

Materialien aus der Bildungsforschung Nr. 28

Ingeborg Tölke

**EIN DYNAMISCHES SCHÄTZVERFAHREN
FÜR LATENTE VARIABLEN
IN ZEITREIHENANALYSEN**

**Max-Planck-Institut für Bildungsforschung
Berlin 1986**

ISSN: GW 0173-3842

E 86 / 1995 + 5

Materialien aus der Bildungsforschung

In dieser Reihe veröffentlicht das Max-Planck-Institut für Bildungsforschung Arbeitsmaterialien (Diskussionsgrundlagen und Dokumentation), die nicht den Charakter abgeschlossener Forschungsberichte tragen, aber dem jeweils interessierten Fachpublikum zugänglich gemacht werden sollen.

Bestellungen werden erbeten an die Verwaltung des Instituts, Lentzeallee 94, 1000 Berlin 33, bei gleichzeitiger Überweisung von DM 17,- (einschließlich 7% Mehrwertsteuer) auf das Konto Nr. 0910005885 der Sparkasse der Stadt Berlin West.

Nachdruck, auch auszugsweise, ist nur mit der Zustimmung des Instituts gestattet.

Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen des durch die Stiftung Volkswagenwerk finanzierten Modellvorhabens zur postgradualen Förderung in Entwicklungspsychologie am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin, erstellt; mein Dank gilt insbesondere der Stiftung Volkswagenwerk für die großzügige Bereitstellung der finanziellen Mittel und den Herren Professoren Dr. Paul Baltes, Dr. Lutz Eckensberger, Dr. Alexander von Eye und Dr. Werner Tack, die die der Dissertation zugrundeliegende Thematik zur Aufnahme in das Förderprogramm vorgeschlagen haben.

Für die Unterstützung bei der Bewältigung der numerischen Rechnungen danke ich Herrn Dr. Wolfgang Böttger.

ABSTRACT

Eine der effizientesten Methoden in der quantitativen psychologischen Forschung ist die Analyse sequentiell erhobener univariater beziehungsweise multivariater Daten mittels zeitreihenanalytischer Techniken. Zur Beschreibung der Dynamik multivariat erhobener Daten eignet sich hier insbesondere das aus der Systemanalyse bekannte Zustandsraummodell, in dem die Entwicklung eines Vektors latenter Variablen über die Zeit sowie dessen Zusammenhang mit einem Satz von Observablen unter Berücksichtigung stochastischer Störeinflüsse formal erfaßt wird.

Im ersten Teil der Arbeit wird das Kalman Filter als dynamisches Schätzverfahren für den Vektor der latenten Variablen sehr ausführlich nach der Methode der minimalen Varianz abgeleitet, so daß Grenzen und Leistungsfähigkeit dieses Verfahrens deutlich werden. Bei der Ableitung werden zeitabhängige Modellparametermatrizen zugelassen, jedoch werden diese als bekannt vorausgesetzt beziehungsweise müssen gegebenenfalls in einem vorgeschalteten Identifikationsschritt bestimmt werden.

An einem kleinen Beispiel mit synthetischen Daten wird der Einfluß von Annahmen über die Kovarianzmatrizen der Störgrößen und über Anfangswerte auf den Verlauf der Schätzwerte diskutiert. Als Gütekriterium für die Schätzung kann in jedem Schritt des rekursiv arbeitenden Verfahrens die Schätzfehlervarianz berechnet werden. Als weitere wesentliche Einflußgröße wird anschließend die Wahl der Abstände der Beobachtungszeitpunkte diskutiert.

Die Anwendung des Kalman Filters war in der sozialwissenschaftlichen Literatur bisher auf psychophysiologische und psychophysikalische Daten beschränkt.

Es wird hier im zweiten Teil der Arbeit eine substanzwissenschaftliche Anwendung auf Interaktionsdaten vorgestellt, die auf der Kodierung von Videoaufnahmen basieren. Das Beispiel wurde so gewählt, daß eine zusätzliche Identifikation von Modellparametermatrizen entfällt, da andernfalls die Effekte von Parameteridentifikation und rekursiver Schätzung der latenten Variablen nicht mehr getrennt werden können.

Da entwicklungspsychologische Abläufe insbesondere unter dem Einfluß stochastischer Beiträge als irreversible Prozesse zu verstehen sind, ergibt sich methodisch die Notwendigkeit für nichtlineare Modellansätze und Schätzalgorithmen, die über den linearen Ansatz des Kalman Filters hinausgehen. Es wird daher am Ende der Arbeit ein Ausblick auf nichtlineare Modelle gegeben und ein kleines, psychologisches Anwendungsbeispiel mit stationärer Lösung angegeben.

Key words: Zustandsraumbeschreibung, Kalman Filter, Interaktionsanalyse, nichtlineare Modelle

Inhaltsverzeichnis

	Seite	
I.	Einleitung	1
II.	Ableitung eines rekursiven Schätzalgorithmus	8
II.1	Systemtheoretische Ansätze zur Zeitreihenanalyse in Zustandsraumdarstellung	8
II.2	Ableitung des zeitdiskreten Modells	10
II.3	Voraussetzungen zur Behandlung stochastischer Systeme	19
II.4	Eine Methode zur Schätzwertverbesserung	26
II.5	Ableitung eines rekursiven Gleichungssystems für den Zustandsvektor	29
II.5.1	Gauß-Markov-Schätzung und die Methode der minimalen Varianz	30
II.5.2	Die Rekursionsgleichungen als rekursive Gauß-Markov-Schätzung	41
II.5.3	Zusammenfassung der Rekursionsgleichung als Gauß-Markov-Schätzung	50
II.5.4	Die Rekursionsgleichung als minimale Varianzschätzung	53
II.5.5	Zusammenfassung der Rekursionsgleichungen als Schätzung minimaler Fehlervarianz	62
II.6	Nicht zentrierte Anfangswerte und die Berücksichtigung externer Einflüsse	66
II.7	Vorhersagemethode mit dem rekursiven Algorithmus	73
II.8	Ein Beispiel zur Demonstration der Funktionsweise des Schätzalgorithmus an synthetischen Daten	77
II.9	Bemerkungen zum Abstand der Meßzeitpunkte	86
III.	Modellidentifikation	94
III.1	Parameteridentifikation mit LISREL	97
III.2	Parameteridentifikation mit Hilfe der Transferfunktion	101
IV.	Die Analyse der Dynamik einer dyadischen Interaktion mit Hilfe rekursiver Parameterschätzung	111

V.	Nichtlineare Systeme: Ein Ausblick	160
V.1	Nichtlineare Zustandsschätzung	162
V.2	Beispiel: Verhaltenswahrscheinlichkeiten des Pflegepersonals in Altenheimen	165
V.2.1	Ableitung der Modellgleichungen	167
V.2.2	Festlegung der Änderungswahrscheinlichkeiten des Verhaltens	173
V.2.3	Eine Lösung des Modells	176
Anhang 1 Liste der Originaldaten		181
Anhang 2 KID: Kalmanfilter für Interaktions- daten - ein Basic Programm		186
Anhang 3 Struktur der Kovarianzmatrix der Schätzfehler		192
Literaturverzeichnis		197

I. Einleitung

"Die Persönlichkeit ist weniger ein abgeschlossenes Produkt als ein fortschreitender Prozeß. Sie besitzt zwar einige stabile Züge, ist aber fortlaufenden Änderungen unterworfen ... Idiomatische Struktur wird weitgehend vernachlässigt, indem man nach allgemein gültigen Gesetzmäßigkeiten sucht." (ALLPORT 1958, S. 27 ff.; zitiert nach PETERMANN & HEHL (1979, S. 2)).

Diese von ALLPORT bereits 1958 getroffene Feststellung behält ihre Aktualität auch in bezug auf die jüngsten Aufgabenbestimmungen der Entwicklungspsychologie. Hier ist bei der Beschreibung und Erklärung ontogenetischer Verhaltensänderungen eine der Hauptaufgaben die Untersuchung intraindividuelle Variabilität.

BALTES, REESE & NESSELROADE (1977) fassen daher die Zielsetzung moderner Entwicklungspsychologie folgendermaßen: "Entwicklungspsychologie befaßt sich mit der Beschreibung, Erklärung und Modifikation intraindividuelle Veränderungen im Verhalten über den Lebenslauf hin und mit den interindividuellen Differenzen in der intraindividuellen Veränderung."

Hiermit ist in der Entwicklungspsychologie ein Kompromiß im Idiographiestreit geschaffen, indem individuumzentrierte Forschung als Antezedens allgemeinerer entwicklungspsychologischer Aussagen fungiert.

Richtungsweisend für eine quantitative Einzelfallanalyse sind die Arbeiten von CATTELL (1943, 1946 und 1951), in denen die faktorenanalytische O-Technik und P-Technik in Anlehnung an die statistischen Methoden begründet wird, die zur Aufbereitung interindividuelle Beobachtungsdaten verwendet werden. Insbesondere kommt die P-Technik zeitreihenanalytischen Methoden sehr nahe, da

hier zu verschiedenen Zeitpunkten an einer Testperson beziehungsweise Stichprobe/Population erhobene Daten miteinander korreliert werden und die Koeffizienten der resultierenden Korrelationsmatrix über die Ähnlichkeit einzelner Testleistungen in Abhängigkeit vom Zeitpunkt ihrer Erhebung informieren.

Dies gestattet Verlaufsanalysen, zum Beispiel den Nachweis, daß sich die faktorielle Struktur von Testleistungen bei wiederholter Durchführung ändert, was möglicherweise Ausdruck entwicklungspsychologischer Wandlungen ist.

Bei einer solchen, rein korrelationsstatistischen Vorgehensweise ergeben sich jedoch zwei grundsätzliche Probleme (vgl. HUBER 1973, S. 23): das Problem der Scheinkorrelation und das der Meßwiederholung.

Den Einfluß von Scheinkorrelationen auf die Interpretierbarkeit von Ergebnissen einer Korrelationsanalyse zeigt ein Beispiel aus der soziologischen Forschung (zitiert nach SCHLITZGEN & STREITBERG 1984, S. 445).

Bei einer Untersuchung in schwedischen Landkreisen wurden die Kindergeburten pro 1.000 gebärfähiger Frauen und die Anzahl der jährlich beobachteten Störche aufgezeichnet. Es zeigte sich, daß sowohl die Kindergeburten als auch die Anzahl der Störche im Laufe der Jahre rückläufig waren bei gleichzeitig konstant hoher Korrelation zwischen den beiden beobachteten Größen. Tatsächlich ist die gefundene hohe Korrelation auf den Einfluß der Verstädterung zurückzuführen, die sowohl die Geburtenrate als auch die Zahl der Störche reduziert.

An diesem Beispiel wird deutlich, daß neben den Beobachtungen, die das eigentliche Untersuchungsobjekt betreffen, auch externe Einflüsse bei der methodischen Behandlung von Entwicklungsverläufen berücksichtigt werden müssen.

Im Rahmen moderner Methoden zur dimensionalen Strukturierung von Kovarianzmatrizen bei Längsschnittstudien, wie sie zum Beispiel durch lineare Strukturmodelle gegeben sind (JÖRESKOG 1979), können solche externen Einflüsse systematisch in multivariater Form berücksichtigt werden. In bezug auf methodische Einzelfallanalysen bedeutet dies, daß nur solche psychologischen Verfahren in Betracht kommen, die es gestatten, Personen-Bedingungen-Kombinationen zu analysieren, was über das Niveau reiner Korrelationstechniken hinausgeht und einen - wenn auch sehr allgemein gehaltenen - psychologischen Modellansatz voraussetzt.

Das zweite oben angesprochene Problem, das der Meßwiederholung, besteht darin, daß einerseits aus zeitlich aufeinanderfolgenden Beobachtungen Rückschlüsse auf das beobachtete Objekt gezogen werden sollen, andererseits aber die Einzelbeobachtungen als zufallskritisch zu behandeln sind.

Die in der klassischen Testtheorie übliche Strukturierung (GULLIKSEN 1950) von Beobachtungswerten in "wahren Wert" und "Meßfehler" muß im Falle der längsschnittlichen Einzelfallanalyse über die Beobachtungsintervalle als Analyseeinheit differenziert vorgenommen werden. Ausgehend von den Grundannahmen der klassischen Testtheorie in der Fassung von LORD & NOVICK (1968) schreibt TACK (1979, S. 55) in einem Aufsatz zur maßtheoretischen Begründung psychometrischer Verfahren in der Einzelfallanalyse: "Einer der wohl wichtigsten Grundgedanken dieses Ansatzes ist, daß nicht mehr von 'wahren Werten' und 'Meßfehlern' schlechthin die Rede ist, sondern, daß diese jeweils für bestimmte Analyseeinheiten definiert werden ... Entsprechend ist auch immer dann, wenn man von 'Meßfehlern' oder daraus abgeleiteten Konzepten (wie etwa Reliabilität, Schätzfehler usw.) redet, genau zu spezifizieren, auf welche Art von Analyseeinheiten man sich dabei bezieht."

Einer der bekanntesten und ältesten Ansätze in der Zeitreihenanalyse, in dem versucht wird, dieser Forderung gerecht zu werden, ist die Theorie des optimalen Filters von WIENER (1949), die in die mathematische Psychologie in Form der Transfermodelle Eingang gefunden hat (REVENSTORF 1979; NORMAN 1981; GREGSON 1983; MÖBUS & NAGL 1983).

Hier werden die Meßfehler in Abhängigkeit vom Beobachtungszeitpunkt und der Beobachtungsdauer berücksichtigt und methodisch so behandelt, daß ihr Einfluß auf die aktuelle Schätzung des "wahren Wertes" minimiert wird; in neueren Anwendungen der Wiener'schen Filtertheorie zur Meßwertprognose (DRÖSLER 1978) wird der Prognosefehler in Abhängigkeit vom Prognoseintervall spezifiziert.

Zusätzlich zu den Meßfehlern muß jedoch bei der mathematischen Modellbildung zur Simulation von Verlaufsdaten ein Prozeßfehler spezifiziert werden, der zufällige Variationen in den für das Modell charakteristischen Größen zuläßt.

Solche Prozeßfehler werden in Transfermodellen im allgemeinen nicht explizit berücksichtigt, hier wird lediglich ein "Güterkriterium" für die ermittelte Transferfunktion in Form der Kohärenzfunktion angegeben (vgl. zum Beispiel GOTTMAN 1979a).

Der Aspekt der Fehlanpassung eines Modells findet jedoch Berücksichtigung in linearen Strukturmodellen, die in die Gleichungen für die latenten Variablen, die die zugrundeliegende Quelle für die Variation und Kovariation der Beobachtungswerte bilden, stochastische Beiträge explizit einbeziehen (JÖRGESKOG & SÖRBOM 1977). Zur Schätzung der latenten Variablen und gleichzeitigen Identifikation der Modellparameter wurde von JÖRESKOG & SÖRBOM (1978) das Schätzverfahren LISREL entwickelt, das auch für Längs-

schnittstudien unter Berücksichtigung aller stochastischen Beiträge eingesetzt wird.

Obwohl mit diesem Verfahren systematisch ein optimaler Schätzwert für die latenten Variablen im Sinne eines Maximum-Likelihood-Kriteriums für eine bestimmte Anzahl von Beobachtungszeitpunkten bestimmt wird, fehlt dem LISREL-Algorithmus bei Anwendung auf Längsschnittdaten der prozessuale Charakter. Dies bedeutet, daß bei der Schätzung der latenten Variablen die Beobachtungen zu verschiedenen Zeitpunkten in den Gleichungen als gleichberechtigt behandelt werden, während der Simulationsfehler, der sich gegenüber den neu erhobenen Daten aus der Schätzung der latenten Variablen ergibt, nicht zur Schätzwertverbesserung herangezogen wird.

Dynamische Schätzverfahren, die diese Methode zur Schätzwertverbesserung berücksichtigen, wurden auf dem Gebiet der Systemanalyse entwickelt. Die Basis für diese Verfahren bildet die Zustandsraumbeschreibung linearer Systeme, die in ihrer Form den linearen Strukturmodellen sehr ähnlich sind (vgl. zum Beispiel ZADEH & DESOER 1963).

Zustandsraumbeschreibungen gehen davon aus, daß die zeitliche Veränderung der beobachtbaren Eigenschaften des betrachteten Systems auf die Variation eines prinzipiell nicht direkt beobachtbaren Zustandsvektors zurückgeführt werden kann. Zur dynamischen Schätzung des Zustandsvektors wurde von KALMAN (1960) und KALMAN & BUCY (1961) ein rekursiver Algorithmus abgeleitet, der für jede neu erhobene Messung den Systemzustand unter Ausnutzung der Schätzfehler aus vorangegangenen Messungen optimal im Sinne der minimalen Fehlervarianz bestimmt.

Dieser Algorithmus hat in der Systemtheorie weite Verbreitung gefunden und wurde bereits zur Auswertung physiologischer Datenverläufe angewendet (HEATH 1984).

Die methodischen Grundlagen zur Anwendung rekursiver Algorithmen auf psychologische Längsschnittdaten wurden im Rahmen des Modellvorhabens zur postgradualen Förderung in Entwicklungspsychologie erarbeitet (TÖLKE 1984a). Die enge methodische Verwandtschaft der hierbei untersuchten systemtheoretischen Modellgleichungen mit linearen Strukturgleichungsansätzen legt eine Interpretation längsschnittlich erhobener Daten als das Ergebnis eines zugrundeliegenden psychologischen Prozesses nahe (TÖLKE 1984b; 1984c und 1985c; OUD & VAN DEN BERCKEN 1984).

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, aufbauend auf den in der Systemtheorie entwickelten Methoden einen dynamischen Schätzalgorithmus für latente Variablen in linearen Strukturmodellen abzuleiten, der den oben genannten Anforderungen an eine mathematisch-statistische Methode zur längsschnittlichen Einzelfallanalyse gerecht wird (siehe auch TÖLKE, 1985d). Besonders berücksichtigt werden soll hierbei der Entwicklungsaspekt der Datenfolgen, das heißt vorangegangene Schätzfehler und jeweils aktuell erhobene Datensätze sollen zur Verbesserung des Schätzwertes für die latente Struktur zum aktuellen Beobachtungszeitpunkt herangezogen werden.

Zu diesem Zweck werden in Kapitel II zunächst die methodischen Voraussetzungen diskutiert und anschließend die einzelnen Schritte zur Berechnung der optimalen Schätzwerte für die latenten Variablen abgeleitet. Schließlich wird das Schätzverfahren an einem einfachen Beispiel mit synthetischen Daten demonstriert.

In Kapitel III werden Möglichkeiten zur Identifikation der Modellparameter in linearen Strukturmodellen im Rahmen von LISREL sowie von Transferansätzen diskutiert.

Der Satz von Interaktionsdaten, auf den der rekursive Schätzalgorithmus in Kapitel IV angewendet wird, wurde

einer Arbeit von GOTTMAN (1979b) entnommen, die sich wiederum auf eine Untersuchung von GOTTMAN, MARKMAN & NOTARIUS (1977) bezieht.

Zum Schluß soll schließlich nochmals auf die Debatte zur idiographischen versus nomothetischen Psychologie eingegangen werden. HUBER (1973, S. 19) schlägt in Anlehnung an ALLPORT (1962) vor, diese Begriffe durch "morphogenetisch" beziehungsweise "dimensional" zu ersetzen, was in bezug auf die Art der mathematischen Modellbildung einen bemerkenswerten Akzent setzt. Während lineare Strukturmodelle eindeutig als dimensional zu klassifizieren sind, impliziert "morphogenetische Modellbildung", daß qualitativ neue Strukturen im psychologischen Prozeßablauf beschreibbar sein müssen. In dem noch jungen Forschungsgebiet der Synergetik (HAKEN 1983a und b) wird aufgezeigt, wie durch den Einsatz nichtlinearer Modelle morphogenetisch neue Strukturen mathematisch beschrieben werden können.

In Kapitel V wird ein kurzer Ausblick gegeben, wie der dynamische Schätzalgorithmus aus Kapitel II auf nichtlineare Systeme übertragen werden kann.

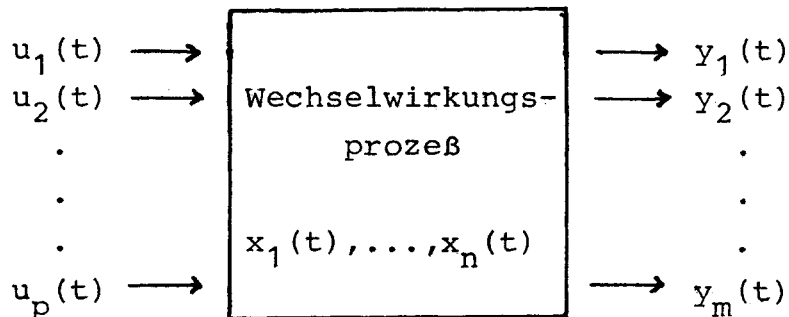
Wie die Formation von Verhaltensstrukturen innerhalb einer sozialen Gruppe durch nichtlineare Modellbildung beschrieben werden kann, wird auf der Basis experimenteller Untersuchungen von BALTES u.a. (1983) zum Verhalten von Pflegepersonal in Altenheimen demonstriert.

II. Ableitung eines rekursiven Schätzalgorithmus

II.1 Systemtheoretische Ansätze zur Zeitreihenanalyse in Zustandsraumdarstellung

Bei der systemanalytischen Beschreibung der Entwicklung einer multivariaten Zeitreihe $\underline{y}(t)$ und ihrer Wechselwirkung mit einer zweiten multivariaten Zeitreihe $\underline{u}(t)$ geht man von der Vorstellung aus, daß die Wechselwirkung oder im Falle nur einer betrachteten Zeitreihe der "Motor" für die Entwicklung vollständig durch einen Satz von Variablen beschrieben werden kann, der der direkten Beobachtung nicht zugänglich ist.

Man geht also von folgender Betrachtung aus:



Die eigentliche Wechselwirkung wird also durch den n -dimensionalen Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ gekennzeichnet, der in noch zu definierender Weise mit den m - bzw. p -dimensionalen meßbaren Größen $\underline{y}(t)$ und $\underline{u}(t)$ zusammenhängt.

Für Systeme erster Ordnung (das heißt es treten nur einfache Ableitungen im Modell auf) setzt man diesen Zusammenhang mathematisch folgendermaßen an:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t); t) \quad ; i = 1, \dots, n$$

$$y_j(t) = g_j(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t); t) \quad ; j = 1, \dots, m$$

(II.1.1)

Ein für die Praxis wichtiger, weil methodisch handhabbarer Spezialfall ist, daß \underline{f} und \underline{g} lineare Funktionen sind. Dann lauten die Zustandsgleichungen:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t) \underline{x}(t) + \underline{B}(t) \underline{u}(t) \quad (\text{II.1.2a})$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t) \underline{x}(t) + \underline{D}(t) \underline{u}(t) \quad (\text{II.1.2b})$$

\underline{A} , \underline{B} , \underline{C} und \underline{D} sind hierbei Matrizen; das System heißt zeitinvariant, wenn diese Matrizen nicht von der Zeit abhängen. Zumeist wirkt $\underline{u}(t)$ nicht direkt, sondern nur indirekt über den Zustandsvektor ein und umgekehrt, das heißt es wird im allgemeinen $\underline{D}(t) \equiv 0$ gesetzt. Die Matrizen \underline{B} und \underline{C} definieren den Zusammenhang der beobachteten Zeitreihen $\underline{u}(t)$ und $\underline{y}(t)$ mit dem zu untersuchenden Zustandsvektor, während \underline{A} die Dynamik des Systems beschreibt.

Auf Probleme und Methoden zur Identifikation dieser, das Modell festlegenden Matrizen wird in Kapitel III eingegangen.

In diesem Kapitel wird davon ausgegangen, daß diese Parametermatrizen vollständig bekannt seien.

II.2 Ableitung des zeitdiskreten Modells

Bei der Beschreibung und Modellsimulation psychologischer Vorgänge in ihrem zeitlichen Ablauf ist allgemein eine zeitdiskrete Betrachtungsweise angebracht, da in einem überwiegenden Anteil der Untersuchungen Daten nicht kontinuierlich erhoben werden können. Ziel dieses Abschnittes ist es daher, das Differentialgleichungsmodell erster Ordnung (II.1.2) zu diskretisieren.

Da keine eindeutigen Diskretisierungsvorschriften für den Differentialquotienten \underline{dx}/dt vorliegen, soll hier die Diskretisierung der Differentialgleichungen (II.1.2) über die formale Lösung vorgenommen werden. Hierzu wird die Differentialgleichung in der folgenden Form aufgeschrieben:

$$\left[\frac{d}{dt} - \underline{A}(t) \right] \underline{x}(t) = \underline{B}(t) \underline{u}(t) \quad (\text{II.2.1})$$

Dies ist eine sogenannte inhomogene Differentialgleichung mit der Inhomogenität $\underline{B}(t) \underline{u}(t)$.

Ihr ist eine entsprechende homogene Differentialgleichung zugeordnet:

$$\left[\frac{d}{dt} - \underline{A}(t) \right] \underline{x}_h(t) = \underline{0} \quad (\text{II.2.2})$$

Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung (II.2.2) geben die Eigendynamik des betrachteten Prozesses an, das heißt sie beschreiben, wie sich der Zustand des Systems ohne äußere Einflüsse im Laufe der Zeit verändert.

Ist t_0 der Anfangszeitpunkt der Beobachtung und $\underline{x}(t_0)$ der Systemzustand zu diesem Zeitpunkt, so kann der Zustandsvektor des Systems ohne äußere Einflüsse zur Zeit

t rein formal durch Anwendung einer "Übergangsmatrix" $\underline{\Phi}(t, t_0)$ auf den Anfangszustand gewonnen werden:

$$\underline{x}_h(t) = \underline{\Phi}(t, t_0) \underline{x}(t_0) \quad (\text{II.2.3})$$

wobei die eigentliche Dynamik des Prozesses, das heißt die Art und Weise, in der sich $\underline{x}(t_0)$ zu $\underline{x}(t)$ entwickelt, in der Matrix $\underline{\Phi}$ zusammengefaßt wurde.

Die Einwirkungen $\underline{B}(t) \underline{u}(t)$ der externen Einflüsse $\underline{u}(t)$ auf den Zustandsvektor unterliegen ebenfalls der Eigendynamik des Systems. Es läßt sich zeigen, daß eine spezielle Lösung \underline{x}_s von (II.2.1) durch fortlaufende Anwendung der entsprechenden Übergangsmatrizen, beginnend mit dem Zeitpunkt t_0 , auf den Beitrag der externen Einflüsse zum Zustandsvektor zum jeweiligen Zeitpunkt $t' > t_0$ konstruiert werden kann:

$$\underline{x}_s(t) = \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, t') \underline{B}(t') \underline{u}(t') dt' \quad (\text{II.2.4})$$

Diese Lösung beschreibt die durch externe Einflüsse $\underline{u}(t)$ "erzwungene" Veränderung des Systemzustandes.

Wie aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (zum Beispiel ERWE 1961; KAMKE 1961) bekannt ist, setzt sich die allgemeine Lösung der Zustandsdifferentialgleichung (II.2.1) additiv aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (II.2.2) und einer speziellen Lösung von (II.2.1) zusammen, das heißt die allgemeine Lösung der Zustandsdifferentialgleichung besteht aus einem von außen erzwungenen Anteil und der eigenen, freien Veränderung des Zustandsvektors:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t, t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, t') \underline{B}(t') \underline{u}(t') dt' \quad (\text{II.2.5})$$

Bemerkenswert ist, daß die beobachteten Daten $\underline{y}(t)$ nicht in die formale Lösung für den Zustandsvektor eingehen. Sie können vielmehr durch die Lösung $\underline{x}(t)$ simuliert werden:

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) = & \underline{C}(t) \underline{\phi}(t, t_0) \underline{x}(t_0) + \\ & + \int_{t_0}^t \underline{C}(t) \underline{\phi}(t, t') \underline{B}(t') \underline{u}(t') dt' + \underline{D}(t) \underline{u}(t) \end{aligned} \quad (\text{II.2.6})$$

Die Lösung (II.2.5) der Zustandsdifferentialgleichung hat rein formalen Charakter, da die Übergangs- beziehungsweise Transitionsmatrix $\underline{\phi}(t, t')$ zunächst nicht bekannt ist. Im allgemeinen, zeitvariablen Fall kann für $\underline{\phi}$ auch kein geschlossener Ausdruck angegeben werden.

Im Fall eines zeitinvarianten, linearen Systems jedoch, bei dem die Parametermatrizen \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} und \underline{D} nicht mehr zeitabhängig sind, gilt (ATHANS, DERTOUZOS, SPANN & MASON 1974):

$$\underline{\phi}(t, t') = \underline{\phi}(t-t') = e^{\underline{A} \cdot (t-t')} \quad (\text{II.2.7})$$

wobei die Exponentialfunktion der Matrix \underline{A} über die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion definiert ist:

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\underline{A}t)^i}{i!} = 1 + \underline{A}t + \underline{A} \underline{A} \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (\text{II.2.8})$$

Für den Fall, daß \underline{A} eine Diagonalmatrix ist, kann $\underline{\phi}(t)$ sofort hingeschrieben werden:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

Andernfalls läßt sich die Matrix \underline{A} durch Ähnlichkeits-
transformation auf Diagonalgestalt bringen:

$$\underline{D} = \underline{F}^{-1} \underline{A} \underline{F}$$

wobei \underline{D} eine Diagonalmatrix mit den reellen oder konju-
giert-komplexen Eigenwerten von \underline{A} ist und \underline{F} aus den Eigen-
vektoren von \underline{A} zusammengesetzt ist.

Im weiteren soll kein expliziter Gebrauch von der Transi-
tionsmatrix gemacht werden, sie soll lediglich zur Ablei-
tung der diskretisierten Form des Simulationsmodells für
das Übertragungssystem herangezogen werden.

Es soll nun angenommen werden, daß sich die Werte der
externen Einflüsse $\underline{u}(t)$ nur zu den diskreten Zeitpunkten
 t_0, t_1, t_2, \dots , ändern, dazwischen aber konstante Werte
annehmen. Diese Zeitpunkte t_0, t_1, t_2, \dots , zu denen auch
die Meßwerte erhoben werden, brauchen nicht äquidistant
zu sein, es soll lediglich $t_{k+1} > t_k, k = 0, 1, \dots$,
gelten. Die so modifizierten Werte für die äußeren Ein-
flüsse sollen mit $\bar{\underline{u}}(t)$ bezeichnet werden und sind fol-
gendermaßen definiert:

$$\bar{\underline{u}}(t) = \underline{u}(t_k) \text{ für } t_k \leq t < t_{k+1} ; k = 0, 1, 2, \dots$$

Ein Beispiel für eine solche Diskretisierung des kon-
tinuierlichen Verlaufes einer eindimensionalen Eingangs-
größe $u(t)$ ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

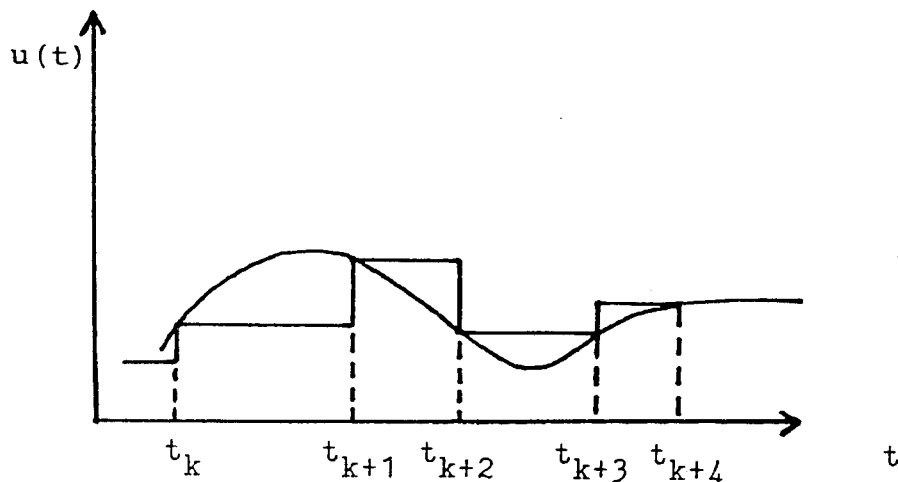


Abbildung 2.1: Diskretisierung des kontinuierlichen Verlaufs einer eindimensionalen Eingangsgröße

Bei der Auswahl der Beobachtungs- bzw. Meßzeitpunkte muß jedoch darauf geachtet werden, daß zwischen den einzelnen Zeitpunkten keine wesentlichen Änderungen im Kurvenverlauf "übersehen" werden. Es können hierfür keine allgemein verbindlichen Regeln angegeben werden, sondern die Wahl der Beobachtungszeitpunkte muß dem betrachteten Einzelfall angepaßt werden. Im Spezialfall der äquidistanten Meßzeitpunkte kann als Kriterium für die Meßintervalllänge das Abtasttheorem von SHANNON (vgl. zum Beispiel GÖLDNER 1983) herangezogen werden.

Um zu den diskretisierten Gleichungen zu gelangen, wird zunächst der Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ gemäß Gleichung (II.2.1) zu den diskreten Zeitpunkten t_0, t_1, t_2, \dots , bestimmt. Dazu ersetzt man in der formalen Lösung (II.2.5), die für beliebige Zeitpunkte t und t_0 mit $t \geq t_0$ gilt, t_0 durch t_k und t durch t_{k+1} :

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \underline{\phi}(t_{k+1}, t_k) \underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\phi}(t_{k+1}, t') \underline{B}(t') \underline{u}(t') dt'$$

Da die Eingangsgrößen $\underline{u}(t)$ im Intervall zwischen zwei Beobachtungszeitpunkten nun als konstant vorausgesetzt werden, können sie aus dem Integral herausgezogen werden:

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \underline{\phi}(t_{k+1}, t_k) \underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\phi}(t_{k+1}, t') \underline{B}(t') dt' \cdot \underline{u}(t_k)$$

Mit der abkürzenden Schreibweise k statt t_k und den folgenden Definitionen:

$$\underline{A}(k) := \underline{\phi}(t_{k+1}, t_k)$$

$$\underline{B}(k) := \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\phi}(t_{k+1}, t') \underline{B}(t') dt'$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

erhält man schließlich die Vektordifferenzgleichung:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k) \underline{x}(k) + \underline{B}(k) \underline{u}(k) \quad (\text{II.2.9a})$$

Da auch die Meßwerte $\underline{y}(t)$ nur zu den diskreten Zeitpunkten t_0, t_1, t_2, \dots vorliegen, gilt auch hier gemäß Gleichung (II.1.2b) eine entsprechend diskretisierte Gleichung, die in Analogie zum LISREL-Modell als Meßmodell bezeichnet werden kann (JÖRESKOG & SÖRBOM 1977):

$$\underline{y}(k) = \underline{C}(k) \underline{x}(k) + \underline{D}(k) \underline{u}(k) \quad (\text{II.2.9b})$$

Die Gleichungen (II.2.9a, b) stellen damit eine diskretisierte Approximation der Zustandsdifferentialgleichungen (II.1.2a, b) für ein lineares Übertragungssystem dar.

Für die Parametermatrizen wurden hier die gleichen Bezeichnungen gewählt wie im kontinuierlichen Fall.

Da im weiteren jedoch nur noch diskrete Systeme behandelt werden, ergibt sich hieraus allerdings keine Verwechslungsgefahr.

Ein wesentlicher Punkt, der bei der Anwendung von Zustandsraummodellen beachtet werden sollte, ist die Beobachtbarkeit des Zustandsvektors. Ein Zustandsvektor heißt beobachtbar, wenn er aus den Systemgleichungen eindeutig bestimmt werden kann. Methodisch kann dies anhand der Beobachtbarkeitsmatrix festgestellt werden, die in der Systemtheorie folgendermaßen definiert ist (vgl. zum Beispiel SCHWARZ 1979):

$$\underline{M}(k, k_0) = \sum_{k'=k_0}^k \underline{\phi}^T(k', k) \underline{C}^T(k') \underline{C}(k') \underline{\phi}(k', k)$$

(T kennzeichnet den transponierten Vektor.)

Falls diese Matrix regulär ist, können die Zustände $\underline{x}(k_0), \dots, \underline{x}(k)$ aus den Zustandsgleichungen eindeutig bestimmt werden.

Die Beobachtbarkeitsmatrix verändert natürlich ihre Struktur mit zunehmender Anzahl k der Beobachtungszeitpunkte. Hierfür kann eine Rekursionsgleichung angegeben werden:

$$\underline{M}(k+1, k_0) = (\underline{A}^{-1}(k))^T \underline{M}(k, k_0) \underline{A}^{-1}(k) + \underline{C}^T(k+1) \underline{C}(k+1)$$

mit Anfangswert:

$$\underline{M}(k_0, k_0) = \underline{C}^T(k_0) \underline{C}(k_0)$$

Eine eindeutige Bestimmung des Zustandsvektors ist bei stochastisch gestörten Systemen, wie sie in den folgenden Abschnitten diskutiert werden, zwar nicht möglich, jedoch gibt die Beobachtbarkeitsmatrix für das zugehörige

deterministische System Aufschluß über die Eindeutigkeit der Zustandsschätzung, insbesondere, da der im folgenden abzuleitende Schätzalgorithmus auch Werte für den Zustandsvektor liefert, wenn der Zustand im oben beschriebenen Sinne nicht beobachtbar ist. Diese Schätzungen sind dann als "Ausgleichslösungen" zu verstehen, die mit minimaler Fehlervarianz an die Beobachtungen angepaßt sind.

In der Systemtheorie werden die Zustandsgleichungen eines linearen Übertragungssystems zusammen mit dem Anfangsvektor $\underline{x}(k_0)$ der Zustandsdifferentialgleichung in Form eines Strukturbildes dargestellt. Ein solches Strukturbild für die hier betrachteten Zustandsgleichungen zeigt Abbildung 2.2.

