

**Fakultät für Physik und Astronomie**  
**Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg**

Masterarbeit  
im Studiengang Physik  
vorgelegt von  
Andreas Weigel  
aus Schemonaicha (Kasachstan)

**2014**



Entwicklung des kryogenen Nachweissystems für  
ALPHATRAP und THe-Trap

Diese Masterarbeit wurde von Andreas Weigel  
ausgeführt am  
Max-Planck-Institut für Kernphysik, Heidelberg  
unter der Betreuung von  
Herrn Prof. Dr. Klaus Blaum  
und Dr. Sven Sturm

## **Entwicklung des kryogenen Nachweissystems für ALPHATRAP und THE-Trap**

Am Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg befinden sich derzeit die Penning-Fallen-Experimente ALPHATRAP und THE-Trap in der Aufbauphase. Das ALPHATRAP-Projekt ist der Nachfolger des Mainzer  $g$ -Faktor-Experiments, mit dem kürzlich der bisher empfindlichste Test der Quantenelektrodynamik in starken Feldern an wasserstoffähnlichem  $^{28}\text{Si}^{13+}$  durchgeführt worden ist. Beim THE-Trap-Experiment handelt es sich um ein Präzisions-Penning-Fallen-Massenspektrometer das durch eine Messung des Massenverhältnisses von Tritium und Helium-3 zur Bestimmung der Elektron-Antineutrino-Masse im Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment (KATRIN) beitragen soll. Der Ionennachweis bei beiden Experimenten basiert auf der nicht-destruktiven Detektion von Spiegelströmen im fA-Bereich, die das Ion in den Fallenelektroden influenziert. Das zur Umwandlung dieser Ströme in ein messbares Spannungssignal notwendige kryogene Detektionssystem besteht aus der Kombination eines Parallelschwingkreises (Resonators) hoher Güte mit einem sehr rauscharmen kryogenen Verstärker. Ein wesentlicher Teil diese Arbeit ist die Entwicklung, der Aufbau sowie die Charakterisierung der für den axialen Ionennachweis im ALPHATRAP-Experiment notwendigen supraleitenden Resonatoren mit extrem hoher Güte. Der andere Teil ist die Implementierung und die Charakterisierung des kryogenen ALPHATRAP-Verstärkers im THE-Trap-Experiment.

## **Development of the cryogenic detection system for ALPHATRAP and THE-Trap**

The Penning trap experiments ALPHATRAP and THE-Trap are currently being set up at the Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg. The ALPHATRAP project is the follow-up to the Mainz  $g$ -factor experiment which has recently succeeded in the most stringent test of quantum electrodynamics in the regime of strong fields on hydrogen-like  $^{28}\text{Si}^{13+}$ . The THE-Trap experiment is a precision Penning trap mass spectrometer. By measuring the mass ratio between tritium and helium it will contribute to the determination of the electron antineutrino mass in the Karlsruhe Tritium Neutrino experiment (KATRIN). The ion detection method in both experiments is based on the non-destructive measurement of image-currents which are induced into the trap electrodes by the ion. In order to convert these currents into a measurable voltage a cryogenic detection system is used. It consists of the combination of a tank circuit (resonator) with a high quality factor and a cryogenic amplifier with very low-noise characteristics. One major part of this work is the development, construction and characterization of the superconducting resonators with extremely high quality factors which are essential for the axial ion detection in the ALPHATRAP experiment. The other part is the implementation and characterization of the cryogenic ALPHATRAP amplifier in the THE-Trap experiment.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie der Penning-Falle</b>	<b>5</b>
2.1	Die ideale Penning-Falle . . . . .	5
2.2	Die reale zylindrische Penning-Falle . . . . .	8
<b>3</b>	<b><math>g</math>-Faktor-Messung mit der Penning-Falle</b>	<b>11</b>
3.1	Experimenteller Zugang . . . . .	11
3.2	Bestimmung der Larmorfrequenz: Kontinuierlicher Stern-Gerlach-Effekt . . . . .	12
3.3	Der Messprozess im Zwei-Fallen-System . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Das nicht-destruktive Nachweissystem</b>	<b>17</b>
4.1	Spiegelstromdetektion . . . . .	17
4.2	Detektionsmethoden . . . . .	20
4.2.1	Peak-Detektion . . . . .	20
4.2.2	Dip-Detektion . . . . .	21
4.2.3	Signal-Rausch-Verhältnis . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Axial-Resonatoren für ALPHATRAP</b>	<b>25</b>
5.1	Der reale Parallelschwingkreis . . . . .	25
5.2	Motivation und Planung . . . . .	28
5.2.1	Wahl der Geometrie . . . . .	29
5.2.2	Wahl des Materials . . . . .	30
5.3	Design der Helix-Resonatoren . . . . .	33
5.3.1	Geometrische Optimierung . . . . .	33
5.4	Realisierung . . . . .	46
5.5	Test und Messergebnisse . . . . .	47
5.5.1	Bestimmung der freien Güte . . . . .	47
5.5.2	Bestimmung der Eigenkapazität und Induktivität . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Der kryogene Verstärker</b>	<b>53</b>
6.1	Aufgaben des kryogenen Verstärkers . . . . .	53
6.2	Anforderungen an den kryogenen Verstärker . . . . .	54
6.3	Der ALPHATRAP-Verstärker . . . . .	54
6.3.1	Die Kaskode . . . . .	56
6.4	Implementierung des ALPHATRAP-Verstärkers im THE-Experiment . . . . .	57



# 1 Einleitung

Das Standardmodell bildet das Fundament der modernen Elementarteilchenphysik [1]. Trotz seines bisherigen Erfolgs gibt es noch zahlreiche offene Fragen, die der experimentellen Validierung bedürfen. Bei der Überprüfung des Standardmodells haben sich Teilchen-Fallen seit ihrer Einführung durch Paul [2] und Dehmelt [3] aufgrund ihrer zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten als ein unentbehrliches Hilfsmittel erwiesen [4]. Zu den Teilchen-Fallen zählt auch die sogenannte Penning-Falle, mit der sich einzelne geladene Teilchen in einer Überlagerung aus einem homogenen Magnetfeld und einem elektrostatischen Quadrupolpotential speichern und untersuchen lassen [5]. Am Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg befinden sich derzeit mehrere Penning-Fallen-Experimente, die auf unterschiedliche Weise zur Überprüfung des Standardmodells beitragen sollen. Zwei dieser Experimente sind:

**ALPHATRAP:** Das sich im Aufbau befindende ALPHATRAP-Projekt ist der Nachfolger des Mainzer  $g$ -Faktor-Experiments, mit dem kürzlich der bisher empfindlichste Test der Quantenelektrodynamik (QED) [6] in starken Feldern durchgeführt worden ist. Dies gelang durch die hochpräzise Messung des  $g$ -Faktors des in wasserstoffähnlichem Silizium ( $^{28}\text{Si}^{13+}$ ) gebundenen Elektrons [7]. Hierbei wurde der  $g$ -Faktor mit einer zuvor unerreichten relativen Genauigkeit von  $4 \cdot 10^{-11}$  bestimmt und die Gültigkeit der aktuellen QED-Berechnungen auch für hohe Feldstärken bestätigt. Ziel des Nachfolgeexperiments ALPHATRAP sind unter anderem weitere  $g$ -Faktor-Messungen an den schwersten hochgeladenen Ionen, bis hin zu wasserstoffähnlichem Blei ( $^{208}\text{Pb}^{81+}$ ), bei einer gleichzeitig verbesserten Messgenauigkeit. Dies soll dazu beitragen, die Grenzen der Gültigkeit der QED gebundener Zustände noch weiter auszuloten. Darüber hinaus erlauben hochpräzise  $g$ -Faktor-Messungen auch die Bestimmung fundamentaler Naturkonstanten wie der Elektronenmasse [8] oder der Feinstrukturkonstante  $\alpha$  [9], nach der das ALPHATRAP-Experiment benannt ist.

**THe-Trap:** Bei dem ursprünglich von R. S. Van Dyck Jr. [10] entwickelten Tritium-Helium-Experiment „THe-Trap“ handelt es sich um ein Penning-Fallen-Massenspektrometer, das sich seit 2008 am Max-Planck-Institut für Kernphysik befindet. Ziel des Experiments ist die Bestimmung der Massendifferenz ( $Q$ -Wert), des  $\beta$ -Zerfalls  $^3\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$  mittels einer Messung des Massenverhältnisses von Tritium und Helium-3 mit einer angestrebten relativen Genauigkeit von  $10^{-11}$  [11]. Dies wiederum soll zum KATRIN-Experiment [12] beitragen, das auf die Bestimmung der Masse des Elektron-Antineutrinos aus dem Endpunkt des  $\beta$ -Spektrums des Tritium-Zerfalls ausgerichtet ist [13].

## 1 Einleitung

Die Bestimmung des  $g$ -Faktors im ALPHATRAP-Experiment sowie die Massenmessung im THE-Trap-Experiment beruhen beide auf der Messung der unterschiedlichen Oszillationsfrequenzen (Axialfrequenz, reduzierte Zyklotronfrequenz und Magnetronfrequenz) der harmonischen Bewegung des betrachteten Teilchens. Die Oszillationsfrequenzen werden nicht-destruktiv<sup>1</sup> durch die Detektion sogenannter Spiegelströme nachgewiesen, die das geladene Teilchen in den Fallenelektroden influenziert. Die bei der Messung der Axialfrequenz auftretenden Spiegelströme liegen typischerweise im Bereich von wenigen fA, weshalb es einer sehr empfindlichen und rauscharmen kryogenen Detektionselektronik bedarf. Diese enthält einen in Resonanz betriebenen  $LCR$ -Parallelschwingkreis (Resonator) hoher Güte<sup>2</sup>, der die Spiegelströme zunächst in ein Spannungssignal umwandelt, welches anschließend von einem rauscharmen kryogenen elektronischen Verstärker vorverstärkt wird. Das Ausgangssignal des Verstärkers kann dann bei Raumtemperatur weiterverarbeitet und schließlich detektiert werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden wesentliche Teile der kryogenen Detektionssysteme für ALPHATRAP und THE-Trap entwickelt, getestet und charakterisiert.

Ein Großteil der Arbeit konzentriert sich auf die Entwicklung von zwei supraleitenden Resonatoren für den axialen Schwingungsnachweis (kurz: Axial-Resonatoren) im ALPHATRAP-Experiment. Das Experiment stellt sehr hohe Anforderungen hinsichtlich der detektierten Signalqualität, welche unter anderem von einer möglichst hohen Resonatorgüte abhängig ist. Hinzu kommt, dass die Randbedingungen des Experiments die Resonatoren in ihren Resonanzfrequenzen und ihrer maximalen Größe festlegen. Diese Limitierungen sowie die zahlreichen offenen geometrischen Parameter der Resonatoren stehen in einem komplexen Zusammenhang mit der Resonatorgüte. Um letztere unter Einhaltung der vorgegebenen Einschränkungen zu maximieren, wurde großer Wert auf die Planung und insbesondere auf ein detailliertes theoretisches Verständnis der Resonatoren gelegt. Hierzu wurde zunächst ein theoretisches Modell zur Berechnung der Schwingkreisgrößen ( $L$ ,  $C$ ,  $R$ ) der Resonatoren untersucht und anhand von eigens gefertigten Testresonatoren bestätigt. Auf dieser Basis wurde anschließend eine umfangreiche geometrische Optimierungsrechnung entwickelt und durchgeführt, um bei gegebenen Randbedingungen die optimalen geometrischen Parameter zu finden, die als Grundlage bei der Konstruktion und Realisierung der Resonatoren dienen. Am Ende wurden die Ergebnisse der Optimierung am Beispiel der Messung und Charakterisierung eines Resonators verifiziert.

Ein weiterer Teil der Arbeit widmet sich der Implementierung eines neuen kryogenen Verstärkers in das THE-Trap-Experiment. Aufgrund eines vermuteten Defekts des alten THE-Trap-Verstärkers wurde dieser durch den bereits getesteten und bewährten ALPHATRAP-Verstärker ersetzt. Die Herausforderung hierbei bestand im Betrieb des neuen Verstärkers bei der von THE-Trap benötigten Axialfrequenz von 4 MHz, was mehr als dem vierfachen Wert entspricht, für den der ALPHATRAP-Verstärker ursprünglich vorgesehen war. Aus diesem Grund wurden im Rahmen dieser Arbeit Charakterisierungsmessungen durchgeführt und der ALPHATRAP-Verstärker auf seine Eignung bei

---

<sup>1</sup>d.h. ohne Verlust des Teilchens

<sup>2</sup>bzw. hohem effektiven Parallelwiderstand

## 1 Einleitung

THE-Trap untersucht.

Die Struktur dieser Arbeit gestaltet sich wie folgt:

Im zweiten Kapitel wird ein kurzer Einblick in die Theorie der idealen sowie der realen Penning-Falle gegeben. Kapitel drei stellt die wesentlichen Grundlagen und die Methodik der  $g$ -Faktor-Messung mit einer Penning-Falle dar. Im Kapitel vier wird das nicht-destruktive Nachweissystem basierend auf der Spiegelstrom-Detektion beschrieben sowie zwei unterschiedliche Detektionsmethoden vorgestellt und miteinander verglichen. Im fünften Kapitel werden die im Rahmen dieser Arbeit für ALPHATRAP entwickelten axialen Resonatoren vorgestellt. Nach einer theoretischen Einführung und Erläuterungen zur Motivation erfolgt deren detaillierte Planung und geometrische rechnerische Optimierung. Daraufhin wird die Realisierung und die Charakterisierung am Beispiel eines Resonators durchgeführt und die zugehörigen Ergebnisse präsentiert. In Kapitel sechs werden nach einer kurzen Motivation des kryogenen Verstärkers die im Zuge dieser Arbeit durchgeführte Implementierung und die hierfür erforderlichen Charakterisierungsmessungen des ALPHATRAP-Verstärkers im THE-Trap-Experiment vorgestellt und ausgewertet.

## *1 Einleitung*

## 2 Theorie der Penning-Falle

Das vorliegende Kapitel konzentriert sich bei der Einführung der theoretischen Grundlagen der Penning-Falle hauptsächlich auf die für diese Arbeit relevanten Aspekte. Eine detaillierte Darstellung der Physik sowie der zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten einer Penning-Falle finden sich beispielsweise in [4, 5, 14].

### 2.1 Die ideale Penning-Falle

Das Earnshaw-Theorem [15] besagt, dass es nicht möglich ist ein geladenes Objekt durch ein rein elektro- oder magnetostatisches Feld in einem stabilen Gleichgewicht zu halten. Einen Ausweg bietet die Kombination beider Felder in einer sogenannten Penning-Falle. Diese spezielle Feldkonfiguration besteht aus der Superposition eines starken homogenen Magnetfeldes für den radialen Einschluss mit einem schwachen elektrostatischen Quadrupolpotential für den axialen Einschluss eines geladenen Teilchens, wobei das Magnetfeld die axiale Richtung vorgibt (Abbildung 2.1). Dadurch wird ein Einschluss in allen drei Raumdimensionen erzielt.

**Radialer Einschluss** Ein Teilchen mit der Ladung  $q$  und Masse  $m$ , welches sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  im axialen homogenen magnetischen Feld  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  bewegt, erfährt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = qB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Dieser bindet das Teilchen in radialer Richtung auf einer Kreis- oder Spiralbahn mit der freien Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{qB}{m}. \quad (2.2)$$

**Axialer Einschluss** Das für den axialen Einschluss positiv geladener Teilchen benötigte elektrostatische Quadrupolpotential lässt sich idealerweise durch Anlegen einer Gleichspannung  $U_0$  an hyperbolisch geformte Fallenelektroden<sup>1</sup> gemäß Abbildung 2.1 erzeugen. Da die Elektroden zugleich auch Äquipotentialflächen darstellen, ergibt die Lösung der Laplace-Gleichung  $\Delta\Phi = 0$  für diese Geometrie das elektrische Feld:

---

<sup>1</sup>Theoretisch sollten diese unendlich ausgedehnt sein. Bei der Realisierung einer Penning-Falle ermöglicht der Einsatz von zusätzlichen Korrektorelektroden auch eine zylindrische Elektrodenform. Die reale zylindrische Penning-Falle wird im Abschnitt (2.2) besprochen.

## 2 Theorie der Penning-Falle

$$-\vec{\nabla}\Phi(\vec{z}, \vec{\rho}) = \vec{E}(\vec{z}, \vec{\rho}) = \frac{U_0}{d_0^2} \left( \frac{1}{2}\vec{\rho} - \vec{z} \right). \quad (2.3)$$

Der charakteristische geometrische Parameter  $d_0$  setzt sich hier aus dem inneren Fallradius  $\rho_0$  und dem Abstand  $z_0$  zwischen Fallzentrum und den Endkappen-Elektroden zusammen:

$$d_0^2 = \frac{1}{2} \left( z_0^2 + \frac{1}{2}\rho_0^2 \right). \quad (2.4)$$

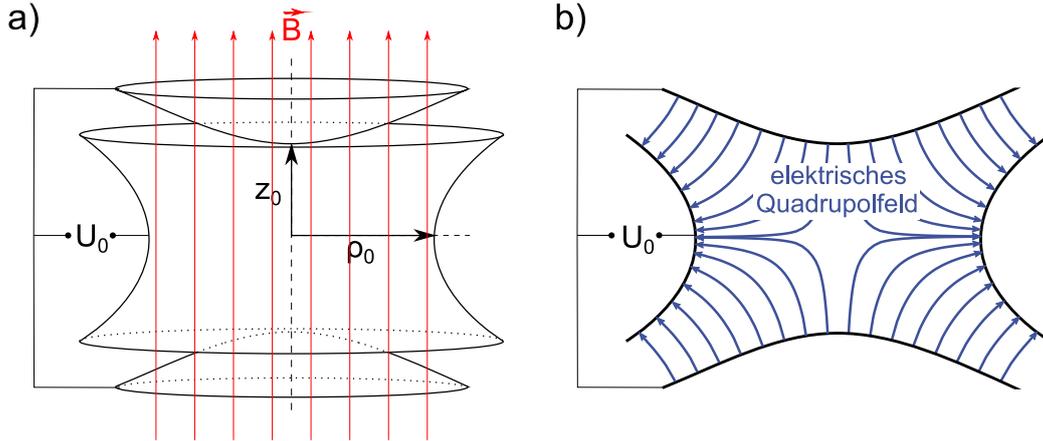


Abbildung 2.1: a) Hyperbolische Penning-Falle. Das angelegte Magnetfeld gibt die axiale Richtung vor. Die Spannung  $U_0$  resultiert in Verbindung mit der Elektrodenkonfiguration in einem elektrischen Quadrupolfeld. b) Elektrisches Quadrupolfeld im Querschnitt. Die hyperbolischen Elektroden bilden Äquipotentialflächen.

**Teilchenbewegung in der Falle** Die Summe der Kräfte, die in dieser idealen Feldkonfiguration auf ein geladenes Teilchen der Masse  $m$ , Ladung  $q$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  wirken, führt zu der Bewegungsgleichung [5]:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{qU_0}{2d^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} + qB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Die z-Komponente der Bewegung entspricht einer einfachen harmonischen Schwingung mit der Axialfrequenz

$$\omega_z = \sqrt{\frac{qU_0}{md_0^2}}. \quad (2.6)$$

Bei der x- und y-Komponente handelt es sich um zwei gekoppelte Differentialgleichungen. Deren Lösung ergibt zwei weitere unabhängige harmonische Eigenmoden der Bewegung. Ihre Überlagerung beschreibt eine Epitrochoide in der xy-Ebene und setzt sich aus der

## 2 Theorie der Penning-Falle

reduzierten Zyklotronfrequenz  $\omega_+$  und der Magnetronfrequenz  $\omega_-$  zusammen:

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_c}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}}. \quad (2.7)$$

Zusammen mit der axialen Schwingung ergibt sich die Gesamtbewegung eines Teilchens in einer idealen Penning-Falle somit als eine Superposition aus drei unabhängigen harmonischen Oszillatoren (Abbildung 2.2). Ursache für die zusätzliche Dekomposition der Bewegung in der xy-Ebene ist das elektrische Feld. Dessen radiale Komponente steht senkrecht zum Magnetfeld. Dies verursacht einen radialen Geschwindigkeitsanteil des Teilchens, was bedingt durch die Lorentzkraft zur Magnetron-Driftbewegung um das Fallenzentrum führt. Ein weiterer Nebeneffekt des elektrischen Feldes ist die Modifikation der freien Zyklotronfrequenz zur reduzierten Zyklotronfrequenz.

Für eine stabile Teilchenbahn darf das elektrische Feld nicht zu groß werden. Die Stabilitätsbedingung folgt aus Gleichung (2.7). Damit diese nicht komplexwertig wird, muss gelten:

$$\omega_c \geq \sqrt{2}\omega_z \quad (2.8)$$

$$\text{bzw.: } \frac{qB^2}{m} \geq \frac{2U_0}{d_0^2}. \quad (2.9)$$

Weiterhin ergeben sich folgende nützliche Relationen:

$$\omega_c = \omega_+ + \omega_- \quad (2.10)$$

$$\omega_z^2 = 2\omega_+\omega_-, \quad (2.11)$$

sowie das Invarianztheorem [5]:

$$\omega_c^2 = \omega_+^2 + \omega_-^2 + \omega_z^2. \quad (2.12)$$

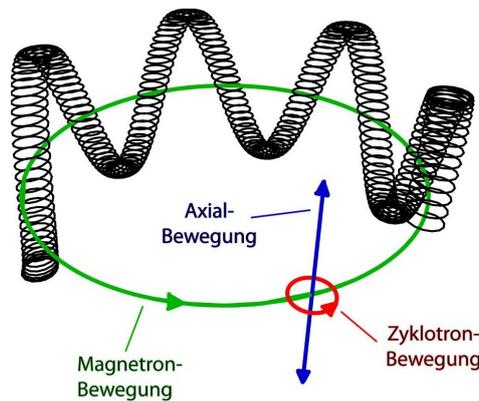


Abbildung 2.2: Die Teilchenbewegung in der Falle ist eine Superposition aus Axial- ( $\omega_z$ ), Magnetron- ( $\omega_-$ ) und Zyklotronbewegung ( $\omega_+$ ). Die Überlagerung aus Magnetron- und Zyklotronbewegung beschreibt eine Epitrochoide.

## 2.2 Die reale zylindrische Penning-Falle

In der Realität ist die praktische Umsetzung einer idealen hyperbolischen Penning-Falle nicht möglich. Die Endlichkeit der Elektrodenabmessungen sowie fertigungsbedingte Toleranzen erfordern die Einführung zusätzlicher Terme zur Approximation der Abweichung vom idealen harmonischen Potential [14]. Eine weitere gängige Fallenform neben der hyperbolischen ist die kompensierte zylindrische Penning-Falle (Abbildung 2.3) nach [16]. Sie findet vorzugsweise in Mehrfallenexperimenten wie auch ALPHATRAP<sup>2</sup> Anwendung und ermöglicht aufgrund ihrer in axialer Richtung offenen Elektroden den Teilchentransport zwischen den einzelnen Fallen eines Fallenturms<sup>3</sup>. Einen weiteren Vorteil bietet ihre unkomplizierte Elektroden-Geometrie, die im Vergleich zur hyperbolischen einfacher und mit höherer Präzision hergestellt werden kann.

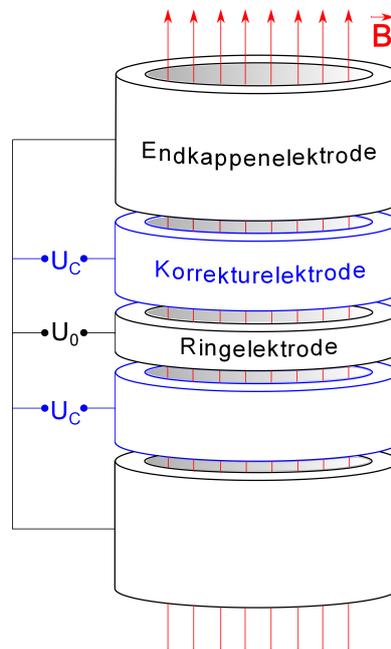


Abbildung 2.3: Skizze einer kompensierten zylindrischen Penning-Falle. Sie besteht aus einer Anordnung von fünf voneinander isolierten zylinderförmigen Elektroden. Durch Anlegen einer unabhängigen Korrekturspannung  $U_C$  an die zwei Korrektorelektroden lassen sich anharmonische Potentialanteile, die diese Geometrie mit sich bringt, reduzieren.

**Anharmonisches elektrostatisches Potential** Ein inhärenter Nachteil der zylindrischen Penning-Falle ist, dass ihr elektrostatisches Potential anharmonische Anteile beinhaltet.

<sup>2</sup>Die ALPHATRAP Fallen verfügen zudem über zweigeteilte Endkappen und bestehen damit insgesamt aus sieben - anstatt den üblichen fünf - Elektroden.

<sup>3</sup>Dies ist auch bei hyperbolischer Geometrie möglich, jedoch müssen die Endkappen hierfür mit Transport-Kanälen versehen werden, was zu weiteren unerwünschten Potentialveränderungen führt.

## 2 Theorie der Penning-Falle

Um deren Auswirkungen auf die Teilchenbewegung abschätzen zu können, lässt sich das Potential aufgrund der Zylindersymmetrie des Problems in Legendre-Polynome entwickeln:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{U_0}{2} \sum_{l=0}^{\infty} C_l \left( \frac{r}{d_0} \right)^l P_l(\cos(\theta)). \quad (2.13)$$

Dabei wird der Beitrag des Polynoms  $l$ -ter Ordnung mit dem Koeffizienten  $C_l$  gewichtet.

- Monopol-Anteil =  $\frac{U_0}{2} C_0$  : Konstanter Beitrag ohne Einfluss auf das Teilchen.
- Dipol-Anteil =  $\frac{U_0}{2} C_1 \left( \frac{r}{d_0} \right) \cos(\theta) = \frac{U_0}{2} C_1 \frac{z}{d_0}$  : Linearer Beitrag. Er verschiebt lediglich den Schwerpunkt der Teilchenbewegung in  $z$ -Richtung und hat keinen Einfluss auf die Oszillationsfrequenz.
- Quadrupol-Anteil =  $\frac{U_0 C_2 r^2}{4d_0^2} (3 \cos^2(\theta) - 1)$  : Dies ist das gewünschte ideale Quadrupolpotential aus Abschnitt (2.1).<sup>4</sup>
- Multipol-Anteile höherer ungerader Ordnung ( $C_3, C_5, \dots$ ) sind aufgrund der Punktsymmetrie zum Fallenzentrum vernachlässigbar klein.
- Multipol-Anteile höherer gerader Ordnung ( $C_4, C_6, \dots$ ) verursachen eine Verschiebung der Oszillationsfrequenzen in Abhängigkeit vom Bewegungsradius des Teilchens (bzw. der Schwingungsenergie).

Zur Minimierung der störenden anharmonischen Einflüsse (insbesondere  $C_4$  und  $C_6$ ) verfügt die zylindrische Penning-Falle über zusätzliche Kompensationselektroden zwischen Ring- und Endkappenelektroden (vgl. Abbildung 2.3). Im Allgemeinen lässt sich damit - für eine bestimmte Dimensionierung der Fallen- und Korrektorelektroden - die Korrekturspannung  $U_c = T \cdot U_0$  so einstellen, dass gilt:  $C_{4,6} = 0$  und  $\frac{\partial C_2}{\partial U_c} = 0$  [16, 17]. Das Spannungsverhältnis  $T$  wird auch als *Tuning-Ratio* bezeichnet. Die so kompensierte Falle stellt für kleine Teilchenradien ein nahezu ideales Quadrupolfeld dar.

**Magnetische Feldfehler** Das benötigte homogene magnetische Feld wird typischerweise mit Hilfe von großen supraleitenden Magnetspulen erzeugt. Ebenso wie das reale elektrostatische Feld, ist auch das reale Magnetfeld mit gewissen Abweichungen vom Idealfall behaftet. Zu diesen gehören:

- **INHOMOGENITÄT DES MAGNETFELDES:**  
Trotz der sorgfältigen Auswahl der im Experiment verwendeten Materialien, lässt sich ein gewisser Restmagnetismus (z.B. der Fallenelektroden) nicht vermeiden. Dies führt im Allgemeinen zu einer inhomogenen Feldverzerrung, deren Korrelation mit den magnetischen Momenten der Teilchenbewegung zu energieabhängigen Frequenzverschiebungen der einzelnen Moden führt [5]. Zur Berechnung der individuellen Effekte kann hierfür analog zum obigen elektrostatischen Fall eine Legendre-Entwicklung durchgeführt werden (vgl. Kapitel 3).

---

<sup>4</sup>Das Quadrupolpotential ist hier in Kugelkoordinaten angegeben. Durch die Substitution  $r^2 = z^2 + \rho^2$  erhält man das zu Gleichung (2.3) entsprechende Potential in Zylinderkoordinaten.

