1959.
(53) J. EHLERS, Beitrag zu dem INFELD gewidmeten, in Warschau erscheinenden Buch über Relativitätstheorie.
(54) W. J. VAN STOCKUM, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **57**, 135 (1937).