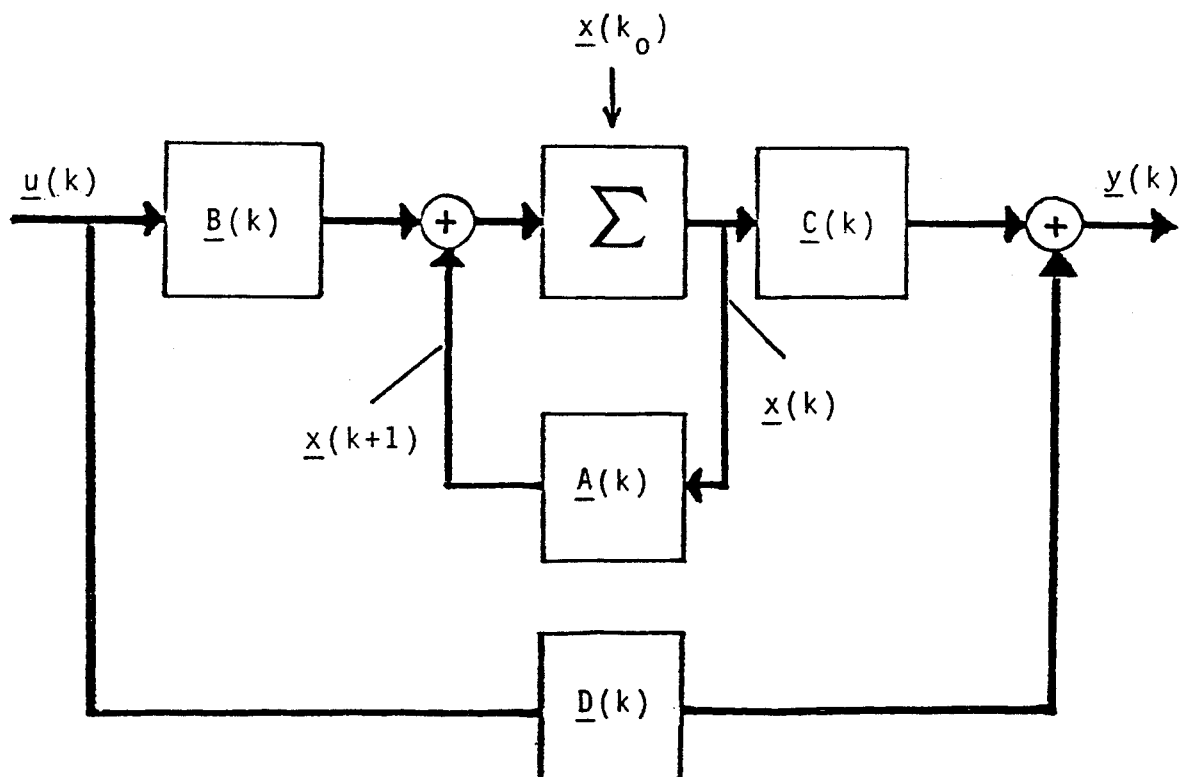


Abbildung 2.2: Lineares Übertragungsmodell

Dieses Strukturbild symbolisiert den Mechanismus, nach dem sich die Zeitreihe $\underline{y}(k)$ aufgrund von Änderungen und Entwicklungen des nicht direkt beobachtbaren Zustandsvektors $\underline{x}(k)$ und unter Einfluß externer Eingangsgrößen $\underline{u}(k)$ ausbildet.

Die Gleichungen (II.2.9a, b) repräsentieren einen rein deterministischen Entwicklungsablauf, das heißt es werden keine Störgrößen berücksichtigt.

Ziel einer psychologischen Modellbildung ist es, solche Störungen explizit zu berücksichtigen und zu jedem Zeitpunkt k ein möglichst genaues Wissen über den inneren Zustand $\underline{x}(k)$ des Systems zu erhalten.

II.3 Voraussetzungen zur Behandlung stochastischer Systeme

Zur weiteren Behandlung des systemanalytischen Modells (II.2.9a, b) sollen nun einige Modifikationen angebracht werden. Diese dienen einerseits einer realistischeren Beschreibung psychologischer Abläufe durch das mathematische Modell, andererseits wird die Systembeschreibung so abgeändert, daß die folgenden, eher formalen Betrachtungen möglichst kurz gehalten werden können. Erweiterungen des Modells sollen durch leicht durchzuführende Änderungen der in den folgenden Abschnitten abzuleitenden Formeln behandelt werden können.

Im einzelnen sollen die folgenden Modifikationen vorgenommen werden:

- (i) Eine direkte Beeinflussung der Meßgrößen $\underline{y}(k)$ durch die äußeren Einflüsse $\underline{u}(k)$, wie sie in Abbildung 2.2 durch den direkten, mit \underline{D} bezeichneten Zweig symbolisiert sind, soll im Weiteren nicht betrachtet werden. Sämtliche Wechselwirkungen dieser externen Einflüsse $\underline{u}(k)$ mit den resultierenden Meßwerten $\underline{y}(k)$ sollen über den Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ und dessen zeitliche Entwicklung stattfinden. Formal bedeutet dies, daß der Term $\underline{D}(k) \underline{u}(k)$ im Meßmodell (II.2.9b) unberücksichtigt bleibt.
- (ii) Das bisher beschriebene mathematische Modell enthält keine Störgrößen und ist daher rein deterministisch. Es ist somit zur Modellbildung für empirische Fragestellungen in der Psychologie nicht geeignet. Es sollen daher in beiden Modellgleichungen vektorielle, stochastische Störgrößen ausdrücklich berücksichtigt werden. Hierbei wird die Störgröße in der Gleichung für den Zustandsvektor und die äußeren Einflußgrößen (II.2.9a) als Prozeßfehler bezeichnet, da dieser

sowohl Fehler in den das System von außen beeinflussenden Eingangsgrößen $\underline{u}(k)$ als auch Fehler in der Beschreibung der Veränderung des Zustandsvektors $\underline{x}(k)$, das heißt dynamische Störer, berücksichtigt. Die Störgrößen in der zweiten Modellgleichung (II.2.9b) sind dagegen reine Meßfehler, die zum Beispiel im Datenerhebungsinstrument begründet liegen können.

Der Vektor der Prozeßfehler weicht wesentlich von den normalen, bekannten Meßfehlern ab, weil er eine Störung des dynamischen Systems ist. In den meisten Untersuchungen wird daher nur ein deterministisches Prozeßmodell ohne Prozeßfehler mit Meßfehler angenommen.

- (iii) Zur Vereinfachung der folgenden formalen Schritte wird nur ein System ohne externe Einflüsse betrachtet. Dies bedeutet jedoch keine Einschränkung in bezug auf die Anwendbarkeit des abzuleitenden Schätzverfahrens auf den Fall, daß externe Einflüsse vorliegen. Hiervon überzeugt folgende Überlegung: Da stochastische Beiträge in den externen Einflüssen dem Prozeßfehler zugeschlagen werden können, kann der Beitrag der externen Einflüsse $\underline{u}(k)$ als exakt bekannt vorausgesetzt und durch rein deterministische Zustandsgleichungen beschrieben werden. Bezeichnet man diesen Beitrag zum Zustandsvektor mit $\underline{x}_0(k)$ und zu den durch das Modell simulierten Daten mit $\underline{y}_0(k)$, so gilt:

$$\underline{x}_0(k+1) = \underline{A}(k) \underline{x}_0(k) + \underline{B}(k) \underline{u}(k)$$

$$\underline{y}_0(k) = \underline{C}(k) \underline{x}_0(k)$$

Subtrahiert man diese deterministischen Beiträge von den Zustandsgleichungen (II.2.9a, b) unter Berücksichtigung der stochastischen Beiträge aus (ii), so erhält man die Zustandsgleichungen:

$$[\underline{x}(k+1) - \underline{x}_0(k+1)] = \underline{A}(k) [\underline{x}(k) - \underline{x}_0(k)] + \underline{v}(k)$$

$$[\underline{y}(k) - \underline{y}_0(k)] = \underline{C}(k) [\underline{x}(k) - \underline{x}_0(k)] + \underline{w}(k)$$

die keine externen Einflüsse mehr enthalten.

Die zentrierten Zustandsgrößen $[\underline{x}(k) - \underline{x}_0(k)]$ können nun geschätzt werden und anschließend um $\underline{x}_0(k)$ korrigiert werden, was bei gegebenem Erwartungswert für den Anfangszustand $\underline{x}_0(k_0)$ durch wiederholte Anwendung der Matrizen $\underline{A}(k)$ möglich ist:

$$\underline{x}_0(k) = \underline{A}(k-1) \cdot \dots \cdot \underline{A}(k_0) \underline{x}_0(k_0)$$

In der Praxis lassen sich, wie in Abschnitt II.6 gezeigt wird, die externen Einflüsse im rekursiven Schätzalgorithmus eleganter berücksichtigen als hier beschrieben.

Nach Maßgabe dieser Modifikationen wird daher bei den folgenden, rein methodischen Überlegungen ein reduziertes, stochastisch gestörtes, vektorielles Beschreibungsmodell für den zeitdiskreten Fall betrachtet:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k) \underline{x}(k) + \underline{v}(k) \quad (\text{II.3.1a})$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}(k) \underline{x}(k) + \underline{w}(k) \quad (\text{II.3.1b})$$

mit

$\underline{x}(k)$ = n-dimensionaler Zustandsvektor, der für die diskreten Zeitpunkte k optimal zu schätzen ist

$\underline{y}(k)$ = m-dimensionaler Vektor stochastisch gestörter Meßwerte

$\underline{A}(k)$ = (m x n)-Parametermatrix, die die Dynamik des Modells beschreibt

$\underline{C}(k)$ = (n x m)-Gewichtsmatrix, die den Zusammenhang der Meßwerte mit den Zustandsvariablen festlegt

$\underline{v}(k)$ = Prozeßfehler, der Störungen in der Dynamik des Systems beschreibt

$\underline{w}(k)$ = Meßfehler, der zum Beispiel im Datenerhebungsinstrument begründet liegen kann

In diesem Kapitel werden die Parametermatrizen \underline{A} und \underline{C} als gegeben und bekannt vorausgesetzt. Es soll jedoch hier schon darauf hingewiesen werden, daß in der Psychologie gerade die Festlegung dieser Parametermatrizen ein erhebliches Problem darstellt, da man es hier mit offenen Systemen zu tun hat. Schätzung und Prognose über die zukünftige Entwicklung des internen Zustandes \underline{x} des beobachteten Systems sind erst dann möglich und sinnvoll, wenn über eine Reihe von multivariaten Beobachtungen die das mathematische Modell bestimmenden Matrizen \underline{A} und \underline{C} geschätzt wurden. Auf Methoden zur Identifikation des mathematischen Modells wird ausführlich im Kapitel III eingegangen.

Um zu einem Schätzwert für den Zustandsvektor \underline{x} zu gelangen, müssen einige Annahmen über die Störgrößen und ihren Zusammenhang mit dem Zustandsvektor und den gemessenen Daten getroffen werden.

Ähnlich wie in faktorenanalytischen Ansätzen (REVENTORF 1980) oder in strukturanalytischen Modellen (JÖRESKOG & SÖRBOM 1977) werden die Voraussetzungen über die Stör-, Zustands- und Meßgrößen spezifiziert:

(V1) Die betrachteten Vektoren seien biasfrei:

$$E(\underline{x}(k_0)) = \underline{0}$$

$$E(\underline{w}(k)) = \underline{0}$$

$$E(\underline{v}(k)) = \underline{0}$$

(V2) Die Kovarianzmatrizen der "weißen" Störgrößen $\underline{v}(k)$ und $\underline{w}(k)$ seien gegeben, symmetrisch und positiv semidefinit:

$$E(\underline{v}(k)\underline{v}^T(l)) = \underline{Q}(k) \delta_{kl}$$

$$E(\underline{w}(k)\underline{w}^T(l)) = \underline{R}(k) \delta_{kl}$$

(δ_{kl} = Kroneckersymbol = 1 für $k = l$ und
0 für $k \neq l$)

Eine Störgröße wird als "weiß" bezeichnet, wenn ihre zu verschiedenen Zeitpunkten gemessenen Werte unkorreliert sind; im Fall einer Gaußschen Verteilung der Störgröße bedeutet dies zusätzlich, daß diese, zu verschiedenen Zeitpunkten erhobenen Werte auch unabhängig voneinander sind.

(V3) Der Anfangszustand $\underline{x}(k_0)$, die Prozeßfehler $\underline{v}(k)$ und die Meßfehler $\underline{w}(k)$ seien gegenseitig unkorreliert:

$$E(\underline{x}(k_0) \underline{v}^T(k)) = \underline{0}$$

$$E(\underline{x}(k_0) \underline{w}^T(k)) = \underline{0}$$

$$E(\underline{v}(k) \underline{w}^T(k)) = \underline{0}$$

(V4) Die Kovarianzmatrix des Zustandsvektors im Anfangszustand, das heißt bei $k = k_0$, sei bekannt:

$$\begin{aligned} \underline{P}(k_0) &= \\ &= E((\underline{x}(k_0) - E(\underline{x}(k_0))) (\underline{x}(k_0) - E(\underline{x}(k_0)))^T) = \\ &= E(\underline{x}(k_0) \underline{x}^T(k_0)) \quad (\text{Biasfreiheit!}) \end{aligned}$$

Die Aufgabe für den im Folgenden abzuleitenden Algorithmus besteht nun darin, im Beobachtungszeitpunkt k für den Zustandsvektor $\underline{x}(k)$, der der direkten Beobachtung nicht zugänglich ist, einen linearen, erwartungstreuen Schätzwert $\hat{\underline{x}}(k)$, auf der Basis der multivariaten Meßwertfolge $\underline{y}(k_0), \dots, \underline{y}(k)$ anzugeben. Als Optimalitätskriterium für die Schätzung soll hierbei angenommen werden, daß der Schätzfehler

$$\tilde{\underline{x}}(k) = \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k) \quad (\text{II.3.2})$$

in seiner Varianz zu minimieren ist.

Die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers sei - bei erwartungstreuer Schätzung, das heißt bei $E(\hat{\underline{x}}(k)) = E(\underline{x}(k))$ - definiert durch

$$\underline{\hat{P}}(k) := E(\tilde{\underline{x}}(k) \tilde{\underline{x}}^T(k)) \quad (\text{II.3.3})$$

Die in (V1) beschriebene Voraussetzung der Biasfreiheit des Zustandsvektors $\underline{x}(k)$ und des Datenvektors $\underline{y}(k)$ wird in Abschnitt II.6 wieder aufgehoben. Dies ist nötig,

wenn, wie oben bereits erwähnt, der zusätzliche Einfluß von Umweltfaktoren $\underline{u}(k)$ explizit berücksichtigt wird.

Die Voraussetzungen (V2) und (V3) sind bei methodischen Betrachtungen durchaus üblich und meßmethodisch bei sorgfältiger Vorgehensweise in der Auswahl der Meßvariablen auch realisierbar.

Die Voraussetzung (V4) ist eine relativ starke Voraussetzung, da hier Annahmen über den zunächst unbekanntem Zustandsvektor getroffen werden. Bei den bisher üblichen Schätzverfahren für ähnliche dynamische Modelle (zum Beispiel PHILLIPS 1973) müssen gute Startwerte für den Zustandsvektor vorausgesetzt werden, da hier expliziter Gebrauch von der Transitionsmatrix gemacht wird und es sich daher nach Gleichung (II.2.7) um ein nichtlineares Schätzproblem handelt. Diese Schwierigkeit soll in dieser Arbeit vermieden werden, indem zu jedem neuen Zeitpunkt die Schätzwerte durch Berücksichtigung der Meßmodellgleichung (II.3.1b) korrigiert werden und dadurch die Voraussetzung (V4) etwas "entschärft" wird.

II.4 Eine Methode zur Schätzwertverbesserung

Die einfachste Methode zur Schätzung des Zustandsvektors im Beobachtungszeitpunkt k aufgrund der vorangegangenen Entwicklung besteht in der Ausnutzung der Zustandsdifferenzgleichung (II.3.1a), derzufolge aus den Schätzwerten $\hat{\underline{x}}(k-1)$ und der Parametermatrix $\underline{A}(k-1)$ die Schätzwerte $\hat{\underline{x}}$ für den aktuellen Beobachtungszeitpunkt k sofort abgeleitet werden können:

$$\hat{\underline{x}}(k) = \underline{A}(k-1) \hat{\underline{x}}(k-1)$$

Der Prozeßfehler kann hier nicht berücksichtigt werden, da er nicht explizit bekannt ist.

Diese Vorgehensweise hat zwar den Vorteil, daß die Einflüsse der reinen Meßfehler \underline{w} vermieden werden, nachteilig ist jedoch, daß das zeitliche Verhalten des Schätzfehlers (II.3.2) ausschließlich von der Dynamik des Zustandsvektors abhängt.

Diese Verfahrensweise entspricht der von PHILLIPS (1972) angewandten Methode zur Lösung des von ihm vorgeschlagenen stochastischen Differentialgleichungssystems im kontinuierlichen Fall.

Bei dem hier betrachteten zeitdiskreten Fall erfüllt der Schätzfehler demnach das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\tilde{\underline{x}}(k) = \underline{A}(k-1) \tilde{\underline{x}}(k-1) + \underline{v}(k-1)$$

Die neu hinzugekommenen Meßwerte $\underline{y}(k)$ werden bei einem solchen Ansatz somit in keiner Weise berücksichtigt, was sich bei der mathematischen Simulation durch nichtstationäre Gleichungen (das heißt, die Parametermatrizen sind

zeitabhängig) in starker Oszillation der Gewichtsmatrix $\underline{C}(k)$ und/oder in einer nur sehr langsamen Stabilisierung der Schätzfehler bemerkbar machen kann.

Dieser Nachteil kann durch die Methode der Meßwertrückführung (Feedback-System) mit Hilfe einer "Korrekturmatrix" \underline{K} behoben werden. Der Schätzwert für den Zustandsvektor wird hierbei mit dem Fehler der geschätzten Meßgrößen $\underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}(k)$ auf der Basis des Zustandsvektors für den davorliegenden Beobachtungszeitpunkt korrigiert. Für die geschätzte Meßgröße gilt der Ansatz:

$$\hat{\underline{y}}(k) = \underline{C}(k) \hat{\underline{x}}(k) = \underline{C}(k) \underline{A}(k-1) \hat{\underline{x}}(k-1)$$

Der Beitrag des Meßfehlers bleibt unberücksichtigt, da er nicht explizit bekannt ist.

Der tatsächliche Meßwert für den Beobachtungszeitpunkt k liegt aber schon vor, so daß die Diskrepanz zwischen vorhandenem Meßwert $\underline{y}(k)$ und geschätztem Meßwert $\hat{\underline{y}}(k)$ zur Korrektur des aktuellen Schätzwertes $\hat{\underline{x}}(k)$ herangezogen werden kann. Ein geeigneterer Ansatz für den geschätzten Zustandsvektor zum aktuellen Beobachtungszeitpunkt k ist daher der folgende:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k) &= \underline{A}(k-1) \hat{\underline{x}}(k-1) + \\ &+ \underline{K}(k) \cdot (\underline{y}(k) - \underline{C}(k) \underline{A}(k-1) \hat{\underline{x}}(k-1)) \end{aligned}$$

(II.4.1)

Die Korrekturmatrix \underline{K} ist hierbei eine im Prinzip zunächst noch frei wählbare Matrix. Sie soll so gewählt werden, daß die Varianz des Schätzfehlers minimal wird. Diese Korrekturmatrix muß natürlich zu jedem Beobachtungszeitpunkt neu berechnet werden und bestimmt damit auch das zeitliche Verhalten des Schätzfehlers, das durch folgende Rekursionsgleichung gegeben ist:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{x}}(k) = & [\underline{A}(k-1) - \underline{K}(k) \underline{C}(k) \underline{A}(k-1)] \underline{\tilde{x}}(k-1) + \\ & + \underline{K}(k) [\underline{C}(k) \underline{v}(k) + \underline{w}(k)] \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz (II.4.1) ist es somit möglich, die Dynamik des geschätzten Zustandsvektors durch geeignete Wahl der Korrekturmatri \underline{K} so zu beeinflussen, daß der Schätzfehler $\underline{\tilde{x}}(k)$ möglichst schnell abklingt oder sich zumindest möglichst schnell stabilisiert.

Die Funktion der Korrekturmatri \underline{K} ist es, den Einfluß der Prozeß- und Meßfehler auf die Schätzung des Zustandsvektors zu minimieren. Ist der Anfangszustand exakt bekannt und verschwinden die Fehlerkovarianzmatrizen, so wird \underline{K} zur Nullmatrix.

In den folgenden Abschnitten wird ein rekursiver Algorithmus abgeleitet, der einerseits eine systematische Synthese der Matrix \underline{K} für jeden Beobachtungszeitpunkt ermöglicht und damit andererseits eine optimale Schätzung des Zustandsvektors erlaubt. Die statistischen Eigenschaften der multivariaten Prozeß- und Meßfehler werden hierbei zur Aufstellung der Korrekturmatri \underline{K} benötigt.

II.5 Ableitung eines rekursiven Gleichungssystems für den Zustandsvektor

Das gewünschte Rekursionsgleichungssystem soll auf zwei verschiedene Weisen hergeleitet werden, wobei unterschiedliche Annahmen über die Kovarianzmatrizen der Meßfehler beziehungsweise die Zahl der zur Verfügung stehenden Beobachtungen zur Aufstellung der ersten Schätzung für den Zustandsvektor getroffen werden.

Die erste, etwas heuristischere Methode ist eine rekursive Gauß-Markov-Schätzung, während die zweite Methode der Ableitung auf dem Verfahren der minimalen Varianz beruht. Diese zweite Betrachtungsweise ist etwas allgemeiner und umfaßt auch die ersten Meßzeitpunkte, bei denen die Gesamtzahl der Beobachtungen noch kleiner als die Zahl der zu schätzenden Zustandsvariablen ist.

Sowohl die Methode der Gauß-Markov-Schätzung als auch das Verfahren der minimalen Varianz zur Lösung stochastisch gestörter Gleichungssysteme sind weitgehend bekannt (zum Beispiel BRANDT 1981), sie sollen jedoch in dem folgenden Unterabschnitt noch einmal in einer für die anschließenden methodischen Betrachtungen geeigneten Weise abgeleitet werden.

II.5.1 Gauß-Markov-Schätzung und die Methode der minimalen Varianz

Zur Bereitstellung der entsprechenden formalen Zusammenhänge sollen in diesem Abschnitt losgelöst vom systemtheoretischen Simulationsmodell die Gauß-Markov-Schätzung und der Schätzwert minimaler Varianz für ein stochastisch gestörtes Gleichungssystem abgeleitet werden. Das Gleichungssystem sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} \underline{d} &= \begin{bmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ m_{11} & \cdots & m_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_1 \end{bmatrix} = \\ &= \underline{M} \underline{x} + \underline{s} \end{aligned}$$

(II.5.1)

Hier ist \underline{x} der Vektor der n Unbekannten, \underline{s} ein l -dimensionaler Vektor von Störgrößen und \underline{d} der l -dimensionale Vektor der gegebenen Daten.

Die Anzahl l der zu lösenden Gleichungen kann hierbei kleiner, gleich oder größer als die Anzahl n der Unbekannten sein; die Matrix \underline{M} sei eine bekannte $(l \times n)$ -Koeffizientenmatrix.

Die unterschiedliche Dimensionalität des Datenvektors \underline{d} und des Lösungsvektors \underline{x} ist insbesondere bei der mathematischen Modellbildung für psychologische Prozesse wichtig. Der Fall $l > n$ beschreibt eine datenreduzierende Vorgehensweise, das heißt aus einer Vielzahl beobachteter Kriterien wird eine reduzierte Zahl wesentlicher Einflußfaktoren geschätzt. Andererseits kann aber auch der Fall $n > l$ von methodischem Interesse sein, wenn nämlich zum Beispiel aus der Beobachtung nur eines Kriteriums über längere Zeit hinweg auf eine mehrdimensionale interne Struktur geschlossen werden soll (vgl. Transfermodelle).

Ähnlich wie im Abschnitt II.3 sollen hier für den gesuchten Lösungsvektor, den Datenvektor und den Vektor der Störgrößen die folgenden Voraussetzungen spezifiziert werden:

(S1) Die betrachteten Vektoren seien biasfrei:

$$E(\underline{x}) = \underline{0}$$

$$E(\underline{d}) = \underline{0}$$

$$E(\underline{s}) = \underline{0}$$

(S2) Die Kovarianzmatrix der Störgröße \underline{s} sei gegeben:

$$E(\underline{ss}^T) = \underline{S}$$

(S3) Lösungsvektor und Störvektor seien unkorreliert:

$$E(\underline{xs}^T) = \underline{0}$$

(S4) Die Kovarianzmatrix des Lösungsvektors sei bekannt:

$$E(\underline{xx}^T) = \underline{P}$$

Diese Voraussetzungen entsprechen weitestgehend den Voraussetzungen (V1) bis (V4) aus Abschnitt II.3, wenn man berücksichtigt, daß hier keine Zeitabhängigkeit betrachtet wird.

Die Bedingungen (S1) bis (S4) bilden daher einen Spezialfall der Voraussetzungen für das mathematische Simulationsmodell zu einem speziellen Zeitpunkt k und machen damit die Überlegungen dieses Abschnittes direkt anwendbar für die weitere Ausarbeitung des systemanalytischen Modells.

Für den gesuchten Schätzvektor $\hat{\underline{x}}$ der Lösung des Gleichungssystems (II.5.1) sollen die folgenden Bedingungen gelten:

- (a) Die Lösung soll in einem linearen Zusammenhang mit dem gegebenen Datenvektor stehen.
- (b) Die Lösung soll erwartungstreu sein.
- (c) Die Komponenten der Schätzfehler $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$ sollen minimale Varianz haben.

Die Bedingung (a) für den Schätzwert $\hat{\underline{x}}$ hat folgende formale Gestalt:

$$\hat{\underline{x}} = \underline{c} + \underline{H} \underline{d}$$

wobei der n -dimensionale Vektor \underline{c} und die $(n \times 1)$ -Matrix \underline{H} zunächst noch nicht spezifiziert sind.

Der konstante Vektor \underline{c} läßt sich aber aus Bedingung (b) - Erwartungstreue - bestimmen, denn diese Bedingung lautet formal:

$$E(\hat{\underline{x}}) = \underline{c} + \underline{H} E(\underline{d}) = E(\underline{x})$$

Da nach Voraussetzung (S1) sowohl der Datenvektor \underline{d} als auch der Lösungsvektor \underline{x} biasfrei sein sollen, folgt sofort, daß der konstante Vektor \underline{c} identisch verschwinden muß, so daß für den Schätzwert der folgende lineare Zusammenhang gilt:

$$\underline{\hat{x}} = \underline{H} \underline{d}$$

Die Koeffizientenmatrix H wird nun durch die Vorschrift festgelegt, daß die Varianz der Komponenten der Schätzfehler minimal wird:

$$E(\tilde{x}_i^2) \xrightarrow{!} \text{Minimum} \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

Bezeichnet man die Zeile i der Koeffizientenmatrix \underline{H} mit $\underline{H}(i)$, so lassen sich die Varianzen der Komponenten des Schätzfehlers folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}_i^2) &= E((x_i - \hat{x}_i)^2) \\ &= E((x_i - \underline{H}(i)\underline{d})^2) = \\ &= E(x_i^2 - 2x_i\underline{H}(i)\underline{d} + (\underline{H}(i)\underline{d})^2) = \\ &= E(x_i^2) - 2E(x_i\underline{d}^T) \underline{H}(i)^T + \underline{H}(i)E(\underline{d}\underline{d}^T)\underline{H}(i)^T \end{aligned} \tag{II.5.2}$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß die Erwartungswerte der Quadrate der Schätzfehlerkomponenten extremal werden (hier insbesondere: minimal), ist diejenige, daß ihre partiellen Ableitungen nach den freien Parametern verschwinden. Als freie Parameter tauchen in Gleichung (II.5.2) die Zeilen der Koeffizientenmatrix \underline{H} auf, das heißt der Gradient der Erwartungswerte nach den Zeilen der Koeffizientenmatrix muß verschwinden:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{H}(i)} E(\tilde{x}_i^2) \stackrel{!}{=} \underline{0}^T \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

Durch Gradientenbildung auf der rechten Seite von (II.5.2) erhält man die Gleichung:

$$-2E(x_i \underline{d}^T) + 2\underline{H}(i)E(\underline{d}\underline{d}^T) = \underline{0}^T$$

oder anders ausgedrückt:

$$E(x_i \underline{d}^T) - \underline{H}(i)E(\underline{d}\underline{d}^T) = \underline{0}^T \quad (\text{II.5.3})$$

Da diese Bedingung gleichermaßen für alle Zeilen $i = 1, \dots, n$ der Koeffizientenmatrix \underline{H} gilt, lassen sich diese Gleichungen zusammenfassen zu der folgenden Matrixgleichung:

$$E(\underline{x} \underline{d}^T) - \underline{H} E(\underline{d}\underline{d}^T) = \underline{0} \quad (\text{II.5.4})$$

Dieses lineare, algebraische Gleichungssystem für die Koeffizientenmatrix \underline{H} ist somit eine notwendige Bedingung dafür, daß die Fehlervarianzen der einzelnen Komponenten des gesuchten Lösungsvektors \underline{x} einen Extremwert annehmen.

Hinreichend für das Vorliegen eines Minimums ist die zusätzliche Bedingung, daß die zweiten partiellen Ableitungen der Erwartungswerte $E(\tilde{x}_i^2)$ nach den Zeilen i der Matrix \underline{H} eine positiv definite Matrix bilden.

Zusätzliche Gradientenbildung auf der linken Seite von (II.5.3) nach den Zeilen $\underline{H}(i)$ liefert damit die Bedingung:

$$\frac{\partial^2}{\partial (\underline{H}(i))^2} E(\tilde{x}_i^2) = \text{positiv definit} \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

beziehungsweise nach Zusammenfassung aller Komponenten:

$$E(\underline{d}\underline{d}^T) = \text{positiv definit} \quad (\text{II.5.5})$$

Die Bedingung (II.5.5) ist hinreichend dafür, daß die in (II.5.4) zu berechnende Matrix \underline{H} einen Lösungsvektor \underline{x} des Gleichungssystems (II.5.1) mit minimaler Fehlervarianz liefert. Da (II.5.5) die Invertierbarkeit der Kovarianzmatrix des Datenvektors sicherstellt, ist diese Bedingung außerdem notwendig und hinreichend dafür, daß (II.5.4) eindeutig nach \underline{H} aufgelöst werden kann.

Die Gleichung (II.5.4) ist auch noch in einem anderen Zusammenhang interessant. Sie stellt nämlich die diskretisierte Form der Wiener-Hopfschen Integralgleichung dar (vgl. PAPOULIS 1977) und ist damit die Grundlage für die Lösung stochastisch gestörter Transfermodelle. Solche Transfermodelle werden bei der cross-spectral-analysis von GOTTMAN (1979a) studiert, wobei die Modellgleichungen durch Laplace-Transformation in den Frequenzbereich gelöst werden. Die von GOTTMAN (1979a) intensiv verwendete Kohärenzfunktion läßt sich sehr leicht aus einer geeigneten Formulierung der Gleichung (II.5.4) ableiten.

Eine wichtige Beziehung des Fehlervektors zu dem gegebenen Datenvektor ergibt sich durch Umformung der Gleichung (II.5.4):

$$\begin{aligned} E(\underline{x}\underline{d}^T) - \underline{H} E(\underline{d}\underline{d}^T) &= E((\underline{x}-\underline{H}\underline{d})\underline{d}^T) = \\ &= E(\underline{\tilde{x}}\underline{d}^T) = \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{II.5.6})$$

Diese Beziehung besagt, daß die Kreuzkovarianz zwischen Schätzfehlern und gegebenen Daten verschwinden muß, oder mit anderen Worten, daß die Fehler orthogonal zu den Daten sind.

Da $\tilde{\underline{x}}$ und \underline{d} als biasfrei vorausgesetzt wurden, besagt diese Orthogonalitätsrelation auch, daß Fehler und Daten unkorreliert sind.

Ebenso erhält man durch einfaches Nachmultiplizieren der Gleichung (II.5.6) mit \underline{H}^T , daß die Fehler und die Schätzwerte unkorreliert sind:

$$E(\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T) = \underline{0} \quad (\text{II.5.7})$$

Für die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers läßt sich damit schließlich der folgende Ausdruck angeben:

$$\begin{aligned} E(\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T) &= E(\tilde{\underline{x}}(\underline{x}-\hat{\underline{x}})^T) = E(\tilde{\underline{x}}\underline{x}^T) = \\ &= E((\underline{x}-\underline{H}\underline{d})\underline{x}^T) = E(\underline{x}\underline{x}^T) - \underline{H} E(\underline{d}\underline{x}^T) \end{aligned}$$

Nachdem nun notwendige und hinreichende Bedingungen zur Berechnung der gesuchten Koeffizientenmatrix \underline{H} zur Bestimmung des optimalen Schätzwertes für \underline{x} (im Sinne der minimalen Fehlervarianz) angegeben wurden, sollen im Weiteren explizite Bestimmungsgleichungen für die Matrix \underline{H} unter Ausnutzung der in den Voraussetzungen (S1) bis (S4) spezifizierten Kovarianzmatrizen \underline{S} und \underline{P} abgeleitet werden. Hierzu betrachtet man noch einmal die Kovarianzmatrix von Lösungsvektor \underline{x} und Datenvektor \underline{d} :

$$E(\underline{x}\underline{d}^T) = E(\underline{x}(\underline{x}^T \underline{M}^T + \underline{s}^T)) = \underline{P} \underline{M}^T$$

und die Kovarianzmatrix des Datenvektors:

$$\begin{aligned} E(\underline{d}\underline{d}^T) &= E((\underline{M}\underline{x}+\underline{s}) (\underline{x}^T \underline{M}^T + \underline{s}^T)) = \\ &= \underline{M} \underline{P} \underline{M}^T + \underline{S} \end{aligned}$$

Setzt man diese Kovarianzmatrizen in (II.5.4) ein, so erhält man folgende Identität:

$$\underline{H} (\underline{M} \underline{P} \underline{M}^T + \underline{S}) = \underline{P} \underline{M}^T \quad (\text{II.5.8})$$

Die Matrix \underline{M} ist $(l \times n)$ -dimensional, \underline{P} ist $(n \times n)$ -dimensional und \underline{S} ist $(l \times l)$ -dimensional, so daß insgesamt der Klammerausdruck eine $(l \times l)$ -dimensionale Matrix darstellt. Liegen nun weniger Daten als Unbekannte vor, wenn also $l \leq n$, so ist die soeben abgeleitete Matrixidentität am besten geeignet, die gesuchte Koeffizientenmatrix zu bestimmen:

$$\underline{H} = \underline{P} \underline{M}^T (\underline{M} \underline{P} \underline{M}^T + \underline{S})^{-1} \quad (\text{II.5.9})$$

Die in (II.5.9) zu invertierende Matrix ist $(l \times l)$ -dimensional, das heißt für den Fall, daß nur eindimensionale Datenvektoren aufgezeichnet werden, besteht die Inversenbildung aus einer reinen Division. Für den erwartungstreuen Schätzwert minimaler Varianz des Lösungsvektors der Gleichung (II.5.1) ergibt sich somit:

$$\underline{\hat{x}} = \underline{P} \underline{M}^T (\underline{M} \underline{P} \underline{M}^T + \underline{S})^{-1} \underline{d} \quad (\text{II.5.10})$$

Falls die hier zu invertierende Matrix nicht regulär ist, kann die Pseudoinverse nach PENROSE (1955) gebildet werden.

Die Angabe eines Schätzwertes für die Lösung des Gleichungssystems ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn zusätzlich der Schätzfehler angegeben werden kann. Dieser berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} E(\underline{\tilde{x}}\underline{\tilde{x}}^T) &= \underline{P} - \underline{H} \underline{M} \underline{P} = \\ &= \underline{P} - \underline{P} \underline{M}^T (\underline{M} \underline{P} \underline{M}^T + \underline{S})^{-1} \underline{M} \underline{P} \end{aligned} \quad (\text{II.5.11})$$

Hierbei ist der Mindestwert der Summe der Fehlervarianzen durch die Spur der Matrix in (II.5.11) gegeben.

Der in der Praxis weit häufigere Fall wird jedoch der sein, daß mehr Daten zur Verfügung stehen als unbekannte Parameter zu bestimmen sind. Für diesen Fall läßt sich ein zu (II.5.10) mathematisch äquivalenter, jedoch von der Rechenökonomie her günstigerer Ausdruck ableiten. Aus formalen Gründen muß hier allerdings zusätzlich vorausgesetzt werden, daß die Kovarianzmatrix \underline{P} der unbekannt Parameter \underline{x} und die Kovarianzmatrix \underline{S} der Störgrößen \underline{s} regulär (das heißt invertierbar) sind.

Zunächst werden einige Matrixidentitäten benötigt. Da im Ausdruck für die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers,

$$E(\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T) = \underline{P} - \underline{H} \underline{M} \underline{P},$$

sowohl die Kovarianzmatrix selbst als auch die Kovarianzmatrix \underline{P} des Lösungsvektors symmetrisch sind, muß die Symmetrie auch für den dritten Ausdruck in dieser Gleichung gelten:

$$\underline{H} \underline{M} \underline{P} = \underline{P} \underline{M}^T \underline{H}^T$$

Eine ähnliche Symmetriebeziehung gilt, wenn man in der oben angegebenen Beziehung \underline{P} durch \underline{S} ersetzt. Dies läßt sich durch Ausmultiplizieren der Gleichung (II,5.8) und anschließende Multiplikationen von links mit \underline{M} zeigen:

$$\underline{M} (\underline{H} \underline{M} \underline{P}) \underline{M}^T + \underline{M} \underline{H} \underline{S} = \underline{M} \underline{P} \underline{M}^T$$

Da der erste Term dieser Gleichung aufgrund der gerade abgeleiteten Symmetriebeziehung symmetrisch ist, und der Term rechts vom Gleichheitszeichen per Konstruktion symmetrisch ist, folgt die gewünschte Symmetriebeziehung:

$$\underline{M} \underline{H} \underline{S} = \underline{S} \underline{H}^T \underline{M}^T$$

Ausgehend von (II.5.8) führen wenige, einfache algebraische Schritte unter Ausnutzung der soeben abgeleiteten Symmetriebeziehungen zu einer weiteren Bestimmungsgleichung für die Koeffizientenmatrix \underline{H} :

$$\begin{aligned}\underline{P} \underline{M}^T &= \underline{H} \underline{M} \underline{P} \underline{M}^T + \underline{H} \underline{S} = \\ &= \underline{P} \underline{M}^T \underline{H}^T \underline{M}^T + \underline{H} \underline{S} = \\ &= \underline{P} \underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M} \underline{H} \underline{S} + \underline{H} \underline{S}\end{aligned}$$

Multiplikation mit \underline{P}^{-1} und \underline{S}^{-1} von links beziehungsweise von rechts ergibt den zu (II.5.8) äquivalenten Zusammenhang:

$$(\underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M} + \underline{P}^{-1}) \underline{H} = \underline{M}^T \underline{S}^{-1}$$

Hierbei ist \underline{M} eine $(1 \times n)$ -dimensionale, \underline{S}^{-1} eine (1×1) -dimensionale und \underline{P}^{-1} eine $(n \times n)$ -dimensionale Matrix. Insgesamt ist der Klammerausdruck in dieser Gleichung also $(n \times n)$ -dimensional.

Für den Schätzwert minimaler Varianz findet man mit dieser Beziehung den zu (II.5.10) äquivalenten Ausdruck:

$$\underline{\hat{x}} = (\underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M} + \underline{P}^{-1})^{-1} \underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{d} \quad (\text{II.5.12})$$

Im Gegensatz zu (II.5.10) ist hier die zu invertierende Matrix im Klammerausdruck $(n \times n)$ -dimensional, was besonders für den Fall $n \ll 1$ von großer rechentechnischer Bedeutung ist.