## 2 Theorie der Penning-Falle

- **ZEITLICHE VARIATION DES MAGNETFELDES:**  
Ursachen für den Magnetfeld-Drift sind u. a. Veränderungen des Erdmagnetfeldes, die Abhängigkeit der Suszeptibilität einiger im Experiment und im Magneten verwendeter Materialien von der Temperatur [18, 19] sowie Störungen durch benachbarte elektrische Geräte. Äußere/innere Magnetfeldänderungen lassen sich mit Hilfe von externen/internen Abschirmspulen reduzieren [21, 22]. Den temperaturabhängigen Effekten kann zusätzlich durch eine geeignete Temperatur- und Druckstabilisierung entgegengewirkt werden [19, 20]. Um den störenden Einfluss des zeitlichen Magnetfeld-Drifts klein zu halten, ist eine deutliche Reduzierung der Messzeit erforderlich, was hohe Anforderungen an das Nachweissystem stellt (vgl. Kapitel 4).
- **RELATIVE VERKIPPUNGEN ZWISCHEN MAGNETFELD- UND FALLENACHSE:**  
Bereits kleine Ausrichtungsfehler der Falle im Magnetfeld führen zu einer Abweichung von der idealen Bewegungsgleichung nach Gleichung (2.5). Das Resultat ist eine Kopplung der - im Idealfall voneinander unabhängigen - Eigenmoden der Bewegung. Zudem kommt es zu Verschiebungen der individuellen Frequenzen ( $\omega_+$ ,  $\omega_-$ ,  $\omega_z \rightarrow \omega_+^*$ ,  $\omega_-^*$ ,  $\omega_z^*$ ). Das sog. **Invarianztheorem** setzt die so verschobenen real messbaren Frequenzen mit der freien Zyklotronfrequenz in Relation [5, 23]:

$$\omega_c^2 = \omega_+^{*2} + \omega_-^{*2} + \omega_z^{*2}. \quad (2.14)$$

Diese Beziehung stellt das wirklichkeitsgetreue Pendant zum idealen Verhalten nach Gleichung (2.10) dar. Das Invarianztheorem behält seine Gültigkeit für beliebige Verkippungswinkel sowie herstellungsbedingte Abweichungen von der idealen Fallengeometrie, die zu einer elliptischen Verzerrung des Potentials führen [5].

# 3 g-Faktor-Messung mit der Penning-Falle

## 3.1 Experimenteller Zugang

Bislang wurde bei der Diskussion der Teilchenbewegung in einer Penning-Falle (vgl. Kapitel 2) der Eigendrehimpuls bzw. Spin des Teilchens außer Acht gelassen. Berücksichtigt man diesen zusätzlich, so ergibt sich eine vierte unabhängige Eigenmode.

Der Eigendrehimpuls eines Spin-behafteten Teilchens der Ladung  $q$  und Masse  $m$  erzeugt das magnetische Moment

$$\vec{\mu}_s = g_s \frac{q}{2m} \vec{S}. \quad (3.1)$$

wobei  $g_s$  der  $g$ -Faktor ist. Der Spinoperator  $\vec{S}$  hat für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen wie das Elektron die Spin-Eigenzustände  $|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$  mit den zugehörigen Eigenwerten  $+\frac{1}{2}\hbar$  und  $-\frac{1}{2}\hbar$ . Dies gilt auch für das - in unserem Fall interessante - Restelektron in einem hochgeladenen wasserstoffähnlichen Ion. In einer Penning-Falle kommt es zur Wechselwirkung des magnetischen Moments des Elektrons mit dem starken homogenen Magnetfeld  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ . Dies verursacht infolge des Zeeman-Effektes eine zusätzliche Aufspaltung der Gesamtenergie  $E_0$ <sup>1</sup> des betrachteten Ions in einer Penning-Falle. Je nach Ausrichtung der z-Komponente des magnetischen Moments des Elektrons im axialen Magnetfeld (Abbildung 3.1) kann das Teilchen daher die Energiezustände

$$E_{\pm} = E_0 \pm g_s \frac{\mu_B}{2} B \quad (3.2)$$

annehmen, wobei  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  das Bohr'sche Magneton ist. Beim Wechsel zwischen den beiden Zuständen des Elektrons wird also die Energie

$$\Delta E = g_s \mu_B B = \hbar \omega_L^e \quad (3.3)$$

umgesetzt, wobei  $\omega_L^e$  die Larmorfrequenz ist. Nach obiger Gleichung lässt sich der  $g$ -Faktor demnach durch eine Messung der Larmorfrequenz bei bekanntem Magnetfeld  $B$  bestimmen. Letzteres erhält man aus der Messung der freien Zyklotron-Frequenz  $\omega_c^{ion}$  bei bekannter Masse und Ladung des Ions. Einsetzen von Gleichung (2.2) in Gleichung (3.3) führt auf:

$$g_s = \frac{\omega_L^e}{\omega_c^{ion}} \frac{\hbar}{\mu_B} \frac{q_{ion}}{m_{ion}} = 2 \frac{\omega_L^e}{\omega_c^{ion}} \frac{m_e}{m_{ion}} \frac{q_{ion}}{e}. \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>Quantenmechanisch ergibt sich  $E_0$  aus der Summe der Energien dreier harmonischer Oszillatoren zu:  
 $E_0 = (n_+ + \frac{1}{2})\hbar\omega_+ - (n_- + \frac{1}{2})\hbar\omega_- + (n_z + \frac{1}{2})\hbar\omega_z$

### 3 g-Faktor-Messung mit der Penning-Falle

Die experimentelle Bestimmung des  $g$ -Faktors lässt sich damit prinzipiell auf die Messung der freien Zyklotron- sowie der Larmorfrequenz zurückführen. Die restlichen Größen ( $q_{ion}$ ,  $m_{ion}$ ,  $\mu_B$ ) erhält man aus unabhängigen Experimenten.

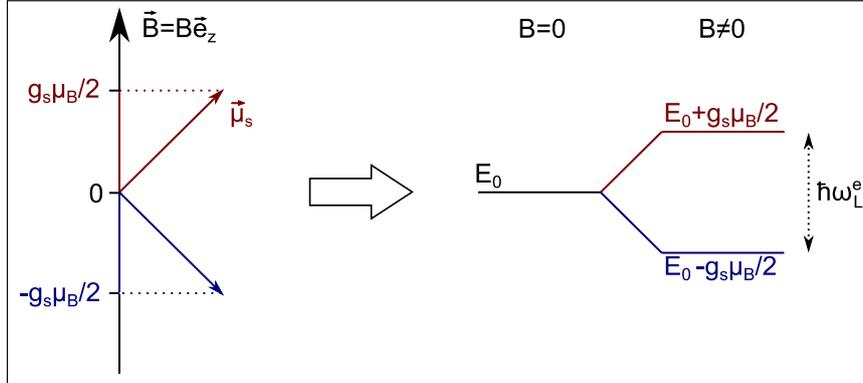


Abbildung 3.1: Links: Die  $z$ -Komponente des magnetischen Moments eines Elektrons kann sich entweder parallel oder antiparallel zum axialen magnetischen Feld ausrichten. Rechts: Dies resultiert in einer Zeeman-Aufspaltung in zwei Energieniveaus, die sich um  $\hbar\omega_L^e$  unterscheiden.

Die freie Zyklotronfrequenz kann mit Hilfe des Invarianztheorems (Gleichung 2.14) aus den Frequenzen  $\omega_+^*$ ,  $\omega_-^*$ ,  $\omega_z^*$  der drei Bewegungsmoden des Teilchens berechnet werden. Letztere müssen hierfür jedoch zunächst gemessen werden (vgl. Kapitel 4).

## 3.2 Bestimmung der Larmorfrequenz: Kontinuierlicher Stern-Gerlach-Effekt

Bis auf relativistische Effekte sind die drei Bewegungsmoden eines wasserstoffähnlichen Ions in einer idealen Penning-Falle unabhängig von der Larmorfrequenz sowie der Spin-Orientierung des Restelektrons. Grund dafür ist das im Idealfall geforderte vollständig homogene Magnetfeld. Wie bereits in Kapitel 2.2 diskutiert wurde, hat das Magnetfeld in der Realität dagegen auch einen inhomogenen Anteil. Man betrachtet hierzu die  $z$ -Komponente der Legendre-Entwicklung des Magnetfeldes in Zylinderkoordinaten<sup>2</sup>. Bis zur zweiten Ordnung ist sie gegeben durch:

$$B_z(z, \rho) = B_0 - 2B_1z + B_2 \left( z^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \right). \quad (3.5)$$

Beim quadratischen Term handelt es sich um die  $z$ -Komponente einer sogenannten **magnetischen Flasche**. In der realen Penning-Falle führt diese zu einer energieabhängigen Kopplung zwischen den einzelnen Eigenmoden [5]. Ähnlich dem Bahndrehimpuls eines

<sup>2</sup>Aufgrund der starken axialen Komponente des magnetischen Feldes in einer Penning-Falle kann der radiale Anteil meist vernachlässigt werden [17].

### 3 g-Faktor-Messung mit der Penning-Falle

Elektrons in einem Atom, verursacht die modifizierte Zyklotronbewegung des Ions einen zum axialen Magnetfeld orthogonalen Kreisstrom  $I = \frac{q_{ion}\omega_{\pm}}{2\pi}$ . Dieser wiederum erzeugt das axiale magnetische Moment [7]

$$\mu_z^{Zykl} = -I\pi\rho_+^2 = -\frac{q_{ion}E_+}{m_{ion}\omega_+}, \quad (3.6)$$

wobei  $E_+$  die Energie der Zyklotron-Mode ist. Zusammen mit dem magnetischen Moment des Elektronenspins erhält man das gesamte axiale magnetische Moment zu<sup>3</sup>:

$$\mu_z^{\pm} = \mu_z^{Zykl} + \mu_z^{Spin} = -\frac{q_{ion}E_+}{m_{ion}\omega_+} \pm \frac{g_s\mu_B}{2}. \quad (3.7)$$

Es ist von der jeweiligen Spinorientierung des Elektrons abhängig. Unter Vernachlässigung des linearen Terms kann mit Gleichung (3.5) die potentielle Energie des magnetischen Moments bestimmt werden. Je nach Spin-Ausrichtung erhält man:

$$E_{pot}^{mag} = -\mu_z^{\pm}B_z \approx -\mu_z^{\pm} \left( B_0 + B_2 \left( z^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \right) \right). \quad (3.8)$$

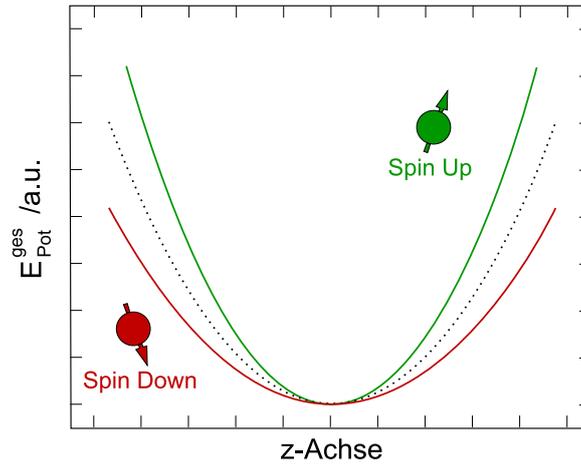


Abbildung 3.2: Die Wechselwirkung des magnetischen Moments des Restelektrons eines wasserstoffähnlichen Ions mit der magnetischen Flasche ergibt eine von  $z$  abhängige Zeeman-Aufspaltung der potentiellen Energie. Je nach Spin-Ausrichtung führt dies zu einer steileren (grün) oder flacheren (rot) Energieparabel. Die gestrichelte Linie stellt die potentielle Energie ohne Spin dar. Die relative Verschiebung der Parabeln aufgrund des Beitrages  $\mu_z^{\pm}(B_0 - \frac{B_2}{2}\rho^2)$  wurde hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet. Sie spielt zudem für die Modifikation der Axialfrequenz keine Rolle. (adaptiert aus [51])

<sup>3</sup>Das relativ kleine magnetische Moment der Magnetonbewegung wird hier vernachlässigt

### 3 g-Faktor-Messung mit der Penning-Falle

Die potentielle Energie des magnetischen Moments addiert sich zur potentiellen Energie des Ions im elektrostatischen Quadrupol-Potential (Gleichung 2.3). Die Gesamtenergie ergibt sich zu:

$$E_{pot}^{ges} = \frac{qU_0}{2d^2} \left( -\frac{1}{2}\rho^2 + z^2 \right) - \mu_z^\pm \left( B_0 + B_2 \left( z^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \right) \right). \quad (3.9)$$

Abbildung (3.2) zeigt die potentielle Energie in Abhängigkeit von  $z$  für die zwei möglichen Spinorientierungen des Elektrons. Aus der potentiellen Energie lässt sich die in axialer Richtung wirkende Kraft berechnen:

$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z} E_{pot}^{ges}. \quad (3.10)$$

Sie führt auf die modifizierte harmonische Bewegungsgleichung

$$m_{ion}\ddot{z} = -\left( \frac{q_{ion}U_0}{d^2} - 2\mu_z^\pm B_2 \right) z. \quad (3.11)$$

Daraus ergeben sich die zwei möglichen axialen Kreisfrequenzen:

$$\omega_z^\pm = \sqrt{\frac{q_{ion}U_0}{m_{ion}d^2} - \frac{2\mu_z^\pm B_2}{m_{ion}}} \quad (3.12)$$

$$\approx \omega_z \left( 1 - \frac{\mu_z^\pm B_2}{m_{ion}\omega_z^2} \right) \quad (3.13)$$

$$= \omega_z \left( 1 - \frac{B_2}{m_{ion}\omega_z^2} \left( -\frac{q_{ion}E_+}{m_{ion}\omega_+} \pm \frac{g_s\mu_B}{2} \right) \right). \quad (3.14)$$

Die Abhängigkeit der Axialfrequenz von der Spinorientierung wird als **Kontinuierlicher Stern-Gerlach-Effekt** bezeichnet und kann für die Bestimmung der Larmorfrequenz ausgenutzt werden [24]: Durch Einstrahlen von Mikrowellen nahe der Larmorfrequenz kann ein Übergang zwischen den möglichen Elektronenspin-Zuständen angeregt und über die Frequenzverschiebung der Axialfrequenz

$$\Delta\nu_z^\pm \approx \frac{B_2 g_s \mu_B}{4\pi^2 m_{ion} \nu_z} \quad (3.15)$$

detektiert werden (siehe nächster Abschnitt). Der parasitäre  $B_2$ -Term der magnetischen Flasche in einer realen Penning-Falle ist für eine erfolgreiche Detektion des Spin-Flips zu klein. Um diesen zu vergrößern, ist es in der Praxis üblich die Ringelektrode der Penning-Falle aus einem ferromagnetischen Material zu fertigen (Abbildung 3.3). Zudem kann  $B_2$  wegen  $B_2 \propto B_s/r_{ring}^2$  auch durch Verkleinern des Innenradius der ferromagnetischen Ringelektrode sowie eine höhere Sättigungsflussdichte  $B_s$  des Ringelektrodenmaterials vergrößert werden [25]. Zum Vergleich: Beim  $g$ -Faktor Experiment in Mainz wird eine Nickel-Ringelektrode ( $B_s^{Ni} \simeq 0,645$  T) mit einem Innenradius von 3,5 mm verwendet. Damit wird  $B_2^{Mainz} \simeq 10^4 \frac{T}{m^2}$  erreicht. Im ALPHATRAP-Experiment soll der

### 3 g-Faktor-Messung mit der Penning-Falle

Innenradius dagegen voraussichtlich 3 mm betragen. Zudem sollen die Ringelektroden aus CoFe ( $B_s^{CoFe} \simeq 2,35$  T) bestehen. Damit können voraussichtlich  $B_2$  – Werte von bis zu:  $B_2^{ALPHA} \simeq 50000 \frac{T}{m^2}$  ermöglicht werden. Daraus lässt sich die Spin-Flip induzierte Frequenzverschiebung nach Gleichung (3.15) abschätzen: Bei einer angestrebten Axialfrequenz von  $\nu_z \approx 300$  kHz erhält man für das Blei-Isotop  $^{208}\text{Pb}^{81+}$  den Frequenzunterschied  $\Delta\nu_z^\pm \approx 226$  mHz. Er macht demnach nur ca.  $0,8$  ppm<sup>4</sup> der Axialfrequenz aus, was sehr hohe Anforderungen hinsichtlich der Präzision und der Empfindlichkeit des Nachweissystems stellt.

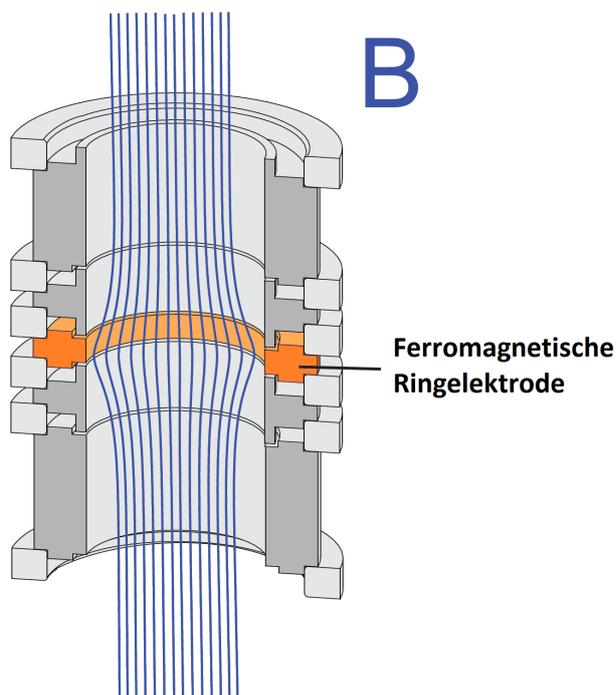


Abbildung 3.3: Erzeugung einer magnetischen Flasche in einer Penning-Falle. Eine ferromagnetische Ringelektrode führt zu einer inhomogenen Verzerrung der magnetischen Feldlinien am Ort des Ions. Daraus resultiert eine diskrete Abhängigkeit der Axialfrequenz des Ions von den zwei möglichen Spinorientierungen des Restelektrons.

### 3.3 Der Messprozess im Zwei-Fallen-System

Aus vorherigem Abschnitt geht hervor, dass für eine erfolgreiche Detektion des Spin-Flips eine Ergänzung der Falle durch eine beabsichtigte Inhomogenität (magnetische Flasche) erforderlich ist. Wie man jedoch z.B. an Gleichung (3.14) erkennen kann, führt diese Inhomogenität zu einer energieabhängigen Kopplung der magnetischen Momente

<sup>4</sup>engl. part per million

### 3 $g$ -Faktor-Messung mit der Penning-Falle

der modifizierten Zyklotron- und Magnetronbewegung an die axiale Mode. Die daraus resultierenden Frequenzverschiebungen machen eine präzise Bestimmung des  $g$ -Faktors innerhalb einer einzigen so manipulierten Falle unmöglich [26]. Es ist daher üblich die Messung der Larmor- und Zyklotronfrequenz auf zwei unterschiedliche Fallen zu verteilen:

- **Analysefalle (AT):** Sie beinhaltet die magnetische Flasche und dient ausschließlich zur Detektion des Spin-Zustandes.
- **Präzisionsfalle (PT):** In ihr erfolgt die Messung der freien Zyklotronfrequenz sowie das Abtasten der Larmorresonanz. Um ein möglichst homogenes Magnetfeld zu gewährleisten, muss sie sich in ausreichend großer Entfernung zur Analysefalle befinden.

Für den Teilchenaustausch werden die beide Fallen in axialer Richtung über Transportelektroden miteinander verbunden. Die Messprozedur zur Bestimmung des  $g$ -Faktors gestaltet sich wie folgt:

1. Einstrahlen der Mikrowellenfrequenz  $\omega_{mw}$  und Messung der Zyklotronfrequenz  $\omega_c$  in der PT. Danach adiabatischer Transport<sup>5</sup> zur AT.
2. Detektion des Spin-Zustandes in der AT und Vergleich mit dem vorherigen Zustand. Rücktransport zur PT.

Obige Prozedur wird für unterschiedliche Mikrowellenfrequenzen nahe der Larmorfrequenz mehrfach wiederholt. Daraus ergibt sich eine Verteilung der Spin-flip Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses  $\frac{\omega_{mw}}{\omega_c}$ <sup>6</sup>. Die Position des Maximums dieser Verteilung liefert den Wert  $\frac{\omega_L^e}{\omega_c}$  woraus schließlich mit Gleichung (3.4) der  $g$ -Faktor berechnet werden kann.

---

<sup>5</sup>Während des Teilchen-Transports zur Analysefalle darf sich der Spinzustand nicht ändern.

<sup>6</sup>Das Frequenzverhältnis  $\frac{\omega_{mw}}{\omega_c}$  ist selbstkonsistent und zeitunabhängig. Der Magnetfelddrift zwischen zwei Messungen spielt daher keine Rolle.

## 4 Das nicht-destruktive Nachweissystem

Im vorliegenden Kapitel werden die für diese Arbeit relevanten Detektionstechniken für den Nachweis der Bewegungsmoden eines geladenen Teilchens in einer Penning-Falle beschrieben. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen einem destruktiven (z.B. TOF-ICR<sup>1</sup> [27]) und einem nicht-destruktiven Ionennachweis (FT-ICR<sup>2</sup> [28]), wobei hier auf letzteren eingegangen wird. Darunter versteht man eine Messung ohne Verlust des Teilchens, wodurch dieses über einen längeren Zeitraum gespeichert und untersucht werden kann. Dies erlaubt beispielsweise eine hochpräzise Messung der Bewegungsfrequenzen eines wasserstoffähnlichen Ions in einer Penning-Falle, was nach Kapitel 3 eine wichtige Voraussetzung für eine erfolgreiche Bestimmung des  $g$ -Faktors des gebundenen Elektrons darstellt.

### 4.1 Spiegelstromdetektion

#### Detektionsprinzip

Der Nachweis der Teilchenbewegung mit der nicht-destruktiven Methode geschieht über die Detektion von Spiegelströmen, die das geladene Teilchen in den Fallenelektroden induziert [3]. Abbildung (4.1) veranschaulicht das Prinzip am Beispiel der axialen Mode.

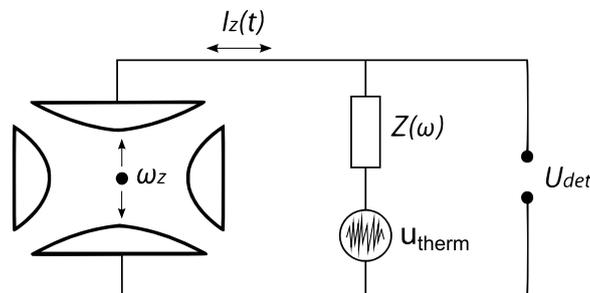


Abbildung 4.1: Nicht-destruktiver Nachweis von in einer Penning-Falle gespeicherten Ionen. Die durch die Ionenbewegung induzierten Spiegelströme führen zu einem Spannungsabfall an einer Impedanz  $Z(\omega)$ . Das detektierte Ausgangssignal besteht aus der Überlagerung aus thermischer Rauschspannung  $U_{therm} = u_{therm} \sqrt{\Delta\omega}$  und dem Spannungsabfall an  $Z(\omega)$ .

<sup>1</sup>Time-Of-Flight Ion-Cyclotron Resonance

<sup>2</sup>Fourier-Transform Ion-Cyclotron Resonance

## 4 Das nicht-destruktive Nachweissystem

Die axiale Oszillationsbewegung<sup>3</sup>

$$z(t) = z_0 \sin(\omega_z t + \varphi) \quad (4.1)$$

eines geladenen Teilchens der Ladung  $q$  im harmonischen Potential des elektrischen Quadrupolfeldes erzeugt den Spiegelstrom [29]

$$I_z(t) = \frac{q_{ion}}{D} \dot{z}(t) = \frac{q_{ion}}{D} \omega_z z_0 \cos(\omega_z t + \varphi). \quad (4.2)$$

Der geometrische Parameter  $D$  wird als effektiver Elektrodenabstand bezeichnet. Er entspricht dem Plattenabstand  $D = \frac{U_0}{E^{ion}}$  eines fiktiven unendlich ausgedehnten Plattenkondensators, dessen Feldstärke  $E$  (beim Anlegen der Fallenspannung  $U_0$ ) gerade durch die Feldstärke  $E^{ion}$  am Ort des Ions in der realen Falle gegeben ist.

Der Spiegelstrom resultiert in einer Signalspannung  $U_{sig}(t) = Z(\omega_z)I_z(t)$  über einer Impedanz  $Z(\omega_z)$ . Das detektierte Signal  $U_{det}$  ist dann die Überlagerung aus  $U_{sig}$  und der thermischen Rauschspannung

$$U_{therm} = u_{therm} \sqrt{\Delta\omega} = \sqrt{4k_B T \operatorname{Re}(Z(\omega_z)) \Delta\omega} \quad (4.3)$$

der Impedanz, wobei  $k_B$  die Boltzmannkonstante und  $T$  die Temperatur ist. Ein hohes Signal-zu-Rausch-Verhältnis ist erstrebenswert, da es eine kürzere Messzeit ermöglicht. Hierdurch fallen beispielsweise zeitliche Magnetfeld-Drifts weniger stark ins Gewicht, was letztendlich zu einer Verbesserung der Messgenauigkeit beiträgt. Da die Spiegelströme typischerweise in der Größenordnung von einigen Femto-Ampere liegen, erfordert die Vergrößerung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses eine Maximierung der Impedanz  $Z(\omega_z)$ . Gleichzeitig muss das thermische Rauschen soweit wie möglich reduziert werden.

### Realisierung

In der Praxis lassen sich obige Anforderungen erfahrungsgemäß mit einem solchen System einhalten, wie es in Abbildung 4.2 gezeigt ist. Die erste Stufe des Detektionssystems wird meist durch flüssiges Helium gekühlt und damit bei kryogenen Temperaturen von 4.2 K betrieben. Dies hat mehrere Vorteile:

- Verringerung der thermischen Rauschdichte  $u_{therm}$ <sup>4</sup>.
- Kryopumpeneffekt: Das Ausfrieren eines Großteils der in der Fallenkammer verbleibenden Restgases führt zu einer erheblichen Verbesserung des Vakuums. Dies wiederum ermöglicht Teilchen-Speicherzeiten bis zu einigen Monaten [30].
- Die Kühlung des Ions (vgl. Abschnitt 4.2) resultiert in kleineren Bewegungsamplituden bzw. Energien. Dies reduziert ungewollte systematische Frequenzverschiebungen der einzelnen Moden und erhöht die Präzision der Messung.
- Verwendung von supraleitendem Leitermaterial reduziert ohmsche Verluste.

<sup>3</sup>Streng genommen führt das angeregte Teilchen ohne weitere Energiezufuhr eine gedämpfte Schwingung aus (siehe Abschnitt 4.2).

<sup>4</sup>Streng genommen ist dies nur für die Peak-Detektion von Vorteil (siehe Abschnitt 4.2.3).

#### 4 Das nicht-destruktive Nachweissystem

Für die Realisierung der benötigten hohen Impedanz wird eine Induktivität  $L$  verwendet. Diese bildet zusammen mit der Fallenkapazität  $C^5$  einen Parallelschwingkreis (Resonator) mit der Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Der effektive Parallelwiderstand dieses Schwingkreises wird im Resonanzfall maximal und ist gegeben durch  $R_P = Q\omega_0 L$ , wobei  $Q$  der Gütefaktor des Systems ist. Durch die Dimensionierung des Resonators ist es möglich dessen Resonanzfrequenz in etwa auf die Axialfrequenz des Ions einzustellen (näheres hierzu in Kapitel 5). Die exakte Abstimmung erfolgt durch Anpassen der Fallenspannung  $U_0$  gemäß Gleichung (2.6). Im Falle von  $\omega_z = \omega_0$  erhält man auf diese Weise einen maximalen Spannungsabfall von

$$U_z^{\omega_0}(t) = R_P \cdot I_z(t) = Q\omega_0 L \cdot I_z(t) \quad (4.4)$$

am Resonator. Wie bereits erwähnt, ermöglicht die kryogene Temperatur die Verwendung von supraleitendem Leitermaterial für den Aufbau von Resonatoren mit sehr hohem effektivem Parallelwiderstand (bzw. Güte). Die daran abfallenden Signalspannungen lassen sich durch eine spezielle kryogene Verstärkerstufe vorverstärken. Daraufhin wird das Signal im Raumtemperaturbereich weiter aufbereitet und kann anschließend z.B. frequenz aufgelöst detektiert werden. Das Signal-Rausch-Verhältnis wird dabei im Wesentlichen vom Kryo-Verstärker sowie dem Resonator bestimmt (vgl. Abschnitt 4.2.3). Ein ausführliche theoretische und experimentelle Betrachtung der für das ALPHATRAP-Experiment entworfenen Resonatoren findet sich in Kapitel 5. Der kryogene Verstärker wird in Kapitel 6 diskutiert.

