Algebraische Ableitungsschätzung im Kontext der Rekonstruierbarkeit

Algebraic Time-derivative Estimation in the Context of Reconstructibility

Johann Reger und Jérôme Jouffroy

Das von Fliess und Sira Ramírez vorgeschlagene algebraische Verfahren zur Schätzung von Zeitableitungen gemessener Signale wird aus klassischen Resultaten der Optimalschätzung hergeleitet. Insbesondere wird anhand einfacher Rechnungen gezeigt, wie sich das algebraische Verfahren als ein Sonderfall der Zustandsrekonstruktion mit Hilfe von Rekonstruierbarkeits-Gramschen ergibt. Abschließend werden Verbindungen zu weiteren Verfahren hergestellt, wie Least-Squares und dem Kalman-Filter, sowie kurz Implikationen für die Praxis erörtert.

The algebraic approach to time-derivative estimation of measurement signals, proposed by Fliess and Sira Ramírez, is developed out of classical results from optimal estimation theory. By means of simple calculations it is shown that the algebraic method may be obtained as a special case of state reconstruction using reconstructibility Gramians. The paper concludes with links to further estimation methods, as least-squares estimation and Kalman-filtering, and briefly points out practical implications.

Schlagwörter: Zustandsschätzung, Deadbeat-Beobachter, FIR-Filter, Operatorenrechnung

Keywords: State estimation, deadbeat observers, FIR-filtering, operational calculus

1 Einleitung

Das algebraische Verfahren zur Schätzung von Zeitableitungen gemessener Signale, wie erstmals in [11] von Fliess und Sira Ramírez vorgeschlagen, brachte eine Reihe interessanter Resultate bei der Zustandsschätzung, Parameteridentifikation sowie der modellbasierten Fehlerdiagnose zutage; siehe [7; 8; 10; 12] und darin enthaltene Referenzen. Im Kern gründet das algebraische Schätzverfahren auf einer Darstellung der Zeitableitungen eines Messsignals als gewichtete Integration des Messsignals auf einem endlichen, gleitenden Zeithorizont. Diese Darstellung lässt sich beispielsweise mittels einfacher Operatorenrechnung [5; 6] bestimmen. Auf Grund des mit der Integration einhergehenden Tiefpassverhaltens erweist sich das Verfahren als robust gegenüber Messrauschen, insbesondere im Vergleich zu üblichen Verfahren der numerischen Differentiation. Sind die Messsignale keinem Messrauschen unterworfen, so kann dieser Zeithorizont sogar beliebig klein gewählt werden [11]; siehe [17] für weitere Details und Erweiterungen des Verfahrens. Auch in Echtzeitanwendungen wurde das Verfahren bereits erfolgreich eingesetzt [27; 28].

Ausgangspunkt der algebraischen Ableitungsschätzung ist die Annahme eines polynomialen Signalmodells für das Messsignal. Da polynomiale Signale als Ausgangssignal eines eingangsfreien, zeitinvarianten linearen Systems interpretiert werden können, stellt sich die Frage nach dem tieferen Zusammenhang mit linearen Zustandsbeobachtern, Least-Squares-Schätzern und dem Kalman-Filter. Diese Frage nach einem klassischen Zugang zum algebraischen Verfahren wurde erstmalig in [21] beantwortet. Im vorliegenden Artikel wird in Anlehnung daran gezeigt, wie man mit Hilfe des klassischen Konzepts der Rekonstruierbarkeit auf einem beliebigen Zeithorizont einen Zustandsschätzer als gewichtetes Integral eines Messsignals bestimmen kann. Infolge der speziellen Dynamik des differenzierenden Modellsystems (nilpotente Dynamikmatrix) gelingt dabei die Inversion der sogenannten Rekonstruierbarkeits-Gramschen des Systems in geschlossener Form und somit die Herleitung einer Schätzgleichung vergleichbar dem algebraischen Verfahren. Ein einfaches Beispiel dient zunächst als Hinweis auf die Äquivalenz dieser speziellen Zustandsrekonstruktion mit dem algebraischen Verfahren. Diese Äquivalenz wird dann in einem nächsten Schritt mit Hilfe einer neuartigen Computeralgebra-Beweistechnik [25], alternativ zu [21], bewiesen.

Ein kurzer Abriss über die Grundlagen der algebraischen Ableitungsschätzung ist in Abschnitt 2 zusammengestellt. Abschnitt 3 ist mit der Zustandsrekonstruktion befasst und stellt den Zusammenhang zum algebraischen Ableitungsschätzverfahren her. Die Äquivalenz der vorangehend vorgestellten Verfahren wird in Abschnitt 4 bewiesen. Weiterführende Anmerkungen zu Verbindungen mit Least-Squares-Zustandsschätzung, Kalman-Filter und Parameterschätzung sowie zu Implikationen für die Praxis finden sich im abschließenden Abschnitt 5.

2 Algebraische Ableitungsschätzung

Aus Gründen der Kürze und einfacheren Verfügbarkeit weiterführender Literatur wird das Verfahren weitgehend in der Nomenklatur von [28] motiviert.

Man betrachte ein reellwertiges Polynom N-ten Grades, $y(t)$, als Funktion der Zeit t. An der Stelle $t=0$ kann diese Funktion (Zeitsignal) in Form einer Taylorreihe

$$y(t)=\sum_{i=0}^{N}\frac{y^{(i)}(0)}{i!}\,t^i \tag{1}$$

dargestellt werden.

Ziel des algebraischen Verfahrens ist es, die Zeitableitungen dieses Polynoms an der Stelle $t=0$ bis zu einer bestimmten Ordnung zu bestimmen, d. h. es sollen alle $i=0,1,2,\ldots,N$ Koeffizienten $y^{(i)}(0)$ des polynomialen Signals (1) ermittelt werden.

