Nr. 81

Materialien aus der Bildungsforschung

Max-Planck-Institut für Bildungsforschung
Max Planck Institute for Human Development

Nr. 81
Materialien aus der Bildungsforschung

Alexander Jordan, Nathalie Ross, Stefan Krauss, Jürgen Baumert, Werner Blum, Michael Neubrand, Katrin Löwen, Martin Brunner, Mareike Kunter

Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt

Berlin 2006

Max-Planck-Institut für Bildungsforschung
Max Planck Institute for Human Development

Materialien aus der Bildungsforschung

Bestellungen werden erbeten an die Institutsadresse.
Der vorliegende Band 81 der Reihe kostet € 12 Selbstkostenpreis, einschließlich 7% MwSt., zuzüglich Versandpauschale.

GW ISSN 0173-3842
ISBN 3-87985-096-8

Inhaltverzeichnis

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist im Rahmen des DFG-Projekts „Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz“ (kurz: COACTIV) entstanden. Gegenstand der Arbeit ist ein Klassifikationsschema zur Analyse von Mathematikaufgaben. Mathematiklehrerinnen und -lehrer, deren Klassen an den PISA-Erhebungen 2003 und 2004 teilnahmen, waren gebeten worden, Klassenarbeiten und Hausaufgaben aus diesen Jahrgängen (9. und 10. Klassen) sowie ausgewählte Unterrichtsaufgaben aus dem Schuljahr 2003/04 (10. Klassen) zur Verfügung zu stellen. Ziel war die Rekonstruktion des zugehörigen Unterrichts im Hinblick auf sein mathematisches und kognitives Potenzial.

Aufgrund der Fülle an Daten wurde die Kategorisierung der eingesammelten Aufgaben (etwa 45.000) von geschulten Codiererinnen und Codierern vorgenommen. Anliegen des vorliegenden Klassifikationsschemas ist es, die einzelnen Analysekategorien und ihre jeweiligen Ausprägungen in ihrer theoretischen Verankerung zu beschreiben und anhand von Beispielen zu operationalisieren. Nach einer sorgfältigen Reliabilitätsprüfung jeder einzelnen Kategorie und einer Schulung diente dieses Schema den Codiererinnen und Codierern als Entscheidungsgrundlage im Ratingprozess der oben angeführten Untersuchung.

Zur Entwicklung des Klassifikationsschemas war es zunächst erforderlich, die einschlägige fachdidaktische und pädagogisch-psychologische Fachliteratur zu sichten, daraus relevante Beurteilungsdimensionen (Kategorien) auszuwählen und für die Belange dieses Projekts weiterzuentwickeln. In diesem Zusammenhang sei insbesondere auch auf die von Neubrand (2002) geleistete Vorarbeit verwiesen, die im Rahmen des TIMSS-Videoprojekts entstanden ist (Baumert u.a., 1997). Daneben waren die Arbeiten von Enright und Sheehan (2002), Knoll (2003), Neubrand, Klieme, Lüdtke und Neubrand (2002), Renkl (1991), Williams (2000, 2002) sowie Williams und Clarke (1997) besonders hilfreich. Die Klassifikationen stehen auch in vielfältigen Zusammenhängen zu den Analysen der Deutschen PISA-Expertengruppe Mathematik (Neubrand, 2004). Unter anderem wurde ein von dieser Gruppe entwickeltes Schema benutzt, mit dem die Anforderungen der nationalen Aufgaben aus PISA 2003 bestimmt wurden.

Das vorliegende Buch stellt das Kategorienschema vollständig dar, darüber hinaus werden Informationen zum theoretischen Hintergrund und zur praktischen Umsetzung im Rahmen von COACTIV geliefert. TEIL I umfasst eine Einführung in das COACIV-Project und die Durchführung des Aufgabenratings. Um einen Einblick in die theoretischen Grundlagen zu geben, die zur Entwicklung des Schemas geführt haben, wird in den ersten beiden Kapiteln zunächst das Anliegen der COACTIV-Studie vorgestellt und die zentrale Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht erläutert. In Kapitel 3 wird die Durchführung der Kategorisierung in COACTIV in Grundzügen dargestellt. Das Kategorienschema selbst wird in TEIL II dargestellt. Detaillierte Informationen zur Beurteilerübereinstimmung in den einzelnen Kategorien sind im Anhang zu finden.

Mit dem vorliegenden Klassifikationsschema möchten wir nicht nur eines der Instrumente offen legen, mit dem wir im Projekt COACTIV arbeiten, sondern auch einen Beitrag leisten zur Weiterentwicklung einer fachnahen Theorie der Analyse und Konstruktion von Mathematikaufgaben. Wir hoffen, dass unser Schema auch über COACTIV hinaus genutzt werden kann, und sind für alle Arten von Rückmeldungen dankbar.

Alexander Jordan, Natalie Ross, Stefan Krauss, Jürgen Baumert, Werner Blum, Michael Neubrand, Katrin Löwen, Martin Brunner und Mareike Kunter

TEIL I

1 Einleitung: Aufgaben im Rahmen des Projekts „Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz“ (COACTIV)[1]

Anliegen des Projekts COACTIV ist es, die Bedeutung der professionellen Kompetenz von Lehrkräften für ihren Fachunterricht zu untersuchen. Exemplarisch für den Bereich des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I wird der Zusammenhang zwischen fachlichem Wissen, fachdidaktischem Wissen und Überzeugungen bzw. Motivation von Mathematiklehrkräften analysiert. Weiterhin wird untersucht, auf welche Art sich diese Aspekte der Lehrerkompetenz in der Gestaltung des Mathematikunterrichts niederschlagen und welchen Einfluss die Kompetenz der Lehrkräfte auf das Mathematiklernen ihrer Schülerinnen und Schüler hat.

Im Rahmen des COACTIV-Projekts spielen mathematische Aufgaben eine wichtige Mediatorrolle. Sie sind ein Bindeglied zwischen den normativen Lehrplanbindungen und dem professionellen Handeln von Lehrkräften einerseits und den individuellen Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern andererseits. Sie strukturieren die Lerngelegenheiten auf der Ebene des mathematischen Arbeitens vor, die dann im Unterrichtsdiskurs konkretisiert und ausgestaltet werden. Somit bilden sie einen Rahmen für die Mikrogenese von Lernprozessen (siehe Abb. 1).

Je nach ihrer Stellung im Unterrichtsgeschehen haben Aufgaben spezifische Funktionen. Bei der *Erarbeitung eines neuen mathematischen Sachverhalts* definieren sie das Feld und führen die Fragestellung vor. Während einer *Stillarbeits- oder Gruppenarbeitsphase* entscheiden sie, in welcher Variationsbreite und konzeptuellen Tiefe neue Stoffe durchgearbeitet und konsolidiert werden. Als *Hausaufgaben* dienen sie in der Regel der Festigung, auch wenn sie gelegentlich die Grenzen des Erarbeitetens und neue Herausforderungen signalisieren können. In einer *Klausur* schließlich beschreiben Aufgaben summativ den Kern einer Unterrichtseinheit und normieren letztlich den mathematischen Anspruch, den eine Lehrkraft verbindlich durchsetzen will.

Immer aber – gleichgültig welche Funktion Aufgaben erfüllen – definieren sie die Grundstruktur potenzieller Lerngelegenheiten. Neubrand (2002) hat anhand videographierter Stillarbeitsphasen zeigen können, dass sich auf der Grundlage der ausgewählten Aufgaben makrostrukturelle Muster der Lerngelegenheiten identifizieren lassen. Diese Muster sind insbesondere im interkulturellen Vergleich unübersehbar. Mit der Auswahl von Aufgaben ist allerdings nicht das letzte Wort über Lerngelegenheiten gefallen. Bauersfeld (1985), Voigt (1984) oder Klieme (2001) haben anhand der Analyse von Einzelfällen vorgeführt, wie im diskursiven Umgang mit Aufgaben mathematisches Potenzial fruchtbar gemacht oder verspielt wird. Knoll (2003) wiederum konnte anhand einer großen Videostichprobe Standardformen des mehr oder minder produktiven Umgangs mit Aufgaben während der Erarbeitung eines neuen Sachverhalts klassifizieren, die sich ebenfalls von Kultur zu Kultur unterscheiden. In allen Fällen aber bilden die Aufgaben den Kern des mathematischen Geschehens.

In Anbetracht der zentralen Funktion von Aufgaben im Lehr- und Lernprozess gewinnt die Frage nach den Faktoren, die die Selektion und Zusammenstellung von Aufgaben auf Lehrerseite beeinflussen, besondere Bedeutung. Aufgaben sind zunächst die operative Interpretation normativer Lehrplanvorgaben und zugleich Konkretisierungen „sekundärer Lehrplanbindungen“, wie Hopmann und Künzli (1999) das Ensemble von Stundentafeln, Lehrbüchern, didaktischen Traditionen und Formen der Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung genannt haben. Die Auswahl und Orchestrierung von Aufgaben sind allerdings auch immer subjektive Rekonstruktion normativer Traditionen und in die Zukunft weisende Gestaltungsleistungen, die von der professionellen Kompetenz der Lehrkräfte abhängen – von ihrem schulbezogenen Fachwissen, ihren epistemologischen Überzeugungen über die Struktur des Wissensgebietes, in dem sie unterrichten, ihrem fachdidaktischen Wissen und nicht zuletzt von ihren subjektiven Theorien über das Lehren und Lernen von Mathematik. Das Verhältnis von professioneller Kompetenz und der normativen Wirkung von curricularen Traditionen ist im Hinblick auf die Auswahl und Sequenzierung von Aufgaben empirisch völlig ungeklärt. Ebenso wenig ist der Zusammenhang zwischen dem mathematikdidaktischen Potenzial von Aufgaben und den tatsächlichen Lernfortschritten von Schülerinnen und Schülern bisher

[1] Die Studie *Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz* (COACTIV) wurde gefördert durch Mittel der DFG BA 1461/2-2 im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms *Bildungsqualität von Schule* (BIQUA).

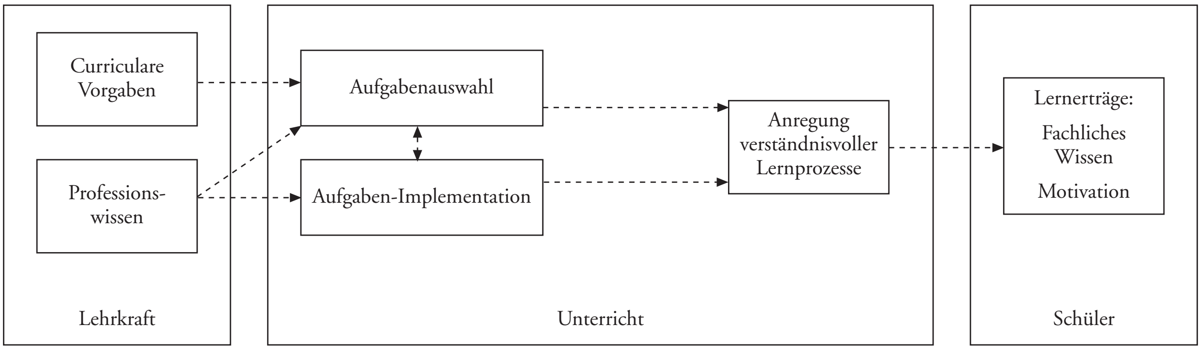


Abbildung 1: Aufgaben als inhaltliche Kerne von Gelegenheitsstrukturen für verständnisvolle Lernprozesse; das theoretische Rahmenmodell im COACTIV-Projekt

hinreichend untersucht. Gerade deshalb hat die Analyse von Aufgaben unter der Perspektive mathematischer Tätigkeiten im Rahmen von COACTIV besondere Bedeutung.

Um den vielfältigen Funktionen von Aufgaben im Unterricht gerecht zu werden, wurden in COACTIV Aufgaben aus Klausuren, Hausaufgaben und Unterrichtsaufgaben analysiert. Die an COACTIV teilnehmenden Mathematiklehrkräfte wurden zu zwei Messzeitpunkten gebeten, uns eine Auswahl von Aufgaben zur Verfügung zu stellen, die sie in der PISA-Klasse im jeweils aktuellen Schuljahr eingesetzt hatten. So wurden die Lehrkräfte zu beiden Messzeitpunkten um alle *Klausurarbeiten* des jeweils zurückliegenden Schuljahres gebeten. Damit liegen Aufgaben für alle Schulformen der 9. Jahrgangsstufe und mit Ausnahme der Hauptschule auch für die 10. Jahrgangsstufe vor. Klausuraufgaben wurden gewählt, da man davon ausgehen kann, dass sie den Kern der erarbeiteten Sachverhalte abbilden und gleichzeitig die normativen Erwartungen sowohl hinsichtlich der Mindestanforderungen als auch der mathematischen und didaktischen Hoffnungen beschreiben. Die zu zwei Messzeitpunkten erbetene Stichprobe von *Hausaufgaben* erlaubt es, Niveau und Variationsbreite von mathematischen Sachverhalten zu identifizieren, die Anlass zum Durcharbeiten und Festigen geben sollen. Für die 10. Jahrgangsstufe wurden ferner *Unterrichtsaufgaben* zu standardisierten Themengebieten (Potenzen mit rationalen Exponenten und Körpern und Körperberechnungen) erbeten. So konnte die Stimulusqualität von Aufgaben bei der Erarbeitung neuer Sachverhalte und in der Phase der Durcharbeitung und Konsolidierung bestimmt werden. Insgesamt eröffnet das Aufgabenkorpus einen spezifischen Einblick in das fachliche Geschehen des Mathematikunterrichts. Diese Informationen sind ein wichtiges Korrektiv und eine Interpretationshilfe für die Beschreibungen, die Lehrkräfte selbst für die didaktische Konzeption und die operative Gestaltung ihres Unterrichts geben.

2 Zur didaktischen Funktion und Analyse von Aufgaben

Um das Potenzial von Aufgaben für die Gestaltung der Lernprozesse im Mathematikunterricht detailliert zu untersuchen, wurden alle Aufgaben in COACTIV im Hinblick auf verschiedene didaktische Kategorien klassifiziert. Diese Kategorien reichen von niedrig inferenten Klassifikationen, die eher technischer Art sind (z.B. Verwendung von Repräsentationsformen, Stoffgebieten) bis hin zu hoch inferenten Codierungen, die nur vor dem Hintergrund eines didaktischen Rahmenkonzepts über mathematisches Arbeiten zu verstehen sind (z.B. Aufgabenklassen). Im Folgenden beschreiben wir zunächst dieses didaktische Rahmenkonzept, um dann einen generellen Überblick über die untersuchten Aufgabenaspekte zu liefern.

2.1 Das Potenzial von Aufgaben für einen kognitiv aktivierenden Mathematikunterricht

In wohl noch stärkerem Ausmaß als in anderen Fächern dominieren „Aufgaben“ den Unterricht im Fach Mathematik. Dies ist seit jeher zu beobachten. Selbst die frühesten Zeugnisse, wie man Mathematik im Prozess des Lehrens und Lernens zu vermitteln versuchte, gehen immer wieder vom Stellen und Lösen von „Aufgaben“ aus. Man denke – um hier nur einige zeitlich weit distante, kulturell und didaktisch unterschiedlich funktionale, inhaltlich ganz divergierende Beispiele zu nennen – an die Rechenaufgabe im altägyptischen „Papyrus Rhind“, den Menon-Dialog („Finde ein Quadrat doppelten Flächeninhalts!“) bei Plato oder die Beispielaufgaben, oft in „eingekleideter“ Form, des Adam Riesz. Dass man offenbar immer wieder und bei aller Verschiedenheit der Voraussetzungen gerade Aufgaben gestellt hat, um Mathematik zu lehren (und zu hoffen, dass sie so auch gelernt wird), kann an zwei geradezu gegenläufigen Eigenschaften von Aufgaben in der Mathematik zugleich liegen: Einerseits hat man in der Mathematik einen recht klaren, fast kann man sogar sagen „engen“, Aufgabenbegriff: „Aufgabe ist jede Aufforderung zur gezielten Bearbeitung eines eingegrenzten mathematischen Themas. Aufgaben sind immer Auseinandersetzung mit einem Beispiel eines Sachverhalts.“(Christiansen & Walther, 1986; Glaeser, 1980; Neubrand, 2002) Selbst wenn „allgemeine“ Beziehungen betrachtet werden, handelt es sich immer dann um eine Aufgabe, wenn die „Bearbeitung und Auseinandersetzung mit einer spezifischen mathematischen Situation“ (Neubrand, 2002) verlangt wird. Andererseits – und eben nur scheinbar konträr – garantiert diese relativ (zu Aufgabenbegriffen in anderen Fächern und Domänen) zugespitzte Sicht auf den Begriff „Aufgabe“ gerade die Vielfalt der pädagogischen, kognitiven, kommunikativen, verständnisbezogenen usw. Möglichkeiten, die für die Gestaltung von Aufgaben offen stehen. Dieses Potenzial machen sich Lehrer wie Schüler zu Nutze in ihrem jeweils spezifischen Gebrauch des Instruments „Aufgabe“.

Für die Lehrerin oder den Lehrer sind Aufgaben ein entscheidendes Mittel zur Gestaltung des Unterrichts. In zweierlei Hinsicht kann damit die Lehrkraft den Unterricht beeinflussen. Einerseits wird die Art und Weise, wie eine Aufgabe in den Unterricht eingebracht wird, mit welchen Bearbeitungsmodi sie verbunden wird, zu welchen Handlungen die Schülerinnen und Schüler über die kognitive Auseinandersetzung mit dem Inhalt hinaus aufgefordert werden, auf Motivation, Selbstkonzept und Interesse der Schüler wirken: Der Lehrer hat also mit Aufgaben ein im weitesten Sinne pädagogisch wirksames Instrument zur Verfügung. Andererseits ist die Art und Weise der inhaltlich orientierten kognitiven Aktivität der Schülerinnen und Schüler aufs Engste damit verknüpft, ob und in welcher Abfolge überhaupt Aufgaben mit adäquatem kognitiven Potenzial als Gelegenheiten zum Lernen in den Unterricht kommen: Bei entsprechender Bewusstheit der Lehrerinnen und Lehrer über das mathematische und auf das Lernen bezogene Potenzial der eingebrachten Aufgaben kann der Lehrer also auch das Verständnis eines mathematischen Begriffs oder Verfahrens, den Aufbau dichter Begriffsnetze und letztlich auch das Mathematikbild der Schülerinnen und Schüler mit Aufgaben steuern, teilweise und potenziell jedenfalls. Aufgaben sind somit flexible, breit einsetzbare und aktiv steuerbare inhaltliche und didaktische Strukturierungselemente des Mathematikunterrichts.

Schülerinnen und Schüler ihrerseits machen oft genug die von ihnen im Mathematikunterricht verlangten Anforderungen an den ihnen vorgelegten Aufgaben fest. Die Schülerinnen und Schüler erfahren den ihnen dargebrachten Stoff oft durch Aufgaben; ihre mathematische Tätigkeit beziehen sie auf die Auseinandersetzung mit den Aufgaben und sie erleben ihre Kompetenz an der Bewältigung von Aufgaben. Die Aufgaben sind also die Träger der kognitiven Aktivitäten der Schüler.

Es ist bekannt und als eine der Grundstrukturen des deutschen Mathematikunterrichts auch kritisch mehrfach herausgearbeitet, dass diese Dominanz der Aufgaben bis zum Zerrbild einer nur noch „pensenorientierten Aufgabendidaktik“ (Lenné, 1969) gehen kann. Helge Lenné hat dies schon 1969 in einer Analyse von Lehrplänen und intendierten Curricula herausgearbeitet (Lenné, 1969). Im Kontrast etwa zum ebenfalls durchaus aufgabenorientierten japanischen Mathematikunterricht, wie er in der TIMSS-Video-Studie gezeichnet wird (Baumert, 1997; Neubrand, 2002), zeigt sich daran, wie vielfältig der Umgang mit Aufgaben in Unterrichtsituationen gestaltet werden kann und wie sensibel das Unterrichtsgeschehen auf die eingebrachten Aufgaben reagiert. Das Spektrum reicht somit von Aufgabenklassen mit homogenen Lösungswegen, die nur auf den jeweiligen Spezialfall zu adaptieren sind, bis zu offen gestellten Aufgaben, die ihrerseits in unterschiedlichen Formaten auftreten können (Becker & Shimada, 1997).

Zusammenfassend gesagt: Aufgaben sind die Schnittstellen der Schüler- und Lehrertätigkeiten im Mathematikunterricht (Bromme, Seeger, & Steinbring, 1990). Grund genug also, die Rolle von Aufgaben erneut (d.h. nach beispielsweise Bromme u.a., 1990; Christiansen & Walther, 1986; Neubrand, 2002; Walther, 1985) und immer wieder zu durchdenken. Dazu dient auch die vorliegende Aufgabenklassifizierung. Sie hat allerdings spezifische Zwecke, die ihren Zuschnitt und ihre Konzentration auf ausgewählte Aspekte von Aufgaben bedingt: Mit dem hier vorgelegten kompakten Klassifikationsschema sollen zentrale Charakteristika von Aufgaben so erfasst werden, dass aussagekräftige Ergebnisse über die in der COACTIV-Studie dokumentierten, repräsentativ aus deutschen 9. und 10. Klassen gesammelten Unterrichts-, Klassenarbeits- und Hausaufgaben gewonnen werden können, und zwar in Hinblick auf den für COACTIV ausschlaggebenden Fokus: Die Möglichkeiten der kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler im und durch den Mathematikunterricht sollen in den ausgewählten Aufgabenkategorien abgebildet werden.