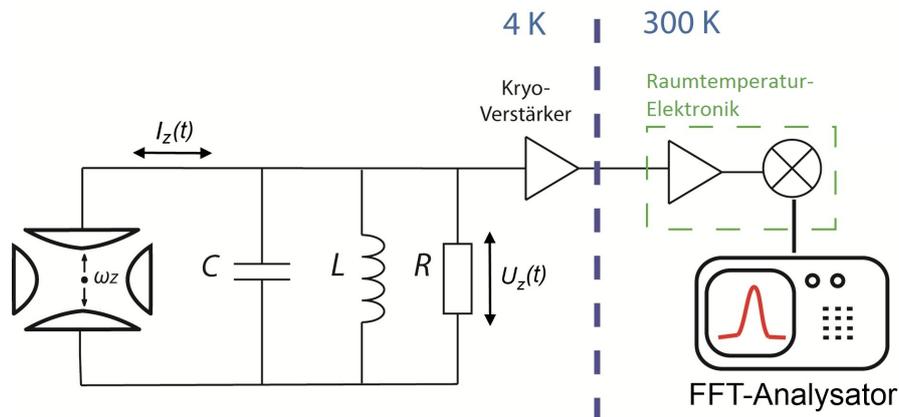


Abbildung 4.2: In der Praxis findet die erste Stufe der Detektion bei kryogenen Temperaturen statt. Hier werden die Spiegelströme erfasst und mit Hilfe eines parallelen RCL-Schwingkreises hoher Güte in ein Spannungssignal umgewandelt. Dieses wird daraufhin durch eine kryogene Vorverstärkerstufe verstärkt und anschließend von der Raumtemperaturelektronik weiter aufbereitet und detektiert.

<sup>5</sup>In der Realität müssen zusätzlich zur Fallenkapazität auch parasitäre Leitungs- und Durchführungs-kapazitäten sowie die intrinsische Kapazität der Spulenwicklung mit berücksichtigt werden.

## 4.2 Detektionsmethoden

Bei der bisherigen Diskussion der Spiegelstromdetektion wurde außer Acht gelassen, dass das Detektionssystem auch einen rückwirkenden Effekt auf die Teilchenbewegung hat. Die aufgrund des Spiegelstromes am Realteil der Impedanz  $Z(\omega)$  abfallende Spannung  $U_z$  resultiert in der reaktiven Kraft

$$F_z(t) = q_{ion} \cdot \frac{U_z(t)}{D} = q_{ion} \cdot \frac{\operatorname{Re}(Z(\omega))I_z(t)}{D}, \quad (4.5)$$

wobei  $I_z(t)$  durch Gleichung (4.2) gegeben ist. Diese Kraft ist der Teilchenbewegung entgegengerichtet und modifiziert die axiale harmonische Bewegungsgleichung zu:

$$\ddot{z} = -\omega_z^2 z - \frac{q_{ion}^2 \operatorname{Re}(Z(\omega))}{m_{ion} D^2} \dot{z}. \quad (4.6)$$

Obige Differenzialgleichung beschreibt eine harmonische linear gedämpfte Schwingung mit der sogenannten Kühlzeitkonstante

$$\tau_K = \frac{m_{ion} D^2}{q_{ion}^2 \operatorname{Re}(Z(\omega))}. \quad (4.7)$$

Das ist die charakteristische Zeit mit der sich die Iontemperatur dem thermischen Gleichgewicht annähert. Aufgrund der Kopplung des Elektronen-Plasmas an das Festkörper-Gitter (des Resonators) ist die Endtemperatur des Teilchens dabei gerade durch die Resonatortemperatur (4,2 K ohne elektronisches Feedback [32]) gegeben (vgl. [7]). Effektiv handelt es sich bei obigem Prozess um eine Dissipation der überschüssigen Energie des noch nicht thermalisierten Teilchens am ohmschen Anteil der Impedanz. Man spricht in diesem Zusammenhang daher auch von **Widerstandskühlen** [31].

Abhängig davon, ob sich das betrachtete Teilchen bereits in einem thermischen Gleichgewicht mit dem Detektionssystem befindet oder nicht, unterscheidet man zwischen der sogenannten Dip- bzw. Peak-Detektion. Beide Methoden werden in den nachfolgenden Abschnitten zunächst kurz vorgestellt und anschließend in Bezug auf ihr Signal-Rausch-Verhältnis sowie die damit verbundenen Anforderung für die Detektionselektronik verglichen.

### 4.2.1 Peak-Detektion

Bei dieser Detektionsmethode wird vorausgesetzt, dass sich das Teilchen noch nicht im thermischen Gleichgewicht mit dem Resonator befindet bzw. über eine überschüssige Restenergie gegenüber dem Resonatorrauschen verfügt. Abbildung 4.3 veranschaulicht die charakteristische Signalform. Wie in Abschnitt 4.1 besprochen, bewirken die durch das Teilchen induzierten Spiegelströme einen Spannungsabfall über der Impedanz des Resonators. Dieser äußert sich in einer schmalen Signalspitze (Peak), die dem thermischen Rauschen des Resonators (breite Resonanz) am Ort der Teilchenfrequenz überlagert ist.

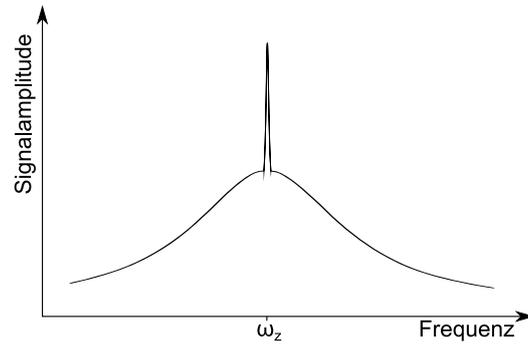


Abbildung 4.3: Skizze der Signalf orm bei der Peak-Detektion. Solange das Teilchen das thermische Gleichgewicht noch nicht erreicht hat, lässt es sich anhand eines kohärenten Peak-Signals identifizieren, welches das Resonatorrauschen bei der Teilchenfrequenz überlagert. Im dargestellten Fall entspricht die Teilchenfrequenz der Resonanzfrequenz des Resonators, d.h. die Höhe des Peaks ist nach Gleichung (4.4) maximal.

#### 4.2.2 Dip-Detektion

In Abbildung (4.4) ist das detektierte Signal eines Ions skizziert, welches sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Nachweisschwingkreis befindet. Der deutliche Einbruch (Dip) im thermischen Rauschen des Resonators wird durch das thermalisierte Teilchen verursacht. Eine anschauliche Erklärung hierfür ist, dass das Teilchen in der Falle als ein idealer Serienschwingkreis interpretiert werden kann, dessen Resonanzfrequenz durch die Oszillationsfrequenz des Teilchens gegeben ist [33]. Da der Widerstand eines idealen Serienschwingkreises in Resonanz verschwindet, entspricht das Teilchen in der Falle effektiv einem Kurzschluss.

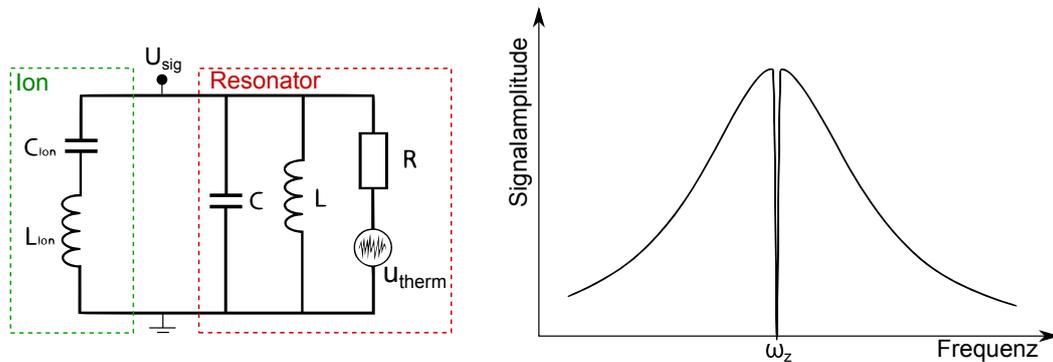


Abbildung 4.4: Links: Das Ersatzschaltbild des thermalisierten Ions in der Falle entspricht einem idealen Serienschwingkreis, dessen Widerstand in Resonanz verschwindet. Rechts: Dies erklärt den für die Namensgebung der Dip-Detektion verantwortlichen Einbruch in der breiten Parallelresonanz des Resonators. (modifiziert aus [7, 50])

### 4.2.3 Signal-Rausch-Verhältnis

Für die Berechnung des Signal-Rausch-Verhältnisses (SNR<sup>6</sup>) ist es wichtig sämtliche Rauschquellen des Detektionssystems mit einzubeziehen. Zu diesen gehört insbesondere das Grundrauschen des kryogenen Vorverstärkers, welches bisher nicht berücksichtigt wurde. Das gesamte elektronische Rauschen eines realen Verstärkers kann durch äquivalente Strom- und Spannungs-Rauschquellen am Eingang des ansonsten als ideal angesehenen Verstärkers modelliert werden (Abbildung 4.5).

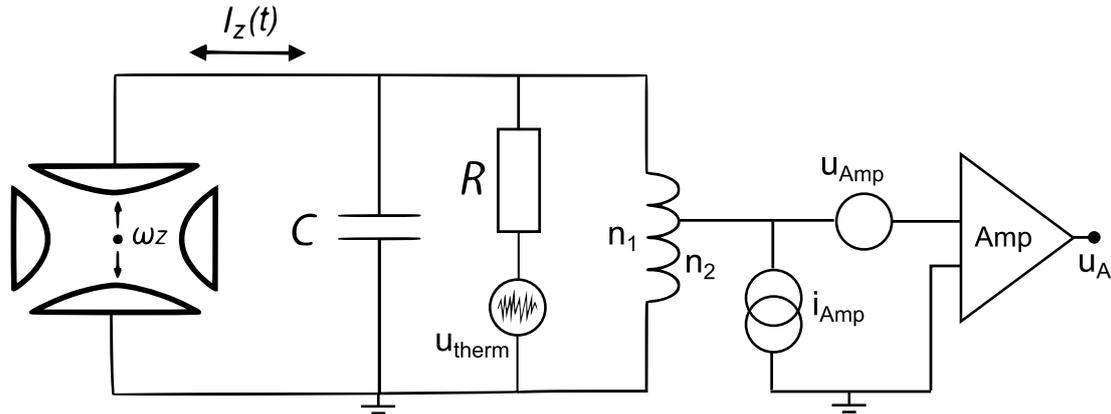


Abbildung 4.5: Kryogenes Detektionssystem mit eingezeichneten elektronischen Rauschquellen. Hierbei ist  $u_{Amp}$  bzw.  $i_{Amp}$  die auf den Verstärkereingang bezogene Spannungs- bzw. Strom-Rauschdichte. Der Spulenabgriff (Tap) entspricht einem Transformator mit dem Windungsverhältnis  $w = \frac{n_2}{n_1}$ , wobei im dargestellten Fall  $n_1$  die Gesamtwindungszahl und  $n_2$  die Windungszahl unterhalb des Abgriffs ist.

Die Definition des SNR hängt von der jeweiligen Detektionsmethode ab. In Abbildung 4.6 ist das SNR für die Dip- und die Peak-Detektion veranschaulicht.

**Signal-Rausch-Verhältnis der Dip-Detektion:** Bei der Dip-Methode ist das Signal  $s_{Dip}$  durch das Maximum des Resonatorrauschens gegeben. Hierbei muss zusätzlich zum thermische Rauschen  $u_{therm}$  (Gleichung 4.3) auch das Spannungs- sowie das Stromrauschen des Verstärkers berücksichtigt werden<sup>7</sup>. Der Rauschuntergrund bei der Teilchenfrequenz ( $n_{Dip}$ ) ist durch das Spannungsrauschen des Verstärkers bestimmt. Damit ergibt sich für die Dip-Detektion [34, 35]:

$$SNR_{Dip} = \frac{s_{Dip}}{n_{Dip}} = \frac{\sqrt{4k_B T R (\frac{n_2}{n_1})^2 + u_{Amp}^2 + (i_{Amp} R)^2 (\frac{n_2}{n_1})^4}}{u_{Amp}}. \quad (4.8)$$

<sup>6</sup> engl. Signal-to-Noise Ratio

<sup>7</sup> Das Stromrauschen wird am Resonatorwiderstand in Spannungsrauschen umgewandelt.

#### 4 Das nicht-destruktive Nachweissystem

Hierbei wird die Möglichkeit berücksichtigt den Resonator an unterschiedlichen Stellen der Windung (Taps) abzugreifen. Effektiv entspricht dies einem Transformator mit dem Windungsverhältnis  $\frac{n_2}{n_1}$  (Abbildung 4.5). Er stellt einen zusätzlichen Freiheitsgrad beim Design des Detektionssystems dar und kann zur Impedanz bzw. Rauschanpassung genutzt werden [34].

Gleichung (4.8) macht die Anforderungen an das kryogene Detektionssystem bei Anwendung der Dip-Methode deutlich: Zur Optimierung von  $SNR_{Dip}$  muss das Spannungsrauschen des Verstärkers minimiert werden. Zudem sollte der Parallelwiderstand des Resonators möglichst groß sein<sup>8</sup>.

Hinsichtlich der Frequenzauflösung kann die Forderung nach einem hohen Parallelwiderstand jedoch auch problematisch sein. Der Fehler der bestimmten Frequenz skaliert annähernd linear mit der Halbwertsbreite

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\tau_K} = \frac{1}{2\pi} \frac{q_{ion}^2 R}{m_{ion} D^2} \quad (4.9)$$

des beobachteten Teilchens [35]. Sie wird mit zunehmender Resonatorgüte breiter und hängt zudem vom effektiven Elektrodenabstand sowie dem Ladung-zu-Masse-Verhältnis des betrachteten Ions ab. Um die Resonatorgüte und damit das SNR nicht unnötig zu verschlechtern, ist die Reduzierung der Linienbreite bei Ionen mit großem  $q/m$  auch durch einen vergrößerten effektiven Elektrodenabstand  $D$  möglich. Hierzu lassen sich beispielsweise weitere Elektroden zur Falle hinzufügen, an denen das Signal abgegriffen werden kann.

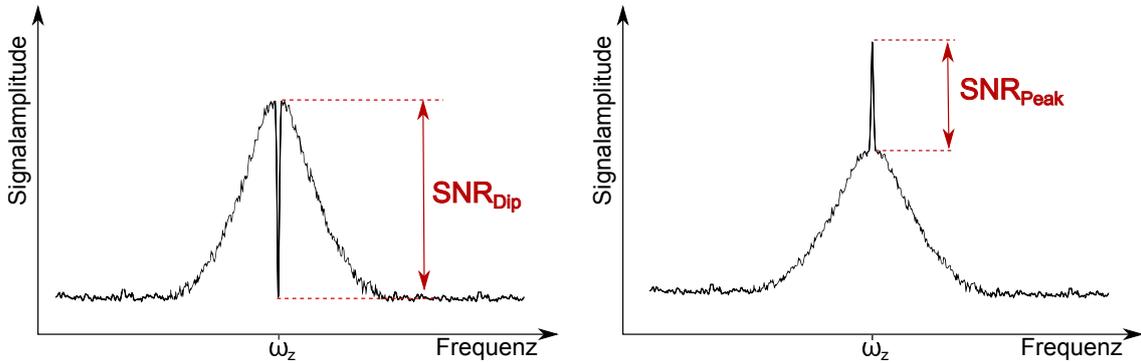


Abbildung 4.6: Die Definition des Signal-Rausch-Verhältnisses unterscheidet sich je nachdem, ob es sich um eine Peak- oder um eine Dip-Detektion handelt. Im Gegensatz zur Dip-Methode (links) kann der Rauschuntergrund des Verstärkers bei der Peak-Methode (rechts) vernachlässigt werden.

<sup>8</sup>Eine weitere Verbesserung von  $SNR_{Dip}$  ist prinzipiell auch durch Erhöhen der Temperatur  $T$  möglich. Dies wird jedoch aufgrund der damit verbundenen systematischen Frequenzverschiebungen nicht in Betracht gezogen.

**Signal-Rausch-Verhältnis der Peak-Detektion:** Bei der Peak-Detektion ist das  $SNR$  durch das Verhältnis des Maximums des Ionensignals zum Maximum des Resonatorrauschens gegeben [34]:

$$SNR_{Peak} = \frac{I_z R \frac{n_2}{n_1} \sqrt{\tau_{mess}}}{\sqrt{4k_B T R \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + u_{Amp}^2 + (i_{Amp} R)^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^4}}, \quad (4.10)$$

wobei  $\tau_{mess}$  das Zeitfenster der Signalbeobachtung (Messzeit) ist. Mit Gleichung (4.2) erhält man:

$$SNR_{Peak} = \frac{q_{ion} \omega_z z_0 R \sqrt{\tau_{mess}}}{\sqrt{4k_B T R + \left(\frac{n_1}{n_2} u_{Amp}\right)^2 + (i_{Amp} R)^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}. \quad (4.11)$$

Bei optimaler Rauschanpassung [36] des Resonators an den angeschlossenen Verstärker, d.h. für

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{u_{Amp}}{i_{Amp} R}}, \quad (4.12)$$

lässt sich das Verstärkerrauschen gegenüber dem thermischen Rauschen des Resonators typischerweise vernachlässigen [34]. Damit ergibt sich schließlich:

$$SNR_{Peak} = \frac{q_{ion} \omega_z z_0 \sqrt{R \tau_{mess}}}{D \sqrt{4k_B T}}. \quad (4.13)$$

Nach Gleichung (4.7) skaliert die Kühlzeitkonstante und daher auch die Messzeit mit

$$\tau_{mess} \approx 2\tau_K \propto \frac{D^2}{R}. \quad (4.14)$$

Ohne zusätzliches elektronisches Feedback [32, 37] ist eine Erhöhung von  $SNR_{Peak}$  deshalb nur über eine verminderte Temperatur des Resonators sowie eine größere Bewegungsamplitude des Ions möglich. Da jedoch mit wachsendem Abstand vom Fallenzentrum anharmonische Potentialanteile zunehmend an Bedeutung gewinnen, führt letztere Maßnahme zu unerwünschten systematischen Frequenzverschiebungen. Dies ist ein wesentlicher Nachteil der Peak- gegenüber der Dip-Detektion, bei der das Teilchen bereits vollständig thermalisiert ist und damit über eine minimale Bewegungsamplitude verfügt. Die Dip-Methode eignet sich daher besonders für die hochgenaue Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz in der Präzisionsfalle, während die Peak-Methode bei der qualitativen Detektion des Spinflips in der Analysefalle Anwendung findet.

# 5 Axial-Resonatoren für ALPHATRAP

## 5.1 Der reale Parallelschwingkreis

Damit die Vorgehensweise bei der Planung und Berechnung der axialen Resonatoren besser nachvollzogen werden kann, sollen in diesem Abschnitt die wesentlichen Eigenschaften eines realen Parallelschwingkreises wie Impedanz und Güte kurz eingeführt werden.

**Impedanz** Das Ersatzschaltbild eines realen Parallelschwingkreises ist in Abbildung 5.1 (a) dargestellt. Es setzt sich aus einer Induktivität  $L$  und einer Kapazität  $C$  sowie den dazugehörigen Verlustwiderständen  $R_L$  und  $R_C$  zusammen. Für jede Reihenschaltung, die aus ohmschen Widerständen und Blindwiderständen besteht, existiert für eine bestimmte Frequenz  $\omega$  eine äquivalente Parallelschaltung [38]. Nahe der Resonanzfrequenz lassen sich die gesamten Verluste im Schwingkreis demnach durch eine Transformation in ein Parallel-Ersatzschaltbild (Abbildung 5.1 (b) im effektiven Parallelwiderstand  $R_P$  zusammenfassen.<sup>1</sup>

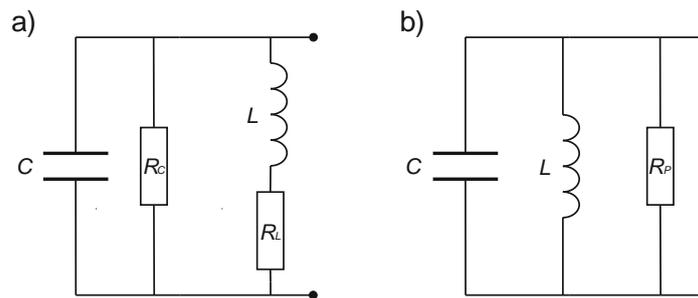


Abbildung 5.1: a) Im Gegensatz zu einem idealen ist ein realer Parallelschwingkreis verlustbehaftet. Der zur Kapazität  $C$  parallelgeschaltete Widerstand  $R_C$  repräsentiert die dielektrischen Verluste im Kondensator. Die ohmschen Verluste im Leiter und in den Wicklungen der Induktivität  $L$  werden durch den Reihenwiderstand  $R_L$  berücksichtigt. b) Transformiertes Parallel-Ersatzschaltbild. Der effektive Parallelwiderstand  $R_P$  ist ein Maß für die gesamten Verluste im Schwingkreis.

Nach Kapitel 4 ist  $R_P$  die ausschlaggebende Größe für einen möglichst großen Spannungsabfall am Resonator und somit für ein möglichst hohes Signal-zu-Rausch-Verhältnis.

<sup>1</sup>Streng genommen ändert sich bei der Transformation der Schaltung von Abbildung a) nach b) auch der Betrag der Induktivität. Unter der hier vorausgesetzten Annahme  $R_L \ll \omega L$  ist die Änderung jedoch vernachlässigbar.

Der Zusammenhang zwischen  $R_P$  aus Abbildung 5.1 (b) und den Widerständen  $R_L$  und  $R_C$  aus Abbildung 5.1 (a) lässt sich durch einen Vergleich der Impedanzen der beiden Schaltungen herstellen. Die Impedanz der Schaltung 5.1 (a) lässt sich schreiben als:

$$Z_a(\omega) = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_L + i\omega L}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R_C} + \left(\frac{R_L}{\omega^2 L^2} + \frac{1}{i\omega L}\right)\left(\frac{1}{R_L^2/\omega^2 L^2 + 1}\right)}. \quad (5.1)$$

Unter der realistischen Voraussetzung  $R_L \ll \omega L$  vereinfacht sich dies zu:

$$Z_a(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R_C} + \frac{R_L}{\omega^2 L^2} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}. \quad (5.2)$$

Die Impedanz der Schaltung 5.1 (b) ergibt sich zu:

$$Z_b(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R_P} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}. \quad (5.3)$$

Durch Gleichsetzen der beiden Impedanzen erhält man für den effektiven Parallelwiderstand bei der Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  schließlich:

$$R_P = \frac{1}{\frac{1}{R_C} + \frac{R_L C}{L}}. \quad (5.4)$$

**Schwingkreisgüte** Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen dem effektiven Parallelwiderstand  $R_P$  und der Schwingkreisgüte  $Q$  hergestellt werden.

Die Güte  $Q$  eines schwingungsfähigen Systems ist allgemein definiert durch:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Gesamte Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}}. \quad (5.5)$$

Da es sich bei der freien Schwingung des Parallelschwingkreises aus Abbildung 5.1 um eine periodische Umwandlung von elektrischer und magnetischer Feldenergie handelt, lässt sich die Gesamtenergie  $W_{ges}$  angeben als:

$$W_{ges} = \frac{1}{2} C U_{max}^2 = \frac{1}{2} L I_{max}^2. \quad (5.6)$$

Der Energieverlust pro Periodendauer  $T$  lässt sich durch Integration der am Parallelwiderstand  $R_P$  abfallenden Leistung bestimmen:

$$\begin{aligned} W_T &= \int_0^T \frac{U_{max}^2}{R_P} \sin^2(\omega_0 t) dt \\ &= \frac{U_{max}^2}{R_P} \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{4\omega_0} \right]_0^T \\ &= \frac{U_{max}^2 \pi}{R_P \omega_0}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

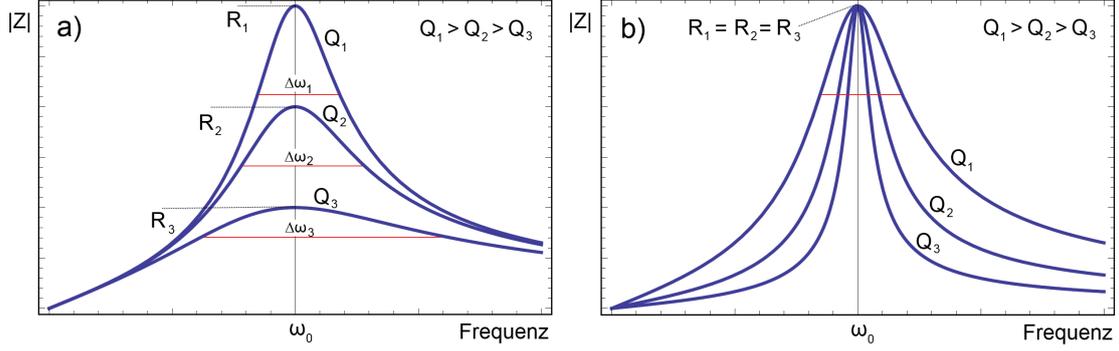


Abbildung 5.2: Resonanzkurven eines Schwingkreises für verschiedene Güten  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$  bei fester Resonanzfrequenz  $\omega_0$ . Mit zunehmender Güte wird die Bandbreite  $\Delta\omega$  kleiner. a) Ist zudem auch  $L$  und  $C$  konstant, so vergrößert sich der Maximalwert  $R$  mit zunehmender Güte. b) Durch geeignete Wahl von  $L$  und  $C$  ( $L \propto \frac{1}{C}$ ) lässt sich die Bandbreite der Resonanzkurve auch bei gleich bleibendem Maximalwert verändern.

Für die Güte folgt also:

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}CU_{max}^2}{\frac{U_{max}^2\pi}{R_P\omega}} = R_P\omega_0 C = R_P \frac{1}{\omega_0 L}. \quad (5.8)$$

Ein messtechnischer Zugang zur Schwingkreisgüte und damit zum effektiven Parallelwiderstand  $R_P$  lässt sich herstellen, indem man die Resonanzkurve des Parallelschwingkreises betrachtet. Die Resonanzkurve lässt sich aus dem Betrag der Impedanz  $Z_b(\omega)$  bestimmen:

$$\begin{aligned} |Z_b(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_P}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_P}\right)^2 + \frac{C^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Der Maximalwert  $R_P$  der Resonanz wird bei der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  erreicht. Die sogenannte 3-dB-Bandbreite  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  der Resonanz ist definiert durch die Breite der Resonanzkurve, bei der die Impedanz auf das  $1/\sqrt{2}$ -fache des Maximalwertes abgefallen ist:

$$|Z_b(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} R_P. \quad (5.10)$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert schließlich den Zusammenhang zwischen der Bandbreite und dem Parallelwiderstand bzw. der Schwingkreisgüte:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{R_P C} \text{ bzw. } Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (5.11)$$

Experimentell lässt sich die Güte daher durch Messung der Resonanzfrequenz sowie der 3-dB- Bandbreite bestimmen.

Aus den Gleichungen (5.8) und (5.11) folgt insbesondere: Eine Vergrößerung der Güte bei gleich bleibender Resonanzfrequenz geht stets mit einer schmaler werdenden Resonanzkurve einher. Ist neben der Resonanzfrequenz zudem die Induktivität und Kapazität konstant, so vergrößert sich auch der Parallelwiderstand und damit das Maximum der Resonanzkurve proportional zur Güte (Abb. 5.2 a). Durch geeignete Wahl der Induktivität und Kapazität ( $L \propto \frac{1}{C}$ ) bei gegebener Resonanzfrequenz, lässt sich Güte und daher die Bandbreite hingegen auch bei konstantem Parallelwiderstand verändern (Abb. 5.2 b). So lässt sich beispielsweise die Bandbreite durch Einsatz einer großen Induktivität und einer kleinen Kapazität verbreitern. Ein hoher Parallelwiderstand bei großer Bandbreite des Resonators ist wichtig für ein gutes Signal-zu-Rausch-Verhältnis und eine präzise Detektion (vgl. Kapitel 4).

## 5.2 Motivation und Planung

Für den Nachweis der axialen Ionenbewegung in der Analysefalle (AT) und Präzisionsfalle (PT) benötigt das ALPHATRAP-Experiment zwei möglichst hochgütige Resonatoren für den axialen Schwingungsnachweis. Die Konstruktion der Resonatoren unterliegt dabei zahlreichen Einschränkungen, die durch die äußeren Randbedingungen des Experiments (Tabelle 5.1) vorgegeben sind und zum Teil im Widerspruch zu einer hohen Resonatorgüte stehen. Um sowohl den Randbedingungen als auch dem Wunsch nach einer hohen Güte gerecht zu werden, muss das Resonator-Design sorgfältig geplant und optimiert werden.