Dazu schreibt man $y(t)$ als Laplace-Transformierte

$$Y(s)=\sum_{i=0}^{N}\frac{y^{(i)}(0)}{s^{i+1}}\,. \tag{2}$$

Es soll ein spezieller Koeffizient, $y^{(j)}(0)$, isoliert werden. Zu diesem Zweck multipliziert man (2) zunächst mit s^{N+1}, d. h.

$$s^{N+1}\,Y(s)=\sum_{i=0}^{N}y^{(i)}(0)\,s^{N-i}\,. \tag{3}$$

Somit ist die rechte Seite von (3) nunmehr ein Polynom im Operator s. Zur Eliminierung der Summanden bezüglich $y^{(j+1)}(0),\ldots,y^{(N)}(0)$ differenziert man Gleichung (3) nun $N-j$ mal nach dem Operator s, siehe [9]. Dies resultiert in

$$\frac{d^{N-j}}{ds^{N-j}}\left(s^{N+1}Y(s)\right)=\sum_{i=0}^{j}y^{(i)}(0)\,\frac{(N-i)!}{(j-i)!}\,s^{j-i}\,. \tag{4}$$

In einem nächsten Schritt eliminiert man die verbleibenden Summanden bezüglich $y^{(0)}(0)$, $y^{(1)}(0)$, $\ldots$, $y^{(j-1)}(0)$. Hierzu multipliziert man (4) zunächst mit $1/s$, d. h.

$$\frac{1}{s}\frac{d^{N-j}}{ds^{N-j}}\left(s^{N+1}Y(s)\right)=\frac{(N-j)!}{s}y^{(j)}(0)+\sum_{i=0}^{j-1}y^{(i)}(0)\frac{(N-i)!}{(j-i)!}s^{j-i-1}\,, \tag{5}$$

um die gesuchte Unbekannte $y^{(j)}(0)$ infolge der nachfolgenden j-fachen Differentiation nach s nicht zu eliminieren. Diese Differentiation liefert

$$\frac{d^j}{ds^j}\left(\frac{1}{s}\frac{d^{N-j}}{ds^{N-j}}\left(s^{N+1}Y(s)\right)\right)=\frac{(-1)^j\,j!(N-j)!}{s^{j+1}}y^{(j)}(0). \tag{6}$$

Gleichung (6) könnte zur Bestimmung von $y^{(j)}(0)$ umgehend in den Zeitbereich transformiert werden. Jedoch enthält die linke Seite von (6) noch Monome der Form s^N, d. h. eine N-fache Zeitdifferentiation, gleichbedeutend mit einer Verstärkung von hochfrequentem Messrauschen $y(t)$; vgl. das Beispiel in [24, S. 17–18]. Um diesen Effekt zu vermeiden, wird Gleichung (6) mit dem Operator $1/s^{N+1}$ vormultipliziert. Dies hat zur Folge, dass Zeitsignale mindestens einmal bezüglich der Zeit integriert werden. Daher erhält man

$$\frac{1}{s^{N+1}}\frac{d^j}{ds^j}\left(\frac{1}{s}\frac{d^{N-j}}{ds^{N-j}}\left(s^{N+1}Y(s)\right)\right)=\frac{(-1)^j\,j!(N-j)!}{s^{N+j+2}}y^{(j)}(0)\,, \tag{7}$$

woran ersichtlich ist, dass der Ausdruck $y^{(j)}(0)$ sich aus einer endlichen Anzahl von Operationen am Zeitsignal $y(t)$ bestimmt; siehe [17; 28].

Zur Rücktransformation dieser Beziehung in den Zeitbereich wird auf die linke Seite von (7) zweimalig die Leibniz-Formel zur Differentiation von Produkten angewandt. Nach kleineren Umstellungen folgt

$$\frac{1}{s^{N+j+2}}y^{(j)}(0)=\frac{(-1)^j}{j!\,(N-j)!}\sum_{\kappa_1=0}^{N-j}\sum_{\kappa_2=0}^{j}\binom{N-j}{\kappa_1}\binom{j}{\kappa_2}\times\frac{(N+1)!}{(N-\kappa_1-\kappa_2)!\,(N-\kappa_1+1)}\frac{1}{s^{\kappa_1+\kappa_2+1}}\frac{d^{N-\kappa_1-\kappa_2}}{ds^{N-\kappa_1-\kappa_2}}Y(s)\,. \tag{8}$$

Unter Verwendung der Korrespondenz

$$\frac{1}{s^{i+1}}\frac{d^j}{ds^j}Y(s)\quad\bullet\!\!-\!\!\circ\quad\int_0^t\frac{(t-\tau)^i(-\tau)^j}{i!}\,y(\tau)\,d\tau \tag{9}$$

kann Gleichung (8) in den Zeitbereich transformiert werden. Für das polynomiale Signal $y(t)$ gemäß (1) gilt somit:

$$y^{(j)}(0)=\int_0^t\Pi_j(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau\,,\quad j=0,1,\ldots,N \tag{10}$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\Pi_j(t,\tau) = \frac{(N+j+1)!\,(N+1)!\,(-1)^j}{t^{N+j+1}} \sum_{\kappa_1=0}^{N-j}\sum_{\kappa_2=0}^{j} \frac{1}{\kappa_1!\kappa_2!} \times \frac{(t-\tau)^{\kappa_1+\kappa_2}\,(-\tau)^{N-\kappa_1-\kappa_2}}{(N-j-\kappa_1)!(j-\kappa_2)!(N-\kappa_1-\kappa_2)!(\kappa_1+\kappa_2)!(N-\kappa_1+1)}. \tag{11}$$

Dieses Ergebnis lässt die exakte Bestimmung von $y^{(j)}(t)$ an der Stelle $t=0$ zu, sofern y im Intervall $[0,t]$ vorliegt. Um eine kausale Bestimmung mit gleitendem Horizont zu erhalten, wird zunächst t durch $-T$ ersetzt (T sei eine kleine positive Konstante, siehe [5; 6]) und mit Hilfe der Beziehung

$$(-1)\;\Pi_j(-T,-\tau) = (-1)^j\;\Pi_j(T,\tau) \tag{12}$$

vereinfacht.

Verschiebt man schließlich die y-Werte zeitlich um t, so folgt aus dem obigen Ergebnis sofort ein Schätzer mit gleitendem Horizont [17; 27].

