Zeitschrift für Physik. Bd. 140, S. 394—408 (1955).

Exakte Lösungen der Einstein-Maxwellschen Feldgleichungen für statische Felder.

Von

JÜRGEN EHLERS.

(Eingegangen am 23. Dezember 1954.)

Die exakten elektro- und magnetostatischen Feldgleichungen werden als Tensorgleichungen im dreidimensionalen Raum formuliert und durch eine konforme Transformation vereinfacht. Es wird ein Übertragungsprinzip angegeben, das es erlaubt, jedem MAXWELLschen Vakuumfeld ein EINSTEIN-MAXWELLsches Feld zuzuordnen. Die Beziehung dieses Übertragungsprinzips zu der kugelsymmetrischen Lösung REISSNERS und dem homogenen Feld LEVI-CIVITAS wird angegeben. Im Falle axialer Symmetrie werden zwei weitere Übertragungsprinzipien begründet; ein Spezialfall davon ist eine Ergänzung eines früheren WEYLschen Ergebnisses.

I. Allgemeines über elektrostatische Felder in der EINSTEIN-MAXWELL*schen Theorie.* Wir nehmen an, daß die Weltmetrik die statische Gestalt

$$d s^2 = f^2 \, d x^{(0)^2} - d\sigma^2 \tag{1}$$

mit

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} \, d x^\mu \, d x^\nu, \qquad \gamma_{\mu\nu|0} = f_{|0} = 0, \qquad \gamma = \det|\gamma_{\mu\nu}| \tag{1a}$$

hat. (Lateinische Indizes sollen stets die Werte 0, 1, 2, 3, griechische die Werte 1, 2, 3 durchlaufen. $T_{..|k}$ bedeute die gewöhnliche, $T_{..||k}$ die kovariante Differentiation.) Dann ist[1]

$$G_{0\nu} = 0, \qquad \mathfrak{G}_0^0 = -\mathfrak{F}^\nu_{.|\nu}, \qquad G_{\mu\nu} = \widetilde{G}_{\mu\nu} + \frac{f_{|\mu||\nu}}{f}, \qquad \left(\mathfrak{F}^\nu \equiv \sqrt{\gamma}\, f^{|\nu}\right), \tag{2}$$

worin die rechts stehenden Ausdrücke sich auf die Raummetrik $d\sigma^2$ beziehen. ($G_{\mu\nu} \equiv$ RICCI-Tensor. Übergang von lateinischen zu deutschen Buchstaben bedeute Multiplikation mit $\sqrt{-g}$ bzw. $\sqrt{\gamma}$.) Im statischen Fall ist eine Aufspaltung der Welt in Raum und Zeit möglich, und es ist sachgemäß, die allgemeinen Gesetze der EINSTEIN-MAXWELLschen Theorie, die sich auf die Weltmetrik $d s^2$ beziehen, nämlich das Gravitationsgesetz

$$G_{kl} = -\frac{\varkappa}{c^2}\left(T_{kl} - \frac{1}{2} g_{kl} T\right) \tag{3}$$

und die elektromagnetischen Gesetze

$$F_{[kl|j]} = 0, \qquad \mathfrak{F}^{kl}_{..|l} = \mathfrak{s}^k, \tag{4a, b}$$

[1] Siehe z.B. JORDAN, P.: Schwerkraft und Weltall, S. 45, Gln. (38), (42) Braunschweig 1952.

von denen (4a) noch durch

$$F_{kl} = \varphi_{l|k} - \varphi_{k|l} \tag{4c}$$

ersetzt werden kann, als Tensorgleichungen im Raum $d\sigma^2$ zu formulieren.

Elektrostatische Felder definieren wir durch die Forderungen

$$\varphi_{0|0} = 0, \qquad \varphi_\nu = 0 \tag{5}$$

an das Viererpotential φ_k. Wir setzen dann für den räumlichen Skalar $-\varphi_0$ einfach Φ und nennen ihn elektrostatisches Potential, während wir $F_{\nu 0} = E_\nu$ setzen; E_ν ist dann ein räumlicher Vektor, er soll elektrische Feldstärke heißen. Mit diesen Definitionen gehen die Gln. (4a, c) über in

$$E_{\nu|\mu} - E_{\mu|\nu} = 0, \qquad E_\nu = -\Phi_{|\nu}. \tag{6}$$

Ferner gilt

$$F_{\mu\nu} = 0, \qquad F^{\mu\nu} = 0, \qquad F^{\nu 0} = g^{\nu k} g^{0 l} F_{kl} = \frac{-1}{f^2} \gamma^{\nu\mu} E_\mu = \frac{-1}{f^2} E^\nu;$$

also wegen $\sqrt{-g} = f\sqrt{\gamma}$:

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = 0, \qquad \mathfrak{F}^{0\nu} = \frac{1}{f}\mathfrak{E}^\nu.$$

Dabei ist zu beachten, daß der Übergang von Tensoren zu Tensordichten sich auf der linken Seite der Gleichung auf die Weltmetrik ds^2, rechts aber auf die Raummetrik $d\sigma^2$ bezieht. Aus (4b) wird deshalb, wenn wir noch $\mathfrak{s}^0 = \varrho$ als Ladungsdichte (eine skalare Dichte in $d\sigma^2$) einführen[1]:

$$\left(\frac{1}{f}\mathfrak{E}^\nu\right)_{|\nu} = -\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{f}\Phi^{|\nu}\right)_{|\nu} = \varrho, \tag{7}$$

sowie die Aussage, daß der Strom $c \cdot \mathfrak{s}^\nu$ verschwindet. Neu gegenüber den Gleichungen der gewöhnlichen Elektrostatik ist hier nur das Auftreten von f, eben darin äußert sich die Kopplung zwischen elektrischem und Gravitationsfeld.