	Resonator AT	Resonator PT
Resonanzfrequenz	~300 kHz	~800 kHz
Maximaler Durchmesser (außen)	4 cm	
Maximale Länge (außen)	13 cm	
Temperatur	4,2 K	
Magnetfeld	3,8 T	

Tabelle 5.1: Randbedingungen, die bei der Planung der Resonatoren berücksichtigt werden müssen. Damit der Spin-Flip in der Analysefalle besser beobachtet werden kann, entspricht die Resonanzfrequenz des AT-Resonators nur ca. einem Drittel des PT-Resonators. Um die Kapazität bei dieser Frequenz klein zu halten, werden große Induktivitätswerte benötigt, was angesichts der beschränkten Größe des Resonators bei einem minimalen Drahtdurchmessers von  $169 \mu\text{m}$  einer großen Windungszahl entspricht.

### 5.2.1 Wahl der Geometrie

Bei den eigentlichen Resonatoren handelt es sich um Induktivitäten bzw. einseitig geerdete Drahtspulen, die durch einen zylindrischen metallischen Schild vor Einflüssen von außen abgeschirmt sind. Zusammen mit den Fallkapazitäten sowie den parasitären Kapazitäten des Resonators und der Durchführungen bilden die Resonatoren einen Parallelschwingkreis, wie in Abb 5.1 dargestellt. Die kapazitiven und ohmschen Verluste werden in den Verlustwiderständen  $R_C$  bzw.  $R_L$  zusammengefasst. Wie im vorherigen Abschnitt bereits diskutiert wurde, ist der effektive Parallelwiderstand eines solchen realen Schwingkreises gegeben durch Gleichung (5.4). Ein möglichst großer effektiver Parallelwiderstand lässt sich demnach idealerweise erreichen, indem man einzelne Größen wie  $R_L$  und  $C$  verkleinert, während man  $R_C$  und  $L$  maximiert. Insbesondere entspricht die Forderung nach einem möglichst kleinen Verhältnis  $\frac{C}{L}$  auch dem Wunsch nach einer möglichst breiten Resonanzkurve bei gleichzeitig großem Parallelwiderstand.

Bei der Realisierung eines Resonators wird die Optimierung bzw. Maximierung des effektiven Parallelwiderstandes jedoch durch die Tatsache erschwert, dass die einzelnen Schwingkreis-Größen nicht mehr unabhängig voneinander sind. Die Geometrie des Resonators bzw. der Spulenwicklung bestimmt dabei maßgeblich die gegenseitige Abhängigkeit von  $R_L$ ,  $R_C$ ,  $L$  und  $C$ . Ein anschauliches Beispiel ist der Zusammenhang zwischen der Spuleninduktivität  $L$  und dem intrinsischen ohmschen Verlustwiderstand  $R_L$ : Bei ansonsten konstanter Geometrie lässt sich eine Vergrößerung von  $L$  durch eine größere Windungszahl realisieren. Letztere ist jedoch proportional zur Gesamtlänge des Spulendrahtes und somit auch zu seinem Gesamtwiderstand. Nach Wahl einer Spulengeometrie muss diese unter Berücksichtigung der experimentellen Randbedingungen geometrisch optimiert werden. Übliche Spulengeometrien sind die Helix-Zylinderspule (Solenoid) und die toroidale Spulenwicklung. Im Folgenden sollen die Vor- und Nachteile der beiden Wicklungsformen kurz erörtert werden.

**Toroid** Der Hauptvorteil der toroidalen Wicklung ist der kreisringförmige Einschluss des magnetischen Flusses, der zu einem verschwindend kleinen magnetischen Streufeld im Außenraum führt. Auf diese Weise können zusätzliche Wirbelstromverluste in der Abschirmung der Spule minimiert werden. Ein weiterer Vorteil ist die leicht zu berechnende Spuleninduktivität. Aufgrund des geringen Streufeldes ist die Gegeninduktivität der Abschirmung vernachlässigbar und die Induktivität entspricht der einer freien Toroidspule. Zu den Nachteilen gehört dagegen, dass sich die intrinsische Wicklungskapazität aufgrund der relativ komplexen Geometrie des Toroids nur sehr schwer abschätzen lässt. Die komplexe Geometrie erschwert ebenso die Herstellung des Resonators, was bei händischer Wicklung von einigen hundert Windungen einen nicht zu unterschätzenden Aufwand bedeutet.

**Zylinderspule** Im Gegensatz zum Toroid verfügt die Zylinderspule über ein vergleichsweise großes magnetisches Streufeld. Dies resultiert in einer relativ starken Wechselwirkung zwischen Spule und Abschirmung und führt zu erhöhten Wirbelstromverlusten sowie einer Verringerung der Gesamtinduktivität durch Gegeninduktion. Die Schildver-

luste können durch Verwendung eines supraleitenden Schildmaterials erheblich reduziert werden. Zudem lässt sich die Wechselwirkung mit dem Schild durch einen ausreichend großen Abstand zwischen Spulenkörper und Schild deutlich verringern. Weiterhin ist die Induktivität und Kapazität einer abgeschirmten Zylinderspule hinreichend genau berechenbar. Ein weiterer Vorteil ist die sehr simple Geometrie der Zylinderspule die die Herstellung wesentlich vereinfacht. Dies ermöglicht zum Beispiel auch die schnelle Herstellung von Testspulen, an denen die für die Planung und Optimierung der endgültigen Spulen notwendigen Berechnungen der Kapazität und Induktivität experimentell verifiziert werden können. Zudem lässt sich die Spule durch einfaches Auf- bzw. Abwickeln einiger Windungen bei Bedarf leichter auf die gewünschte Resonanzfrequenz abstimmen, ohne dabei die Symmetrie der Wicklung zu verletzen.

Aufgrund des begrenzten im Experiment zur Verfügung stehenden Platzes, ist der maximal zulässige Durchmesser eines Resonators auf 4 cm limitiert. Um trotzdem auf die benötigten Induktivitätswerte für die in Tabelle 5.1 angegeben Frequenzen zu kommen, müssen die Resonatorbecher mit geschätzt 13 cm Länge vergleichsweise lang ausfallen. Die Verwirklichung einer toroidalen Wicklung mit diesen Abmessungen ist zwar prinzipiell möglich, würde die Herstellung jedoch noch weiter erschweren. Aus diesem Grund und den weiter oben aufgezählten Vorteilen fiel bei der Wahl der Resonatorgeometrie die Entscheidung zugunsten der Helix-Zylinderspule.

### 5.2.2 Wahl des Materials

Wie bereits erwähnt, besteht ein Helix-Resonator aus einer einseitig geerdeten Helix-Spule in einem zylindrischen, geerdeten, leitfähigen Gehäuse bzw. Schild. Der Schild dient der kapazitiven sowie Hf-Abschirmung nach außen, bringt jedoch auch Nachteile im Vergleich zu einer unabgeschirmten Spule mit sich. Die unmittelbare Nähe der Abschirmung zur innenliegenden Spule führt einerseits zu einer erhöhten Eigenkapazität, während andererseits die Induktivität durch Gegeninduktion im Schild verringert wird. Diese beiden Effekte resultieren in einem insgesamt vergrößerten Verhältnis  $\frac{C}{L}$ , was nach Gleichung (5.4) im Widerspruch zu einem möglichst hohen Parallelwiderstand steht. Einen weiteren gütereduzierenden Faktor stellen die zusätzlichen ohmschen Verluste im Spulendraht und in der Abschirmung dar. Das Verhalten des Helix-Resonators lässt sich hierbei mit dem eines Transformators vergleichen, dessen Sekundärwicklung aus einer einzelnen kurzgeschlossenen Windung besteht.

Die negativen Auswirkungen des Schildes sind stark von der Dimensionierung von Spule und Schild abhängig. So kann bei korrekter Auslegung von den abschirmenden Eigenschaften des Gehäuses profitiert werden, ohne zugleich den Kompromiss einer erheblichen Reduzierung des Parallelwiderstandes eingehen zu müssen [39]. In [40] werden die optimalen Größenverhältnisse für die Dimensionierung eines sogenannten  $\frac{\lambda}{4}$ -Helix-Resonators [41] empirisch abgeleitet. Die mit dieser Optimierung maximal erreichbare Güte ist gegeben durch [40]:

$$Q = \frac{250}{127} D \sqrt{\nu_0} \left[ \frac{1}{\text{m}\sqrt{\text{Hz}}} \right], \quad (5.12)$$

wobei der Innendurchmesser  $D$  des Schildes in Metern und die Resonanzfrequenz  $\nu_0$  in Hz anzugeben ist. Die obige Beziehung ist nicht ausschließlich auf  $\frac{\lambda}{4}$ -Resonatoren beschränkt, sondern lässt sich wie in unserem Fall auch auf Schwingkreise mit konzentrierten Bauelementen<sup>2</sup> anwenden [40]. Zu beachten ist, dass die Gleichung lediglich für aus Kupfer bestehende Resonatoren bei Raumtemperatur hergeleitet wurde und strenggenommen nur für diese Bedingungen gültig ist.

Für einen aus Kupfer gefertigten Axial-Resonator lässt sich hiermit eine erste Prognose für die Güte berechnen: Setzt man für den Innendurchmesser des Resonators die maximal im Experiment zur Verfügung stehenden 3,8 cm (4 cm abzüglich 1 mm Wandstärke) ein, so erhält man für die erforderliche Resonanzfrequenz des PT-Resonators von 800 kHz eine maximale Güte von ca. 67. Mit Hilfe von Gleichung (5.8) lässt sich unter Vernachlässigung der kapazitiven Verluste ( $R_C \rightarrow \infty$ ) daraus die maximale Güte bei 4 K abschätzen:

$$\frac{Q(300K)}{Q(4K)} = \frac{R_P(300K)}{R_P(4K)} \approx \frac{R_L(4K)}{R_L(300K)} \approx \frac{\delta(4K)}{\delta(300K)} = \sqrt{\frac{1}{RRR_{Cu}}}.$$

Hierbei ist  $\delta$  die Skintiefe<sup>3</sup> und  $RRR_{Cu}$  das Restwiderstandsverhältnis von Kupfer. Bei Verwendung von hochreinem Kupfer mit einem RRR Wert von 140 erhält man hiermit  $Q(4K) \approx 793$ . Aufgrund einiger in dieser groben Schätzung vernachlässigter Effekte (wie z.B. die Oberflächenrauigkeit des Leitermaterials, dielektrische Verluste usw.) fällt der tatsächliche Wert in der Realität erfahrungsmäßig noch um einiges kleiner aus.

Der hier dominierende Effekt für die Limitierung der Güte und des Parallelwiderstandes sind die ohmschen Verluste im Leitermaterial von Spule und Schild. Eine Alternative zu Kupfer als Leitermaterial ist die Verwendung von Niob-Titan. Dieser Typ-II-Supraleiter verfügt über eine Sprungtemperatur von  $T_C = 9,5$  K und eine obere kritische Flussdichte von  $B_{C2} = 14$  T [42] und erfüllt damit die in Tabelle (5.1) angegebenen Randbedingungen für das Experiment. Bei der Verwendung von NbTi als Basismaterial für den Resonator sind jedoch folgende Verlusteffekte zu beachten:

- **AC-Widerstand:** Im Gegensatz zum Gleichstromwiderstand verschwindet der Wechselstromwiderstand eines Supraleiters unterhalb der Sprungtemperatur nicht. Im Rahmen des „Zwei-Flüssigkeiten-Modells“ setzt sich die Stromdichte aus einer suprafluiden bosonischen und einer normalleitenden fermionischen Komponente ungepaarter Elektronen zusammen. Im Fall periodischer Ströme kommt es zu einer dissipativen Interaktion der beiden Bestandteile, was den Wechselstromwiderstand verursacht [44].

<sup>2</sup>Im Gegensatz zu reinen Wellen-Resonatoren wie beispielsweise Dipolantennen oder Hohlraumresonatoren sind in Schwingkreisen mit konzentrierten Bauelementen (engl. lumped circuits) Induktivität und Kapazität in diskreten Bauteilen räumlich voneinander getrennt.

<sup>3</sup>Der sogenannte Skineffekt bewirkt, dass sich die Stromdichteverteilung mit zunehmender Wechselstromfrequenz  $\omega$  auf den äußeren Rand des Leiters konzentriert und exponentiell zur Leitermitte hin abfällt. Die Skintiefe oder äquivalente Leitschichtdicke  $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}$  beschreibt dabei die Tiefe, bei der die Stromdichte auf das 1/e-fache der Randstromdichte abgefallen ist.

- **Flux-Flow-Widerstand:** Bei Typ-II-Supraleitern wie NbTi kommt es oberhalb der unteren kritischen Flussdichte  $B_{C1}$  zur Ausbildung der sogenannten Shubnikov-Phase. In dieser Phase kann ein von außen angelegtes Magnetfeld in Form von sogenannten Flussschläuchen in den Supraleiter eindringen<sup>4</sup>. Wird der Supraleiter zusätzlich von einem Strom durchflossen, so wirkt eine Lorentzkraft auf die normale leitende Komponente innerhalb der Flussschläuche. Die daraus resultierende Bewegung der Flussschläuche führt zu weiteren Verlusten.

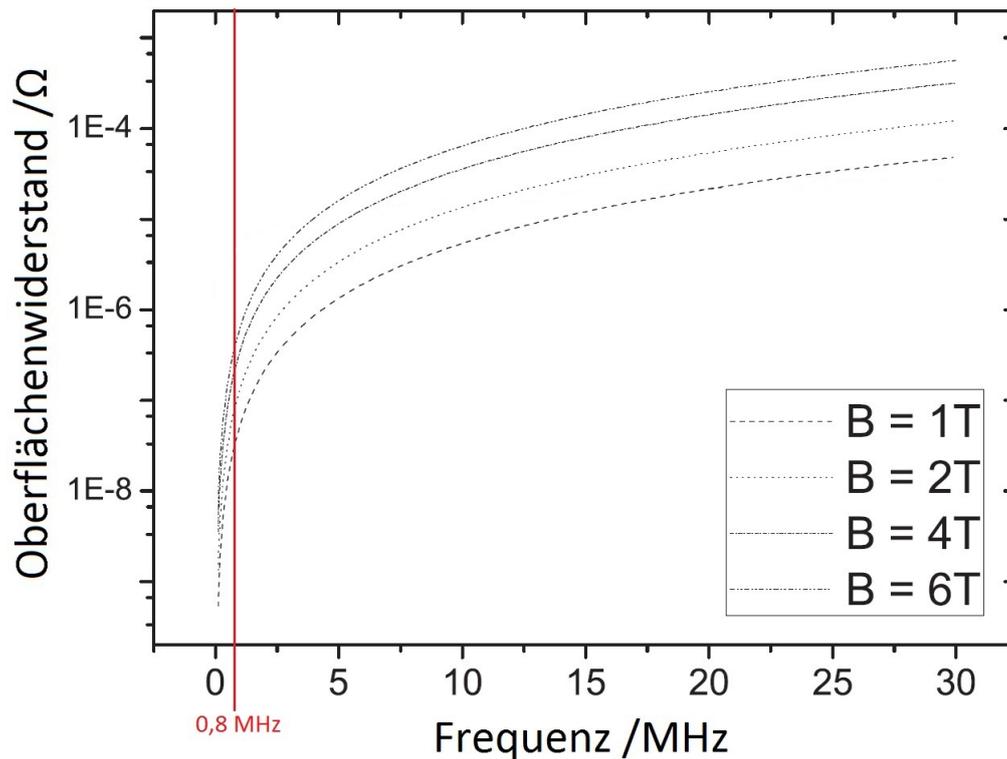


Abbildung 5.3: Oberflächenwiderstand von NbTi bei unterschiedlichen magnetischen Flussdichten in Abhängigkeit der Frequenz. Aufgrund des Flux-Flow-Effektes ist der Oberflächenwiderstand von NbTi auch von der Flussdichte abhängig. Für die relativ niedrigen Frequenzen  $\leq 0,8$  MHz wie sie im ALPHATRAP-Experiment verwendet werden sind die Verluste in NbTi sehr gering [45].

<sup>4</sup>Die Anzahl der eindringenden Flussschläuche ist proportional zur Stärke des Magnetfeldes. Obwohl die Anzahl und Verteilung der Flussschläuche bei Flussdichten von 3,8 T, wie sie bei uns vorliegen, als hinreichend homogen angesehen werden kann, ist mit einer gewissen Feldverzerrung in der Nähe des Supraleiters zu rechnen. Deshalb und nicht zuletzt auch aus platztechnischen Gründen, erfolgt die Platzierung der supraleitenden Axial-Resonatoren außerhalb der Fallenkammer.

Um parasitäre Kabelkapazitäten klein zu halten, ist es wünschenswert die Resonatoren in Fallennähe und damit im Bereich höchster Flussdichte von bis zu ca. 3,8 T zu platzieren. Mit einer unteren kritischen Flussdichte von 24 mT [43] würde sich das NbTi demnach bereits in der Shubnikov-Phase befinden. Desweiteren nehmen die diskutierten Verlusteffekte in NbTi mit steigender Magnetfeldstärke und zu höheren Frequenzen hin zu. Abbildung 5.3 zeigt dieses Verhalten anhand des Oberflächenwiderstand von NbTi bei unterschiedlichen Frequenzen und Flussdichten. Für die relativ niedrigen Frequenzen  $\leq 0,8$  MHz wie sie im ALPHATRAP-Experiment verwendet werden sind die Verluste in NbTi gegenüber denen in hochreinem Kupfer zu vernachlässigen [45]. Sowohl Spule als auch Schild der Axialresonatoren sollen daher aus NbTi gefertigt werden.

## 5.3 Design der Helix-Resonatoren

### 5.3.1 Geometrische Optimierung

Die Festlegung der Resonatorfrequenzen und des maximalen Durchmessers genügt nicht, um die Proportionen der Resonatoren festzulegen. Die Vielzahl der noch offenen Parameter erfordert eine geometrische Optimierung zur Maximierung des effektiven Parallelwiderstandes. Mit der Entscheidung NbTi als Material für die Helix-Resonatoren zu verwenden, ist die im vorherigen Abschnitt angesprochene geometrische Optimierung von helischen Kupferresonatoren nach [40] nicht mehr anwendbar. Eine Möglichkeit der Optimierung wäre die Herstellung und der Vergleich mehrerer Resonatoren mit unterschiedlichen Abmessungen. Da hierfür jedoch jeder einzelne Resonator separat gebaut, abgekühlt und getestet werden muss, ist dieser empirische Weg sehr zeit- und nicht zuletzt kostenintensiv. Eine Alternative bietet der rechnerische Weg. Man betrachte hierzu erneut den effektiven Parallelwiderstand

$$R_P = \frac{1}{\frac{1}{R_C} + \frac{R_L C}{L}}.$$

Es ist wichtig zu beachten, dass sich  $C$  aus der Fallenskapazität (inklusive Durchführungskapazitäten)  $C_T$  und der Eigenkapazität des Resonators  $C_R$  zusammensetzt. Im Gegensatz zu  $C_R$  ist  $C_T$  nicht von der Resonatorgeometrie abhängig. Mit  $C = C_T + C_R$  ergibt sich

$$R_P = \frac{1}{\frac{1}{R_C} + \frac{R_L(C_T + C_R)}{L}}. \quad (5.13)$$

Für eine rechnerische Optimierung ist es erforderlich zu wissen, wie die Größen  $R_C$ ,  $R_L$ ,  $L$  und  $C_R$  aus den geometrischen Parametern des Resonators hervorgehen. Zudem setzt die Abstimmung der beiden Resonatoren auf die gewünschten Frequenzen eine genaue Kenntnis der Gleichungen für die Berechnung von  $L$  und  $C_R$  voraus.

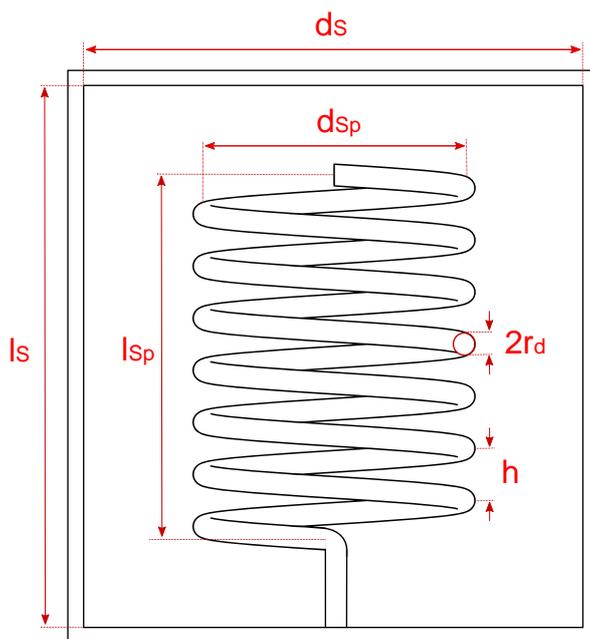


Abbildung 5.4: Nicht maßstabsgetreue Skizze eines Helix-Resonators bestehend aus einseitig geerdeter Helixspule in einer zylindrischen Abschirmung. Die eingezeichneten Abmessungen legen die Geometrie der Spule und der Abschirmung fest. Für die Berechnung der Resonatoreigenschaften sind lediglich die Innenmaße des Schildes relevant.

**Kapazitive Verluste  $R_C$**  Bei den kapazitiven Verlusten handelt es sich um Verluste im Dielektrikum des Schwingkreises. Dieses findet sich beispielsweise in den Isolierungen der Fallenelektroden, der Durchführungen und des Spulendrahtes. Aus Gründen der mechanischen Stabilität und thermischen Kontaktierung muss die Helixspule zudem auf einen Spulenkörper gewickelt werden, der ebenfalls aus einem Dielektrikum besteht. Durch Auswahl geeigneter Materialien lassen sich die dielektrischen Verluste reduzieren. Die Verluste im Dielektrikum eines Kondensators werden typischerweise mit Hilfe des frequenzabhängigen Verlustwinkels  $\delta$  angegeben:

$$\tan(\delta) = \frac{1}{R_C \omega C}.$$

Der Verlustwinkel des verwendeten Dielektrikums sollte möglichst klein sein. Um eine zusätzliche Erhöhung der Kapazitäten zu vermeiden, darf gleichzeitig die Permittivität  $\epsilon_r$  des Materials nicht zu groß sein. Teflon erfüllt beide dieser Kriterien ( $\tan(\delta) < 0,0005$ ,  $\epsilon_r = 2 - 2,5$ ) und wird daher als Material für die Drahtisolierung und den Spulenkörper eingesetzt. Bei den von uns verwendeten Axialfrequenzen von maximal 800 kHz sind die dielektrischen Verluste im Teflon gegenüber den Verlusten im Leiter klein und werden daher im weiteren Verlauf der Optimierung vernachlässigt ( $R_C = \infty$ ) [51, 50].

**Leiterverluste  $R_L$**  Die gesamten Leiterverluste  $R_L$  setzen sich aus den Verlusten im Spulendraht und in der Abschirmung zusammen. Da beide aus NbTi bestehen sollen, unterliegen sie den im vorhergehenden Abschnitt diskutierten Verlusteffekten. Der Widerstand des Spulendrahtes lässt sich angeben als:

$$R_{Sp} = R_{\square} \frac{Nd_{Sp}}{2r_d}. \quad (5.14)$$

Hierbei ist  $R_{\square} = \text{Re}(i\mu_0\omega\lambda)$  der Oberflächenwiderstand von NbTi mit der komplexen Eindringtiefe  $\lambda$  [48].

Der Schild lässt sich als eine kurzgeschlossene Sekundärwindung eines Transformators auffassen. Mit Hilfe der Transformatorgleichung lässt sich der sekundärseitige Schildwiderstand  $R_S = R_{\square} \frac{\pi d_S}{l_S}$  in den effektiven primärseitigen Widerstand  $R_{S_{eff}}$  umrechnen mit [45, 49]

$$R_{S_{eff}} = R_S \cdot \frac{\omega^2 k^2 L_{Sp} L_S}{(\omega^2 L_S^2 + R_S^2)}, \quad (5.15)$$

wobei  $k$  der Kopplungsfaktor zwischen der Spuleninduktivität  $L_{Sp}$  und der Schildinduktivität  $L_S$  ist. Unter der hier gerechtfertigten Näherung  $\omega L_S \gg R_S$  vereinfacht sich dies zu:

$$R_{S_{eff}} = R_{\square} \frac{\pi d_S}{l_S} \cdot \frac{k^2 L_{Sp}}{L_S}. \quad (5.16)$$

Da das Schild die Spule umgibt, wird es (abgesehen von Randeffekten) vom selben magnetischen Fluss durchdrungen. Deshalb ist  $k \approx 1$ . Mit  $\frac{L_{Sp}}{L_S} = N^2 \frac{d_{Sp}^2}{d_S^2}$  ergibt sich:

$$R_{S_{eff}} = R_{\square} \frac{\pi}{l_S} \cdot \frac{d_{Sp}^2 N^2}{d_S}. \quad (5.17)$$

Zusammen mit dem Widerstand der Spule erhält man hiermit schließlich die gesamten Leiterverluste zu:

$$R_L = R_{Sp} + R_{S_{eff}} = R_{\square} \left[ \frac{Nd_{Sp}}{2r_d} + \frac{\pi}{l_S} \cdot \frac{d_{Sp}^2 N^2}{d_S} \right]. \quad (5.18)$$

Wie man sehen kann, werden die ohmschen Verluste im Leiter fast vollständig durch die Abmessungen des Resonators festgelegt. Unter Vernachlässigung der dielektrischen Verluste in der Isolation geht der Oberflächenwiderstand  $R_{\square}$  von NbTi lediglich als konstanter Vorfaktor ein und ist nicht relevant für die Optimierungsrechnung (vgl. nächster Abschnitt).

**Kapazität  $C_R$**  Jede reale Induktivität ist stets auch mit einer intrinsischen Eigenkapazität behaftet. Bedingt durch den Spannungsabfall entlang der Spulenwicklung treten parasitäre Streukapazitäten zwischen den einzelnen Windungen auf. Verfügt die Spule wie im Falle der Resonatoren auch über eine Abschirmung, so muss zusätzlich die

Kapazität der einzelnen Windungen gegenüber der Abschirmung berücksichtigt werden. Abbildung 5.5 zeigt die vereinfachte Kapazitätsverteilung einer abgeschirmten einlagigen Helix-Spule im Querschnitt. Dabei wird lediglich die Kapazität zwischen direkt benachbarten Windung sowie zwischen den einzelnen Windungen und dem Schild berücksichtigt. Die Kapazitäten zwischen nicht benachbarten Windungen können für ausreichend große Windungsabstände  $\frac{h}{2r_d} \leq 2$  (Abbildung 5.4) gegenüber den Kapazitäten der benachbarten Windungen vernachlässigt werden [52].

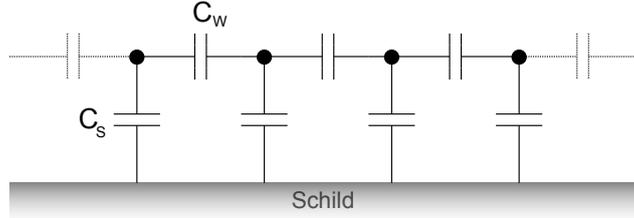


Abbildung 5.5: Vereinfachtes Modell der Streukapazitäten einer abgeschirmten, einlagigen Helix-Spule. Die schwarzen Punkte stellen die einzelnen Spulenwindungen dar. Die Gesamtkapazität setzt sich hier nur aus den direkt benachbarten Windung-Windung-Kapazitäten  $c_W$  und den Windung-Schild-Kapazitäten  $c_S$  zusammen. Für den Fall  $\frac{h}{2r_d} \leq 2$  können die Kapazitäten zwischen nicht benachbarten Windungen vernachlässigt werden.

In [52] wird eine analytische Methode zur Berechnung der Gesamtkapazität einer abgeschirmten Helix-Spule anhand des in Abbildung 5.5 dargestellten Modells vorgestellt. Sie beruht auf einem iterativen Verfahren zum Aufsummieren der einzelnen Streukapazitäten, ist jedoch mit einem nicht unerheblichen Rechenaufwand verbunden. Für den bei uns zutreffenden Grenzfall großer Windungszahlen und kleiner Drahtadien  $r_D$  lässt sich ein alternatives Modell aufstellen, welches in Abbildung 5.6 a) gezeigt ist. Hierzu wird ausgenutzt, dass bei dichter Wicklung des Drahtes die zylindrische Mantelfläche der Helixspule als die innere Elektrode eines Zylinderkondensators angesehen werden kann. Die gesamte Eigenkapazität des Resonators setzt sich in diesem Modell aus der intrinsischen Kapazität einer unabgeschirmten Helix-Spule und der halben Kapazität eines Zylinderkondensators ( $\frac{1}{2}C_{Zyl}$ ) zusammen. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  vor der Kapazität des Zylinderkondensators kommt folgendermaßen zustande: Da die innenliegende Helixspule einseitig am Schild geerdet ist, nimmt die Spannung  $U$  entlang der Spulenwicklung zu und lässt sich angeben durch [53]:

$$U\left(\frac{x}{l_{Sp}}\right) = U_0 \frac{\sinh\left(\alpha\left(1 - \frac{x}{l_{Sp}}\right)\right)}{\sinh(\alpha)}. \quad (5.19)$$

Hierbei ist  $\alpha = l_{Sp} \sqrt{\frac{c_S}{c_W}}$ ,  $U_0$  die Spannung am nichtgeerdeten Spulenende und die Variable  $x$  die Entfernung zum geerdeten Spulenende.