Diese Einschränkung des Blickfelds bewirkt zunächst, dass ein sonst ebenfalls breit anzulegender Bereich einer Aufgabenklassifikation ausgespart bleibt. Mit Aufgaben im Unterrichtsprozess wird ja weit mehr verfolgt, als durch je einzelne Aufgaben einzelne Elemente des mathematischen Wissens zu aktivieren. Im Unterrichtsprozess steht eine Aufgabe im Kontext mit anderen Aufgaben und zum Unterrichtsablauf generell. Aufgaben werden also nicht nur inhaltlich und in ihrer Präsentation gestaltet, sondern nach Implementierung in den Unterricht treten komplexe Effekte auf: Aufgaben sind innerhalb des Unterrichts vernetzt und gerade dadurch wird der längerfristig wirkende Aufbau adäquater Begriffsnetze angestrebt (oder läuft eben ggf. auch ins Leere); Aufgaben werden von Schülerinnen und Schülern individuell und gegebenenfalls auch anders, als es ursprünglich vorgesehen war, bearbeitet. Mit Aufgabenanalysen auf inhaltlicher Basis kann auch diese unterrichtliche Dynamik abgebildet werden (Neubrand, 2002). Dieser Aspekt der unterrichtlichen Implementation und Bearbeitung von Aufgaben ist in diesem Klassifikationsschema allerdings nicht abgedeckt. Im Zentrum stehen vielmehr die „gestellten Aufgaben“, gewissermaßen als das Substrat der im Unterricht geschaffenen Lerngelegenheiten.

2.2 Didaktisch relevante Aspekte von Aufgaben

Es soll mit den gewählten Kategorien vorrangig der (potenzielle) Beitrag der Aufgaben zur kognitiven Aktivierung erfasst werden. Dazu hat man sich an zentrale Elemente des mathematischen Arbeitens zu halten. Dieses bezieht sich einerseits auf die Inhalte an sich und die mathematikspezifischen Tätigkeiten (Kategorienschema 1.–2.), wobei dem Modellieren eine Schlüsselrolle zukommt. Andererseits sind die zu aktivierenden kognitiven Prozesse zu erfassen, soweit sie sich jeweils auf zentrale Kompetenzziele des Mathematikunterrichts beziehen (Kategorienschema 3.–5., 7.). Hinzu kommt die Darstellung der jeweiligen Präsentationsrahmen von Aufgabe und Lösung (Kategorienschema 6., 8.). Diese Hauptgesichtspunkte gliedern das Kategorienschema wie folgt.

2.2.1 Abgerufene mathematische Stoffe als Rahmen

Die gestellte Aufgabe gehört jeweils einem bestimmten Stoffgebiet an. Auch Aufgaben, die über enge Stoffgrenzen hinausreichen, sind nicht ausgeschlossen, denn bis zu vier Eintragungen sind in der Codierung möglich (Kategorienschema 1.1). Bei der Interpretation ist zu berücksichtigen, dass der in einer Aufgabe angesprochene Stoff durch curriculare Vorgaben moderiert ist, dass administrative Vorgaben sowie der Zeit-punkt der Beobachtung für die Auswahl der Aufgaben eine Rolle spielen können, und dass auch spezielle Schwerpunktsetzungen in der jeweiligen Klasse einfließen. Die Stoffbereiche der Aufgaben sind dennoch nicht nur als äußerer Rahmen von Bedeutung. Sie beziehen sich auch auf die kognitive Aktivierung. Denn darin, ob bestimmte stoffliche Verbindungen in Aufgaben hergestellt oder eben nicht realisiert werden, liegt eine Aussage über den Grad der inhaltlichen Vernetztheit im Unterricht. Die mit „curricularer Wissensstufe“ bezeichnete Kategorie (Kategorienschema 1.2) verweist auf ein weiteres Moment der kognitiven Aktivierung, nämlich die mögliche Wiederaufnahme von früher Gelerntem im Unterricht, falls denn diese Wiederaufnahme auch kumulativ wirkende Elemente enthält.

2.2.2 Ein allgemeines Modell für den Prozess der Auseinandersetzung mit einer Aufgabe: Der Modellierungszyklus

Mathematik entsteht „im Tun“. Den Prozess der Auseinandersetzung mit einer Aufgabe allgemein zu beschreiben heißt also, den Ort der unterschiedlichen kognitiven Tätigkeiten sichtbar zu machen, sodass diese differenziert dargestellt werden können. Als (theoretisches, nicht empirisch abgeleitetes) Modell der Auseinandersetzung mit den in einer Aufgabe vorliegenden Anforderungen dient daher der aus anderen Zusammenhängen (Blum, 2002; Schupp, 1988) bekannte Zyklus des Modellierens in der Mathematik (Kategorienschema 2.1–2.2). Man kann an diesem Zyklus festmachen, welche qualitativ unterschiedlichen Anforderungen in mathematischen Aufgaben stecken können. Dieses Modell des Lösungsprozesses einer Aufgabe lenkt die Aufmerksamkeit auf die kognitiven Prozesse selbst und abstrahiert von einer rein auf den Kontext – innermathematisch versus außermathematisch – bezogenen Sichtweise. In beiden Bereichen – innerhalb der Mathematik beim Bearbeiten von „Problemen“, wie auch in der Anwendung von Mathematik auf außermathematische Situationen – kann man von „Übersetzungs-“, „Strukturierungs-“, „Verarbeitungs-“ oder „Interpretationsanforderungen“ sprechen, in freilich jeweils im Einzelnen durchaus anderen Ausprägungen. Erkennbar wird zudem (vgl. Kategorienschema 2.1 und 2.2), wie außermathematischer Kontext sich zur innermathematischen Problemstellung weiterentwickeln kann. Das hier benutzte Modell von Aufgaben greift also über vordergründige Klassifizierungsansätze hinaus. Es dient auch der Klassenbildung von Aufgaben nach verschiedenen Gesichtspunkten (Kategorienschema 3).

Von den mathematischen Tätigkeiten werden Argumentieren und Darstellen als zentrale und anspruchsvolle Kompetenzen, die im Mathematikunterricht ausgebildet werden sollen, eigens bereits an dieser Stelle hervorgehoben (Kategorienschema 2.3-2.4). Die Anforderungen an technischer Performanz, die eine Aufgabe enthält, werden im Kategorienschema allerdings nicht gestuft abgebildet; wir begnügen uns mit der Feststellung, dass bestimmte Aufgaben zur Klasse der „technischen Aufgaben“ gehören (siehe Abschnitt 2.2.3).

2.2.3 Kompetenzentwicklungsziele in der Aufgabe: Mathematische Denkweisen, Grundvorstellungsintensität, sprachlogische Komplexität und Aspekte des Lösungsprozesses

Die hier entworfene Aufgabenklassifikation soll, um zu inhaltlichen und kognitiven Einschätzungen der gesammelten Aufgaben zu kommen, die ganze Spannweite des mathematischen Denkens abdecken und die zentralen Kompetenzziele des Mathematikunterrichts erfassen. Die in Abschnitt 2.2.2 gegebene Sichtweise auf den Aufgaben-Lösungsprozess ermöglicht es zunächst, zu drei für die Mathematik charakteristischen Aufgabenklassen zu kommen. Je nach dem, ob bei einer durch einen Modellierungsprozess charakterisierten Aufgabe das prozedural-algorithmische oder das begriffliche Denken in der Phase der „Verarbeitung des Modells“ (vgl. Abb. in TEIL II, Kap. 2) überwiegt, kann die Aufgabe der Klasse der „rechnerischen“ bzw. der „begrifflichen“ Modellierungsaufgaben zugeordnet werden. Es verbleibt die Klasse der „technischen“ Aufgaben, die aber ebenso wie die beiden anderen Klassen auf zentrale mathematische Kompetenzen verweist. In allen drei Klassen gibt es dabei „leichte“ und „schwere“ Aufgaben.

Für diese Einteilung wurde die Bezeichnung „Typen mathematischen Arbeitens“ gewählt, weil damit mathematisches Denken breit umfasst wird (Kategorienschema 3). Die drei Typen sind der Kern des bei PISA in Deutschland benutzten „Kompetenzmodells“ (Neubrand, 2004). Die Aufteilung in die drei Typen hat sich auch empirisch bewährt, indem gezeigt werden konnte, dass es jeweils andere Merkmale von Aufgaben sind, die in jeder der drei Klassen die Schwierigkeit einer Aufgabe bestimmen (Neubrand &

Neubrand, 2004; Neubrand, Klieme, Lüdtke, & Neubrand, 2002). Mit den drei Typen werden somit unterschiedliche mathematische Denkweisen und Kompetenzen angesprochen (Knoche u.a., 2002), und das Ziel des Mathematikunterrichts besteht unter anderem darin, die in den drei Typen erfassten Denkweisen adäquat auszubilden, zum Beispiel durch ein auch quantitativ ausgewogenes Angebot an Aufgaben.

Die mathematischen Denkweisen erfassen noch nicht, dass mathematische Begriffe auch darauf fußen, was sich Menschen unter den jeweiligen Inhalten vorstellen, welche Bedeutung sie damit verbinden, welche Bilder und mentalen Konstrukte sie bei einem mathematischen Gegenstand abrufen. „Grundvorstellungen“ als mathematikdidaktische Kategorie (im Sinne von vom Hofe, 1995) beschreiben gerade diese Beziehungen zwischen dem mathematischen Inhalt, der Realität und den individuellen mentalen Strukturen (Blum, Jordan, Kleine, & vom Hofe, 2004). Aufgaben unterscheiden sich in der Intensität, in der sie verlangen, eine oder mehrere Grundvorstellungen während des Lösungsprozesses aufzurufen (Kategorienschema 4). Auch diese Kategorie hat sich empirisch bewährt, indem gezeigt wurde (Blum u.a., 2004), dass der Grundvorstellungsintensität ein nicht geringes Potenzial bei der Aufklärung der Schwierigkeit einer Aufgabe zukommt.

Ebenfalls empirisch an den PISA-Aufgaben als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal nachgewiesen (Cohors-Fresenborg, Sjuts, & Sommer, 2004) ist es, die sprachlichen Anforderungen in der Aufgabe zu beachten. Dabei geht es aus der Sicht der kognitiven Aktivierung darum, nach dem „geistig-mathematischen Instrumentarium, dem Instrumentarium zur (intuitiven) Aufnahme, zum (präzisen) Erfassen und zum (zielorientierten) Bearbeiten von komplexen Text- und Aufgabeninformationen“ zu fragen (Cohors-Fresenborg u.a., 2004). Offenbar handelt es sich um ein zentrales, durch die bisherigen Merkmale noch nicht erfasstes Kriterium für das Umgehen mit Aufgaben (Kategorienschema 5).

Schließlich ist für die kognitive Aktivierung durch Aufgaben auch verantwortlich, wie weit der in einer Aufgabe realisierte Raum für die Aufgabenlösung gesteckt ist. Zwei Kriterien werden hierzu beachtet. Auf der einen Seite kann man Aufgaben in Übereinstimmung mit der Richtung stellen, in der üblicherweise ein Begriff oder ein Verfahren dargestellt und gelernt wird, oder eben gegen diese Richtung (Kategorienschema 7.1). Im letzten Fall spricht man oft von „Umkehraufgaben“, wobei aber sorgfältig zwischen dem Gebrauch dieses Begriffs in der Problemlöse-Psychologie und in der Mathematikdidaktik zu differenzieren ist (Neubrand, 2002).

Eine zweite Weise, die Größe des Suchraums, der mit einer Aufgabe verknüpft ist, zu erfassen, besteht darin, festzuhalten, inwieweit eine Aufgabe auf unterschiedlichen Wegen gelöst werden kann. Multiple Lösungen können explizit gefordert werden (Kategorienschema 6.2), es kann aber ein offener Zugang auch implizit in der Aufgabe angelegt sein, etwa indem das Ergebnis selbst nicht eindeutig bestimmbar ist (Kategorienschema 8.3). Solchen Aufgaben kommt im Unterricht eine besondere Bedeutung für die kognitive Aktivierung zu, wobei sich Effekte sowohl auf der didaktischen wie auf der individuellen Ebene ergeben (Blum & Wiegand, 2000; Neubrand & Neubrand, 1999).

2.2.4 Repräsentationsmodi in Aufgabenstellung und in den verlangten Lösungsdarstellungen

Wechsel zwischen Repräsentationsformen sind ebenfalls ein zentrales Kennzeichen kognitiver Aktivierung. Abschließend werden daher im vorliegenden Klassifikationssystem die Aufgaben nach der Art der Darstellungsformate, in denen sie gestellt sind, eingeordnet (Kategorienschema 6.1). Es wird aber auch festgehalten, in welchem Repräsentationsmodus die Lösung der Aufgabe erwartet wird (Kategorienschema 8.1–8.2).

3 Durchführung des Aufgabenratings in COACTIV

3.1 Praktische Realisierung des Aufgabenratings

Im Rahmen des COACTIV-Projekts wurde Aufgabenmaterial aus dem Unterricht von den Mathematiklehrkräften der 9. Klassen im Jahr 2003 und derselben 10. Klassen im Jahr 2004 zusammengetragen. Das vorliegende Kategorienschema wurde speziell zur Klassifizierung dieser Aufgaben entwickelt. Dieses Kapitel gibt einen Überblick über den Ablauf der Aufgabenkategorisierung.

3.1.1 Aufgabensampling

Es lagen uns zu den jeweiligen Messzeitpunkten alle in den betreffenden Schuljahren geschriebenen Mathematikklausuren und eine Auswahl an gestellten Hausaufgaben vor sowie zusätzlich im Jahr 2004 Unterrichts- und Hausaufgaben zur Einführung zwei festgelegter Themengebiete.[1]

3.1.2 Rücklauf und Materialumfang

Zum ersten Messzeitpunkt im Jahr 2003 hatten 265 Lehrkräfte ihr Aufgabenmaterial eingereicht. Insgesamt lagen 1.064 Klausuren und 797 Hausaufgabeneinheiten vor, die sich auf 25.484 konkrete einzelne Aufgaben (so genannte Analyseeinheiten) summierten.

Im Jahr 2004 belief sich der Umfang auf 752 Klausuren, 238 Hausaufgabeneinheiten und 253 Unterrichtsaufgabeneinheiten von noch 204 Lehrkräften: Insgesamt waren dies 22.089 Analyseeinheiten. In der Summe lagen uns von beiden Messzeitpunkten insgesamt 47.573 einzelne Mathematikaufgaben zur Kategorisierung vor (siehe Tab. 1).

Tabelle 1: Aufgabenumfang der in COACTIV kategorisierten Mathematikaufgaben

Aufgabenumfang und Verteilung der Aufgaben und Analyseeinheiten auf die Lehrkräfte						
47.573 Aufgaben		Anzahl Aufgaben	Minimum	Maximum	Mittelwert pro Lehrkraft	Standardabweichung
Klassenarbeiten 2003	KA[1]	1.064	1	7	4,02	1,20
265 Lehrer	Analyseeinheiten	14.744	1	149	55,64	27,73
Hausaufgaben 2003	HA[2]	797	1	18	3,74	2,97
213 Lehrer	Analyseeinheiten	10.740	1	779	50,42	75,94
Klassenarbeiten 2004	KA[1]	752	1	7	3,69	1,10
204 Lehrer	Analyseeinheiten	10.863	7	136	53,25	25,69
Hausaufgaben 2004	HA[2]	238	1	2	1,72	0,45
138 Lehrer	Analyseeinheiten	5.959	1	204	43,18	37,84
Unterrichtsaufgaben 2004	UA[3]	253	1	2	1,83	0,37
146 Lehrer	Analyseeinheiten	5.267	2	252	38,17	36,31

[1] KA = Klassenarbeiten.
[2] HA = Hausaufgabeneinheiten.
[3] UA = Unterrichtsaufgabeneinheiten.

[1] Die zwei Themengebiete waren „Potenzen mit rationalen Exponenten“ und „Körper und Körperberechnungen“.

3.1.3 Aufgabenaufbereitung

Bevor das Aufgabenmaterial von ausgewählten Codierern an der Universität Kassel kategorisiert werden konnte, wurde es am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung in Berlin aufbereitet. So wurde jedes Aufgabenblatt zumBeispiel mit der entsprechenden Lehrer-ID und einer Seitenzahl versehen; bei den Hausaufgaben wurde im Falle von Kopien aus Lehrbüchern genau vermerkt, welche Aufgaben als Hausaufgaben vorgesehen waren. Teilweise mussten die Kopien aus Lehrbüchern auch erst angefertigt werden, wenn nur Literaturverweise vorlagen. Für ein reliables Rating war es weiterhin wichtig, eine einheitliche „Mehrebenenstruktur“ konsequent einzuhalten. Dazu wurden die Aufgaben in Themeneinheiten, in Hauptaufgaben und in Teilaufgaben eingeteilt. Jede Aufgabe erhielt entsprechend dieser Struktur eine Nummer. Bei den Mathematikklausuren konnte die Original-Nummerierung der Lehrkräfte meistens beibehalten werden.

Anhand dieser Nummerierung ist eine exakte Identifizierung jeder einzelnen Aufgabe auch im Nachhinein gewährleistet.

3.1.4 Bestimmung der Analyseeinheiten

Der Prozess der Aufgabenaufbereitung setzte eine exakte Bestimmung dessen, was im Rahmen von COACTIV unter einer Mathematikaufgabe verstanden wird, voraus. Da es sich bei vielen der eingereichten „Aufgaben“ um Fragestellungen mit einzelnen Teilaufgaben handelte, wurden Teilaufgaben als einzelne Analyseeinheiten betrachtet. Ausgehend von dem in Abschnitt 2.1 aufgeführten Aufgabenbegriff wurden Kriterien festgelegt, um die Analyseeinheiten zu bestimmen. Dabei wurde nach den folgenden Richtlinien vorgegangen (siehe Tab. 2).

Entsprechend dieser Definition werden Teilaufgaben einer Hauptaufgabe als eigenständige Aufgaben gesehen, sofern sie als einzelne Aufgaben mit einer Nummerierung wie a), b) usw. und einer eigenen Instruktion versehen sind. Textaufgaben widerum, in denen mehrere Teilinstruktionen enthalten bzw. mehrere Arbeitsschritte zu bewältigen sind, werden als *eine* Aufgabe verstanden.

Die Bestimmung der Analyseeinheiten wurde von drei Experten übernommen, welche zur Gruppe der Codierer zählten. Diese waren mit dem Forschungsanliegen und dem vorliegenden Kategorienschema besonders gut vertraut.

Tabelle 2: Kriterien zur Bestimmung der Analyseeinheiten im Projekt COACTIV

1. Instruktion	Eine Aufgabe enthält eine Aufforderung zur Bearbeitung.
2. Bearbeitung: Antwort – Lösungsweg – Ressourcen	Aufgaben beziehen sich auf Antworten, die Schüler/innen produzieren sollen; den Wegen, die benutzt werden können, um diese Antworten zu erhalten; den Ressourcen (u.a. mentale Repräsentationen), die den Schüler/innen bei der Problembearbeitung verfügbar sind.
3. Bezug zur Mathematik	Eine Aufgabe bezieht sich auf Mathematik, das heißt auf mathematische Stoffgebiete und/oder auf mathematische Grundvorstellungen und/oder auf mathematische Tätigkeiten.
4. Spezifische Situation	Eine Aufgabe bezieht sich auf eine spezifische Situation, das heißt auf ein Beispiel eines mathematischen Sachverhalts. Dieses Beispiel kann allgemein oder speziell sein (Neubrand, 2002)

3.1.5 Elektronisches Dateneingabeprogramm

Die Datenerfassung der insgesamt 47.573 Mathematikaufgaben erfolgte mittels einer auf die Codierung speziell zugeschnittenen elektronischen Dateneingabemaske (zur Illustration siehe Abb. 2).[2] Die Entscheidung für eine elektronische Eingabe der zu vergebenden Codes wurde aufgrund zahlreicher Vorteile getroffen. Unter anderem waren dies:

– Bessere Bewältigung der großen Anzahl an Aufgaben (47.573 Analyseeinheiten).
– Minimierung von Eingabefehlern aufgrund automatisierter Sperrung ungültiger Werte.
– Einheitlich strukturierte Abarbeitung der Aufgaben auf festgelegten hierarchischen Ebenen.
– Automatisierte Duplizierung von Codes auf hierarchisch höher platzierten Ebenen sowie hinsichtlich nachfolgender Teilaufgaben gleichen Typs mit gleichem Anspruchsniveau.
– Automatisierte Vergabe von Aufgaben-IDs analog zur hierarchischen Platzierung der Aufgabe innerhalb der Aufgabeneinheit (z.B. Klassenarbeit). (Die Aufgaben-IDs beinhalten bereits das Wissen über die ID der Lehrkraft, die Nummer der Klassenarbeit, die Nummer der Hauptaufgabe und die Nummer der Teilaufgabe.)
– Automatische Zählung der benötigten Zeit pro einzuschätzender Kategorie, was Zeit- und Kostenkalkulationen des Ratingprozesses vereinfachte.

Die Programmierung, Testung und Optimierung des Eingabeprogramms nahm etwa drei Monate Arbeit in Anspruch.