Aus (7) folgt durch Integration über einen Raumbereich und Anwendung des GAUSSschen Satzes die Darstellung der darin enthaltenen Ladung als Feldfluß durch die Oberfläche:

$$e = \oint \frac{1}{f}\mathfrak{E}^\nu\, do_\nu = -\oint \frac{1}{f}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\, do. \tag{8}$$

Darin bedeutet do_ν das Vektorvolumen[2], do das invariante Oberflächenelement der Oberfläche, $do = \sqrt{\gamma\, do_\nu\, do^\nu}$, $\partial/\partial n$ die Ableitung in

[1] Daß diese Definition der Ladungsdichte mit der üblichen Erklärung der Gesamtladung abgeschlossener Systeme im Einklang ist, zeige ich im Anhang 1.

[2] Zu diesem Begriff siehe z.B. A. S. EDDINGTON: Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, §49. Springer 1925.

Richtung der äußeren Normale. Wieder ist das Auftreten von f bemerkenswert.

Im folgenden wollen wir uns auf Vakuumfelder beschränken; für sie gilt nach (7):

$$\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{f}\,\Phi^{|\nu}\right)_{|\nu}=0. \tag{9}$$

Um die Ladung eines in ein Vakuumfeld eingebetteten Körpers zu bestimmen, braucht man nach (8) nur eine Hüllfläche um diesen Körper zu legen und das Integral $\oint\frac{1}{f}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,do$ zu berechnen; die Unabhängigkeit dieses Integrals von der gewählten Hülle garantiert (9).

Zur Aufstellung der zu einem elektrostatischen Vakuumfeld gehörenden Gravitationsgesetze (3) benötigen wir den Energie-Impuls-Tensor

$$T_{kl}=F_{kr}F^{r}_{.l}+\tfrac{1}{4}g_{kl}F_{rs}F^{rs}. \tag{10}$$

Man berechnet mit $W=\frac{1}{2f^2}E_\nu E^\nu=$ Energiedichte:

$$T_{0\nu}=0,\qquad T_{00}=f^2W,\qquad T_{\mu\nu}=-\frac{1}{f^2}E_\mu E_\nu+\gamma_{\mu\nu}W. \tag{11}$$

Daraus und aus (2) und (3) ergeben sich die Gravitationsgleichungen

$$\mathfrak{F}^{\nu}_{.|\nu}=\frac{\varkappa}{c^2}\,\mathfrak{F}W,\qquad \widetilde{G}_{\mu\nu}+\frac{f_{|\mu||\nu}}{f}=\frac{\varkappa}{c^2}\left(\frac{1}{f^2}E_\mu E_\nu-\gamma_{\mu\nu}W\right). \tag{12}$$

Die Bestimmung eines elektrostatischen Vakuumfeldes stellt sich mathematisch als folgendes Problem dar: Zu bestimmen ist ein dreidimensionaler, positiv definiter RIEMANNscher Raum $d\sigma^2=\gamma_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$ und in ihm zwei Skalare ψ und Φ derart, daß die Gln. (9), (12) bestehen; das sind acht nichtlineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die acht gesuchten Funktionen $\gamma_{\mu\nu}$, ψ, Φ. Als Anwendung gebe ich in Anhang 2 eine vereinfachte Herleitung der kugelsymmetrischen Lösung REISSNERs.

II. Übertragung der elektrostatischen Gesetze auf den Bildraum $dl^2=e^{2\psi}d\sigma^2$. Das für schwache Gravitationsfelder näherungsweise gültige Linienelement[1] legt nahe, statt des „natürlichen Raumes" mit der Fundamentalform $d\sigma^2$ den Bildraum mit

$$dl^2=e^{2\psi}\,d\sigma^2,\qquad dl^2=\bar{\gamma}_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu,\qquad \bar{\gamma}=\det|\bar{\gamma}_{\mu\nu}| \tag{13}$$

einzuführen. Bezeichnen wir den RICCI-Tensor dieses Bildraumes mit $\widetilde{G}_{\mu\nu}$, so gehört zu (13) die Transformation

$$\widetilde{G}_{\mu\nu}=\overline{G}_{\mu\nu}-\psi_{|\mu||\nu}-\psi_{|\mu}\psi_{|\nu}-\bar{\gamma}_{\mu\nu}\left(\psi^{|\varrho}_{.||\varrho}-\psi^{|\varrho}\psi_{|\varrho}\right), \tag{14}$$

[1] Vgl. z.B. JORDAN, P., a. a. O., S. 62, Gl. (13) mit $\psi=\Omega/c^2$, $e^{2\psi}\approx 1+2\psi$.

wobei die kovariante Ableitung in dl^2, d.h. mit $\bar{\gamma}_{\varrho\nu}$, zu vollziehen ist; wir verzichten auf die Wiedergabe der etwas mühsamen Rechnung, die zu (14) führt. Übernimmt man die Größen Φ und E_ν ungeändert in den Bildraum und berücksichtigt, daß Indexverschiebungen jetzt mit $\bar{\gamma}_{\mu\nu}, \bar{\gamma}^{\mu\nu}$ statt mit $\gamma_{\mu\nu}, \gamma^{\mu\nu}$ zu vollziehen sind, so kann man (6), (8), (9), (11), (12) in die entsprechenden Tensorgleichungen in dl^2 umschreiben. Das Ergebnis ist:

Elektrostatische Vakuumfeldgleichungen:

$$\left(e^{-2\psi}\sqrt{\bar{\gamma}}\,\Phi^{|\nu}\right)_{|\nu} = 0, \qquad E_\nu = -\Phi_{|\nu}; \tag{15}$$

Gravitationsgleichungen:

$$e^{2\psi}\psi^{|\mu}_{\cdot\,||\mu} = \frac{\varkappa}{c^2}\frac{1}{2}E_\nu E^\nu, \qquad e^{2\psi}(\bar{G}_{\mu\nu} + 2\psi_{|\mu}\psi_{|\nu}) = \frac{\varkappa}{c^2}E_\mu E_\nu; \tag{16a, b}$$