Auch für diese Form des Schätzwertes muß natürlich wieder eine Fehlerkovarianzmatrix angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T) &= \underline{P} - \underline{H} \underline{M} \underline{P} = (\underline{I} - \underline{H} \underline{M}) \underline{P} = \\
 &= (\underline{I} - (\underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M} + \underline{P}^{-1})^{-1} \underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M}) \underline{P} = \\
 &= (\underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M} + \underline{P}^{-1})^{-1} ((\underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M} + \underline{P}^{-1}) \\
 &\quad - \underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M}) \underline{P} = \\
 &= (\underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M} + \underline{P}^{-1})^{-1}
 \end{aligned}$$

(II.5.13)

Als Spezialfall der Schätzung minimaler Varianz (II.5.12) erhält man die Gauß-Markov-Schätzung, wenn die folgenden Spezialisierungen vorgenommen werden:

- (a) Die Kovarianzmatrix des gesuchten Vektors \underline{x} wächst über alle Grenzen: $\underline{P} \rightarrow \infty$ beziehungsweise $\underline{P}^{-1} = \underline{0}$. Dies bedeutet, daß die Streuung der Komponenten x_i des unbekanntes Vektors unendlich groß wird, das heißt, es liegen keinerlei a-priori-Kenntnisse über die Komponenten x_i vor.
- (b) Der Rang der Koeffizientenmatrix \underline{M} des Gleichungssystems (II.5.1) muß gleich 1 sein, das heißt, die vorliegenden 1 Daten müssen linear unabhängig voneinander sein.

Einsetzen der Bedingung (a) in die Schätzgleichung (II.5.12) liefert den Gauß-Markov-Schätzwert für den Lösungsvektor:

$$\hat{\underline{x}} = (\underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{d} \quad (\text{II.5.14})$$

Die Kovarianzmatrix der Schätzfehler für die Gauß-Markov-Schätzung ergibt sich mit Hilfe der Bedingung (a) entsprechend aus (II.5.13):

$$E(\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T) = (\underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M})^{-1} \quad (\text{II.5.15})$$

II.5.2 Die Rekursionsgleichungen als rekursive Gauß-Markov-Schätzung

Die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Gleichungen zur Schätzung des Lösungsvektors eines stochastisch gestörten, linearen Gleichungssystems sollen nun auf das reduzierte systemanalytische Modell (II.3.1) zur Beschreibung psychologischer Prozesse angewandt werden.

In diesem Abschnitt werden für diesen Zweck die Gauß-Markov-Formeln herangezogen.

Wie im letzten Abschnitt bereits erläutert, soll hierbei keinerlei a-priori-Information über die Anfangswerte der unbekannt Parameter \underline{x} vorliegen, das heißt Bedingung (V4) aus Abschnitt II.3 wird durch $\underline{P}(k_0) \rightarrow \infty$ erfüllt. Zusätzlich muß aus technischen Gründen zur Ableitung des rekursiven Algorithmus die Bedingung (V2) aus Abschnitt II.3 dahingehend verstärkt werden, daß die Kovarianzmatrix \underline{R} der Meßfehler regulär sein muß.

Es sei hier jedoch schon darauf hingewiesen, daß die Inverse dieser Kovarianzmatrix bei der endgültigen Formulierung der Rekursionsgleichungen nicht explizit auftaucht; sie wird lediglich für einige Zwischenrechnungen benötigt. Zudem ist diese Forderung aus meßtheoretischen Gründen nicht sehr kritisch, da im Allgemeinen die beobachteten Kriterien $\underline{y}(k)$ nicht fehlerkovarianzfrei sein werden und damit die Matrix \underline{R} in der Praxis in den meisten Fällen invertierbar ist.

Die erste Aufgabe bei der fortlaufenden Schätzung des Zustandsvektors $\underline{x}(k)$ ist die Bestimmung seines Anfangswertes im ersten Beobachtungszeitpunkt k_0 .

Hierzu müssen, beginnend mit dem Zeitpunkt k_0 , so viele Beobachtungen abgewartet werden, bis insgesamt mehr Einzelmeßwerte $y_j(k)$ aus der multivariaten Meßreihe $\underline{y}(k)$ vorliegen als Zustandsgrößen im mathematischen Simulationsmodell (II.3.1) berücksichtigt werden.

Erst nachdem dieser Fall eingetreten ist, kann eine erste Schätzung des Zustandsvektors \underline{x} vorgenommen werden.

Zunächst wird nun also die Methode zur Aufstellung des ersten Schätzwertes erläutert.

Da der Vektor $\underline{y}(k)$ der Meßwerte als m -dimensional und der Zustandsvektor \underline{x} als n -dimensional angenommen wird, ist die Anzahl l der abzuwartenden Beobachtungen durch folgende Ungleichung festgelegt:

$$l \cdot m \geq n .$$

Der erste Schätzwert $\hat{\underline{x}}(k_1)$ wird nun mit Hilfe der Transitionsmatrix und der formalen Lösung (II.2.5) für den Zustandsvektor in diskretisierter Form aufgestellt.

Die formale Lösung der zeitdiskreten Zustandsdifferenzgleichung hat die Gestalt:

$$\underline{x}(k) = \underline{\Phi}(k, k_0) \underline{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \underline{\Phi}(k, i+1) \underline{v}(i); \quad k > k_0$$

oder, wenn man die folgenden Eigenschaften der Transitionsmatrix ausnutzt:

$$\underline{\Phi}^{-1}(k, k_0) = \underline{\Phi}(k_0, k)$$

$$\underline{\Phi}(k_i, k_1) \cdot \underline{\Phi}(k_1, k_j) = \underline{\Phi}(k_i, k_j)$$

erhält man für die formale Lösung in zeitdiskreter Form:

$$\underline{x}(k_0) = \underline{\phi}(k_0, k) \underline{x}(k) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \underline{\phi}(k_0, i+1) \underline{v}(i)$$

(II.5.16)

Diese letzte Gleichung drückt also den Zustandsvektor zum Zeitpunkt der ersten Beobachtung k_0 durch die Zustandsgrößen $\underline{x}(k)$ zu späteren Beobachtungszeitpunkten k aus. Sie ist damit das methodische Hilfsmittel zur Rückwärtsextrapolation des ersten möglichen Schätzwertes für den Zustandsvektor und dient zur Eliminierung der ersten l Zustandsvektoren im Gleichungssystem zur Bestimmung des ersten Schätzwertes bei der rekursiven Gauß-Markov-Schätzung. Dieses Gleichungssystem nimmt unter Ausnutzung der Gleichung (II.5.16) die folgende Gestalt an:

$$\underline{y}(k_0) = \underline{c}(k_0) \underline{x}(k_0) + \underline{w}(k_0) = \underline{c}(k_0) \underline{\phi}(k_0, k_1) \underline{x}(k_1) + \underline{s}(k_0)$$

$$\underline{y}(k_0+1) = \underline{c}(k_0+1) \underline{x}(k_0+1) + \underline{w}(k_0+1) = \underline{c}(k_0+1) \underline{\phi}(k_0+1, k_1) \underline{x}(k_1) + \underline{s}(k_0+1)$$

·
·
·

$$\underline{y}(k_1) = \underline{c}(k_1) \underline{x}(k_1) + \underline{w}(k_1)$$

Diese Gleichungen werden zu einer Vektorgleichung zusammengefaßt, wobei die Störgrößen noch explizit angegeben werden können:

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} \underline{C}(k_0) \sum_{i=k_0}^{k-1} \underline{\Phi}(k_0, i+1) \underline{v}(i) + \underline{w}(k_0) \\ \underline{C}(k_0+1) \sum_{i=k_0+1}^{k-1} \underline{\Phi}(k_0+1, i+1) \underline{v}(i) + \underline{w}(k_0+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{C}(k_1-1) \underline{v}(k_1-1) + \underline{w}(k_1-1) \\ \underline{w}(k_1) \end{bmatrix}$$

Der Datenvektor ist gegeben durch:

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{y}(k_0) \\ \underline{y}(k_0+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{y}(k_1) \end{bmatrix}$$

und die Koeffizientenmatrix hat die Gestalt:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{C}(k_0) \underline{\Phi}(k_0, k_1) \\ \underline{C}(k_0+1) \underline{\Phi}(k_0+1, k_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{C}(k_1) \end{bmatrix}$$

In vektorieller Notation lautet damit das Gleichungssystem zur Bestimmung des ersten Schätzwertes im Beobachtungszeitpunkt k_1 :

$$\underline{d} = \underline{M} \underline{x}(k_1) + \underline{s} \quad (\text{II.5.17})$$

Gleichung (II.5.17) hat damit die gleiche formale Gestalt wie Gleichung (II.5.1) und der erste Schätzwert für den Zustandsvektor läßt sich nach den Ableitungen des vorigen Abschnittes mit Hilfe der Gauß-Markovschen Formel (II.5.14) berechnen.

Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß hier ausdrücklich Gebrauch von der Transitionsmatrix gemacht wurde. Diese kann jedoch systematisch nur bei zeitinvarianten Systemen berechnet werden, das heißt, wenn die Matrizen \underline{A} und \underline{C} zu jedem Beobachtungszeitpunkt identisch sind. Bei zeitvariablen Systemen, das heißt bei "alternden" Modellbeschreibungen, ist die Berechnung der Komponenten von $\underline{\Phi}(k_i, k_j)$ recht aufwendig, da Produkte der Form $\underline{A}(k_0) \cdot \underline{A}(k_0+1) \cdot \dots \cdot \underline{A}(k_1)$ gebildet werden müssen.

Gleichzeitig mit dem ersten Schätzwert $\underline{\hat{x}}(k_1)$ muß die Fehlerkovarianzmatrix

$$\underline{\hat{P}}(k_1) = E(\tilde{\underline{x}}(k_1)\tilde{\underline{x}}^T(k_1)) \quad (\text{II.5.18})$$

erstmalig berechnet werden.

Mit fortschreitender Beobachtung kommt in jedem neuen Meßzeitpunkt ein neuer Satz von Messungen \underline{y} hinzu. Nun soll aber nicht jedes Mal der komplizierte Rechenvorgang, der zur Erlangung des ersten Schätzwertes in Gleichung (II.5.17) beschrieben wurde, wiederholt werden, sondern der neue Schätzwert $\underline{\hat{x}}$ und die neue Varianz \underline{P} sollen durch eine relativ einfache Korrektur aus den alten Werten erzeugt werden. Es wird daher eine rekursive Vorgehensweise angestrebt.

Um die gesuchte Rekursionslösung zu finden, soll im Weiteren vorausgesetzt werden, daß $\hat{\underline{x}}$ und \underline{P} zum Beobachtungszeitpunkt k bekannt seien.

Der bekannte Schätzwert $\hat{\underline{x}}(k)$ wird zunächst gemäß der Zustandsgleichung (II.3.1a) extrapoliert, wobei der unbekannte, biasfreie Prozeßfehler $\underline{v}(k)$ unberücksichtigt bleiben soll:

$$\underline{x}^*(k+1) = \underline{A}(k) \hat{\underline{x}}(k) \quad (\text{II.5.19})$$

Da in diese Extrapolation der letzte, optimale Schätzwert für den Zustandsvektor eingeht, enthält der extrapolierte Zustandsvektor $\underline{x}^*(k+1)$ alle bisherigen Kenntnisse über das zu erwartende $\underline{x}(k+1)$.

Die Extrapolation (II.5.19) kann in diesem Sinne ebenfalls als optimal vorausgesetzt werden.

Der Zusammenhang zwischen extrapoliertem Zustandsvektor und "wahrem" Zustandsvektor zum Zeitpunkt $k+1$ ergibt sich, wenn $\hat{\underline{x}}(k)$ in (II.5.19) durch $\underline{x}(k) - \tilde{\underline{x}}(k)$ ersetzt wird und für $\underline{A}(k)\underline{x}(k)$ anschließend der entsprechende Wert gemäß der Zustandsgleichung eingesetzt wird:

$$\underline{x}^*(k+1) = \underline{x}(k+1) - (\underline{A}(k)\tilde{\underline{x}}(k) + \underline{v}(k))$$

Die Summe der auf der rechten Seite dieser Gleichung neben $\underline{x}(k+1)$ auftretenden "Fehler" hat die folgende Kovarianzmatrix:

$$\underline{P}^*(k+1) = E((\underline{A}(k)\tilde{\underline{x}}(k) + \underline{v}(k)) (\tilde{\underline{x}}^T(k) \underline{A}^T(k) + \underline{v}^T(k)))$$

Dieser Ausdruck für die Fehlerkovarianzmatrix des extrapolierten Zustandsvektors läßt sich mit Hilfe der folgenden Argumentation vereinfachen.

Da $\hat{\underline{x}}(k)$ von der Musterfolge $\underline{y}(k_0), \dots, \underline{y}(k)$ abhängt, die ihrerseits wiederum nur von den Folgen $\underline{x}(k_0), \dots, \underline{x}(k)$ und $\underline{w}(k_0), \dots, \underline{w}(k)$ abhängt, sind $\hat{\underline{x}}(k)$ und $\underline{v}(k)$ nach den Voraussetzungen (V1) bis (V4) aus Abschnitt II.3 unkorreliert. Andererseits sind $\underline{x}(k)$ und $\underline{v}(k)$ aufgrund der gleichen Voraussetzungen ebenfalls unkorreliert, so daß insgesamt die Kreuzkovarianz zwischen $\hat{\underline{x}}(k)$ und $\underline{v}(k)$ verschwindet. Demnach ergibt sich für $\underline{P}^*(k+1)$ der folgende vereinfachte Ausdruck:

$$\underline{P}^*(k+1) = \underline{A}(k) \underline{P}(k) \underline{A}^T(k) + \underline{Q}(k) \quad (\text{II.5.20})$$

Dies ist der Ausdruck für die Kovarianzmatrix des Extrapolationsfehlers, der im rekursiven Algorithmus weiterhin benötigt wird.

Um eine Gauß-Markov-Schätzung für den Zustandsvektor $\hat{\underline{x}}(k+1)$ im neuen Beobachtungszeitpunkt $k+1$ zu erhalten, wird der extrapolierte Vektor mit dem Vektor der neu erhobenen Meßwerte zu einem Verbundsystem zusammengefaßt:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}^*(k+1) \\ \underline{y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{C}(k+1) \end{bmatrix} \underline{x}(k+1) + \begin{bmatrix} -\underline{A}(k)\hat{\underline{x}}(k) - \underline{v}(k) \\ \underline{w}(k+1) \end{bmatrix}$$

oder in der gewohnten Matrixschreibweise:

$$\underline{d} = \underline{M} \underline{x}(k+1) + \underline{s}$$

Damit ist wieder die in Gleichung (II.5.1) festgelegte Form eines stochastisch gestörten Gleichungssystems erreicht und es kann eine erneute Gauß-Markov-Schätzung für den Beobachtungszeitpunkt $k+1$ vorgenommen werden. Voraussetzung hierfür ist jedoch, daß die Kovarianzmatrix der Störgröße \underline{s} bekannt ist. Die Kovarianzmatrix des oberen Teils des neuen Störvektors wurde bereits durch $\underline{P}^*(k+1)$ berechnet; die Kovarianzmatrix des unteren Teils

von \underline{s} im Verbundsystem, also $\underline{w}(k+1)$ ist voraussetzungsgemäß durch Bedingung (V2) im Kapitel II.3 als $\underline{R}(k+1)$ gegeben.

Die Kreuzkovarianzen zwischen $\underline{w}(k+1)$ und $\underline{\tilde{x}}(k)$ beziehungsweise $\underline{v}(k)$ verschwinden gemäß Voraussetzung (V3). Damit ist die Kovarianzmatrix des Störvektors:

$$E(\underline{ss}^T) = \begin{bmatrix} \underline{P}^*(k+1) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{R}(k+1) \end{bmatrix} = \underline{S}$$

Die Gauß-Markov-Schätzung für den neuen Zustandsvektor $\underline{x}(k+1)$ kann nun mit Hilfe von (II.5.14) explizit angegeben werden:

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \underline{\hat{P}}(k+1) \underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{d} \quad (\text{II.5.21})$$

wobei die Fehlerkovarianzmatrix laut (II.5.15) gegeben ist durch:

$$\underline{\hat{P}}(k+1) = (\underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M})^{-1}$$

Um eine der Gleichung (II.4.1) entsprechende Form für den Schätzwert mit Korrekturmatrix \underline{K} zu erhalten, sind noch einige Umformungen vorzunehmen.

Insbesondere werden die folgenden Ausdrücke berechnet:

$$\begin{aligned} \underline{M}^T \underline{S}^{-1} &= (\underline{I}, \underline{C}^T(k+1)) \begin{bmatrix} \underline{P}^{*-1}(k+1) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{R}^{-1}(k+1) \end{bmatrix} = \\ &= (\underline{P}^{*-1}(k+1), \underline{C}^T(k+1) \underline{R}^{-1}(k+1)) \end{aligned} \quad (\text{II.5.22})$$

$$\begin{aligned} \underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{M} &= (\underline{P}^{*-1}(k+1), \underline{C}^T(k+1) \underline{R}^{-1}(k+1)) \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{C}(k+1) \end{bmatrix} = \\ &= \underline{P}^{*-1}(k+1) + \underline{C}^T(k+1) \underline{R}^{-1}(k+1) \underline{C}(k+1) = \\ &= \underline{\tilde{P}}^{-1}(k+1) \end{aligned}$$

(II.5.23)

$$\underline{M}^T \underline{S}^{-1} \underline{d} = ((\underline{P}^{*-1}(k+1), \underline{C}^T(k+1) \underline{R}^{-1}(k+1)) \begin{bmatrix} \underline{x}^*(k+1) \\ \underline{y}(k+1) \end{bmatrix}$$

(II.5.23)

Setzt man diese Ausdrücke in die Schätzgleichung (II.5.21) ein, so ergibt sich der folgende explizite Ausdruck für den neuen Schätzwert:

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \underline{\tilde{P}}(k+1) (\underline{P}^{*-1}(k+1) \underline{x}^*(k+1) + \underline{C}^T(k+1) \underline{R}^{-1}(k+1) \underline{y}(k+1))$$

Bezeichnet man nun die Koeffizientenmatrix vor dem Vektor $\underline{y}(k+1)$ in diesem Ausdruck wiederum als Korrekturmatri-
K(k+1) und ersetzt die nun durchgängig auftretenden Argu-
 mente k+1 der Übersichtlichkeit wegen wieder durch k, so
 erhält man durch leichte algebraische Umformungen mit
 Hilfe von (II.5.23) das folgende System von Gleichungen:

$$\underline{\hat{x}}(k) = \underline{x}^*(k) + \underline{K}(k) (\underline{y}(k) - \underline{C}(k) \underline{x}^*(k))$$

$$\underline{K}(k) = \underline{P}^*(k) \underline{C}^T(k) (\underline{C}(k) \underline{P}^*(k) \underline{C}^T(k) + \underline{R}(k))^{-1}$$

Damit sind alle Gleichungen für den rekursiven Algorithmus zur Gauß-Markov-Schätzung des Zustandsvektors mit Korrektur durch die neuen Meßwerte abgeleitet.

Im folgenden Abschnitt werden die benötigten Gleichungen noch einmal zusammengestellt.

II.5.3 Zusammenfassung der Rekursionsgleichung als Gauß-Markov-Schätzung

Zur besseren Übersicht sollen in diesem Abschnitt noch einmal alle Schritte zusammengestellt werden, die zur rekursiven Schätzung des Zustandsvektors für die Modellgleichung (II.3.1) nach der Gauß-Markov-Methode benötigt werden.

Bevor der Rekursionsalgorithmus angewandt werden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

Das mathematische Modell muß die Voraussetzungen (V1) bis (V4) aus Abschnitt II.3 erfüllen.

Zum Beobachtungszeitpunkt k_0 werden die ersten Messungen $\underline{y}(k_0)$ erhoben. Es werden so viele Beobachtungen abgewartet, bis die Gesamtzahl der Einzelmeßwerte $y_j(k)$ größer oder gleich der Zahl der Komponenten des Zustandsvektors ist.

Anschließend wird der erste Schätzwert $\hat{\underline{x}}(k_1)$ und der erste Wert der Fehlerkovarianzmatrix $\hat{\underline{P}}(k_1)$ gemäß den Gauß-Markovschen-Regeln bestimmt.

Diese beiden Größen stellen die Startwerte für den Rekursionsalgorithmus dar.

Über den Anfangswert des Zustandsvektors sei hier speziell vorausgesetzt, daß er unendliche Streuung habe:

$$\underline{P}^{-1}(k_1) = \underline{0}$$

Das systemanalytische Simulationsmodell ohne Berücksichtigung externer Einflüsse hat die folgende Gestalt:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k) \underline{x}(k) + \underline{v}(k) \quad (\text{II.5.25a})$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}(k) \underline{x}(k) + \underline{w}(k) \quad (\text{II.5.25b})$$

In den ersten beiden Schritten der Schätzung werden mit der Parametermatrix $\underline{A}(k)$, die die Dynamik des Systems festlegt, und der Kovarianzmatrix $\underline{Q}(k)$ der Prozeßfehler, der zum Beobachtungszeitpunkt k vorliegende Schätzwert $\hat{\underline{x}}(k)$ sowie seine Fehlerkovarianzmatrix zum nächsten Beobachtungszeitpunkt extrapoliert:

$$\underline{x}^*(k+1) = \underline{A}(k) \hat{\underline{x}}(k) \quad (\text{II.5.26})$$

sowie die Fehlerkovarianzmatrix der Extrapolation bestimmt:

$$\underline{P}^*(k+1) = \underline{A}(k) \tilde{\underline{P}}(k) \underline{A}^T(k) + \underline{Q}(k) \quad (\text{II.5.27})$$

Im nächsten Schritt wird die bestmögliche Korrekturmatrix \underline{K} berechnet:

$$\underline{K}(k+1) = \underline{P}^*(k+1) \underline{C}^T(k+1) (\underline{C}(k+1) \underline{P}^*(k+1) \underline{C}^T(k+1) + \underline{R}(k+1))^{-1} \quad (\text{II.5.28})$$

und der extrapolierte Schätzwert (II.5.26) wird mit den neu erhobenen Daten $\underline{y}(k+1)$ aufgebessert:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{x}^*(k+1) + \underline{K}(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{C}(k+1) \underline{x}^*(k+1)) \quad (\text{II.5.29})$$

Damit ist der neue, verbesserte Schätzwert berechnet.

Der letzte Schritt liefert schließlich die Kovarianzmatrix des korrigierten, neuen Schätzwertes, die wiederum als Startwert für die folgende Schätzung zum Beobachtungszeitpunkt $k+2$ benötigt wird:

$$\tilde{\underline{P}}(k+1) = \underline{P}^*(k+1) - \underline{K}(k+1) \underline{C}(k+1) \underline{P}^*(k+1)$$

(II.5.30)

Die Elemente der Hauptdiagonalen von $\tilde{\underline{P}}(k+1)$ geben ein Maß für die Güte der Schätzung ab.

II.5.4 Die Rekursionsgleichung als minimale Varianzschätzung

Die bisherige Ableitung der Rekursionsgleichungen als Gauß-Markov-Schätzung war zwar die konzeptuell einfachste Betrachtungsweise, sie hat jedoch den Nachteil, daß die erste Schätzung des Zustandsvektors und die anschließende Rekursion erst dann einsetzen können, wenn mehr als n Einzelbeobachtungen $y_j(k)$ vorliegen.

Das Schätzverfahren der minimalen Varianz erlaubt es dagegen, sofort auf der Basis der ersten Beobachtungswerte $\underline{y}(k_0)$ eine Schätzung für $\underline{x}(k_0)$ vorzunehmen. Dies kann natürlich nur unter einer zusätzlichen Voraussetzung geschehen, das heißt es muß ein zusätzliches Maß an a-priori-Information über den Anfangszustand vorhanden sein.

Es soll demnach hier vorausgesetzt werden, daß im Gegensatz zur Gauß-Markov-Schätzung die Kovarianzmatrix des Zustandsvektors im ersten Beobachtungszeitpunkt k_0 endlich ist. Ansonsten sollen die Voraussetzungen (V1) bis (V4) aus Abschnitt II.3 gelten.

Im ersten Schritt der Ableitung soll nun zunächst der Schätzwert minimaler Varianz für den Anfangszustand $\underline{x}(k_0)$ bestimmt werden.

Für alle weiteren Testzeitpunkte wird wieder ein Rekursionsverfahren angewandt, mit dem ein gegebener Schätzwert bei der Erhebung neuer Meßwerte derart verbessert wird, daß der korrigierte Schätzwert wiederum die kleinstmögliche Fehlervarianz aufweist.

Es wird sich herausstellen, daß der identische Algorithmus wie in Abschnitt II.5.3 entsteht, wobei der Unterschied hauptsächlich in den geänderten Anfangsbedingungen und im vorverlegten Startzeitpunkt besteht.

In mathematischer Hinsicht hat das Verfahren der minimalen Varianz noch zwei weitere Vorteile:

- (a) Die Kovarianzmatrix $\underline{R}(k)$ der Meßfehler braucht nicht mehr als regulär vorausgesetzt zu werden.
- (b) Die Optimalität der Extrapolation (II.5.19) des Zustandsvektors im rekursiven Algorithmus kann streng nachgewiesen werden.

Bei der ersten Datenerhebung liegt der Vektor der multivariaten Meßwerte $\underline{y}(k_0)$ vor:

$$\underline{y}(k_0) = \underline{C}(k_0) \underline{x}(k_0) + \underline{w}(k_0)$$

mit

$$E(\underline{x}(k_0) \underline{x}^T(k_0)) = \underline{P}(k_0)$$

Da in dieser Gleichung sowohl der Datenvektor $\underline{y}(k_0)$ als auch die Koeffizientenmatrix $\underline{C}(k_0)$ und die Kovarianzmatrizen $\underline{R}(k_0)$ und $\underline{P}(k_0)$ der Meßfehler und des Anfangszustandes als bekannt vorausgesetzt werden, sind die Bedingungen (S1) bis (S4) aus Abschnitt II.3 erfüllt und es kann die Formel zur Schätzung der Lösung eines stochastisch gestörten Gleichungssystems mit minimaler Varianz der Fehler (II.5.10) angewandt werden:

$$\hat{\underline{x}}(k_0) = \underline{K}(k_0) \underline{y}(k_0) \quad (\text{II.5.31})$$

mit

$$\underline{K}(k_0) = \underline{P}(k_0) \underline{C}^T(k_0) (\underline{C}(k_0) \underline{P}(k_0) \underline{C}^T(k_0) + \underline{R}(k_0))^{-1} \quad (\text{II.5.32})$$

Wie in Abschnitt II.3 bereits in der Gleichung (II.5.11) abgeleitet, berechnet sich die Kovarianzmatrix der Schätzfehler für den Anfangszustand zu:

$$\tilde{\underline{P}}(k_0) = \underline{P}(k_0) - \underline{K}(k_0) \underline{C}(k_0) \underline{P}(k_0) \quad (\text{II.5.33})$$

Die Berechnung aller folgenden Schätzwerte für den jeweils nächsten Beobachtungszeitpunkt erfolgt induktiv. Die multivariate Meßwertfolge $\underline{y}(k_0), \dots, \underline{y}(k)$ möge daher vorliegen und bereits zum Schätzwert $\hat{\underline{x}}(k)$ verarbeitet worden sein. Dieser Schätzwert sei optimal im Sinne der minimalen Varianz.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Schätzung mit minimaler Fehlervarianz ist Gleichung (II.5.6), das heißt der Schätzfehler zum Zeitpunkt k muß orthogonal zu den bis zum Zeitpunkt k erhobenen Meßwerten sein:

$$\begin{aligned} E((\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)) \underline{y}^T(k)) &= \underline{0} \\ E((\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)) \underline{y}^T(k-1)) &= \underline{0} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ E((\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)) \underline{y}^T(k_0)) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{II.5.34})$$

Laut Induktionsvoraussetzung sollen diese Gleichungen zum Beobachtungszeitpunkt k bereits erfüllt sein. Mit Hilfe einer ähnlichen Beziehung soll nun der optimal extrapolierte Zustandsvektor $\underline{x}^*(k+1)$ für den nächsten Beobachtungszeitpunkt gesucht werden. Er soll daher das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} E((\underline{x}(k+1) - \underline{x}^*(k+1)) \underline{y}^T(k)) &= \underline{0} \\ E((\underline{x}(k+1) - \underline{x}^*(k+1)) \underline{y}^T(k-1)) &= \underline{0} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ E((\underline{x}(k+1) - \underline{x}^*(k+1)) \underline{y}^T(k_0)) &= \underline{0} \end{aligned}$$

(II.5.35)

Der neue Schätzwert für den Beobachtungszeitpunkt $k+1$ kann berechnet werden, sobald die neuen Daten $\underline{y}(k+1)$ zur Verfügung stehen.

Das Orthogonalitätskriterium für diesen neuen Schätzwert lautet:

$$\begin{aligned} E((\underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1)) \underline{y}^T(k+1)) &= \underline{0} \\ E((\underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1)) \underline{y}^T(k)) &= \underline{0} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ E((\underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1)) \underline{y}^T(k_0)) &= \underline{0} \end{aligned}$$

(II.5.36)

Zur Bestimmung des optimalen Extrapolationsvektors $\underline{x}^*(k+1)$ vergleicht man die Bedingungen (II.5.34) und (II.5.35). Der Vergleich wird erleichtert, wenn man in (II.5.35) den Zustandsvektor $\underline{x}(k+1)$ gemäß der Zustandsdifferenzgleichung:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k) \underline{x}(k) + \underline{y}(k)$$

ersetzt.

Da der Prozeßfehler $\underline{v}(k)$ mit keinem der Datenvektoren $\underline{y}(k_0), \dots, \underline{y}(k)$ korreliert, kann er im Ausdruck für die Erwartungswerte gestrichen werden, so daß folgende Bedingungen übrigbleiben:

$$\begin{aligned}
 E((\underline{A}(k)\underline{x}(k) - \underline{x}^*(k+1)) \underline{y}^T(k)) &= \underline{0} \\
 E((\underline{A}(k)\underline{x}(k) - \underline{x}^*(k+1)) \underline{y}^T(k-1)) &= \underline{0} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 E((\underline{A}(k)\underline{x}(k) - \underline{x}^*(k+1)) \underline{y}^T(k_0)) &= \underline{0}
 \end{aligned}
 \tag{II.5.37}$$

Diese Bedingung läßt sich offenbar durch die folgende Wahl für den extrapolierten Zustandsvektor erfüllen:

$$\underline{x}^*(k+1) = \underline{A}(k) \hat{\underline{x}}(k)
 \tag{II.5.38}$$

denn hiermit kann die Matrix $\underline{A}(k)$ nach links aus dem Erwartungswert herausgezogen werden und es verbleibt das bereits als gültig vorausgesetzte Gleichungssystem (II.5.34).

Die Form der Extrapolation (II.5.38) ist zwar identisch mit der in (II.5.19) angegebenen, jedoch wird hier im Gegensatz zur Gauß-Markov-Schätzung die Optimalität dieser Extrapolation streng nachgewiesen.

Der Fehler bei dieser Extrapolation ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}(k+1) - \underline{x}^*(k+1) &= \underline{A}(k) \underline{x}(k) + \underline{v}(k) - \underline{A}(k) \hat{\underline{x}}(k) = \\
 &= \underline{A}(k) \tilde{\underline{x}}(k) + \underline{v}(k)
 \end{aligned}$$

Seine Kovarianzmatrix hat die Gestalt:

$$\begin{aligned}\underline{P}^*(k+1) &= E((\underline{x}(k+1) - \underline{x}^*(k+1))(\underline{x}(k+1) - \underline{x}^*(k+1))^T) = \\ &= E((\underline{A}(k) \tilde{\underline{x}}(k) + \underline{v}(k))(\underline{A}(k) \tilde{\underline{x}}(k) + \underline{v}(k))^T)\end{aligned}$$

Da der Prozeßfehler $\underline{v}(k)$ mit dem Schätzfehler $\tilde{\underline{x}}(k)$ nicht korreliert ist, bleibt der folgende Ausdruck:

$$\underline{P}^*(k+1) = \underline{A}(k) \tilde{\underline{P}}(k) \underline{A}^T(k) + \underline{Q}(k) \quad (\text{II.5.39})$$

Damit ist der Ausdruck für die optimale Extrapolation zusammen mit dem Extrapolationsfehler abgeleitet.

Als nächstes muß der neue Schätzwert für den Beobachtungszeitpunkt $k+1$ berechnet werden, welcher auf der durch die neuen Meßwerte $\underline{y}(k+1)$ verbesserten Extrapolation basiert.

Hierzu soll die für minimale Fehlervarianz notwendige und hinreichende Bedingung (II.5.36) herangezogen werden. Es soll auch hier wieder - wie im Fall der optimalen Extrapolation - ein passender Ausdruck für $\hat{\underline{x}}(k+1)$ gefunden werden, der diese Orthogonalitätsbeziehungen erfüllt.

Ein ähnlicher Ansatz, wie er bereits bei der Gauß-Markov-Schätzung angewandt wurde, soll auch hier eingesetzt werden:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{x}^*(k+1) + \underline{K}(k) (\underline{y}(k+1) - \underline{C}(k+1) \underline{x}^*(k+1)) \quad (\text{II.5.40})$$

Zur Überprüfung der Bedingung (II.5.36) muß wiederum der Ausdruck für den Schätzfehler gebildet werden. Man ersetzt daher $\underline{y}(k+1)$ in (II.5.40) durch den entsprechenden Ausdruck $\underline{C}(k+1)\underline{x}(k+1) + \underline{w}(k+1)$ aus der Modellgleichung und erhält damit für den Schätzfehler:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1) &= (\underline{I} - \underline{K}(k+1)\underline{C}(k+1)) (\underline{x}(k+1) - \underline{x}^*(k+1)) \\ &\quad - \underline{K}(k+1)\underline{w}(k+1) \end{aligned} \tag{II.5.41}$$

Es ist nun zu prüfen, ob dieser Ausdruck die Orthogonalitätsbeziehungen (II.5.36) erfüllt.

Hierzu soll die erste Gleichung in (II.5.36) zunächst außer Acht gelassen werden.

Der neue Meßfehler $\underline{w}(k)$ ist mit den alten Daten nicht korreliert, so daß der letzte Summand im Ausdruck für den neuen Schätzfehler (II.5.41) nichts zu den betrachteten Erwartungswerten beiträgt.

Das Produkt der beiden Klammern auf der rechten Seite von (II.5.41), korreliert mit den Daten $\underline{y}(k), \dots, \underline{y}(k_0)$, verschwindet ebenfalls, da die Bedingung (II.5.35) mit dem neuen, extrapolierten Zustandsvektor $\underline{x}^*(k+1)$ aus Gleichung (II.5.38) inzwischen erfüllt ist.

Damit sind die Orthogonalitätsbeziehungen (II.5.36) bis zum Beobachtungszeitpunkt k erfüllt.

Die erste Gleichung in (II.5.36) wird nun verwandt, um die fehlende Korrekturmatrix \underline{K} zu bestimmen.

Diese Matrix ist im Prinzip frei wählbar und wird hier gerade so gewählt, daß die erste Gleichung in (II.5.36) erfüllt ist und damit auch der neue Schätzwert wieder minimale Fehlervarianz hat.

Setzt man Gleichung (II.5.41) in die erste Beziehung von (II.5.36) ein, so erhält man:

$$E(((\underline{I}-\underline{K}(k+1))\underline{C}(k+1))(\underline{x}(k+1)-\underline{x}^*(k+1))-\underline{K}(k+1)\underline{w}(k+1)) \cdot (\underline{x}^T(k+1)\underline{C}^T(k+1)+\underline{w}^T(k+1))) = \underline{0}$$

Zur weiteren Auswertung dieser Beziehung muß man beachten, daß die Größen $\underline{x}(k+1)$ und $\underline{x}^*(k+1)$ nicht mit $\underline{w}(k+1)$ korreliert sind. Die Kreuzkovarianz zwischen $\underline{x}(k+1) - \underline{x}^*(k+1)$ und $\underline{x}(k+1)$ wird mit Hilfe der folgenden Beziehung:

$$E(\tilde{\underline{x}}\tilde{\underline{x}}^T) = E(\underline{\tilde{x}}\underline{\tilde{x}}^T) \quad (\text{II.5.42})$$

die man auf $\underline{x}^*(k+1)$ anwendet, ersetzt durch $\underline{p}^*(k+1)$.

Durch einfache algebraische Umformungen erhält man:

$$(\underline{I}-\underline{K}(k+1))\underline{C}(k+1)\underline{p}^*(k+1)\underline{C}^T(k+1) - \underline{K}(k+1)\underline{R}(k+1) = \underline{0}$$

Daraus folgt durch Umformung und Auflösung nach \underline{K} :

$$\underline{K}(k+1) = \underline{p}^*(k+1)\underline{C}^T(k+1)(\underline{C}(k+1)\underline{p}^*(k+1)\underline{C}^T(k+1) + \underline{R}(k+1))^{-1} \quad (\text{II.5.43})$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck für die Korrekturmatrix zur Verbesserung des neuen Schätzwertes durch die neu erhobenen Daten.

Schließlich ist es für den rekursiven Algorithmus und zur Einschätzung der Güte des Schätzwertes noch notwendig, die Kovarianzmatrix für den Schätzfehler zu ermitteln. Unter Ausnutzung der Beziehung (II.5.42) wird dies erreicht durch Nachmultiplizieren der Gleichung (II.5.41) für den Schätzfehler mit $\underline{x}^T(k+1)$ und Erwartungswertbildung auf beiden Seiten. Der Ausdruck für den Schätzfehler lautet dann:

$$\tilde{\underline{P}}(k+1) = (\underline{I} - \underline{K}(k+1)\underline{C}(k+1))\underline{P}^*(k+1)$$

(II.5.44)

Damit sind alle Elemente der rekursiven Schätzgleichungen nach der Methode der minimalen Fehlervarianz abgeleitet. Alle benötigten Gleichungen zur Aufstellung des optimalen Schätzwertes werden im folgenden Abschnitt noch einmal kurz zusammengefaßt.

II.5.5 Zusammenfassung der Rekursionsgleichungen als Schätzung minimaler Fehlervarianz

Der lineare erwartungstreue Schätzwert minimaler Varianz für den Zustandsvektor \underline{x} des zeitlich diskreten, stochastisch gestörten Systems:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k) \underline{x}(k) + \underline{v}(k) \quad (\text{II.5.45a})$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}(k) \underline{x}(k) + \underline{w}(k) \quad (\text{II.5.45b})$$

ist zu bestimmen, wobei die multivariate Meßwertfolge $\underline{y}(k_0), \dots, \underline{y}(k)$ und a-priori-Kenntnisse gemäß (V1) bis (V4) aus Abschnitt II.3 vorhanden sind und die Kovarianzmatrix $\underline{P}(k_0)$ des Anfangszustandes endlich ist.

Zur Bestimmung des Schätzwertes werden vier Schritte benötigt:

1. Schritt: Berechnung der optimalen Extrapolation von k auf $k+1$ und der Kovarianzmatrix des Extrapolationsfehlers

$$\underline{x}^*(k+1) = \underline{A}(k) \underline{\hat{x}}(k) \quad (\text{II.5.46})$$

$$\underline{P}^*(k+1) = \underline{A}(k) \underline{\tilde{P}}(k) \underline{A}^T(k) + \underline{Q}(k) \quad (\text{II.5.47})$$

2. Schritt: Berechnung der Korrekturmatrix zur Verbesserung der Extrapolation durch neu erhobene Daten

$$\begin{aligned} \underline{K}(k+1) &= \underline{P}^*(k+1) \underline{C}^T(k+1) \cdot \\ &\quad \cdot (\underline{C}(k+1) \underline{P}^*(k+1) \underline{C}^T(k+1) + \underline{R}(k+1))^{-1} \end{aligned} \quad (\text{II.5.48})$$

Falls die hier zu berechnende inverse Matrix nicht existiert, kann auch die Pseudoinverse (PENROSE 1955) verwendet werden.