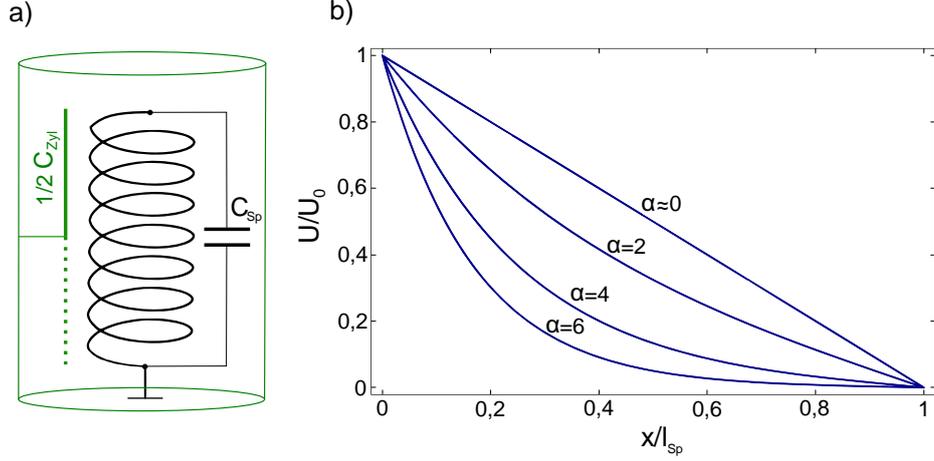


Abbildung 5.6: a) Intuitive Kapazitätsverteilung in einer abgeschirmten Helix-Spule. Die Gesamtkapazität setzt sich hier aus der halben Kapazität eines Zylinderkondensators und der Eigenkapazität der Spule zusammen. b) Normierte Spannungsverteilung entlang einer abgeschirmten, einseitig geerdeten Helix-Spule für unterschiedliche Werte  $\alpha = l_{Sp} \sqrt{\frac{c_S}{c_W}}$ . Für kleine Werte  $\alpha$ , d.h. große Schilde, ist der Verlauf fast linear.

Wie man am zugehörigen Diagramm in Abbildung 5.6 (b) erkennen kann, wird der Spannungsverlauf für kleine Werte  $\alpha$  zunehmend linear. In unserem Fall:  $0 < \alpha < 1$  ist dies in guter Näherung erfüllt.

Da  $C \propto \frac{1}{U}$  entspricht ein linearer Spannungsanstieg entlang der abgeschirmten Spulenwicklung effektiv nur der halben Kapazität eines Zylinderkondensators und damit:

$$\frac{1}{2} C_{Zyl} = \pi \epsilon_0 \frac{l_{Sp}}{\ln\left(\frac{d_S}{d_{Sp}}\right)}. \quad (5.20)$$

Zu dieser muss nun noch die intrinsische Spulenkapazität  $C_{Sp}$  hinzuaddiert werden. Hierfür existiert eine empirische Formel nach Medhurst [54, 55]:

$$C_{Sp} = \left( 0,1126 \frac{l_{Sp}}{d_{Sp}} + 0,08 + 0,27 \sqrt{\frac{d_{Sp}}{l_{Sp}}} \right) d_{Sp}. \quad (5.21)$$

Legt man die Kapazitätsverteilung aus Abbildung 5.6 (a) zugrunde, so erhält man für die gesamte Eigenkapazität des Resonators demnach den Ausdruck:

$$\begin{aligned} C_R &= \frac{1}{2} C_{Zyl} + C_{Sp} \\ &= \pi \epsilon_0 \frac{l_{Sp}}{\ln\left(\frac{d_S}{d_{Sp}}\right)} + \left( 0,1126 \frac{l_{Sp}}{d_{Sp}} + 0,08 + 0,27 \sqrt{\frac{d_{Sp}}{l_{Sp}}} \right) d_{Sp}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Um die Richtigkeit dieses Modells experimentell überprüfen zu können, wurden im Rahmen dieser Arbeit insgesamt vier unterschiedliche Testspulen gewickelt und vermessen. Abbildung 5.7 zeigt einen der Testresonator sowie eine Übersicht der geometrischen Parameter.



	Nr.	1	2	3	4
Testspulen	$d_{Sp}/\text{cm}$	3,578	3,333	2,753	2,233
	$l_{Sp}$	8,15 cm			
	$r_{diso}(isoliert)$	140 $\mu\text{m}$			
	$r_d(blank)$	40 $\mu\text{m}$			
	$N$	285			
Testschild	$l_S$	9,5 cm			
	$d_S$	3,835 cm			

Abbildung 5.7: Das linke Foto zeigt eine der Testspulen mit Abschirmung und Deckel. In der Tabelle rechts sind die geometrischen Parameter der Testspulen und des Schildes zusammengefasst. Beim Vermessen der Testspulen wurde stets der gleiche Schild benutzt. Alle Testspulen sind gleich lang und mit dem gleichen teflonisolierten Kupferdraht auf einen Teflonkern gewickelt. Die Testspulen unterscheiden sich lediglich in ihrem Durchmesser  $d_{Sp}$ .

Da die Eigenkapazität eines Resonators bei den von uns verwendeten Frequenzen kaum vom Leitermaterial abhängt, wurden die Testspulen samt Abschirmung aus Kupfer gefertigt. Im Gegensatz zu teurem NbTi ist mit Kupfer auch das Experimentieren bei Raumtemperatur möglich. Bei der Herstellung der Spulen wurde wie folgt vorgegangen: Nach Messung der Kapazität der größten Spule wurde diese sukzessiv abgewickelt, verkleinert, neu bewickelt und wieder vermessen (usw.). Die Kapazität jeder Spule wurde sowohl ohne als auch mit Abschirmung bestimmt und mit der Theorie (Formeln 5.21 und 5.22) verglichen. Jede Spule wurde bei der gleichen Frequenz von 2 MHz vermessen. In Abbildung 5.8 sind die Ergebnisse dargestellt.

Die Messergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit dem oben aufgestellten Modell aus Abbildung 5.6 (a). Der theoretischen Fehler wurde aus der einfließenden Messgenauigkeit der geometrischen Abmessungen errechnet. Kleine Abweichungen lassen sich vor allem durch parasitäre Kabelkapazitäten sowie herstellungsbedingte Ungenauigkeiten der Spulen- und Schildgeometrie begründen<sup>5</sup>. Die Gesamtkapazität lässt sich in unserem Fall also hinreichend genau mit Gleichung (5.22) abschätzen.

<sup>5</sup>Spulen und Schild wurden eigens von Hand an einer kleinen Drehbank gefertigt. Die hiermit erreichbare Präzision ist nicht mit einer professionellen Herstellung vergleichbar

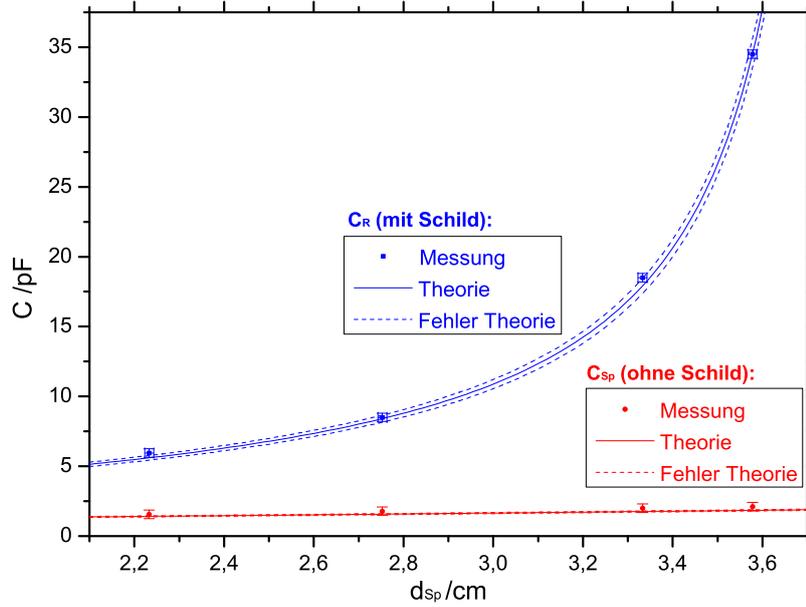


Abbildung 5.8: Vergleich der experimentell bestimmten Kapazitätswerte von abgeschirmten und ungeschirmten Spulen unterschiedlichen Durchmessers mit der Theorie. Die Ergebnisse der abgeschirmten Spulen sind in blau, die der ungeschirmten Spulen in rot dargestellt. Theorie und Experiment stimmen für alle vier Spulen gut überein. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Kapazitätsanteil  $\frac{1}{2}C_{Zyl}$  zwischen Spule und Schild gegenüber der intrinsischen Spulenkapazität  $C_{Sp}$  dominiert und mit kleiner werdendem Abstand zwischen Spule und Schild zunimmt.

**Induktivität  $L$**  Aufgrund der Gegeninduktion im Schild ist die Induktivität einer abgeschirmten Zylinderspule gegenüber einer freien verringert. In [46] erfolgt eine detaillierte theoretische Herleitung der Induktivität einer Helixspule, die von einem unendlich langen, zylindrischen Schild umgeben ist. Für Spulen der Länge  $l_{Sp}$  muss die Länge  $l_S$  einer endlichen Abschirmungen mindestens gegeben sein durch

$$l_S \geq l_{Sp} \cdot \left( 1 + \frac{\frac{d_S}{d_{Sp}} - 0,84}{\frac{2l_{Sp}}{d_{Sp}} - 0,38} \right), \quad (5.23)$$

um Randeffekte auszuschließen und den abschirmenden Effekt eines unendlich langen Schildes anzunähern. Beim Bau der Resonatoren ist es daher wichtig, auf eine ausreichende Überlänge der Schilde zu achten. Ist dies erfüllt, so lässt sich die Induktivität

einer so abgeschirmten Spule angeben durch [46]:

$$L_S = \left( \frac{\pi \mu_0 N^2 \left(\frac{d_{Sp}}{2}\right)^2}{l_{Sp} + 0,9 \left(\frac{d_{Sp}}{2}\right)} \right) \left( 1 - \frac{\frac{2l_{Sp}}{d_S - d_{Sp}} d_{Sp}^2}{\frac{2l_{Sp}}{d_S - d_{Sp}} + 1,55 d_S^2} \right). \quad (5.24)$$

Hierbei ist  $N$  die Windungszahl und  $\mu_0$  die magnetische Feldkonstante. Die erste Klammer der obigen Gleichung stellt die Induktivität einer unabgeschirmten Zylinderspule dar [47]. Die zweite Klammer beschreibt die Abnahme der Induktivität gegenüber einer unabgeschirmten Spule.

Ebenso wie die Formeln für die Eigenkapazität eines abgeschirmten Resonators wurde auch obiger Zusammenhang für die Berechnung der Induktivität experimentell überprüft. Hierfür wurden ebenfalls die Testspulen mit den Abmessungen aus Abbildung 5.7 verwendet. Das Ergebnis der Messung ist in Abbildung 5.9 dargestellt.

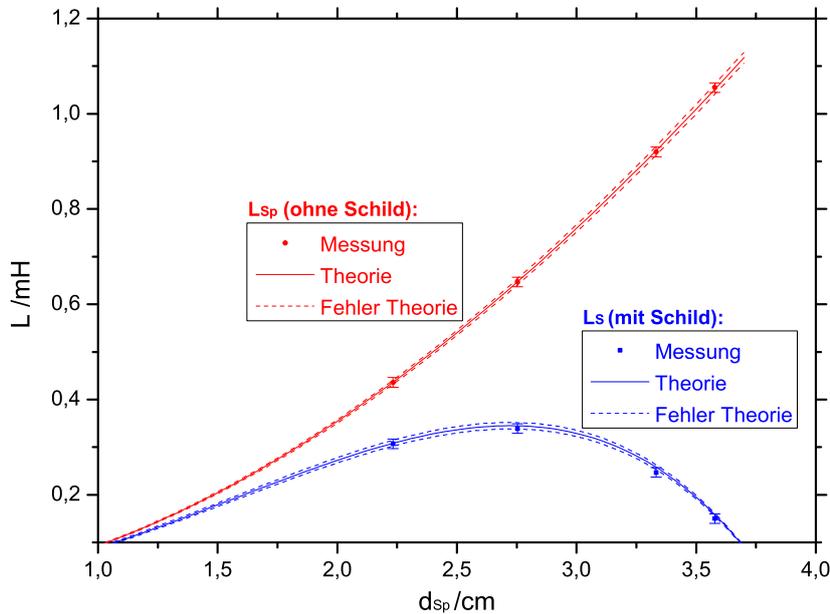


Abbildung 5.9: Vergleich von Theorie und Experiment für die Bestimmung der Induktivitäten von Helix-Spulen unterschiedlichen Durchmessers mit und ohne Schirm. Erneut zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Die Gegeninduktion im Schild führt zu einer deutlichen Verringerung der Induktivität im Vergleich zu einer unabgeschirmten Spule. Mit kleinerem Spulendurchmesser also zunehmendem Abstand zwischen Schildwand und Spule nimmt der Einfluss des Schildes ab. Infolge dessen nimmt die Induktivität der abgeschirmten Spule bis zum Erreichen eines Maximums zu.

Es zeigt sich eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den experimentell bestimmten Werten und den theoretisch vorhergesagten Kurven. Die Fehler der Theorie werden in der Literatur mit ca 3% angegeben. Gleichung (5.24) eignet sich demnach gut für die Berechnung der Induktivität einer abgeschirmten Helix-Spule.

### Optimierungsrechnung

Nachdem die Abhängigkeit der Schwingkreis-Größen  $R_L$ ,  $R_C$ ,  $L$  ( $\triangleq L_S$ ) und  $C_R$  von den geometrischen Parametern des Resonators abgeleitet und im Falle von  $L_S$  und  $C_R$  experimentell überprüft wurde, lässt sich jetzt die eigentliche Optimierungsrechnung zur Maximierung des effektiven Parallelwiderstandes  $R_P$  der axialen supraleitenden Resonatoren für ALPHATRAP durchführen.

$$R_P = \frac{1}{\frac{1}{R_C} + \frac{R_L(C_T+C_R)}{L_S}} \begin{cases} L_S = \left( \frac{\pi\mu_0 N^2 \left(\frac{d_{Sp}}{2}\right)^2}{l_{Sp} + 0,9\left(\frac{d_{Sp}}{2}\right)} \right) \left( 1 - \frac{\frac{2l_{Sp}}{d_S - d_{Sp}} \frac{d_{Sp}^2}{d_S^2}}{\frac{2l_{Sp}}{d_S - d_{Sp}} + 1,55} \right) \\ C_R = \pi\epsilon_0 \frac{l_{Sp}}{\ln\left(\frac{d_S}{d_{Sp}}\right)} + \left( 0,1126 \frac{l_{Sp}}{d_{Sp}} + 0,08 + 0,27\sqrt{\frac{d_{Sp}}{l_{Sp}}} \right) d_{Sp} \\ R_L = R_{\square} \left[ \frac{Nd_{Sp}}{2r_d} + \frac{\pi}{l_S} \cdot \frac{d_{Sp}^2 N^2}{d_S} \right] \\ R_C \approx \infty \end{cases} \quad (5.25)$$

Wie man in obiger Zusammenfassung sehen kann, ist der Parallelwiderstand abhängig von den Parametern:  $C_T$ ,  $R_{\square}$ ,  $N$ ,  $l_S$ ,  $d_S$ ,  $r_d$ ,  $l_{Sp}$ ,  $d_{Sp}$ . Einige dieser Parameter sind durch die Randbedingungen des Experiments vorgegeben:

- **Fallenkapazität  $C_T$ :** Sie ist durch die Fallengeometrie gegeben. Die ALPHATRAP-Fallen waren zum Zeitpunkt der Resonatorplanung noch nicht fertiggestellt. Die Fallenkapazitäten wurden daher aufgrund von Erfahrungswerten aus vergleichbaren Experimenten [60] mit  $\mathbf{C_T} \approx \mathbf{15pF}$  je Falle (inklusive Durchführungen) abgeschätzt.
- **Oberflächenwiderstand  $R_{\square}$ :** Da angenommen wurde, dass  $R_C \approx \infty$ , ist  $R_P = \frac{L_S}{R_L(C_T+C_R)}$ . Daher ist der Oberflächenwiderstand  $R_{\square}$  von NbTi nur ein konstanter geometrieunabhängiger Vorfaktor. Für eine Maximierung von  $R_P$  ist der Betrag von  $R_{\square}$  nicht relevant (bzw. hier gilt  $R_{\square} \equiv 1\Omega$ ).
- **Windungszahl  $N$ :** Die Windungszahl lässt sich bei dichter Wicklung durch den Drahtradius  $r_{diso}$  (mit Isolation) und die Spulenlänge  $l_{Sp}$  ausdrücken:  $\mathbf{N} = \frac{l_{Sp}}{2r_{diso}}$ .
- **Schild-Abmessungen  $l_S$  und  $d_S$ :** Um die negativen Einflüsse der Abschirmung möglichst klein zu halten, sollten Schild-Länge  $l_S$  und Durchmesser  $d_S$  möglichst groß gewählt werden. Bei ALPHATRAP ist für beide Resonatoren jeweils  $\mathbf{d_S} = \mathbf{3,8\text{ cm}}$  und  $\mathbf{l_S} = \mathbf{11\text{ cm}}$ .

Setzt man obige Zusammenhänge für die vorherrschenden Randbedingungen bei ALPHATRAP in Gleichung (5.25) ein, so ergibt sich für den effektiven Parallelwiderstand:

$$R_P \propto \frac{\left( \frac{\pi \mu_0 \left( \frac{l_{Sp}}{2r_{diso}} \right)^2 \left( \frac{d_{Sp}}{2} \right)^2}{l_{Sp} + 0,9 \left( \frac{d_{Sp}}{2} \right)} \right) \left( 1 - \frac{\frac{2l_{Sp}}{0,038m - d_{Sp}} \frac{d_{Sp}^2}{(0,038m)^2}}{\frac{2l_{Sp}}{0,038m - d_{Sp}} + 1,55} \right)}{\left[ \frac{l_{Sp} d_{Sp}}{4r_d \cdot r_{diso}} + \frac{\pi}{0,11m} \cdot \frac{d_{Sp}^2 l_{Sp}^2}{4(r_{diso})^2 \cdot 0,038m} \right] \left( 15pF + \pi \varepsilon_0 \frac{l_{Sp}}{\ln \left( \frac{0,038m}{d_{Sp}} \right)} + \left( 0,1126 \frac{l_{Sp}}{d_{Sp}} + 0,08 + 0,27 \sqrt{\frac{d_{Sp}}{l_{Sp}}} \right) d_{Sp} \right)}.$$

(5.26)

Demnach hängt  $R_P$  nur noch von den Spulen-Abmessungen  $l_{Sp}$  und  $d_{Sp}$  sowie dem metallischen Drahradius  $r_d$  (isoliert:  $r_{diso}$ ) ab. Diese sind freie, vom Experiment nicht festgelegte Parameter<sup>6</sup> und können daher als Variablen für die Optimierung genutzt werden. Abbildung 5.10 zeigt den zu Gleichung (5.26) gehörenden Graphen als 3D- und Kontur-Diagramm. Für die Berechnung der Diagramme wurden die Maße eines verfügbaren teflonisolierten NbTi-Drahtes mit  $r_d = 37,5 \mu m$  und  $r_{diso} = 84,5 \mu m$  zugrunde gelegt. Beim Bau der Resonatoren geht es nicht allein darum einen möglichst hohen Parallelwiderstand zu erreichen. Zusätzlich muss in etwa die jeweils benötigte Resonanzfrequenz getroffen werden. Bei ALPHATRAP sind dies nach Tabelle 1.1 ca. 0,3 MHz für den AT-Resonator und 0,8 MHz für den PT-Resonator. Bei den eingezeichneten roten Kurven auf der Oberfläche der dreidimensionalen Darstellung von  $R_P$  handelt es sich um parametrisierte vektorwertige Funktionen. Sie entsprechen den Projektionen der Funktionen konstanter Frequenz, welche im Kontur-Diagramm durch die Gleichungen

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_s(d_{Sp}, l_{Sp}) \cdot (C_T + C_R(d_{Sp}, l_{Sp}))}} \text{ mit } f = \{0,6 \text{ MHz}, 0,8 \text{ MHz}, 1 \text{ MHz}\}$$

(5.27)

gegeben sind. Hierbei steht  $f$  für die jeweils betrachtete Frequenz. Bei obiger Gleichung handelt es sich um die bekannte Thomson'sche Schwingungsgleichung, bei der  $L$  und  $C$  durch die weiter oben angegebenen Formeln für die Induktivität und Kapazität des Helix-Resonators (in Abhängigkeit der Resonator-Parameter  $d_{Sp}$  und  $l_{Sp}$ ) substituiert wurde. Da die parasitäre Fallenkapazität ( $C_T = 15pF$  inkl. Durchführungen) auch Teil des Schwingkreises ist, muss sie zusätzlich zur Eigenkapazität des Resonators addiert werden. Nach Wahl der benötigten Frequenz lässt sich mit Hilfe von Gleichung (5.26) und (5.27) die eigentliche Optimierung durchführen. Hierfür muss, bei der gewünschten Frequenz, jene Spulen-Abmessungen  $d_{Sp}$  und  $l_{Sp}$  gefunden werden, bei denen  $R_P$  maximal wird. Dies entspricht der Lösung des Extremalproblems der zugehörigen vektorwertigen Funktion. Aufgrund der Komplexität der Funktionen, erfolgt die Berechnung numerisch mit *Mathematica*. Alternativ lassen sich die Extrempunkte auch anhand der Höhenlinien im Konturdiagramm (Abbildung 5.10) ablesen.

<sup>6</sup>Die Spulen-Abmessungen  $l_{Sp}$  und  $d_{Sp}$  sind lediglich durch die Abmessungen des Schildes nach oben begrenzt.

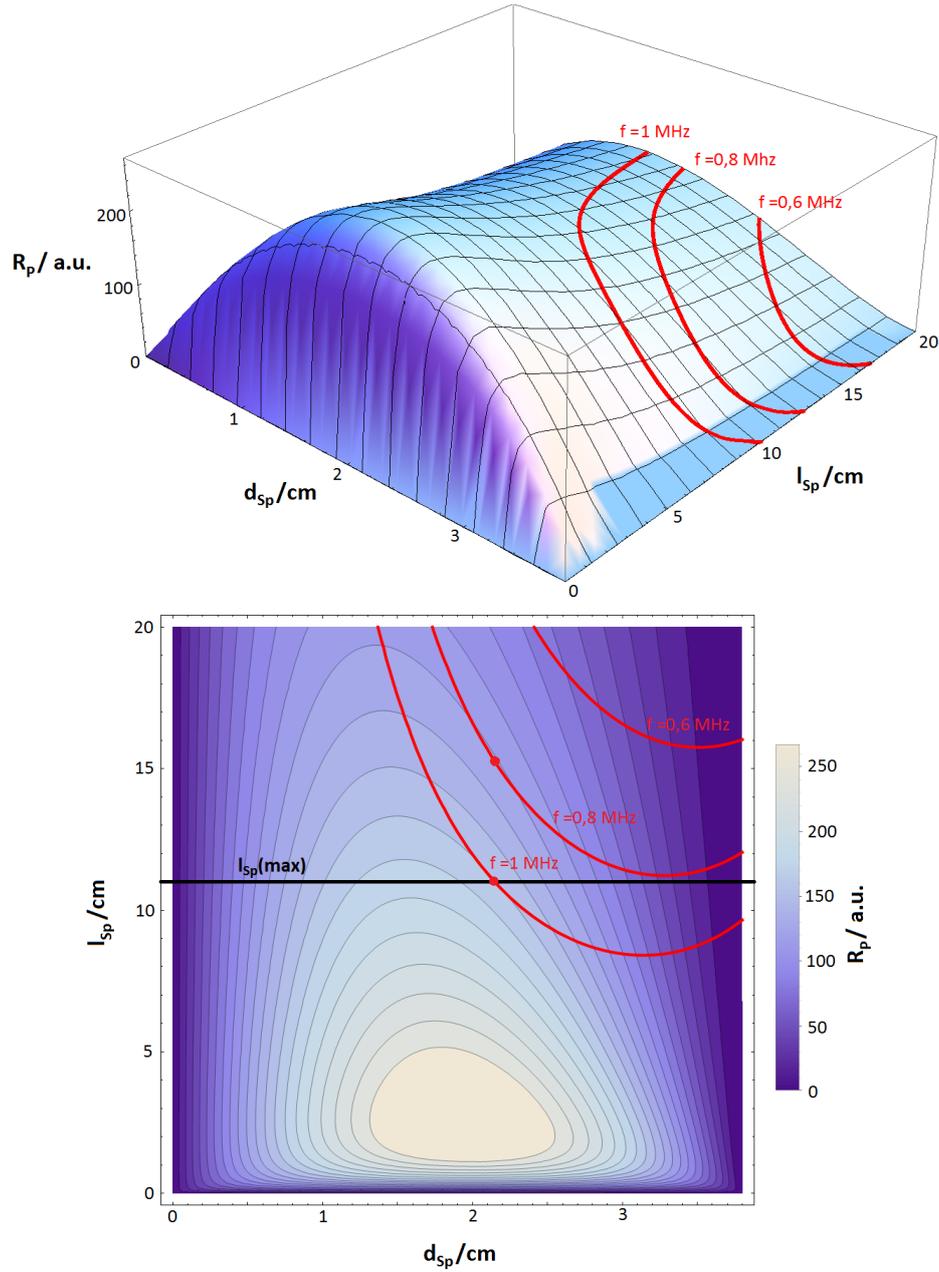


Abbildung 5.10: 3D-Diagramm (oben) und dazugehöriges Konturdiagramm (unten) des nach Gleichung (5.26) berechneten effektiven Parallelwiderstandes eines einlagig gewickelten Resonators (mit Drahtparametern  $r_d = 37,5 \mu\text{m}$  und  $r_{diso} = 84,5 \mu\text{m}$ ). Entlang der roten Kurven ist die Frequenz konstant. Die 800 kHz Kurve steht für die Frequenz des PT-Resonators. Die 300 kHz des AT-Resonators sind außerhalb des darstellbaren Bereichs. Die Maxima der Kurven definieren die optimalen Spulenabmessungen. Sie sind durch rote Punkte gekennzeichnet. Die schwarze Linie im Konturdiagramm gibt die maximal zulässige Spulenlänge vor.

In Abbildung 5.10 sind die Maxima der 1 MHz und 0,8 MHz Kurven mit roten Punkten markiert. Sie legen die optimalen Spulenabmessungen  $l_{sp}^{opt}$  und  $d_{sp}^{opt}$  fest, bei denen der Parallelwiderstand maximal wird. Die schwarze horizontale Gerade im Kontur-Diagramm stellt die obere Grenze für die Spulenlänge bei ALPHATRAP ( $l_{sp}(max) = 11\text{cm}$ ) dar. Die 800 kHz Kurve liegt knapp oberhalb dieser Grenze und somit im „verbotenen Bereich“. Demzufolge ist es nicht möglich (mit dem verfügbaren Draht) einlagige gewickelte Resonatoren mit  $\leq 800$  kHz zu bauen, die alle obigen Randbedingungen erfüllen. Mögliche Auswege sind die Verwendung eines dünneren Drahtes oder eine mehrlagige Wicklung. Zum Zeitpunkt der Resonatorplanung stand nur ein Draht mit dem Gesamtdurchmesser  $2r_{diso} = 169\mu\text{m}$  zur Verfügung (siehe oben). Die Wartezeit auf einen dünneren NbTi-Draht mit Teflon-Isolierung belief sich auf über 3 Monate, da der Draht hierfür extra hergestellt werden musste. Aus diesem Grund wurde zugunsten der mehrlagigen Wicklung mit dem bereits vorhandenen dickeren Draht entschieden. Unter Verwendung einer sogenannten Kammerwicklung (Abbildung 5.11) sind die oben angegebenen Formeln für einlagig gewickelte Resonatoren auch bei mehrlagiger Wicklung hinreichend genau erfüllt [50]. Die Berechnung für eine mehrlagige Kammerwicklung kann durch die Ersetzung  $N \rightarrow xN$  in Gleichung 5.25 vorgenommen werden, wobei  $x$  die Anzahl der Lagen angibt.

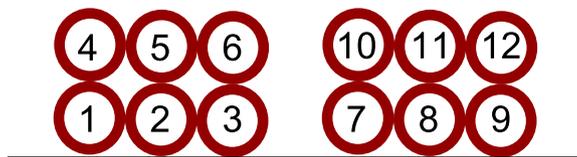


Abbildung 5.11: Wicklungsprinzip einer Kammerwicklung mit zwei Lagen und 6 Windungen pro Kammer. Die einzelnen Kammern sind räumlich voneinander getrennt. Die Kammerwicklung sorgt für ein kleines Potentialgefälle zwischen benachbarten Windungen und trägt auf diese Weise zu einer kleineren Gesamtkapazität bei.