Satz 1 (Algebraischer Ableitungsschätzer).
Sei $t \geq T > 0$. Für ein polynomiales Zeitsignal $y(t)$ nach (1) gehorchen die Ableitungen $y^{(j)}(t)$, $j = 0,1,2,\ldots,N$, der Faltungsbeziehung

$$y^{(j)}(t) = \int_0^T \Pi_{j,T}(T,\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau\,. \tag{13}$$

Dabei hängt die Gewichtsfunktion

$$\Pi_{j,T}(T,\tau) = \frac{(N+j+1)!\,(N+1)!}{T^{N+j+1}} \sum_{\kappa_1=0}^{N-j}\sum_{\kappa_2=0}^{j} \frac{1}{\kappa_1!\kappa_2!} \times \frac{(T-\tau)^{\kappa_1+\kappa_2}\,(-\tau)^{N-\kappa_1-\kappa_2}}{(N-j-\kappa_1)!(j-\kappa_2)!(N-\kappa_1-\kappa_2)!(\kappa_1+\kappa_2)!(N-\kappa_1+1)} \tag{14}$$

von der Ordnung j der zur Zeit t zu bestimmenden Ableitung und von der konstanten Fensterbreite T ab. □

Anmerkung 2.1. *Ist das Signal $y(t)$ als reales, Rauschen unterworfenes Messsignal zu verstehen, so wird es im Allgemeinen nicht mehr polynomialer Natur sein sondern irgendeine im Messbereich analytische Zeitfunktion. Das Ergebnis von Satz 1 kann dann als Ableitungsschätzung interpretiert werden.*

Anmerkung 2.2. *Zu dem eben präsentierten algebraischen Ableitungsschätzer sind eine Reihe von Modifikationen vorgeschlagen worden (siehe [17] und dort angeführte Referenzen). Eine Erweiterung besteht beispielsweise darin, dass Gleichung (6) anstelle mit $1/s^{N+1}$ mit $1/s^{N+1+\nu}$ vormultipliziert wird, was einer ν-fachen zusätzlichen Integration gleichkommt. Die weiteren Integrationen verfolgen das Ziel einer zusätzlichen Minderung des Einflusses von hochfrequentem Rauschen auf die Güte der Schätzung. Im Allgemeinen kann aber anstelle $1/s^{N+1+\nu}$ ein beliebiges nicht-singuläres, z. B. gebrochenrationales, Filter mit einem Differenzgrad von mindestens $N+1$ verwendet werden.*

2.1 Beispiel

Es sollen die konstanten, reellen Parameter $y(0)$ und $\dot{y}(0)$ der Polynomfunktion

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)\,t \tag{15}$$

bestimmt werden. Es gilt $N=1$, siehe Gleichung (1).

Nach Satz 1 erhält man mit dem algebraischen Verfahren die folgenden Werte:

$$y(0) = \frac{2}{T^2}\int_0^T \big(2T-3\tau\big)\,y(-\tau)\,d\tau\,, \tag{16}$$

$$\dot{y}(0) = \frac{6}{T^3}\int_0^T \big(T-2\tau\big)\,y(-\tau)\,d\tau\,. \tag{17}$$

3 Deadbeat-Zustandsrekonstruktion

Aus Gründen der einfacheren Darstellung beschränken sich die folgenden Ausführungen auf den autonomen Fall linearer zeitvarianter Eingrößensysteme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) \tag{18}$$

$$y(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) \tag{19}$$

mit Zustand $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ und Ausgang $y(t) \in \mathbb{R}$. Eine Erweiterung auf den nicht-autonomen Mehrgrößenfall ist jedoch ohne größere Schwierigkeiten möglich.

Im Weiteren steht die Eigenschaft der Zustandsrekonstruierbarkeit im Mittelpunkt [1; 3; 14; 19].

Nach [1] spricht man von einem im Intervall $[t_0, t_1]$ zur Zeit t_1 *rekonstruierbaren Zustand* $\mathbf{x}(t_1)$, wenn $\mathbf{x}(t_1)$ mit Hilfe *vorangegangener* Messungen von $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$, und den Systemgleichungen (18)–(19) eindeutig bestimmt werden kann.

Entsprechend spricht man von einem *beobachtbaren Zustand* $\mathbf{x}(t_0)$, wenn $\mathbf{x}(t_0)$ aus *nachfolgenden* Messungen von $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$, und den Systemgleichungen (18)–(19) eindeutig bestimmt werden kann.

Die Zustandsrekonstruierbarkeit ist also gerade das zur Zustandsbeobachtbarkeit zeitkomplementäre Konzept. Wie von Willems und Mitter in [26] aufgezeigt, wurde dem Konzept der Zustandsrekonstruierbarkeit in der Literatur weniger Aufmerksamkeit geschenkt. Man kann vermuten, dass dies damit zusammen hängt, dass beide Konzepte im Linearen äquivalente Konzepte sind. Dies lässt sich wie in [1] leicht zeigen.

Ein üblicher Weg zur Bestimmung, d. h. *Rekonstruktion* des Zustands $\mathbf{x}(t_1)$ führt über die Beziehung

$$y(\tau) = \mathbf{C}(\tau)\,\mathbf{\Phi}(\tau,t_1)\,\mathbf{x}(t_1) \tag{20}$$

mit der Fundamentallösung $\mathbf{\Phi}(\tau,t)$ zu Gleichung (18). Multiplikation von links ergibt zunächst

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau,t_1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)y(\tau) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau,t_1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{C}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t_1)\,\mathbf{x}(t_1). \tag{21}$$

Zur eindeutigen Rekonstruktion von $\mathbf{x}(t_1)$ aus vergangenen Werten von $y(t)$ auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ integriert man diese Beziehung und erhält

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau, t_1)\, \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\, y(\tau)\, d\tau = \left(\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau, t_1)\, \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\, \mathbf{C}(\tau)\, \mathbf{\Phi}(\tau, t_1)\, d\tau \right) \mathbf{x}(t_1). \tag{22}$$

Definiert man die *Rekonstruierbarkeits-Gramsche*

$$\mathbf{W}_{\mathrm{r}}(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau, t_1)\, \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\, \mathbf{C}(\tau)\, \mathbf{\Phi}(\tau, t_1)\, d\tau\,, \tag{23}$$

so kann, wenn man Invertierbarkeit von $\mathbf{W}_{\mathrm{r}}(t_0, t_1)$ voraussetzt, der Zustand $\mathbf{x}(t_1)$ bestimmt werden:

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{W}_{\mathrm{r}}^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau, t_1)\, \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\, y(\tau)\, d\tau\,. \tag{24}$$

Folglich ist der Zustand $\mathbf{x}(t_1)$ im Intervall $[t_0, t_1]$ rekonstruierbar genau dann, wenn die Rekonstruierbarkeits-Gramsche vollen Rang aufweist [1]. Ein entsprechender Zusammenhang gilt auch für die Zustandsbeobachtbarkeit, siehe z. B. [4, S. 158]. Die Integration in der Beziehung (24) lässt eine Glättung der Schätzung bei einem realen Messsignal $y(t)$ unter hochfrequentem Rauschen erwarten.