3. Schritt: Berechnung des korrigierten Schätzwertes:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{x}^*(k+1) + \underline{K}(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{C}(k+1) \underline{x}^*(k+1))$$

(II.5.49)

4. Schritt: Berechnung der Kovarianzmatrix des neuen Schätzfehlers:

$$\tilde{\underline{P}}(k+1) = \underline{P}^*(k+1) - \underline{K}(k+1) \underline{C}(k+1) \underline{P}^*(k+1)$$

(II.5.50)

Die Schätzung kann direkt mit dem ersten Beobachtungszeitpunkt k_0 beginnen. Für diese erste Schätzung werden die folgenden drei Anfangsschritte durchgeführt:

(A1) Berechnung der ersten Korrekturmatrix

$$\underline{K}(k_0) = \underline{P}(k_0) \underline{C}^T(k_0) (\underline{C}(k_0) \underline{P}(k_0) \underline{C}^T(k_0) + \underline{R}(k_0))^{-1}$$

(II.5.51)

(A2) Berechnung des ersten Schätzwertes

$$\hat{\underline{x}}(k_0) = \underline{K}(k_0) \underline{y}(k_0)$$

(II.5.52)

(A3) Berechnung der Kovarianzmatrix des ersten Schätzfehlers

$$\tilde{\underline{P}}(k_0) = \underline{P}(k_0) - \underline{K}(k_0) \underline{C}(k_0) \underline{P}(k_0)$$

(II.5.53)

$\underline{P}(k_0)$ war die Kovarianzmatrix des Anfangszustandes $\underline{x}(k_0)$ und drückt die diesbezügliche a-priori-Information aus.

Die lineare, erwartungstreue Schätzung minimaler Varianz ist, wie ein Vergleich mit der Gauß-Markov-Schätzung zeigt, die Verallgemeinerung vom Fall $\underline{P}(k_0) \rightarrow \infty$ auf beliebige, endliche Werte dieser Matrix.

Ähnlich wie in Abbildung 2.2 läßt sich der Ablauf des Schätzalgorithmus diagrammatisch darstellen.

Abbildung 2.3 zeigt das entsprechende Diagramm für den soeben beschriebenen rekursiven Algorithmus.

Das Diagramm verdeutlicht, wie die nicht direkt beobachtbare Entwicklung des Zustandsvektors, der den Verlauf der Meßreihe $\underline{y}(k)$ bestimmt, gerade über diese Daten mit Hilfe der Korrekturmatrix \underline{K} an das Schätzverfahren gekoppelt ist.

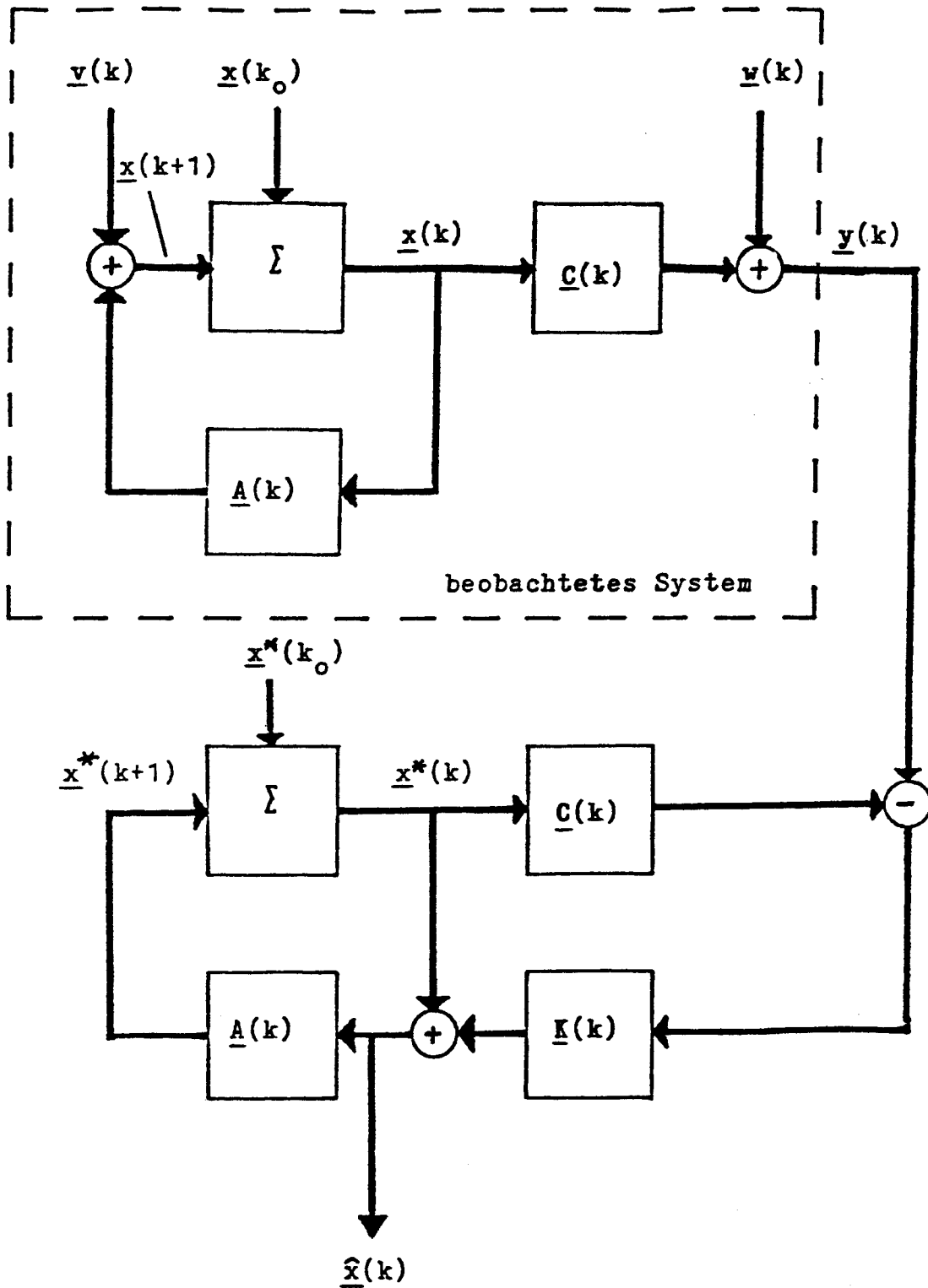


Abbildung 2.3: Systembeschreibung mit Korrekturmatrix ohne externe Einflüsse

II.6 Nicht zentrierte Anfangswerte und die Berücksichtigung externer Einflüsse

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Zufallsprozesse $\underline{x}(k)$ und $\underline{y}(k)$ den Erwartungswert Null für alle k haben. Sobald $E(\underline{x}(k_0))$ von Null verschiedene Werte annimmt, geht die Biasfreiheit der gesamten Prozesse verloren.

Dasselbe gilt, wenn außer den stochastischen Störgrößen $\underline{v}(k)$ noch die Meßwerte exogener Einflüsse - zum Beispiel die Interaktion mit einer zweiten Person - $\underline{u}(k)$ mit Meßfehlern $\underline{m}(k)$ in das Simulationsmodell einbezogen werden.

Faßt man die zusätzlichen Meßfehler $\underline{m}(k)$ mit dem Prozeßfehler $\underline{v}(k)$ zusammen, so enthalten der Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ und die Meßwerte $\underline{y}(k)$ deterministische, bekannte Anteile und die Formel für den Schätzwert $\hat{\underline{x}}(k)$ muß entsprechend modifiziert werden.

Diese Situation wird durch das folgende, erweiterte mathematische Modell beschrieben:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k) \underline{x}(k) + \underline{B}(k) \underline{u}(k) + \underline{v}(k) \quad (\text{II.6.1a})$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}(k) \underline{x}(k) + \underline{w}(k) \quad (\text{II.6.1b})$$

Der Erwartungswert des Anfangszustandes sei nun nicht mehr biasfrei, sondern gegeben durch $E(\underline{x}(k_0)) = \underline{g}$, wobei die Elemente von \underline{g} beliebige, endliche Werte annehmen können.

Die Folge der Eingangsgrößen $\underline{u}(k_0), \dots, \underline{u}(k)$ sei exakt bekannt und im Übrigen gelten die Voraussetzungen (V1) bis (V4) aus Abschnitt II.3 (wobei (V1) entsprechend zu modifizieren ist).

Gesucht ist wieder ein linearer, erwartungstreuer Schätzwert für den Zustandsvektor \underline{x} mit minimaler Fehlervarianz.

Mit den aus Abschnitt (II.5) bekannten Ergebnissen für das freie System lassen sich die externen Einflüsse nun leicht berücksichtigen. Da die stochastischen Beiträge zu $\underline{u}(k)$ bereits im Prozeßfehler $\underline{v}(k)$ mitberücksichtigt wurden, kann formal der Einfluß von $\underline{u}(k)$ auf das System durch entsprechende Zustandsgleichungen ohne Störbeiträge separat behandelt werden.

Wird der Beitrag der externen Einflüsse zum Zustandsvektor mit $\underline{x}_0(k)$ und der Beitrag zu den durch das System simulierten Daten mit $\underline{y}_0(k)$ bezeichnet, so gelten folgende Gleichungen:

$$\underline{x}_0(k+1) = \underline{A}(k) \underline{x}_0(k) + \underline{B}(k) \underline{u}(k) \quad (\text{II.6.2a})$$

$$\underline{y}_0(k) = \underline{C}(k) \underline{x}_0(k) \quad (\text{II.6.2b})$$

Diese Ausdrücke können von den stochastischen Zustandsgleichungen (II.6.1) abgezogen werden und man erhält die Gleichungen für das zentrierte System, das die reine Eigendynamik des Prozesses beschreibt:

$$[\underline{x}(k+1) - \underline{x}_0(k+1)] = \underline{A}(k) [\underline{x}(k) - \underline{x}_0(k)] + \underline{v}(k) \quad (\text{II.6.3a})$$

$$[\underline{y}(k) - \underline{y}_0(k)] = \underline{C}(k) [\underline{x}(k) - \underline{x}_0(k)] + \underline{w}(k) \quad (\text{II.6.3b})$$

Hierfür gelten wieder die Ergebnisse aus Abschnitt (II.5) und es kann eine Gleichung zur rekursiven Schätzung von

$$\underline{x}_1(k) = [\underline{x}(k) - \underline{x}_0(k)]$$

aufgeschrieben werden.

Wird zu dieser Schätzgleichung wieder der Ausdruck (II.6.2a) addiert, so ergibt sich eine Schätzgleichung für den stochastischen Zustandsvektor $\underline{x}(k)$.

Dieser Vorgang soll in diesem Abschnitt formal durchgeführt werden.

Hierzu wird die Gleichung (II.5.52) für den ersten Schätzwert des Zustandsvektors für die zentrierten Variablen $\underline{\hat{x}}_1$ und $\underline{y} - \underline{y}_0$ formuliert:

$$\underline{\hat{x}}_1(k_0) = \underline{K}(k_0) (\underline{y}(k_0) - \underline{y}_0(k_0))$$

Hinzufügen von $\underline{x}_0(k_0)$ auf beiden Seiten liefert den Schätzwert für $\underline{\hat{x}}(k_0)$:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}}(k_0) &= \underline{x}_0(k_0) + \underline{\hat{x}}_1(k_0) = \\ &= \underline{x}_0(k_0) + \underline{K}(k_0) (\underline{y}(k_0) - \underline{C}(k_0)\underline{x}_0(k_0)) \end{aligned}$$

(II.6.4)

Für die weiteren Beobachtungszeitpunkte betrachtet man die alte Schätzgleichung (II.5.49) und eliminiert den extrapolierten Zustandsvektor $\underline{x}^*(k+1)$ mit Hilfe von (II.5.46):

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}}_1(k+1) &= \underline{A}(k)\underline{\hat{x}}_1(k) + \\ &+ \underline{K}(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{y}_0(k+1) - \underline{C}(k+1)\underline{A}(k)\underline{\hat{x}}_1(k)) \end{aligned}$$

Addiert man hierzu die deterministische Modellgleichung (II.6.2a) für $\underline{x}_0(k+1)$, so erhält man den Schätzwert für den nicht zentrierten Zustandsvektor:

$$\begin{aligned}\underline{\hat{x}}(k+1) &= \underline{\hat{x}}_1(k+1) + \underline{x}_0(k+1) = \\ &= \underline{A}(k) \underline{\hat{x}}(k) + \underline{B}(k) \underline{u}(k) + \\ &+ \underline{K}(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{C}(k+1) \underline{x}_0(k+1) - \underline{C}(k+1) \underline{A}(k) \underline{\hat{x}}_1(k))\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung wird nun noch $\underline{x}_0(k+1)$ durch die entsprechende Modellgleichung ersetzt und die Terme mit \underline{x}_0 und \underline{x}_1 werden zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}\underline{\hat{x}}(k+1) &= (\underline{A}(k) \underline{\hat{x}}(k) + \underline{B}(k) \underline{u}(k)) + \\ &+ \underline{K}(k+1) (\underline{y}(k+1) - \underline{C}(k+1) (\underline{A}(k) \underline{\hat{x}}(k) + \underline{B}(k) \underline{u}(k)))\end{aligned}$$

(II.6.5)

Ein erneuter Vergleich mit der ursprünglichen Schätzgleichung (II.5.49) zeigt, daß die Form der Schätzgleichung und hierbei insbesondere der Einfluß der Korrekturmatrix \underline{K} erhalten geblieben sind. Lediglich der extrapolierte Schätzwert ist übergegangen in:

$$\underline{x}^*(k+1) = \underline{A}(k) \underline{\hat{x}}(k) + \underline{B}(k) \underline{u}(k) \quad (\text{II.6.6})$$

Diese Form der Extrapolation ist auch intuitiv sofort verständlich.

Nachzuweisen bleibt hier noch die Erwartungstreue des Schätzwertes (II.6.5). Hierzu werden die Gleichungen für die Fehler des extrapolierten Zustandsvektors und des augenblicklichen Schätzwertes gebildet.

$$\underline{x}(k+1) - \underline{x}^*(k+1) = \underline{A}(k) \underline{\tilde{x}}(k) + \underline{v}(k) \quad (\text{II.6.7})$$

mit dem Anfangswert

$$\underline{x}(k_0) - \underline{x}^*(k_0) = \underline{x}(k_0) - \underline{g} \quad (\text{II.6.8})$$

Mit der Gleichung (II.6.5) und der Schätzgleichung (II.5.49) für den Zeitpunkt k erhält man für den Schätzfehler:

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{x}}(k) &= \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k) = \\ &= \underline{x}(k) - \underline{x}^*(k) - \underline{K}(k) (\underline{C}(k)\underline{x}(k) + \underline{w}(k) - \underline{C}(k)\underline{x}^*(k))\end{aligned}$$

oder

$$\tilde{\underline{x}}(k) = (\underline{I} - \underline{K}(k)\underline{C}(k)) (\underline{x}(k) - \underline{x}^*(k)) - \underline{K}(k)\underline{w}(k)$$

(II.6.9)

Durch Bildung der Erwartungswerte der Gleichungen (II.6.7), (II.6.8) und (II.6.9) und Schluß von k auf $k+1$ findet man, daß die Extrapolationsfehler und die Schätzfehler für alle Zeitpunkte k den Erwartungswert Null haben, unabhängig davon, wie groß \underline{g} und \underline{u} sind. Die Schätzung ist daher erwartungstreu.

Die Kovarianzmatrix des Extrapolationsfehlers hat nach Gleichung (II.6.7) die Form:

$$\underline{P}^*(k+1) = \underline{A}(k) \tilde{\underline{P}}(k) \underline{A}^T(k) + \underline{Q}(k)$$

Sie entspricht der alten Gleichung (II.5.47) und hat den Anfangswert $\underline{P}(k_0)$.

Für die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers findet man aus Gleichung (II.6.9) den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\underline{P}}(k+1) &= (\underline{I} - \underline{K}(k+1)\underline{C}(k+1))\underline{P}^*(k+1)(\underline{I} - \underline{C}^T(k+1)\underline{K}^T(k+1)) + \\
 &+ \underline{K}(k+1)\underline{R}(k+1)\underline{K}^T(k+1) = \\
 &= \underline{P}^*(k+1) - \underline{K}(k+1)\underline{C}(k+1)\underline{P}^*(k+1) - \underline{P}^*(k+1)\underline{C}^T(k+1)\underline{K}^T(k+1) + \\
 &+ \underline{K}(k+1)(\underline{C}(k+1)\underline{P}^*(k+1)\underline{C}^T(k+1) + \underline{R}(k+1))\underline{K}^T(k+1)
 \end{aligned}$$

(II.6.10)

Wählt man die Korrekturmatrix \underline{K} wie in Gleichung (II.5.48), so heben sich die beiden letzten Summanden dieser Gleichung auf und der Rest ergibt den minimalen Wert der Fehlervarianz wie in Gleichung (II.5.50).

Dieser letzte Ausdruck für $\tilde{\underline{P}}(k+1)$ eignet sich auch zur Untersuchung der Qualität der Schätzung des Zustandsvektors bei suboptimaler Wahl der Korrekturmatrix.

Das Ablaufdiagramm für den rekursiven Algorithmus in Anwesenheit externer Einflüsse ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

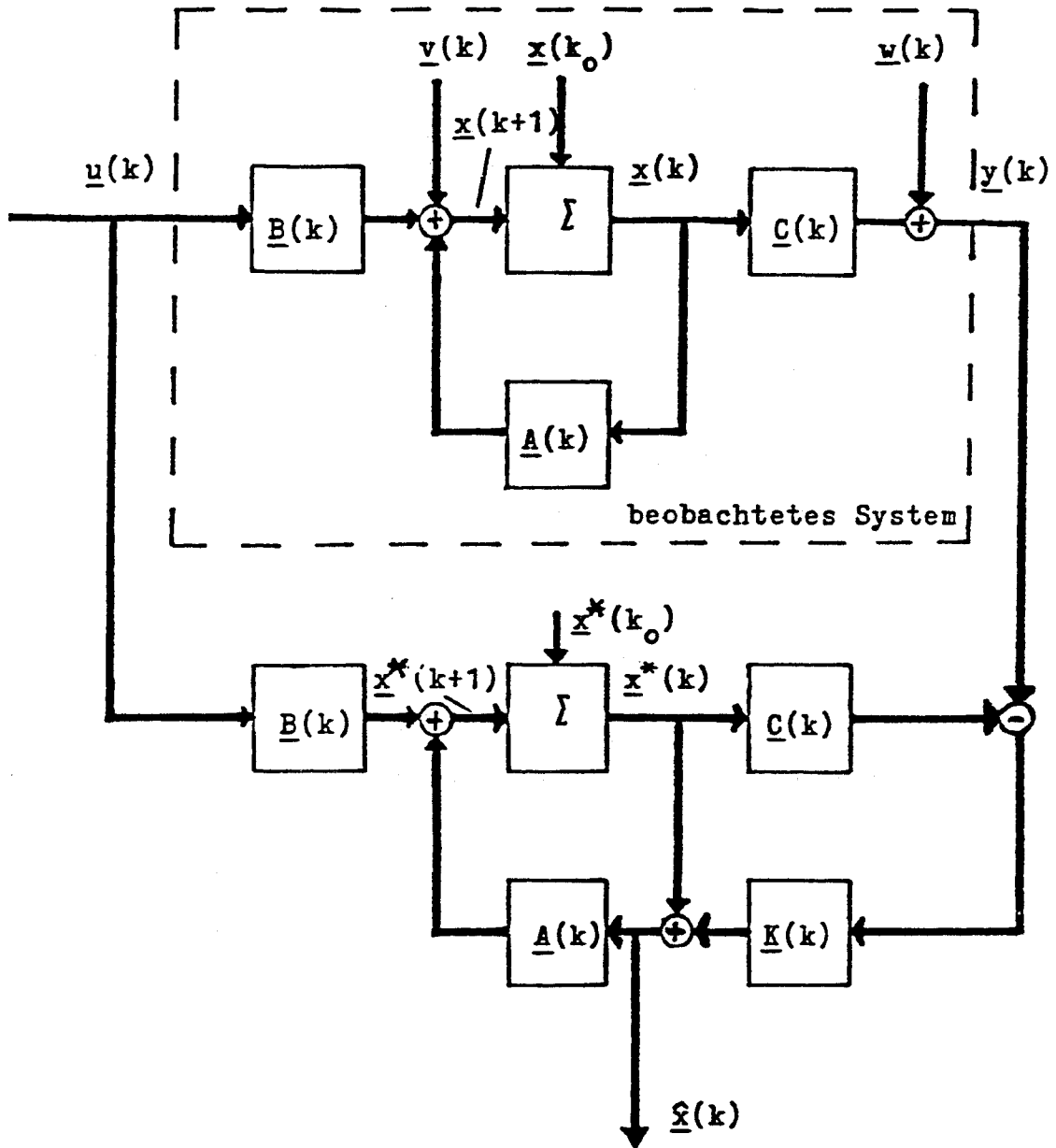


Abbildung 2.4: Beschreibung eines linearen Systems mit externen Einflüssen mit Hilfe von Zustandsrückführung

II.7 Vorhersagemethode mit dem rekursiven Algorithmus

Zur Zustandsvorhersage soll der Einfachheit wegen zunächst wieder ein biasfreier Anfangszustand $\underline{x}(k_0)$ vorausgesetzt werden und es sollen im ersten Schritt keine externen Einflüsse $\underline{u}(k)$ berücksichtigt werden, so daß die Vektoren $\underline{x}(k)$ und $\underline{y}(k)$, $k > k_0$, ebenfalls den Erwartungswert Null haben.

Gesucht werden soll jetzt der lineare, erwartungstreue Schätzwert minimaler Fehlervarianz für den Zustandsvektor $\underline{x}(j)$, $j > k$, auf der Basis der vorliegenden Daten $\underline{y}(k_0)$, ..., $\underline{y}(k)$, wobei k den gegenwärtig letzten Beobachtungszeitpunkt bezeichnet.

Der gewünschte Schätzwert werde mit $\hat{\underline{x}}(j/k)$ bezeichnet und muß als Schätzwert minimaler Varianz wiederum einen Satz von Orthogonalitätsbedingungen erfüllen:

$$E((\underline{x}(j) - \hat{\underline{x}}(j/k)) \underline{y}^T(k)) = \underline{0}$$

$$E((\underline{x}(j) - \hat{\underline{x}}(j/k)) \underline{y}^T(k-1)) = \underline{0}$$

.

.

.

$$E((\underline{x}(j) - \hat{\underline{x}}(j/k)) \underline{y}^T(k_0)) = \underline{0}$$

(II.7.1)

Der um einen Beobachtungszeitpunkt extrapolierte Schätzwert ist bereits in Gleichung (II.5.46) berechnet worden:

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k) := \underline{x}^*(k+1) = \underline{A}(k) \hat{\underline{x}}(k)$$

Um noch weiter in die Zukunft zu extrapolieren, muß $\underline{x}(j)$, $j > k$, mit Hilfe der formalen Lösung in Analogie zu (II.5.16) ausgedrückt werden:

$$\underline{x}(j) = \underline{\phi}(j, k+1) \underline{x}(k+1) + \sum_{i=k+1}^{j-1} \underline{\phi}(j, i+1) \underline{v}(i) \quad (\text{II.7.2})$$

Die gegebenen Daten \underline{y} in (II.7.1) hängen nur von $\underline{x}(k_0)$, $\underline{v}(k_0)$, ... $\underline{v}(k-1)$ und $\underline{w}(k_0)$, ... $\underline{w}(k)$ ab; sie sind daher mit den Störgrößen $\underline{v}(k+1)$, ..., $\underline{v}(j-1)$ in der Summe in (II.7.2) nicht korreliert.

Setzt man die Lösung (II.7.2) für $\underline{x}(j)$ in (II.7.1) ein, so kann aufgrund dieser Argumentation die gesamte Summe im Erwartungswert weggelassen werden und man erhält:

$$\begin{aligned} E((\underline{\phi}(j, k+1) \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(j/k)) \underline{y}^T(k)) &= \underline{0} \\ E((\underline{\phi}(j, k+1) \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(j/k)) \underline{y}^T(k-1)) &= \underline{0} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ E((\underline{\phi}(j, k+1) \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(j/k)) \underline{y}^T(k_0)) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{II.7.3})$$

Diese Bedingung läßt sich offenbar durch die Wahl

$$\hat{\underline{x}}(j/k) = \underline{\phi}(j, k+1) \underline{x}^*(k+1) \quad (\text{II.7.4})$$

erfüllen, denn damit kann die Transitionsmatrix vor die Erwartungswertbildung gezogen werden und es verbleibt die bereits gültige Beziehung (II.5.35), mit der die Optimalität des ersten extrapolierten Schätzwertes (II.5.46) nachgewiesen wurde.

Setzt man also kein zeitvariables System voraus, sondern betrachtet die Parametermatrizen \underline{A} , \underline{B} und \underline{C} als konstant, so läßt sich die Transitionsmatrix systematisch berechnen und eine Extrapolation auf beliebig ferne Beobachtungszeitpunkte ist möglich.

Bei Extrapolation um mehr als einen Beobachtungszeitpunkt geht natürlich der große Vorteil des rekursiven Algorithmus verloren, da nun kein Feedback mit neu erhobenen Daten mehr stattfinden kann.

In die Qualität der extrapolierten Schätzwerte geht nun sehr stark die Güte der Parametermatrizen und die Güte der vorhergegangenen Schätzungen ein.

Natürlich lassen sich auch nicht verschwindende externe Einflüsse und nicht zentrierte Anfangsbedingungen berücksichtigen. Allerdings müssen zur optimalen Vorhersage die Werte der gegenwärtigen und zukünftigen Umwelteinflüsse $\underline{u}(k)$, ..., $\underline{u}(j-1)$ bekannt sein.

Da dies oft nicht der Fall ist, ist auch hier das Ergebnis zur Vorhersage um ein Beobachtungsintervall besonders interessant, denn es ist bereits in (II.6.5) enthalten als extrapoliertes Zustandsvektor:

$$\underline{x}^*(k+1) = \underline{A}(k) (\underline{x}^*(k) + \underline{K}(k) (\underline{y}(k) - \underline{C}(k) \underline{x}^*(k))) + \underline{B}(k) \underline{u}(k)$$

(II.7.5)

Durch einige nicht sehr schwierige algebraische Umformungen erhält man ebenfalls unmittelbar eine Differenzgleichung für die Kovarianzmatrix \underline{P}^* des Extrapolationsfehlers:

$$\underline{P}^*(k+1) = \underline{A}(k)\underline{P}^*(k)\underline{A}^T(k) - \underline{A}(k)\underline{P}^*(k)\underline{C}^T(k) \\ (\underline{C}(k)\underline{P}^*(k)\underline{C}^T(k) + \underline{R}(k))^{-1} \underline{C}(k)\underline{P}^*(k)\underline{A}^T(k) + \underline{Q}(k)$$

(II.7.6)

mit dem Anfangswert $\underline{P}^*(k_0) = \underline{P}(k_0)$.

Gleichung (II.7.6) kann genutzt werden, um die Güte der Extrapolation mit fortschreitenden Betrachtungszeitpunkten zu kontrollieren.

II. 8 Ein Beispiel zur Demonstration der Funktionsweise des Schätzalgorithmus an synthetischen Daten

Zur Veranschaulichung des Verfahrens der optimalen Zustandsschätzung soll nun das einfache Beispiel der Schätzung eines konstanten "wahren" Wertes aus einer Reihe fehlerbehafteter Daten diskutiert werden (vgl. EYKHOFF 1974; TÖLKE & VON EYE 1984c).

Prozeßmodell und Meßmodell nehmen in diesem Spezialfall die folgende Gestalt an:

$$x(k+1) = x(k) + v(k) \quad (\text{II.8.1a})$$

$$y(k) = x(k) + w(k) \quad (\text{II.8.1b})$$

(Anmerkung: Die Prozeßmatrix A entartet hier zu einem einfachen Faktor 1. In zeitkontinuierlicher Form lautet das Prozeßmodell: $\dot{x}(t) = 0$. In diesem Fall entspricht die Prozeßmatrix A dem Faktor 0!)

Für die stochastischen Beiträge werden die folgenden Voraussetzungen getroffen:

$$E(v(k)) = 0; \quad E(v(k)v(l)) = Q \delta_{kl} \quad (\text{II.8.2a})$$

$$E(w(k)) = 0; \quad E(w(k)w(l)) = R \delta_{kl} \quad (\text{II.8.2b})$$

$$E(v(k)w(l)) = 0 \quad (\text{II.8.2c})$$

Da im vorliegenden Beispiel lediglich skalare Größen auftreten, nehmen die vier Rekursionsschritte aus Abschnitt (II.5) eine sehr einfache Gestalt an:

$$1. \quad x^{*}(k+1) = \hat{x}(k) \quad (\text{II.8.3a})$$

$$P^{*}(k+1) = \tilde{P}(k) + Q \quad (\text{II.8.3b})$$

$$2. \quad K(k+1) = P^{*}(k+1)/(P^{*}(k+1) + R) \quad (\text{II.8.3c})$$

$$3. \quad \hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K(k+1) (y(k+1) - \hat{x}(k)) \quad (\text{II.8.3d})$$

$$4. \quad \tilde{P}(k+1) = (1 - K(k+1)) P^{*}(k+1) \quad (\text{II.8.3f})$$

Durch die Vorgabe eines Startwertes $x(0)$ mit Varianz $P(0) = \tilde{P}(0)$ sind die Varianzen $\tilde{P}(k)$ und $P^{*}(k)$ sowie die Korrekturmatrix $K(k)$ für jeden Zeitpunkt k vollständig festgelegt. Der zeitliche Verlauf dieser Größen wird durch die a priori Kenntnis über $x(0)$ beeinflusst. Folgende beide Fälle sollen hier unterschieden werden:

(a) Es liegt keine a priori Kenntnis über den Anfangsschätzwert $\hat{x}(0)$ vor.

(b) Der Anfangswert $x(0)$ ist exakt bekannt.

Wählt man konkret als Beispiel für den "wahren" Wert $x = 0$ und für die Fehlervarianzen die Bedingung $Q = R$, so erhält man für die zeitliche Entwicklung der Größen \tilde{P} , P^{*} und K , die die Qualität der Schätzung bestimmen, folgende Werte:

Fall a:	k	$P^{*}(k)$	$K(k)$	$\tilde{P}(k)$
	0	-	-	∞
	1	∞	1.000	w
	2	2.000 w	0.667	0.667 w
	3	1.667 w	0.625	0.625 w
	4	1.625 w	0.619	0.619 w
	5	1.619 w	0.618	0.618 w

Fall b:	k	$P^*(k)$	$K(k)$	$\tilde{P}(k)$
	0	-	-	0
	1	1.000 w	0.500	0.500 w
	2	1.500 w	0.600	0.600 w
	3	1.600 w	0.615	0.615 w
	4	1.615 w	0.618	0.618 w
	5	1.618 w	0.618	0.618 w

Der Korrekturfaktor $K(k)$ ist bereits nach wenigen Iterationen konstant, so daß der Schätzalgorithmus zeitinvariant wird. Den Verlauf der Varianz des Schätzfehlers zeigt Abbildung 2.5. Diese Varianz ist ein Maß für die "Sicherheit" der Schätzung und stabilisiert sich von den Anfangsvarianzen ∞ bzw. 0 rasch bei einem asymptotischen Wert. Dieser asymptotische Wert läßt sich aus der Stationaritätsbedingung für $\tilde{P}(k)$ ableiten:

$$\tilde{P}(k) = \tilde{P}(k-1) = \tilde{P}_\infty \quad (\text{II.8.4})$$

Mit Hilfe der Beziehungen (II.8.3a-f) findet man:

$$\frac{1}{\tilde{P}(k)} = \frac{1}{P^*(k)} + \frac{1}{R} = \frac{1}{P(k-1) + Q} + \frac{1}{R} \quad (\text{II.8.5})$$

$$(\tilde{P}_\infty + Q)R = \tilde{P}_\infty R + \tilde{P}_\infty(\tilde{P}_\infty + Q) \quad (\text{II.8.6})$$

$$\tilde{P}_\infty^2 + Q \tilde{P}_\infty - Q R = 0, \quad (\text{II.8.7})$$

woraus \tilde{P}_∞ berechnet werden kann.

Es wird nun als Beispiel die Schätzung des "wahren" Wertes $x = 0$ aus einer Folge von Beobachtungen diskutiert, die mit "weißem" Rauschen überlagert sind. Von besonderem

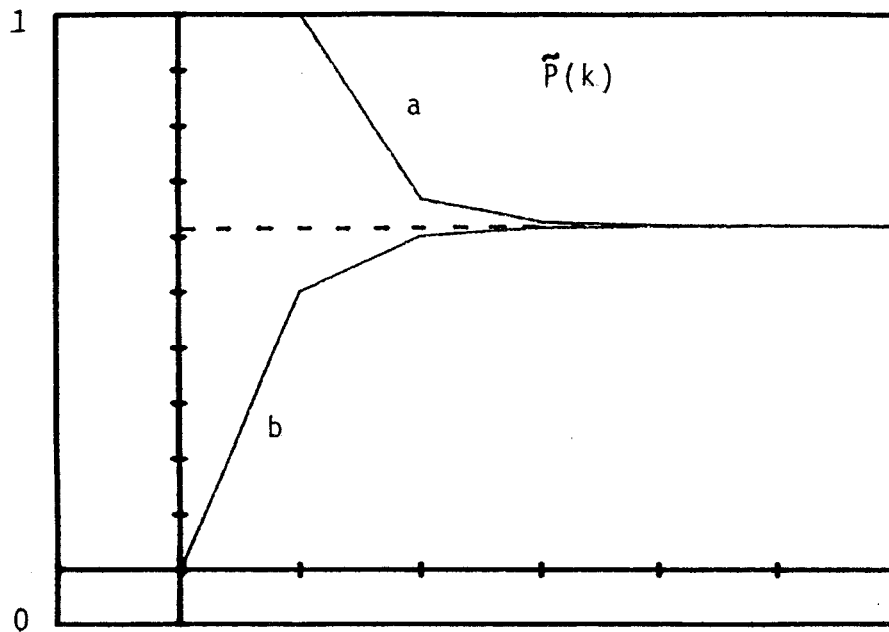


Abbildung 2.5: Verlauf der Schätzfehlervarianz ohne Vorwissen über den Anfangsschätzwert (Fall a) und bei exakter Kenntnis des Anfangswertes (Fall b).

Interesse ist hier der Einfluß der unterschiedlichen Annahmen über das a priori Wissen über die Schätzgröße \hat{x} . Zunächst wird $\hat{x}(0) = 10$ gewählt, das heißt es liegt eine grobe Fehlschätzung des Anfangswertes vor. Dies wird durch eine große Schätzfehlervarianz ($\tilde{P}(0) = 1000$) berücksichtigt, das heißt es besteht sehr große Unsicherheit über den geschätzten Anfangswert.

In Abbildung 2.6a sind acht mögliche Realisierungen von Schätzwertverläufen angegeben, die auf unterschiedlichen Datenverläufen mit den oben angegebenen Anfangsbedingungen beruhen. Die Abbildung vermittelt einen Eindruck, in welchem Rahmen die Schätzwerte schwanken können, was auch in Abbildung 2.6b durch den Verlauf der zugehörigen Standardabweichungen für den Schätzalgorithmus wiedergegeben wird.

Geht man wieder von der gleichen fehlerhaften Anfangsschätzung für $\hat{x}(0)$ wie oben aus, setzt aber nun eine kleine Schätzfehlervarianz ($\tilde{P}(0) = 3$) für den Anfangswert voraus, so ergeben sich die in Abbildung 2.7 dargestellten Verhältnisse. Hier sind wieder im Teil (a) acht mögliche Realisierungen von Schätzverläufen angegeben, während Teil (b) den Verlauf des Erwartungswertes mit den zugehörigen, durch die Standardabweichungen gegebenen Vertrauensgrenzen angibt. Durch die unzulässig geringe Fehlervarianz des Anfangswertes liegt der "wahre" Wert über weite Strecken des betrachteten Intervalls nicht innerhalb der Vertrauensgrenzen und der Schätzverlauf nähert sich dem "wahren" Wert nur sehr langsam.

Die beste Anpassung des Schätzwertverlaufes an den "wahren" Wert erhält man natürlich, wenn man eine korrekte Anfangsschätzung $\hat{x}(0) = 0$ vornimmt und eine kleine Fehlervarianz ($\tilde{P}(0) = 3$) zuläßt, wie Abbildung 2.8a,b zeigt.

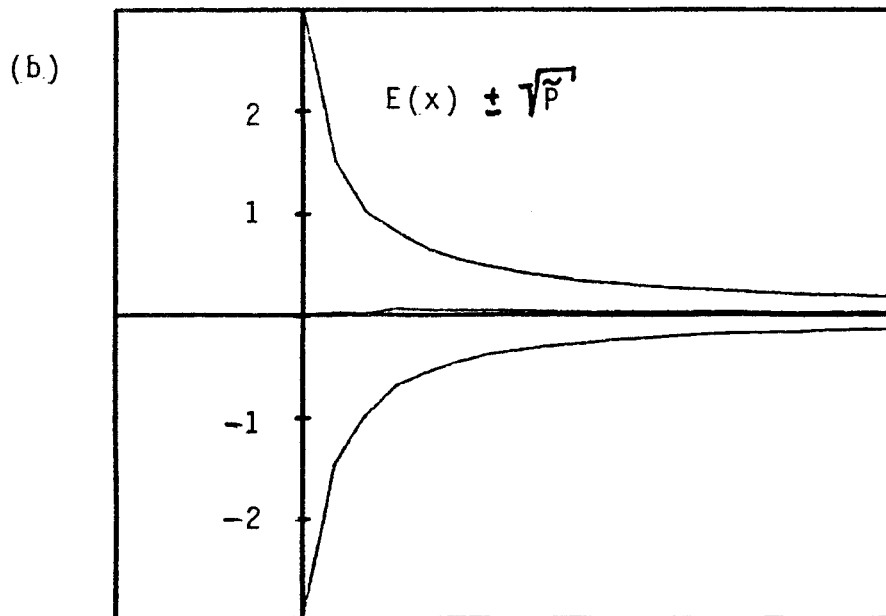
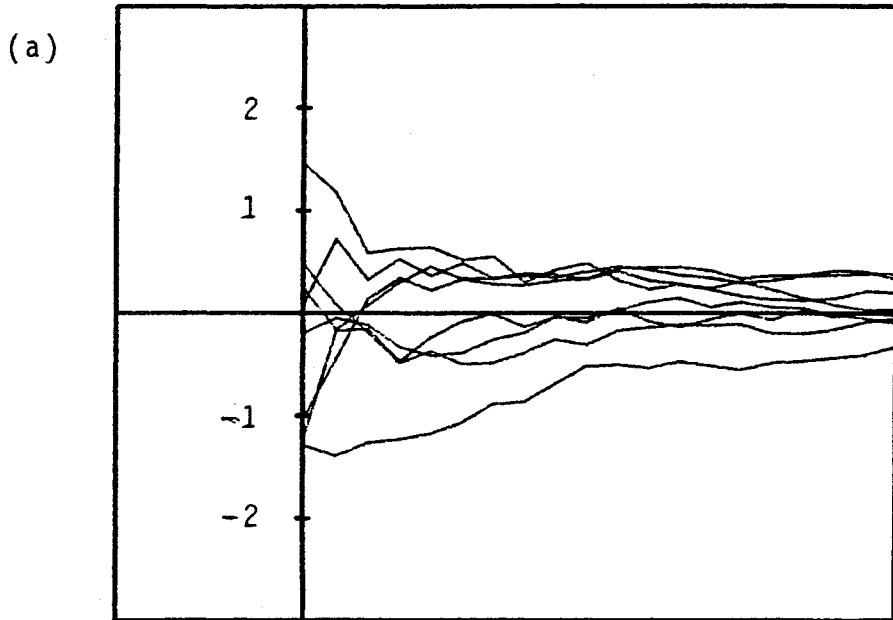


Abbildung 2.6: Schätzung bei falschem Startwert und großer Anfangsfehlervarianz.