Energie-Impuls-Tensor:

$$\left.\begin{aligned} T_{00} &= e^{2\psi}W, \qquad W = \tfrac{1}{2}E_\nu E^\nu = \text{Energiedichte};\\ -e^{2\psi}T_{\mu\nu} &= E_\mu E_\nu - \bar{\gamma}_{\mu\nu}W = [\text{auf } dl^2 \text{ bezogener}^1]\ \text{Spannungstensor}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ladung im Innern einer im Vakuum verlaufenden geschlossenen Fläche:

$$e = \oint e^{-2\psi}\mathfrak{E}^\nu\,do_\nu = -\oint e^{-2\psi}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,do. \tag{18}$$

Offenbar sind die Formeln etwas einfacher, als diejenigen, die sich auf $d\sigma^2$ beziehen. Ferner haben die auf den Bildraum bezogenen Ausdrücke für die Energiedichte und den Spannungstensor genau die klassische Form.

Nimmt man die Gradienten $\psi_{|\nu}$ und $\Phi_{|\nu}$ als unendlich klein an (schwaches Gravitations- und elektrisches Feld), so wird (16b) in erster Näherung erfüllt, wenn man $\bar{G}_{\mu\nu}=0$ setzt, d.h. wenn der Bildraum euklidisch ist. Daraufhin geht (16a) in die LAPLACEsche Gleichung für das klassische Gravitationspotential $\Omega = c^2\psi$ über, während aus (15) und (18) die Gesetze der klassischen Elektrostatik werden. Die Transformation auf den Bildraum bedeutet also eine solche Umformung der Gleichungen der EINSTEIN-MAXWELLschen Theorie, die die Abweichungen von den Gesetzen der MAXWELLschen Theorie möglichst klein werden läßt[2].

III. Magnetostatische Felder. Wir wollen analog zu I. Magnetfelder betrachten, deren Gesetze aber wegen der am Schluß des Abschnittes II angegebenen Überlegungen sogleich im Bildraum dl^2 formulieren. Dazu

---

[1] Das heißt: Führt man in dl^2 lokal CARTESische Koordinaten ein, so sind die Komponenten $-e^{2\psi}T_{\mu\nu}$ die Spannungen in dem betreffenden Punkt.

[2] Man beachte, daß $d\sigma^2$ nicht in erster Näherung euklidisch ist.

gehen wir wieder von dem Ansatz

$$ds^2 = e^{2\psi}\, dx^{(0)^2} - e^{-2\psi}\, dl^2 \tag{19}$$

für die Weltmetrik aus und schreiben (3), (4) in Tensorgleichungen „in dl^2" um.

Magnetostatische Felder definieren wir analog zu (5) durch die Forderungen

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_{\nu|0} = 0 \tag{20}$$

an das Viererpotential. Für sie gilt demnach $F_{0\nu} = 0$, von dem Welttensor F_{kl} bleibt also nur der Raumtensor $F_{\lambda\mu}$ übrig, mit dessen Hilfe wir die magnetische Feldstärke

$$H^\nu = \tfrac{1}{2}\, e^{2\psi}\, E^{\nu\mu\lambda} F_{\mu\lambda} \tag{21}$$

als Vektor in dl^2 erklären[1]. Aus (4a) wird dann

$$(e^{-2\psi}\, \mathfrak{H}^\nu)_{|\nu} = 0. \tag{22}$$

Bezeichnen wir den aus $F_{\lambda\mu}$ durch Hinaufziehen der Indizes mit $\bar{\gamma}^{\lambda\mu}$ entstehenden Tensor mit $\bar{F}^{\lambda\mu}$ ($F^{\lambda\mu}$ bedeutet ja $g^{\lambda\varrho} g^{\mu\nu} F_{\varrho\nu}$), so gilt

$$\mathfrak{F}^{0\nu} = \sqrt{-g}\, F^{0\nu} = \sqrt{-g}\, g^{00} g^{\nu\lambda} F_{0\lambda} = 0,$$

$$\mathfrak{F}^{\nu\mu} = \sqrt{-g}\, g^{\nu\varrho} g^{\mu\lambda} F_{\varrho\lambda} = e^{2\psi} \sqrt{\bar{\gamma}}\, \bar{\gamma}^{\nu\varrho} \bar{\gamma}^{\mu\lambda} F_{\varrho\lambda} = e^{2\psi}\, \bar{\mathfrak{F}}^{\nu\mu},$$

und (4b) geht über in

$$0 = \mathfrak{s}_0, \qquad (e^{2\psi}\, \bar{\mathfrak{F}}^{\nu\mu})_{|\mu} = \mathfrak{s}^\nu. \tag{23}$$

Die elektrische Ladungsdichte ist also gleich Null. Die Größen $c\,\mathfrak{s}^\nu = i^\nu$ bilden eine Vektordichte in dl^2, die Stromdichte. Da (21) gleichwertig mit $e^{2\psi}\, \bar{\mathfrak{F}}^{\lambda\mu} = \mathfrak{E}^{\lambda\mu\varrho} H_\varrho$ ist, können wir statt (23) schreiben:

$$\frac{c}{2}\, \mathfrak{E}^{\nu\lambda\mu} (H_{\mu|\lambda} - H_{\lambda|\mu}) = i^\nu. \tag{24}$$

Im Vakuum ist also H_ν wirbelfrei, demnach ein Gradient. Verbindet man das mit (22), so erhält man in

$$(e^{-2\psi} \sqrt{\bar{\gamma}}\, \overset{*}{\Phi}{}^{|\nu})_{|\nu} = 0, \qquad H_\nu = -\overset{*}{\Phi}{}_{|\nu} \tag{25}$$

analog zu (15) die magnetostatischen Vakuumfeldgleichungen.