Auf Grund der besonderen Struktur von (22) – die rechte Seite ist linear in $\mathbf{x}(t_1)$ – können beliebig viele weitere Schätzgleichungen abgeleitet werden. Auf beide Seiten der Gleichung können bezüglich der Variablen t_0 beliebige nicht-singuläre Filteroperationen angewandt werden. Beispielsweise kann, wie in Abschnitt 2 angemerkt, Gleichung (22) einfach ν-mal integriert werden, d. h. man erhält nunmehr

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{W}_{\mathrm{r},\nu}^{-1}(t_0, t_1) \times \int_{t_0}^{t_1}\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma_1}^{t_1} \cdots \int_{\sigma_{\nu-1}}^{t_1} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\sigma_\nu, t_1)\, \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\sigma_\nu)\, y(\sigma_\nu)\, d\sigma_\nu \cdots d\sigma_1 d\tau \tag{25}$$

mit der neuen „Rekonstruierbarkeits-Gramschen"

$$\mathbf{W}_{\mathrm{r},\nu}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma_1}^{t_1} \cdots \int_{\sigma_{\nu-1}}^{t_1} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\sigma_\nu, t_1)\, \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\sigma_\nu) \times \mathbf{C}(\sigma_\nu)\, \mathbf{\Phi}(\sigma_\nu, t_1)\, d\sigma_\nu \cdots d\sigma_1 d\tau\,. \tag{26}$$

Die oben skizzierten, klassischen Ergebnisse sind seit langem bekannt, wenn auch nicht als Alternative zur Lösung der Aufgaben von asymptotischen Beobachtern herangezogen worden. Die Zustandsrekonstruktion entlang dieser Zeilen gestattet jedoch die Bestimmung eines exakten Schätzwerts $\mathbf{x}(t_1)$ in *endlicher* Zeit, z. B. durch Wahl eines Zeitfensters der festen Breite T vermöge $t_0 = t_1 - T$. Man spricht daher auch von einer *Deadbeat*-Zustandsschätzung bzw. von einem FIR-Filter [28]. Die Größe des Zeithorizonts ist dabei alleine durch die Invertierbarkeit und Kondition der Rekonstruierbarkeits-Gramschen (23) (bzw. (26)) bestimmt.

3.1 Ein Deadbeat-Ableitungsschätzer auf Basis der Zustandsrekonstruktion

Im Hinblick auf die Taylorreihe (1) seien die Matrizen in den Systemgleichungen (18)–(19) speziell gewählt als

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

in entsprechender Dimension, und die Matrix

$$e^{\mathbf{A}\,t} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 & \cdots & t^N/N! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{N-1}/(N-1)! \\ 0 & 0 & 1 & t & \cdots & t^{N-2}/(N-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

ist die der nilpotenten Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ zugeordnete Fundamentallösung.

Somit bestimmen sich die Komponenten der $(N+1) \times (N+1)$ Rekonstruierbarkeits-Gramschen (23) gemäß

$$[W_{\mathrm{r}}]_{ij}\,(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{(\tau - t_1)^{i+j-2}}{(i-1)!\,(j-1)!}\, d\tau = \frac{-\,(t_0 - t_1)^{i+j-1}}{(i-1)!\,(j-1)!\,(i+j-1)}\,. \tag{29}$$

Da die Auswertung der Beziehung (24) die Inversion der Gramschen erfordert, soll folgendes Lemma vorangestellt werden.

Lemma 1 (Inverse der Matrix $\mathbf{W}_{\mathrm{r}}(t_0, t_1)$).
Seien die Komponenten der Matrix $\mathbf{W}_{\mathrm{r}}(t_0, t_1)$ gegeben wie in (29). Sei $t_0 \neq t_1$. Dann lauten die Komponenten der inversen Matrix $\mathbf{W}_{\mathrm{r}}^{-1}(t_0, t_1)$:

$$\left[W_{\mathrm{r}}^{-1}\right]_{ij}(t_0, t_1) = \frac{(i-1)!\,(j-1)!\,(i+j-1)}{(t_1 - t_0)^{i+j-1}} \times \binom{N+i}{N+1-j}\binom{N+j}{N+1-i}\binom{i+j-2}{i-1}^2. \tag{30}$$

□

Beweis: Man multipliziere $\mathbf{W}_{\mathrm{r}}(t_0, t_1)$ von links und rechts mit der Diagonalmatrix $\mathbf{M}$. Dabei sei $\mathbf{M}$ komponentenweise

$$M_{ij} = \frac{(i-1)!}{(t_0 - t_1)^i}\delta_{ij} \tag{31}$$

unter Verwendung des Kronecker-Symbols δ_{ij}. In Komponenten gilt dann:

$$\begin{aligned}
&[(t_1-t_0)\,\mathbf{M}\,\mathbf{W}_\mathrm{r}(t_0,t_1)\,\mathbf{M}]_{ij} \\
&= (t_1-t_0)\sum_{k=1}^{N+1}\sum_{l=1}^{N+1} M_{ik}\,[W_\mathrm{r}]_{kl}\,(t_0,t_1) M_{lj} = (t_1-t_0)\times \\
&\quad \sum_{k=1}^{N+1}\sum_{l=1}^{N+1} \frac{(i-1)!\,\delta_{ik}\,(-1)\,(t_0-t_1)^{k+l-1}\,(l-1)!\,\delta_{lj}}{(t_0-t_1)^i\,(k-1)!\,(l-1)!\,(k+l-1)\,(t_0-t_1)^l} \\
&= \frac{1}{i+j-1}\,. \qquad (32)
\end{aligned}$$