- (a) verschiedene Realisationen
- (b) Verlauf des Erwartungswertes mit zugehörigem Standardabweichungsintervall.

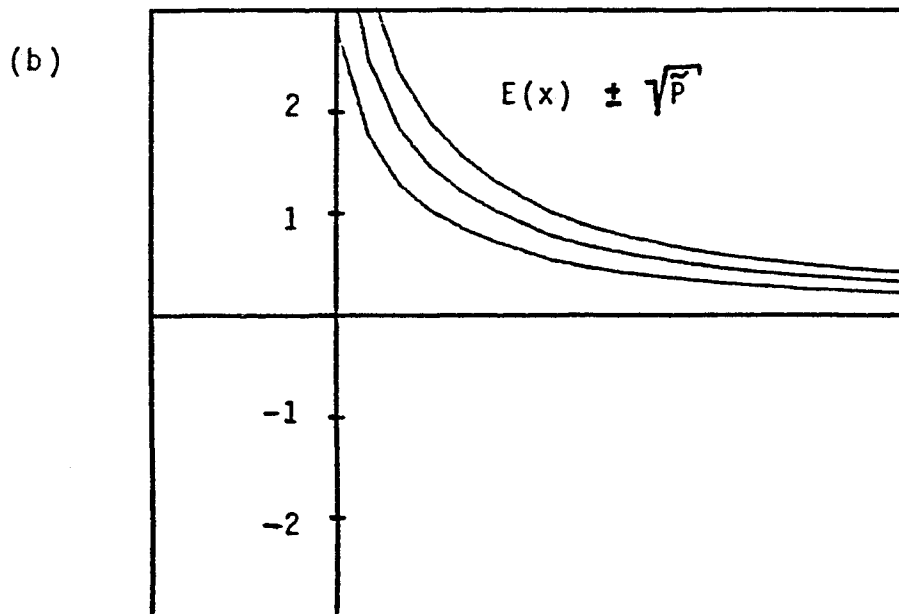
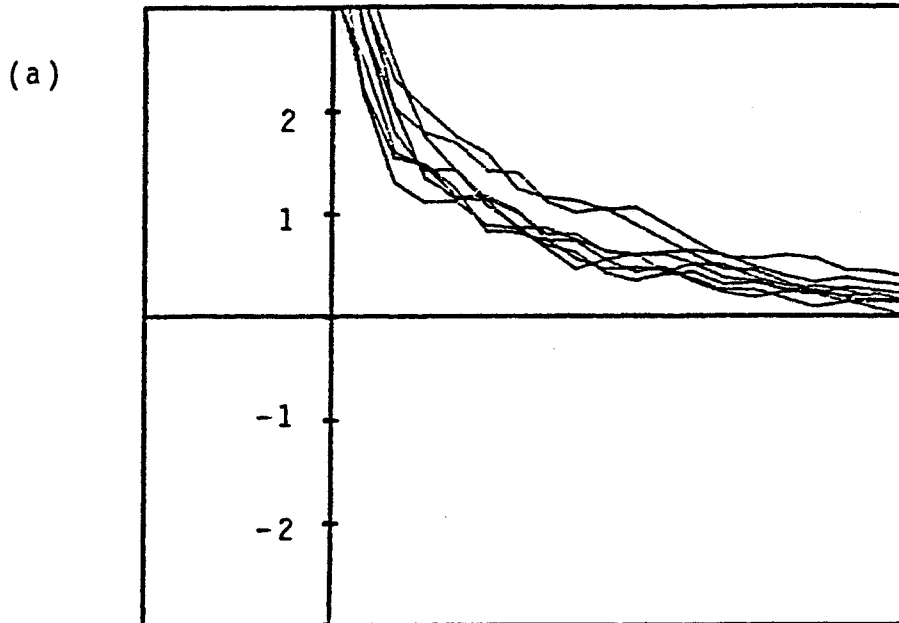


Abbildung 2.7: Schätzung bei falschem Startwert und kleiner Anfangsfehlervarianz.

(a) verschiedene Realisationen

(b) Verlauf des Erwartungswertes mit zugehörigem Standardabweichungsintervall.

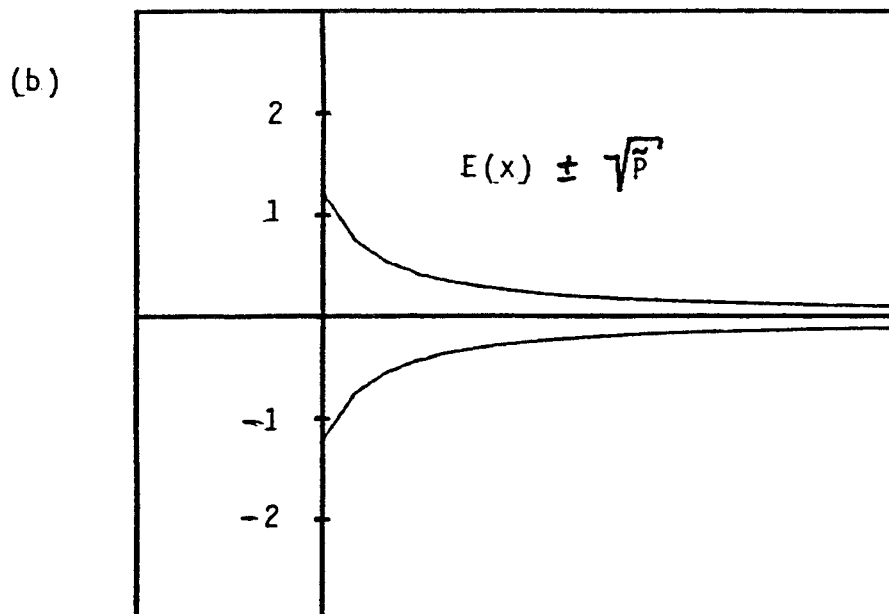
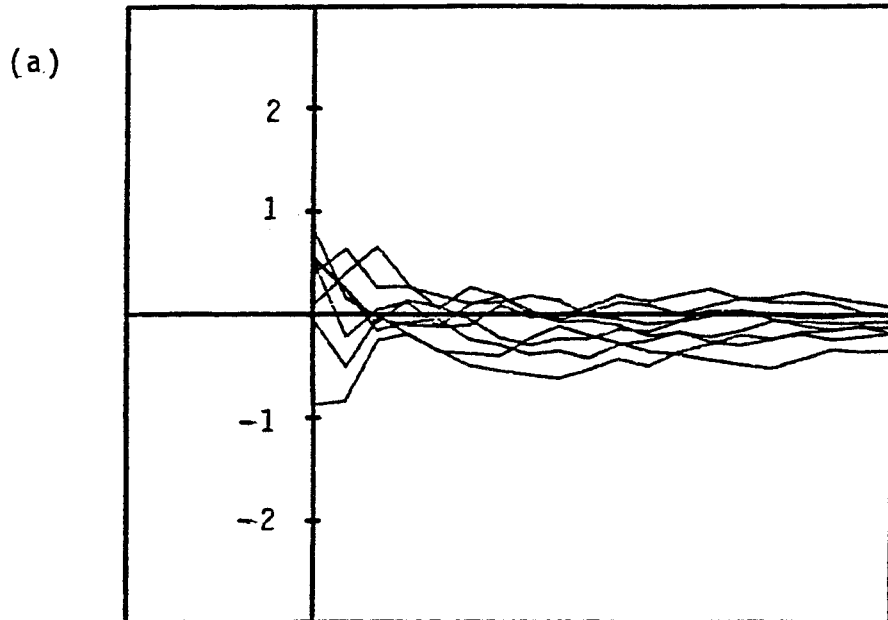


Abbildung 2.8: Schätzung mit richtigem Startwert und kleiner Anfangsfehlervarianz.

(a) verschiedene Realisationen

(b) Verlauf des Erwartungswertes mit zugehörigem Standardabweichungsintervall.

Bei praktischen Anwendungen ist daher eine möglichst gute Anfangsschätzung vorteilhaft, wenn eine gute Qualität der Schätzung schon nach wenigen Beobachtungen erwünscht ist; falls eine gute Anfangsschätzung nicht erreicht werden kann, sollte bei Anwendung des rekursiven Schätzverfahrens eine möglichst große Anfangsfehlervarianz gewählt werden.

II.9 Bemerkungen zum Abstand der Meßzeitpunkte

In bezug auf die verwendete Art des Modellansatzes (zeitkontinuierlich beziehungsweise diskret) lassen sich folgende, für den Einfluß des Abstandes der Meßzeitpunkte relevanten Fälle unterscheiden:

- (a) Das Zustandsraummodell wird zeitdiskret mit zeitvariablen Parametermatrizen angesetzt.

In diesem Fall muß ein Schätzverfahren vorliegen, das es erlaubt, die Parametermatrizen für jeden Beobachtungszeitpunkt zu bestimmen. Hierzu käme zum Beispiel eine dynamisierte LISREL-Version in Frage.

Der Abstand der Beobachtungszeitpunkte hat keinen Einfluß auf die Schätzung des Zustandsvektors, da die Parametermatrizen stets neu bestimmt werden.

- (b) Das Zustandsraummodell wird zeitdiskret mit konstanten Parametern angesetzt. Hier ist es, um eine zuverlässige Schätzung für den Zustandsvektor zu erzielen, tatsächlich notwendig, äquidistante Beobachtungszeitpunkte zu wählen.

- (c) Es wird ein zeitkontinuierliches Beschreibungsmodell zugrundegelegt, das aber nur zu diskreten Zeitpunkten beobachtet wird.

Allgemeine Aussagen über den Einfluß des Abstandes der Beobachtungszeitpunkte auf die zeitdiskreten Beobachtungen sind hier nur möglich, wenn die Parametermatrizen des zeitkontinuierlichen Modells als zeitunabhängig angenommen werden.

Da viele Prozesse tatsächlich zeitkontinuierlich ablaufen und nur zeitdiskret beobachtet werden, soll hier der Fall c) näher untersucht werden.

Die zeitkontinuierlichen Zustandsgleichungen lauten:

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{A}_{\text{cont}} \underline{x}(t) + \underline{B}_{\text{cont}} \underline{u}(t) + \underline{v}(t) \quad (\text{II.9.1a})$$

$$y(t) = \underline{C}_{\text{cont}} \underline{x}(t) + \underline{w}(t) \quad (\text{II.9.1b})$$

Hier wird durch den Index "cont" angedeutet, daß es sich um die Parametermatrizen des zeitkontinuierlichen Modells handelt.

Die diskretisierten Parametermatrizen erhält man dann mit Hilfe der Transitionsmatrix Φ :

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = e^{\underline{A}_{\text{cont}} \cdot (t_{k+1} - t_k)} \quad (\text{II.9.2})$$

Wie bereits in Abschnitt (II.2) beschrieben, erhält man die diskretisierten Parametermatrizen $\underline{A}_{\text{dis}}$, $\underline{B}_{\text{dis}}$, $\underline{C}_{\text{dis}}$ durch folgende Rechnung:

$$\underline{A}_{\text{dis}}(k) := \Phi(t_{k+1}, t_k) = e^{\underline{A}_{\text{cont}} \cdot (t_{k+1} - t_k)} \quad (\text{II.9.3a})$$

$$\underline{B}_{\text{dis}}(k) := \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t') \underline{B}_{\text{cont}} dt' \quad (\text{II.9.3b})$$

$$\underline{C}_{\text{dis}}(k) := \underline{C}_{\text{cont}} \quad (\text{II.9.3c})$$

Selbst wenn also für das kontinuierliche Modell konstante Parametermatrizen $\underline{A}_{\text{cont}}$, $\underline{B}_{\text{cont}}$, $\underline{C}_{\text{cont}}$ angenommen werden, können die diskretisierten Parametermatrizen dennoch zeitabhängig sein, wenn nicht-äquidistante Beobachtungszeitpunkte ($t_{k+1} - t_k \neq t_{k+2} - t_{k+1}$) zugrundegelegt werden.

Diese diskretisierten Parametermatrizen können aber immer leicht berechnet werden, wenn die Parametermatrizen für das kontinuierliche Modell bekannt sind.

Die Berechnung der diskreten Parametermatrizen bei vorgegebenem zeitkontinuierlichen Modell soll nun an einem Beispiel demonstriert werden. Hierzu wird ein einfaches Zustandsraummodell mit zwei Zustandsgrößen, einem skalaren externen Einfluß und einer skalaren Beobachtungsgröße angenommen.

Die Modellgleichungen lauten:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + v(t)$$

$$y(t) = (0 \ 1) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + w(t)$$

Das Zustandsraummodell ist anwendbar zur kontinuierlichen Trendanalyse, wobei x_1 den Trend, x_2 die aktuellen Beobachtungen und u externe Trendeinflüsse bezeichnen.

Der Übergang zum diskretisierten Modell sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\text{dis}}(k) &= \underline{\phi}(t_{k+1}, t_k) = e^{\underline{A}_{\text{cont}} \cdot (t_{k+1} - t_k)} = \\ &= \underline{I} + \underline{A}_{\text{cont}} (t_{k+1} - t_k) + \underline{A}_{\text{cont}} \cdot \underline{A}_{\text{cont}} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2} + \dots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (t_{k+1} - t_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{k+1} - t_k & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Für $t_{k+1} - t_k = \text{const.}$ ist auch $\underline{A}_{\text{dis}}$ zeitunabhängig; jedoch nicht bei nicht-äquidistanten Beobachtungszeitpunkten!

Für $\underline{B}_{\text{dis}}(k)$ ergibt sich in diesem Beispiel nach (II.9.3b):

$$\begin{aligned}
 \underline{B}_{\text{dis}}(k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{k+1} - t' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt' = \\
 &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} 1 \\ t_{k+1} - t' \end{bmatrix} dt' = \begin{bmatrix} t_{k+1} \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} 1 dt' \\ t_k \\ t_{k+1} \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t') dt' \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} t_{k+1} - t_k \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} t_{k+1} dt' - \int_{t_k}^{t_{k+1}} t' dt' \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} t_{k+1} - t_k \\ t_{k+1} (t_{k+1} - t_k) - \frac{1}{2} (t_{k+1}^2 - t_k^2) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} t_{k+1} - t_k \\ \frac{1}{2} (t_{k+1} - t_k)^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Für äquidistante Beobachtungszeitpunkte mit zum Beispiel $t_{k+1} - t_k = 1$ wird $\underline{B}_{\text{dis}}(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, also auch zeitunabhängig. Für nicht-äquidistante Testzeitpunkte bleibt $\underline{B}_{\text{dis}}$ jedoch zeitabhängig. $\underline{C}_{\text{dis}}$ ist klar nach (II.9.3c).

Ebenso wichtig wie die Bestimmung der diskretisierten Parametermatrizen aus den Parametern für das kontinuierliche Modell ist die Berechnung der Kovarianzmatrix $\underline{Q}_{\text{dis}}(k)$ der Prozeßfehler \underline{v} , da diese Kovarianzmatrix wesentlich in den Schätzalgorithmus eingeht.

Die diskretisierten Prozeßfehler erhält man natürlich wieder mit Hilfe der Transitionsmatrix $\underline{\Phi}$:

$$\underline{v}_{\text{dis}}(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\Phi}(t_{k+1}, t') \underline{v}_{\text{cont}} dt'$$

wobei für den kontinuierlichen Prozeßfehler die Kovarianzmatrix gegeben ist durch:

$$E(\underline{v}_{\text{cont}}(t) \underline{v}_{\text{cont}}^T(t')) = \underline{Q}_{\text{cont}} \cdot \delta(t-t')$$

$\underline{Q}_{\text{cont}}$ sei zeitunabhängig, das heißt es liege stets gleiche Varianz und Korrelation der Meßfehler vor.

Für die diskretisierte Kovarianzmatrix erhält man:

$$\begin{aligned} \underline{Q}_{\text{dis}}(k) &= E(\underline{v}_{\text{dis}}(k) \underline{v}_{\text{dis}}^T(k')) = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\Phi}(t_{k+1}, t') \int_{t_{k'}}^{t_{k'+1}} E(\underline{v}_{\text{cont}}(t')) \\ &\quad \underline{v}_{\text{cont}}^T(t'') \underline{\Phi}^T(t_{k'+1}, t'') dt'' dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\phi}(t_{k+1}, t') \underline{Q}_{\text{cont}} \underline{\phi}^T(t_{k+1}, t') dt'$$

Für das spezielle Beispiel soll für den Prozeßfehler $\underline{v}_{\text{cont}}$ angenommen werden:

$$\underline{v}_{\text{cont}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot f$$

wobei f eine skalare Zufallsvariable mit vorgegebener Varianz σ^2 sei.

Dann berechnet sich $\underline{Q}_{\text{cont}}$ zu:

$$\begin{aligned} \underline{Q}_{\text{cont}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \sigma^2 \cdot (1 \ 0) = E\left(\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (f \ 0)\right) = \\ &= \begin{bmatrix} E(f^2) & E(0) \\ E(0) & E(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die diskretisierte Kovarianzmatrix des Prozeßfehlers $\underline{Q}_{\text{dis}}$ im vorliegenden Beispiel:

$$\begin{aligned} \underline{Q}_{\text{dis}}(k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\phi}(t_{k+1}, t') \underline{Q}_{\text{cont}} \underline{\phi}^T(t_{k+1}, t') dt' = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{k+1}-t' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_{k+1}-t' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dt' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma^2 dt' & \sigma^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-t') dt \\ \sigma^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-t') dt' & \sigma^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-t')^2 dt' \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma^2 (t_{k+1}-t_k) & \frac{\sigma^2}{2} (t_{k+1}-t_k)^2 \\ \frac{\sigma^2}{2} (t_{k+1}-t_k)^2 & \frac{\sigma^2}{3} (t_{k+1}-t_k)^3 \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

Damit gilt auch für die Kovarianzmatrix \underline{Q} des Prozeßfehlers, was schon für die Parametermatrizen \underline{A} und \underline{B} galt:

Spezifiziert man das mathematische Modell kontinuierlich mit konstanten Parametern und konstanter kontinuierlicher Kovarianzmatrix des Prozeßfehlers, so sind die entsprechenden Matrizen bei diskretisierten Beobachtungen und nicht-äquidistanten Beobachtungszeitpunkten zeitabhängig.

Für die Kovarianzmatrix \underline{R} des Meßfehlers gilt das gleiche wie für die Parametermatrix \underline{C} : die Übertragung auf den diskretisierten Fall ist unkritisch.

Will man ein mathematisches Modell für nicht-äquidistante Beobachtungszeitpunkte entwerfen, so bietet sich damit folgende Vorgehensweise an:

- (a) Formuliere das Modell zeitkontinuierlich mit konstanten Matrizen \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , \underline{Q} und \underline{R} ;
- (b) schätze die Parametermatrizen \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} für den kontinuierlichen Fall (\underline{Q} und \underline{R} werden als Schätzfehler durch andere Betrachtungen spezifiziert);

- (c) berechne die diskretisierten Parametermatrizen $\underline{A}_{\text{dis}}(k)$, $\underline{B}_{\text{dis}}(k)$, $\underline{Q}_{\text{dis}}(k)$ für den jeweils betrachteten Beobachtungszeitpunkt k (natürlich bei Kenntnis des Abstandes der Beobachtungszeitpunkte!);
- (d) schätze den Zustandsvektor $\underline{\hat{x}}(k)$ mit dem diskretisierten rekursiven Algorithmus.

III. Modellidentifikation

Bei der mathematischen Modellbildung in der Psychologie ist in den meisten Fällen mit einer doppelten Fragestellung zu rechnen. Es muß einerseits die Form des für die untersuchte Fragestellung zu spezifizierenden Simulationsmodells festgelegt und ein Weg zur Berechnung der Simulationslösung erarbeitet werden, andererseits ist aber ein mathematisches Modell nur sinnvoll einsetzbar, wenn eventuelle offene Parameter des Modells durch Datenerhebungen oder psychologische Hypothesen identifiziert werden können.

Für die in dieser Arbeit interessierende Fragestellung der dynamischen Beschreibung von Entwicklungsprozessen unter expliziter Berücksichtigung von Umwelt- und Störeinflüssen wurde die erste Aufgabe der Spezifikation der Modellgleichungen und optimalen Schätzung für den Zustandsvektor im vorangehenden Kapitel gelöst.

In diesem Kapitel soll auf das "inverse Problem" eingegangen werden:

Ausgehend von der Gültigkeit der Modellgleichungen (II.6.1a, b) und multivariaten Beobachtungen \underline{y} und \underline{u} sind die Elemente der Parametermatrizen \underline{A} , \underline{B} und \underline{C} zu schätzen.

Erst nach diesem Identifikationsschritt sind Schätzung und Prognose mit Hilfe der Gleichungen (II.6.10) und (II.6.5) für die Entwicklung des Zustandsvektors \underline{x} möglich.

Folgende Klassen von Parametern können unterschieden werden (JÖRESKOG & SÖRBOM 1977):

- (a) Feste Parameter, das heißt Parameter, die auf einen bestimmten, numerischen Wert festgelegt sind;
- (b) Parameter mit Nebenbedingungen, das heißt Parameter, die in festem formalen Zusammenhang mit anderen, freien Parametern stehen;
- (c) freie Parameter, die mit Hilfe der Messungen geschätzt werden müssen.

In vielen psychologischen Anwendungsfällen besteht durch zusätzliche Untersuchungen die Möglichkeit, zumindest einen Teil der Parametermatrizen zu identifizieren. Dies gilt insbesondere für die Regressionsmatrizen B und C in (II.6.1a, b), die den Zusammenhang der meßbaren Größen u und y mit den unbekanntem, latenten Variablen herstellen.

Die Bestimmung der Matrixelemente dieser Regressionsmatrizen könnte zum Beispiel durch eine vorgeschaltete Faktorenanalyse geschehen, was natürlich sowohl methodisch als auch experimentell einen erheblichen Mehraufwand bedeutet. Geht man von einem stationären Model aus (das heißt die Parametermatrizen sind nicht explizit zeitabhängig), so wäre diese Analyse einmalig durchzuführen und der Aufwand gegebenenfalls noch zu rechtfertigen.

Dient das Simulationsmodell nicht einer explorativen, sondern einer konfirmativen Untersuchung, so bestehen schon aufgrund psychologischer Vorüberlegungen Annahmen über Anzahl und Art der zu schätzenden latenten Variablen. In diesem Fall kommen auch leichter handhabbare Methoden zur Identifikation der Regressionsmatrizen B und C in Betracht.

Denkbar ist hier die Interpretation der Komponenten dieser Parametermatrizen als ein Maß für Nähe der inhaltlichen Belegung der latenten Variablen zu den ausgewählten Indikatoren.

Für die dynamische Matrix A kommt eine direkte Identifikation durch Zusatzexperimente praktisch nicht in Frage, da durch diese Matrix der strukturelle Teil des Simulationsmodells festgelegt wird, der sich der direkten Beobachtung entzieht.

Hier ist eine Einschränkung der Anzahl der insgesamt n^2 Strukturparameter bei n latenten Variablen denkbar durch Einführung von Nebenbedingungen und eventuell durch numerische Fixierung einiger Parameter durch psychologische Hypothesenbildung, die jedoch stark am untersuchten Einzelfall orientiert sein muß.

Beispiele für eine solche Vorgehensweise geben SINGER & SPILERMAN (1976) und PHILLIPS (1972) für bestimmte Spezialfälle des Modells (II.6.1) beziehungsweise für den kontinuierlichen Fall.

Selbst wenn es aber gelingt, die Anzahl der zu identifizierenden Systemparameter durch Nebenbedingungen und zusätzliche Messungen zu reduzieren, verbleibt doch noch ein Satz offener Parameter, der aus den Messungen zu schätzen ist.

Es sollen im Weiteren zwei Methoden etwas näher erläutert werden, die zur Identifikation der Systemparameter in Frage kommen: Das LISREL-Verfahren und der Koeffizientenvergleich mit den Komponenten der Transfermatrix.

Die erste dieser beiden Methoden ist ausführlich bei JÖRESKOG & SÖRBOM (1977) dargestellt, während auf die zweite bei BELLMAN & ASTROM (1970) und bei HART & MULHOLLAND (1979) eingegangen wird.

Beide Identifikationsmethoden werden im Zusammenhang mit dem bereits zitierten Beispiel von PHILLIPS (1972) in einer Arbeit von MÖBUS & NAGL (1983) diskutiert.

III.1 Parameteridentifikation mit LISREL

In Verallgemeinerung von einfachen Simplex-Modellen, wie sie von GUTTMAN (1954) für die Entwicklung eindimensionaler Daten beschrieben wurde, wird von JÖRESKOG & SÖRBOM (1977) ein Ansatz zur Längsschnittanalyse multivariater Daten untersucht. Sie verwenden das folgende mathematische Modell für zeitdiskrete Beobachtungen:

$$\underline{y}(k) = \underline{C}(k) \underline{x}(k) + \underline{w}(k) \quad (\text{III.1.1})$$

$$\underline{x}(k) = \underline{\bar{A}}(k) \underline{x}(k-1) + \underline{\bar{B}}(k) \underline{s} + \underline{\bar{v}}(k) \quad (\text{III.1.2})$$

mit $k = k_0+1, k_0+2, \dots$

$$\underline{u} = \underline{M} \underline{s} + \underline{d} \quad (\text{III.1.3})$$

und der Anfangsbedingung:

$$\underline{x}(k_0) = \underline{\bar{B}}(k_0) \underline{s} + \underline{\bar{v}}(k_0) \quad (\text{III.1.4})$$

Hierbei bezeichnet $\underline{y}(k)$ die multivariate Folge der Meßwerte, die durch die gemeinsamen Faktoren $\underline{x}(k)$ und die Störeinflüsse $\underline{w}(k)$ generiert wird.

Die Dynamik der Meßwertfolge wird bestimmt durch die Entwicklungsgleichung (III.1.2) für den Zustandsvektor \underline{x} , die wiederum durch den Prozeßfehler $\underline{v}(k)$ gestört ist und den Einfluß von Umweltfaktoren \underline{s} enthält.

Diese Umweltfaktoren charakterisieren bei JÖRESKOG & SÖRBOM (1977) eine Menge von beobachtbaren, mit Meßfehlern \underline{d} behafteten "Hintergrundvariablen" \underline{u} , definiert in Gleichung (III.1.3), die allerdings nicht zeitabhängig sind.

Die Hintergrundvariablen sollen in diesem Modell konstante, charakteristische Bedingungen beschreiben, unter denen die Variablen $\underline{y}(k)$ gemessen werden. Sie können zum Beispiel verschiedene Versuchspersonen oder Versuchsbedingungen unterscheiden.

Zur Schätzung der Parametermatrizen \underline{A} , \underline{B} und \underline{C} werden die LISREL-Gleichungen aus einer endlichen Zahl von Datensätzen aufgebaut.

Die Gleichungen des Meßmodells lauten für das Beispiel mit vier betrachteten Zeitpunkten:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}(k_0) \\ \underline{y}(k_0+1) \\ \underline{y}(k_0+2) \\ \underline{y}(k_0+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}(k_0) & & & \\ & \underline{C}(k_0+1) & & \underline{0} \\ & & \underline{C}(k_0+2) & \\ \underline{0} & & & \underline{C}(k_0+3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k_0) \\ \underline{x}(k_0+1) \\ \underline{x}(k_0+2) \\ \underline{x}(k_0+3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{w}(k_0) \\ \underline{w}(k_0+1) \\ \underline{w}(k_0+2) \\ \underline{w}(k_0+3) \end{bmatrix}$$

(III.1.5a)

$$\underline{u} = \underline{M} \underline{s} + \underline{d}$$

(III.1.5b)

und die Strukturgleichung ist gegeben durch:

$$\begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{\bar{A}}(k_0+1) & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\bar{A}}(k_0+2) & \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & -\underline{\bar{A}}(k_0+3) & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k_0) \\ \underline{x}(k_0+1) \\ \underline{x}(k_0+2) \\ \underline{x}(k_0+3) \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} \underline{\bar{B}}(k_0) \\ \underline{\bar{B}}(k_0+1) \\ \underline{\bar{B}}(k_0+2) \\ \underline{\bar{B}}(k_0+3) \end{bmatrix} \cdot \underline{s} + \begin{bmatrix} \underline{v}(k_0) \\ \underline{\bar{v}}(k_0+1) \\ \underline{\bar{v}}(k_0+2) \\ \underline{\bar{v}}(k_0+3) \end{bmatrix} \tag{III.1.6}$$

Die Parameteridentifikation geschieht dann durch Vergleich der Momentenmatrix der Meßgrößen, die zum Vektor

$$(\underline{y}(k_0)^T, \underline{y}(k_0+1)^T, \underline{y}(k_0+2)^T, \underline{y}(k_0+3)^T, \underline{u}^T)^T$$

zusammengefaßt werden mit der theoretischen Struktur der Momentenmatrix, die sich aus (III.1.5) und (III.1.6) ergibt.

Der soeben beschriebene Ansatz von JÖRESKOG & SÖRBOM hat große formale Ähnlichkeit mit den in Kapitel II beschriebenen Systemgleichungen. Führt man nämlich zeitabhängige Hintergrundvariablen $\underline{u}(k)$ ein (diese werden im letzten

Kapitel externe Einflüsse genannt), betrachtet Gleichung (III.1.2) jeweils um einen Beobachtungszeitpunkt verschoben und führt zugleich die folgenden Identifikationen durch:

$$\underline{d} := \underline{0}$$

$$\underline{M} := \underline{I}$$

$$\underline{A}(k) := \bar{\underline{A}}(k+1)$$

$$\underline{B}(k) := \bar{\underline{B}}(k+1)$$

$$\underline{v}(k) := \bar{\underline{v}}(k+1),$$

so ergeben sich die alten Systemgleichungen (II.6.1a, b):

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k) \underline{x}(k) + \underline{B}(k) \underline{u}(k) + \underline{v}(k) \quad (\text{II.6.1a})$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}(k) \underline{x}(k) + \underline{w}(k) \quad (\text{II.6.1b})$$

Nach dieser Uminterpretation lassen sich nun mit Hilfe der Beziehungen (III.1.5) und (III.1.6) nach Abwarten einer geeigneten Anzahl von Messungen die Parameter des Modells durch Anwendung eines LISREL-Programms bestimmen (JÖRESKOG & SÖRBOM 1978 und 1981).

III.2 Parameteridentifikation mit Hilfe der Transferfunktion

Die Transferfunktion zwischen zwei beobachteten Zeitreihen läßt sich ebenfalls zur Identifikation der Parametermatrizen des mathematischen Modells (II.3.1a, b) heranziehen, jedoch nur unter gewissen Einschränkungen und nur, wenn externe Einflüsse vorliegen.

Um das Prinzip zu erklären, seien zunächst univariate Umwelteinflüsse u und Meßwerte y vorausgesetzt, während die Zustandsgrößen \underline{x} mehrdimensional sein können. Zusätzlich sei das mathematische Modell zeitinvariant und deterministisch, das heißt die Parametermatrizen sollen nicht explizit von der Zeit abhängen und es sollen keine Störgrößen berücksichtigt werden.

Es sind also die folgenden Modellgleichungen zu untersuchen:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{b} u(k) \quad (\text{III.2.1a})$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k) \quad (\text{III.2.1b})$$

Die Zeitreihen $u(k)$ und $y(k)$ lassen sich als Input und Output eines linearen, zeitinvarianten Übertragungssystems interpretieren, wobei das Übertragungssystem durch die Transferfunktion charakterisiert werden kann.

Der Input-Output-Zusammenhang ist gegeben durch die Gleichung:

$$y(k) = \sum_{i=k_0}^k g(k-i) u(i) \quad (\text{III.2.2})$$

wobei $g(k)$ die Übertragungsfunktion bezeichnet (vgl. BOX & JENKINS 1976).

Eine elegante Methode zur Berechnung der Übertragungsfunktion ergibt sich durch Laplace-Transformation der Gleichung (III.2.2).

Beim Vorliegen diskreter Beobachtungen mit festem Beobachtungsintervall genügt auch die z-Transformation, die einen Spezialfall der Laplace-Transformation darstellt.

Bezeichnet man die transformierten Größen für y , u und g mit $Y(s)$, $U(s)$ und $G(s)$, wobei s eine komplexe Variable darstellt, so geht Gleichung (III.2.2) nach entsprechender Transformation über in:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad (\text{III.2.3})$$

Da zunächst nur univariate Zeitreihen betrachtet werden sollen, läßt sich $G(s)$ durch einfache Quotientenbildung berechnen und nimmt dadurch die Form einer gebrochenrationalen Funktion in s an:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \\ &= \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n} \end{aligned} \quad (\text{III.2.4})$$

(Der Koeffizient a_n kann durch Erweiterung der gebrochenrationalen Funktion stets auf den Wert 1 gebracht werden.)

In den Simulationsgleichungen (III.2.1a) und (III.2.1b) wird für den Zusammenhang der beiden betrachteten Zeitreihen eine Struktur angenommen, die weder in ihrer Form noch in ihren Parametern eindeutig definiert ist.

Die Form der Gleichungen resultiert aus anwendungsorientierten Überlegungen, in denen ein nicht direkt beobachtbarer Zustandsvektor und seine zeitliche Entwicklung berücksichtigt wird.

Diese Form ist zwar keineswegs eindeutig bestimmt, reflektiert aber bestimmte psychologische Grundannahmen und ist daher fest gewählt.

Die Werte der Elemente der Parametermatrix \underline{A} und die Parametervektoren \underline{b} und \underline{c} sind dagegen prinzipiell uneindeutig. Dies erkennt man durch Multiplikation der Gleichung (III.2.1a) mit einer quadratischen, invertierbaren Matrix \underline{M} :

$$\begin{aligned}\underline{M} \underline{x}(k+1) &= \underline{M} \underline{A} \underline{M}^{-1} \underline{M} \underline{x}(k) + \underline{M} \underline{b} u(k) \\ y(k) &= \underline{c} \underline{M}^{-1} \underline{M} \underline{x}(k)\end{aligned}$$

Die Parametermatrix $\underline{M} \underline{A} \underline{M}^{-1}$, die Parametervektoren $\underline{M} \underline{b}$, $\underline{c} \underline{M}^{-1}$ und der Zustandsvektor $\underline{M} \underline{x}(k)$ beschreiben nun die gleichen Zeitreihen $y(k)$ und $u(k)$, können aber gegenüber dem System (III.2.1b) völlig andere Werte annehmen.

Aufgrund dieser Uneindeutigkeit ist es daher sinnvoll, sich auf bestimmte Normalformen für die Parametermatrizen zu einigen. Im Einzelfall kann dann jeweils eine Transformationsmatrix \underline{M} gesucht werden, die die Besonderheiten des betrachteten Spezialfalls berücksichtigt.

In der Systemtheorie unterscheidet man im Wesentlichen drei Normalformen:

1. Die Steuerungsnormalform:

In diesem Fall haben die Parametermatrizen folgende Gestalt:

$$\underline{A}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$$

$$\underline{c}^T = [(b_0 - b_n a_0), \dots, (b_{n-1} - b_n a_{n-1})]$$

Durch die spezielle Gestalt des Vektors \underline{b} gehen die Werte $u(k)$ direkt in den Zustandsvektor ein.

Da in der Systemtheorie der Zeitreihe $u(k)$ eine gewisse "Steuerungsfunktion" auf die beobachtete Zeitreihe $y(k)$ zugeschrieben wird, wird diese Normalform Steuerungsnormalform genannt.

2. Die Beobachtungsnormalform

Die Parameter sind in der folgenden Form gegeben:

$$\underline{A}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = [(b_0 - b_n a_n), \dots, (b_{n-1} - b_n a_{n-1})]^T,$$

$$\underline{c}^T = [0, 0, \dots, 0, 1]$$

Da hier eine Zustandsvektorkomponente direkt beobachtet werden kann, heißt diese Normalform Beobachtungsnormalform.

Zwischen den Koeffizienten-"Matrizen" der Regelungsnormalform und denen der Beobachtungsnormalform besteht ein sehr enger Zusammenhang.

Es gilt:

$$\underline{A}_B = \underline{A}_S^T$$

$$\underline{b}_B = (\underline{c}_S^T)^T$$

$$\underline{c}_B^T = \underline{b}_S^T$$

Dieser Zusammenhang darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Zustandsvariablen in beiden Fällen eine völlig voneinander verschiedene psychologische Bedeutung haben.

3. Jordansche Normalform

Diese Normalform geht von einer anderen Darstellung der Übertragungsfunktion $G(s)$ aus:

$$G(s) = r_0 + \sum_{v=1}^n \frac{r_v}{s-s_v}$$

(III.2.5)

Die Darstellung (III.2.5) ist mathematisch völlig äquivalent zu (III.2.4) und kann stets aus dieser Darstellung berechnet werden.

Mit den so eingeführten Residuen r_v und Polen s_v erhält diese Normalform die folgende Gestalt:

$$\underline{A}_J = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_J = [1, 1, \dots, 1]^T$$

$$\underline{c}_J^T = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T$$

Der konstante Anteil r_0 in der Übertragungsfunktion bewirkt, daß eine direkte Einwirkung von $u(k)$ auf $y(k)$ möglich ist unter Umgehung des Zustandsvektors $\underline{x}(k)$.

Entscheidet man sich für eine dieser Normalformen, so ist die vollständige Identifikation des univariaten Modells (III.2.1) gegeben.

Bei einer explorativen Untersuchung ist die Anzahl der Zustandsvariablen $\underline{x}_i(k)$ nicht vorher festgelegt. Sie ergibt sich dann aus der Ordnung des Zähler- und Nennerpolynoms von $G(s)$.

Die Ordnung dieser komplexen Polynome ist - bei Anwendung der z-Transformation - höchstens gleich der Anzahl der verarbeiteten Beobachtungen.

Man kann bei explorativen Untersuchungen die Dimension des Zustandsvektors daher nur sukzessive festlegen: Ein zeit-

invariantes System vorausgesetzt, ist diese Dimension gleich dem Grad der Polynome in $G(s)$, bei dem sich die Übertragungsfunktion stabilisiert.

Da nach dieser Methode die Identifikation der Systemparameter sehr schnell durchführbar ist, können auch zeitvariable Systeme behandelt werden, indem man eine "gleitende" Berechnung der Übertragungsfunktion zum Beispiel nach folgendem Schema durchführt:

Die Übertragungsfunktion für die ersten l Beobachtungen wird berechnet aus den Beobachtungswerten $y(k_0), \dots, y(k_0+n)$ und $u(k_0), \dots, u(k_0+n)$. Nach l Beobachtungsintervallen wird die Übertragungsfunktion erneut berechnet aus den Daten $y(k_0+1), \dots, y(k_0+1+n)$ und $u(k_0+1), \dots, u(k_0+1+n)$. Im Extremfall kann $l = 1$ gewählt werden.