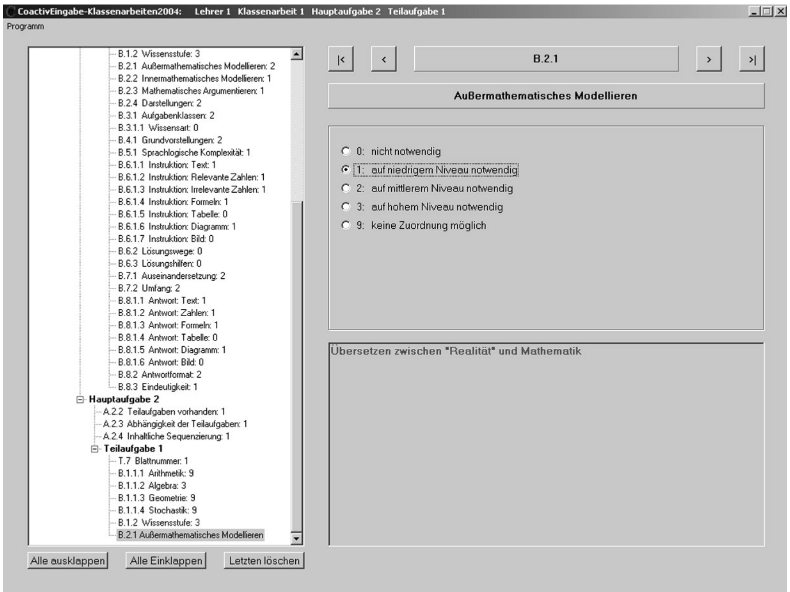


Abbildung 2: Illustration der Dateneingabemaske am Beispiel der Beurteilungskategorie „Außermathematisches Modellieren“

[2] Wir bedanken uns bei Michael Schneider (Max-Planck-Institut für Bildungsforschung) für die Programmierung der Dateneingabemaske.

3.1.6 Raterschulung, Raterübereinstimmung und Ratingprozess

Insgesamt zwölf Rater (Mathematik-Lehramtstudierende, Referendare sowie Lehrkräfte) standen für die Kategorisierung der Mathematikaufgaben zur Verfügung. Diese wurden in einer umfangreichen einwöchigen Schulung Ende Juli 2003 an der Universität Kassel mit dem Kategoriensystem vertraut gemacht. Im Vorfeld erhielt jeder Rater das Kategorienschema zur Eigenlektüre. Konkret wurde drei Tage inhaltlich (Kategorien), ein Tag technisch (Dateneingabeprogramm) geschult, der fünfte Tag beinhaltete Übungen zur Festigung.

Anschließend wurde im August ein Interraterreliabilitätstest (Nr. 1) durchgeführt: Die Stichprobe bestand aus 108 Aufgaben: 24 TIMSS-Aufgaben, 12 Internationale PISA-Items, 24 Nationale PISA-Items, 24 randomisiert ausgewählte Klassenarbeitsaufgaben und 24 randomisiert ausgewählte Hausaufgaben. Da das Ergebnis des IRRTs zunächst noch Schwächen in der Handhabbarkeit einiger Kategorien aufzeigte, wurden daraufhin die entsprechenden Kategorien noch einmal überarbeitet. Ein erneuter Schulungstag zur Vorstellung der Neuerungen und zur Klärung kritischer Fälle fand im September statt. Ein zweiter Interraterreliabilitätstest (Nr. 2) wurde Ende September/Anfang Oktober 2003 durchgeführt (bestehend aus 48 einzelnen Aufgaben sämtlicher Materialien: 12 TIMSS-, 12 PISA-, 12 Klassenarbeits-, 12 Hausaufgaben). Die Reliabilitäten aller „kritischen Kategorien“ lagen nun ebenfalls über 0,7 (siehe Rho-Werte im Anhang).

Aus Zeit- und Kostengründen stellte sich die Frage, ob alle Klassenarbeiten der jeweiligen Lehrer komplett geratet werden müssen, oder ob z.B. die Klassifizierung der jeweils ersten beiden Arbeiten eines Schuljahres ausreichen, um einen reliablen Lehrermittelwert zu erhalten. Um dies entscheiden zu können, wurde zunächst eine Stichprobe von 32 Lehrern gezogen, deren Klassenarbeiten komplett geratet wurden. Die Datenauswertung (Mittelwertvergleiche verschiedener Zweier-, Dreier- und Viererkombinationen von Klassenarbeiten mit dem Gesamtmittelwert eines Lehrers) erfolgte Mitte Oktober. Aufgrund der nicht kongruenten Ergebnisse wurde beschlossen, auch für die übrigen Lehrkräfte *alle* Klassenarbeiten raten zu lassen. Das Rating des kompletten Aufgabenmaterials der im Frühjahr 2003 befragten Lehrkräfte begann im November 2003 und war vier Monate später Ende Februar 2004 abgeschlossen. Die Codierer wurden während dieser Zeit kontinuierlich inhaltlich und technisch betreut.

Für das Rating des Aufgabenmaterials des zweiten Messzeitpunkts im Frühjahr 2004 standen uns acht der „alten“ Rater und vier „neue“ Rater zur Verfügung. Aufgrund der vier „neuen“ Rater wurde im Juni 2004 eine erneute deutlich kürzere Schulung mit anschließendem Interraterreliabilitätstest (30 Aufgaben aus Klassenarbeiten und Hausaufgaben) durchgeführt (Nr. 3, Dauer: 2 Tage). Inhaltlich wurde diesmal auf die in TEIL II, Kapitel 2–5 ausgeführten kognitiven Kategorien fokussiert. Da im Anschluss gute Interraterreliabilitäten erzielt wurden, konnte mit dem Rating des neuen Aufgabenmaterials schon Ende Juli 2004 begonnen werden.

Abgeschlossen war das Aufgabenrating im November 2004 mit der Fertigstellung einer SPSS-Aufgabendatenbank.

3.1.7 Ratinggeschwindigkeit

Um den Kosten- und Zeitaufwand besser kalkulieren zu können, wurde beim Rating schon während der Testdurchläufe auf die benötigte Zeit pro Kategorie sowie pro Mathematikaufgabe geachtet. Die gemittelte Zeit pro Aufgabe über alle Rater wurde für das insgesamt vorhandene Aufgabenmaterial hochgerechnet.

Insgesamt hat sich ein Durchschnitt von etwa 2 Minuten pro Aufgabe ergeben (pro Aufgabe wurden 32 Kategorien eingeschätzt; siehe Tab. 3). Der Wert ist selbstverständlich in Abhängigkeit mit dem projektinternen Eingabeprogramm und der projektinternen Aufgabendefinition zu sehen.

Tabelle 3: Ratinggeschwindigkeiten in Minuten pro Aufgabe gemittelt über alle Rater in COACTIV

Ratinggeschwindigkeit insgesamt und aufgeschlüsselt nach Aufgabenmaterial	Anzahl Aufgaben	Ratinggeschwindigkeit (min/Aufgabe): MW über alle Rater	Standard-abweichung
Klassenarbeiten 2003 – 265 Lehrer	14.744	2,1	0,6
Hausaufgaben 2003 – 213 Lehrer	10.740	1,8	0,6
Klassenarbeiten 2004 – 204 Lehrer	10.863	2,3	0,8
Hausaufgaben 2004 – 138 Lehrer	5.959	1,8	1,1
Unterrichtsaufgaben 2004 – 146 Lehrer	5.267	2,3	1,1
Insgesamt	47.573	2,1	0,8

TEIL II

1 Stoffgebiete

1.1 Mathematische Stoffgebiete

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
1.1.1	**Arithmetik**	
1	Zahlbereiche und Rechnen	Natürliche Zahlen (Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen; Teilbarkeit; Zahlsysteme; römische Zahlzeichen); rationale Zahlen (grundlegende Begriffe; Grundrechenarten mit rationalen Zahlen [Bruchrechnung]); reelle Zahlen (grundlegende Begriffe, Grundrechenarten); Systematisierung der Zahlbereiche; Runden/sinnvolle Genauigkeit.
2	Prozent- und Zinsrechnung	
3	Potenzen und Wurzeln	Rechnen mit Zehnerpotenzen; Erweitern des Potenzbegriffs auf ganze Exponenten/Potenzgesetze; Erweitern auf rationale Exponenten/Wurzelgesetze; auf reelle Exponenten; Begriff Logarithmus/Rechnen mit Logarithmen. Hinweis: Nicht verwechseln mit funktionalen Betrachtungen!
4	Proportionalität; Antiproportionalität	
5	Arbeiten mit Größen	Rechnen mit Größen; Zuordnungen zwischen Größen.
9	Keine Zuordnung möglich	
1.1.2	**Algebra**	
1	Variablen/Terme	Termwertberechnungen; Erkennen von Termstrukturen/Umformen einfacher Terme; binomische Formeln; Arbeiten mit Bruchtermen. Hinweis: Nicht verwechseln mit Umformungen einer Gleichung bzw. eines Gleichungssystems!
2	Lineare Gleichungen	Lineare Gleichungen (inhaltliches Lösen; Lösen durch äquivalentes Umformen; lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen); lineare Gleichungssysteme (rechnerisches Lösen; graphisches Lösen; LGS mit mehr als zwei Variablen; Gaußscher Algorithmus; Gleichungen mit Formvariablen/Parametern); lineare Ungleichungen (inhaltliches Lösen; Lösen durch äquivalente Umformungen; rechnerisches und graphisches Lösen von linearen Ungleichungssystemen).
3	Quadratische Gleichungen	Quadratische Gleichungen (Lösen von Spezialfällen; rechnerisches und graphisches Lösen von quadratischen Gleichungen); quadratische Gleichungen mit Formvariablen/Parametern.
4	Sonstige Gleichungen	Wurzelgleichungen; Exponentialgleichungen; Logarithmusgleichungen.
5	Lineare Funktionen	
6	Quadratische Funktionen	
7	Sonstige Funktionen	Potenzfunktionen (auch gebrochene Exponenten); Trigonometrische Funktionen (Bogenmaß; Definition von Sinus/Cosinus; Sinus- und Cosinusfunktion/Darstellung; Definition von Tangens; Tangensfunktion/Darstellung; Beziehungen zwischen Winkelfunktionen; Anwendungen im rechtwinkligen Dreieck); Exponentialfunktionen (exponentielles Wachstum; Begriff Exponentialfunktion); Logarithmusfunktionen.
9	Keine Zuordnung möglich	

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
1.1.3	**Geometrie**	
1	Geometrische Grundbegriffe und Figuren in Ebene und Raum. Geometrische Sätze über diese Figuren und Grundbegriffe	Grundlegende geometrische Begriffe und Relationen; ebene Figuren (Dreieck; Viereck; Winkel; Kreis; …); räumliche Figuren (Würfel; Quader; Prisma; Pyramide; Kegel; Zylinder; Kugel; …); Parallelität/Orthogonalität von Geraden; Lagebeziehungen von Figuren (z.B. gegenseitige Lage von Gerade und Kreis); Grundbegriffe der Kongruenz (z.B. Kongruenzsätze). Hinzu kommen die grundlegenden Dreieckskonstruktionen.
	Länge und Winkelmaß als Größen, nur wenn sie ohne Pythagoras und Trigonometrie auskommen	Hinweis: Im Vordergrund steht hier der Bezug zur Figur. Von den mit den Figuren assoziierten numerischen Größen werden nur Längen und Winkelmaße hier aufgenommen, soweit sie nicht unter Ziffer 3 fallen und soweit sie nicht Berechnungen über den Pythagoras oder trigonometrische Berechnungen erfordern (Ziffer 4). Im Wesentlichen bleibt davon also nur der Themenkreis Winkelsummen in Vielecken übrig.
	Geometrische Konstruktionen	
2	Abbildungsgeometrie, Symmetrien, Kongruenz	Kongruenzabbildungen (Geradenspiegelungen/Achsensymmetrie; Punktspiegelungen; Verschiebungen; Drehungen; zusammengesetzte Bewegungen; Kongruenz von Figuren); Ähnlichkeitsabbildungen (Ähnlichkeit von Figuren und Vektoren); Feststellen der Symmetrie einer Figur. Hinweis: Hier muss der Abbildungsgedanke im Vordergrund stehen. Auch bei „Symmetrie“ muss Wert auf den Gedanken „Symmetrie als Bestehen einer Abbildung“ gelegt werden.
3	Flächen- und Rauminhaltsberechnungen	Flächeninhalt und Umfang ebener Figuren von Quadrat/Rechteck/Dreieck/spezielle Vierecke/Kreis/Kreisteile; Volumen und Oberfläche von Körpern von Würfel/Quader/Prismen/Kreiszylinder/Pyramide/Kegel/Kugel/zusammengesetzte Körper. Hinweis: Hier muss der Berechnungsgedanke im Vordergrund stehen; sonst kommt eventuell auch Ziffer 1 (oder spezifisch Ziffer 4) in Frage.
4	Satzgruppe des Pythagoras und alle Berechnungen, die trigonometrische Funktionen erfordern	Außer der Satzgruppe des Pythagoras gehören also hierher auch Cosinus- und Sinussatz.
5	Darstellende Geometrie (Körperdarstellung)	Netze von Körpern; Schrägbilder; Zweitafelprojektion/Dreitafelprojektion. Hinweis: Hier muss der Gedanke des Darstellens im Vordergrund stehen; sonst kommt eventuell auch Ziffer 1 in Frage.
6	Strahlensätze, Ähnlichkeit	Hinweis: Wird „Ähnlichkeit“ als Abbildung aufgefasst, dann Ziffer 2.
7	Geometrische Beweise	Beweis geometrischer Sätze als Kern der Aufgabe. Hinweis: Hier muss der Gedanke des Beweisens im Vordergrund stehen; sonst kommt eventuell auch Ziffer 1 in Frage.
9	Keine Zuordnung möglich	

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
1.1.4	**Stochastik**	
1	Beschreibende Statistik	Graphische Darstellungsmöglichkeiten für Daten (z.B. Kreisdiagramme); Zentralmaße (wie arithmetisches Mittel, Median).
2	Beurteilende Statistik	Testen von Hypothesen; statistische Erhebungen durchführen, auswerten und darstellen; statistische Kennwerte.
3	Wahrscheinlichkeitsrechnung	Zufallsversuche; Berechnung der relativen Häufigkeit/Wahrscheinlichkeit; Summen- und Pfadregeln.
4	Kombinatorik	
8	Sonstiges stochastisches Stoffgebiet	
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:

- Für die vier Stoffgebiete Arithmetik, Algebra, Geometrie und Stochastik ist jeweils eine Variable vergeben. Dabei sollen stets die dominanten Aspekte berücksichtigt werden, das heißt, in jedem einzelnen Stoffgebiet darf *nur ein Code* vergeben werden. Deshalb soll stets der „höhere“ mathematische Inhalt genommen werden. Beispielsweise gehört das Gleichungslösen in einem funktionalen Kontext zu Funktionen oder das Zahlenrechnen im Zusammenhang mit Gleichungen zu Gleichungen.
- Maximal vier Nennungen möglich.

Herkunft:

- Operationalisierung in loser Anlehnung an Fanghänel (1992).

1.2 Curriculare Wissensstufe

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
1	Grundkenntnisse	Hier werden lediglich die Grundrechenarten und einfachste geometrische Grundkenntnisse vorausgesetzt, die bereits in der Grundschule vermittelt werden oder aus dem Alltag bekannt sind.
2	Einfaches Wissen aus der Sekundarstufe I	Bei Aufgaben dieser Ausprägung werden Begriffe der Sekundarstufe I verwendet, wie etwa der Bruchzahlbegriff oder der Prozentbegriff, die als Grundbestandteile einer „Mathematik für alle“ gelten müssen (vgl. Heymann, 1996) und in jeder Schulform zum Basiscurriculum gehören.
3	Anspruchsvolles Wissen aus der Sekundarstufe I	Hierzu gehören fortgeschrittene Verfahren und Begriffe, die in der Sekundarstufe I bis zu quadratischen Gleichungen in der Algebra und zu Anfängen der Ähnlichkeitsgeometrie gehen.
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:

- Mit diesem Merkmal wird beschrieben, wie anspruchsvoll das mathematische Wissen ist, das man zum Verstehen der in der Aufgabe vorkommenden Angaben und Anweisungen benötigt. Es kommt also darauf an, in welchen curricularen Zusammenhang der in der Aufgabe explizit angesprochene Stoff gehört, das heißt auf welcher Stufe des Curriculums man diese Anforderungen gewöhnlich gelernt hat.
- Um eine reliable Codierung zu ermöglichen, wurden die in 1.1 aufgeführten Stoffgebiete den drei Wissensstufen zugeordnet (siehe entsprechende Übersicht im Anschluss an die Rubrik Beispiele).

Herkunft:

- Operationalisierung der Codes und Beispiele stammen von Neubrand (2003); für eine detaillierte Beschreibung dieser Variablen siehe auch Neubrand u.a. (2002).
- Für eine Ergänzung um eine Zuordnung der Sek-I-relevanten Stoffgebiete zu den drei Wissensstufen sind Blum und Jordan verantwortlich.

Beispiele

Code 1: „Grundkenntnisse“

Item (1): 18 : 2 =

Item (2): 13 – 9 =

Item (3): Berechne: 13 – 18 : 2 =

Item (4): Wie kannst du einen Geldbetrag von genau 31 Pfennig hinlegen, wenn du nur 10-Pfennig-, 5-Pfennig- und 2-Pfennig-Münzen zur Verfügung hast. Gib *alle* Möglichkeiten an.
(Quelle: PISA 2000)

Code 2: „Einfaches Wissen aus der Sekundarstufe I“

Item (1): Ergänze: Zwei gegenüberliegende Seiten eines Rechtecks sind ....

Item (2): Zwei benachbarte (anliegende) Seiten eines Rechtecks sind zusammen 13 cm lang. Zwei gegenüberliegende Seiten messen zusammen 18 cm. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

Beide Items gehören zur Wissensstufe 2 (einfaches Sek-I-Wissen), weil der Begriff „gegenüberliegend“ gebraucht wird, den man in der Grundschule wohl eher nicht in dieser kanonisierten Form verwendet.

Code 3: „Anspruchsvolles Wissen aus der Sekundarstufe I“

Item (1): Löse folgendes Gleichungssystem:

I $x + y = 13$
II $2x = 18$

Item (2): Zwei benachbarte (anliegende) Seiten eines Rechtecks sind zusammen 13 cm lang. Zwei gegenüberliegende Seiten messen zusammen 18 cm. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks? Löse diese Aufgabe mit einem linearen Gleichungssystem!

Beide Items gehören zur Wissensstufe 3 (höheres Wissen aus der Sek I), weil „Gleichungssystem“ explizit angesprochen ist.