Das sind aber gerade die Komponenten einer $(N+1)\times(N+1)$ Hilbert-Matrix, im Folgenden mit $\mathbf{H}$ bezeichnet. Die Komponenten der Inversen von $\mathbf{H}$ sind in geschlossener Form bekannt [23]. Sie lauten:

$$\begin{aligned}
\left[H^{-1}\right]_{ij} &= (-1)^{i+j}(i+j-1)\,\times \\
&\binom{N+i}{N+1-j}\binom{N+j}{N+1-i}\binom{i+j-2}{i-1}^2\,. \qquad (33)
\end{aligned}$$

Demnach gilt

$$\mathbf{W}_\mathrm{r}^{-1}(t_0,t_1) = (t_1-t_0)\,\mathbf{M}\,\mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{M}\,, \qquad (34)$$

was gerade das Ergebnis in (30) widerspiegelt. □

Mit Hilfe von Lemma 1 und der besonderen Form der Fundamentalmatrix (28) kann die $(i+1)$-te Komponente, $i=0,1,\ldots,N$, des Zustands $\mathbf{x}(t_1)$ angeschrieben werden:

$$x_{i+1}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=0}^{N}\left[W_\mathrm{r}^{-1}\right]_{i+1,\,j+1}(t_0,t_1)\,\frac{(\tau-t_1)^j}{j!}\,y(\tau)\,d\tau\,. \qquad (35)$$

Die formelmäßige Auswertung dieser Beziehung führt schließlich zu folgendem Satz:

Satz 2 (Gramscher Ableitungsschätzer).
Sei $y(t)$, $t_0<t\le t_1$, Ausgangssignal eines linearen zeitvarianten Systems gemäß (27) und t_0 eine beliebige Anfangszeit. Dann gehorchen die Ableitungen $y^{(j)}(t_1)$, $j=0,1,2,\ldots,N$, der Faltungsbeziehung

$$y^{(j)}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\Upsilon_j(t_1,t_0,\tau)\,y(\tau)\,d\tau \qquad (36)$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\begin{aligned}
\Upsilon_j(t_1,t_0,\tau) &= \frac{(N+j+1)!}{(t_1-t_0)^{j+1}\,j!\,(N-j)!}\,\times \\
&\sum_{i=0}^{N}\frac{(-1)^i\,(N+i+1)!}{(i+j+1)\,(N-i)!(i!)^2}\left(\frac{t_1-\tau}{t_1-t_0}\right)^i\,. \qquad (37)
\end{aligned}$$

□

In der Praxis wird man zur Eindämmung des rechnerischen Aufwands einen endlichen, gleitenden Zeithorizont wählen und die Aussage von Satz 2 enger fassen. Wählt man $t_1:=t$ sowie $t_0:=t-T$, $T>0$ endlich, und führt die neue Integrationsvariable $\sigma=t-\tau$ ein, so kann eine dem algebraischen Ableitungsschätzer (Satz 1) ähnliche Darstellung angegeben werden. Dies drückt sich aus in nachstehendem Korollar.

Korollar 1 (Version mit gleitendem Horizont).
Sei $y(t)$ Ausgangssignal eines linearen zeitvarianten Systems gemäß (27). Der Zeithorizont $T>0$ sei beliebig endlich gewählt. Dann gehorchen die Ableitungen $y^{(j)}(t)$, $j=0,1,2,\ldots,N$, der Faltungsbeziehung

$$y^{(j)}(t) = \int_0^T \Upsilon_{j,T}(T,\sigma)\,y(t-\sigma)\,d\sigma \qquad (38)$$

mit der Gewichtsfunktion

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{j,T}(T,\tau) &= \frac{(N+j+1)!}{T^{j+1}\,j!\,(N-j)!}\,\times \\
&\sum_{i=0}^{N}\frac{(-1)^i(N+i+1)!}{(i+j+1)\,(N-i)!\,(i!)^2}\left(\frac{\sigma}{T}\right)^i\,. \qquad (39)
\end{aligned}$$

□

Anmerkung 2.1 gilt entsprechend.

3.2 Beispiel

Wie zuvor beim algebraischen Verfahren sollen die Parameter $y(0)$ und $\dot{y}(0)$ der Polynomfunktion (15) bestimmt werden. Entsprechend gilt wiederum $N=1$.

Die Auswertung der Beziehung von Korollar 1 liefert

$$y(0) = \frac{2}{T^2}\int_0^T\big(2T-3\sigma\big)\,y(-\sigma)\,d\sigma\,, \qquad (40)$$

$$\dot{y}(0) = \frac{6}{T^3}\int_0^T\big(T-2\sigma\big)\,y(-\sigma)\,d\sigma\,. \qquad (41)$$

Man erhält mittels der Rekonstruierbarkeits-Gramschen demnach das selbe Ergebnis wie zuvor mit dem algebraischen Verfahren.

4 Hauptresultat und Beweis

Die selbe Form des Ergebnisses in den vorangehenden Beispielen gibt der Vermutung Anlass, dass der Gramsche Ableitungsschätzer auf gleitendem Horizont nach Korollar 1 mit dem algebraischen Ableitungsschätzer gemäß Satz 1 zusammenfällt.