Bei zweilagiger Kammerwicklung ( $N \rightarrow 2N$ ) erhält man das in Abbildung 5.12 a) gezeigte Konturdiagramm. Im Gegensatz zur einlagigen Wicklung (Abbildung 5.10), befindet sich die 800 kHz Kurve nun teilweise unterhalb der schwarzen Linie welche die maximal mögliche Spulenlänge bei ALPHATRAP vorgibt und somit im „erlaubten Bereich“. Bei zweilagiger Wicklung ist der 800 kHz Resonator unter Einhaltung der oben genannten Randbedingungen also auch mit dem vorhandenen Draht realisierbar. Die 300 kHz Kurve des AT Resonators liegt bei zweilagiger Wicklung dagegen immernoch im „verbotenen Bereich“. Insgesamt wäre eine 4-lagige Wicklung notwendig, um die benötigten 300 kHz des AT-Resonators bei der vorgegebenen maximalen Spulenlänge zu erreichen. Dies ist in Abbildung 5.12 b) veranschaulicht. Die optimalen Abmessungen  $l_{sp}^{opt}$  und  $d_{sp}^{opt}$  des PT- sowie AT-Resonators ergeben sich wie zuvor aus dem Extremwert des Parallelwiderstandes entlang der 800 kHz bzw. 300 kHz Kurve. In Abbildung 5.12 sind die optimalen Abmessungen des PT- und AT-Resonators eingezeichnet. Damit ist die rechnerische Optimierung abgeschlossen. Die vollständigen optimierten geometrischen Abmessungen der beiden Resonatoren sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

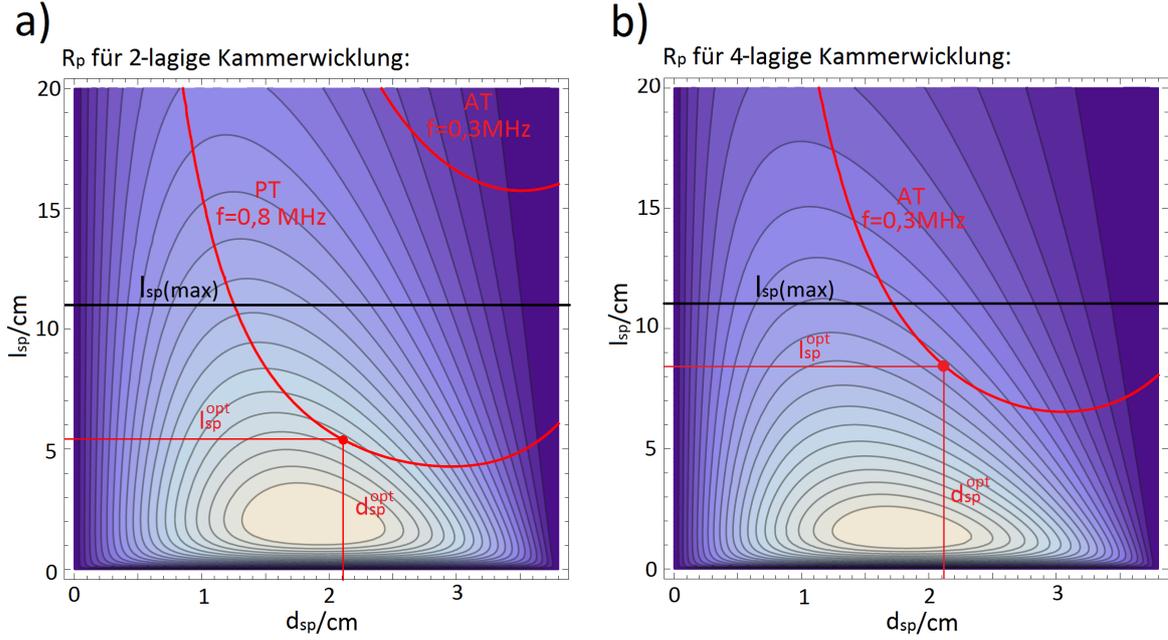


Abbildung 5.12: a) Bei zweilagiger Kammerwicklung ist unter Berücksichtigung der Randbedingungen lediglich der PT-Resonator realisierbar. b) Um die benötigten 300 kHz des AT-Resonators zu erreichen, muss vierlagig gewickelt werden.

	PT-Resonator	AT-Resonator
optimierte Spulenlänge: $l_{sp}^{opt}$ /cm	$\sim 5,5$ (6, 2)	$\sim 8,4$
optimierter Spulendurchmesser: $d_{sp}^{opt}$ /cm	$\sim 2,1$ (2, 0)	$\sim 2,1$
Drahtradius mit Isolation: $r_{diso}$ / $\mu m$	84, 5	
Wicklungsart	Kammerwicklung	
Anzahl an Lagen	2	4
Wicklungszahl $N$	650 (685)	1988
Schildlänge innen: $l_s$ /cm	11	
Schilddurchmesser innen: $d_s$ /cm	3, 8	
Schildlänge außen: $l_s$ /cm	12, 8	
Schilddurchmesser außen: $d_s$ /cm	4	

Tabelle 5.2: Rechnerisch optimierte geometrische Daten des PT- und AT-Resonators. Sie dienen als Grundlage bei der Realisierung der Resonatoren. Beim PT-Resonator geben die Klammerausdrücke die aus praktischen Gründen tatsächlich verwendeten Abmessungen an (siehe nächster Abschnitt). Die äußere Schildlänge sowie der Durchmesser sind durch den im Experiment zur Verfügung stehenden Platz bestimmt (siehe auch Tabelle 5.1).

## 5.4 Realisierung

Unter Berücksichtigung der optimierten Abmessungen aus Tabelle 5.2 wurden die Resonatorgehäuse und Spulenkörper zunächst in einem CAD-Programm erstellt und anschließend zur Herstellung an die Werkstatt weitergegeben. Leider kam es aufgrund eines Problems beim Herstellungsprozess zu zeitlichen Verzögerungen, wodurch lediglich der PT-Resonator rechtzeitig für die vorliegende Arbeit gefertigt werden konnte. Abbildung 5.13 zeigt den fertig gewickelten PT-Resonator sowie die zugehörige technische Skizze. Aus praktischen Gründen musste bei der Herstellung der Wicklung leicht von den optimalen Abmessungen abgewichen werden. Die Klammerausdrücke in Tabelle 5.2 geben die tatsächlich verwendeten Abmessungen an<sup>7</sup>.

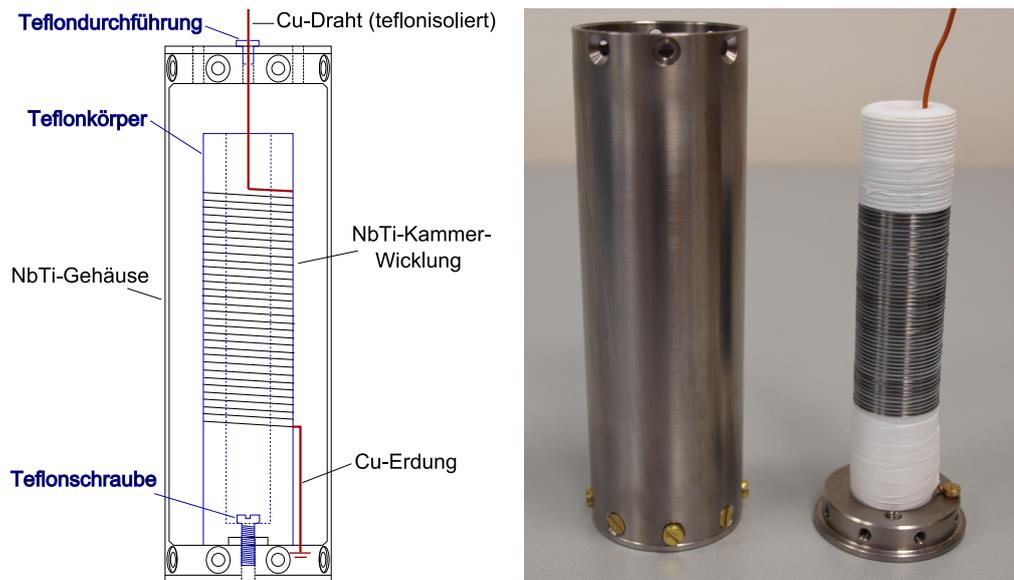


Abbildung 5.13: Technische Skizze und Fotografie des fertigen PT-Resonators. Zur Minimierung dielektrischer Verluste bestehen alle Dielektrika aus Teflon. Im Foto sind die einzelnen Kammern der Kammerwicklung zu erkennen. Die Abmessungen des PT-Resonators sind Tabelle 5.2 zu entnehmen.

Gehäuse und Spulen-Draht bestehen aus NbTi. Beim Abdrehen der Innenseite des Gehäuses wurde auf eine möglichst hohe Oberflächengüte geachtet. Dadurch wird eine Verkleinerung der effektiven Oberfläche und somit eine Reduzierung des Schildwiderstandes erzielt. Um dielektrische Verluste klein zu halten, wurden sämtliche Kunststoffteile aus Teflon gefertigt. Die Spule wurde auf einem Teflon-Spulenkörper von Hand gewickelt. Er ist mit einer Teflonschraube am Gehäuseboden festgeschraubt. Die Spule ist an beiden Enden mit 0,8 mm dicken Teflon-isolierten Kupferdrähten kontaktiert. Sie dienen

<sup>7</sup>Wie man Abbildung 5.12 (a) entnehmen kann, sind die dadurch verursachten Auswirkung auf die Optimierung und die Frequenz minimal. Die Messergebnisse im nächsten Abschnitt bestätigen dies ebenfalls.

der mechanischen Entlastung des feinen supraleitenden Drahtes und sind einfacher in der Handhabung (bessere Löteigenschaften). Das untere Ende der Spule ist mit Hilfe einer Messingschraube am Gehäuseboden geerdet. Das obere Ende (Kupferdraht) dient der Ankopplung und wird durch eine Teflonhülse nach Außen geführt. Um eine möglichst gute thermische Kontaktierung zu gewährleisten, wird die Wicklung vollständig mit Teflonband umwickelt (aus Anschauungsgründen ist im Foto ein Teil der Kammerwicklung sichtbar). Sämtliche Abmessungen sind Tabelle 5.2 zu entnehmen.

## 5.5 Test und Messergebnisse

### 5.5.1 Bestimmung der freien Güte

Da NbTi über eine Sprungtemperatur von  $9,5\text{K}$  verfügt, wurden alle Messungen in einem Pulsröhren-Kühler [56] bei einer Temperatur von  $3,1\text{K}$  durchgeführt. Zunächst wurde die freie Güte sowie die freie Resonanzfrequenz mithilfe eines Netzwerkanalysators (HP4195A) bestimmt. „Frei“ bedeutet in diesem Zusammenhang **ohne** die zusätzliche Parallelkapazität der Falle von  $C_T \approx 15\text{pF}$  (inklusive Durchführungen). Um den Resonator nicht mit dem Ein-/Ausgangswiderstand des Messgerätes zu belasten, wurde er schwach kapazitiv angekoppelt (Abbildung 5.14). Dafür wurde der isolierte Innenleiter des einen Koaxialkabels mit Teflonband an der Resonatorzuleitung fixiert. Das andere Koax-Kabel wurde mit einem Teil der Abschirmung direkt im Resonatorbecher versenkt. Hierdurch sollen systematische Fehler vermieden werden, die durch ein direktes Überkoppeln zwischen den Innenleitern der beiden Koaxialkabel entstehen können (was einer Veränderung der Übertragungsfunktion des Systems entsprechen würde).

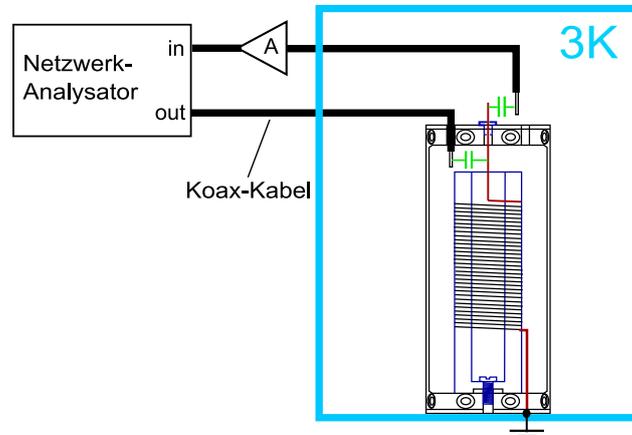


Abbildung 5.14: Messaufbau zur Bestimmung der freien Güte mit dem Netzwerkanalysator. Um die Güte nicht zu reduzieren, wurde bei der kapazitiven Ankopplung des Resonators auf Chip-Kondensatoren verzichtet. Die eingezeichneten grünen Kondensatoren stellen die intrinsischen Koppelkapazitäten zwischen den Leitungen dar.

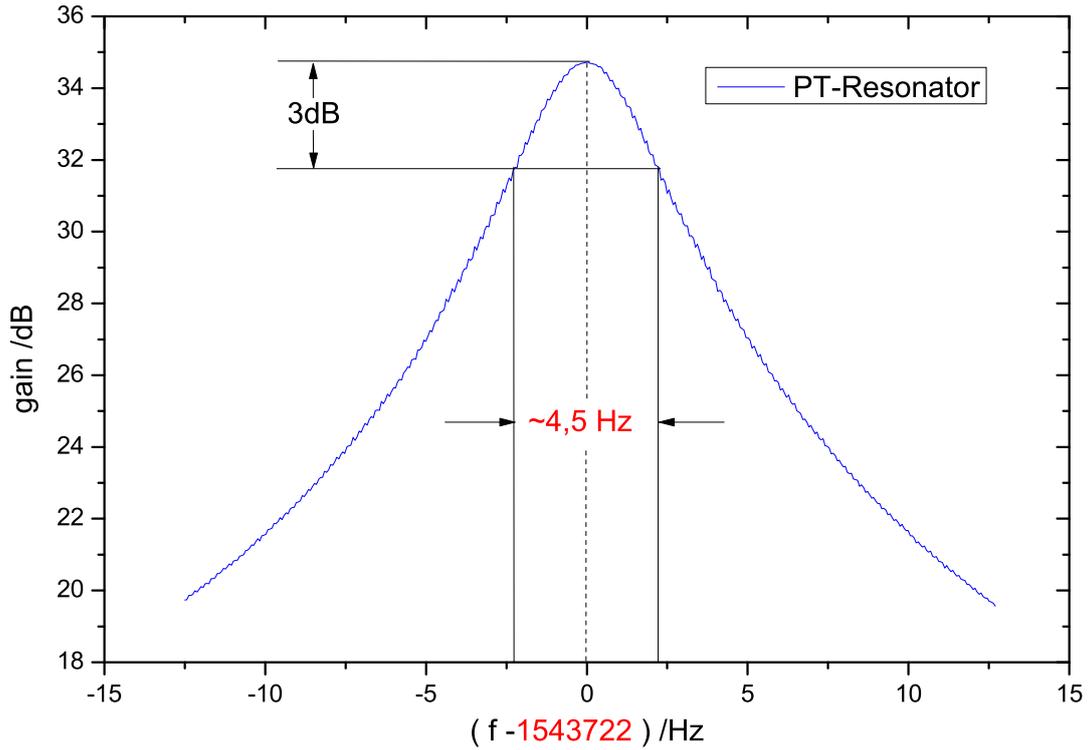


Abbildung 5.15: Resonanzpeak des freien PT-Resonators. Die für die Bestimmung der Güte notwendige Resonanzfrequenz sowie die 3dB-Bandbreite sind rot markiert.

Abbildung 5.15 zeigt die mit dem Netzwerkanalysator aufgenommene Resonanzkurve des PT-Resonators. Wie in Abschnitt 5.1 gezeigt, kann die Güte aus der 3dB-Bandbreite sowie der Resonanzfrequenz bestimmt werden („3dB-Methode“). Man erhält:

$$\mathbf{3dB - Methode:} \quad Q_{frei}^{PT} = \frac{f_0}{\Delta f} \approx 343000 \pm 10000. \quad (5.28)$$

Eine genauere Fehlereinschätzung ist mit dieser Messmethode schwierig, da sich bei einer so hohen Güte bereits kleinste äußere Einflüsse (wie beispielweise Vibrationen oder Temperaturschwankungen des Pulsröhren-Kühlers) in der Resonanzkurve bemerkbar machen. Zudem schwankt die bestimmte Güte stark mit dem Messbereich und der Auflösungsbandbreite des Netzwerkanalysators. Darüber hinaus wurde eine Änderung der Resonanzfrequenz (und somit der Güte) zwischen aufeinanderfolgenden vollständigen Kühl-/Aufwärm-Zyklen von ca. 2 kHz beobachtet<sup>8</sup>, was vor allem auf thermische Kontraktions-/Expansions-Prozesse des Spulenkörpers sowie des Drahtes zurückgeführt werden kann. All diese Faktoren gehen bei der Abschätzung des Fehlers mit ein.

Einen alternativen Zugang zur Bestimmung der Resonatorgüte bietet die Dämpfungs-

<sup>8</sup>Dabei blieb der Messaufbau unverändert.

konstante  $\delta$  des freischwingenden Resonators. Sie ist mit der Resonatorgüte  $Q$  über die Beziehung

$$Q = \frac{\pi f_0}{\delta} \quad (5.29)$$

verknüpft [48]. Für die Messung von  $\delta$  wurde der in Abbildung 5.16 dargestellte Messaufbau verwendet.

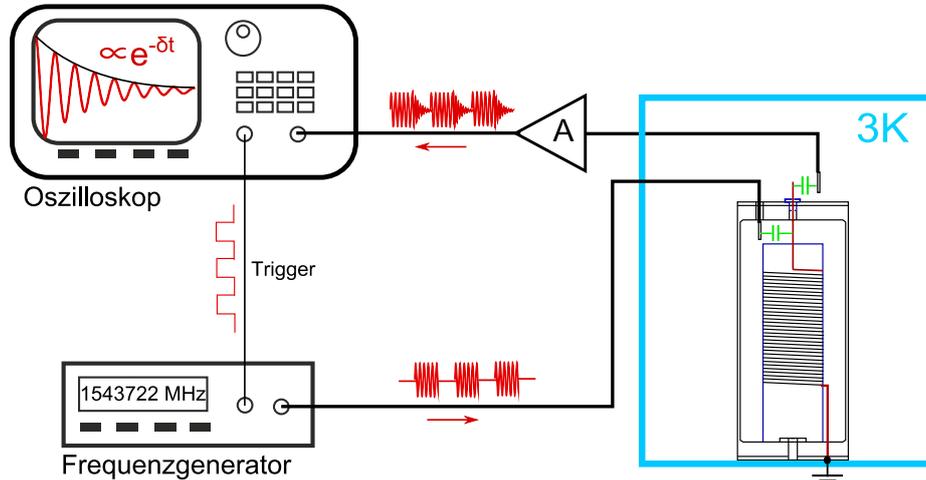


Abbildung 5.16: Messkonfiguration zur Bestimmung der freien Güte aus der Dämpfungs-konstante  $\delta$ . Der Resonator wird mit aufeinanderfolgenden Signal-Bursts auf seiner Resonanzfrequenz angeregt. Die Burst-Folgefrequenz wird als Trigger für das Oszilloskop verwendet. Aus dem exponentiellen Abfall des Resonatorsignals während der Burst-Pausen kann die Dämpfungs-konstante berechnet werden.

Die Ankopplung des Resonators bleibt unverändert. Für die Messung der Dämpfungs-konstante muss dem Resonator zunächst Energie zugeführt werden. Dies geschieht mit Hilfe eines Frequenzgenerators dessen Ausgangssignal auf die zuvor bestimmte Reso-nanzfrequenz von 1543722 Hz eingestellt wird. Nach Abschalten der Anregung kann der exponentielle Abfall der Resonatorschwingung mit einem Oszilloskop beobachtet werden. Für das An- und Abschalten der sinusoidalen Anregung wird der Frequenzgenerator im Burst-Mode betrieben, d.h. das hochfrequente Ausgangssignal wird mit einem niederfre-quenten Rechtecksignal amplitudenmoduliert.

In Abbildung 5.17 ist die Oszilloskop-Aufnahme der gedämpften Sinusschwingung des PT-Resonators dargestellt. Um hieraus die Dämpfungs-konstante zu berechnen wurde die Fit-Funktion

$$A = A_0 \cdot \sin(2\pi f(t - t_c)) \cdot e^{-\delta t} + \text{Offset}$$

gewählt. Gegenüber einem Fit der exponentiell abklingenden Einhüllenden hat obiges Modell den Vorteil neben der Dämpfungs-konstante auch die freie Resonanzfrequenz  $f_0$  aus den Fitparametern bestimmen zu können.

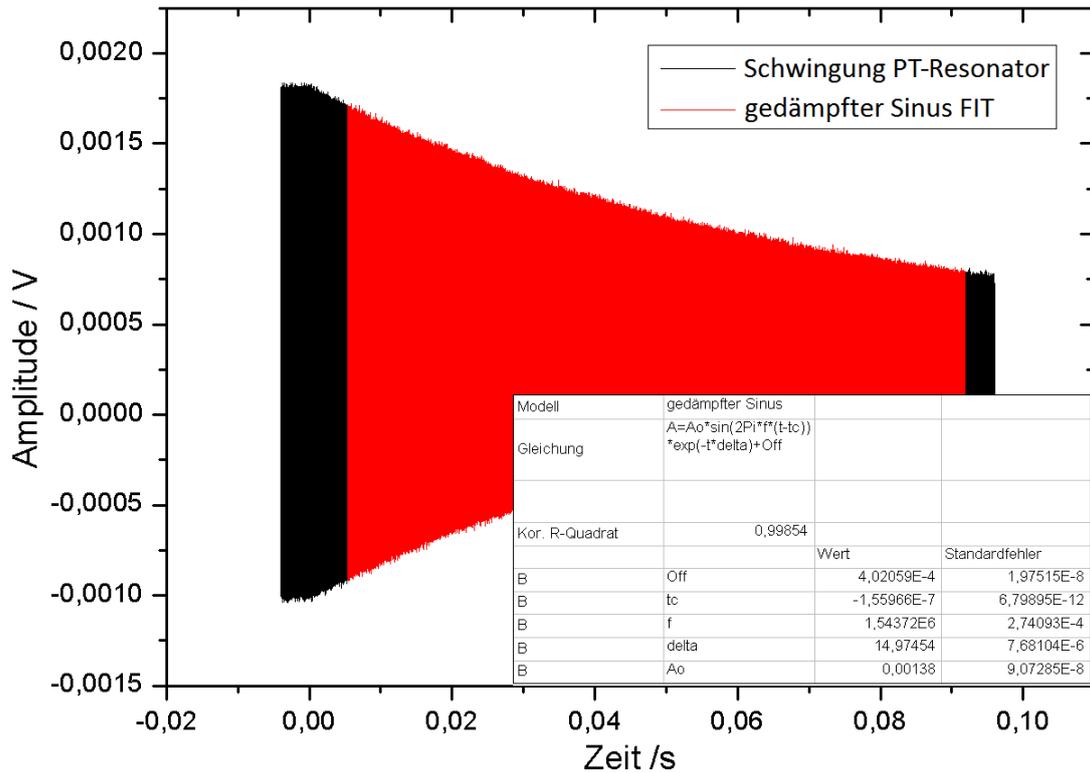


Abbildung 5.17: Fit der exponentiell abfallenden Sinusschwingung des PT-Resonators. Der DC-Anteil von ca. 4 mV wird durch den Parameter „Offset“ im Fit berücksichtigt. Die eigentliche Schwingung kann in dieser Skalierung nicht aufgelöst werden und wird als schwarze bzw. rote Fläche (Fit-Kurve) dargestellt.

Aus den Fitparametern kann mit Hilfe von Gleichung (5.29) die freie Güte und Resonanzfrequenz für diese Methode bestimmt werden:

$$\delta - \text{Methode} : Q_{frei}^{PT} = \pi \frac{1543719 \text{ Hz}}{14,97 \frac{1}{s}} \approx 324000 \pm 5000 \quad (5.30)$$

Der Fehler wurde hierbei nicht aus den Standardfehlern des Fits berechnet, sondern über mehrere Messungen und Fits über unterschiedliche Datensätze abgeschätzt. Die Fehlergrenzen können die Abweichungen der aus den unterschiedlichen Methoden hervorgehenden Resonatorgüten nicht erklären. Dies ist jedoch sehr wahrscheinlich auf eine Unterschätzung der systematischen Ungenauigkeit bei der 3dB-Methode zurückzuführen, die aus dem Funktionsprinzip des Netzwerkanalysators hervorgeht.

### 5.5.2 Bestimmung der Eigenkapazität und Induktivität

Wie bereits zuvor erwähnt, wird die endgültige Resonanzfrequenz des eingebauten PT-Resonators durch die Randbedingungen im Bereich von ca. 800 kHz angesetzt. Da neben der Eigenkapazität des Resonators auch die Fallen- und Durchführungskapazitäten zum Schwingkreis beitragen, wurden letztere bei der Optimierungsrechnung der Resonatoren mit voraussichtliche ca. 15 pF berücksichtigt. Um den effektiven Parallelwiderstand abschätzen zu können und sicherzugehen, dass die benötigte Endfrequenz auch erreicht wird, wurden die Eigenkapazität und Induktivität des Resonators bestimmt. Hierfür wurde ein zusätzlicher Chipkondensator der Firma *Johanson* mit einer Kapazität von  $C_J = (4,8 \pm 0,2)$  pF zwischen dem oberen Spulenende (Kupferdraht) und Gehäuse angelötet. Ansonsten wurde darauf geachtet, so wenig wie möglich an der zuvor gemessenen freien Konfiguration des Resonators (Abbildung 5.14) zu verändern, um keine unbeabsichtigten Kapazitätsabweichungen zu verursachen. Die neue Frequenz wurde mit den beiden zuvor vorgestellten Methoden bestimmt. Tabelle 5.3 zeigt das Ergebnis der Messung.

$f_0$ ohne $C_J$ (freier Resonator)	$f_{C_J}$ mit $C_J$
$(\sim 1544 \pm 2)$ kHz	$(\sim 1108 \pm 2)$ kHz

Tabelle 5.3: Resonanzfrequenzen des Resonator mit und ohne  $C_J = (4,8 \pm 0,2)$  pF.

Die Induktivität und Eigenkapazität des Resonators kann durch Kombination der Schwingungsgleichungen für die beiden gemessenen Frequenzen mit und ohne zusätzliche Kapazität  $C_J$  berechnet werden<sup>9</sup>. In Tabelle 5.4 werden die gemessenen Ergebnisse für die Eigenkapazität und Induktivität des PT-Resonators mit den durch die Gleichungen (5.22) und (5.24) theoretisch vorhergesagten Werten verglichen.

freier PT-Resonator	$L/$ mH	$C/$ pF
Experiment	$\sim 2,08 \pm 0,09$	$\sim 5,1 \pm 0,2$
Theorie	$\sim 2,02 \pm 0,04$	$\sim 3,9 \pm 0,1$

Tabelle 5.4: Vergleich von experimentell und theoretisch (Gleichungen (5.22) und (5.24)) bestimmten Schwingkreisparametern des freien PT- Resonators. Der größere experimentell gemessene Kapazitätswert kann auf die zusätzliche Kapazität der oberen Teflondurchführung in Abbildung 5.13 zurückgeführt werden. Sie wurde bei der theoretischen Berechnung nicht berücksichtigt.

Die Berechnung der in obiger Tabelle angegebenen theoretischen Werte basiert auf den geometrischen Daten aus Tabelle 5.2 (Klammerwerte). Die theoretischen Fehler wurden aus den jeweiligen Messfehlern der geometrischen Daten abgeschätzt. Die experimentellen Fehler folgen aus der Ungenauigkeit von  $C_J = (4,8 \pm 0,2)$  pF sowie den Fehlern der

<sup>9</sup>Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Induktivität nicht von der Frequenz abhängt. In diesem Frequenzbereich ist dies in guter Näherung erfüllt.

gemessenen Frequenzen. Bei letzteren wurde ein Frequenzfehler von 2 kHz (Tabelle 5.3) angenommen, da der Resonator für den Einbau von  $C_J$  aufgewärmt und anschließend wieder heruntergekühlt werden musste, was mit den oben erwähnten thermischen Deformationsprozessen der Spule einhergeht. Wie man sieht, sind die experimentell ermittelten Induktivitätswerte in guter Übereinstimmung mit der Theorie. Bei den Kapazitätswerten gibt es eine Abweichung von ca. 1pF. Dies kann jedoch leicht durch die zusätzliche Kapazität der Teflondurchführung (Abbildung 5.13) des oberen Spulenkontaktes erklärt werden, die bei der Berechnung der theoretischen Eigenkapazität nach Gleichung (5.22) nicht berücksichtigt wurde. Ein weiterer systematischer Fehler ist die zusätzliche Kapazität, die durch die doppelte Wicklung entsteht. Aufgrund der besonders kapazitätsarmen Kammerwicklung ist diese jedoch reduziert.