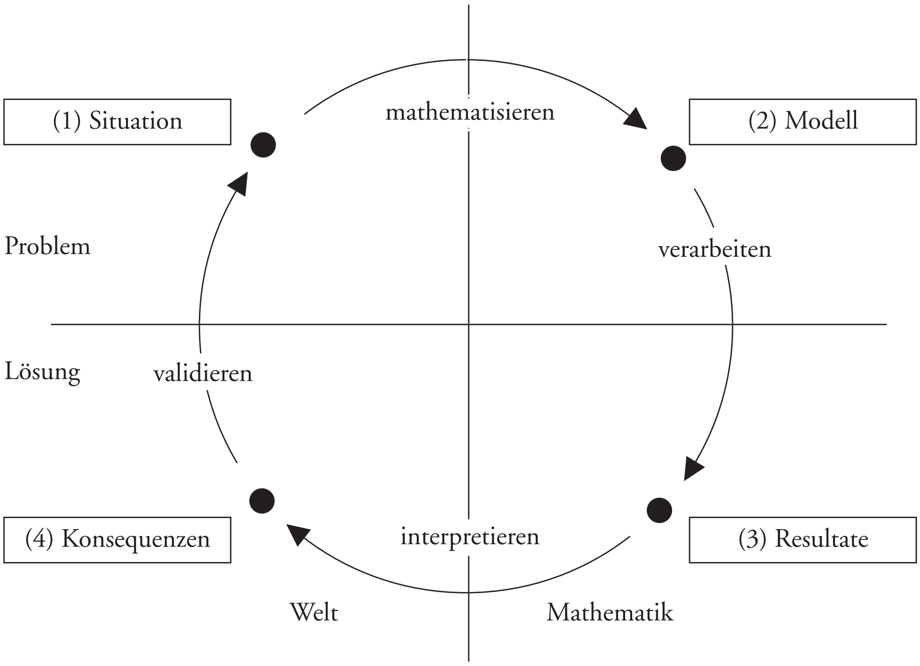
Folgende Übersicht gibt einen Überblick über die wesentlichen Stoffgebiete der Sekundarstufe I (entsprechend 1.1) und ihre Zuordnung zur curricularen Wissensstufe:

Stoffgebiet	Curriculare Wissensstufe
Arithmetik:	
(1) Zahlenbereiche und Rechnen:	
Natürliche Zahlen	1
Rationale Zahlen	2
Reelle Zahlen	3
(2) Prozent- und Zinsrechnung	2
(3) Potenzen und Wurzeln:	
Potenzen mit natürlichen Exponenten	2
Ansonsten	3
(4) Proportionalität; Antiproportionalität	2
(5) Arbeiten mit Größen (abhängig vom Zahlenmaterial)	1/2
Algebra:	
(1) Variablen/Terme	2
(2) Lineare Gleichungen:	
Lineare Gleichungssysteme und lineare Ungleichungen	3
Ansonsten	2
(3) Quadratische Gleichungen	3
(4) Sonstige Gleichungen	3
(5) Lineare Funktionen	2
(6) Quadratische Funktionen	3
(7) Sonstige Funktionen	3

Stoffgebiet	Curriculare Wissensstufe
Geometrie:	
(1) Grundbegriffe:	
Grundschulrelevante Figuren und Körper (Dreiecke, Vierecke, Quader)	1
Ansonsten	2
(2) Abbildungsgeometrie:	
Kongruenz und einfache Kongruenzabbildungen	2
Ansonsten	3
(3) Flächen- und Rauminhalte:	
Kegel, Kugel, zusammengesetze Körper	3
Ansonsten	2
(4) Pythagoras, Trigonometrie	3
(5) Darstellende Geometrie:	
Netze von Körpern, Schrägbilder	2
Zweitafel-/Dreitafel-Projektion	3
(6) Strahlensätze, Ähnlichkeit	3
(7) Beweise	3
Stochastik:	
(1) Beschreibende Statistik	2
(2) Beurteilende Statistik	3
(3) Wahrscheinlichkeitsrechnung:	
Satz von Bayes	3
Ansonsten	2
(4) Kombinatorik:	
Einfache Produktregel-Anwendung	2
Ansonsten	3

2 Mathematische Tätigkeiten

Wenn es sich nicht um rein technische Aufgaben handelt (siehe 3.1), kann das Lösen von Aufgaben als ein mehrschrittiger Prozess betrachtet werden, der insbesondere das Überführen einer problemhaltigen Situation in einen verarbeitbaren „Ansatz" und den Rückbezug des Ergebnisses auf die Ausgangssituation enthält. Für den Prozess des Überführens der Situation in das „Modell" ist bei außermathematischen Situationen der Begriff „Mathematisierung" gebräuchlich; „Modellieren" verwenden wir zur Kennzeichnung des gesamten Prozesses. Die folgende Figur (angelehnt an bekannte Schemata zum Modellierungsprozess; siehe unter anderem Blum, 1996; Klieme, Neubrand, & Lüdtke, 2001; Neubrand, 2002, Schupp, 1988) enthält die hier verwendete Terminologie:



Um dieses Schema im Folgenden kurz anzusprechen, notieren wir es als:

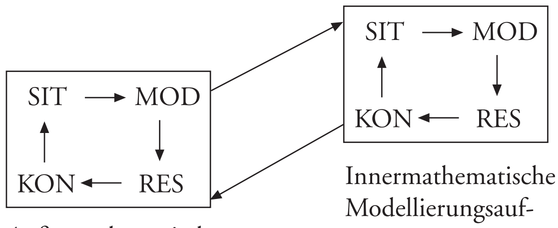
$$\begin{tikzcd} \text{SIT} \arrow[r] & \text{MOD} \arrow[d] \\ \text{KON} \arrow[u] & \text{RES} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

In den nun folgenden Codes geht es darum, die kognitiven Ansprüche, die mit dem Lösungsprozess bei einer bestimmten Aufgabe verbunden sind, in jeweils drei Stufen zu charakterisieren. Wir gehen dabei einerseits auf die „klassischen" außermathematischen Modellierungsaufgaben, andererseits aber auch auf die kognitiv analogen innermathematischen Aufgaben mit Modellierungs- und Problemlösepotenzial ein. Dabei wird auch beschrieben, wie diese beiden Typen systematisch aufeinander zu beziehen sind.

PISA hat die Perspektiven des Modellierens erweitert, indem das Grundschema des Modellierungsprozesses auch auf *inner*mathematische Situationen entsprechend angewendet wird (Klieme, Neubrand, & Lüdtke, 2001; Knoche u.a., 2002; Neubrand, 2002; Neubrand, 2003, Neubrand u.a., 2001). Aufgaben, in denen nicht gleich der „Ansatz", das „Modell" benannt wird, also Aufgaben, in denen das zu aktivierende Wissen nur „implizit", nicht „explizit" gegeben ist (nach der Terminologie von Neubrand, 2002), werden also als kognitiv gleichwertig und „strukturgleich" angesehen. Tatsächlich sind zur Lösung einer innermathematischen problemhaltigen Aufgabe analoge – nicht identische (!) – kognitive Prozesse erforderlich. Solche Aufgaben haben zudem gleichrangige didaktische Bedeutung für die Gestaltung des Mathematikunterrichts. Auch PISA-international ist diese Sichtweise nicht fremd, und für die Freudenthalsche Philosophie des Mathematiklernens ist sie geradezu charakteristisch. So werden in der mathematischen Tätigkeit des Problemstellens und -lösens im internationalen PISA-Framework gleichermaßen inner- wie außermathematische Probleme genannt (OECD, 1999).

Eine „Situation“, von der in einer (Modellierungs-)Aufgabe ausgegangen wird, kann bei dieser Sichtweise also eine außermathematische oder eine innermathematische Fragestellung sein. Es kann nun dreierlei vorkommen, (1) dass eine Aufgabe ganz als außermathematische Modellierungsaufgabe anzusehen ist, (2) dass sie als eine innermathematisch-problemhaltige Aufgabe, sozusagen eine innermathematische Modellierungsaufgabe, wie es in einigen PISA-Texten auch heißt (Neubrand u.a., 2002), erscheint oder (3) dass diese beiden Arten mathematischer Anforderungen in einer Aufgabe miteinander verschränkt vorkommen; im letzteren Fall liegt gleichzeitig eine außermathematische Situation vor, diese führt aber zur Notwendigkeit innermathematischen Modellierens.

Diese drei Fälle werden mit dem folgenden erweiterten Schema erfasst, das somit einen *erweiterten Modellierungsbegriff* definiert und den systematischen Zusammenhang außermathematischer und innermathematischer Aufgaben darstellt:



Außermathematische Modellierungsaufgabe, beginnend aus einem außermathematischen Kontext heraus

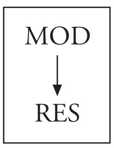
Innermathematische Modellierungsaufgabe, beginnend mit einer innermathematisch-problemhaltigen Situation

Jeder der beiden Zyklen ist „strukturgleich“: Es gibt in beiden Zyklen kognitive Prozesse, die als Übersetzen/Übertragen, Verarbeiten bzw. Interpretieren/Validieren angesprochen werden können, natürlich je unterschiedlicher konkreter Ausprägung, jedoch kognitiv analog. Beide Zyklen können für sich separat und unabhängig voneinander auftreten, aber eben auch verbunden mit einem Übergang von einem aus außermathematischem Anlass gefundenen Modell zu einer innermathematischen Problem- und Fragestellung, die ebenfalls einen Übertragungsprozess nach sich zieht. Diese Verbindung besteht darin, dass durch die Mathematisierung nicht ein nach festen Regeln abzuarbeitendes Modell entsteht, sondern dass diese Mathematisierung eine innermathematische Fragestellung erzeugt, die ihrerseits durch weitere innermathematische Schritte angegangen und strukturiert werden muss, um gelöst zu werden.

Ein typisches Beispiel ist die „31-Pfennig“-Aufgabe aus PISA 2000. Der außermathematische Kontext („Geld“, „Münzen“, „hinlegen“, …) zeigt lediglich auf, dass die Modellierung „Summen bilden, die 31 ergeben“ angemessen ist. Die möglichen Zerlegungen von 31 in die Summanden 2, 5 und 10 eröffnet aber seinerseits einen reichen innermathematischen Fragenkreis, der abermals die Aktivität des Übertragens einer Situation in ein „Modell“ – hier ist es das Aufstellen einer Systematik, die Überblick über die möglichen Zerlegungen gibt – erfordert.

Ebenso ist es bei der „Äpfel“-Aufgabe aus PISA 2000: Neben den außermathematischen Bezug („Obstbauer“, „Bäume“, „vor dem Wind schützen“, …) tritt sofort die innermathematische Situation des „quadratischen Musters“, die von da an eine innermathematische Übertragungs- oder Strukturierungsleistung erfordert.

Schließlich zeigt die obige Figur auch den „Ort“ der technischen Aufgaben auf. Das sind Aufgaben mit „explizit“ vorgegebenem Ausgangspunkt für die mathematische Bearbeitung. Bei ihnen ist keine Mathematisierung und keine innermathematische Strukturierungsleistung notwendig. Man kann sie somit als Aufgaben „ohne Kontext“ kennzeichnen. Im obigen Bild sind diese Aufgaben also so zu lokalisieren, dass nur die äußerste rechte „Spalte“ des innermathematischen Zyklus vorkommt.



Für die Trennlinie zwischen den Aufgaben, die vollständig als außermathematische Modellierungsaufgaben betrachtet werden können, also den Modellierungsaufgaben im „klassischen" Sinne, und Aufgaben, bei denen auch der innermathematische Modellierungszyklus aufgemacht werden muss, also den „Aufgaben" im erweiterten Sinne, gelten die analogen Kriterien wie bei der Unterscheidung zwischen den technischen Aufgaben und den innermathematischen Modellierungsaufgaben. Eine innermathematische Übertragungs-, Strukturierungs-, im erweiterten Sinn also Modellierungsleistung wird notwendig, wenn durch die Mathematisierung aus der außermathematischen Situation heraus nicht eine fertige Formel, Gleichung, Lösungsmethode, … entsteht – und sei diese auch noch so „schwierig" – sondern eine neue innermathematische Situation (d.h. eben keine technische Aufgabe!) aufgeworfen wird.

Kein zweiter Zyklus wird demnach – vollkommen konsistent zur üblichen Auffassung bei anwendungsbezogenen Aufgaben – erforderlich bei den „klassischen" Textaufgaben. Bei diesen führt die Mathematisierung in der Regel zu einer Gleichung, die dann nach den dafür bereitstehenden mathematischen Methoden bearbeitet werden kann.

2.1 Außermathematisches Modellieren (Übersetzen zwischen Realität und Mathematik)

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Außermathematisches Modellieren nicht notwendig	
1	Außermathematisches Modellieren auf niedrigem Niveau notwendig	Übersetzungen, die unmittelbar ausgeführt werden können, da das Modell explizit gegeben ist oder unmittelbar nahe liegt und die Interpretation direkt möglich ist.
2	Außermathematisches Modellieren auf mittlerem Niveau notwendig	Überschaubare Übersetzungen, die nicht unmittelbar ausführbar sind (z.B. müssen verschiedene Gegenstände miteinander in Beziehung gesetzt oder beim Mathematisieren *mehrere* Schritte durchgeführt werden).
3	Außermathematisches Modellieren auf hohem Niveau notwendig	Verwendete mathematische Modelle (wie Formeln, Gleichungen, Darstellungen von Zuordnungen, Zeichnungen, Ablaufpläne) vergleichen, reflektieren, kritisch beurteilen; Modell-Ergebnisse validieren; komplexe mathematische Modelle entwickeln.
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:
- Der Begriff „außermathematisches Modellieren“ bezeichnet Übersetzungsprozesse zwischen „Realität“ und Mathematik, das heißt das Mathematisieren von Realsituationen und das Interpretieren/Validieren mathematischer Resultate. Siehe hierzu Blum (1996, 2002).

Herkunft:
- Operationalisierung stammt von Blum und Jordan.

Beispiele

Code 1: „Niedriges außermathematisches Modellierungsniveau“

Item (1): 200 € werden auf einem Konto mit 7 % Jahreszinsen angelegt. Wie viel Zinsen werden nach einem Jahr gezahlt?
(Quelle: Kassel-Exeter-Studie)

Item (2): 7 Brötchen kosten 3,15 €. Was kosten 11 Brötchen?
(Quelle: Kassel-Exeter-Studie)

Code 2: „Mittleres außermathematisches Modellierungsniveau“

Item (1): Wenn ein Gummiball zu Boden fällt, springt er die Hälfte der Strecke wieder hoch. Der Ball wird von einem 18 Meter hohen Dach fallen gelassen. Welche gesamte Entfernung hat der Ball zurückgelegt, wenn er das dritte Mal den Boden berührt?
(Quelle: TIMSS)

Item (2): Im Schlussverkauf beträgt der Preis eines Kassettenrecorders nach einer 20 %igen Ermäßigung 120 €. Berechne den Preis vor der Ermäßigung.
(Quelle: Kassel-Exeter-Studie)

Item (3): Der Vater will seinem Sohn Thomas einen Zuschuss für ein Motorrad geben. Er macht zwei Angebote:
1) 15 € sofort, am folgenden Tag 20 € dazu, am nächsten Tag 25 € dazu usw., und so zwei Wochen lang (d.h. der Betrag wird täglich um 5 € erhöht).
2) 5 Cent sofort, am folgenden Tag 10 Cent dazu, am nächsten Tag 20 Cent dazu, usw. (d.h. der Betrag wird täglich verdoppelt), ebenfalls 14 Tage lang.
Für welches Angebot sollte sich Thomas entscheiden?

(Quelle: BLK Modellversuch Mathematik Hessen)

Code 3: „Hohes außermathematisches Modellierungsniveau“

Item (1): Frau Balsen isst sehr gerne Kekse und muss für eine Packung ihrer Lieblingskekse in ihrem Heimatort 2,20 € bezahlen. In einem Sonderangebot eines 25 km entfernten Supermarktes entdeckt sie die Packung für nur 1,73 €.
Wie viele Packungen muss sie im Supermarkt mindestens kaufen, damit es sich lohnt, extra wegen der Kekse dorthin zu fahren? Begründe deine Antwort.
(Quelle: A. J.; Anregung durch Mathematik lehren, Heft 75, S. 71)

Item (2): An der Anlegestelle einer großen Fähre findet sich diese Preistabelle:

Karte	1 Person	50,– €
Blockkarte	8 Personen	380,– €
Blockkarte	20 Personen	900,– €

Die Fährgesellschaft will eine Blockkarte für 50 Personen einführen. Was wäre dafür ein angemessener Preis? Begründe deine Antwort.
(Quelle: A. J.; Anregung durch Mathematik lehren, Heft 82, S. 66)

Item (3):

Preisanstieg knabberte am Wert
Kaufkraft einer Mark im Vergleich zu 1949

Um wie viel Prozent hat die Kaufkraft der DM seit ihrer Einführung 1949 jährlich im Mittel abgenommen?
(Quelle: Arnold Kirsch)

2.2 Innermathematisches Modellieren (Ansatz-Finden/Übersetzen innerhalb der Mathematik)

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Innermathematisches Modellieren nicht notwendig	Bei der Stufe „0“ sind zwei Ausprägungen möglich: (a) Es handelt sich um eine außermathematische Aufgabe. Hierbei wird nach dem Übersetzen in die Mathematik nur noch Basiswissen benötigt (bloßes Faktenwissen oder einfache Fertigkeiten/Arbeitstechniken). (b) Es handelt sich um eine technische Aufgabe, bei der der abzuarbeitende Ansatz bereits in der Aufgabe vorgegeben ist oder direkt aus dem „Wissensrepertoire“ abgerufen werden kann.
1	Innermathematisches Modellieren auf niedrigem Niveau notwendig	Der Lösungsansatz ist nicht unmittelbar aus dem „Wissensrepertoire“ abrufbar. Er wird jedoch durch die Aufgabenstellung nahe gelegt und benötigt zur vollständigen Entwicklung nur die Kenntnis des in der Aufgabe betrachteten mathematischen Gegenstandes. Es wird nur *ein* konkreter Gegenstand betrachtet oder es ist nur *ein* Modellierungsschritt (Standardmodellierung) zur Lösung nötig.
2	Innermathematisches Modellieren auf mittlerem Niveau notwendig	Für den Lösungsansatz sind zuerst Verbindungen herzustellen, die über den in der Aufgabe angesprochenen Gegenstand hinausgehen. Der Lösungsansatz ist ebenfalls nicht unmittelbar aus dem „Wissensrepertoire“ abrufbar. Zur Entwicklung werden Kenntnisse aus anderen mathematischen (Teil-)Gebieten benötigt, das heißt, es müssen verschiedene mathematische Gegenstände betrachtet werden oder mehrere Modellierungsschritte ausgeführt werden.
3	Innermathematisches Modellieren auf hohem Niveau notwendig	Zur Lösung der Aufgabe ist es notwendig, eine umfassende Strategie zu entwerfen und umzusetzen, oder über eine ganze Klasse von mathematischen Gegenständen nachzudenken. Die Aufgabe erfordert es, allgemeine Aussagen zu treffen oder über den Lösungsweg kritisch zu reflektieren (metakognitive Aktivitäten).
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:
- Der Begriff „innermathematisches Modellieren“ bezeichnet Übersetzungsprozesse *innerhalb* der Mathematik.

Herkunft:
- Operationalisierung stammt von Neubrand, Blum und Jordan.

Beispiele

Code 0: „Innermathematisches Modellieren nicht notwendig“

Item (1): 7 Brötchen kosten 3,15 €. Was kosten 11 Brötchen?
(Quelle: Kassel-Exeter-Studie)

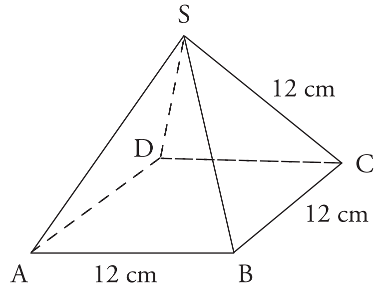
Item (2): 200 € werden auf einem Konto mit 7 % Jahreszinsen angelegt. Wie viel Zinsen werden nach *einem* Jahr gezahlt?
(Quelle: Kassel-Exeter-Studie)

Item (3): Ein Rechteck ist 4 cm lang und 3 cm breit. Wie groß ist der Flächeninhalt?
(Quelle: PISA 2000)

Code 1: „Niedriges innermathematisches Modellierungsniveau“

Item (1): Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat. Jede Kante der skizzierten Pyramide misst 12 cm.

Berechne den Flächeninhalt der Grundfläche ABCD.
(Quelle: PISA 2000)



Das Quadrat selbst ist im Text erwähnt und in der Aufgabe zu sehen. Aber es ist die Zuordnung Grundfläche –> Quadrat vorzunehmen, eine wenn auch kleine „Übersetzungsleistung“. Daher ist die Aufgabe keine „technische“ Aufgabe.

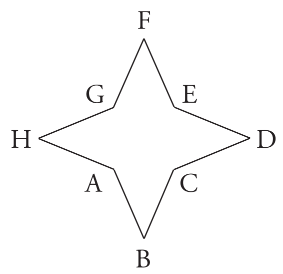
Item (2): Jeder Innenwinkel eines Vielecks misst 150°. Wie viele Seiten hat das Vieleck?

Der Ansatz erfordert nur Größen/Begriffe, die in unmittelbarem Zusammenhang mit dem in der Aufgabe genannten Gegenstand stehen: Innenwinkel, Vieleck, und dann liegt Winkelsumme und die Formel dafür nahe. Man kann sofort die Formel mit den gegebenen Informationen ansetzen: $150° n = (n - 2) 180°$.
(Aber man muss eben ein „Modell“, hier die Formel für die Winkelsumme heranziehen. Daher ist es keine technische Aufgabe.)

Item (3): Berechne den Oberflächeninhalt eines Zylinders, dessen Höhe 12 cm beträgt und der ein Volumen von 800 cm^3 hat.

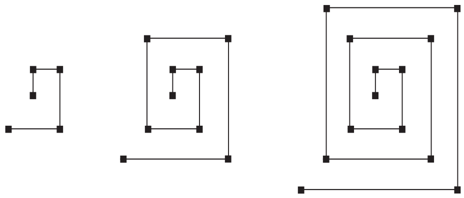
Es ist keine technische Aufgabe, weil nicht unmittelbar eine Formel anwendbar ist.

Item (4): „Vom Stern zur Pyramide“ – erste Teilaufgabe.
Der nebenstehende symmetrische Stern hat folgende Eigenschaften: Alle Seiten sowie die Strecke AC und CE haben die gleiche Länge. Beschreibe die Konstruktion der Figur.
(Quelle: „Bildungsstandards“)



Es ist keine „technische“ Konstruktionsaufgabe, weil ja zur Konstruktion erst ein Plan zu entwerfen ist. Es muss – und das ist der innermathematische Modellierungsschritt – erkannt werden, dass hier die Figuren gleichseitiges Dreieck und Quadrat versteckt sind (allerdings ist die Aufgabenstellung nicht ganz klar formuliert). Insofern ist zu „modellieren“. Andererseits zeigt die der Aufgabe beigegebene Zeichnung deutlich den Weg auf. Die Modellierungsleistung (Finden des Konstruktionsgangs) ist also nicht sehr anspruchsvoll und unmittelbar an die vorgegebene Figur geknüpft.

Item (5): Die Serie von Spiralfiguren kannst du fortsetzen. Zeichne die vierte Spiralfigur.
(Quelle: Wynands, 2001, S. 123)

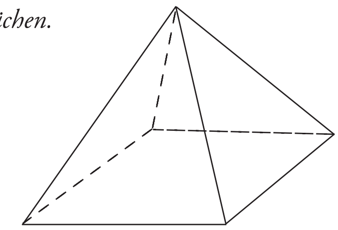


Man muss sich in die Struktur der Figur hineindenken und erkennen, nach welchem System die Figur gezeichnet ist. Insofern ist es also keine „technische“ Aufgabe, sondern eine „innermathematische“ Aufgabe. Die Modellierungsleistung ist aber unmittelbar an die vorgegebenen Figuren geknüpft. Darüber hinaus gehende Ideen sind nicht zu aktivieren.