Ist ein Stromleiter in ein Vakuumfeld eingebettet, so kann man nach dem Zusammenhang zwischen Feld und Stromstärke fragen. Die Antwort folgt aus (24) durch Integration über eine den Leiter schneidende

---

[1] $E^{\lambda\nu\mu}$ bedeute den total schiefsymmetrischen Einheitstensor mit den Komponenten $\pm 1/\sqrt{\bar{\gamma}}$ bzw. 0, $\mathfrak{E}^{\lambda\nu\mu}$ die zugehörige Dichte.

Fläche und Anwendung des STOKESschen Satzes:

$$I = \int i^\nu d o_\nu = \frac{c}{2} \int \mathfrak{E}^{\nu\lambda\mu} H_{[\lambda|\mu]} d o_\nu = \frac{c}{2} \int H_{[\lambda|\mu]} d S^{\lambda\mu} = c \oint H_\nu d x^\nu.$$

In

$$I = c \oint H_\nu d x^\nu \tag{26}$$

haben wir das magnetische Analogon zu (18). Berechnet man nach (10) den Energie-Impuls-Tensor, so erhält man die in (17) angegebenen Formeln, wenn man H_ν durch E_ν ersetzt. Daraus und aus dem Vergleich von (25) mit (15) ist folgendes Ergebnis abzulesen: Die magnetostatischen Feldgleichungen lauten genau so wie die elektrostatischen, wenn man in ihnen die magnetischen Größen $\overset{*}{\Phi}$, H_ν durch die elektrischen Φ, E_ν ersetzt. Wir werden deshalb im folgenden die Bezeichnungen Φ, E_ν verwenden und von elektrischen Feldern reden, sofern die Art der Singularitäten, durch die sich beide Feldtypen unterscheiden, das nicht verbietet [vgl. (18), (26)].

Zum Abschluß der allgemeinen Bemerkungen über statische Felder in der EINSTEIN-MAXWELLschen Theorie möchte ich darauf hinweisen, daß die getrennte Behandlung elektrischer und magnetischer Felder im statischen Fall durchaus notwendig ist; die gleichzeitige Anwesenheit eines elektrischen und eines magnetischen Feldes würde nämlich im allgemeinen einen nichtverschwindenden POYNTINGschen Vektor, also eine Impulsdichte, zur Folge haben, und das ist mit dem statischen Ansatz (1) wegen der ersten Gl. (2) nicht vereinbar[1].

IV. Konstruktion und Charakterisierung einer Klasse exakter Lösungen der Gln. (15), (16). Im Anschluß an die Bemerkungen am Ende des Abschnittes II über die näherungsweise Lösung der Gln. (15), (16) mit euklidischem Bildraum wollen wir jetzt folgende naheliegende Frage stellen: Gibt es exakte Lösungen der Gln. (15), (16) mit euklidischem Bildraum?

Gäbe es solche Lösungen, so müßte für sie $\overline{G}_{\mu\nu} = 0$ gelten, und es wäre möglich, in dl^2 CARTESIsche Koordinaten einzuführen. Daraufhin würden die Gln. (15), (16) so lauten:

$$(e^{-2\psi} \Phi_{|\nu})_{|\nu} = 0, \tag{27}$$

$$e^{2\psi} \Delta \psi = \frac{\varkappa}{2c^2} D\Phi, \tag{28}$$

$$e^{2\psi} \psi_{|\mu} \psi_{|\nu} = \frac{\varkappa}{2c^2} \Phi_{|\mu} \Phi_{|\nu}. \tag{29}$$

[1] Zur Behandlung solcher Felder müßte man statt (1) eine „stationäre" Metrik mit „seitlichen" Koeffizienten $g_{0\nu}$ zugrunde legen.

Offenbar ist die eben gestellte Frage gleichwertig mit der Frage nach der Lösbarkeit der Gln. (27), (28), (29) im euklidischen Raum. Ich setze zur Abkürzung

$$\eta = +\sqrt{\frac{\varkappa}{2c^2}}; \tag{30}$$

dann folgt aus (29) durch Verjüngung $e^{2\psi} D\psi = \eta^2 D\Phi$, was mit (28) die Gleichung $e^{2\psi} \Delta\psi = e^{2\psi} D\psi$ oder $\Delta\psi = D\psi$ liefert; umgekehrt folgt aus dieser Gleichung und (29) wieder (28). Man kann demnach

$$\Delta\psi = D\psi \tag{31}$$

zur Bestimmung von ψ und daraufhin (27), (29) zur Festlegung von Φ benutzen. Nun ist

$$\Delta e^{-\psi} = (-e^{-\psi} \psi_{|\nu})_{|\nu} = e^{-\psi}(D\psi - \Delta\psi),$$

folglich kann (31) ersetzt werden durch

$$\Delta e^{-\psi} = 0. \tag{32}$$

Statt (29) schreiben wir

$$(e^{\psi})_{|\mu} (e^{\psi})_{|\nu} = \eta^2 \Phi_{|\mu} \Phi_{|\nu},$$

woraus[1] folgt:

$$e^{\psi} = 1 \mp \eta\Phi, \tag{33}$$

wenn wir Φ so normieren, daß Φ gleichzeitig mit ψ verschwindet (etwa im Unendlichen bei gewissen Lösungen). Mit (33) wird auch (27) erfüllt wegen (32):

$$e^{\psi} \psi_{|\nu} = \mp \eta \Phi_{|\nu}, \qquad (e^{-2\psi} \Phi_{|\nu})_{|\nu} = \mp \frac{1}{\eta} (e^{-\psi} \psi_{|\nu})_{|\nu} = \mp \frac{1}{\eta} \Delta e^{-\psi} = 0.$$

In (32), (33) haben wir die gesuchten Lösungen gefunden. Die Beziehung zur gewöhnlichen Elektrostatik stelle ich so her: Ich setze

$$e^{-\psi} = \frac{1}{1 \mp \eta\Phi} = 1 \pm \eta V,$$

dann stimmen V und Φ für $|\Phi| \ll 1$ näherungsweise überein, und wir können V wegen $\Delta V = 0$ als das Φ entsprechende klassische Potential auffassen. Die eben gefundenen Lösungen ergeben sich dann aus dem Abbildungssatz:

Ist V das Potential eines klassischen elektrostatischen Feldes, also $\Delta V = 0$, und bildet man $\Phi = \frac{V}{1 \pm \eta V}$, $e^{-\psi} = 1 \pm \eta V$, so befriedigt die Metrik (19) mit euklidischem dl^2 und mit Φ als elektrostatischem Potential die statischen EINSTEIN-MAXWELL-*Gleichungen (15), (16), und*

[1] Für analytische Lösungen.

man erhält so genau diejenigen Lösungen jener Gleichungen, für die der Bildraum euklidisch ist.