Bei multivariaten Zeitreihen $\underline{y}(k)$ und $\underline{u}(k)$ ist die Vorgehensweise erheblich schwieriger.

Hier wird die Transferfunktion zur Transfermatrix und kann nicht mehr durch einfache Quotientenbildung bestimmt werden. Zudem sind die Elemente der Transfermatrix nicht eindeutig bestimmt.

Die der Beziehung (III.2.3) entsprechende Gleichung ist

$$\underline{Y}(s) = \underline{G}(s) \underline{U}(s),$$

wobei $\underline{Y}(s)$ und $\underline{U}(s)$ ein p - beziehungsweise q -dimensionaler Vektor ist und $\underline{G}(s)$ eine $(p \times q)$ -dimensionale Matrix ist.

Eine mögliche Form für die Matrix $\underline{G}(s)$ ist:

$$\underline{G}(s) = \frac{1}{q} \begin{bmatrix} \frac{y_1(s)}{u_1(s)} & \dots & \frac{y_1(s)}{u_q(s)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{y_p(s)}{u_1(s)} & \dots & \frac{y_p(s)}{u_q(s)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.6})$$

Da im multivariaten Fall Normalformen, wie sie für den univariaten Fall oben angegeben wurden, nicht ohne weiteres eingeführt werden können, erfolgt die Identifikation hier auf anderem Wege.

Für das mathematische Modell (II.1.2) war im Abschnitt II bereits die formale Gestalt der Übertragungsmatrix abgeleitet worden.

Vernachlässigt man die direkten Einflüsse der Zeitreihe $\underline{u}(k)$ auf die Zeitreihe $\underline{y}(k)$, so hat die Transfermatrix die folgende Struktur:

$$\underline{G}(s) = \underline{C} (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \quad (\text{III.2.7})$$

Die praktische Berechnung der einzelnen Matrixelemente in diesem Ausdruck für $\underline{G}(s)$ läßt sich relativ leicht durchführen mit Hilfe des LEVERIER-Algorithmus (GANTMACHER 1958).

Die Parameteridentifikation kann nun durch Koeffizientenvergleich der Zähler- und Nennerpolynome der einzelnen Matrixelemente von (III.2.6) und (III.2.7) erfolgen.

MÖBUS & NAGL (1983) haben diese Methode auf ein Beispiel angewandt, bei dem $u(k)$ univariat und $y(k)$ zweidimensional war. Es ist zu beachten, daß in diesem Fall die Elemente der Transfermatrix im Prinzip eindeutig aus den Daten gewonnen werden können. MÖBUS & NAGL (1983) nutzen den Koeffizientenvergleich von (III.2.6) und (III.2.7) jedoch nicht zur direkten Bestimmung der Systemparameter, sondern nur zur Bestimmung ihres Identifikationsstatus, das heißt sie weisen in ihrem Beispiel lediglich nach, daß alle Systemparameter im Prinzip durch einen solchen Koeffizientenvergleich eindeutig bestimmbar sind.

Die eigentliche Identifikation führen sie durch eine Anpassung der Modellrechnungen an die gemessenen Daten nach der Methode der kleinsten Quadrate durch.

Die Problematik dieser Identifikationsmethode bleibt bei MÖBUS & NAGL (1983) unerwähnt, soll hier aber kurz erläutert werden:

Die Dimension des Zustandsvektors x legt in Gleichung (III.2.6) die Grade der Zähler- und Nennerpolynome der Elemente von $G(s)$ fest. Diese müssen mit den "experimentell" bestimmten Polynomgraden in Gleichung (III.2.7) nicht immer übereinstimmen.

Dieses Problem kann auf drei verschiedene Weisen angegangen werden:

1. Man paßt die "experimentell" bestimmten Matrixelemente den "theoretisch" bestimmten Matrixelementen an, indem man bestimmte Polynomkoeffizienten Null setzt und dadurch zusätzliche Bedingungen für die Systemparameter erhält, die allerdings widersprüchlich sein können.

2. Man betrachtet eine solche Anzahl von Zustandsvariablen $\underline{x}_i(k)$, daß eine Übereinstimmung der Polynomgrade in jedem Fall gewährleistet ist. Dies kann jedoch - insbesondere bei konfirmativen Untersuchungen - zu psychologisch-inhaltlichen Schwierigkeiten führen.
3. Man betrachtet eine solche Anzahl von Messungen, daß die durch z-Transformation gewonnenen Übertragungsfunktionen mit den Matrixelementen in Gleichung (III.2.6) kommensurabel sind. Hierbei müssen jedoch zeitvariable Parametermatrizen ausgelassen werden, die über die oben beschriebene "gleitende" Berechnung bestimmt werden.

Die Parameteridentifikation mit Hilfe von Übertragungsfunktionen ist damit nur unter Vorbehalten anwendbar.

IV. Die Analyse der Dynamik einer dyadischen Interaktion mit Hilfe rekursiver Parameterschätzung

Der Datensatz, an dem der rekursive Schätzalgorithmus demonstriert werden soll, wurde einer Arbeit von GOTTMAN (1979b) entnommen, die sich wiederum auf eine Untersuchung von GOTTMAN, MARKMAN & NOTARIUS (1977) bezieht.

Der Datensatz basiert auf kodierten Videoaufnahmen des Gesprächs eines Ehepaares (klinisches Paar Nr. 27 in GOTTMAN (1979b)) über ein Geldproblem.

Bei der Kodierung der Videoaufnahmen wurden der verbale Inhalt der jeweiligen Äußerungen eines Partners, die non-verbale Mitteilung während dieser Äußerungen und das non-verbale Verhalten des jeweiligen Zuhörers beurteilt.

Für jede dieser drei Komponenten der Interaktion wurden acht Kodierungen des Couples Interaction Scoring Systems (CISS) eingesetzt, wobei die Interraterreliabilitäten für die inhaltlichen sowie affektiven Kodierungen stets über 80 Prozent lagen.

Aus den für jeden Partner multivariat erhobenen Daten wurde für jeden Partner für jede Beobachtungseinheit ein univariater, kumulativer Interaktionsindex extrahiert, der ein Gesamtmaß für die Positivität beziehungsweise Negativität des jeweiligen Interaktionsbeitrages in dem betreffenden Beobachtungsintervall abgibt.

Die kumulativen Interaktionsindizes wurden nach einem Punktesystem aus den Kodierungen für jeden Partner gewonnen, wobei die univariaten Skalen so konstruiert wurden, daß sie das "qualitativ wahrnehmbare Interaktionsverhalten" in den Videoaufnahmen widerspiegeln. GOTTMAN, MARKMAN & NOTARIUS (1977, S. 467) beschreiben dies folgendermaßen:

"It is our experience that the graphs go along with our clinical reactions to the videotapes. For example, in watching the tape of one couple, we sensed a distinct shift in the interaction at roughly the same point at which the cumulative point graph changed slope. Although this is not surprising, since we constructed the point system to fit our intuitions about communication in couples. It does represent a face valid, albeit anecdotal, check."

Als Beobachtungseinheit wurden in Anlehnung an die Definition von WEISS, HOPS & PATTERSON (1973) "floor switches" gewählt, das heißt die abgeschlossene Mitteilung einer Kommunikationseinheit unter Berücksichtigung des nonverbalen Verhaltens des jeweiligen Interaktionspartners.

Die auf die oben angegebene Weise ermittelten univariaten Datenverläufe sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Hier sind die Interaktionsindizes der Ehepartner über 141 "floor switches" aufgetragen (vgl. auch Anhang 1).

Der Interaktionsindex ist für beide Partner fast überall negativ, und tatsächlich bezeichnete das Paar die eigene Ehe nicht nur als unbefriedigend, sondern lieferte bei Anwendung des Locke-Wallace Marital Relationship Inventory (MRI) auch niedrige Testwerte.

Während bei GOTTMAN (1979b) die kumulativen Interaktionsindizes lediglich zu einem "topographischen" Überblick herangezogen werden, soll hier mit Hilfe eines einfachen Modellansatzes der Versuch unternommen werden, anhand dieser Indizes die Dynamik des zugrundeliegenden Interaktionsgeschehens zu erfassen.

Um zu einer mathematischen Modellbildung für diesen Interaktionsprozeß zu gelangen, werden die beiden Interaktionsindizes des Ehepaares für jeden "floor switch" als

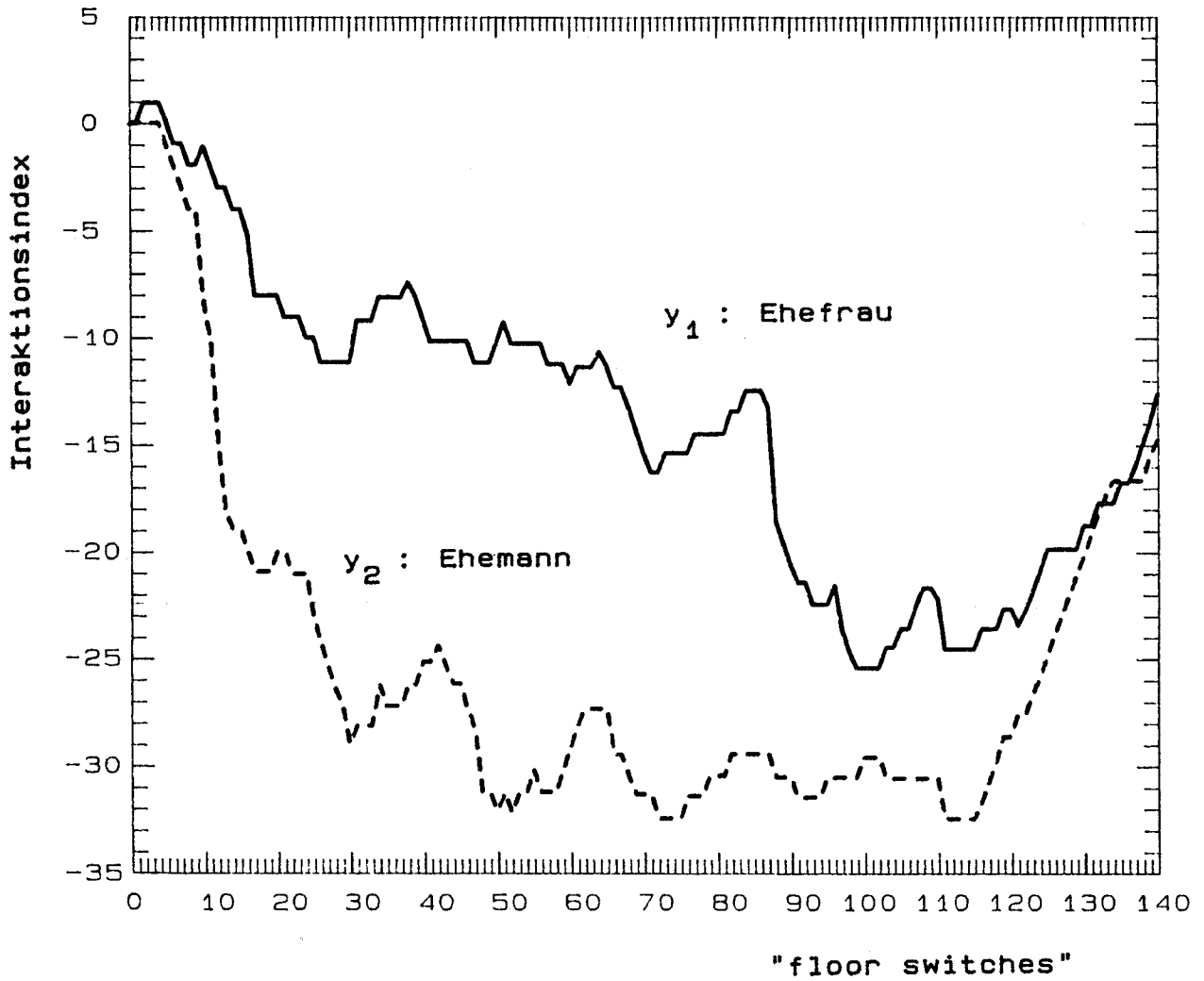


Abbildung 4.1: Kumulative Interaktionsindizes y_1 und y_2 für Ehefrau und Ehemann über 141 "floor switches"

Achsenabschnitte in einem zweidimensionalen Zustandsraum aufgefaßt (Abbildung 4.2).

In dieser sogenannten Zustandsebene wird der Gesprächsverlauf als Trajektorie beschrieben, wobei die Nummer des "floor switches" entlang dieser Trajektorie gemessen wird; die Durchlaufrichtung der Trajektorie ist durch Pfeile gekennzeichnet. Da einige Paare von Interaktionswerten während des Gesprächsverlaufs mehrfach angenommen werden, wird die Trajektorie streckenweise auch mehrfach durchlaufen. Die eindeutige Zuordnung eines bestimmten Punktes der Trajektorie zu einem bestimmten "floor switch" ist daher nicht immer möglich. Der Vorteil dieser Darstellungsweise liegt jedoch darin, daß der Gesamtverlauf der Trajektorie auf einen mathematischen Beschreibungsansatz für den Interaktionsprozeß schließen läßt.

Die Form der vorliegenden Trajektorie legt einen systemtheoretischen Ansatz zur mathematischen Beschreibung der zugrundeliegenden Datenverläufe nahe, da sie leicht in eine der charakteristischen Klassen von Prozeßabläufen einzuordnen ist.

Je nach Verlauf ihrer Trajektorie im Zustandsraum (Abbildung 4.3) lassen sich lineare Systeme in die folgenden drei Klassen unterteilen (vgl. zum Beispiel EYKHOFF 1974):

1. Asymptotisch stabile Systeme, das sind solche Systeme, deren Zustand sich mit fortschreitender Zeit immer weniger verändert, bis schließlich ein konstanter Zustand erreicht wird;
 2. stabile Systeme, das sind Systeme, deren Zustandsbahnen geschlossen sind, das heißt alle auftretenden Zustände werden periodisch durchlaufen,
- und schließlich

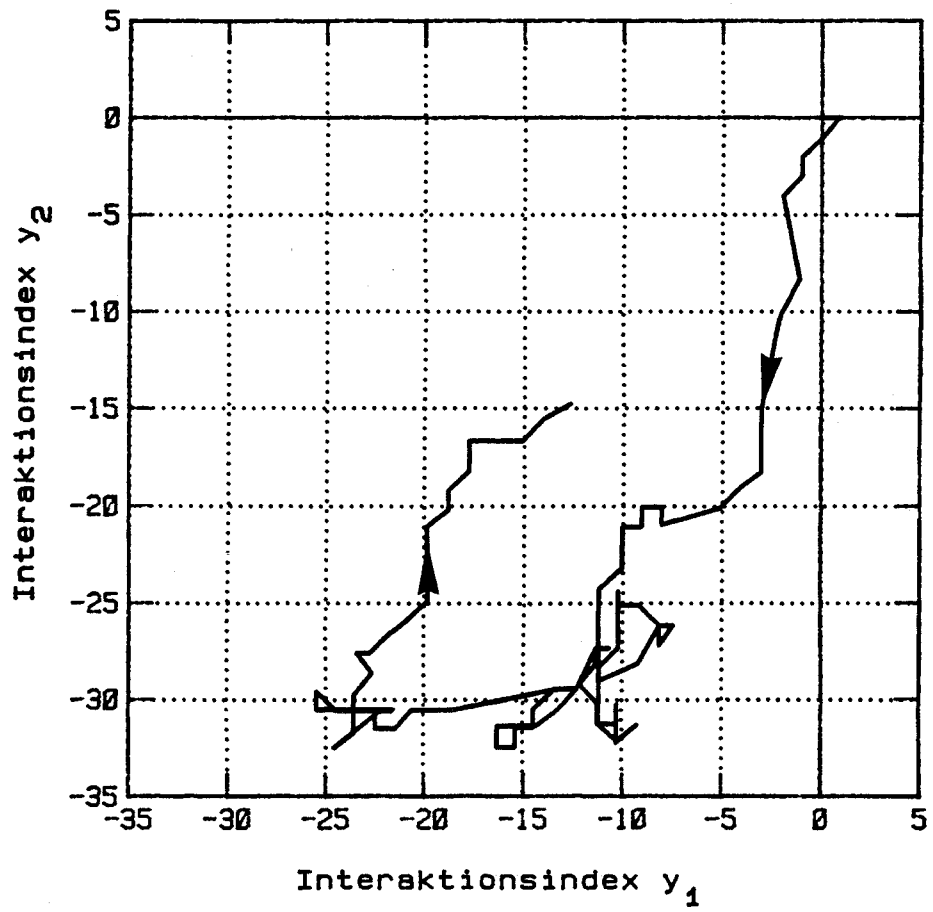


Abbildung 4.2: Darstellung der Interaktionsdaten in der Zustandsebene

3. instabile Systeme, bei denen die Komponenten des Zustandsvektors mit fortschreitender Zeit immer größere Werte annehmen.

Die Interaktionsindizes der Ehepartner beschreiben somit in der Zustandsebene (Abbildung 4.3) ein asymptotisch stabiles System beziehungsweise Interaktionsverhalten.

Für diskrete Beobachtungszeitpunkte läßt sich die vorliegende Trajektorie durch ein Differenzengleichungssystem beschreiben, das formal die Gestalt eines 2-Wellen-2-Variablen-Modells für Panel-Daten hat:

$$y_1(k+1) = S_{11} y_1(k) + S_{12} y_2(k) + w_1(k) + d_1 \quad (\text{IV.1a})$$

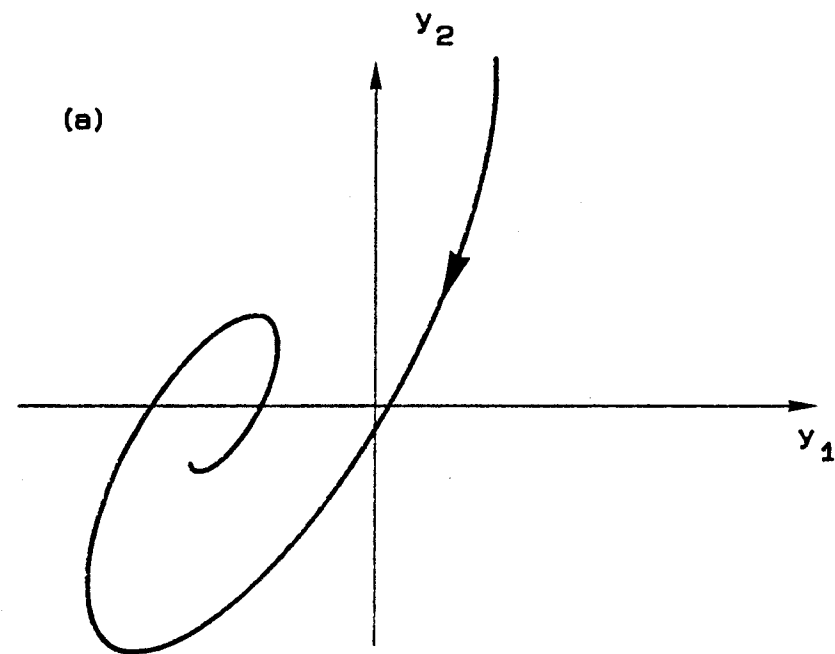
$$y_2(k+1) = S_{21} y_1(k) + S_{22} y_2(k) + w_2(k) + d_2 \quad (\text{IV.1b})$$

bzw. in vektorieller Formulierung:

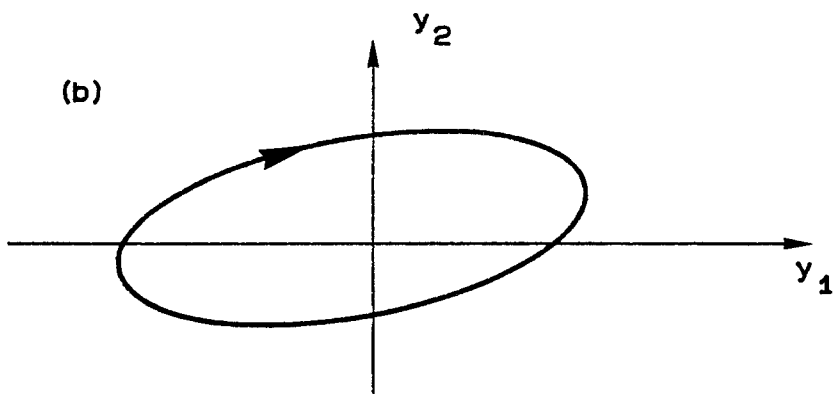
$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

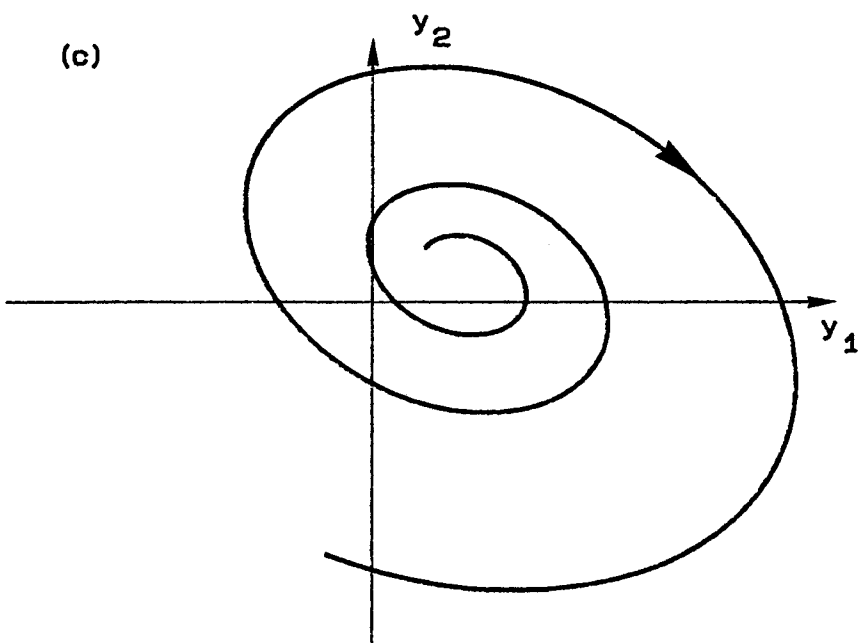
$$\underline{y}(k+1) = \underline{S} \underline{y}(k) + \underline{w}(k) + \underline{d} \quad (\text{IV.3})$$



Trajektorie eines
asymptotisch stabilen
Systems



Trajektorie eines
stabilen Systems



Trajektorie eines
instabilen Systems

Abbildung 4.3: Typische Trajektorien linearer Systeme

S_{ij} ; $i, j = 1, 2$; sind zeitunabhängige Modellparameter. Durch die zeitabhängigen Residuen w_1 und w_2 werden sowohl Fehler bei der Kodierung als auch zufällige Einflüsse auf das Interaktionsverhalten berücksichtigt. Durch die konstanten Parameter d_1 und d_2 wird berücksichtigt, daß die Mittelwerte der Interaktionsindizes nicht verschwinden.

Im vorliegenden Beispiel wurden die sechs Parameter S_{ij} ; $i, j = 1, 2$; und d_1, d_2 aus den Daten nach der Methode der minimalen Varianz geschätzt und zur Aufstellung eines stationären Simulationsmodells herangezogen.

Die Schätzgleichungen für die zeitunabhängigen Parameter lauten:

$$\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \\ \vdots \\ y_1(140) \\ y_2(140) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1(0) & y_2(0) & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1(139) & y_2(139) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1(139) & y_2(139) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{21} \\ S_{22} \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{IV.4}$$

oder abgekürzt:

$$\underline{y} = \underline{M} \underline{x} \tag{IV.5}$$

Der Vektor $\underline{\hat{x}}$ der geschätzten Parameter ist gegeben durch:

$$\underline{\hat{x}} = (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{y} \tag{IV.6}$$

Gleichung (IV.6) liefert die folgenden Schätzwerte:

$$\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} \\ \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{21} \\ \hat{S}_{22} \\ \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9668 \\ 0.0199 \\ - 0.0463 \\ 0.9937 \\ - 0.0926 \\ - 0.9818 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

Eine Modellsimulation für die beiden Folgen der Interaktionsindizes erhält man durch fortgesetztes Anwenden der Parametermatrix $\hat{\underline{S}}$ auf den Anfangszustand der Interaktion bei gleichzeitiger Berücksichtigung der konstanten Beiträge (Abbildung 4.4):

$$\hat{\underline{y}}(k) = \hat{\underline{S}}^k \underline{y}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\underline{S}}^i \hat{\underline{d}} \quad (\text{IV.8})$$

wobei die simulierten Daten mit $\hat{\underline{y}}$ bezeichnet werden.

Die Daten werden in ihrem Trend durch die stationäre Simulation qualitativ recht gut wiedergegeben, jedoch treten insbesondere am Ende des Beobachtungsintervalls hohe Abweichungen auf. In Abbildung 4.5 sind die Verläufe der Abweichungen der simulierten Daten von den beobachteten Werten aufgetragen.

Die Gesamtvarianz der Abweichungen der Daten von der stationären Simulation beträgt $\sigma_{\text{ges}}^2(y_1) = 11.33$ für den Verlauf des Interaktionsindex y_1 der Ehefrau, während sich für den Verlauf des Interaktionsindex y_2 des Ehe-

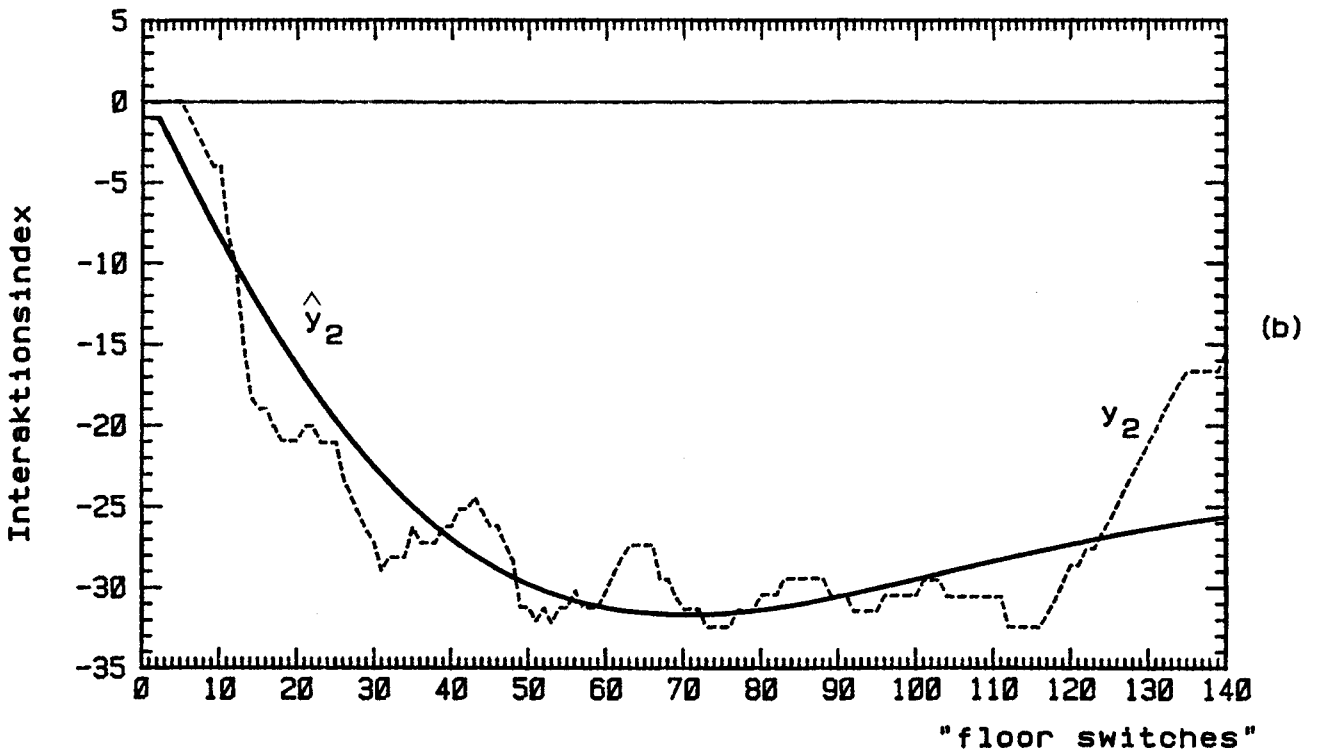
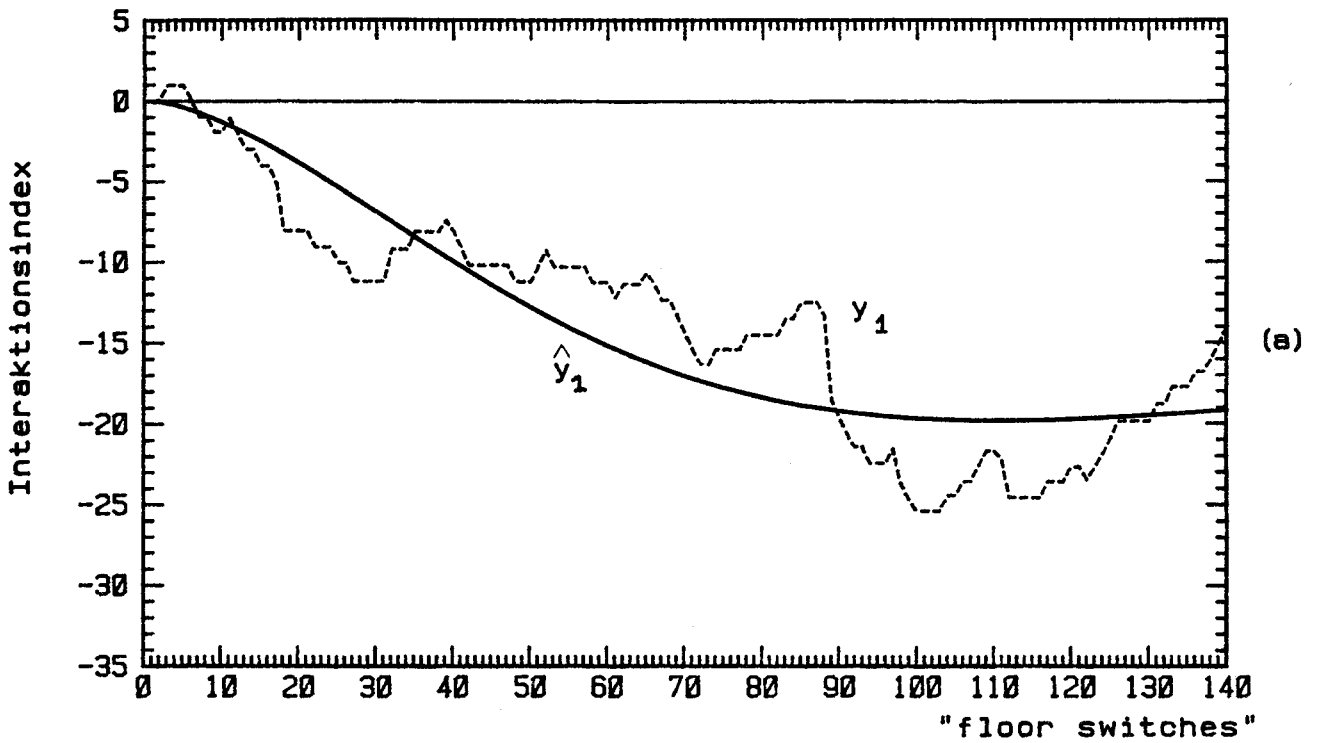
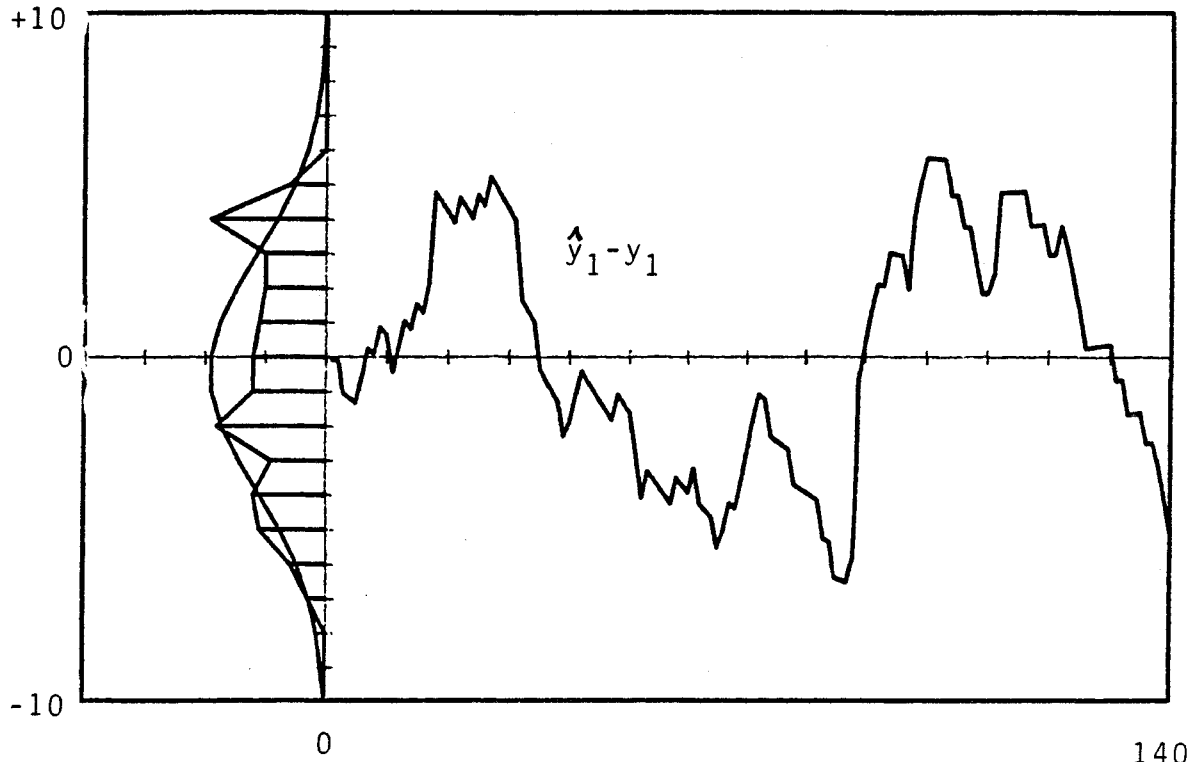


Abbildung 4.4: Stationäre Simulation der Verläufe der Interaktionsindizes im Vergleich mit den Originaldaten
(a) stationäre Simulation \hat{y}_1 im Vergleich mit y_1
(b) stationäre Simulation \hat{y}_2 im Vergleich mit y_2

(a)



(b)

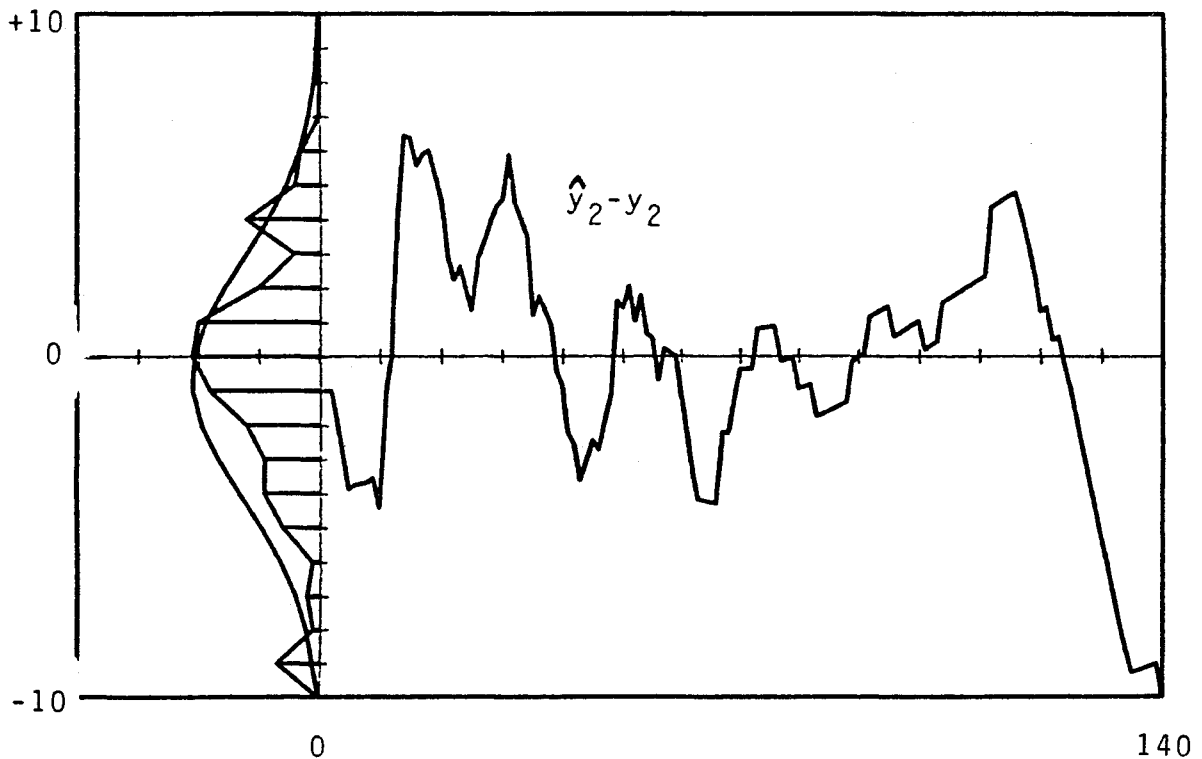


Abbildung 4.5: Abweichungsverläufe und ihre Häufigkeitsverteilungen (a) der stationären Simulation \hat{y}_1 von den Originaldaten y_1 , (b) der stationären Simulation \hat{y}_2 von den Originaldaten y_2 .

mannes eine Gesamtvarianz der Abweichungen von $\sigma_{\text{ges}}^2(y_2) = 12.54$ ergibt.

In der Abbildung 4.5 ist jeweils im rechten Teil der Verlauf der Differenzen über alle "floor switches" aufgetragen, während im linken Teil über der Abszisse die Häufigkeiten der Differenzen aufgezeichnet sind. Zur Orientierung wurde eine Normalverteilungskurve mit zugehöriger Varianz und entsprechendem Mittelwert in jede Häufigkeitsverteilung eingetragen. Die maximalen Abweichungen betragen - 6.4 Skalenteile in y_1 bzw. - 10.2 Skalenteile in y_2 , was mit 52% bzw. 72% des an der jeweiligen Stelle vorliegenden Interaktionswertes sehr groß ist.

Für eine grobe Simulation ist dieses einfache Modell jedoch durchaus akzeptabel, da das asymptotisch stabile Verhalten des Systems qualitativ wiedergegeben wird.

In Abbildung 4.6 sind die Extrapolationen bis zu 300 "floor switches" angegeben. Sie entsprechen dem aperiodischen Grenzfall eines asymptotisch stabilen Systems. Die Interaktionsindizes stabilisieren sich auf der Basis dieser Extrapolation bei Werten von - 17.8 für y_1 bzw. - 25.2 für y_2 .