Code 2: „Mittleres innermathematisches Modellierungsniveau"

Item (1): Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat. Jede Kante der skizzierten Pyramide misst 12 cm.

Berechne den Flächeninhalt einer der *Seitenflächen.*
(Quelle: PISA 2000)



Im Gegensatz zur analogen Aufgabe, die in Anspruchsniveau 1 genannt ist, sind nun weitere Beziehungen herzustellen, um zu einer Lösung zu kommen: Es ist die Idee der „Stützdreiecke" in irgendeiner Art zu aktivieren.

Item (2): Von einer kubischen Funktion des Typs $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ weiß man, dass ihr Graph symmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems ist und dass sie durch den Punkt (1,2) geht.
Welche Funktion ist es?

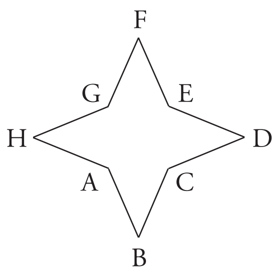
Durch die Bedingung „Symmetrie" wird eine Verbindung zu einer anderen Gedankenwelt hergestellt.

Item (3): Konstruiere auf zwei verschiedene Arten Wurzel aus 13 und überprüfe dein Ergebnis jeweils mit einer Rechnung.

Die Konstruktionsfiguren sind nicht gegeben. Man muss zuerst die nötigen Zusammenhänge herstellen.

Item (4): „Vom Stern zur Pyramide" – zweite Teilaufgabe.
Der nebenstehende symmetrische Stern hat folgende Eigenschaft: Alle Seiten sowie die Strecken AC und CE haben die gleiche Länge. Beschreibe die Konstruktion der Figur.

Durch Klappen der Dreiecksfläche entsteht eine Pyramide. Bestimme das Volumen der Pyramide.
(Quelle: „Bildungsstandards)

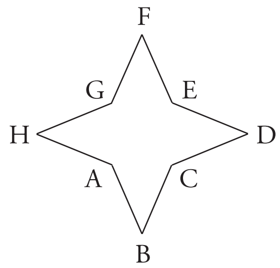


Der andere Gegenstand „Pyramide und deren Volumen" wird ins Spiel gebracht: „Verbindung". Entscheidend ist, dass die Höhe der Pyramide nicht direkt aus der Figur erkannt werden kann. Hier sind „Übersetzungsleistungen" zu erbringen. Dabei ist auch die Idee der Stützdreiecke zu aktivieren. Diese Modellierung kann nicht mehr unmittelbar an der Figur vorgenommen werden. Daher Niveau 2.

Code 3: „Hohes innermathematisches Modellierungsniveau“

Item (1): „Vom Stern zur Pyramide“ – dritte Teilaufgabe.
Der nebenstehende symmetrische Stern hat folgende Eigenschaft: Alle Seiten sowie die Strecken AC und CE haben die gleiche Länge. Beschreibe die Konstruktion der Figur.

Der Stern wird so verändert, dass die Stecken AC und AB nicht mehr gleich lang sind. Die Symmetrie des Sterns bleibt jedoch erhalten. Unter welchen Bedingungen entsteht durch Klappen der Dreiecksflächen eine Pyramide? (Quelle: „Bildungsstandards“)



Verallgemeinerung und Reflexion kommt durch die Frage nach der Bedingung, die nur zu beantworten ist, nachdem man sich über allgemeine Eigenschaften einer Pyramide klar wird.

Item (2): Wie kannst du einen Geldbetrag von genau 31 Pfennig hinlegen, wenn du nur 10-Pfennig-, 5-Pfennig- und 2-Pfennig-Münzen zur Verfügung hast? Gib *alle* Möglichkeiten an!
(Quelle: PISA 2000)

Man wird den außermathematischen Kontext hier als marginal anschauen und lieber (auch) von innermathematischem Gegenstand sprechen wollen. Dann aber ist die Aufgabe nur lösbar, wenn man sich eine umfassende, allgemeine Strategie zurechtlegt. Beide Modellierungsintensitäten sind auf die gleiche Stufe zu stellen.

Item (3): Eine Pyramide wird im Unterricht als massives Holzmodell vorgestellt. Frage: Welche Größen sollte man bei dieser Pyramide messen, wenn man ein identisches Stück bei einer Modellbau-Werkstatt in Auftrag geben will?
Alternativ: Genügt es eigentlich, alle Kantenlängen dieser Pyramide zu kennen, um ein identisches Modell anfertigen zu können? Bei einem Viereck ist es doch bekanntlich nicht so!

Es wird also nach den „allgemeinen“ Bestimmungsstücken einer Pyramide gefragt.

Item (4): Warum sind alle Parabeln achsensymmetrisch?

Offenbar eine Frage nach „allgemeinen“ Eigenschaften und nach dem Reflektieren über eine ganze Klasse mathematischer Gegenstände.

Item (5): Welche drei aufeinander folgenden Zahlen ergeben die Summe 3000? Gibt es solche mit der Summe 3010?

Die erste (Teil-)Aufgabe gehört zum Anspruchsniveau 2, denn außer der Durchführung der Addition selbst muss man auch noch Querverbindungen zu irgendeiner Idee von „ungefähr bei 1000“/„Mittelwert muss 1000 sein“ oder dergleichen ziehen. Die zweite Teilaufgabe fragt hingegen nach einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit, denn sonst könnte man nicht die Antwort „nein“ geben. Die zweite Aufgabe gehört also zu Anspruchsniveau 3.

2.3 Mathematisches Argumentieren

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht notwendig	
1	Argumentation auf niedrigem Niveau notwendig	Bloße Wiedergabe von Standardargumentationen; Argumentationen durchführen, für die Alltagswissen genügt; einschrittige oder rein rechnerische Argumente entwickeln.
2	Argumentation auf mittlerem Niveau notwendig	Überschaubare mehrschrittige, auch begrifflich geprägte mathematische Argumente entwickeln und schriftlich darlegen oder gegebenenfalls solche nachvollziehen.
3	Argumentation auf hohem Niveau notwendig	Komplexe mathematische Argumente (Begründungen, Beweise, Strategien, Verallgemeinerungen) entwickeln und schriftlich darlegen oder gegebenenfalls solche nachvollziehen; verschiedene Arten von mathematischen Argumentationen oder deren Effizienz vergleichen oder bewerten.
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:
- Unter Argumentieren (vgl. u.a. Hanna, 1995) soll die Fähigkeit verstanden werden, eine geschlossene Argumentationskette zu präsentieren oder auch verschiedene Formen von mathematischen Argumentationen zu verstehen bzw. zu bewerten. Hierzu gehören sämtliche Arten von Begründungen, so zum Beispiel das konsequente Durchführen einer Strategie oder das Ausführen eines mathematischen Beweises. Wie das Modellieren bezieht sich auch diese Tätigkeit auf innermathematische Prozesse wie auf reale Sachverhalte.

Herkunft:
- Operationalisierung stammt von Blum und Jordan.

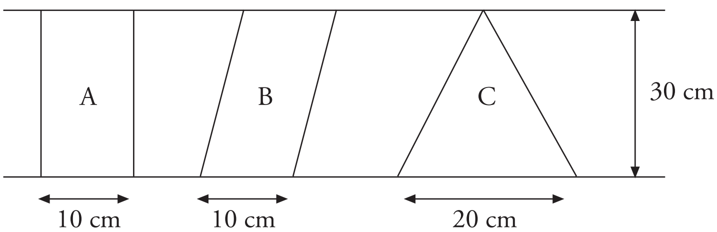
Beispiele

Code 1: „Argumentation auf niedrigem Niveau notwendig“

Item (1): Gegeben sind die beiden Geraden $y = 2x + 3$ und $y = 2x – 4$. Begründe: Die beiden Geraden schneiden sich nicht.
(Quelle: BLK Modellversuch Mathematik Hessen)

Item (2): In einer Lostrommel mit 200 Losen sind 50 Gewinnlose und 150 Nieten. Kann man nur durch Hinzufügen von Gewinnlosen eine Gewinnchance von 100 % erreichen? Begründe deine Antwort.
(Quelle: BLK Modellversuch Mathematik Hessen)

Item (3): Welche der Figuren haben den gleichen Flächeninhalt? Begründe deine Antwort.



☐ A

☐ B

☐ C

(Quelle: Kurs Mathematik 8, S. 110)

Code 2: „Argumentation auf mittlerem Niveau notwendig“

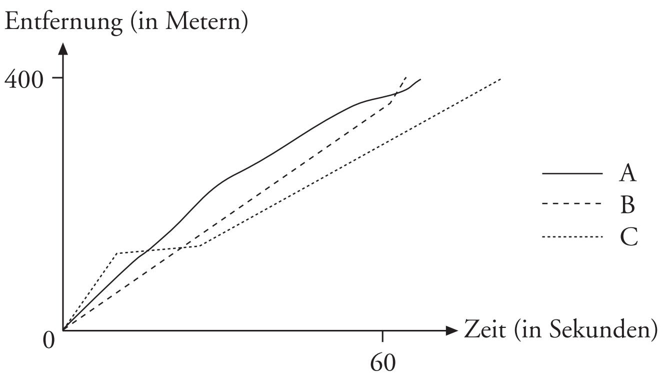
Item (1): Gegeben ist die Scheitelform $f(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{98}{16}$ einer quadratischen Funktion f.

Wie, d.h. durch welche geometrischen Operationen, entsteht der Graph von f aus dem Graphen der Funktion g mit g (x) = x^2? (Keine Zeichnung erforderlich, nur Schritte angeben.)
(Quelle: BLK Modellversuch Mathematik Hessen)

Item (2): Wie ändert sich der Flächeninhalt eines Quadrats, wenn man die Seitenlänge verdreifacht?
☐ Der Flächeninhalt bleibt gleich.
☐ Der Flächeninhalt verdreifacht sich.
☐ Der Flächeninhalt versechsfacht sich.
☐ Der Flächeninhalt verneunfacht sich.
☐ Das kann man nicht entscheiden, ohne die Seitenlänge zu kennen.
Begründe deine Antwort.
(Quelle: A. J.)

Code 3: „Argumentation auf hohem Niveau notwendig“

Item (1): Die unten abgebildeten drei Graphen beschreiben für 3 Läufer (A, B und C) den Verlauf eines 400-m-Rennens auf dieser Laufbahn.
(Quelle: Hugh Burkhardt)



Stell dir vor, du bist Sportreporter. Schreibe einen kurzen Bericht, in dem alle entscheidenden Phasen des Rennens vorkommen. Du brauchst dabei keine genauen Werte abzulesen.

Item (2): Wie kannst du einen Geldbetrag von genau 31 Pfennig hinlegen, wenn du nur 10-Pfennig-, 5-Pfennig- und 2-Pfennig-Münzen zur Verfügung hast? Gib *alle* Möglichkeiten an!
(Quelle: PISA 2000)

Item (3): Schlaufuchs behauptet:
„Die Summe von 5 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar.“
Stimmt seine Behauptung? Begründe deine Antwort.
(Quelle: Lehrbuch der Mathematik, S. 92)

2.4 Gebrauch von mathematischen Darstellungen

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht notwendig	
1	Gebrauch von Darstellungen auf niedrigem Niveau notwendig	Informationen aus gegebenen Darstellungen (Tabelle, Graph oder Diagramm) entnehmen; Standarddarstellungen mittels gegebener Informationen anfertigen oder fortsetzen.
2	Gebrauch von Darstellungen auf mittlerem Niveau notwendig	Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen; zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln (Übersetzen); Zusammenhänge zwischen gegebenen Darstellungen herstellen.
3	Gebrauch von Darstellungen auf hohem Niveau notwendig	Gegebene Darstellungen beurteilen und reflektieren.
9	Keine Zuordnung möglich	

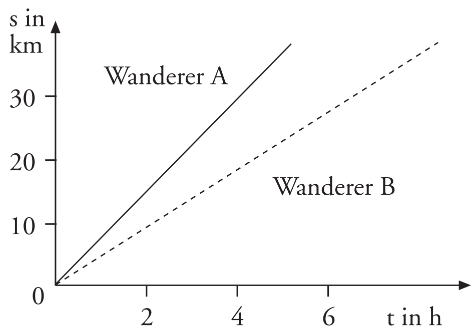
Anmerkung:
- Bruner (1972) unterscheidet drei Ebenen der Darstellung (modes of representation):
  – enaktive Darstellung, das heißt Darstellung von Handlungen;
  – ikonische Darstellung, das heißt Darstellung durch Bilder;
  – symbolische Darstellung, das heißt Darstellung durch Sprache oder Zeichen.
  Hier soll insbesondere die zweitgenannte Kategorie berücksichtigt werden.

Herkunft:
- Operationalisierung stammt von Blum und Jordan.

Beispiele

Code 1: „Niedriges Darstellungsniveau“

Item (1): Zwei Personen A und B wandern von Obersheim über Mittersbach nach Untersdorf. Die beiden Graphen stellen den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit für die Wanderer A und B dar.



Wie viel später kommt Wanderer B im 30 km von Obersheim entfernten Mittersbach an als Wanderer A? Kreuze an.

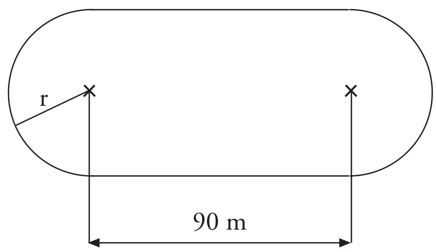
☐ 6 h
☐ 60 min
☐ 120 min

Item (2): An der Anlegestelle einer großen Fähre findet sich diese Preistabelle:

Karte	1 Person	50,– €
Blockkarte	8 Personen	380,– €
Blockkarte	20 Personen	900,– €

Welchen Preis hat eine Gruppe von 4 Personen zu zahlen?
(Quelle: A. J.; Anregung durch Mathematik lehren, Heft 82, S. 66)

Item (3): Eine Runde auf der inneren Laufbahn des abgebildeten Sportplatzes hat eine Länge von 400 m. Die geraden Abschnitte sind jeweils 90 m lang. Hieran schließen sich halbkreisförmige Kurven an.
Wie groß ist der Radius r der Kurven? Runde auf volle Meter.

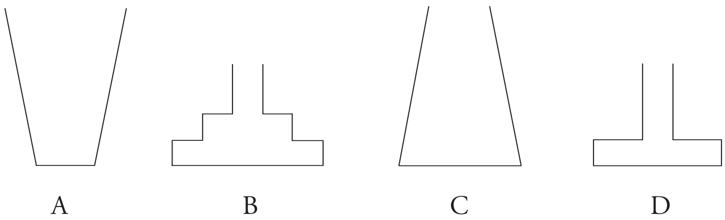


Skizze (nicht maßstabsgetreu)

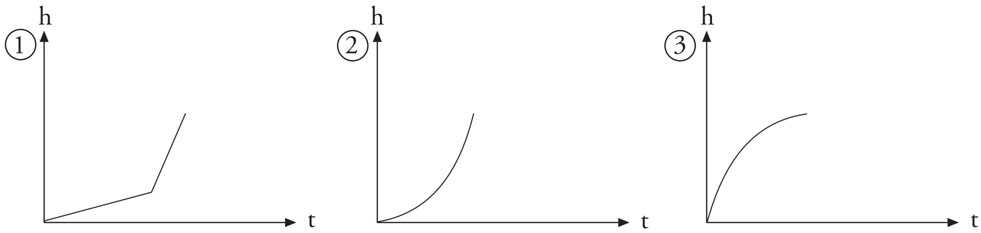
Code 2: „Mittleres Darstellungsniveau"

Item (1): Beim gleichmäßigen Füllen eines Gefäßes mit Wasser steigt die Höhe des Wasserspiegels (Füllhöhe h) in Abhängigkeit von der Zeit (t). Die Zuordnung Zeit –> Füllhöhe lässt sich grafisch im Koordinatensystem darstellen. Man spricht dann von Füll-Graphen.

Im folgenden Bild sind die Querschnitte verschiedener Gefäße gezeichnet.



Im nächsten Bild sind verschiedene Füll-Graphen skizziert.

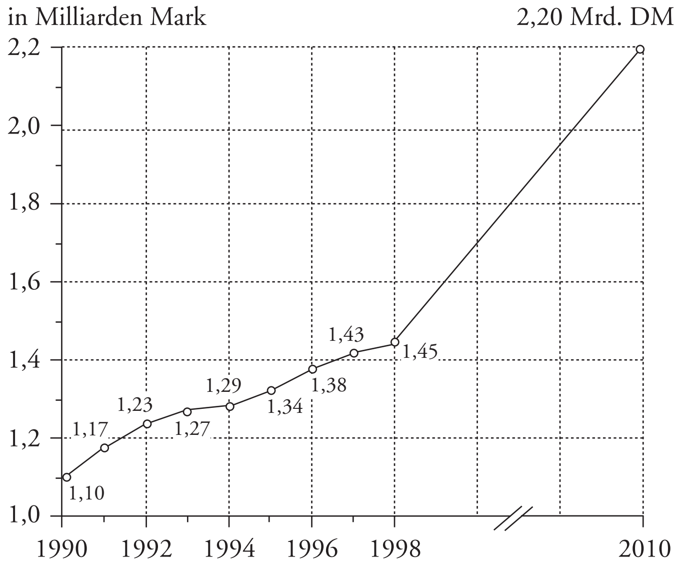


Welcher Graph gehört zu welcher Gefäßfom? Begründe deine Antwort.
(Quelle: Günther Schmidt)

Code 3: „Hohes Darstellungsniveau“

Item (1): Erläutere, was durch die abgebildete Grafik ausgedrückt werden soll.
Ist die Darstellungsform angemessen?

Renten und Pensionen für Hamburger Staatsbedienstete



(Quelle: BLK Modellversuch Mathematik Hessen)

3 Aufgabenklassen

3.1 Aufgabenklassen – Typen mathematischen Arbeitens

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
1	Technische Aufgaben	Items, die nur technisches Wissen außerhalb jeglicher Kontextanbindungen erfordern.
2	Rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben	Inner- und außermathematische Aufgaben, die Modellierungen erfordern und bei denen vorwiegend prozedurales Denken in der Phase der Verarbeitung nötig ist.
3	Begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgaben	Inner- und außermathematische Aufgaben, die Modellierungen erfordern und bei denen vorwiegend konzeptuelles Denken in der Phase der Verarbeitung nötig ist.
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:

- Bei technischen Aufgaben muss entschieden werden, ob es sich um Faktenwissen oder Fertigkeiten handelt. Dies wird nach der Eingabe der Aufgabenklassen (natürlich nur, falls diese als technisch eingeordnet wird) bei der elektronischen Erfassung abgefragt. Also: *Zusätzliche Unterscheidung in separater Variable: Faktenwissen oder Fertigkeiten zu aktivieren (siehe hierzu 3.2).*

Herkunft:

- Die Operationalisierung greift auf den Kern der nationalen PISA-Konzeption zurück (Neubrand, 2002; Neubrand, 2003; Neubrand u.a., 2001). Mathematische Grundbildung zu erfassen bedeutet demnach, die volle Spannweite der (wesentlichen) kognitiven Prozesse, die mathematisches Arbeiten ausmachen, zu erfassen. Diese Klasseneinteilung hat sich mittlerweile auch empirisch bewährt, wie die Übersicht in Neubrand (2003) zeigt, und war auch die Grundlage für eine ausgewogene Zusammenstellung des nationalen PISA-Mathematiktests.

Beispiele

Code 1: „Technische Aufgaben“

Item (1): Berechne: 13 – 18 : 2 =

Item (2): Löse folgendes Gleichungssystem:
I $x + y = 13$
II $2x = 18$

Item (3): Konstruiere ein Dreieck aus:
$a = 5{,}7$ cm
$c = 4{,}9$ cm
$\beta = 49°$

Item (4): Löse: $x^2 + 3x - 6 = 0$

Code 2: „Rechnerische Aufgaben“

Item (1): Jans Zimmer ist 3 m breit und 4 m lang. Jan will einen Teppichboden für sein Zimmer kaufen. Wie viel m^2 Teppichboden benötigt er?

Item (2): Janine lässt ihr Fahrrad beim Fahrradhändler reparieren. Sie wird mit dem Auto hingebracht, um ihr Fahrrad abzuholen. Zurück fährt sie mit dem Rad. Für den Hin- und Rückweg benötigt sie zusammen 13 Minuten. Mit dem Rad hin und zurück hat sie sonst immer 18 Minuten gebraucht. Wie lang dauert die Autofahrt zum Fahrradhändler? Wie lang dauert die Fahrt mit dem Rad zum Fahrradhändler?