Die Berechnung der Ladung nach (18) ergibt für die angegebenen Lösungen genau die klassische Formel:

$$e = -\oint e^{-2\psi}\frac{\partial \Phi}{\partial n}\,do = -\oint \frac{\partial V}{\partial n}\,do. \tag{34}$$

Die Ladung bleibt bei unserer Abbildung ungeändert.

Nun sei ein klassisches Vakuumfeld mit einem Potential V gegeben, das außerhalb eines beschränkten Bereiches singularitätenfrei ist und im Unendlichen gleichmäßig gegen Null strebt. Dann haben auch die zugeordneten Potentiale Φ (unsere Abbildung $V \to \Phi$ ist ja zweideutig) diese Eigenschaften, und die Welten (19) sind im Unendlichen eben. Daher ist die Frage sinnvoll, welche gravitierenden Massen den durch V bestimmten Feldern zukommen. Aus der im Unendlichen asymptotisch geltenden Formel

$$e^{-\psi} \approx 1 - \psi \approx 1 \pm \eta V,$$

worin $\Omega = c^2\psi$ approximativ gleich dem NEWTONschen Gravitationspotential ist[1], folgt

$$\Omega \approx \mp\sqrt{4\pi f}\,V,$$

d.h. wenn M die Gesamtmasse, e die Gesamtladung bedeutet:

$$\frac{e}{M} = \pm\sqrt{4\pi f}, \tag{35}$$

oder, wenn nicht wie bisher HEAVISIDE-, sondern konventionelle cgs-Einheiten benutzt werden:

$$\frac{e}{M} = \pm\sqrt{f}. \tag{35a}$$

Damit ist eine Deutung des Vorzeichens in unserer Abbildung gewonnen und festgestellt, daß die spezifische Ladung für die hier betrachteten Lösungen die universelle Konstante $\sqrt{f}$ ist. Der Gravitationsradius ist offenbar

$$m = \pm\frac{\sqrt{f}}{c^2}\cdot e. \tag{35b}$$

Das ist genau diejenige Größe, die WEYL den Gravitationsradius der Ladung e genannt hat[2].

Für die Größe der Abweichung der EINSTEIN-MAXWELL-Felder von den entsprechenden EUKLID-MAXWELL-Feldern ist die Konstante (30) von der Dimension eines reziproken elektrischen Potentials maßgebend. Merkliche Abweichungen der Metrik ds^2 von der MINKOWSKIschen und

[1] Vgl. hierzu Fußnote 1, S. 396.

[2] WEYL, H.: Raum, Zeit, Materie, 4. Aufl., S. 237. 1921.

des EINSTEIN-Potentials Φ vom MAXWELLschen V treten erst dort auf, wo V relativ zu einer Stelle mit MINKOWSKI-Metrik und $V=0$ in die Größenordnung von $\frac{1}{\eta} \approx 10^{27}\,\mathrm{V}$[1] kommt. — Eine Ersetzung $V \to V + \text{const}$, die klassisch keine Änderung des Feldes zur Folge hat, ändert sehr wohl die zugehörigen Lösungen Φ, ψ, wie man sieht, und zwar bedeutet sie eine Verlegung derjenigen Stellen, an denen ds^2 die MINKOWSKIsche Gestalt hat, an andere Raumpunkte.

V. Beziehung der in IV. angegebenen Abbildung zu den Lösungen REISSNERS *und* LEVI-CIVITAS. Als Anwendungsbeispiel zu IV. behandeln wir die Lösungen, die sich aus dem Potential

$$V = \frac{e}{4\pi\varrho} + \alpha \tag{36}$$

ergeben, das sind offenbar die kugelsymmetrischen unter den zu IV. gehörenden Feldern. Dabei benutzen wir in dl^2 Polarkoordinaten

$$dl^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2). \tag{37}$$

Dann ist

$$e^{-\psi} = 1 \pm \alpha\eta \pm \frac{\eta e}{4\pi\varrho}. \tag{38}$$

Es müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. $\alpha \neq \mp\frac{1}{\eta}$. Führt man statt ϱ die Radialkoordinate $r = (1 \pm \alpha\eta)\,\varrho \pm \frac{\eta e}{4\pi}$ und statt $x^{(0)}$ die Zeitkoordinate $\bar{x}^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{1 \pm \alpha\eta}$ ein, so liefert unser Übertragungsprinzip

$$ds^2 = \left(1 \mp \frac{\eta e}{4\pi r}\right)^2 d x^{(0)^2} - \frac{dr^2}{\left(1 \mp \frac{\eta e}{4\pi r}\right)^2} - r^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2). \tag{39}$$

Bei der Bestimmung des zugehörigen Potentials Φ ist zu beachten, daß die Transformation der Zeitkoordinate die Transformation $\bar{\Phi} = (1 \pm \alpha\eta)\Phi$ nach sich zieht, da $\Phi = -\varphi_0$. Damit erhält man

$$\bar{\Phi} = \frac{e}{4\pi r} + \alpha. \tag{40}$$

Die Lösung (39), (40) ist offensichtlich ein Spezialfall des bekannten zuerst von REISSNER[2] angegebenen kugelsymmetrischen Feldes, nämlich der Spezialfall, in dem die spezifische Ladung den Wert (35) hat.