Betrachtet man die beiden simulierten Datenverläufe als Trajektorie in der Zustandsebene (Abbildung 4.7), so stellen sich für eine Analyse der Interaktionsdynamik folgende beiden Fragen:

Ist die asymptotische Stabilität der Interaktion in dem mit * markierten Bereich gefährdet?

und

Welche Änderungen in der Wechselwirkung verursachen die Abweichungen von der stationären Trajektorie?

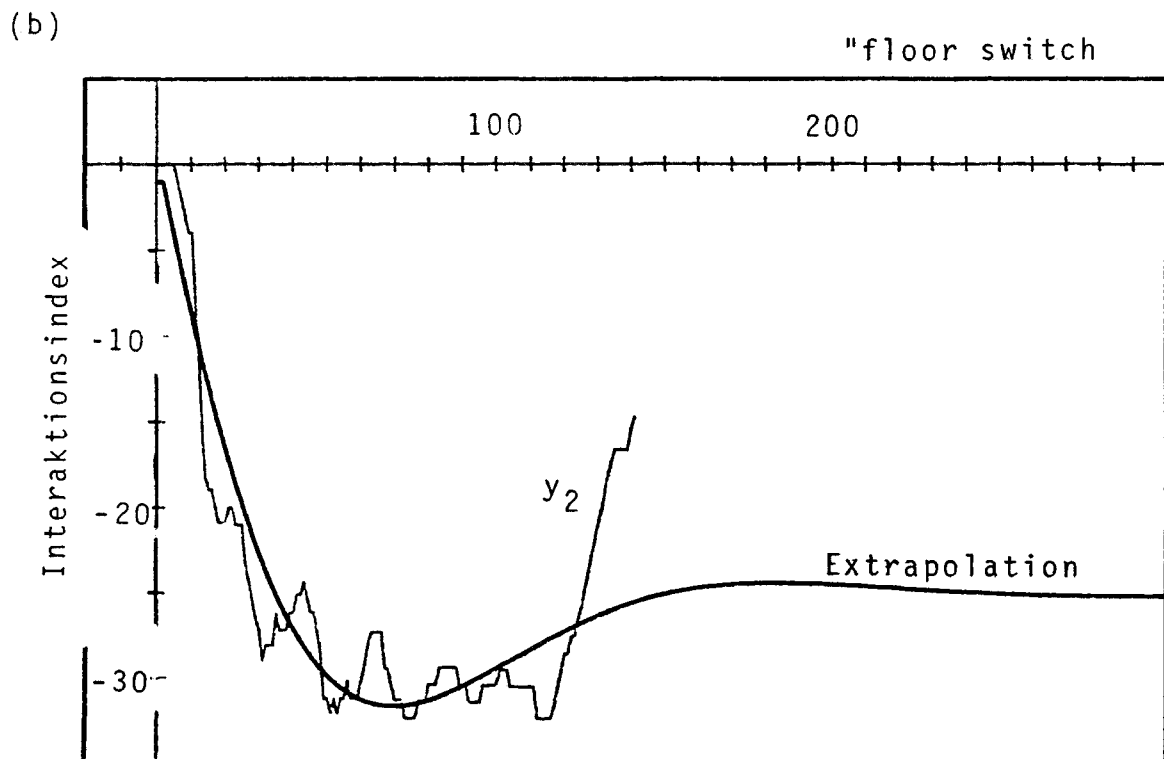
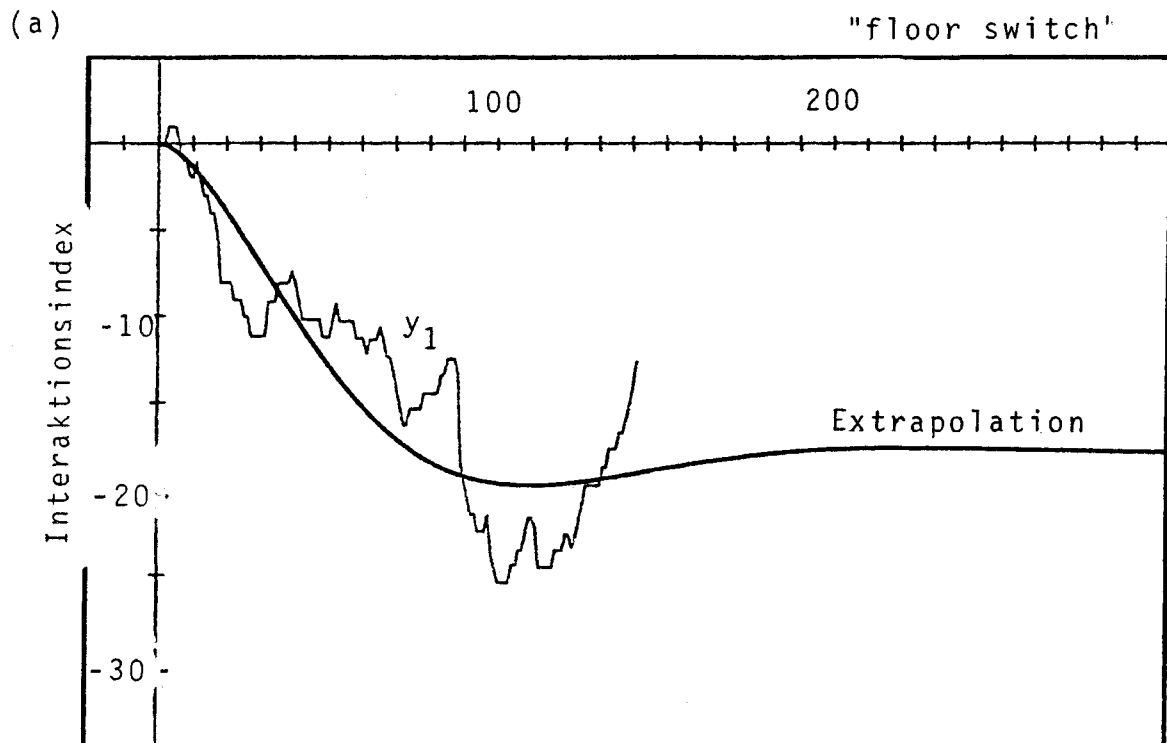


Abbildung 4.6: Extrapolation des stationären Modells auf 300 "floor switches" (a) für die Ehefrau, (b) für den Ehemann.

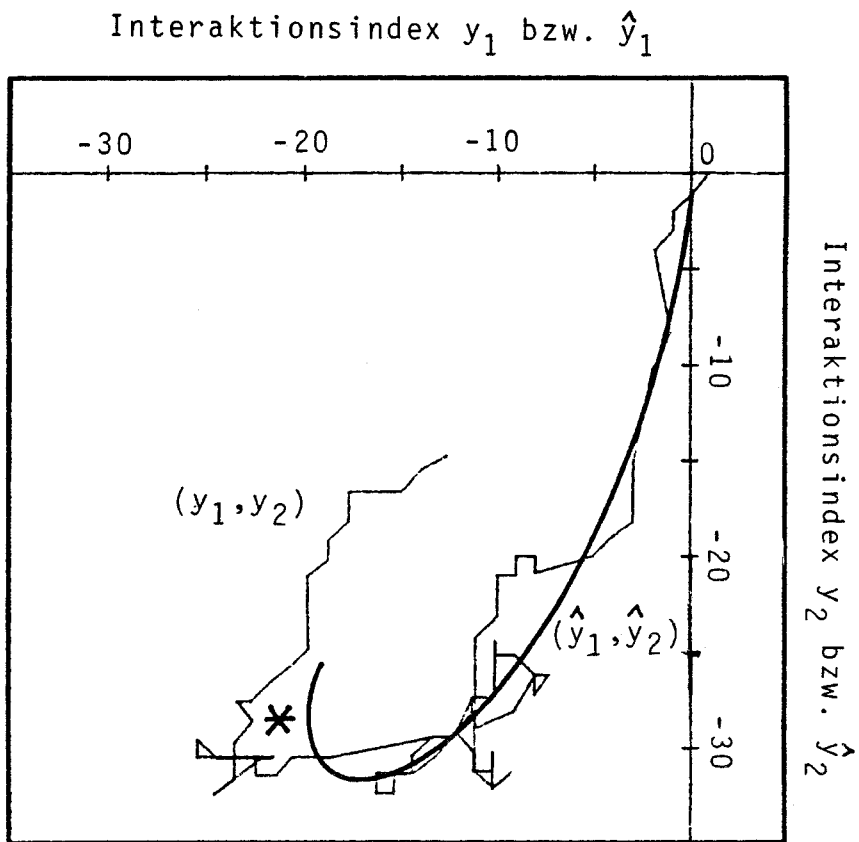


Abbildung 4.7: Trajektorie der stationären Simulation

Diese Fragen lassen sich im Rahmen eines Modells mit konstanten, zeitunabhängigen Parametern nicht beantworten.

In der cross-lagged-correlation-Analyse werden die Parameter von 2-Wellen-2-Variablen-Modellen zur Untersuchung der wechselseitigen Beeinflussung zweier Interaktionspartner anhand von Panel-Daten herangezogen. Die beiden wesentlichen Kritikpunkte (vgl. zum Beispiel ROGOSA 1980), die dieses Verfahren methodisch und psychologisch stark angreifbar machen, sind die Annahme der Stationarität, das heißt Zeitunabhängigkeit der Parameter, und die Anwendung auf Stichproben/Populationen von Interaktionspartnern mit jeweils unterschiedlichen Varianzen in den Beobachtungsgrößen.

Bei der Analyse der vorliegenden dyadischen Interaktion sollen beide Kritikpunkte vermieden werden, indem eine Einzelfallanalyse durchgeführt wird und im Modellansatz zeitabhängige Parameter zugelassen werden (vgl. auch TÖLKE 1985a)

Durch Einführung zeitabhängiger Parameter wird bei gleicher einfacher Struktur des mathematischen Modells wie in (IV.1a,b) eine bessere Anpassung der Simulation an die Daten und zusätzlich eine über das Beobachtungsintervall differenziertere Aussage über den Ablauf der Wechselwirkung erwartet.

Die ursprüngliche Form des Modellansatzes (IV.1a,b) soll somit erhalten bleiben, nur werden nun die Parameter S_{ij} zeitabhängig angesetzt:

$$y_1(k+1) = S_{11}(k) y_1(k) + S_{12}(k) y_2(k) + w_1(k) + d_1$$

(IV.9a)

$$y_2(k+1) = S_{21}(k) y_1(k) + S_{22}(k) y_2(k) + w_2(k) + d_2$$

(IV.9b)

bzw. in vektorieller Formulierung:

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(k) & S_{12}(k) \\ S_{21}(k) & S_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

(IV.10)

Diese Beziehungen sind in Abbildung 4.8 diagrammatisch dargestellt.

Eine Möglichkeit zur Bestimmung der zeitabhängigen Parameter wäre, die Modellparameter für jeweils zwei aufeinanderfolgende Datenpaare unabhängig zu schätzen. Bei dieser Vorgehensweise ist der Einfluß kurzfristiger Variationen in den Daten jedoch so stark, daß sich durch Fehlerfortpflanzung eine völlig unzureichende Datensimulation ergibt. Sinnvoller ist es, eine dynamische Schätzung der Modellparameter vorzunehmen (vgl. auch TÖLKE 1985b).

Mit dynamischer Schätzung ist hier ein Parameterschätzverfahren gemeint, das die Schätzfehler aus dem jeweils vorangegangenen Schritt zur Verbesserung der Qualität der Schätzung im aktuellen Schritt heranzieht, so daß in die aktuelle Schätzung das gesamte Vorwissen über den Verlauf der Wechselwirkung miteingeht.

Der prinzipielle Ablauf des dynamischen Schätzverfahrens ist in Abbildung 4.9 skizziert.

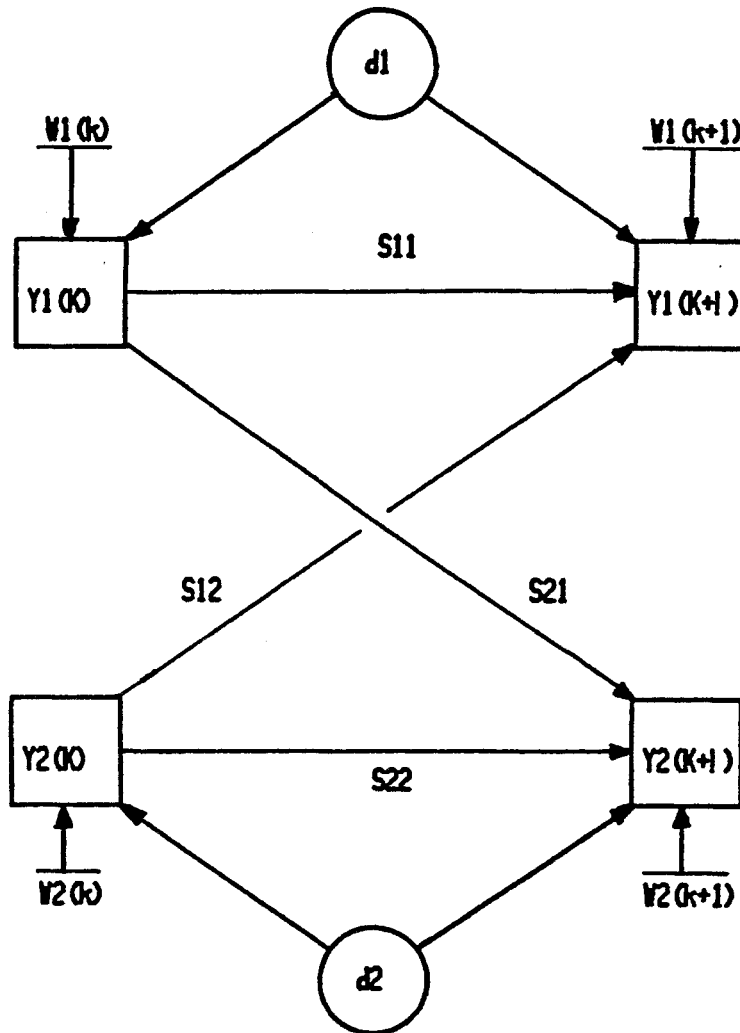


Abbildung 4.8: Diagrammatische Modellbeschreibung.

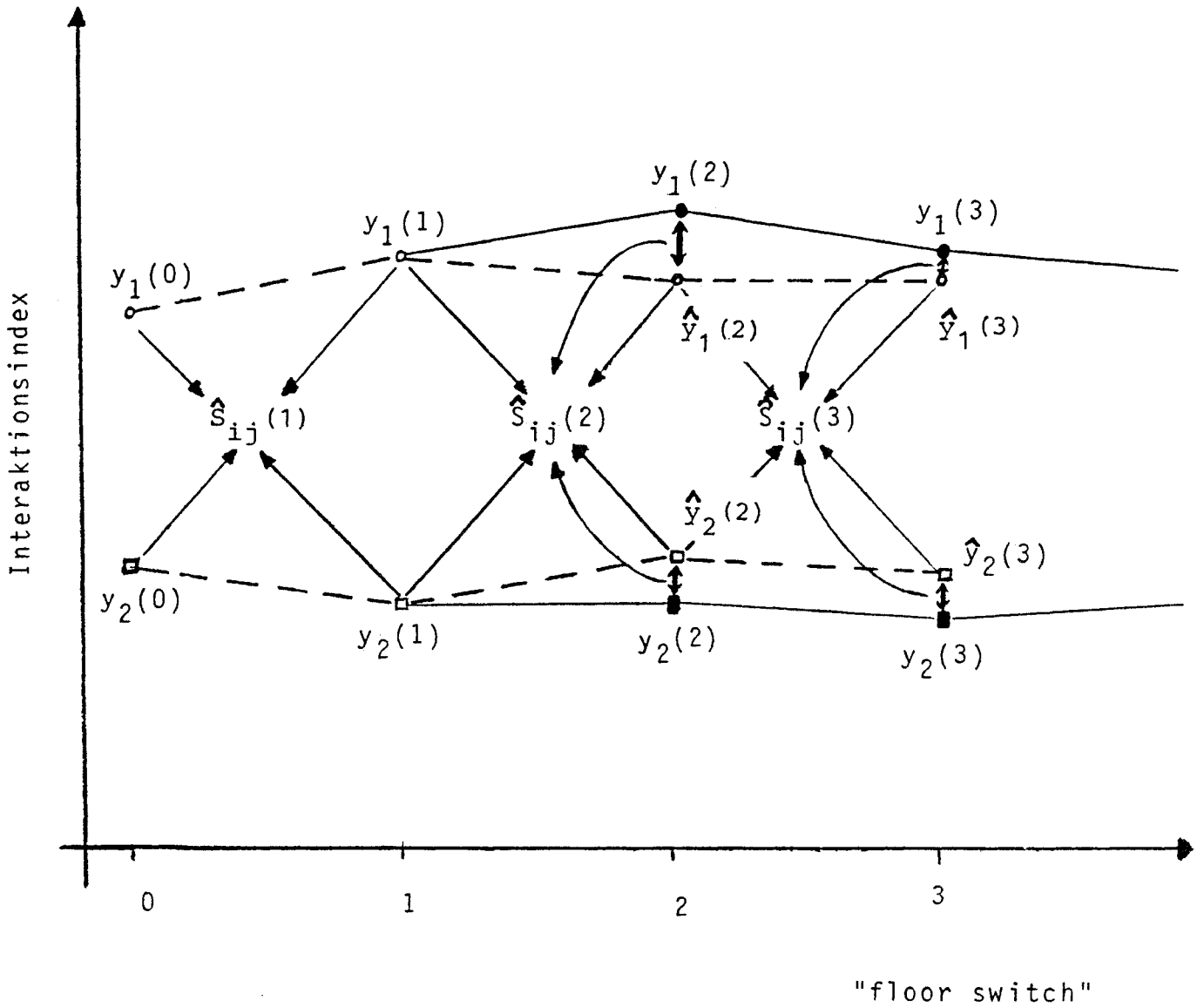


Abbildung 4.9: Schematisch vereinfacht dargestellter Ablauf des dynamischen Schätzverfahrens.

Ausgehend von einer Anfangsschätzung $S_{ij}(1)$ der Parameter aus den Datenpaaren $(y_1(0), y_2(0))$ und $(y_1(1), y_2(1))$ wird eine erste Extrapolation zum nächsten "floor switch" vorgenommen.

Die für diesen nächsten "floor switch" erhobenen Daten $(y_1(2), y_2(2))$, die Abweichung der Extrapolation von diesen Beobachtungen und das letzte Beobachtungspaar werden für die nächste Schätzung der Parameter $S_{ij}(2)$ herangezogen.

Mit diesen Parametern wird wieder zum nächsten "floor switch" extrapoliert und es werden wieder die entsprechenden Schritte zur Bestimmung des nächsten Parametersatzes durchgeführt.

Methodisch wird eine solche Vorgehensweise durch den Einsatz der im Kapitel II beschriebenen rekursiven Filteralgorithmen ermöglicht.

Es sollen im folgenden entsprechend Abschnitt (II.5) die wichtigsten Schritte für den hier betrachteten Anwendungsfall angegeben werden.

Zunächst müssen die Modellgleichungen (IV.9a,b) in die Form eines linearen Strukturmodells gebracht werden.

Hierzu werden die Parameter $S_{ij}(k)$, d_1 , d_2 zu einem Zustandsvektor $\underline{x}(k)$ der Interaktion zusammengefaßt, die Gleichungen (IV.9a,b) ungeordnet und im Meßmodell (IV.11) angeschrieben:

Meßmodell:

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(k) & y_2(k) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1(k) & y_2(k) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11}(k) \\ s_{12}(k) \\ s_{21}(k) \\ s_{22}(k) \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\underline{y}(k+1) = \underline{C}(k) \underline{x}(k) + \underline{w}(k) \quad (\text{IV.12})$$

In einer zusätzlichen Gleichung wird im Prozeßmodell (IV.13) festgeschrieben, daß der Parametervektor \underline{x} bis auf stochastische Beiträge \underline{v} unverändert bleiben soll.

Prozeßmodell:

$$\begin{bmatrix} s_{11}(k+1) \\ s_{12}(k+1) \\ s_{21}(k+1) \\ s_{22}(k+1) \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}(k) \\ s_{12}(k) \\ s_{21}(k) \\ s_{22}(k) \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ v_3(k) \\ v_4(k) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

oder abgekürzt:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + \underline{v}(k) \quad (\text{IV.14})$$

Die Gleichungen (IV.11) und (IV.13) nehmen damit die Form des Meßmodells beziehungsweise Prozeßmodells eines linearen Strukturmodells an, wobei allerdings zu beachten ist, daß im vorliegenden Fall die Koeffizientenmatrix C des Meßmodells zeitabhängig angesetzt ist.

Beginnt man bei der rekursiven Schätzung des Parametervektors x zum Beispiel mit den Parametern des stationären Modells (IV.1a,b) als Anfangswerte, so müssen für jeden "floor switch" die folgenden Rekursionsschritte durchgeführt werden:

Rekursive Schätzung des Zustandsvektors x der Interaktion
in vier Schritten

1. Extrapolation vom vorliegenden Beobachtungsintervall
zum nächsten Beobachtungsintervall

$$\underline{x}^*(k+1) = \hat{\underline{x}}(k) \quad (\text{IV.15})$$

und Berechnung der Kovarianzmatrix des Extrapolations-
fehlers

$$\begin{aligned} \underline{P}^*(k+1) &= E \{ (\underline{x}^*(k+1) - \underline{x}(k+1)) (\underline{x}^*(k+1) - \underline{x}(k+1))^T \} = \\ &= \underline{\tilde{P}}(k) + \underline{Q}(k) \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

\underline{Q} = Kovarianzmatrix des Prozeßfehlers

2. Berechnung einer Korrekturmatrix zur Verbesserung der
Extrapolation unter Ausnutzung des Extrapolationsfeh-
lers

$$\begin{aligned} \underline{K}(k+1) &= \underline{P}^*(k+1) \underline{C}^T(k+1) \left[\underline{C}(k+1) \underline{P}^*(k+1) \underline{C}^T(k+1) + \right. \\ &\quad \left. + \underline{R}(k+1) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

\underline{R} = Kovarianzmatrix der Meßfehler

3. Berechnung des korrigierten Schätzwertes für den
Parametervektor

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{x}^*(k+1) + \underline{K}(k+1) \left[\underline{y}(k+1) - \underline{C}(k+1) \underline{x}^*(k+1) \right] \quad (\text{IV.18})$$

4. Berechnung der Kovarianzmatrix des neuen Schätzfehlers als Voraussetzung für den nächsten Rekursionsschritt

$$\tilde{\underline{P}}(k+1) = \underline{P}^*(k+1) - \underline{K}(k+1) \underline{C}(k+1) \underline{P}^*(k+1) \quad (\text{IV.19})$$

Eine Datensimulation erhält man nun ähnlich wie im stationären Fall durch wiederholte Anwendung der geschätzten Parametermatrix $\hat{\underline{S}}$ auf den Startvektor der Daten für das erste Beobachtungsintervall, nur nehmen nun die Elemente des Parametervektors für jeden "floor switch" unterschiedliche Werte an.

Die Gleichung für die simulierten Datenverläufe $\hat{\underline{y}}(k) = (\hat{\underline{y}}_1(k), \hat{\underline{y}}_2(k))$ bei zeitabhängigen Modellparametern S_{ij} lautet somit:

$$\hat{\underline{y}}(k) = \prod_{j=0}^k \hat{\underline{S}}(j) \underline{y}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{i=0}^j \hat{\underline{S}}(k-i) \hat{\underline{d}} + \hat{\underline{d}} \quad (\text{IV.20})$$

Sowohl Meß- als auch Prozeßfehler werden im Rekursionsablauf durch ihre Kovarianzmatrizen spezifiziert. Die Güte der Anpassung (gemessen zum Beispiel durch die Gesamtvarianz aller Abweichungen) der simulierten Daten an die Meßwerte läßt sich durch die konkrete Belegung der beiden Fehlerkovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{Q} beeinflussen.

Da bei GOTTMAN, MARKMAN & NOTARIUS (1977) keine Meßfehler angegeben werden und auch die Wahl der Prozeßfehler keiner konkreten Vorschrift unterliegt, können die Fehlerkovarianzmatrizen im vorliegenden Beispiel frei gewählt werden.

Zunächst sollen lediglich Meßfehler, jedoch keine Prozeßfehler zugelassen werden. Die Fehlerkovarianzmatrix \underline{Q} der Prozeßfehler wird daher identisch $\underline{0}$ gesetzt. Aufgrund einer Abschätzung der Größe der Spikes in den Datenverläufen wird die Standardabweichung der Meßfehler auf eine Skaleneinheit geschätzt; zusätzlich wird angenommen, die Meßfehler für beide Interaktionsverläufe seien unkorreliert, so daß für die Kovarianzmatrix \underline{R} der Meßfehler die Einheitsmatrix angesetzt werden kann:

$$\underline{R}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{für } k = 0, \dots, 140; \quad \underline{Q}(k) = \underline{0}$$

(IV.21)

Mit diesem Ansatz für die Fehlerkovarianzmatrizen liefern der rekursive Algorithmus (IV.15) - (IV.19) und die Anwendung der Gleichung (IV.20) die in Abbildung 4.10 dargestellten Simulationsverläufe für y_1 und y_2 .

Man erkennt, daß die Struktur der Datenverläufe besser wiedergegeben wird als durch das stationäre Modell (vgl. Abbildung 4.4), was besonders im durch * gekennzeichneten Bereich der den rekursiv geschätzten Simulationsverläufen zugehörigen Trajektorie (Abbildung 4.11) deutlich wird. Betrachtet man jedoch die Verläufe der Abweichungen der Simulationskurven von den Daten (Abbildung 4.12), so erkennt man, daß sich keine wesentliche Verbesserung der rekursiven Simulation gegenüber der stationären Simulation ergeben hat.

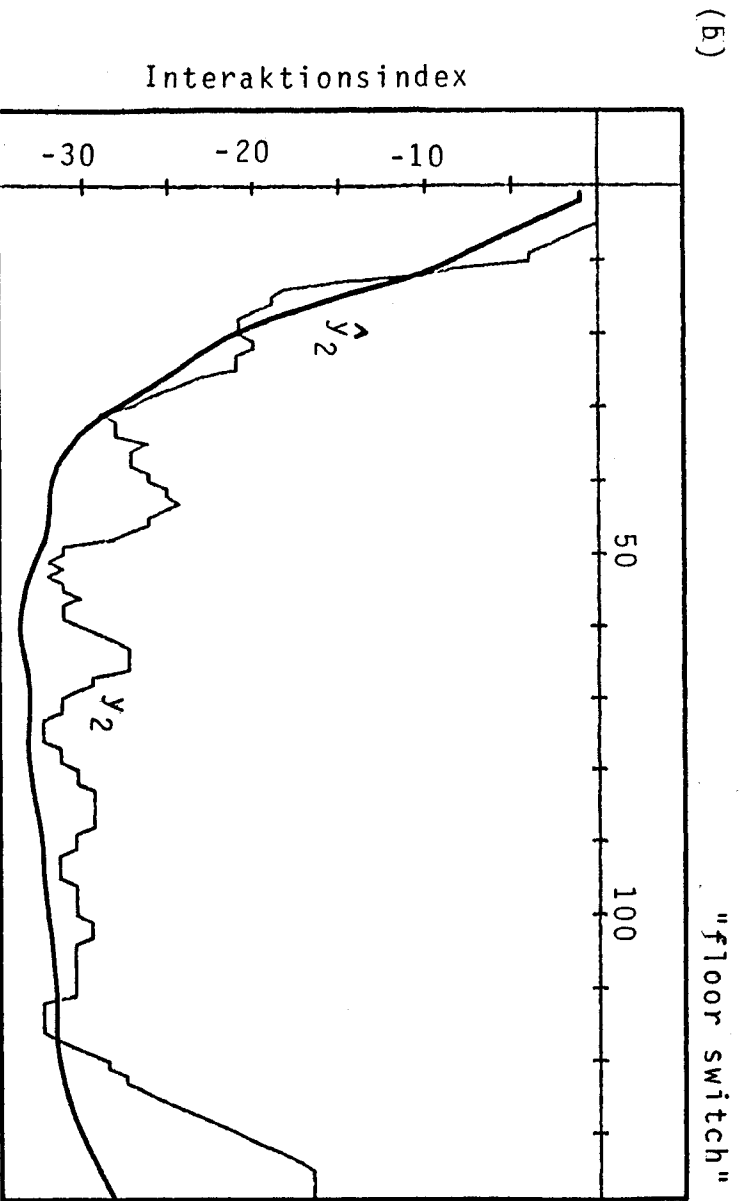
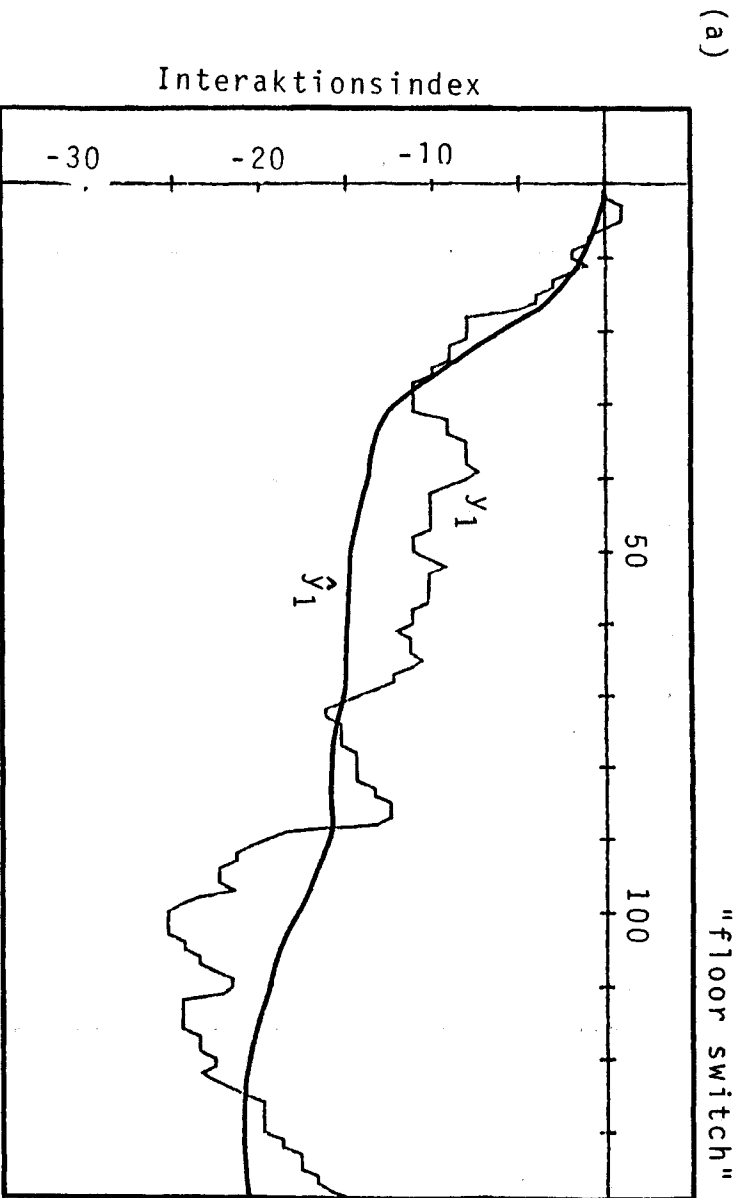


Abbildung 4.10: Simulierte Datenverläufe für Ehefrau (a) und Ehemann (b) bei zeitabhängigen Modellparametern - unter Berücksichtigung von Meßfehlern, jedoch ohne Berücksichtigung von Prozeßfehlern.

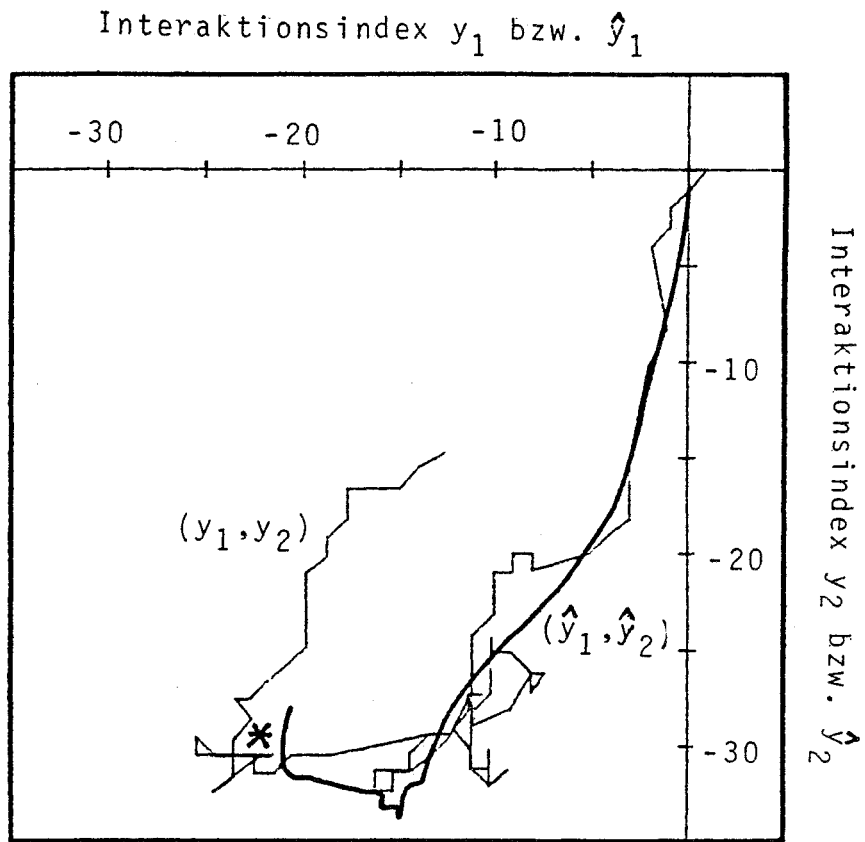
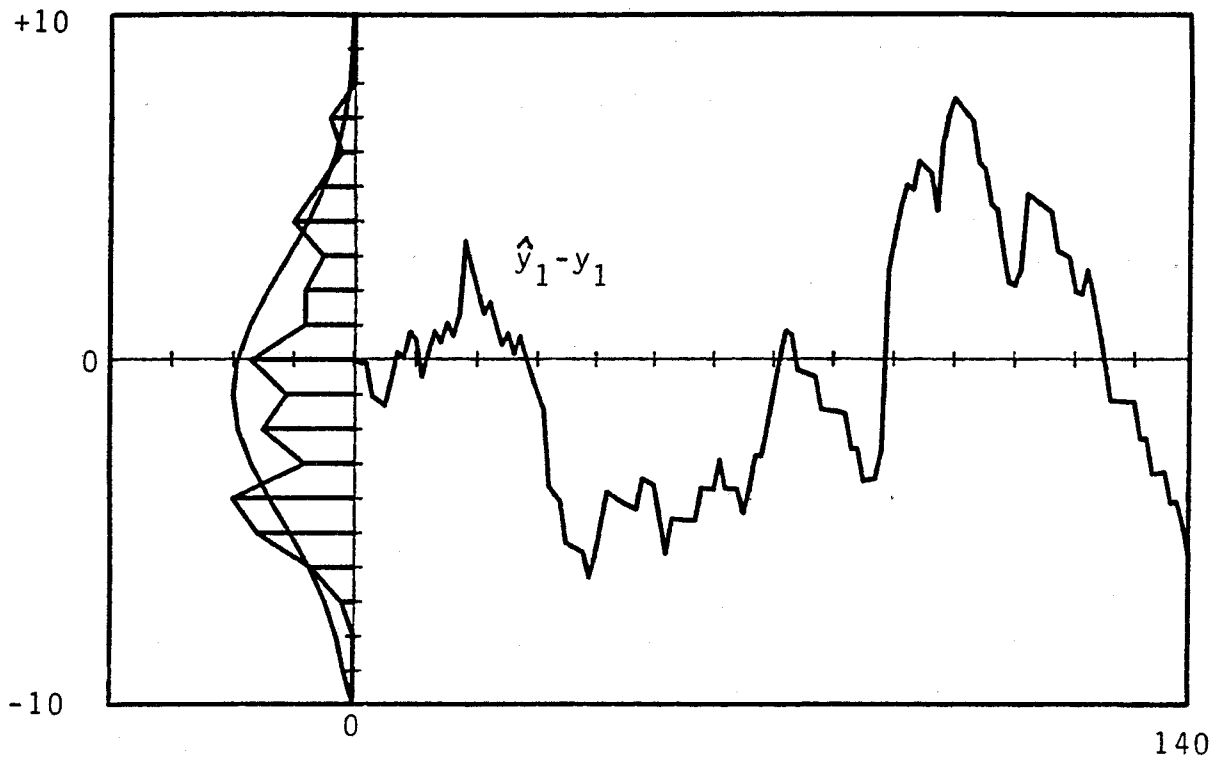


Abbildung 4.11: Trajektorie der rekursiven Simulation mit reinen Meßfehlern, d.h. ohne Prozeßfehler.