Item (3): Zwei benachbarte (anliegende) Seiten eines Rechtecks sind zusammen 13 cm lang. Zwei gegenüberliegende Seiten messen zusammen 18 cm. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

Item (4): Einem Sparkonto mit Zinssatz 4 % werden am Ende des Jahres 32 € gutgeschrieben.
Wie viel war zu Jahresbeginn auf dem Konto?
(Quelle: Neubrand u.a., 2001)

Code 3: „Begriffliche Aufgaben“

Item (1): Eine Pizza mit 30 cm Durchmesser kostet 30 Zeds, eine Pizza mit 40 cm Durchmesser kostet 40 Zeds. Welche Pizza ist preiswerter?
(Quelle: PISA 2000)

Item (2): Ein Oberstufenschüler behauptet: Die natürlichen Zahlen sind nur spezielle Bruchzahlen. Was sagst du zu dieser Aussage?
(Quelle: Henn, 1998)

Item (3): Ein Waschmittelhersteller wirbt mit dem Slogan: Unser Produkt wäscht um 150 % weißer. Nimm zu dieser Aussage Stellung.
(Quelle: Henn, 1998)

Item (4): Der Radius eines Kreises wird verdoppelt. Wie verändert sich seine Fläche?
(Quelle: Neubrand u.a., 2001)

3.2 Wissensart – Faktenwissen/Fertigkeiten (bei den technischen Aufgaben)

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
1	Faktenwissen	Faktenwissen kann als *„Wissen dass"* bezeichnet werden. Alles, was als Fakten aus dem Gedächtnis abgerufen werden kann, wird als Faktenwissen bezeichnet. Dazu gehören in der Mathematik zum Beispiel Sätze, Definitionen, Regeln, Bezeichnungen usw., ohne dass diese in bestimmten Situationen auch angewendet werden.
2	Fertigkeiten	Erfordert eine technische Aufgabe Fertigkeiten, so geht es um *„Wissen wie"* etwas umgesetzt wird. Es beinhaltet eine prozedurale Abfolge von einzelnen Schritten, die hierarchisch oder linear aufgebaut ist und deren Ablauf, wie bei einem „Algorithmus", im Großen und Ganzen festgelegt ist und gegebenenfalls automatisiert werden kann. Prozedurales Wissen kann sich auf verschiedene Objekte (Zahlen, Figuren …) beziehen und verschiedene mathematische Verfahren einschließen (rechnen, zeichnen, konstruieren …).
9	Keine Zuordnung möglich	

Herkunft:

- Operationalisierung stammt von J. Neubrand und Neubrand.

Beispiele

Code 1: „Faktenwissen"

Beispiel für eine Aufgabe, die nur Faktenwissen erfordert:

Item (1): Ergänze: Zwei gegenüberliegende Seiten eines Rechtecks sind ……………………………………………
(Ergänzung: gleich lang oder parallel)

Wann Faktenwissen positiv vorhanden ist, ist wohl einfacher zu entscheiden als dies gegenüber zweifelhaften Fällen abzugrenzen. Hierzu ein Beispiel:

Item (2): (Gegenbeispiel: nicht Faktenwissen, sondern konzeptuelles Wissen)
Für zwei Zahlen x (x > 0) und y gilt die Gleichung xy = 1. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ Wenn der Wert von x größer als 1 ist, so ist der Wert von y negativ.
- ☐ Wenn der Wert von x größer als 1 ist, so ist der Wert von y größer 1.
- ☐ Wenn der Wert von x kleiner als 1 ist, so ist der Wert von y kleiner als 1.
- ☐ Wenn der Wert von x zunimmt, so nimmt auch der Wert von y zu.
- ☐ Wenn der Wert von x zunimmt, so nimmt der Wert von y ab.

(Quelle: PISA 2000)

*Hier handelt es sich **nicht** um Faktenwissen, weil es darum geht, die verschiedenen Begriffe positiv, negativ, größer, kleiner 1 mit der Multiplikation in Zusammenhang zu bringen. Es ist überwiegend konzeptuelles Wissen erforderlich (siehe hierzu 3.1, Code 3).*

Code 2: „Fertigkeiten"

Beispiele für Aufgaben, in denen überwiegend Fertigkeiten gefordert sind:

Item (1): Berechne: 18 : 2 = … oder: 13 – 9 = … oder: 13 – 18 : 2 = …

Item (2): Löse folgendes Gleichungssystem:
I x + y = 13
II 2x = 18

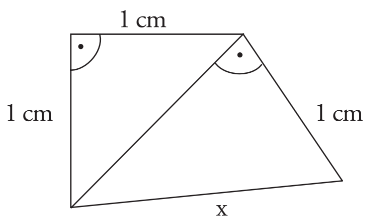
Item (3): Konstruiere ein Rechteck aus den Seiten a = 9 cm und b = 4 cm.

Item (4): Berechne die Fläche eines Rechtecks mit den Seiten 3 cm und 4 cm.

Item (5): Löse die quadratische Gleichung …

Item (6): Wie lang ist x?

- ☐ $\sqrt{2}$ cm
- ☐ 1,5 cm
- ☐ $\sqrt{3}$ cm
- ☐ 2 cm
- ☐ $2 \bullet \sqrt{2}$ cm



(Quelle: PISA 2000)

Das Denken ist auf das Ausrechnen bezogen und verlangt somit von dem Aufgabenbearbeiter Fertigkeiten.

4 Grundvorstellungen

4.1 Intensität mathematischer Grundvorstellungen

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht notwendig	Zur Bearbeitung sind *keine* Grundvorstellungen nötig. Gegebenenfalls müssen automatisierte Handlungen ausgeführt werden, hinter denen ursprünglich Grundvorstellungen gestanden haben (etwa Ablesen oder Vergleichen).
1	Grundvorstellungen auf niedrigem Niveau notwendig	Es ist *eine elementare* Grundvorstellung nötig, oder eine (triviale) *Kombination* von „verwandten" elementaren Grundvorstellungen (etwa Addieren mit Subtrahieren), gegebenenfalls jeweils auch repetitiv.
2	Grundvorstellungen auf mittlerem Niveau notwendig	Es ist (nur) *eine erweiterte* Grundvorstellung nötig, gegebenenfalls auch in (trivialen) Kombinationen oder Repetitionen, oder eine (nichttriviale) *Kombination zweier* nichtverwandter elementarer Grundvorstellungen.
3	Grundvorstellungen auf hohem Niveau notwendig	Es ist *mehr* nötig (d.h. *eine komplexe* Grundvorstellung oder eine [nichttriviale] *Kombination* von nichtverwandten Grundvorstellungen, die nicht alle elementar sind, oder eine nichttriviale *Kombination von mehr als zwei* nichtverwandten elementaren Grundvorstellungen).
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:
- Nach vom Hofe (1995) beschreiben mathematische „Grundvorstellungen" Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten, Realkontexten und individuellen mentalen Strukturen. Sie sind Träger der Bedeutung des mathematischen Inhalts und repräsentieren für das Individuum den „Kern" des Inhalts.
- Bezugsbasis für alle Bewertungen ist ein „Grundvorstellungs-Atlas", der eine Liste von Grundvorstellungen zu den für die Sek I relevanten mathematischen Inhalten enthält.
- Alle technischen Items und nur diese haben als Grundvorstellungsintensität stets den Wert „0" (siehe 3.1). Modellierungen (inner- und außermathematisch) und Argumentationen erfordern hingegen stets Grundvorstellungen, das heißt, falls in 2.1/2/3 ein Code > 0 vergeben wird, muss auch die Grundvorstellungsintensität > 0 sein (und die Aufgabe muss in 3.1 als rechnerisch oder begrifflich eingeordnet werden).
- Von den im Folgenden aufgeführten Beispielen sollen nur einige – für die einzelnen Kategorien besonders illustrativen – Aufgaben näher erläutert werden.

Herkunft:
- Die Operationalisierung stammt von Blum, Jordan, Kleine und vom Hofe (2004) (die beiden letztgenannten Universität Regensburg).

Beispiele

Code 0: Grundvorstellungen sind „nicht notwendig"

Unterscheidung (a): keine Grundvorstellung nötig

Item (1): Ein Rechteck ist 4 cm lang und 3 cm breit. Wie groß ist sein Flächeninhalt?
(Quelle: PISA 2000)

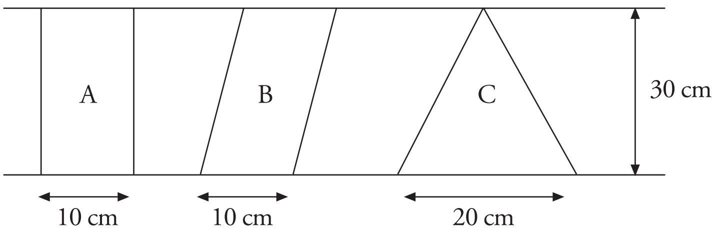
Item (2): Drücke $\frac{1}{8}$ als Prozentzahl aus.
(Quelle: Kassel-Exeter-Studie)

Item (3): Löse nach x auf: $4 - 2x = 7 - x$
(Quelle: Kassel-Exeter-Studie)

Item (4): Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$. Schreibe f(x) in Scheitelform.
(Quelle: BLK Modellversuch Mathematik Hessen)

Unterscheidung (b): automatisierte Handlung, die keine Aktivierung von Grundvorstellungen erfordert

Item (5): Welche der Figuren haben den gleichen Flächeninhalt? Kreuze an.



☐ A
☐ B
☐ C

(Quelle: Kurs Mathematik 8, S. 110)

Hier genügt Faktenwissen über Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte. Sind die drei gesuchten Flächeninhalte berechnet, müssen diese miteinander verglichen werden. Dies geschieht in der Sekundarstufe I automatisiert.

Code 1: „Grundvorstellungen auf niedrigem Niveau notwendig“

Unterscheidung (a): eine elementare Grundvorstellung notwendig

Item (1): 200 € werden auf einem Konto mit 7 % Jahreszinsen angelegt. Wie viel Zinsen werden nach *einem* Jahr gezahlt?
(Quelle: Kassel-Exeter-Studie)

Item (2/3): An der Anlegestelle einer großen Fähre findet sich diese Preistabelle:

Karte	1 Person	50,– €
Blockkarte	8 Personen	380,– €
Blockkarte	20 Personen	900,– €

a) Welchen Preis hat eine Gruppe von 4 Personen zu zahlen?
b) Wie viele Karten bekommt man für 300,– €?
(Quelle: A. J.; Anregung durch Mathematik lehren, Heft 82, S. 66)

Item (4): In einer Lostrommel mit 200 Losen sind 50 Gewinnlose und 150 Nieten. Wie groß ist die Chance, einen Gewinn zu erzielen?
(Quelle: BLK Modellversuch Mathematik Hessen)

Bei (1) genügt die Aktivierung einer elementaren Prozentvorstellung, bei (2) eine Vervielfachungsvorstellung, bei (3) eine Divisionsvorstellung und bei (4) eine Vorstellung vom Anteilbilden.

Unterscheidung (b): (triviale) Kombination von verwandten elementaren Grundvorstellungen notwendig

Item (1): 7 Brötchen kosten 3,15 €. Was kosten 11 Brötchen?
(Quelle: Kassel-Exeter-Studie)

Hier müssen Vorstellungen von Multiplikation und Division trivial miteinander verknüpft werden.

Code 2: „Grundvorstellungen auf mittlerem Niveau notwendig“

Unterscheidung (a): eine erweiterte Grundvorstellung notwendig („funktional“)

Item (1): Für zwei Zahlen x (x > 0) und y gilt die Gleichung xy = 1. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
- ☐ Wenn der Wert von x größer als 1 ist, so ist der Wert von y negativ.
- ☐ Wenn der Wert von x größer als 1 ist, so ist der Wert von y größer 1.
- ☐ Wenn der Wert von x kleiner als 1 ist, so ist der Wert von y kleiner als 1.
- ☐ Wenn der Wert von x zunimmt, so nimmt auch der Wert von y zu.
- ☐ Wenn der Wert von x zunimmt, so nimmt der Wert von y ab.

(Quelle: PISA 2000

Item (2–4): An der Anlegestelle einer großen Fähre findet sich diese Preistabelle (Weiterführung der Aufgabe aus Code 1):

Karte	1 Person	50,– €
Blockkarte	8 Personen	380,– €
Blockkarte	20 Personen	900,– €

c) Handelt es sich bei der Preistabelle um eine proportionale Zuordnung? Begründe deine Antwort.

d) Die Fährgesellschaft will eine Blockkarte für 50 Personen einführen. Was wäre dafür ein angemessener Preis? Begründe deine Antwort.

e) Peter behauptet: „Egal mit wie vielen Personen man fährt, es ist immer am günstigsten, so viele 20 Personen-Blockkarten wie möglich zu kaufen, dann so viele 8 Personen-Blockkarten wie möglich und dann den Rest Einzelkarten.“ Hat Peter recht? Begründe deine Antwort.

Item (5): Schlaufuchs behauptet: „Die Summe von 5 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar.“
Stimmt seine Behauptung? Begründe deine Antwort.
(Quelle: Lehrbuch der Mathematik, S. 92)

Bei (1) wird eine Kovariationsvorstellung vom Funktionsbegriff benötigt, bei (2) eine ebensolche bei Proportionalitäten. (3) und (4) kennzeichnen funktionale Beziehungen über einen ganzen Bereich, bei (5) muss die Einsetzungsvorstellung vom Variablenbegriff genutzt werden.

Unterscheidung (b): eine nicht triviale Kombination von elementaren Grundvorstellungen notwendig

Item (1): Karina hat 1000 € in ihrem Ferienjob verdient. Ihre Mutter empfiehlt ihr, das Geld zunächst bei einer Bank für 2 Jahre festzulegen (Zinseszins!). Dafür hat sie zwei Angebote:

a) „Plus“-Sparen: Im ersten Jahr 3 % Zinsen, im zweiten Jahr dann 5 % Zinsen.

b) „Extra“-Sparen: Im ersten und zweiten Jahr jeweils 4 % Zinsen.

Karina meint: „Beide Angebote sind gleich gut.“ Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort.
(Quelle: PISA 2000)

Item (2): Im Schlussverkauf beträgt der Preis eines Kassettenrecorders nach einer 20 %igen Ermäßigung 120 DM. Berechne den Preis vor der Ermäßigung.
(Quelle: Kassel-Exeter-Studie)

Items, bei denen ein erhöhter (vorgegebener) Grundwert angewendet werden muss (wie bei [1]) oder ein verminderter (vorgegebener) Grundwert (wie bei [2]), fallen in diese Stufe.

Unterscheidung (c): eine nicht triviale Kombination von elementaren, aber nicht verwandten Grundvorstellungen notwendig

Item (1): Wie kannst du einen Geldbetrag von genau 31 Pfennig hinlegen, wenn du nur 10-Pfennig-, 5-Pfennig- und 2-Pfennig-Münzen zur Verfügung hast? Gib *alle* Möglichkeiten an!
(Quelle: PISA 2000)

Item (2): Wenn ein Gummiball zu Boden fällt, springt er die Hälfte der Strecke wieder hoch. Der Ball wird von einem 18 Meter hohen Dach fallen gelassen. Welche gesamte Entfernung hat der Ball zurückgelegt, wenn er das dritte Mal den Boden berührt? Kreuze an.
(Quelle: TIMSS)

- ☐ 31,5 m
- ☐ 40,5 m
- ☐ 45 m
- ☐ 63 m

Code 3: „Grundvorstellungen auf hohem Niveau notwendig“

Unterscheidung (a): eine (nicht triviale) Kombination von nicht nur elementaren Grundvorstellungen notwendig

Item (1): Preisanstieg knabberte am Wert
Kaufkraft einer Mark im Vergleich zu 1949

Um wie viel Prozent hat die Kaufkraft der DM seit ihrer Einführung 1949 jährlich im Mittel abgenommen?
(Quelle: Arnold Kirsch)

Item (2): Claudia hat einen Sack mit Murmeln. Sie gibt die Hälfte davon Thomas und dann ein Drittel der Murmeln, die noch im Sack sind, Peter. Peter meint: „Wenn Claudia ihre Murmeln so wie beschrieben Thomas und mir geben kann, dann muss die Zahl de r Murmeln, die sie übrig hat, gerade sein.“ Hat Peter recht? Begründe deine Antwort.
(Quelle: Werner Blum)

Mittelwertbildungen bei exponentiellem Wachstum (wie bei [1]) oder Kombinationen aus der Einsetzungsvorstellung beim Variablenbegriff und irgendeiner Subtraktionsvorstellung (wie bei [2]) gehören hierzu.

Unterscheidung (b): eine (nicht triviale) Kombination von mehr als zwei nicht verwandten Grundvorstellungen notwendig

Item (1): Frau Balsen isst sehr gerne Kekse und muss für eine Packung ihrer Lieblingskekse in ihrem Heimatort 2,20 DM bezahlen. In einem Sonderangebot eines 25 km entfernten Supermarktes entdeckt sie die Packung für nur 1,73 DM. Wie viele Packungen muss sie im Supermarkt mindestens kaufen, damit es sich lohnt, extra wegen der Kekse dorthin zu fahren? Begründe deine Antwort.
(Quelle: A. J.; Anregung durch Mathematik lehren, Heft 75, S. 71)

5 Sprache

5.1 Sprachlogische Komplexität

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Kein oder kaum Text vorhanden	Die Reihenfolge der Sätze bzw. Satzteile entspricht den Schritten der mathematischen Bearbeitung. Hierzu gehören einfache Hauptsätze ohne Nebensätze sowie Ein-Wort-Sätze.
1	Niveau niedrig	Die Reihenfolge der Sätze bzw. der Satzteile entspricht nicht unmittelbar den Schritten der mathematischen Bearbeitung. Dazu gehören mehrere Haupt- und Nebensätze, sprachliche Rückbezüge sowie längere Texte, in denen die relevanten Informationen neben irrelevanten vorkommen.
2	Niveau durchschnittlich	Die Reihenfolge der Sätze bzw. Satzteile entspricht in erschwerter Weise oder gar nicht den Schritten der mathematischen Bearbeitung. Unter der äußeren sprachlichen Form sind die logischen Bezüge nur verdeckt vorhanden. Die im Text genannten Größen sind nicht unmittelbar für die Rechnung zu übernehmen. Es können Ausdrücke der Gestalt „erhöhen um"/„erhöhen auf" vorkommen. Dabei kann es sich auch um mehrere Haupt- und Nebensätze handeln, die sprachliche Rückbezüge aufweisen. Es können logische Funktionen (Verneinungen, Wenn-dann-Verknüpfungen) oder All- oder Existenzquantifizierungen auftreten.
3	Niveau hoch	Zum Verständnis des Textes ist ein frühzeitiger Einsatz ausgefeilter sprachlogischer Techniken notwendig. Logische Funktionen (Verneinungen, Wenn-dann-Verknüpfungen) sowie All- oder Existenzquantifizierungen häufen sich.
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:

- Hier ist zu beachten, inwieweit der sprachliche Fluss bei der Aufgabenstellung mit dem Lösungsprozess in einem mathematischen Modell übereinstimmt. Zu ermitteln ist daher, welche relevanten Informationen aus einem Kontext sich identifizieren und in eine mathematische Beschreibung überführen lassen. Insbesondere rufen sprachliche Konstruktionen, die die logische Struktur der Kontextdarstellung betreffen, sowie solche Formulierungen, die durch die Authentizität einer Situation bedingt sind, Schwierigkeiten hervor. Zu all dem siehe auch Cohors-Fresenborg (1996) und Cohors-Fresenborg, Sjuts und Sommer (2004).

Herkunft:

- Die Kategorie wurde von Kaune und Cohors-Fresenborg (beide Universität Osnabrück) operationalisiert.

Beispiele

Code 0: „Kein oder kaum Text vorhanden"

Item (1): 18 : 2 =

Item (2): 13 – 9 =

Item (3): Berechne: 13 – 18 : 2 =

Item (4): Löse $x^2 + 3x - 6 = 0$

Item (5): Berechne im Kopf.

Item (6): Wir sind in der Klasse 7B 27 Schüler, davon 10 Mädchen. Wie viel Prozent der Schüler sind Mädchen?

Code 1: „Sprachlogik auf niedrigem Niveau notwendig“

Item (1): Zeichne zwei Punkte A und B, die 5 cm voneinander entfernt sind. Konstruiere mit Zirkel und Lineal alle Kreise mit dem Radius 3,5 cm, die durch A und B gehen.
(Quelle: Lambacher Schweizer 7, S. 96)

Code 2: „Sprachlogik auf mittlerem Niveau notwendig“

Item (1): Wenn man von einer Zahl erst den Kehrwert bildet und davon dann die Gegenzahl, dann erhält man denselben Wert als wenn man von der Ausgangszahl erst die Gegenzahl und davon dann den Kehrwert bildet.
(Quelle: Elemente der Mathematik 7, S. 217)

Item (2): Zeichne eine Gerade g, einen Punkt P auf g und einen Punkt Q, der nicht auf g liegt. Konstruiere mit Zirkel und Lineal einen Kreis durch P und Q mit g als Tangente.
(Quelle: Lambacher Schweizer 7, S. 96)

Code 3: „Sprachlogik auf hohem Niveau notwendig“

Item (1): Wenn Peter fünf Jahre jünger wäre, dann wäre er zweimal so alt wie Paul war, als er sechs Jahre jünger war, und wenn Peter neun Jahre älter wäre, dann wäre er dreimal so alt wie Paul, wenn er vier Jahre jünger wäre.
(Quelle: Hans Reichenbach)

6 Aufgabenstellung

6.1 Art der Repräsentationsformate (Instruktion)

Hier sollen nur diejenigen Repräsentationsformate erhoben werden, die inhaltliche Informationen für die Aufgabenbearbeitung aufweisen.