---

[1] Bei Magnetfeldern: $\frac{1}{\eta} \approx 10^{24}$ Gauß · cm.

[2] REISSNER: Ann. Physik **50**, 106—120 (1916).

2. $\alpha = \mp \frac{1}{\eta}$. Jetzt setzen wir $\frac{\eta e}{4\pi} = a$, schreiben also $V = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\alpha}{\varrho} \mp 1\right)$. Dann wird[1]

$$d s^2 = \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 d x^{(0)^2} - \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 d\varrho^2 - a^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta \, d\varphi^2), \tag{41}$$

$$\Phi = \frac{1}{\eta}\left(\pm 1 - \frac{\varrho}{a}\right), \qquad H_\varrho = \frac{1}{a\eta}, \qquad H_\Theta = H_\varphi = 0. \tag{42}$$

In diesem Fall ist der natürliche Raum eine einparametrige Schar geodätischer Flächen[2] $\varrho = \text{const}$, die untereinander und zur euklidischen Kugelfläche vom Radius $|a|$ kongruent sind. Die Kraftlinien sind orthogonal zu diesen Flächen und Geodätische in $d\sigma^2$, der Feldstärkenbetrag ist

$$H = \frac{1}{|a|\,\eta}. \tag{43}$$

Da die Feldlinien geodätisch parallel sind und der Feldstärkenbetrag konstant ist, kann man von einem homogenen Feld sprechen. Andererseits ist dieses homogene Feld herleitungsgemäß ein entarteter Grenzfall eines kugelsymmetrischen Feldes.

Durch die Koordinatentransformation

$$\varrho = a\,A \exp\left(\frac{x^{(3)}}{a}\right), \qquad \sin\Theta = \frac{\sqrt{x^{(1)^2} + x^{(2)^2}}}{a}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x^{(2)}}{x^{(1)}}$$

gehen (41), (42) über in

$$d s^2 = \left(A \exp\left(\frac{x^{(3)}}{a}\right)\right)^2 d x^{(0)^2} - \left[d x^\nu \, d x^\nu + \frac{(x^{(1)} d x^1 + x^{(2)} d x^2)^2}{a^2 - (x^{(1)^2} + x^{(2)^2})}\right], \tag{44}$$

$$\Phi = \frac{1}{\eta}\left(\pm 1 - \exp\left(\frac{x^{(3)}}{a}\right)\right), \qquad H_1 = H_2 = 0, \qquad H_3 = \frac{A}{a\eta}\exp\left(\frac{x^{(3)}}{a}\right). \tag{45}$$

Dieses Linienelement $\left(\text{und allgemeiner das mit } A\exp\left(\frac{x^{(3)}}{a}\right) + B\exp\left(-\frac{x^{(3)}}{a}\right)\right)$ für ein homogenes Magnetfeld in $x^{(3)}$-Richtung von der Stärke (43) hat LEVI-CIVITA 1917 angegeben[3]. — Offenbar kann man auf diese Weise jedes klassische Vakuumfeld in die EINSTEIN-MAXWELLsche Theorie übertragen.

VI. Axialsymmetrische Felder. Wir lassen jetzt die Voraussetzung, daß der Bildraum euklidisch sei, fallen und gehen zu dem allgemeineren Fall über, daß dl^2 axialsymmetrisch ist. Wie bisher betrachten wir Vakuumfelder; die felderzeugende Materie macht sich dann nur durch Singularitäten [Quellen gemäß (18) oder Wirbel gemäß (26)] bemerkbar.

---

[1] Wir sprechen hier aus historischen Gründen von einem „Magnetfeld".

[2] Das sind Flächen, die von geodätischen Linien erzeugt werden.

[3] LEVI-CIVITA: Realta fisica di alcuni spazi normali del Bianchi. Rend. Acc. Linc. (5) **26**, 1. Hälfte, S. 458 (1917).

Unter anderen Voraussetzungen (Materie mit passenden Spannungen) und mit anderer Methode hat WEYL axialsxmmetrische Felder behandelt[1].

Wieder gehen wir von dem Ansatz (19) aus und ergänzen ihn durch

$$d l^2 = e^{2\chi}(d x^{(1)^2} + d x^{(2)^2}) + r^2 d\varphi^2 \text{ mit } \chi = \chi(x^{(1)}, x^{(2)}), \quad r = r(x^{(1)}, x^{(2)}). \tag{46}$$

Entsprechend soll natürlich jetzt

$$\psi = \psi(x^{(1)}, x^{(2)}), \qquad \Phi = \Phi(x^{(1)}, x^{(2)}) \tag{47}$$

sein, so daß $E_\varphi = 0$ ist. Nach (16b) muß dann $\overline{G}_{\varphi\varphi} = 0$ sein, das ergibt ausgerechnet

$$r_{|1|1} + r_{|2|2} = 0. \tag{48}$$

Man kann deshalb r und eine dazu konjugierte Potentialfunktion z an Stelle von $x^{(1)}, x^{(2)}$ einführen und damit WEYLs kanonisches Linienelement

$$d s^2 = e^{2\psi} d x^{(0)^2} - e^{-2\psi}\left[e^{2\chi}(d z^2 + d r^2) + r^2 d\varphi^2\right] \tag{49}$$

gewinnen. Lassen wir künftig die Striche zur Kennzeichnung gewöhnlicher Ableitungen fort, verwenden griechische Indizes für die Koordinaten z, r und setzen

$$\Delta h \equiv \frac{1}{r}(r h_\nu)_\nu, \qquad D h \equiv h_\nu h_\nu, \qquad \Delta_2 h \equiv h_{\nu\nu}, \tag{50}$$

so lauten die Gln. (15), (16) in kanonischen Zylinderkoordinaten

$$(e^{-2\psi} r \Phi_\nu)_\nu = 0, \tag{51}$$

$$e^{2\psi} \Delta\psi = \eta^2 D\Phi, \tag{52}$$

$$e^{2\psi}\left(\Delta_2\chi + \frac{\chi_r}{r} + 2\psi_z^2\right) = 2\eta^2 \Phi_z^2, \tag{53}$$

$$e^{2\psi}\left(\Delta_2\chi - \frac{\chi_r}{r} + 2\psi_r^2\right) = 2\eta^2 \Phi_r^2, \tag{54}$$

$$e^{2\psi}\left(-\frac{\chi_z}{r} + 2\psi_z\psi_r\right) = 2\eta^2 \Phi_z \Phi_r. \tag{55}$$