Satz 3 ($\Pi_{j,T}=\Upsilon_{j,T}$).
Seien $\Pi_{j,T}(T,\tau)$ und $\Upsilon_{j,T}(T,\tau)$ wie in (14) und (39) gegeben. Ferner sei $T>0$ endlich, $\tau\in[0,T]$ und $N\in\{0,1,2,\ldots\}$. Dann gilt

$$\Pi_{j,T}(T,\tau) = \Upsilon_{j,T}(T,\tau), \quad j\in\{0,1,2,\ldots,N\}\,. \qquad (42)$$

□

Beweis: Es soll eine zu [21] alternative Beweisidee angegeben werden. Dazu vergleicht man die Struktur der Gleichung (24) mit dem Faltungsintegral (13) unter Berücksichtigung der speziellen Wahl der Systemdarstellung nach (27) mit expliziter Fundamentallösung gemäß (28). Setzt man weiterhin $\mathbf{\Pi}_T(T,\tau) := (\Pi_{0,T}(T,\tau), \Pi_{1,T}(T,\tau), \ldots, \Pi_{N,T}(T,\tau))^{\mathrm{T}}$, dann ist zu zeigen, dass

$$\mathbf{W}_{\mathrm{r}}^{-1}(t-T,t)\,\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau,t)\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t-\tau) = \mathbf{\Pi}_T(T,\tau)\,. \tag{43}$$

Man kommt ohne Bildung der Inversen $\mathbf{W}_{\mathrm{r}}^{-1}(t-T,t)$ aus, da Rekonstruierbarkeit vorliegt. Zu beweisen ist somit:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{r}}(t-T,t)\,\mathbf{\Pi}_T(T,\tau) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau,t)\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\,. \tag{44}$$

Nach Einsetzen aller Beziehungen und kleineren Umformungen erhält man die zu zeigende Äquivalenz:

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{\kappa_1=0}^{N-j}\sum_{\kappa_2=0}^{j} \frac{(-1)^{N+j}\,(N+j+1)!\,(N+1)!}{j!\,(i+j+1)\,\kappa_1!\,\kappa_2!\,(N-j-\kappa_1)!\,(j-\kappa_2)!} \times \frac{(1-a)^{\kappa_1+\kappa_2}a^{i-N}}{(N-\kappa_1-\kappa_2)!\,(\kappa_1+\kappa_2)!(N-\kappa_1+1)} = 1\,. \tag{45}$$

Dabei sei der Kürze halber $a := T/\tau$.

Die Gültigkeit von (45) kann für alle relevanten Werte von N und i, gültig für beliebige reelle Zahlen a, einfach per Enumeration mit Computeralgebra-Software gezeigt werden (hier z. B. für $N = 0, 1, 2, \ldots, 10$ und $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ durchgeführt).

Ein allgemeiner Beweis kann mit Hilfe der sogenannten WZ-Methode und des Zeilberger-Algorithmus [25, Abschnitt 2.3] geführt werden. Zeilbergers Algorithmus ist für Multisummen in der Computeralgebra-Software Maple als Paket *MultiZeilberger* realisiert ist. Vorgehen: Man bestimmt ein Operatorpolynom, welches die Dreifach-Summe auf der linken Seite von (45) annulliert. Gemäß eines fundamentalen Theorems [25] ist die Existenz eines solchen Operatorpolynoms im Fall von (45) gegeben, denn das Argument der Dreifach-Summe auf der linken Seite von (45) kann als sogenannter *properer hypergeometrischer Ausdruck* formuliert werden; zum methodischen Hintergrund siehe [18, Kapitel 7]. Insbesondere existiert hier ein annullierendes Operatorpolynom im Vorwärtsverschiebeoperator Δ_i bezüglich der ganzzahligen Größe i, im Folgenden mit $p(\Delta_i)$ bezeichnet. Nach [25] sind die Koeffizienten eines solchen Operatorpolynoms dann sämtlich rational in allen ungebundenen Variablen, d. h. in N, i und a. Die rechte Seite der Beziehung (45), die Zahl "1", ist als Konstante invariant bezüglich Δ_i.

Ist das vom Paket *MultiZeilberger* [29] in der Computeralgebra-Software Maple gelieferte annullierende Operatorpolynom $p(\Delta_i)$ der Ordnung n, dann hat $p(\Delta_i)$ nach den vorangegangenen Erläuterungen die Form

$$p(\Delta_i) = \sum_{k=1}^{n} b_k(N,i,a)\;(\Delta_i)^k\,, \tag{46}$$

und zum Beleg der Gültigkeit von (45) ist folglich nur zu fordern, dass

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(N,i,a) = 0\,. \tag{47}$$

Da die Koeffizienten $b_k(N,i,a)$ sämtlich rationale Ausdrücke sind, fällt die Überprüfung von (47) mit Hilfe von Computeralgebra leicht. □

Anmerkung 4.1. *Wenn man, wie in Anmerkung 2.2 als Beispiel angeführt, dem Schätzer ν zusätzliche Integratoren hinzufügt, siehe Gleichungen (13) und (38), so kann unbenommen dieser Modifikationen dennoch eine dem obigen Beweis ähnliche Beweiskette herangezogen werden.*

5 Weiterführende Anmerkungen

Zunächst ist festzuhalten, dass Satz 2 zusammen mit Korollar 1 einen alternativen Weg zu den Ergebnissen des algebraischen Verfahrens aufzeigen. Im Vergleich zum algebraischen Verfahren erscheint dieser Weg jedoch etwas einfacher, nicht zuletzt weil zur Herleitung des Schätzverfahrens ausschließlich klassische Resultate der linearen Systemtheorie Verwendung finden. Zudem erschließt die Zustandsrekonstruktion die ganze Breite der linearen zeitvarianten Systeme, auch den hier der Kürze wegen nicht behandelten nicht-autonomen Fall.

5.1 Kalman-Filter

Es bestehen jedoch noch weitere Verbindungen zur klassischen Optimalschätzung, siehe [13, S. 101]. Geht man von einem mit der Zeit t wachsenden Zeithorizont aus und setzt

$$\mathbf{S}(t) := \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau,t)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{C}(\tau)\,\mathbf{\Phi}(\tau,t)\,d\tau\,, \tag{48}$$

das heißt gleich der Rekonstruierbarkeits-Gramschen $\mathbf{W}_{\mathrm{r}}(t_0,t)$ zum System (18)–(19), dann ergibt Differentiation nach der Zeit (vgl. [16, S. 265–266])

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}}(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau,t)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{C}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t)\right)d\tau + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{C}(t)\\ &= -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{C}(t)\,.\end{aligned} \tag{49}$$

Differenziert man die Gleichung (22) entsprechende Beziehung

$$\mathbf{S}(t)\,\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau,t)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)y(\tau)d\tau \tag{50}$$

nach der Zeit, so erhält man

$$\dot{\mathbf{S}}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{S}(t)\,\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{S}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\,y(t)\,. \tag{51}$$