Beispiele von Aufgaben, die Bilder ohne inhaltlichen Bezug verwenden – bei denen das Repräsentationsformat Bild als „nicht vorhanden“ eingeordnet wird:

1. Einer Aufgabe ist ein Bild angehängt mit einem grübelnden Menschen – ohne entsprechende Gedankenblase, die einen inhaltlichen Bezug hat.
2. Neben einer Aufgabe, bei der auf ein rechtwinkliges Dreieck der Satz des Pythagoras angewendet werden soll, wird ein Bild mit einer Badewanne und zwei Pharaonenkindern gezeigt.
3. Abbildungen von Glücksbringern (wie z.B. Kleeblätter).

Die Repräsentationsformate (3) Term/Formel, (4) Tabelle, (5) Graph/Graphik/Diagramm und (6) Bild/Foto enthalten häufig Texte (z.B. in Form von Beschriftungen) oder Zahlen (z.B. Maßeinheiten). Diese sollen nicht zusätzlich erhoben werden, solange diese als integrative Bestandteile enthalten sind.

Beispiel einer Aufgabe, bei der Zahlen enthalten sind, die aber nicht separat erfasst werden sollen:
Aufgabe: 7x + 6 = 9. Berechne x. Vorhandene Repräsentationsformate: Text als reine Instruktion und Term/Formel (keine anderen vorhanden).

Herkunft:
- Die Kategorien wurden von Ross operationalisiert.

6.1.1 Text

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Reine Instruktion	
2	Mehr als reine Instruktion	

Anmerkung:
- Nicht zusätzlich berücksichtigt werden sollen Kurztexte (wie z.B. Beschriftungen), die in (4) Tabellen, (5) Graphen/Graphiken/Diagrammen und (6) Bildern/Fotos enthalten sind.

6.1.2 Zahlen

6.1.2.1 Relevante Zahlen

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	

Anmerkung:
- Hier sollen diejenigen Zahlen berücksichtigt werden, die für sich alleine stehen bzw. in Texten vorkommen und für die Bearbeitung der Aufgabe benötigt werden.
- Nicht zusätzlich berücksichtigt werden sollen Zahlen, die in (3) Termen/Formeln, (4) Tabellen, (5) Graphen/Graphiken/Diagrammen und (6) Bildern/Fotos enthalten sind.

6.1.2.2 Irrelevante Zahlen

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	

Anmerkung:
- Hier sollen diejenigen Zahlen berücksichtigt werden, die für sich alleine stehen bzw. in Texten vorkommen und für die Bearbeitung der Aufgabe nicht benötigt werden.
- Nicht zusätzlich berücksichtigt werden sollen Zahlen, die in (3) Termen/Formeln, (4) Tabellen, (5) Graphen/Graphiken/Diagrammen und (6) Bildern/Fotos enthalten sind.

6.1.3 Term/Formel

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	

6.1.4 Tabelle

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	

6.1.5 Graph/Graphik/Diagramm

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	

6.1.6 Bild/Foto

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	

6.2 Anzahl der explizit eingeforderten Lösungswege

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Kein Weg gefordert	
1	Ein Lösungsweg: Aufforderung, nach einer Methode vorzugehen	Die Instruktion enthält die Aufforderung, nach einer bestimmten Lösungsmethode vorzugehen bzw. einen bestimmten Lösungsweg zu beschreiten.
2	Mehrere Lösungswege: Aufforderung, nach mehreren Methoden vorzugehen	Die Instruktion enthält die Anweisung, nach mehreren (mindestens zwei) Lösungsmethoden vorzugehen bzw. mehrere Lösungswege zu beschreiten.
9	Keine Zuordnung möglich	

Herkunft:
- Die Kategorie wurde von Ross in Anlehnung an Neubrand (2002) operationalisiert.

Beispiele

Code 0: „Kein Weg gefordert"

Item (1): Löse die quadratische Gleichung.
$x^2 - 16x + 28 = 0$

Code 1: „Ein Lösungsweg: Aufforderung, nach einer Methode vorzugehen"

Item (1): Bestimme rechnerisch die Lösung mithilfe der *quadratischen Ergänzung.*
$x^2 - 16x + 28 = 0$

Item (2): Bestimme die Lösungen mithilfe der p-q-Formel.
$x^2 - 8x + 7 = 0$

Code 2: „Mehrere Lösungswege: Aufforderung, nach mehreren Methoden vorzugehen"

Item (1): Finde eine möglichst genaue Vorgehensweise, um die Oberfläche der Karosserie des Mercedes der A-Klasse zu berechnen. Vergleiche verschiedene Vorgehensweisen und die zu erwartenden Ergebnisse (Abbildungen von verschiedenen Draufsichten mit genauen Zentimeterangaben, die sogar Wölbungen im Blech deutlich machen).

6.3 Lösungs- bzw. Strukturierungshilfen

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	Die Aufgabe enthält keine zusätzlichen Hinweise, die den Lösungsweg vorstrukturieren bzw. helfen, den Lösungsansatz zu finden.
1	Vorhanden	Die Aufgabe enthält zusätzliche Hinweise, die den Lösungsweg vorstrukturieren bzw. helfen, den Lösungsansatz zu finden. (Dies wird daran deutlich, dass Informationen gegeben werden, die man weglassen könnte, ohne das mathematische Problem im eigentlichen Sinn zu verändern.)
9	Keine Zuordnung möglich	

Herkunft:

- Die Kategorie wurde von Ross in Anlehnung an entsprechende Variablen bei Neubrand (2002) operationalisiert.

Beispiele

Code 0: „Lösungs- bzw. Strukturierungshilfen nicht vorhanden“

Item (1): Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion lautet $y = 1/3\ x^2 - 2x + 1$.
Bestimme die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel, berechne deren Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und veranschauliche dies zeichnerisch in einem geeignet gewählten Koordinatensystem.

Hier enthält insbesondere die dritte Instruktion keine zusätzlichen Hinweise, die den Lösungsweg weiter vorstrukturieren. Es ist nicht möglich, die Instruktion zu kürzen, ohne den eigentlichen Sinn der Aufgabe zu verändern.

Code 1: „Lösungs- bzw. Strukturierungshilfen vorhanden“

Item (1): Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion lautet $y = 1/3\ x^2 - 2x + 1$.
Bestimme die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel, berechne deren Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und zeichne die Parabel dann im Intervall $-2 \leq x \leq 8$ mithilfe weiterer geeigneter Parabelpunkte (Wertetabelle!) in ein Koordinatensystem ein (Längeneinheit 1 cm) ein.

Hier enthält die dritte Instruktion (Klammerausdrücke) zusätzliche Hinweise, die den Lösungsweg weiter vorstrukturieren. Es ist (wie im Beispiel Code 0 Aufgabe [1] gezeigt) möglich, die Instruktion zu kürzen, ohne den eigentlichen Sinn zu verändern.

7 Lösungsprozess

7.1 Mathematische Richtung der Auseinandersetzung

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
1	Konform zur mathematischen Konzeptionsbildung	Die Auseinandersetzung verläuft entlang der in der Mathematik üblichen Denkrichtung.
2	Entgegengesetzt zur mathematischen Konzeptionsbildung	Die Auseinandersetzung verläuft gegenläufig zu der in der Mathematik üblichen Denkrichtung.
9	Keine Zuordnung möglich	

Herkunft:
- Die Kategorie wurde von Neubrand operationalisiert. Dass „Umkehraufgaben" aus mathematikdidaktischer bzw. psychologischer Sicht unterschiedlich zu bewerten sind, wird von Neubrand (2002) thematisiert.

Beispiele

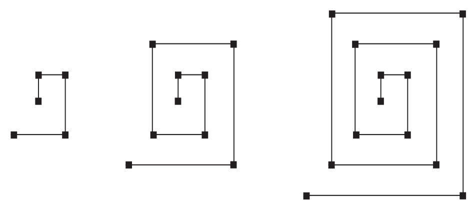
Code 1: „Konform zur mathematischen Konzeptionsbildung"

Item (1): Bei Aufgaben zum Thema Funktionsgraphen nennen wir *per Vereinbarung* den Übergang von der Gleichung zum Graphen die Standardaufgabe (Code 1).

Item (2): Eine große Tafel Schokolade wiegt 100 g und kostet 90 Cent, eine kleine wiegt 40 g und kostet halb so viel wie die große.
Du kaufst 3 große und 5 kleine Tafeln. Was kostet es dann?

Item (3): An einer Feier nehmen 4 Personen teil. Alle stoßen mit ihren Gläsern an. Wie oft klingen die Gläser? Wie oft klingen sie bei 5 Personen, wie oft bei 10 oder 100 Personen?

Item (4): Die Serie von Spiralfiguren kannst du fortsetzen.
a) Zeichne eine vierte Spiralfigur.
b) Die 1. Spirale hat eine Länge von 0,5 cm.
Wie lang sind in der 2. und 3. Spirale alle Linien zusammen?
Wie lang ist deine Spirale?



Item (5): Berechne 6 + 7 + 8, 10 + 11 + 12, 29 + 30 + 31 und weitere Summen von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen. Wie erhältst du die Summe ganz schnell? Begründe deinen Rechenweg.

Code 2: „Entgegengesetzt zur mathematischen Konzeptionsbildung“

Item (1): Bei Aufgaben zum Thema Funktionsgraphen nennen wir *per Vereinbarung* den Übergang vom Graphen zur Funktionsgleichung die „Umkehraufgabe“ (Code 2).

Item (2): Eine große Tafel Schokolade wiegt 100 g und kostet 90 Cent, eine kleine wiegt 40 g und kostet halb so viel wie die große.
Was kannst du für 5,– € kaufen? Gib zwei (alle!) Möglichkeiten an. Wie viel Geld bleibt übrig?

Item (3): Bei einer anderen Feier stoßen ebenfalls alle Gäste miteinander an. Die Gläser klingen 78-mal. Wie viele Gäste waren da?

Item (4): (Bezogen auf Item [4] aus Code 1:) Gibt es in der Serie eine Spirale der Länge 0,5 m (0,55 m)? Begründe deine Antwort.

Item (5): Welche drei aufeinander folgenden Zahlen ergeben die Summe 3000? Gibt es solche Zahlen mit der Summe 3010?

Item (6): Einem Sparkonto mit Zinssatz 4 % werden am Ende des Jahres 32 DM gutgeschrieben. Wie viel Geld war zu Jahresbeginn auf dem Konto?

7.2 Umfang der Bearbeitung (Anzahl der notwendigen Lösungsschritte)

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
1	Niedrig	Die Aufgabe (nach konventionellen Methoden) zu lösen, erfordert vier oder weniger Entscheidungen von den Schülern (Entscheidungen verstanden als kleine Lösungsschritte). Sie enthält keine „Teilaufgabe", die für sich betrachtet als Aufgabe codiert werden könnte (sie enthält keine impliziten Größen, d.h. es sind keine großen Zwischenschritte mit Teillösungen notwendig).
2	Mittel	Die Aufgabe (nach konventionellen Methoden) zu lösen, erfordert mehr als vier Entscheidungen von den Schülern und kann eine „Teilaufgabe" (im oben beschriebenen Sinne) enthalten.
3	Hoch	Die Aufgabe (nach konventionellen Methoden) zu lösen, erfordert mehr als vier Entscheidungen von den Schülern und enthält zwei oder mehr „Teilaufgaben".
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:
- Die jeweilige Aufgabe selbst für sich lösen und notieren/zählen, wie viele Zwischenresultate man behalten musste, um – bei möglichst sparsamem Lösungsweg – bis zur Lösung zu kommen.

Herkunft:
- Die Kategorie, weite Teile der Operationalisierung und die aufgeführten Beispiele entstammen aus *The TIMSS Videotape Classroom Study* (Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll, & Serrano, 1999). Vgl. auch die Beschreibung der entsprechenden Variablen in Neubrand u.a. (2002).

Beispiele

Code 1: „Niedrig"

Item (1): Löse die Gleichung: $2x + 7 = 2$

Item (2): Jeder Innenwinkel eines gleichseitigen Vielecks misst 150°. Wie viele Seiten hat das Vieleck?

Item (3): Errechne die Höhe eines Zylinders, der ein Volumen von 2.826 cm^3 und einen Radius von 6 cm hat.

Item (4): Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck hat die Fläche von 0,5 m^2. Bestimme die Länge der Schenkel.

Code 2: „Mittel"

Item (1): Löse das Gleichungssystem: $2y = 3x – 4$; $2x + y = 5$

Item (2): Gegeben ist ein Winkel eines Parallelogramms. Bestimme die Größe der anderen Winkel.

Item (3): Ist es möglich, einen Stock mit der Länge von 1 m in einer Box mit den Maßen $4 \times 5 \times 8$ dm zu verpacken?

Item (4): ABCD ist ein Parallelogramm. Seite AB ist 72 mm und Seite AC ist 4 cm lang. Die Höhe zur Seite AB ist 0,3 dm. Errechne den Umfang des Parallelogramms.

Code 3: „Hoch“

Item (1): Stelle graphisch die folgenden linearen Ungleichungen dar und bestimme deren gemeinsame Schnittfläche: $y \leq x + 4$; $x \leq 2$; $y \geq -1$

Item (2): Der Querschnitt einer Scheune hat die Form eines Rechtecks mit einem Halbkreis darüber. Die Scheune ist 20 m breit und misst ihre größte Höhe bei 25 m. Errechne das Volumen an Erntegut, welches die Scheune fassen kann, wenn sie eine Länge von 100 m hat.

Item (3): Die Oberfläche eines Basketballs ist 15-mal so groß wie die eines Tennisballs. Um wie viel größer ist das Volumen des Basketballs im Vergleich zum Tennisball?

Item (4): AB ist der Durchmesser von einem Kreis O; C ist ein Punkt auf dem Kreisumfang. Beweise, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

8 Ergebnis

8.1 Art der zwingend erforderlichen Repräsentationsformate (Antwort)

Hier sollen nur diejenigen Repräsentationsformate erhoben werden, die zwingend erforderlich sind. (Ist dies nicht entscheidbar, so ist die Codierung 9 anzugeben.)

Bei geschlossenen Antwortformaten sollen nicht die Repräsentationsformate der Antwort (zusätzlich zu den Repräsentationsformaten des Inputs) codiert werden. Hier wird Code 9 zugewiesen.

Herkunft:
- Die Kategorien wurden von Ross operationalisiert.

8.1.1 Text

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:
- Bei geschlossenen Antwortformaten nicht die Repräsentationsformate der Antwort (zusätzlich zu den Repräsentationsformaten des Inputs) raten. Zuweisung des Codes 9.

8.1.2 Zahl

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:
- Bei geschlossenen Antwortformaten nicht die Repräsentationsformate der Antwort (zusätzlich zu den Repräsentationsformaten des Inputs) raten. Zuweisung des Codes 9.

8.1.3 Term/Formel

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:
- Bei geschlossenen Antwortformaten nicht die Repräsentationsformate der Antwort (zusätzlich zu den Repräsentationsformaten des Inputs) raten. Zuweisung des Codes 9.

8.1.4 Tabelle

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:

- Bei geschlossenen Antwortformaten nicht die Repräsentationsformate der Antwort (zusätzlich zu den Repräsentationsformaten des Inputs) raten. Zuweisung des Codes 9.

8.1.5 Graph/Graphik/Diagramm

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:

- Bei geschlossenen Antwortformaten nicht die Repräsentationsformate der Antwort (zusätzlich zu den Repräsentationsformaten des Inputs) raten. Zuweisung des Codes 9.

8.1.6 Bild/Foto

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
0	Nicht vorhanden	
1	Vorhanden	
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:

- Bei geschlossenen Antwortformaten nicht die Repräsentationsformate der Antwort (zusätzlich zu den Repräsentationsformaten des Inputs) raten. Zuweisung des Codes 9.

8.2 Antwortformat

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
1	Geschlossen	Antwortalternative vorgegeben, in der Regel multiple choice oder wahr-/falsch-Aussage.
2	Offen	Antwortalternativen nicht vorgegeben.

8.3 Eindeutigkeit der Lösungen

Code	Code-Name	Detaillierte Beschreibung/Erklärung
1	Lösung eindeutig	
2	Mehrere Lösungen vorhanden	
9	Keine Zuordnung möglich	

Anmerkung:

- Hier ist nur das Ergebnis gemeint, nicht der Lösungsweg.

Beispiele

Code 1: „Lösung eindeutig“

Item (1): Löse die Gleichung: $2x + 7 = 2$

Item (2): Jeder Innenwinkel eines gleichseitigen Vielecks misst 150°. Wie viele Seiten hat das Vieleck?

Item (3): Errechne die Höhe eines Zylinders, der ein Volumen von 2.826 cm^3 und einen Radius von 6 cm hat.

Code 2: „Mehrere Lösungen vorhanden“

Item (1): Frau Balsen isst sehr gerne Kekse und muss für eine Packung ihrer Lieblingskekse in ihrem Heimatort 2,20 € bezahlen. In einem Sonderangebot eines 25 km entfernten Supermarktes entdeckt sie die Packung für nur 1,73 €.
Wie viele Packungen muss sie im Supermarkt mindestens kaufen, damit es sich lohnt, extra wegen der Kekse dorthin zu fahren? Begründe deine Antwort.
(Quelle: A. J.; Anregung durch Mathematik lehren, Heft 75, S. 71)

Anhang: Reliabilitäten – Rho-Werte der Kategorien

Die Raterübereinstimmung wurde in zwei Studien im Jahr 2003 geprüft. Im Jahr 2004 wurde eine weitere Studie durchgeführt. An allen drei Studien nahmen jeweils zwölf Rater teil. An den ersten beiden Studien beteiligten sich die selben zwölf Rater. An der Studie im Jahr 2004 waren acht Rater aus der Studie von 2003 beteiligt, vier Rater kamen neu hinzu.

Datengrundlage für die Analyse der Raterübereinstimmung bildeten Mathematikaufgaben wie in Abschnitt 3.1.6 beschrieben.

Zur Bestimmung der Raterübereinstimmung wurden zwei Koeffizienten berechnet.

(a) *Rho* (vgl. Shavelson & Webb, 1991) gibt an, welcher Anteil der Gesamtvarianz (über alle zwölf Rater) auf systematische Unterschiede zwischen den beurteilten Aufgaben anstatt auf systematische Unterschiede zwischen den Ratern oder zufälligen Fehlern (z.B. Eingabefehler der Ratings in die Computermaske) zurückgeht. Rho kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Je höher der Wert von Rho ist, desto besser ist die Raterübereinstimmung.

Rho ist bei geringer Gesamtvarianz schwer zu interpretieren. In diesem Fall kann der Wert von Rho sehr gering sein, obwohl die Rater hoch miteinander übereinstimmen.

(b) Daher wurde als ein weiteres Maß der Übereinstimmung die *mittlere prozentuale Übereinstimmung* berechnet. Verglichen wurden dabei alle Codes einer Kategorie (z.B. die 6 Codes für das Stoffgebiet Arithmetik). Wenn die Codes von zwei Ratern bei einer Aufgabe übereinstimmten, wurde ein Punkt vergeben, wenn sie nicht übereinstimmten wurde kein Punkt vergeben. Addiert man die Punkte für den Vergleich zwischen zwei Ratern auf und teilt sie durch die Anzahl der möglichen Punkte, erhält man die mittlere Übereinstimmung dieser Raterpaarung. Insgesamt resultierten bei zwölf Ratern 66 nicht redundante mittlere Übereinstimmungen zwischen Raterpaarungen. Mittelt man dann über diese 66 mittleren Übereinstimmungen der Raterpaarungen, erhält man die mittlere prozentuale Übereinstimmung über alle Rater (MW %). Dieser Wert ist in den Tabellen eingetragen.

Bei einigen Analysen resultieren negative Varianzkomponenten. Diese wurden in Anlehnung an Shavelson und Webb (1991) auf 0 gesetzt. Daher nahm auch der Wert von Rho den Wert 0 an. In den Tabellen sind diese Fälle mit „a“ gekennzeichnet.

Falls ein Code von keinem der Rater vergeben wurde, konnte der Koeffizient Rho nicht berechnet werden. Diese Fälle sind in den Tabellen mit „y“ gekennzeichnet.

Aufgrund der gemachten Erfahrungen in den Analysen der Raterübereinstimmung wurden einige Codes neu zum Codierschema hinzugefügt. Daher konnten diese Codes auch nicht in den Analysen überprüft werden. In den Tabellen ist dies mit „x“ gekennzeichnet.

Bei der ersten Analyse der Beurteilerübereinstimmung (Spalte „1. Test“ in den Tabellen) auf Grundlage von 108 Mathematikaufgaben ergaben sich für einige zentrale Kategorien für uns nicht zufrieden stellende Beurteilerübereinstimmungen. In anderen Fällen wollten wir die Robustheit der Befunde überprüfen. Daher wurde ein zweiter Test (Spalte „2. Test“ in den Tabellen) auf Grundlage von 48 neuen Aufgaben durchgeführt. Falls für einen Code kein Eintrag in der zweiten Spalte besteht, wurde dieser Code nur beim ersten Test der Beurteilerübereinstimmung berücksichtigt.

Die nachfolgenden Tabellen, wie auch die Bezeichnung der Codes sind analog zur Gliederung im Kategorienschema.