Mit den experimentell gemessenen Spulenparametern kann die endgültige Frequenz bei angeschlossener Falle berechnet werden:

$$f_{end} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{Exp}(C_{Exp} + 15\text{pF})}} \approx (778 \pm 18) \text{ kHz.}$$

Die Abweichung von den gewünschten 800 kHz ist ebenfalls auf die Kapazität der Teflondurchführung zurückzuführen<sup>10</sup>. Dies ist jedoch nicht von Relevanz, da die endgültige Fallengeometrie zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht feststeht und die dadurch verursachte zusätzliche Kapazität nur abgeschätzt werden kann. Darüber hinaus wurde der Resonator so konstruiert, dass eine einfache Frequenzanpassung bei Bedarf jederzeit möglich ist. Aus den experimentell bestimmten Spulenparametern (Tabelle 5.4) und der freien Güte (Gleichung (5.30)) lässt sich mithilfe von Gleichung (5.8) der freie effektive Parallelwiderstand  $R_{frei}^{PT}$  des PT-Resonators abschätzen:

$$R_{frei}^{PT} = Q\omega_0 L = Q\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 6,54 \text{ G}\Omega.$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass der endgültige Parallelwiderstand des im Detektionssystem integrierten Resonators deutlich reduziert sein wird. Nach Gleichung (5.4) kommen hierbei zwei wesentliche Effekte zum Tragen. Einerseits erfolgt die Verminderung bereits durch die bloße parasitäre Kapazität der weiteren Bestandteile des kryogenen Detektionssystems (Falle, Durchführungen, Kabel...). Andererseits verfügt jede reale Kapazität über dielektrische Verluste die den Resonator zusätzlich belasten (vgl. Abschnitt 5.3). Es ist daher ratsam Dielektrika mit besonders kleinem Verlustwinkel zu verwenden. Aus diesem Grund werden die Isolatoren der ALPHATRAP-Fallen voraussichtlich aus Quarz oder Saphir bestehen<sup>11</sup>. Die Verwendung von Saphirdurchführungen ist bei einer so hohen Güte ebenfalls sinnvoll. Ein weiterer güterreduzierender Faktor ist der kryogene Verstärker. Er wird im nachfolgenden Kapitel behandelt.

<sup>10</sup>Mit dem theoretischen Wert von ca. 4 pF ergibt sich  $f_{end} \approx 801 \text{ kHz}$ .

<sup>11</sup>Quarz hat gegenüber Saphir den Vorteil einer kleineren Dielektrizitätskonstante was zu einer kleineren Fallenkapazität führt.

# 6 Der kryogene Verstärker

## 6.1 Aufgaben des kryogenen Verstärkers

Neben dem Resonator stellt der kryogene Verstärker für den axialen Nachweis eine weitere Kernkomponente des kryogenen Detektionssystems dar. Als letzte Instanz der Signalkette im kryogenen Bereich übernimmt er neben der Signalverstärkung unter anderem folgende wichtige Aufgaben:

- **Reduzierung von parasitären Zuleitungskapazitäten:** Für den störungsarmen Signaltransport zwischen Raumtemperatur- und Kryo-Elektronik kommen Koaxialleitungen mit hoher Eigenkapazität zum Einsatz. Bei direktem Anschluss an den Resonator würde sich diese zur Kapazität des Resonators addieren, was nach Kapitel 5 eine deutliche Reduzierung der Güte mit sich bringt. Dies kann durch Zwischenschalten eines Kryo-Verstärkers mit kleiner Eingangskapazität vermieden werden (Abbildung 6.1).
- **Minimierung des elektronischen Rauschens:** Um das Ionen-Signal nicht zu überdecken und ein hohes SNR zu ermöglichen, müssen Spannungs- sowie Stromrauschen des Verstärkers so klein wie möglich sein (vgl. Kapitel 4). Da das elektronische Verstärkerrauschen mit sinkender Temperatur abnimmt [57], ist es sinnvoll die erste Verstärkerstufe im kryogenen Bereich zu platzieren.
- **Impedanzanpassung /Leistungsverstärkung:** Mit Hilfe des Verstärkers lässt sich der hohe effektive Parallelwiderstand  $R_P$  des Resonators an die  $50\ \Omega$  Impedanz der Signalleitungen angleichen, was effektiv einer Leistungsverstärkung von  $V_P \propto \frac{R_P}{50\ \Omega}$  entspricht.

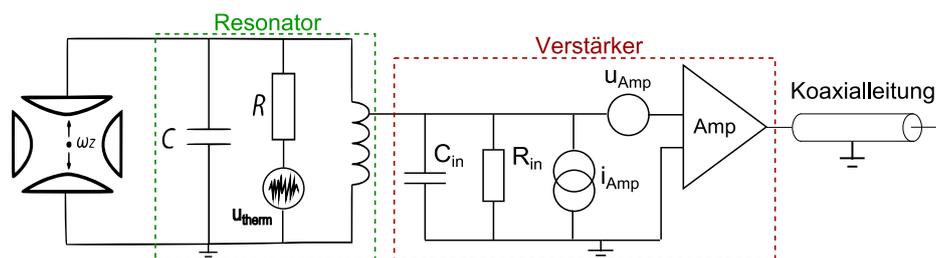


Abbildung 6.1: Ohne Verstärker würde die große Kapazität der Koaxialkabel die Resonatorgüte wesentlich reduzieren. Aus dem gleichen Grund muss beim Verstärker auf eine möglichst große Eingangsimpedanz geachtet werden.

## 6.2 Anforderungen an den kryogenen Verstärker

Die extremen Randbedingungen die in einem Präzisions-Penning-Fallen-Experiment vorherrschen, stellen hohe Anforderungen an das Design des kryogenen Verstärkers:

- **Kryo-Tauglichkeit der Transistoren:** Bei dotierten Halbleiterbauelementen muss für eine korrekte Funktion die Aktivierungsenergie der Donator- bzw. Akzeptorniveaus aufgebracht werden. Sie unterscheidet sich je nach verwendetem Halbleitermaterial und Dotierung. Die Anzahl der noch nicht ionisierten Donatoren/Akzeptoren unterliegt der Fermi-Verteilung und vergrößert sich mit abnehmender Temperatur [58]. Um dem Ausfrieren von Ladungsträgern bei den im Experiment herrschenden Temperaturen von 4,2 K ( $k_B T \approx 0,36$  meV) entgegenzuwirken, müssen Halbleiter mit besonders kleiner Aktivierungsenergie verwendet werden. Mit einer Aktivierungsenergie von 3 meV für Donatoren und 20 meV für Akzeptoren eignet sich hierfür beispielsweise der Verbindungshalbleiter GaAs [59].
- **Minimale Leistungsaufnahme:** Jeder elektrische Verbraucher im kryogenen Bereich bedeutet einen zusätzlichen Wärmeeintrag und damit einen erhöhten Bedarf an flüssigem Helium, welches zur Kühlung des Experiments benötigt wird. Im ALPHATRAP-Experiment wird die gesamte Wärmelast voraussichtlich 50 mW betragen. Die Leistungsaufnahme des Verstärkers sollte daher minimal sein.
- **Große Eingangsimpedanz:** Ein Verstärker verfügt über einen Eingangswiderstand sowie eine Eingangskapazität (Abbildung 6.1). Beide liegen parallel zum Resonator und belasten ihn dadurch zusätzlich. Eine kleine Eingangskapazität und ein großer Eingangswiderstand sind daher wünschenswert.
- **Rauscharme Komponenten:** Neben den passiven Bauelementen (Widerstände, Kondensatoren) sollten vor allem die Transistoren über niedrige Rauscheigenschaften verfügen. Insbesondere sind Feld-Effekt-Transistoren (FET) gegenüber Bipolartransistoren vorzuziehen da letztere über einen Basisstrom gesteuert werden was zu einer Erhöhung des Stromrauschens beiträgt. Ein weiterer Vorteil des FETs ist der sehr große Eingangswiderstand (siehe Punkt 3).

## 6.3 Der ALPHATRAP-Verstärker

Aufgrund des Mangels an kommerziell verfügbaren Lösungen die den obigen Anforderungen an die Verstärkereigenschaften genügen, wurde von Sven Sturm [7], im Rahmen seiner Doktorarbeit für das Mainzer  $g$ -Faktor Experiment mit hochgeladenen Ionen, ein kryogener Verstärker mit einer darauf optimierten Charakteristik entwickelt. Neben diesem Experiment hat sich derselbe Verstärker außerdem in anderen Penning-Fallen-Experimenten wie beispielsweise PENTATRAP [60] erfolgreich bewährt und wurde im Zuge dieser Arbeit im THE-TRAP-Experiment [11] integriert (siehe Abschnitt 6.4). Wegen seiner guten Eigenschaften soll er auch im ALPHATRAP-Experiment verwendet werden. Nachfolgend werden die wesentlichen Eigenschaften des ALPHATRAP-Axial-Verstärkers kurz

## 6 Der kryogene Verstärker

vorge stellt. Allgemeine Grundlagen zur Transistor-Verstärkertechnik finden sich in Standardwerken der Elektronik [61, 62].

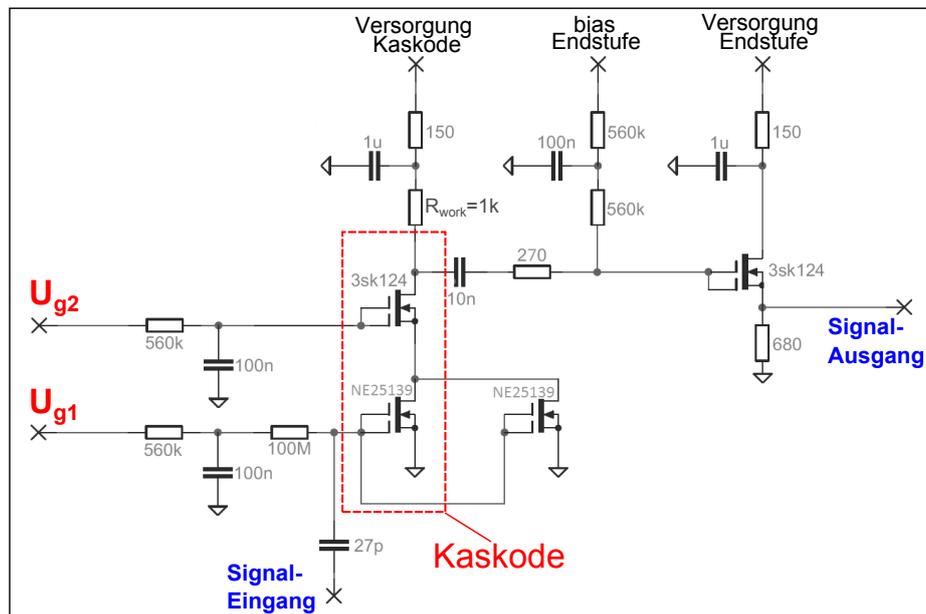


Abbildung 6.2: Der kryogene Verstärker ist vollständig in diskreter Bauweise konstruiert. Bei allen Transistoren handelt es sich um Dual-Gate GaAs-MESFETs vom Typ *NE25139* und *3sk124* deren Gate-Elektroden zur Rauschminimierung kurzgeschlossen wurden (siehe Text).

Tabelle 6.1 zeigt leistungsspezifische Daten des ALPHATRAP-Axial-Verstärkers. In Abbildung 6.2 ist der Schaltplan dargestellt. Der Verstärker ist in eine Eingangs- und eine Endstufe unterteilt. Der Eingang besteht aus einer sogenannten Kaskodenschaltung. Sie dient der Minimierung von parasitären Rückkopplungen des Verstärkers und wird im nachfolgenden Abschnitt genauer betrachtet. Als Endstufe kommt ein Source-Folger zum Einsatz. Damit lässt sich eine Impedanzanpassung des Verstärkerausgangs an die darauffolgenden Signalleitungen vornehmen. Bei allen verwendeten Transistoren handelt es sich um GaAs-MESFETs<sup>1</sup>. Aufgrund der hohen Ladungsträgermobilität in GaAs werden diese Transistoren typischerweise für Hochfrequenzanwendungen optimiert. Sie verfügen beispielsweise über eine geteilte Gate-Elektrode mit der eine interne Kaskodierung zur Reduzierung des parasitären Miller-Effekts vorgenommen werden kann [61]. Bei Frequenzen  $< 10$  MHz und kryogenen Temperaturen wird das Rauschen von GaAs-FETs hauptsächlich durch  $1/f$ -Rauschen (sog. Rosa Rauschen) dominiert, welches mit zunehmender Gate/Kanallänge des Transistors abnimmt [63, 57]. Für tiefe Frequenzen ( $\sim 1$  MHz) wie im Falle der axialen Resonatoren ist es daher sinnvoll beide Gate-Elektroden kurzzuschließen. Hierdurch kann eine effektive Vergrößerung der Kanallänge und damit eine

<sup>1</sup> engl. Metal-Semiconductor-FET

## 6 Der kryogene Verstärker

Reduktion des Verstärkerrauschens erzielt werden. Eine weitere Möglichkeit das Rauschen um den Faktor  $1/\sqrt{N}$  zu verringern, besteht darin  $N$  identische Transistoren am Eingang parallelzuschalten [7]. Man geht hiermit jedoch auch den Kompromiss einer  $N$ -fachen Eingangskapazität ein.

Spannungsrauschen ( $f > 400$ kHz)	$400 \frac{\text{pV}}{\sqrt{\text{Hz}}}$
Stromrauschen	$1 \frac{\text{fA}}{\sqrt{\text{Hz}}}$
Spannungsverstärkung	$\sim 10$ dB
Eingangskapazität	$\sim 4$ pF

Tabelle 6.1: Eigenschaften des ALPHATRAP-Axial-Verstärkers [7]. Der Verstärker zeichnet sich durch ein sehr niedriges Grundrauschen aus.

### 6.3.1 Die Kaskode

Die Kaskodenschaltung ist ein wesentlicher Bestandteil des kryogenen Verstärkers. Ihr Zweck ist es einer parasitären Rückwirkung des Verstärkers auf den Resonator entgegenzuwirken, wodurch ungewollten Veränderung der Resonatorgüte vermieden werden können. Eine solche Rückkopplung lässt sich auf die parasitäre Miller-Kapazität zurückführen. Dabei handelt es sich um eine intrinsische Kapazität zwischen dem Gate (Basis)- und dem Drain (Kollektor)-Anschluss eines realen Transistors. Anschaulich lässt sich die Funktion der Kaskodenschaltung durch einen Vergleich mit einer gewöhnlichen Verstärkerstufe in Source-Schaltung erklären (Abbildung 6.3).

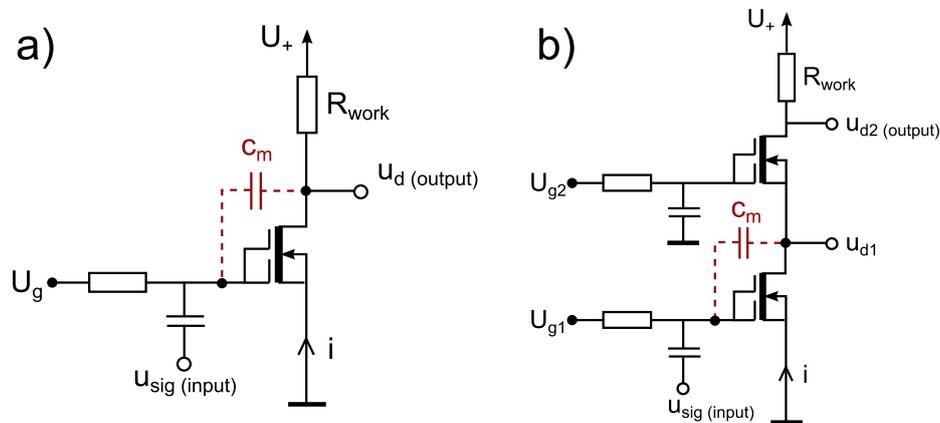


Abbildung 6.3: a) Herkömmliche Source-Schaltung mit eingezeichneter Miller-Kapazität  $c_m$ . Die an  $R_{work}$  abfallende Spannung  $u_d$  koppelt über  $c_m$  zurück auf den Eingang. b) Die Kaskodenschaltung verkleinert die am Drain des unteren Transistors anliegende Spannung  $u_{d1}$  und reduziert auf diese Weise die Stärke der Rückkopplung (Rechnung siehe Text).

## 6 Der kryogene Verstärker

Im Kleinsignal-Modell ist die Ausgangsspannung  $u_d$  der Source-Schaltung (Abbildung 6.3 a) gegeben durch

$$u_d \approx -i \cdot R_{work} = -g_m u_{sig} \cdot R_{work}, \quad (6.1)$$

wobei  $g_m$  der Transkonduktanzparameter des Transistors ist, der vom jeweiligen Arbeitspunkt abhängt. Wie man an obiger Gleichung sieht, ist in diesem Fall die Ausgangsspannung zur Eingangsspannung um  $180^\circ$  phasenverschoben. Das so invertierte Signal wird durch die Miller-Kapazität auf den Eingang zurückgeworfen (negative Rückkopplung), was effektiv einer Verminderung des Eingangswiderstandes und damit der Resonatorgüte entspricht [64]. Im allgemeinen Fall ist die Phasenlage und Stärke des rückgekoppelten Signals von der Art und Größe der Lastimpedanz und der Frequenz abhängig. So kann es bei induktiven Lasten auch zu einer phasengleichen Mitkopplung und einer effektiven Erhöhung der Resonatorgüte bis hin zu Oszillationen kommen (sog. Miller-Effekt-Oszillator) [64].

In der Kaskodenschaltung ist das Gate des oberen Transistors HF-mäßig geerdet. Der Kleinsignalstrom  $i$  ergibt sich zu:

$$i = g_{m1} u_{sig} = -g_{m2} u_{d1}. \quad (6.2)$$

Damit folgt für die Spannung am Drain des unteren Transistors:

$$u_{d1} = -u_{sig} \frac{g_{m1}}{g_{m2}}. \quad (6.3)$$

Im Vergleich zur Source-Schaltung ist die zurückgekoppelte Spannung bei der Kaskode demnach um den Faktor  $\frac{1}{R_{work} g_{m2}}$  reduziert. Für eine Optimierung der Kaskode muss die Transkonduktanz  $g_{m2}$  des oberen Transistors durch geeignete Wahl der Bias-Spannung  $U_{g2}$  maximiert werden. Die Signal-Ausgangsspannung der Kaskode wird (wie bei der Emitterschaltung) durch die Transkonduktanz des ersten Transistors bestimmt:

$$u_{d2} \approx -i \cdot R_{work} = -g_{m1} u_{sig} \cdot R_{work}. \quad (6.4)$$

Die Verstärkung  $A = g_{m1} R_{work}$  kann somit durch Einstellen des Arbeitspunktes mit Hilfe der Bias-Spannung  $U_{g1}$  optimiert werden. Zudem ist nach Gleichung (6.3) und (6.4) ein größerer Rückkopplungseffekt mit zunehmender Verstärkung zu erwarten. Die Funktion des ALPHATRAP-Verstärkers und der Kaskode werden am Beispiel der durchgeführten Testmessungen für das THE-Experiment im folgenden Abschnitt veranschaulicht.

### 6.4 Implementierung des ALPHATRAP-Verstärkers im THE-Experiment

**Motivation** Um den Einbau des neuen Verstärkers in das THE-Experiment zu motivieren, soll im Folgenden kurz auf das THE-Detektionssystem und die damit verbundene Problematik eingegangen werden. Eine ausführliche Beschreibung der Detektionsmethodik findet sich unter anderem in [10, 65].

Der Ionennachweis bei THE-TRAP beruht auf der nicht-destruktiven Spiegelstrom-Detektion (Abschnitt 4.1). Ein wesentliches Merkmal des THE-Messprinzips ist die Frequenzverriegelte Schleife (FLL<sup>2</sup>) [66]. Dabei wird die Axialfrequenz des betrachteten Ions durch eine elektronische Regelung der Fallenspannung (Gleichung (2.6)) und eine Radiofrequenzanregung auf ca. 4 MHz (Sollwert) stabilisiert [65]. Für die Bestimmung der radialen Moden wird deren Kopplung an die Axialfrequenz ausgenutzt. Für die Zyklotronmode ist diese gegeben durch [67]

$$\frac{\Delta\nu_z}{\nu_z} = \left[ \frac{B_2}{B_0 m \omega_z^2} - \frac{1}{2mc^2} - \frac{3C_4}{qV_0} \left( \frac{\nu_z}{\nu_+} \right)^2 \right] E_+, \quad (6.5)$$

wobei  $B_2$  bzw.  $C_4$  die Stärke der jeweiligen Multipolordnung des magnetischen bzw. elektrischen Feldes angeben (vgl. Kapitel 2). Wird die Zyklotronmode mit einem Anregungssignal in der Nähe ihrer Resonanzfrequenz abgetastet, so ergibt sich im Resonanzfall eine Zunahme der Energie, was in einer Verschiebung der Axialfrequenz gemäß Gleichung (6.5) resultiert. Diese Abweichung der Axialfrequenz vom Sollwert wird vom Regelkreis erfasst und durch eine entsprechende Anpassung der Fallenspannung kompensiert. Demnach kann die Zyklotronresonanz anhand einer Messung der angelegten Fallenspannung (die zur Kompensation der Frequenzverschiebung erforderlich ist) in Abhängigkeit der durchgestimmten Anregungsfrequenz aufgenommen werden.

In [11] wurde erstmals von technischen Problemen mit dem Detektionssystem berichtet. Diese äußerten sich darin, dass die kohärente axiale Anregungsamplitude, die für die Stabilisierung der Axialfrequenz und eine erfolgreiche Detektion der radialen Moden benötigt wurde, den theoretisch notwendigen Wert um mehr als das 10-fache übertraf und somit zu einer Reduzierung der Messgenauigkeit aufgrund von systematischen Frequenzverschiebungen führte [11]. Als wahrscheinlichste Ursache hierfür wurde ein Defekt des damals verwendeten kryogenen Verstärkers [65] angenommen. Um dies näher untersuchen und den Fehler eingrenzen zu können, wurde beschlossen das alte Verstärkerkonzept durch den bereits bewährten ALPHATRAP-Verstärker zu ersetzen.

**Charakterisierung des Verstärkers im Experiment** Da der ALPHATRAP-Verstärker ursprünglich für Frequenzen  $< 1$  MHz vorgesehen war, musste zunächst festgestellt werden, ob eine korrekte Funktion auch bei der von THE-Trap verwendeten Axialfrequenz von 4 MHz gewährleistet ist. Insbesondere musste hierbei die Auswirkung des Verstärkers auf den Resonator untersucht werden. Im Gegensatz zu ALPHATRAP wird im THE-Experiment ein normalleitender Kupferresonator verwendet. Mit dem alten Verstärker und bei angeschlossener Falle betrug die ehemalige Resonatorgüte im Experiment ca. 500 [65]. Um das Signal-Rausch-Verhältnis nicht zu beeinträchtigen, sollte dieser Wert auch mit dem neuen Verstärker nicht unterschritten werden. Die Rückwirkung des angeschlossenen Verstärkers auf den Resonator ist nach Abschnitt 6.3.1 unter anderem von der korrekten Einstellung des Arbeitspunktes mit den Gate-Bias-Spannungen  $U_{g1}$  und  $U_{g2}$  abhängig (siehe Abbildung 6.2). Um den optimalen Arbeitspunkt zu finden, wurde die

---

<sup>2</sup>engl. Frequency-Locked Loop

Güte des Resonators für unterschiedliche Gate-Bias-Spannungen gemessen. Hierbei kam der in Abbildung 6.4 skizzierte Messaufbau zum Einsatz. Die Messung wurde (nach Einbau des Verstärkers) direkt im Experiment bei einer Temperatur von 4,2 K durchgeführt. Der Verstärker wurde an der Hälfte der Resonatorspule angekoppelt (‘‘Center-Tap’’ mit Windungsverhältnis  $w = \frac{1}{2}$ ). Im Vergleich zu einer vollständigen Ankopplung ( $w = 1$ ) reduziert dies den effektiven (resonatorseitigen) Eingangswiderstand des Verstärkers um den Faktor  $\frac{1}{4}$  und trägt so zu einer höheren Resonatorgüte bei<sup>3</sup>.

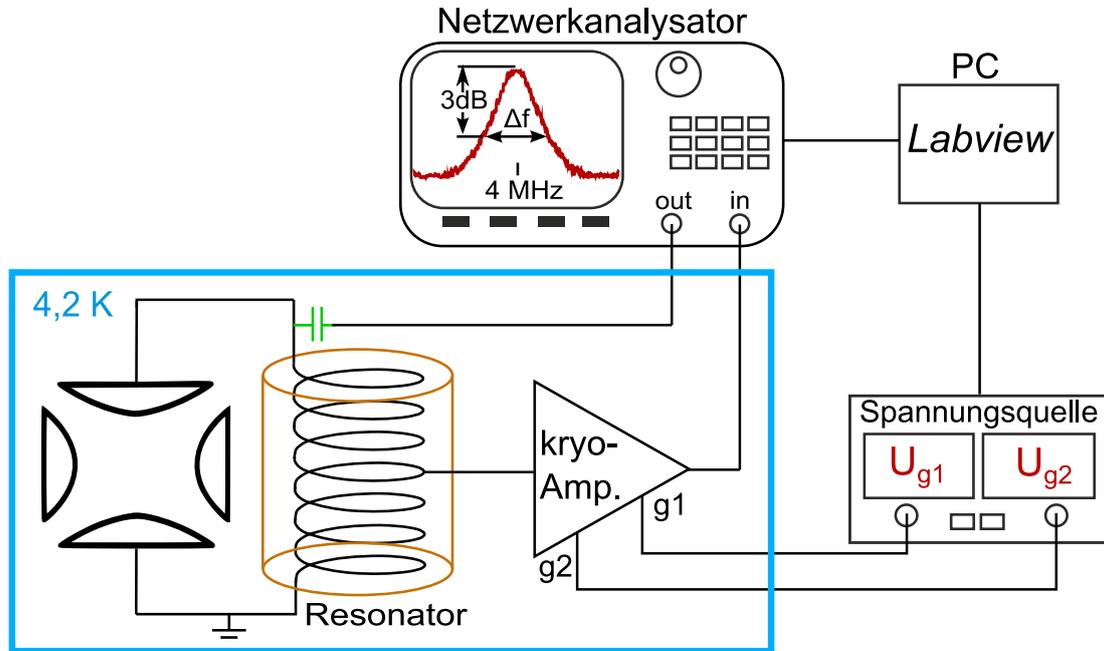


Abbildung 6.4: Schematischer Messaufbau für die Ermittlung des optimalen Arbeitspunktes des im THE-Experiment eingebauten ALPHATRAP-Verstärkers. Der THE-TRAP-Resonator hat inklusive Fallenkapazität eine Resonanzfrequenz von ca. 4 MHz. Um den Resonator nicht zu belasten, wird der Netzwerkanalysator schwach kapazitiv angekoppelt (vgl. Kapitel 5.5.1). Die Güte des Resonators wird für unterschiedliche Gate-Bias-Spannungen  $U_{g1}$  und  $U_{g2}$  aus der 3-dB-Bandbreite der Resonanzkurve ermittelt. Der Messprozess ist vollständig computergesteuert.

Die Resonanzkurve des Resonators wurde mit einem Netzwerkanalysator (*R&S ZVL*) aufgenommen. Die Einstellung der Gate-Spannungen erfolgte mit der Spannungsquelle *BS-10* der Firma *Stahl Electronics*. Um den Messprozess zu automatisieren, wurde mit dem Programm *Labview* eine Messroutine geschrieben, die die Gate-Spannungen sukzessiv einstellte und die jeweilige Resonatorgüte aus der 3-dB-Bandbreite der Resonanzkur-

<sup>3</sup>Eine schwächere Ankopplung war in diesem Fall nicht sinnvoll, da die maximal mögliche Resonatorgüte durch den effektiven Parallelwiderstand des Resonators limitiert wurde. Zudem nimmt das Ausgangssignal proportional zur Ankopplungsstärke (Windungsverhältnis  $w$ ) ab.

ve berechnet. In Abbildung 6.5 ist die gemessene Resonatorgüte in Abhängigkeit der Gate-Bias-Spannungen  $U_{g1}$  und  $U_{g2}$  dargestellt. Abbildung 6.6 zeigt die entsprechende Spannungsverstärkung<sup>4</sup>.