Die Gln. (53), (54) kann man noch miteinander kombinieren, so daß man

$$\Delta\psi - D\psi = \Delta_2\chi \tag{56}$$

und eine Gleichung für χ_r erhält; diese kann mit (55) zu der totalen Differentialgleichung

$$\frac{d\chi}{r} = 2(\psi_z\psi_r - \eta^2 e^{-2\psi}\Phi_z\Phi_r)\, d z + (\psi_r^2 - \psi_z^2 - \eta^2 e^{-2\psi}[\Phi_r^2 - \Phi_z^2])\, d r \tag{57}$$

---

[1] WEYL, H.: Ann. Physik **54**, 117 (1917), ferner Ann. Physik **59** (1919).

zusammengefaßt werden. Das Gleichungssystem (51), (52), (56), (57) für ψ, χ, Φ ist in hohem Grade überbestimmt. Diese Überbestimmtheit kann aber leicht beseitigt werden. Stellt man nämlich für (57) die Integrabilitätsbedingung auf, so kommt

$$\psi_z \Delta\psi \cdot e^{2\psi} = \eta^2 [\Phi_z (\Delta\Phi - 2\Phi_\nu \psi_\nu) + \psi_z D\Phi].$$

Diese Gleichung ist aber eine Folge von (51) und (52). Außerdem stellt man nach einiger Rechnung fest, daß die Gl. (56) eine Folge der drei übrigen ist.

Ergebnis. Die Bestimmung eines axialsymmetrischen elektrostatischen Vakuumfeldes kann so durchgeführt werden, daß zunächst die Gleichungen

$$(e^{-2\psi} r \Phi_\nu)_\nu = 0, \tag{51}$$

$$e^{2\psi} \Delta\psi = \eta^2 D\Phi \tag{52}$$

gelöst werden und dann χ durch die Quadratur

$$\chi = \int r \{2(\psi_z \psi_r - \eta^2 e^{-2\psi} \Phi_z \Phi_r)\, dz + (\psi_r^2 - \psi_z^2 - \eta^2 e^{-2\psi} [\Phi_r^2 - \Phi_z^2])\, dr\} \tag{58}$$

berechnet wird.

Die Darstellung (18) der Ladung kann jetzt offenbar vereinfacht werden zu

$$e = 2\pi \int e^{-2\psi} r (\Phi_z\, dr - \Phi_r\, dz), \tag{59}$$

wo über eine Kurve in der z, r-Halbebene zu integrieren ist, die zwei Punkte der Achse $r = 0$ verbindet und die Ladungssingularität bei Rotation um diese Achse umhüllt.

Es ist bemerkenswert, daß man eine Teilmenge aller Lösungen von (51), (52) leicht konstruieren kann; das soll jetzt gezeigt werden. Wir nennen ein Lösung (Φ, ψ) eine A-Lösung, wenn die Funktionen Φ, ψ voneinander abhängig sind[1]. Dafür ist nach JACOBI die Bedingung

$$\frac{\partial(\Phi, \psi)}{\partial(z, r)} \equiv 0 \tag{60}$$

kennzeichnend, d.h. die lineare Abhängigkeit der Gradienten Φ_ν, ψ_ν. Der Fall $\Phi = \text{const}$ liefert reine Gravitationsfelder, diesen Fall wollen wir hier ausschließen. Für andere A-Lösungen ist nach (60) $e^{-2\psi}\Phi_\nu$ ein Gradient, wir schreiben

$$e^{-2\psi} \Phi_\nu = V_\nu \qquad \text{oder} \qquad d\Phi = e^{2\psi}\, dV. \tag{61}$$

[1] Das heißt es bestehe eine Relation $F(\Phi, \psi) \equiv 0$.

Wir können V als Parameterfunktion auffassen, von der Φ und ψ abhängen. Verlangen wir, daß für $V=0$ $\Phi=0$ sei, so können wir wegen (61)

$$e^{-\psi}=g(V), \qquad \Phi=\int\limits_0^V \frac{dV}{g^2} \tag{62}$$

setzen. Die Gl. (51) geht dann über in

$$\Delta V=0, \tag{63}$$

und (52) kann wegen

$$\Delta\psi=-(\log g)'\Delta V-(\log g)''DV, \qquad D\Phi=g^{-4}DV$$

auf die Bedingung $(\log g)''g^2=-\eta^2$ für g reduziert werden, woraus noch

$$g''=a\,g \qquad \text{mit} \qquad a\,g^2-g'^2=-\eta^2 \tag{64}$$

folgt. Damit ist es gelungen, die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen (51), (52) im Falle abhängiger Lösungen zu reduzieren auf die LAPLACE-Gleichung (63), die elementare gewöhnliche Differentialgleichung (64) und die Quadratur (62). In diesem Fall nimmt wegen (62) und (64) auch (58) eine einfache Form an:

$$\chi=a\int r\{2V_r V_z\,dz+(V_r^2-V_z^2)\,dr\}. \tag{65}$$

Schließlich gilt für die Ladung nach (59), (62):

$$e=2\pi\int r\,(V_z\,dr-V_r\,dz). \tag{66}$$

Wegen (63) und (66) kann V als klassisches elektrisches Potential im euklidischen Raum der Zylinderkoordinaten z, r, φ aufgefaßt werden; (62) bedeutet dann eine Transformation analog zu IV.