Wird Rekonstruierbarkeit (Beobachtbarkeit) vorausgesetzt, so folgt mit Gleichung (49) sofort:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{A}(t) - \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{C}(t)\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)y(t)\,. \tag{52}$$

Gleichung (52) zusammen mit Gleichung (49) ist eine spezielle Form des Kalman-Filters in der Informationsdarstellung [15] bezüglich des Systems (18)–(19) unter additivem, ausgangsseitigen Rauschen $v(t) \in \mathbb{R}$ mit Einheitskovarianz. Folglich ist die Beziehung (24) für $t_1 = t$ eine Darstellung der Lösung zur Differentialgleichung des Schätzers (52). Bei mit der Zeit wachsendem Schätzhorizont kann demnach auf einfache Weise ein Zusammenhang zur Optimalschätzung hergestellt werden. Aufgrund des Ergebnisses von Satz 3 gilt dieser Zusammenhang entsprechend auch für das algebraische Verfahren, obwohl Sichtweise und Herleitung in letzterem ganz andere sind (siehe insbesondere [11]).

5.2 Least-Squares Zustandsschätzung

Ebenso besteht ein enger Zusammenhang zur klassischen Least-Squares-Zustandsschätzung. Man betrachte hierzu die Systemgleichungen (18)–(19) mit ausgangsseitiger Störung v, d. h.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) \tag{53}$$

$$y(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + v(t) \tag{54}$$

und nehme weiterhin an, dass das Ausgangssignal $y(t)$ im Zeitintervall $t_0 \le t \le t_1$ als Messung vorliegt. Dann kann der durch die Störung $v(t)$ in diesem Intervall induzierte, integrierte quadratische Fehler

$$\mathcal{I} = \int_{t_0}^{t_1} \left| y(\tau) - y(\tau)|_{v\equiv 0} \right|^2 d\tau \tag{55}$$

mit einem geeigneten Zustandsschätzwert $\hat{\mathbf{x}}(t_1)$ minimiert werden (siehe [2]). Demzufolge löst man das Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}(t_1)} \mathcal{I}\,. \tag{56}$$

Aus den Systemgleichungen (53)–(54) und der Fundamentallösung zu (53) folgt zunächst

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{t_0}^{t_1} |y(\tau) - \mathbf{C}(\tau)\boldsymbol{\Phi}(\tau, t_1)\,\mathbf{x}(t_1)|^2\, d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} y^2(\tau)\, d\tau - 2\left(\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{C}(\tau)\,\boldsymbol{\Phi}(\tau, t_1)\, y(\tau)\, d\tau\right)\mathbf{x}(t_1) \\ &\quad + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t_1)\left(\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau, t_1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{C}(\tau)\boldsymbol{\Phi}(\tau, t_1)\, d\tau\right)\mathbf{x}(t_1)\end{aligned} \tag{57}$$

und Nullsetzen des Gradienten bezüglich $\mathbf{x}(t_1)$ (notwendige Bedingung für Minimum) liefert den Schätzwert $\mathbf{x}(t_1) = \hat{\mathbf{x}}(t_1)$ in der Beziehung:

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau, t_1)\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\,\mathbf{C}(\tau)\,\boldsymbol{\Phi}(\tau, t_1)\, d\tau\right)\hat{\mathbf{x}}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau, t_1)\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\, y(\tau)\, d\tau\,. \tag{58}$$

Die Matrix auf der linken Seite der Gleichung ist gerade die Rekonstruierbarkeits-Gramsche nach (23). Wie sich leicht zeigen lässt, ist diese Matrix positiv-semidefinit, und im Falle vorliegender Rekonstruierbarkeit (Beobachtbarkeit) positiv-definit (hinreichende Bedingung für Minimum) und folglich invertierbar. Die eben ermittelte Bestimmungsgleichung für den aus einem gestörten Messsignal zu ermittelnden Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}(t_1)$ fällt demnach mit der Beziehung aus der Zustandsrekonstruktion (22) zusammen. Dies birgt die interessante Konsequenz, dass das algebraische Ableitungsschätzverfahren im Kern auf einer Least-Squares-Zustandsschätzung beruht.

5.3 Parameterschätzung

Schließlich ergeben sich aus obigen Betrachtungen auch Parallelen zu Arbeiten über den algebraischen Zugang zur Parameteridentifikation (siehe [10]). Dazu betrachte man das System [22, S. 265]

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} = 0 \tag{59}$$

$$y = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{\Phi} \tag{60}$$

mit dem konstanten Parametervektor $\boldsymbol{\Phi}$, den es zu schätzen gilt. Im Sinne von Abschnitt 3.1 ist ein Schätzer mit gleitendem Horizont gegeben durch

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \mathbf{W}_{\mathrm{r}}^{-1}(t-T, t) \int_{t-T}^{t} \boldsymbol{\omega}(\tau)\, y(\tau)\, d\tau \tag{61}$$

mit

$$\mathbf{W}_{\mathrm{r}}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\omega}(\tau)\,\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)\, d\tau\,. \tag{62}$$

Letztere Beziehung drückt den wohlbekannten Zusammenhang aus, dass zur erfolgreichen Rekonstruktion eines Signals der Informationsgehalt des Messsignals auf dem Zeitintervall der Messung ausreichend sein muss. Im Englischen spricht man dann von *persistent excitation*. Nur in diesem Fall kann von der Invertierbarkeit der Gramschen $\mathbf{W}_{\mathrm{r}}(t-T, t)$ nach (62) ausgegangen werden.

5.4 Implikationen für die Praxis

Auf Basis der Beziehung (21) können anwendungsspezifische Schätzer generiert werden. Sei $g(t)$ die Impulsantwort eines Filters, dann gilt mit (21) nämlich

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t_0-\tau)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau, t_1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)y(\tau)d\tau = \left(\int_{t_0}^{t_1} g(t_0-\tau)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\tau, t_1)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{C}(\tau)\boldsymbol{\Phi}(\tau, t_1)d\tau\right)\hat{\mathbf{x}}(t_1) \tag{63}$$

und das Filter g kann auf die Charakteristik des Messrauschens bezüglich y im konkreten Anwendungsfall abgestimmt werden, wenn der Klammerausdruck auf der rechten

Seite von (63) invertierbar ist. Damit findet die im Rahmen des algebraischen Verfahrens in [20] vorgestellte Methode, das sogenannte *invariante Filtern*, ihr Gegenstück im Kontext der Rekonstruierbarkeit.