Tabelle 1: Raterübereinstimmung: Stoffgebiete

Code		1. Test		2. Test		3. Test	
		Rho	**MW %**	**Rho**	**MW %**	**Rho**	**MW %**
Arithmetik	Gepooled über alle Codes		0,81	–	–		0,86
1	Zahlbereiche und Rechnen	0,96		–	–	y	
2	Prozent- und Zinsrechnung	0,99		–	–	0,92	
3	Potenzen und Wurzeln	0,96		–	–	0,99	
4	Proportionalität/Antiproportionalität	0,95		–	–	0,00	
5	Arbeiten mit Größen	0,81		–	–	0,00	
9	Keine Zuordnung möglich	0,97		–	–	0,97	
Algebra	Gepooled über alle Codes		0,81	–	–		0,83
1	Variablen/Terme	0,88		–	–	0,80	
2	Lineare Gleichungen	0,94		–	–	y	
3	Quadratische Gleichungen	0,91		–	–	0,00	
4	Sonstige Gleichungen	0,75		–	–	0,86	
5	Lineare Funktionen	0,94		–	–	y	
6	Quadratische Funktionen	0,99		–	–	y	
7	Sonstige Funktionen	0,90		–	–	0,98	
9	Keine Zuordnung möglich	0,98		–	–	0,95	
Geometrie	Gepooled über alle Codes		0,93	–	–		0,89
1	Geometrische Grundbegriffe usw.	0,79		–	–	y	
1	Geometrische Konstruktionen	0,94		–	–	y	
2	Abbildungsgeometrie	0,94		–	–	0,98	
3	Flächen- und Rauminhaltsberechnungen	0,99		–	–	0,99	
4	Satzgruppe des Pythagoras	1,00		–	–	0,00	
5	Darstellende Geometrie (Körperdarstellung)	0,65		–	–	1,00	
6	Strahlensätze, Ähnlichkeit	0,94		–	–	0,97	
7	Geometrische Beweise	x		–	–		
9	Keine Zuordnung möglich	1,00		–	–	0,99	
Stochastik	Gepooled über alle Codes		0,95	–	–		1,00
1	Beschreibende Statistik	0,92		–	–	1,00	
2	Beurteilende Statistik	y		–	–	y	
3	Wahrscheinlichkeitsrechnung	0,99		–	–	1,00	
4	Kombinatorik	0,25		–	–	y	
8	Sonstiges stochastisches Stoffgebiet	y		–	–		
9	Keine Zuordnung möglich	0,98		–	–	1,00	
Curriculare Wissensstufe	Gepooled über alle Codes		0,64		0,78		0,82
1	Grundkenntnisse	0,83		0,61		y	
2	Einfaches Wissen aus der Sekundarstufe I	0,85		0,95		0,94	
3	Anspruchvolles Wissen aus der Sekundarstufe I	0,90		0,96		0,94	
9	Keine Zuordnung möglich	0a		0,00		y	
	Mittelwert	0,91		0,95		0,93	

– = nicht getestet; y = Code wurde nicht vergeben; x = Code wurde neu entwickelt; a = Rho auf Null gesetzt; MW % = mittlere prozentuale Übereinstimmung.

Tabelle 2: Raterübereinstimmung: Mathematische Tätigkeiten

Code		1. Test		2. Test		3. Test	
		Rho	MW %	Rho	MW %	Rho	MW %
Außermathematisches Modellieren	Gepooled über alle Codes		0,76		0,87		0,87
0	Nicht notwendig	0,97		0,99		0,99	
1	Auf niedrigem Niveau notwendig	0,92		0,93		0,93	
2	Auf mittlerem Niveau notwendig	0,89		0,94		0,94	
3	Auf hohem Niveau notwendig	y		0,43		0,43	
9	Keine Zuordnung möglich	0,00		y		y	
	Mittelwert	0,96		0,99		0,99	
Innermathematisches Modellieren	Gepooled über alle Codes		0,69		0,64		0,64
0	Nicht notwendig	0,90		0,92		0,92	
1	Auf niedrigem Niveau notwendig	0,85		0,81		0,81	
2	Auf mittlerem Niveau notwendig	0,75		0,76		0,76	
3	Auf hohem Niveau notwendig	0,00		0,93		0,93	
9	Keine Zuordnung möglich	0a		0,00		0,00	
	Mittelwert	0,89		0,95		0,95	
Mathematisches Argumentieren	Gepooled über alle Codes		0,88		0,93		0,93
0	Nicht notwendig	0,98		0,99		0,99	
1	Auf niedrigem Niveau notwendig	0,90		0,68		0,68	
2	Auf mittlerem Niveau notwendig	0,90		0,89		0,89	
3	Auf hohem Niveau notwendig	0,00		0,95		0,95	
9	Keine Zuordnung möglich	0a		0,00		0,00	
	Mittelwert	0,97		0,98		0,98	
Gebrauch von mathematischen Darstellungen	**Gepooled über alle Codes**		0,83		0,90		0,90
0	Nicht notwendig	0,97		0,99		0,99	
1	Auf niedrigem Niveau notwendig	0,94		0,98		0,98	
2	Auf mittlerem Niveau notwendig	0,89		0,79		0,79	
3	Auf hohem Niveau notwendig	y		0,00		0,00	
9	Keine Zuordnung möglich	0a		y		y	
	Mittelwert	0,96		0,98		0,98	

– = nicht getestet; y = Code wurde nicht vergeben; x = Code wurde neu entwickelt; a = Rho auf Null gesetzt; MW % = mittlere prozentuale Übereinstimmung.

Tabelle 3: Raterübereinstimmung: Aufgabenklassen

Code		1. Test		2. Test		3. Test	
		Rho	MW %	Rho	MW %	Rho	MW %
Aufgabenklassen – Typen mathematischen Arbeitens	Gepooled über alle Codes		0,69		0,66		0,81
1	Technische Aufgaben	0,94		0,94		0,98	
2	Rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben	0,92		0,94		0,96	
3	Begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgaben	0,92		0,91		0,97	
9	Keine Zuordnung möglich	0a		0,00		y	
Wissensart	Gepooled über alle Codes		0,78	–	–		0,88
1	Faktenwissen	0,85		–	–	0,96	
2	Fertigkeiten	0,94		–	–	0,97	
9	Keine Zuordnung möglich	0,94		–	–	y	

– = nicht getestet; y = Code wurde nicht vergeben; x = Code wurde neu entwickelt; a = Rho auf Null gesetzt; MW % = mittlere prozentuale Übereinstimmung.

Tabelle 4: Raterübereinstimmung: Grundvorstellungen

Code		1. Test		2. Test		3. Test	
		Rho	MW %	Rho	MW %	Rho	MW %
Grundvorstellungen	Gepooled über alle Codes		0,59		0,63		0,63
0	Nicht notwendig	0,95		0,95		0,98	
1	Auf niedrigem Niveau notwendig	0,84		0,89		0,88	
2	Auf mittlerem Niveau notwendig	0,85		0,86		0,88	
3	Auf hohem Niveau notwendig	0,00		0,25		0,71	
9	Keine Zuordnung möglich	0,00		y		y	
	Mittelwert	0,94		0,94		0,97	

– = nicht getestet; y = Code wurde nicht vergeben; x = Code wurde neu entwickelt; a = Rho auf Null gesetzt; MW % = mittlere prozentuale Übereinstimmung.

Tabelle 5: Raterübereinstimmung: Sprache

Code		1. Test		2. Test		3. Test	
		Rho	MW %	Rho	MW %	Rho	MW %
Sprachlogische Komplexität	Gepooled über alle Codes		0,64		0,74		0,80
0	Kein Text vorhanden	0,88		0,96		0,96	
1	Niveau niedrig	0,77		0,91		0,94	
2	Niveau durchschnittlich	0,82		0,84		0,86	
3	Niveau hoch	y		0,35		y	
9	Keine Zuordnung möglich	y		y		y	
	Mittelwert	0,82		0,95		0,96	

– = nicht getestet; y = Code wurde nicht vergeben; x = Code wurde neu entwickelt; a = Rho auf Null gesetzt; MW % = mittlere prozentuale Übereinstimmung.

Tabelle 6: Raterübereinstimmung: Aufgabenstellung

Code		1. Test		2. Test		3. Test	
		Rho	MW %	Rho	MW %	Rho	MW %
Art der Repräsentations-formate (Instruktion)	Gepooled über alle Codes		0,82	–	–		
Text			0,82	–	–		0,73
0	Nicht vorhanden	0,95		–	–	0,00	
1	Text als reine Instruktion	0,95		–	–	0,91	
2	Text mehr als reine Instruktion	0,96		–	–	0,92	
Relevante Zahlen	Gepooled über alle Codes		0,79	–	–		0,83
1	Vorhanden	0,95		–	–	0,96	
Irrelevante Zahlen	Gepooled über alle Codes		0,79	–	–		0,95
1	Vorhanden	0,78		–	–	0,89	
Terme/Formel	Gepooled über alle Codes		0,92	–	–		0,82
1	Vorhanden	0,98		–	–	0,96	
Tabelle	Gepooled über alle Codes		0,98	–	–		0,99
1	Vorhanden	0,98		–	–	y	
Graph/Graphik/Diagramm	Gepooled über alle Codes		0,97	–	–		0,91
1	Vorhanden	0,99		–	–	0,97	
Bild/Foto	Gepooled über alle Codes		0,97	–	–		0,91
1	Vorhanden	0,96		–	–	0,90	
Anzahl der explizit einge-forderten Lösungswege	Gepooled über alle Codes		0,92	–	–		0,92
9	Keine Zuordnung möglich	0,00		–	–	y	
	Mittelwert	0,86		–	–	0,86	
Lösungs- bzw. Strukturie-rungshilfen	Gepooled über alle Codes		0,88	–	–		0,92
1	Vorhanden	0,77		–	–	0,90	
9	Keine Zuordnung möglich	x		–	–	x	

– = nicht getestet; y = Code wurde nicht vergeben; x = Code wurde neu entwickelt; a = Rho auf Null gesetzt; MW % = mittlere prozentuale Übereinstimmung.

Tabelle 7: Raterübereinstimmung: Lösungsprozess

Code		1. Test Rho	1. Test MW %	2. Test Rho	2. Test MW %	3. Test Rho	3. Test MW %
Mathematische Richtung der Auseinandersetzung	Gepooled über alle Codes		0,76		0,85		0,83
1	Konform zu der mathematischen Konzeptionsbildung	0,83		0,90		0,88	
2	Entgegengesetzt zur mathematischen Konzeptionsbildung	0,81		0,90		0,88	
9	Keine Zuordnung möglich	0,15		y		y	
Umfang der Bearbeitung	Gepooled über alle Codes		0,78				0,68
	Mittlere Anzahl der notwendigen Lösungsschritte	0,83				0,92	
9	Keine Zuordnung möglich	0a				y	

– = nicht getestet; y = Code wurde nicht vergeben; x = Code wurde neu entwickelt; a = Rho auf Null gesetzt; MW % = mittlere prozentuale Übereinstimmung.

Tabelle 8: Raterübereinstimmung: Art der zwingend erforderlichen Repräsentationsformate

Code		1. Test Rho	1. Test MW %	2. Test Rho	2. Test MW %	3. Test Rho	3. Test MW %
Text	Gepooled über alle Codes		0,88	–	–		0,75
1	Vorhanden	0,98		–	–	0,92	
9	Keine Zuordnung möglich	0,99		–	–	y	
Zahl	Gepooled über alle Codes		0,81	–	–		0,86
1	Vorhanden	0,94		–	–	0,97	
9	Keine Zuordnung möglich	0,99		–	–	y	
Term/Formel	Gepooled über alle Codes		0,83	–	–		0,78
1	Vorhanden	0,94		–	–	0,94	
9	Keine Zuordnung möglich	0,99		–	–	y	
Tabelle	Gepooled über alle Codes		0,94	–	–		0,99
1	Vorhanden	0,83		–	–	y	
9	Keine Zuordnung möglich	0,99		–	–	y	
Graph/Graphik/Diagramm	Gepooled über alle Codes		0,94	–	–		0,98
1	Vorhanden	0,98		–	–	0,99	
9	Keine Zuordnung möglich	y		–	–	y	
Bild/Foto	Gepooled über alle Codes		0,95	–	–		1,00
1	Vorhanden	0a		–	–	y	
9	Keine Zuordnung möglich	0,99		–	–	y	
Antwortformat	Gepooled über alle Codes		0,94	–	–		1,00
1	Offen	0,99		–	–	y	
Eindeutigkeit der Lösungen	Gepooled über alle Codes		0,94	–	–		0,88
2	Mehrere Lösungen vorhanden	0,85		–	–	0,89	
9	Keine Zuordnung möglich	0a		–	–	y	

– = nicht getestet; y = Code wurde nicht vergeben; x = Code wurde neu entwickelt; a = Rho auf Null gesetzt; MW % = mittlere prozentuale Übereinstimmung.

Literatur

Bauersfeld, H. (1985). Ergebnisse und Probleme von Mikroanalysen mathematischen Unterrichts. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik* (S. 7–25). Stuttgart: Teubner.

Baumert, J. (1997). Zielkonflike in der Grundschule: Kommentar. In F. E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 317–321). Weinheim: Beltz Psychologie Verlags Union.

Baumert, J., Lehmann, R., Lehrke, H., Schmitz, B., Clausen, M., Hosenfeld, I., Köller, O., & Neubrand, J. (1997). *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde.* Opladen: Leske + Budrich.

Becker, J. P., & Shimada, S. (Eds). (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathem atics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz, & E. Schneider (Hrsg.), *Trends und Perspektiven. Beiträge zum 7. internationalen Kärntner Symposium zur „Didaktik der Mathematik" in Klagenfurt* (S. 15–38). Wien: Hölcher-Pichler-Tempsky.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modeling in mathematics education – discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51,* 149–171.

Blum, W., Jordan, A., Kleine, M., & vom Hofe, R. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (S. 145–158). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Blum, W., & Wiegand, B. (2000). Offene Aufgaben – wie und wozu? *mathematik lehren, 100, Juni 2000,* 52–55.

Bromme, R., Seeger, F., & Steinbring, H. (1990). *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler.* Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik.

Bruner, J. (1972). *Der Prozeß der Erziehung.* Berlin: Berlin-Verlag.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243–307). Dordrecht: Reidel.

Cohors-Fresenborg, E. (1996). Mathematik als Werkzeug der Wissensrepräsentation. In G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz, & E. Schneider (Hrsg.), *Trends und Perspektiven. Beiträge zum 7. Internationalen Kärntner Symposium zur „Didaktik der Mathematik" in Klagenfurt* (S. 85–90). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J., & Sommer, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (S. 109–144). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Enright, M. K., & Sheehan, K. M. (2002). Modeling the difficulty of quantitative reasoning items: Implication for item generation. In S. H. Irvine & P. L. Kyllonen (Eds.), *Item generation for test development* (pp. 129–158). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fanghänel, G. (1992). *Mathematikunterricht in Ländern der BRD. Übersichten und vergleichende Betrachtungen zu Zielen, Inhalten und Gestaltungskonzepten für den Mathematikunterricht der Klassen 1 bis 10.* Berlin: Technische Universität (Schriften der TU Berlin, Fachbereich Mathematik).

Glaeser, G. (1980). *Didaktik mathematischer Probleme und Aufgaben.* Braunschweig: Vieweg-Verlag.

Hanna, G. (1995). *The role of proof in mathematics education.* Hildesheim: Franzbecker.

Henn, W. (1998). TIMSS-Katalysator für eine neue Unterrichtskultur. In W. Blum & M. Neubrand (Hrsg.), *TIMSS und der Mathematikunterricht – Information, Analysen, Konsequenzen* (S. 46–56). Hannover: Schroedel.

Heymann, H.-W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Beltz: Weinheim.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum.

Hopmann, S., & Künzli, R. (1999). *Entscheidungsfelder der Lehrplanarbeit: Grundzüge einer Theorie der Lehrplanung.* <http://www.lehrplan.ch/d/research/theory/entscheidungsfelder.pdf>

Klieme, E., & Baumert, J. (Hrsg.). (2001). *TIMSS – Impulse für Schule und Uterricht. Forschungsbefunde, Reforminitiativen, Praxisberichte und Video-Dokumente.* Bonn: BMBF Referat Öffentlichkeitsarbeit.

Klieme, E., Neubrand, M., & Lüdtke, O. (2001). Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In J. Baumert, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider, P. Stanat, K.-J. Tillmann, & M. Weiß (Hrsg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 141–191). Opladen: Leske + Budrich.

Knoche, N., Lind, D., Blum, W., Cohors-Fresenborg, E., Flade, L., Löding, W., Möller, G., Neubrand M., & Wynands, A. (Deutsche PISA-2003-Expertengruppe Mathematik). (2002). Die PISA-Studie. Einige Ergebnisse und Analysen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23* (3/4), 159–202.

Knoll, S. (2003). *Verwendung von Aufgaben in Einführungsphasen des Mathematikunterrichts.* Marburg: Tectum Verlag.

Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland: Aus dem Nachlass herausgegeben in Verbindung mit der Arbeitsgruppe für Curriculum-Studien.* Stuttgart: Klett.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie.* Hildesheim: Franzbecker.

Neubrand, J., & Neubrand, M. (1999). Effekte multipler Lösungsmöglichkeiten: Beispiele aus einer japanischen Mathematikstunde. In C. Selter & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann* (S. 148–158). Leipzig: Klett.

Neubrand, J., & Neubrand, M. (2004). Innere Strukturen mathematischer Leistung im PISA-2000-Test. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (S. 87–107). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Neubrand, M. (2003). „Mathematical literacy"/„Mathematische Grundbildung": Der Weg in die Leistungstests, die mathematikdidaktische Bedeutung, die Rolle als Interpretationshintergrund für den PISA-Test. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 6* (3), 338–356.

Neubrand, M. (2004). *Mathematische Kompetenzen von Schülerinngen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000.* Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Neubrand, M., Biehler, R., Blum, W., Cohors-Fresenborg, E., Flade, L., Knoche, N., Lind, D., Löding, W., Möller, G., & Wynands, A. (Deutsche PISA-2000-Expertengruppe Mathematik). (2001). Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33* (2), 45–59.

Neubrand, M., Biehler, R., Blum, W., Cohors-Fresenborg, E., Flade, L., Knoche, N., Lind, D., Löding, W., Möller, G., Wynands, A., & Neubrand, J., (2004). Der Prozess der Itementwicklung bei der nationalen Ergänzungsuntersuchung von PISA 2000: Vom theoretischen Rahmen zu den konkreten Aufgaben. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (S. 31–49). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Neubrand, M., Klieme, E., Lüdtke, O., & Neubrand, J. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. *Unterrichtswissenschaft, 30* (1), 100–119.

OECD – Organisation for Economic Co-operation and Development (Ed.). (1999). *Measuring student knowledge and skills: A new framework for assessment.* Paris: OECD. [In deutscher Sprache: OECD/Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.). (2000). *Schülerleistungen im internationalen Vergleich. Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten.* Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung]

Renkl, A. (1991). *Die Bedeutung der Aufgaben- und Rückmeldungsgestaltung für die Leistungsentwicklung im Fach Mathematik.* Heidelberg: Universität Heidelberg, Fakultät für Sozial- und Verhaltenswissenschaften.

Rost, J., Carstensen, C. H., Bieber, G., Neubrand, M., & Prenzel, M. (2003). Naturwissenschaftliche Teilkompetenzen im Ländervergleich. In J. Baumert, C. Artelt, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider, K.-J. Tillmann, & M. Weiß (Hrsg.), *PISA 2000. Ein differenzierter Blick auf die Länder der Bundesrepublik Deutschland* (S. 109–130). Opladen: Leske + Budrich.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht, 34* (6), 5–16.

Schupp, L. J. (1988). The incorporation of psychological principles and concepts in human resource development programs. *Dissertation Abstracts International, 49* (3-A), 466–467.

Stigler, J. W., Gonzales, P., Kawanaka, T., Knoll, S., & Serrano, A. (1999). *The TIMSS videotape classroom study: Methods and findings from an exploratory research project on eighth-grade mathematics instruction in Germany, Japan, and the United States.* Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

Shavelson, R. J., & Webb, N. M. (1991). *Generalizability theory: A primer.* Newbury Park, CA: Sage.

Voigt, J. (1984). Der kurztaktige fragend-entwickelnde Mathematikunterricht. Szenen und Analysen. *Mathematica Didactica. Zeitschrift für Didaktik der Mathematik, 7,* 161–186.

Walther, G. (1995). Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1985. Vorträge auf der 19. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 5.3. bis 8.3.1985 in Giessen* (S. 28–42). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Williams, G. (2000). *Collaborative problem solving in mathematics: The nature and function of task complexity.* Unpublished manuscript, University of Melbourne.

Williams, G. (2002). Identifying tasks that promote creative thinking in mathematics: A tool. In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch, & M. Thomas (Eds.), *Mathematical education in the South Pacific: Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. II, pp. 698–705). Auckland, New Zealand: MERGA.

Williams, G., & Clarke, D. (1997). Mathematical task complexity and task selection. In D. Clarke, P. Clarkson, D. Gronn, M. Horne, L. Lowe, M. Mackinlay, & A. McDonough (Eds.), *Mathematics, imagine the possibilities: Proceedings of the 34th Annual Conference of the Mathematical Association of Victoria* (pp. 406–415). Brunswick, Victoria: MAV.

Wynands, A. (Hrsg.). (2001). *Welt der Zahl: Bd. 5. Für Hauptschulen in NRW.* Hannover: Schroedel.