Je nachdem, ob $a=0$, $a>0$ oder $a<0$ angenommen wird, erhält man nach elementarer Rechnung für (62):

1. $a=0$. Dann ist wegen (65) das Linienelement dl^2 euklidisch, man erhält den Übertragungssatz aus IV.

2. $a>0$. Es ist

$$e^{-\psi}=\frac{\mathfrak{Sin}\,(\sqrt{a}\,V+d)}{\mathfrak{Sin}\,d}, \quad \Phi=\frac{\sqrt{a}}{\eta^2}\left(\mathfrak{Cotg}\,d-\mathfrak{Cotg}\,(\sqrt{a}\,V+d)\right), \quad \mathfrak{Sin}\,d\equiv\pm\frac{\sqrt{a}}{\eta}.$$

3. $a<0$. Es ist

$$e^{-\psi}=\frac{\sin(\sqrt{-a}\,V+d)}{\sin d}, \quad \Phi=\frac{\sqrt{-a}}{\eta^2}\left(\operatorname{cotg} d-\operatorname{cotg}(\sqrt{-a}\,V+d)\right),$$

$$\sin d\equiv\pm\frac{\sqrt{-a}}{\eta}.$$

Im Gegensatz zu 1. enthalten die Lösungstypen 2., 3. einen durch das klassische Feld nicht bestimmten Parameter a. Seine Bedeutung ergibt sich, wenn wir — ähnlich wie in IV. — nach der Gesamtmasse fragen. Sie läßt sich wieder aus der mehrfach benutzten Näherung für das im Unendlichen schwache Feld ($\psi \approx 0$, $V \approx 0$) ablesen. Für das Verhältnis Gravitationsradius/Ladung ergibt sich in beiden Fällen 2. und 3.

$$\frac{m}{e} = \pm \frac{\sqrt{a + \eta^2}}{4\pi}.$$

Die Formeln 2., 3. sind jeweils durch (65) zu ergänzen.

Anhang 1. Zur Definition der Ladungsdichte. Die exakte Definition der Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems in der EINSTEIN-MAXWELLschen Theorie lautet[1]

$$e = \int \mathfrak{s}^k \, dV_k. \tag{67}$$

Darin ist über einen raumartigen Querschnitt des Weltkanals des Systems zu integrieren, dV_k bedeutet das „in die Zukunft gerichtete" Vektorvolumen des Querschnitts. Spezialisiert man auf statische Koordinaten (1) und wählt als Querschnitt eine Hyperfläche $x^{(0)} = \text{const}$, so ist $dV_\nu = 0$, $dV_0 = dx^{(1)}\, dx^{(2)}\, dx^{(3)}$, also wird

$$e = \int \mathfrak{s}^0 \, dx^{(1)}\, dx^{(2)}\, dx^{(3)}, \tag{68}$$

woraus abzulesen ist, daß $\mathfrak{s}^0$ als räumliche Ladungsdichte (skalare Dichte) aufzufassen ist.

Anhang 2. Eine einfache Herleitung der REISSNER*schen Lösung.* Die folgende Herleitung des Feldes eines geladenen Massenpunktes ist insofern einfach, als durch Ausnutzung der Überbestimmtheit der Differentialgleichung des kugelsymmetrischen Feldes die betreffenden Funktionen durch bloße Kombination der Feldgleichungen sogar *ohne Quadratur* (bis auf die triviale Quadratur $y' = 0$, $y = \text{const}$) bestimmt werden. —

Für das räumliche Linienelement

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{h^2} + r^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta \, d\varphi^2), \qquad h = h(r)$$

lauten die Gln. (9), (12):

$$\left(r^2 \frac{h}{f} \Phi'\right)' = 0, \qquad \text{also} \qquad r^2 \frac{h}{f} \Phi' = -\varepsilon = \text{const}, \tag{69}$$

$$(r^2 h f')' = \frac{\eta^2 \varepsilon^2 f}{h r^2}, \tag{70}$$

$$\frac{2}{r}\frac{h'}{h} + \frac{f''}{f} + \frac{h' f'}{h f} = \frac{\eta^2 \varepsilon^2}{r^4 h^2}, \tag{71}$$

$$-1 + h^2 + r h h' + r h^2 \frac{f'}{f} = -\frac{\eta^2 \varepsilon^2}{r^2}. \tag{72}$$

[1] Siehe z.B. WEYL, H.: a. a. O., S. 244.

Differenziert man (70) auf der linken Seite aus und subtrahiert das Ergebnis von (71), so kommt

$$\frac{2}{r}\left(\frac{f'}{f}-\frac{h'}{h}\right)=0, \qquad \text{also} \qquad \frac{f'}{f}=\frac{h'}{h},$$

also bei passender Wahl des $x^{(0)}$-Maßstabs:

$$h = f. \tag{73}$$

Daraufhin liefert (69):

$$\Phi = \frac{\varepsilon}{r}, \tag{74}$$

und (70), (72) vereinfachen sich zu

$$(r^2 f f')' = \frac{\eta^2 \varepsilon^2}{r^2}, \qquad \text{also} \qquad r^2 f f' = m - \frac{\eta^2 \varepsilon^2}{r},$$

$$-1 + f^2 + 2 r f f' = -\frac{\eta^2 \varepsilon^2}{r^2}.$$

Daraus ist unmittelbar abzulesen:

$$f^2 = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\eta^2 \varepsilon^2}{r^2}. \tag{75}$$

Damit ist die Weltmetrik sowie das Potential bestimmt.

Herrn Professor PASCUAL JORDAN möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit danken. Der Bürgermeister VON MELLE-Förderung sowie der Hamburg Rotary Stiftung danke ich für Unterstützung.

Hamburg, Forschungsprofessur für Theoretische Physik der Universität.