Danksagung

Diese Arbeit ist unter Förderung von Postdoktoranden-Stipendien des Deutschen Akademischen Austauschdienstes, D/07/40582, sowie des Max-Planck-Instituts für Dynamik komplexer technischer Systeme in Magdeburg entstanden. Ein besonders herzlicher Dank gilt Prof. Jessy Grizzle, University of Michigan, für die stete Unterstützung und Schaffung des Freiraums bei der Verfolgung des Vorhabens.

Literatur

[1] P. Antsaklis, A. Michel, „Linear Systems“, *McGraw-Hill, 1997*.

[2] S. Boyd, „Introduction to Linear Dynamical Systems“, *Lecture Notes EE263, Stanford University, 2007*.

[3] R. W. Brockett, „Finite Dimensional Linear Systems“, *Wiley, 1970*.

[4] C.-T. Chen, „Linear system theory and design“, *Oxford University Press, 1999*.

[5] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, A. Sedoglavic, „Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos“, *Actes 20e Coll. GRETSI, Louvain-la-Neuve, 2005*.

[6] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, „Analyse et représentation de signaux transitoires: application à la compression, au dé bruitage et à la détection de ruptures“, *Actes 20e Coll. GRETSI, Louvain-la-Neuve, 2005*.

[7] M. Fliess, C. Join, H. Sira-Ramírez, „Robust residual generation to linear fault diagnosis: an algebraic setting with examples“, *Int. Journal of Control, Vol. 77, 1223–1242, 2004*.

[8] M. Fliess, C. Join, H. Sira-Ramírez, „Non-linear estimation is easy“, *International Journal of Modelling, Identification and Control, Vol. 3, No. 5, 2008*.

[9] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H. Sira-Ramírez, „Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples“, in *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation, H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.), Innovación Editiorial Lagares, Mexico, 1–21, 2003*.

[10] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, „An algebraic framework for linear identification“, *ESAIM Control Optim. Calc. Variat., Vol. 9, 2003*.

[11] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, „State reconstructors: a possible alternative to asymptotic observers and Kalman filters“, *Proceedings of CESA, 2003*.

[12] M. Fliess, H. Sira Ramírez, „Control via state estimations of some nonlinear systems“, *IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004), Stuttgart, 2004*.

[13] R. E. Kalman, R. S. Bucy, „New Results in Linear Filtering and Prediction Theory“, *Journal of Basic Engineering, Vol. 83B, 1961*.

[14] R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib, „Topics in Mathematical System Theory“, *McGraw-Hill, 1969*.

[15] W. H. Kwon, P. S. Kim, P. G. Park, „A receding horizon Kalman FIR filter for linear continuous-time systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, Nr. 11, 2115–2120, 1995*.

[16] G. Ludyk, „Theoretische Regelungstechnik 1“, *Springer, 1995*.

[17] M. Mboup, C. Join, M. Fliess, „A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control“, *15th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'07), Athens, Greece, 2007*.

[18] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, „A = B“, *AK Peters Ltd., 1996*.

[19] J. O'Reilly, „Observers for Linear Systems“, *Academic Press, 1983*.

[20] J. Reger, M. Mai, and H. J. Sira-Ramírez, „Robust algebraic state estimation of chaotic systems“, *IEEE Conf. on Control Applications (CCA), München, 2006*.

[21] J. Reger, J. Jouffroy, „Algebraic Time-Derivative Estimation and Deadbeat State Reconstruction“, Technical Report CGR-07-09, University of Michigan, USA, http://arxiv.org/abs/0710.0010

[22] S. Sastry, „Nonlinear systems“, *Springer, 1999*.

[23] L. R. Savage, E. Lukas, „Tables of inverses of finite segments of the Hilbert matrix“, in *Contributions to the Solutions of Systems of Linear Equations and the Determination of Eigenvalues, O. Taussky (Herausgeber), National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, Vol. 39, 105–108, 1954*.

[24] E. D. Sontag, „Mathematical Control Theory“, *2. Auflage, Springer, 1998*.

[25] H. Wilf, D. Zeilberger, „An algebraic proof theory for hypergeometric (ordinary and “q”) multisum/integral identities“, *Inventiones Mathematicae, Vol. 108, 575–633, 1992*.

[26] J. C. Willems, S. K. Mitter, „Controllability, observability, pole allocation, and state reconstruction“, *IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 16, Nr. 6, 582–595, 1971*.

[27] J. Zehetner, J. Reger, M. Horn, „A Derivative Estimation Toolbox based on Algebraic Methods – Theory and Practice“, *IEEE Int. Conf. on Control Applications, Singapore, 2007*.

[28] J. Zehetner, J. Reger, M. Horn, „Echtzeit-Implementierung eines algebraischen Ableitungsschätzverfahrens“, *at – Automatisierungstechnik, 11/2007*.

[29] D. Zeilberger, Computeralgebra-Paket *MultiZeilberger* für Maple: http://www.math.rutgers.edu/∼zeilberg/tokhniot/MultiZeilberger

Manuskripteingang: 12. Oktober 2007.

Dr.-Ing. Johann Reger ist Postdoktorand in der Fachgruppe System- und Regelungstheorie am Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme, Magdeburg. Hauptarbeitsgebiete: nichtlineare Systeme; Systeme mit hybrider Dynamik; Zustands- und Parameterschätzung sowie Fehlerdiagnose in der Mechatronik.

Adresse: Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme, Sandtorstr. 1, 39106 Magdeburg, E-Mail: reger@ieee.org

Prof. Dr. Jérôme Jouffroy ist Associate Professor am Mads Clausen Institute der University of Southern Denmark, Sønderborg, Dänemark. Hauptarbeitsgebiete: Regelung nichtlinearer Systeme; Zustands- und Parameterschätzung; Unterwassernavigation und Formationsregelung von marinen Fahrzeugen.

Adresse: Alsion 2, Mads Clausen Institute, 6400 Sønderborg, Dänemark, E-Mail: jerome@mci.sdu.dk