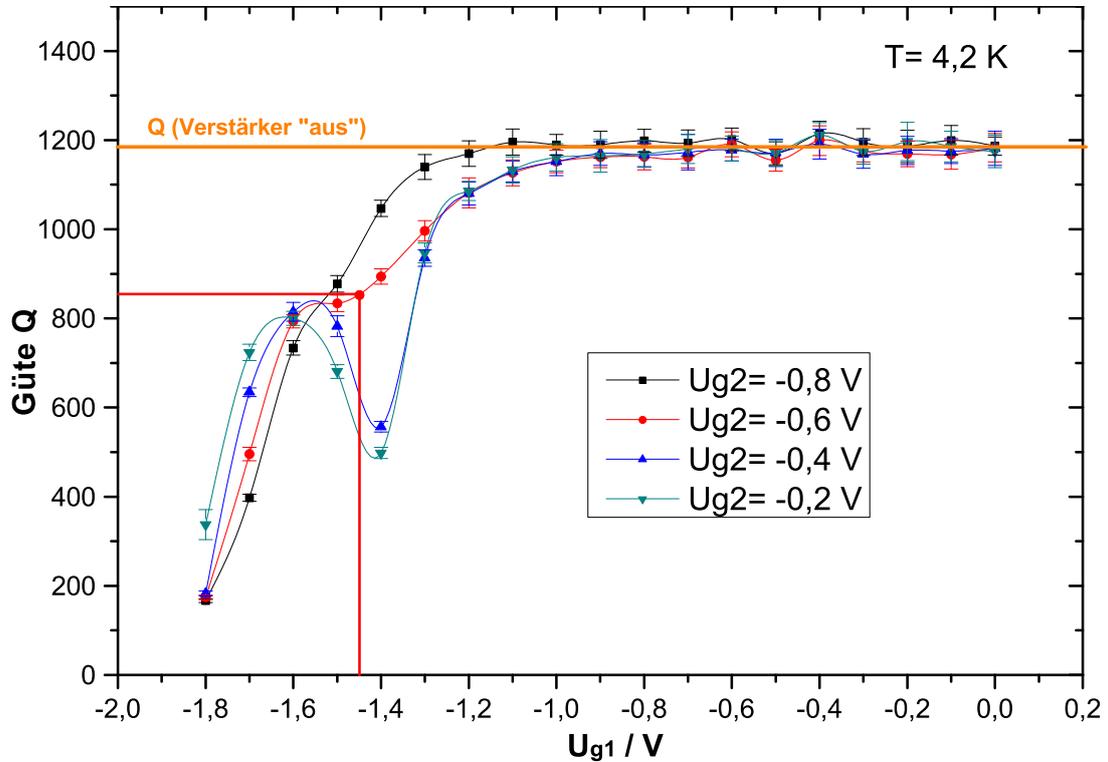


Abbildung 6.5: Messung der Güte in Abhängigkeit der Gate-Bias-Spannungen  $U_{g1}$  und  $U_{g2}$ . Für jede Einstellung wurde über 20 Messungen gemittelt und der zugehörige statistische Fehler bestimmt. Die negative Rückkopplung bei  $U_{g1} \approx -1,4$  V nimmt mit zunehmendem  $|U_{g2}|$  ab. Die roten Linien legen einen möglichen Arbeitspunkt mit  $U_{g1} \approx -1,45$  V,  $U_{g2} \approx -0,6$  V fest. In diesem Arbeitspunkt beträgt die Güte ca. 850 bei einer Spannungsverstärkung von ca. 10 dB (siehe Abbildung 6.6) und ist relativ stabil gegenüber Schwankungen von  $U_{g1}$ . Der steile Abfall der Güte für  $|U_{g1}| > 1,55$  V wird durch die Abhängigkeit des Drain-Source-Widerstandes von  $U_{g1}$  sowie die Millerkapazität verursacht.

<sup>4</sup>Für die Bestimmung der Spannungsverstärkung kam ein ähnlicher Aufbau zum Einsatz wie in Abbildung 6.4 dargestellt. Der einzige Unterschied bestand darin, dass der Verstärker direkt (also ohne Resonator) an den Ausgang des Netzwerkanalysators angeschlossen wurde. Die Verstärkung wurde mit dem Netzwerkanalysator bei der Resonanzfrequenz des Resonators (4 MHz) gemessen. Die Gate-Bias-Spannungen entsprachen jenen bei der Messung der Resonatorgüte.

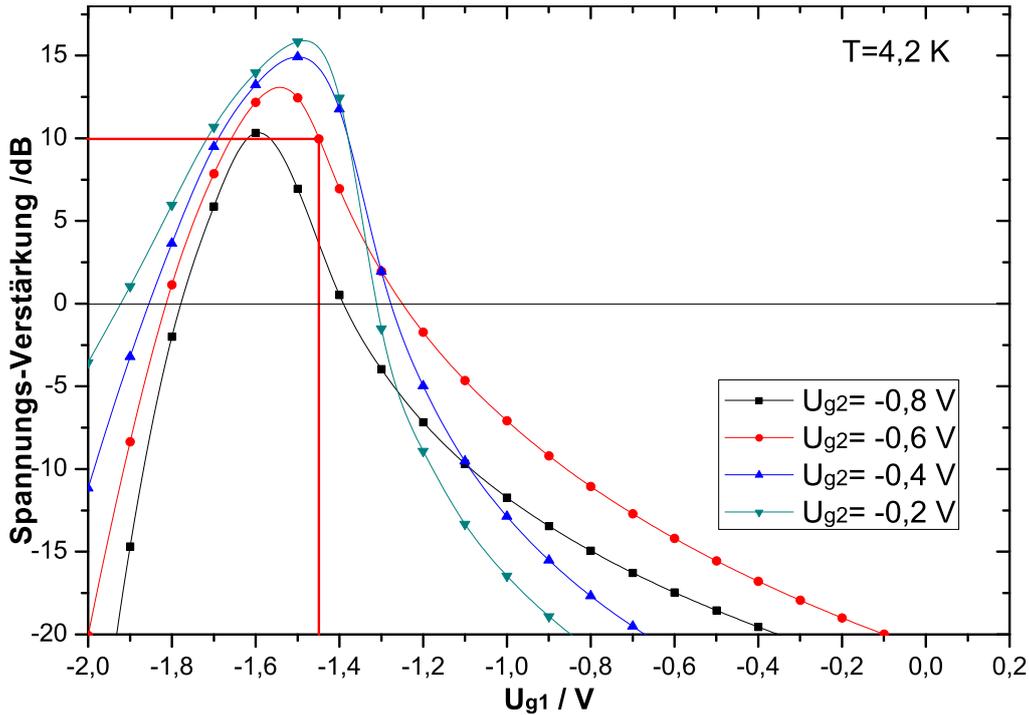


Abbildung 6.6: Messung der Spannungs-Verstärkung in Abhängigkeit der Gate-Bias-Spannungen  $U_{g1}$  und  $U_{g2}$ . Pro Einstellung wurde über 20 Messungen gemittelt. Die statistische Unsicherheit ist sehr klein (hier nicht sichtbar). Die Verstärkung variiert mit  $U_{g2}$ . Dies liegt an der schwachen Abhängigkeit des Drain-Source-Ausgangswiderstand des oberen Kaskoden-Transistors (Abbildung 6.3) von  $U_{g2}$ .

An Abbildung 6.5 ist die in Abschnitt 6.3.1 besprochene Funktionsweise der Kaskode zu erkennen. Für kleine Gate-1-Spannungen ist der Verstärker “ausgeschaltet” und die Güte mit  $Q \approx 1200$  maximal. Nimmt der Betrag von  $U_{g1}$  zu, so vergrößert sich nach Abbildung 6.6 die Verstärkung und die negative Rückkopplung macht sich wie erwartet in einer abnehmenden Resonatorgüte bemerkbar. Bei  $U_{g1} \approx -1,4$  V ist der Rückkopplungseffekt maximal, kann jedoch durch Vergrößern der Bias-Spannung  $|U_{g2}|$  fast vollständig kompensiert werden. Allerdings hat dies nach Abbildung 6.6 eine abnehmende Verstärkung zur Folge. Die Ursache hierfür liegt in der schwachen Abhängigkeit des Drain-Source-Ausgangswiderstands des oberen Kaskoden-Transistors (Abbildung 6.3) von  $U_{g2}$ . Im Sättigungsbereich des Transistors ist dieser für gewöhnlich sehr groß [61]. Er wurde daher bei der Berechnung der Verstärkung in Abschnitt 6.3.1 vernachlässigt. Desweiteren ist ein steiler Abfall der Güte bei  $|U_{g1}| > 1,55$  V für alle gemessenen Gate-2-Spannungen zu beobachten. Hierbei ist zu beachten, dass es sich nicht mehr um eine negative Rückkopplung handelt. Vielmehr ist der Abfall einem dissipativen Effekt zuzuschreiben, der durch die Reihenschaltung aus Millerkapazität und dem mit  $U_{g1}$  abnehmenden Drain-Source-Widerstand des unteren Kaskoden-Transistors entsteht [68].

**Diskussion und aktueller Stand** Die Funktionalität des im THE-Experiments eingebauten ALPHATRAP-Verstärkers wurde für die benötigte Axialfrequenz von 4 MHz bestätigt. Mit der obigen Charakterisierung der Kaskode ist eine korrekte Arbeitspunkteinstellung möglich. Hierdurch lassen sich Rückkopplungseffekte des Verstärkers auf den Resonator und das Teilchen deutlich reduzieren. Ein möglicher Arbeitspunkt für den Betrieb des ALPHATRAP Verstärkers im THE-Experiment ist in den Abbildungen 6.5 und 6.6 eingezeichnet ( $U_{g1} \approx -1,45 \text{ V}$ ,  $U_{g2} \approx -0,6 \text{ V}$ ). In diesem Arbeitspunkt wird bei einer Verstärkung von ca. 10 dB eine Güte von  $\sim 850$  erreicht. Bei einer Verstärkung von 0 dB sind auch Resonatorgüten von  $\sim 1000$  möglich, was einer Verdoppelung der ehemaligen Resonatorgüte und des Signal-Rausch-Verhältnisses entspricht [65]. Mit dem neuen Verstärker ist bereits ein erster Ionennachweis gelungen. Nach [69] ist die für die Detektion notwendige axiale Anregungsamplitude im Vergleich zur vorherigen Konfiguration reduziert. Aufgrund eines anderweitigen Problems mit der Raumtemperaturelektronik ist eine genaue Quantifizierung der Verbesserung zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht möglich. Sobald dieses behoben ist, können entsprechende Messungen erfolgen. Für weitere Ergebnisse wird daher auf [70] verwiesen.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit konnten entscheidende Komponenten der kryogenen Detektionssysteme für die beiden Penning-Fallen-Experimente ALPHATRAP und THE-Trap entwickelt, getestet und charakterisiert werden.

Für das ALPHATRAP-Experiment wurden im Rahmen dieser Arbeit zwei supraleitende Resonatoren mit extrem hoher Güte (bzw. großem effektiven Parallelwiderstand) entwickelt, die für eine erfolgreiche Teilchendetektion und hochpräzise  $g$ -Faktor-Messungen an den schwersten hoch geladenen Ionen elementar sind. Die Herausforderung dabei bestand darin, dass die Resonatoren durch die Randbedingungen des Experiments zum einen bezüglich ihrer maximalen Größe und zum anderen in ihren Resonanzfrequenzen vorbestimmt waren. Beide dieser Einschränkungen stellen zwar eine Limitierung der maximal erreichbaren Resonatorgüte dar, legen die restlichen davon abhängigen geometrischen Parameter/Größenverhältnisse des Resonators jedoch nicht vollständig fest. Zur Maximierung der Güte unter Einhaltung der vorgegebenen Randbedingungen mussten diese „freien“ Parameter daher optimiert werden. In einem ersten Schritt wurde ein theoretisches Verständnis des Resonatorschwingkreises erlangt. Hierzu wurden zunächst die theoretische Abhängigkeit der Schwingkreisgrößen  $R$ ,  $L$  und  $C$  von den geometrischen Resonatorparametern untersucht und anhand von Messungen an selbst gebauten Testresonatoren bei Raumtemperatur experimentell überprüft. Im Rahmen der gegenseitigen Fehler ergab sich hierbei eine sehr gute Übereinstimmung mit den theoretisch vorhergesagten Werten. Dieses Wissen wurde anschließend für die Entwicklung und Durchführung einer geometrischen Optimierungsrechnung zur Maximierung der Resonatorgüte genutzt. Das vielversprechende Endresultat der umfangreichen Planung und Berechnung wurde daraufhin anhand der Charakterisierung am Beispiel eines Resonators (des PT-Resonator) demonstriert. Die Messungen der freien Güte mit zwei unterschiedlichen Methoden ergaben eine untere Grenze<sup>1</sup> von  $Q_{frei}^{PT} \simeq 324000 \pm 5000$  bei einer Resonanzfrequenz von  $f_{frei}^{PT} \simeq (1543 \pm 2)$  kHz. Vergleicht man dieses Ergebnis mit zuvor publizierten Messungen an Resonatoren mit ähnlicher Auslegung, so bedeutet dies eine Verbesserung von ca. einer Größenordnung [50, 45]. In einer weiteren Messung wurden die Schwingkreisparameter  $L$  und  $C$  des Resonators bestimmt. Die experimentell ermittelte Induktivität  $L_{exp}^{PT} \simeq (2,08 \pm 0,09)$  mH ist in sehr guter Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersagen  $L_{theo}^{PT} \simeq (2,02 \pm 0,04)$  mH. Die Abweichung des experimentell bestimmten Kapazitätswertes  $C_{exp}^{PT} \simeq (5,1 \pm 0,2)$   $\mu$ F vom theoretischen erwarteten Wert  $C_{theo}^{PT} \simeq (\sim 3,9 \pm 0,1)$   $\mu$ F konnte durch die parasitäre Kapazität einer Teflondurchführung am Resonator von ca. 1 pF erklärt werden, die bei der theoretischen Berechnung nicht be-

---

<sup>1</sup>Bei einer entsprechenden Elektropolitur des Resonatorgehäuses könnten noch höhere Güte-Werte erreicht werden.

rücksichtigt wurde. Bei angeschlossener Falle und einer voraussichtlichen Fallenkapazität von  $C_T \simeq 15\text{pF}$  (mit Durchführungen) ergeben die so bestimmten Schwingkreisgrößen eine erwartete Endfrequenz von  $f_{end} \simeq (778 \pm 18)\text{ kHz}$ . Die Abweichung von den gewünschten  $800\text{ kHz}$  ist ebenfalls auf die parasitäre Kapazität der Teflondurchführung zurückzuführen. Dies ist jedoch nicht von Relevanz, da die endgültige Fallengeometrie zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht genau feststeht und die dadurch verursachte zusätzliche Kapazität nur abgeschätzt werden kann. Zudem wurde der Resonator so konzipiert, dass eine einfache Frequenzanpassung bei Bedarf jederzeit vorgenommen werden kann. Aus den experimentell ermittelten Schwingkreisgrößen konnte schließlich der effektive Parallelwiderstand des Resonators zu  $R_P^{frei} \simeq 6,54\text{ G}\Omega$  bestimmt werden. Hierbei ist darauf zu achten, dass der endgültige Parallelwiderstand des im Detektionssystem integrierten Resonators aufgrund der Verluste in den restlichen Bestandteilen des Detektionssystems (Falle, Durchführungen, Verstärker) deutlich reduziert sein wird. Der endgültige Parallelwiderstand wird ermittelt, sobald die genau Fallenkapazität und das Material sowie die Kapazität der Durchführungen feststehen. Daraufhin kann die Anpassung des Resonators an den bereits vorhandenen kryogenen ALPHATRAP-Verstärker erfolgen. Das positive Ergebnis des PT-Resonators ist auch in Bezug auf den AT-Resonator vielversprechend, dessen Geometrie mit dem gleichen Optimierungsverfahren (jedoch für eine Frequenz von  $300\text{ kHz}$ ) ermittelt wurde. Sobald der AT-Resonator aus der Fertigung zurück ist, wird er entsprechend zum PT-Resonator gewickelt und charakterisiert.

Parallel zur kryogenen Detektionselektronik werden zur Zeit auch die restlichen Komponenten des ALPHATRAP-Experiments aufgebaut. Der supraleitende Magnet ist bereits vorhanden. Der zur Kühlung des Experiments benötigte Kryostat ist designed und wird demnächst gefertigt. Die für den Teilchentransport notwendige Beamline ist so gut wie fertiggestellt und es erfolgen bereits erste Tests. Bis zum Ende des Jahres soll das Experiment vervollständigt werden. Daraufhin werden erste Abnahmetests der komplettierten Apparatur erfolgen.

Ein weiterer Teil dieser Arbeit konzentrierte sich auf die Implementierung eines neuen kryogenen Verstärkers in das THE-Trap-Experiment. Die Motivation hierfür lag in einem vermuteten Defekt des alten THE-Trap-Verstärkers welcher sich in einer gegenüber dem theoretischen Wert 10-fach höheren axialen Anregungsamplitude äußerte, die für die Detektion benötigt wurde. Aus diesem Grund wurde der alte Verstärker im Rahmen dieser Arbeit durch den bereits getesteten und bewährten ALPHATRAP-Verstärker ersetzt. Die Herausforderung hierbei bestand in der wesentlich höheren Axialfrequenz von  $4\text{ MHz}$  auf der das Detektionsprinzip bei THE-Trap beruht. Dies entspricht mehr als dem vierfachen Wert für den der ALPHATRAP-Verstärker ursprünglich vorgesehen war. Nach der Integration in das THE-Experiments konnte die Funktionalität des ALPHATRAP-Verstärkers für die benötigte Axialfrequenz von  $4\text{ MHz}$  bestätigt werden. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Charakterisierungsmessungen erlauben eine korrekte Arbeitpunkteinstellung des Verstärkers, wodurch dessen Rückwirkung auf den angeschlossenen Resonator wesentlich minimiert werden kann. Hierbei sind Resonatorgüten von  $\sim 1000$  möglich, was einer Verdoppelung der ehemaligen Resonatorgüte und des Signal-Rausch-Verhältnisses gegenüber der alten Konfiguration bedeutet. Mit dem neuen

## *7 Zusammenfassung und Ausblick*

Verstärker wurden bereits erste Ionen detektiert. Die für die Detektion notwendige axiale Anregungsamplitude ist im Vergleich zur vorherigen Konfiguration deutlich reduziert. Eine Quantifizierung der Verbesserung ist aufgrund eines anderweitigen Problems mit der Raumtemperaturelektronik zur Zeit noch nicht möglich. Sobald dieses behoben ist, werden entsprechende Messungen erfolgen.

# Literaturverzeichnis

- [1] Altarelli, G.. "The standard model of particle physics." arXiv preprint hep-ph/0510281 (2005).
- [2] Paul, W. "Electromagnetic traps for charged and neutral particles." (1990): 531-540.
- [3] Dehmelt, H. G., and F. L. Walls. "Bolometric technique for the rf spectroscopy of stored ions." Phys. Rev. Lett 21 (1968): 127-131.
- [4] Blaum, K., Yu N. Novikov, and G. Werth. "Penning traps as a versatile tool for precise experiments in fundamental physics." Contemporary Physics 51 (2010): 149-175.
- [5] Brown, L. S., and G. Gabrielse. "Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a Penning trap." Reviews of Modern Physics 58 (1986): 233.
- [6] Feynman, R. P.. "QED: The strange theory of light and matter." Princeton University Press, (2006)
- [7] Sturm, S.. "The g-factor of the electron bound in  $^{28}\text{Si}^{11+}$ . The most stringent test of bound-state quantum electrodynamics." Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2012).
- [8] Sturm, S., et al. "High-precision measurement of the atomic mass of the electron." Nature 506.7489 (2014): 467-470.
- [9] Shabaev, V. M., et al. "g-Factor of heavy ions: a new access to the fine structure constant." Physical review letters 96.25 (2006): 253002.
- [10] Van Dyck, R. S., et al. "The UW-PTMS: Systematic studies, measurement progress, and future improvements." International Journal of Mass Spectrometry 251 (2006): 231-242.
- [11] Streubel, S., et al. "Towards a more accurate Q value measurement of tritium: status of THe-Trap." Applied Physics B 114 (2014): 137-145.
- [12] Katrin Collaboration. "KATRIN: A next generation tritium beta decay experiment with sub-eV sensitivity for the electron neutrino mass." arXiv preprint hep-ex/0109033 (2001)
- [13] Lobashev, V. M. "The search for the neutrino mass by direct method in the tritium beta-decay and perspectives of study it in the project KATRIN." Nuclear Physics A 719 (2003): C153-C160.

## Literaturverzeichnis

- [14] Brown, L. S., and Gerald Gabrielse. "Precision spectroscopy of a charged particle in an imperfect Penning trap." *Physical Review A* 25 (1982): 2423.
- [15] Earnshaw, S. "On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether." *Trans. Camb. Phil. Soc* 7 (1842): 97-112.
- [16] Tan, J. and G. Gabrielse. "One electron in an orthogonalized cylindrical Penning trap." *Applied physics letters* 55 (1989): 2144-2146.
- [17] Galiana, J. L. Verdú. "Ultrapräzise Messung des elektronischen g-Faktors in wasserstoffähnlichem Sauerstoff." *Doktorarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz* (2003).
- [18] Van Dyck, R. S., D. L. Farnham, and P. B. Schwinberg. "Progress on the  $3\text{H}-3\text{He}$  mass difference using the compensated Penning trap spectrometer." *Physica Scripta* 46 (1992): 257.
- [19] Van Dyck Jr, R. S., et al. "Ultrastable superconducting magnet system for a Penning trap mass spectrometer." *Review of scientific instruments* 70 (1999): 1665-1671.
- [20] Gabrielse, G., et al. "Precision mass spectroscopy of the antiproton and proton using simultaneously trapped particles." *Physical review letters* 82 (1999): 3198.
- [21] Gabrielse, G., and J. Tan. "Self-shielding superconducting solenoid systems." *Journal of Applied Physics* 63 (1988): 5143-5148.
- [22] Wagner, A. "The g-factor of the valence electron bound in lithiumlike silicon  $^{28}\text{Si}^{11+}$ : The most stringent test of relativistic many-electron calculations in a magnetic field." *Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz* (2013).
- [23] Gabrielse, G. "Why is sideband mass spectrometry possible with ions in a Penning trap." *Phys. Rev. Lett* 102 (2009): 172501.
- [24] Van Dyck Jr, R.S., P. B. Schwinberg, and H. G. Dehmelt. "Electron magnetic moment from geonium spectra: Early experiments and background concepts." *Physical Review D* 34 (1986): 722.
- [25] Verdú, J., et al. "Penning trap measurement of the magnetic moment of the antiproton." *Proceedings LEAP05* (2005): 260.
- [26] Häffner, H.. "Präzisionsmessung des magnetischen Moments des Elektrons in wasserstoffähnlichem Kohlenstoff." *Dissertation. GSI* (2000)
- [27] Gräff, G., H. Kalinowsky, and J. Traut. "A direct determination of the proton electron mass ratio." *Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei* 297 (1980): 35-39.
- [28] Comisarow, M. B., and A. G. Marshall. "Fourier transform ion cyclotron resonance spectroscopy." *Chemical physics letters* 25 (1974): 282-283.

## Literaturverzeichnis

- [29] Shockley, W. "Currents to conductors induced by a moving point charge." *Journal of Applied Physics* 9 (2004): 635-636.
- [30] Gabrielse, G., et al. "Thousandfold improvement in the measured antiproton mass." *Physical review letters* 65 (1990): 1317.
- [31] Itano, W. M., et al. "Cooling methods in ion traps." *Physica Scripta Volume T* 59 (1995): 106-120.
- [32] D'Urso, B. R.. "Cooling and self-excitation of a one-electron oscillator." Diss. Harvard University Cambridge, Massachusetts, (2003).
- [33] Wineland, D. J., and H. G. Dehmelt. "Principles of the stored ion calorimeter." *Journal of Applied Physics* 46 (2008): 919-930.
- [34] Jefferts, S. R., et al. "Superconducting resonator and a cryogenic GaAs field-effect transistor amplifier as a single-ion detection system." *Review of scientific instruments* 64 (1993): 737-740.
- [35] Ulmer, S.. "First observation of spin flips with a single proton stored in a cryogenic Penning trap." (2011).
- [36] Motchenbacher, C. D., and J. A. Connelly. "Low-noise electronic system design." New York: Wiley, (1993).
- [37] D'Urso, B., et al. "Single-particle self-excited oscillator." *Physical review letters* 94 (2005): 113002.
- [38] Weißgerber, W. "Elektrotechnik für Ingenieure 2 – Wechselstromtechnik Ortskurven Transformator Mehrphasensysteme, 4. verbesserte Auflage." F. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig und Wiesbaden (1999)
- [39] Terman, F. E.. "Radio engineer's handbook." Mc Graw-Hill (1943)
- [40] Macalpine, W. W., and R. O. Schildknecht. "Coaxial resonators with helical inner conductor." *Proceedings of the IRE* 47 (1959): 2099-2105.
- [41] Feynman, R. P., R. Leighton, and M. Sands. "Vorlesungen über Physik, Band II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie, Auflage 3" Oldenbourg (2001)
- [42] Shapira, Y., and L. J. Neuringer. "Upper critical fields of Nb-Ti alloys: evidence for the influence of Pauli paramagnetism." *Physical Review* 140 (1965): A1638.
- [43] Kunchur, M. N., and S. J. Poon. "Critical fields and critical currents of superconducting disks in transverse magnetic fields." *Physical Review B* 43 (1991): 2916.
- [44] Hunklinger, S. und C. Enss. "Tiefemperaturphysik." Universität Heidelberg, Notizen zur Vorlesung (2008): 1997.

## Literaturverzeichnis

- [45] Ulmer, S., et al. "The quality factor of a superconducting rf resonator in a magnetic field." *Review of Scientific Instruments* 80 (2009): 123302.
- [46] Bogle, A. G. "The effective inductance and resistance of screened coils." *Wireless Section, Institution of Electrical Engineers-Proceedings of the* 15 (1940): 221-238.
- [47] Wheeler, H. A. "Simple inductance formulas for radio coils." *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 16 (1928): 1398-1400.
- [48] Jackson, J. D. "Classical Electrodynamics." 3rd Edition, *Wiley-VCH* (1998).
- [49] Lange, K. and K. H. Löcherer. "Taschenbuch der Hochfrequenztechnik." Eds. Hans Heinrich Meinke, and Friedrich Wilhelm Gundlach. Vol. 3. Berlin: Springer (1962)
- [50] Kracke, H.. "Entwicklung der kryogenen Nachweis-Elektronik zur Bestimmung der axialen Frequenz des Protons in einer Penning-Falle." Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2007)
- [51] Ulmer, S.. "Entwicklung eines experimentellen Aufbaus zur Messung des g-Faktors des Protons in einer Penning-Falle." Diplomarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz (2006)
- [52] Grandi, G., et al. "Stray capacitances of single-layer solenoid air-core inductors." *Industry Applications, IEEE Transactions on* 35 (1999): 1162-1168.
- [53] Kostenko, M. and L. Piotrovsky, "Electrical Machines", vol. 1. Moscow, U.S.S.R.: Mir (1968)
- [54] Medhurst, R. G. "HF resistance and self-capacitance of single-layer solenoids." *ENGINEER* (1947)
- [55] Lorenz, W. "Dimensionierung einlagiger Zylinderluftspulen mit optimaler Güte." *Frequenz* 24 (1970): 20-26.
- [56] Radebaugh, R. "A review of pulse tube refrigeration." *Advances in Cryogenic Engineering. Proceedings of the 1989 Cryogenic Engineering Conference.* Vol. 35 (1990)
- [57] Motchenbacher, C. D., and J. A. Connelly. "Low-noise electronic system design." New York: Wiley (1993)
- [58] Hunklinger, S. "Festkörperphysik" Oldenbourg Verlag (2007)
- [59] Lengeler, B. "Semiconductor devices suitable for use in cryogenic environments." *Cryogenics* 14 (1974): 439-447.
- [60] Repp, J., et al. "PENTATRAP: a novel cryogenic multi-Penning-trap experiment for high-precision mass measurements on highly charged ions." *Applied Physics B* 107 (2012): 983-996.

## *Literaturverzeichnis*

- [61] Schenk, C. und U. Tietze. "Halbleiter-Schaltungstechnik." Springer Verlag (1993)
- [62] Horowitz, P., W. Hill, and T. C. Hayes. "The art of electronics." Cambridge: Cambridge university press (1989)
- [63] Lundberg, K. H. "Noise sources in bulk CMOS." Unpublished paper (2002): 3.
- [64] Miller, J. M.. "Dependence of the input impedance of a three-electrode vacuum tube upon the load in the plate circuit." Vol. 351. Govt. Print. Off. (1919)
- [65] Pinegar, D. B.. "Tools for a precise tritium to helium-3 mass comparison." (2007)
- [66] Gottlieb, I.. "Practical oscillator handbook." Elsevier (1997)
- [67] Farnham, D. L., R. S. Van Dyck Jr, and P. B. Schwinberg. "Determination of the electron's atomic mass and the proton/electron mass ratio via Penning trap mass spectroscopy." *Physical Review Letters* 75(1995): 3598.
- [68] Ulmer, S.. "First observation of spin flips with a single proton stored in a cryogenic Penning trap.", Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg (2011)
- [69] Private Communication, Martin Höcker (2014).
- [70] Höcker, M., Dissertation in Vorbereitung, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg (2015)

**Erklärung:**

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 16.07.2014

---