(a)



(b)

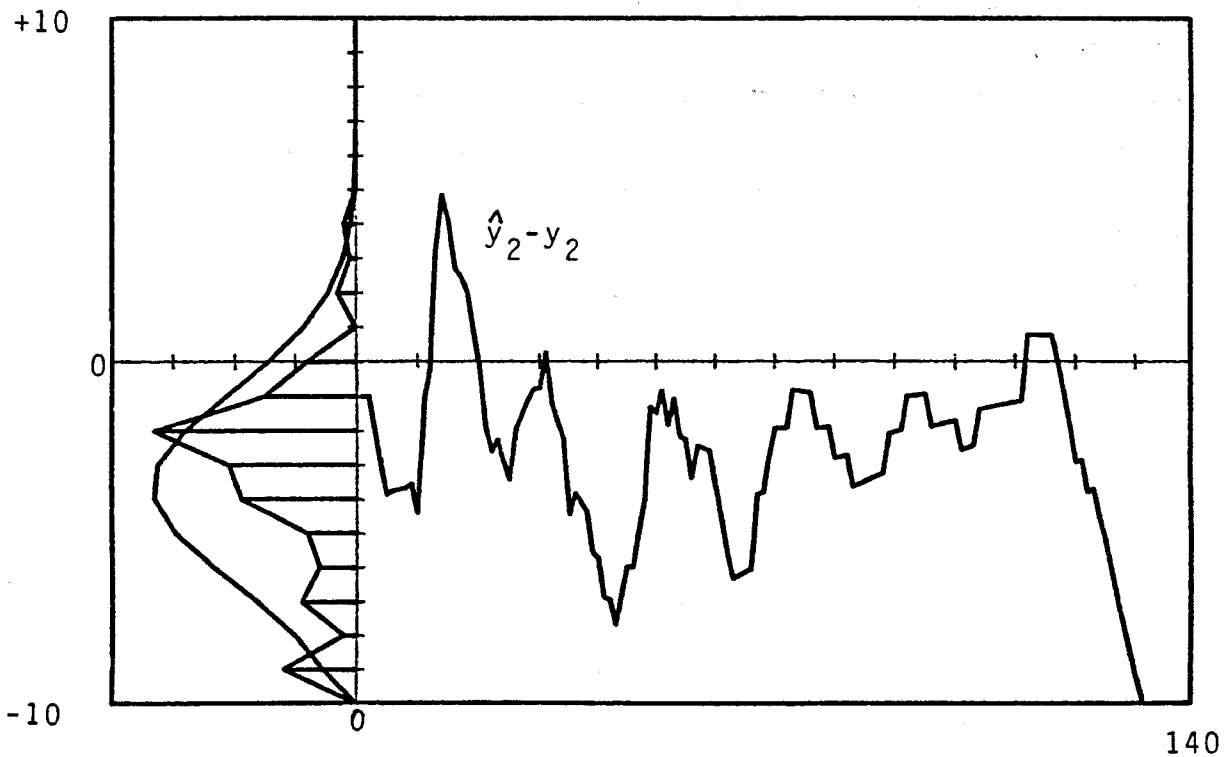
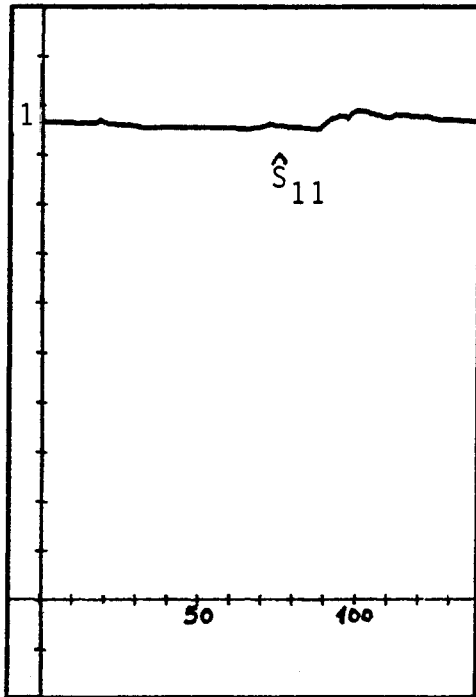
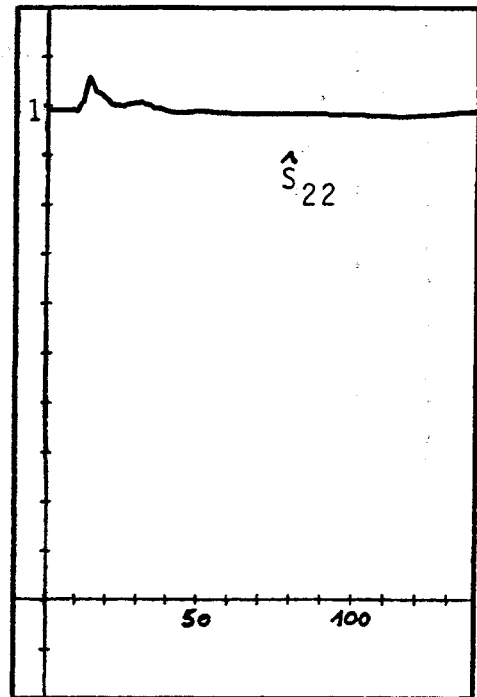


Abbildung 4.12: Abweichungsverläufe der unter Berücksichtigung reiner Meßfehler rekursiv simulierten Daten von den Originaldaten und ihre Häufigkeitsverteilungen (a) für die Ehefrau, (b) für den Ehemann.

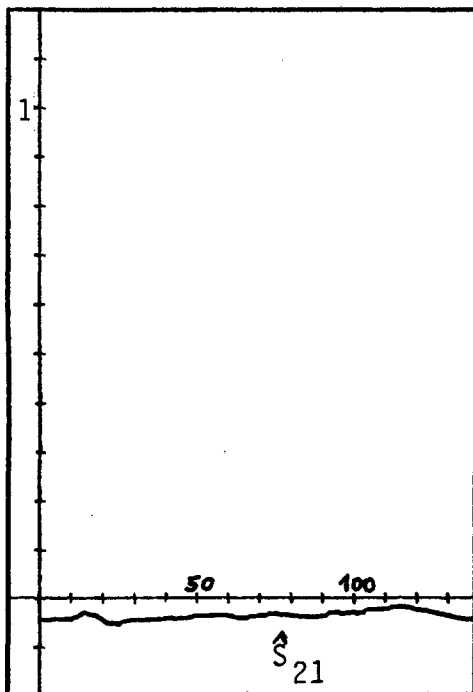
(a)



(b)



(c)



(d)

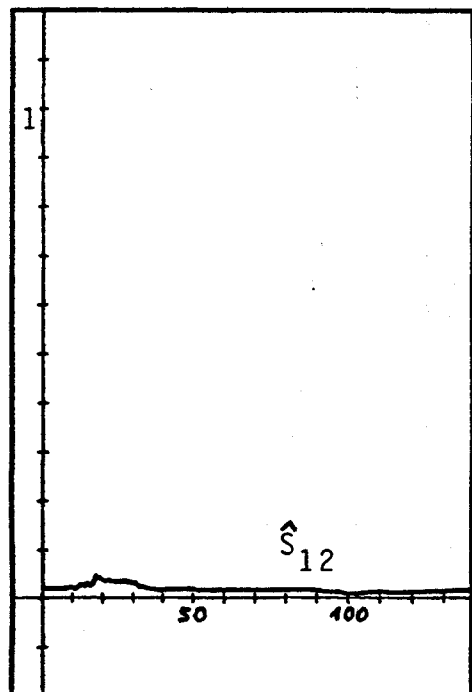
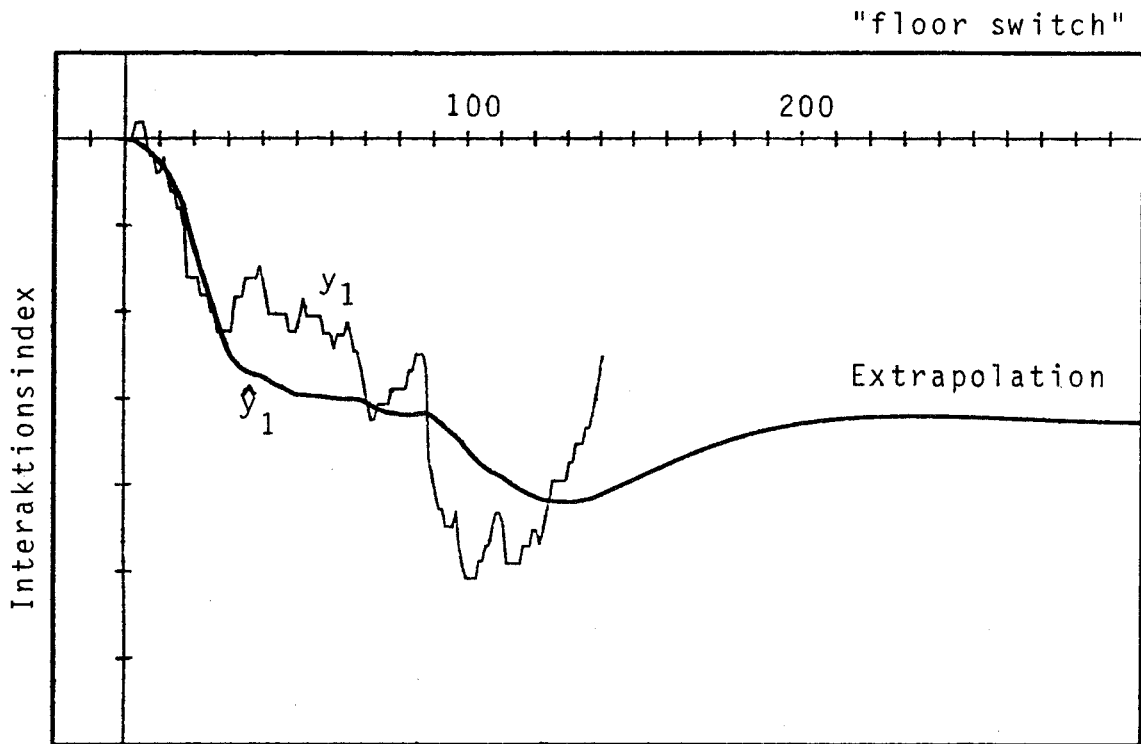


Abbildung 4.13: Rekursiv geschätzte Parameterverläufe des Modells mit reinen Meßfehlern.

(a)



(b)

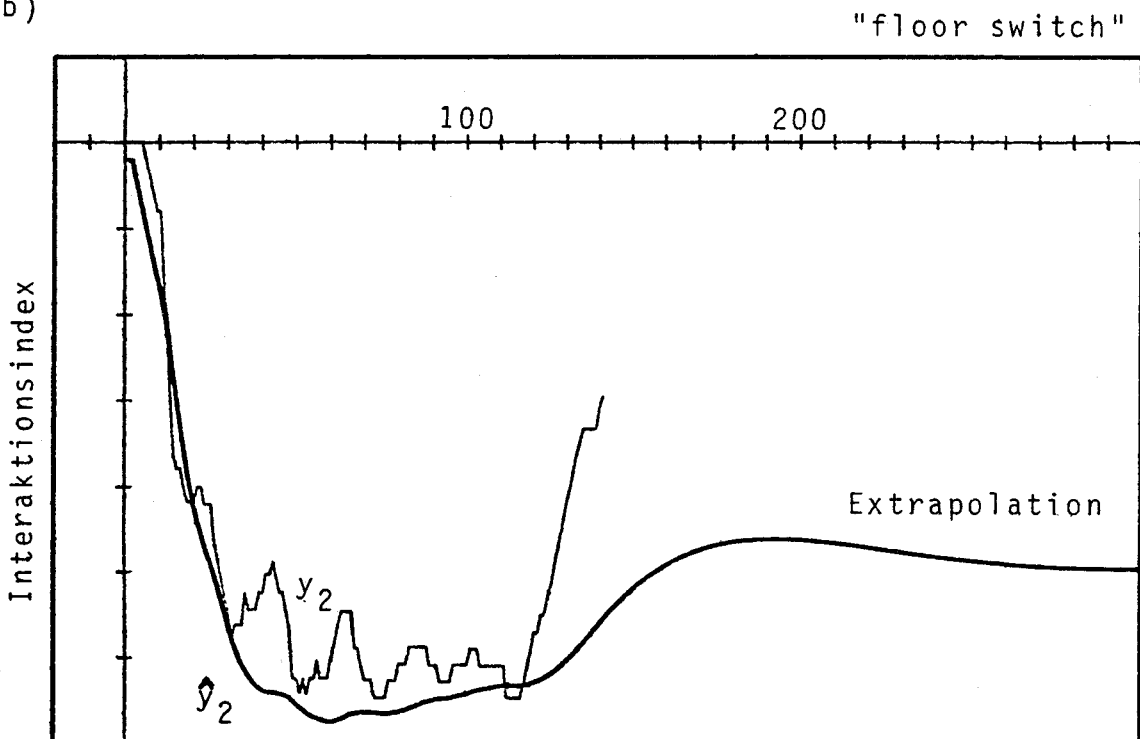


Abbildung 4.14: Extrapolation der rekursiven Simulation des Modells mit reinen Meßfehlern auf 300 "floor switches" (a) für die Ehefrau, (b) für den Ehemann.

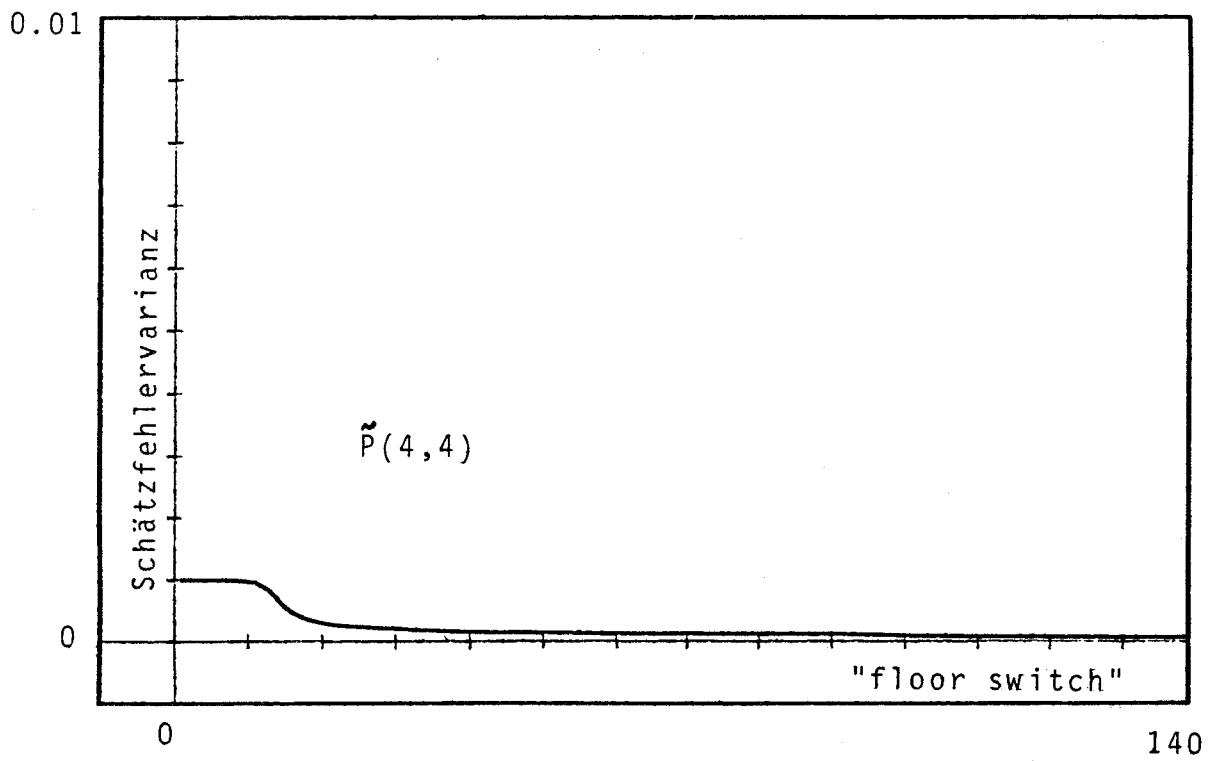
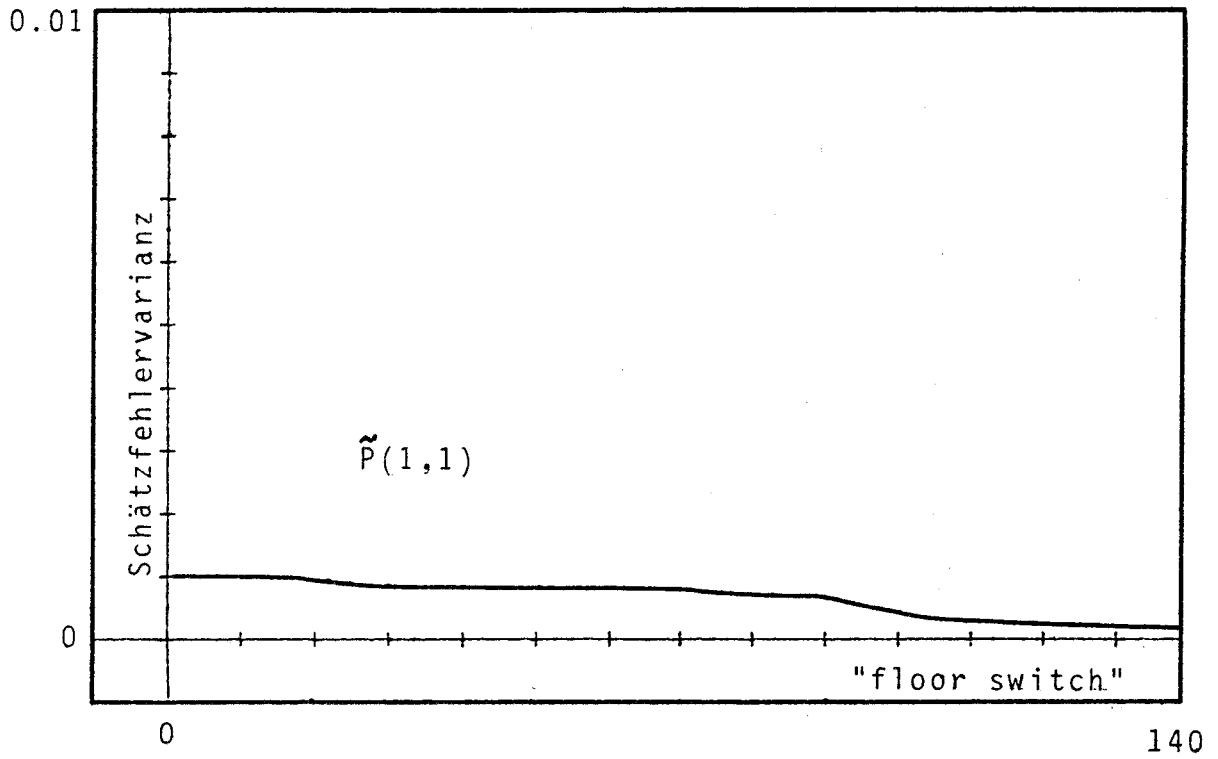


Abbildung 4.15: Schätzfehlervarianzen der rekursiven Simulation mit reinen Meßfehlern.

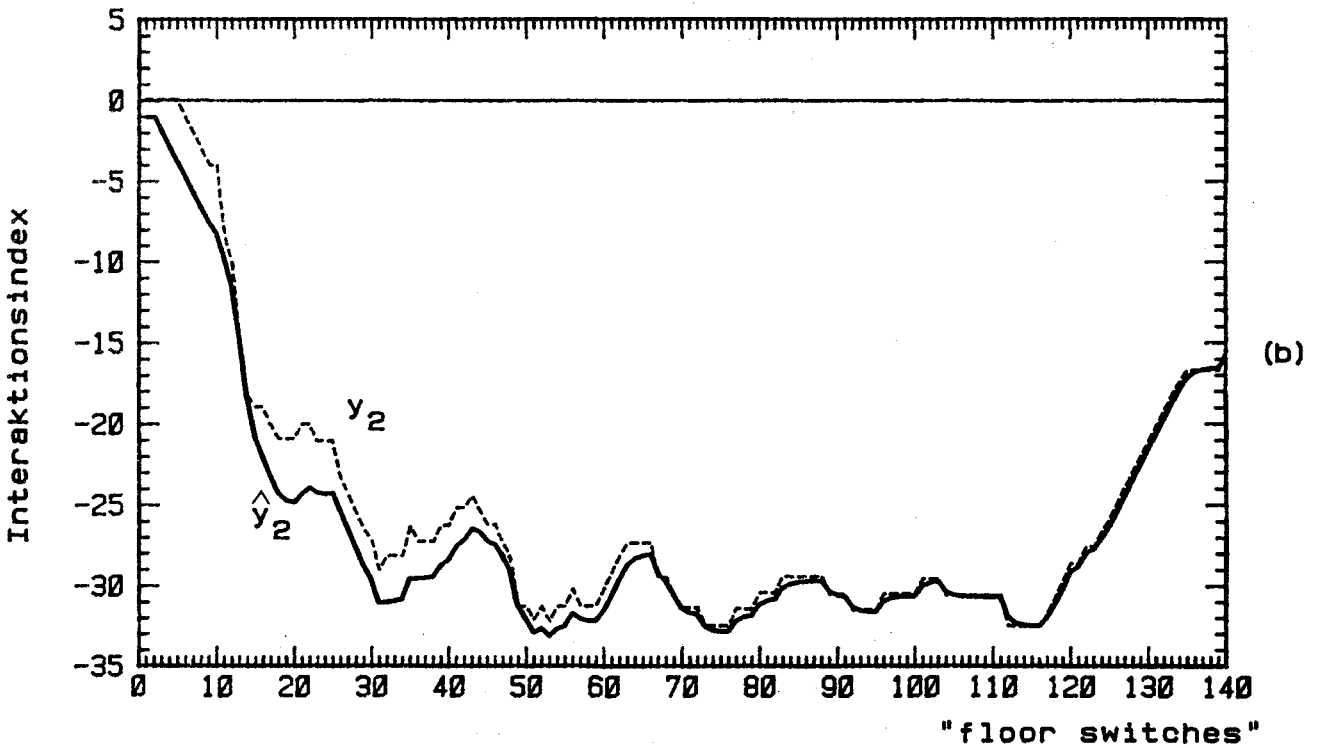
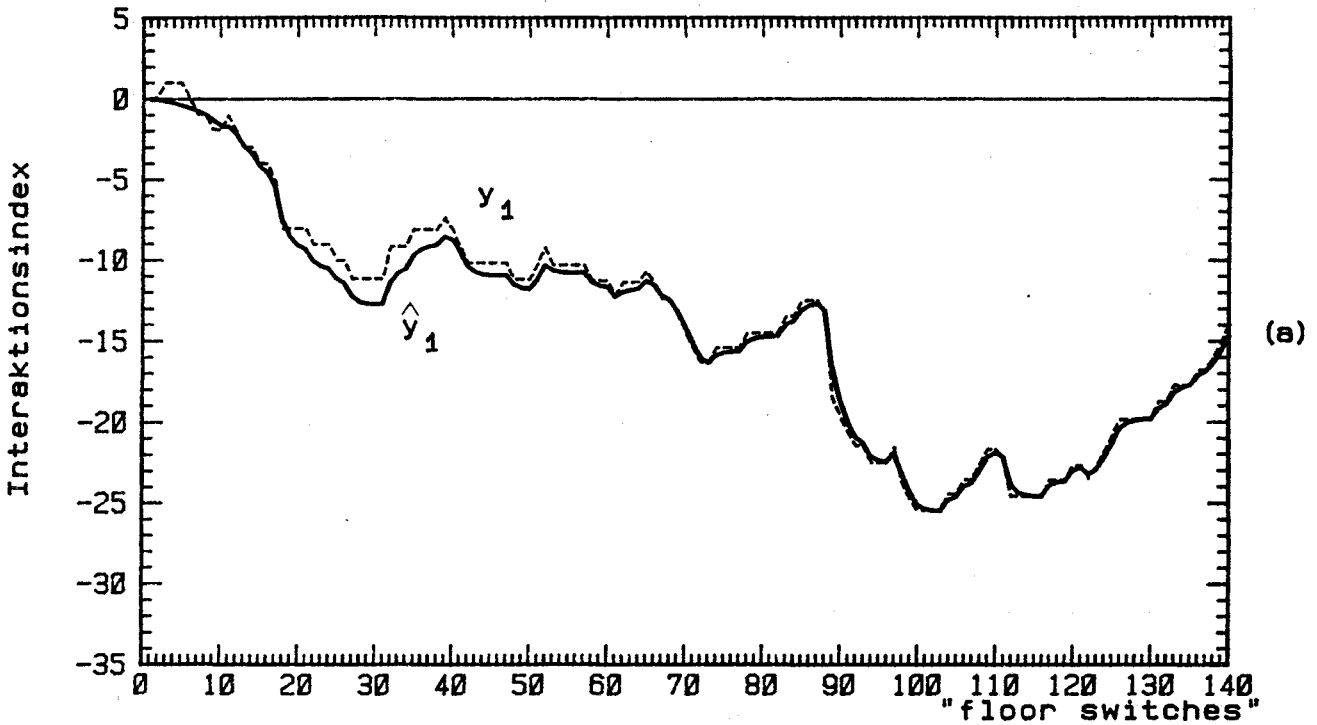


Abbildung 4.16: Simulation der Verläufe der Interaktionsindizes mit rekursiv geschätzten Interaktionsparametern
(a) für die Ehefrau
(b) für den Ehemann



Aus den Verläufen der Simulationsabweichungen in Abbildung 4.17 erkennt man, daß ein leichter systematischer Fehler noch im ersten Drittel der Simulation für y_2 vorliegt, der vermutlich auf einen Schätzfehler im Startwert für S_{22} zurückzuführen ist. Bei Abweichungsmittelwerten von $M_{ab}(y_1) = - .34$ bzw. $M_{ab}(y_2) = - 1.09$ betragen die Gesamtvarianzen für die Abweichungen $\sigma_{ges}^2(y_1) = 0.350$ und $\sigma_{ges}^2(y_2) = 1.496$, was gegenüber der Schätzung ohne Prozeßfehler eine Verbesserung um eine Größenordnung bedeutet.

Insbesondere wird der starke Anstieg der Interaktionsindizes gegen Ende des Beobachtungsintervalls sehr gut wiedergegeben, was sich auch auf den asymptotischen Wert bei Extrapolation über den Beobachtungszeitraum hinaus auswirkt. Die Extrapolation bis zu 300 "floor switches" zeigt Abbildung 4.18; hier werden asymptotische Werte von $- 7.734$ für y_1 bzw. $- 10.035$ für y_2 erreicht.

Die geschätzten Parameterverläufe \hat{S}_{ij} sind in Abbildung 4.19 aufgetragen. Die konstanten Beiträge \hat{d}_1 und \hat{d}_2 wurden hier nicht zusätzlich eingetragen; sie wurden der stationären Schätzung entnommen:

$$\begin{aligned} \hat{d}_1 &= - 0.0926 \\ \hat{d}_2 &= - 0.9818 \end{aligned} \qquad \text{(IV.24)}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß für beide Partner eine negative Grundtendenz miteinander zu interagieren vorliegt, die beim Ehemann wesentlich stärker ausgeprägt ist als bei der Ehefrau.

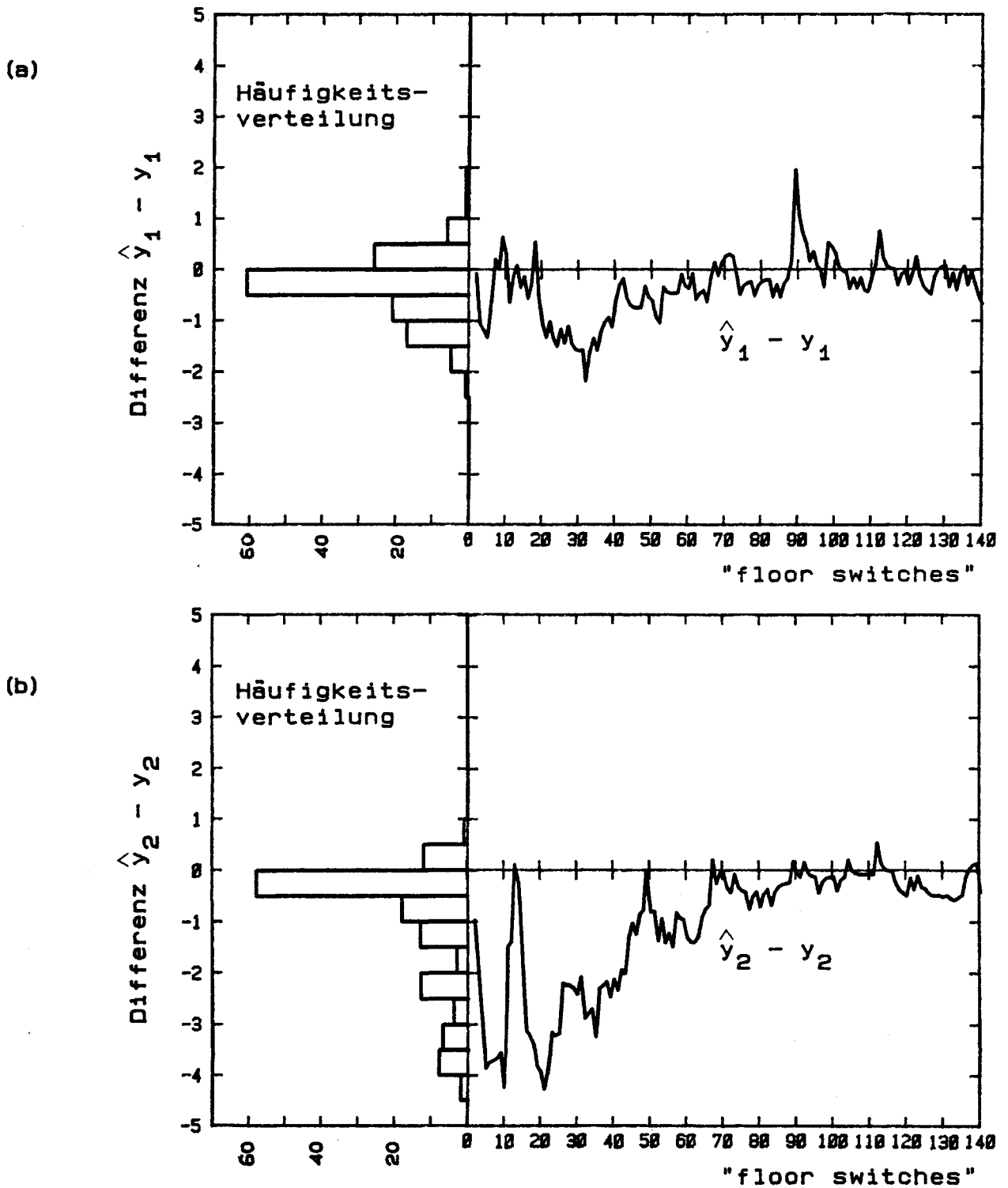
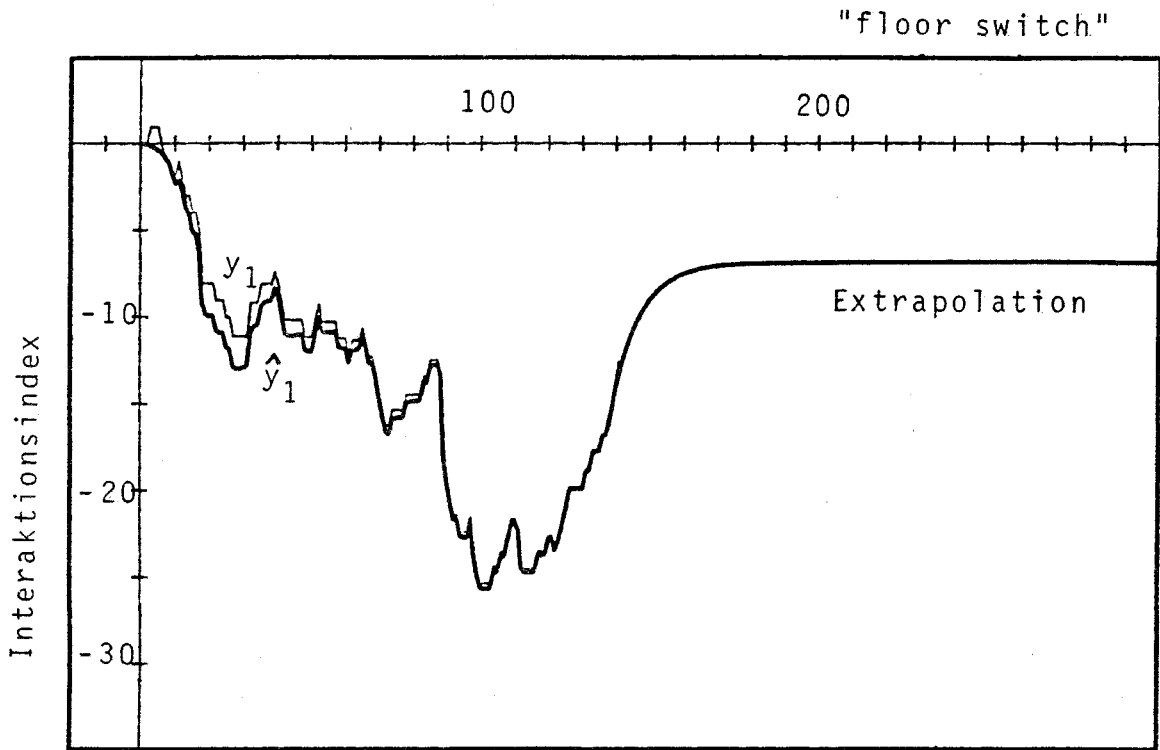


Abbildung 4.17: Abweichungsverläufe der rekursiven Modell-simulation von den Originaldaten und ihre Häufigkeitsverteilungen
(a) für die Ehefrau
(b) für den Ehemann

(a)



(b)

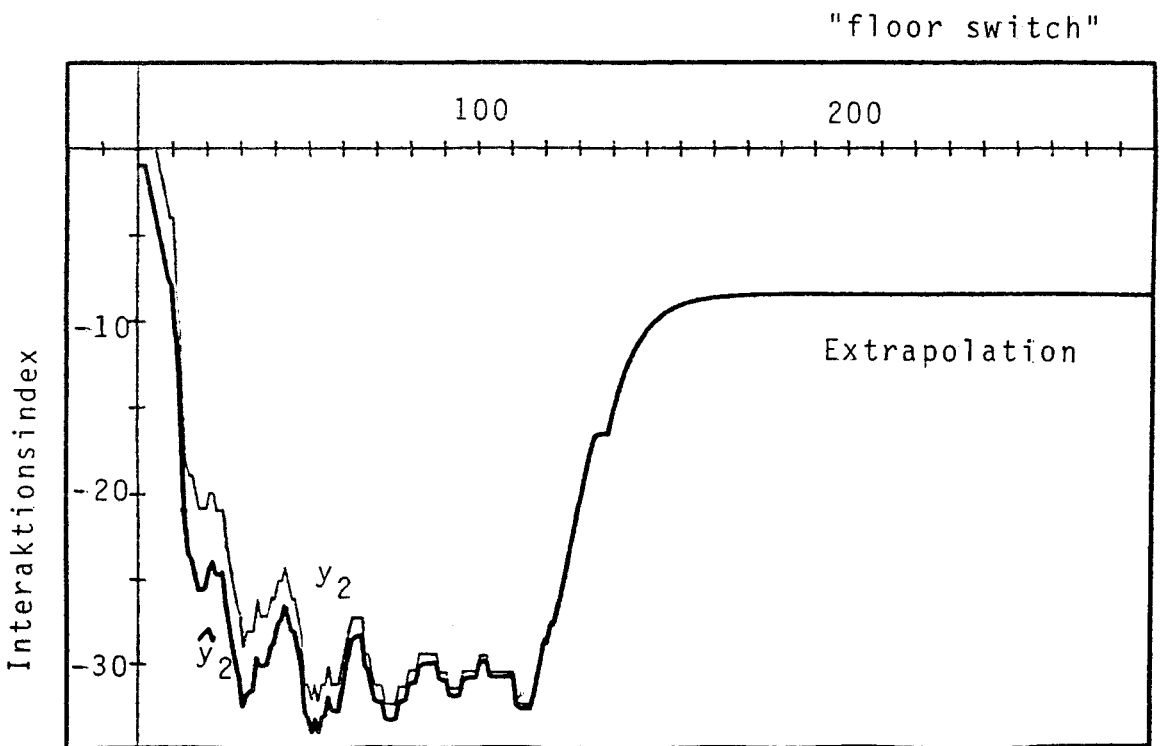


Abbildung 4.18: Extrapolation der vollen stochastischen Modellsimulation auf 300 "floor switches"

(a) für die Ehefrau, (b) für den Ehemann.

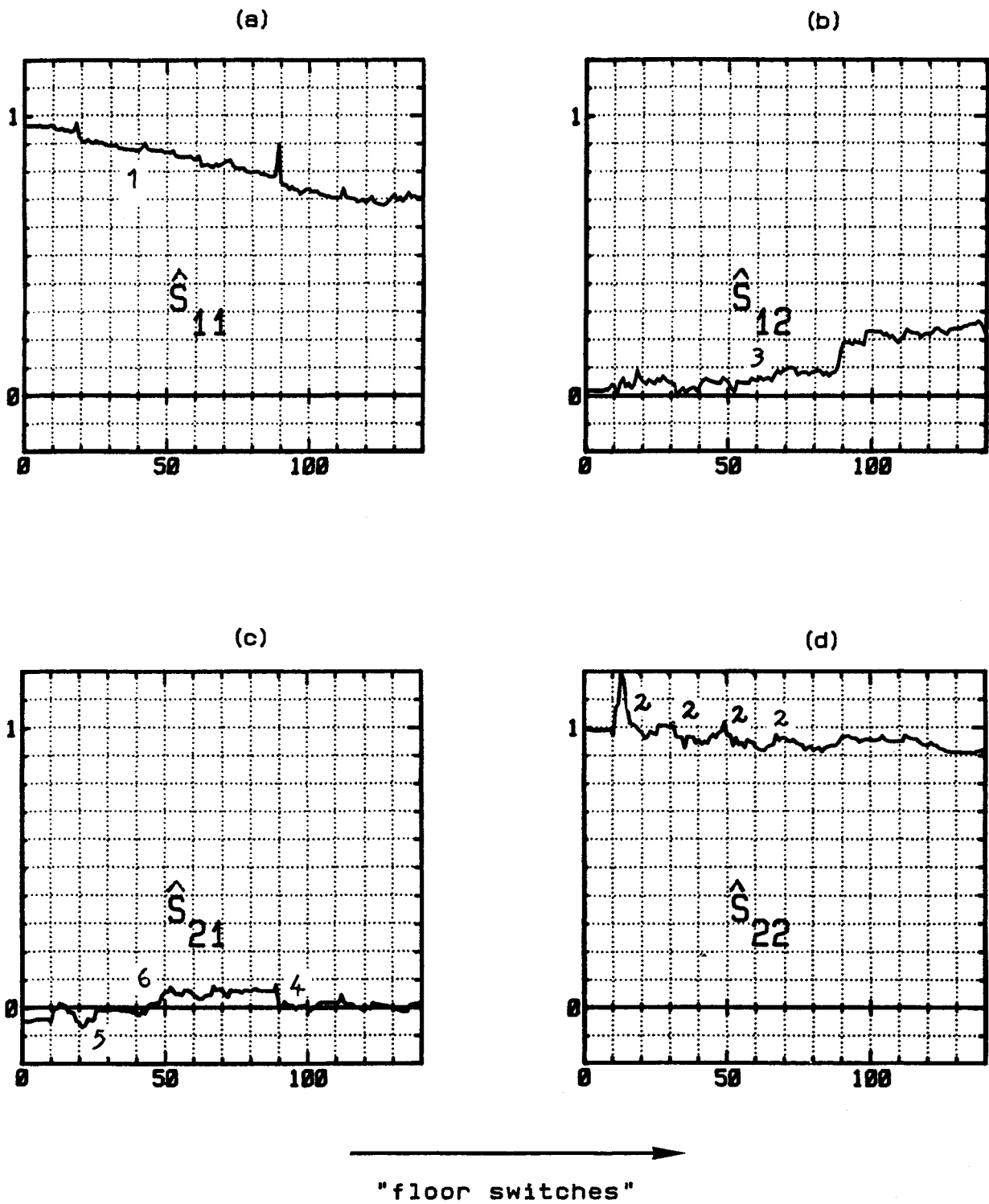


Abbildung 4.19: Verläufe der rekursiv geschätzten Interaktionsparameter

Die Parameter \dot{S}_{11} und \dot{S}_{22} in Abbildung 4.19 beschreiben das Gewicht, mit dem das eigene Vorverhalten auf das aktuell gezeigte Interaktionsverhalten eingeht; sie sind daher als autoregressive Parameter zu verstehen. Die eigentlichen Wechselwirkungsterme werden dagegen durch \dot{S}_{12} beziehungsweise S_{21} angegeben.

Die Dynamik der Interaktion, das heißt die zeitlich wechselnde Gewichtung, mit der das eigene Verhalten oder das Partnerverhalten die neuen Interaktionswerte beeinflussen, kann nun am Verlauf der Parameterkurven abgelesen werden. Im folgenden sollen daher die prägnantesten Merkmale in der Zeitabhängigkeit der Modellparameter hervorgehoben werden.

Da die autoregressiven Parameter S_{11} und S_{22} wesentlich größer als die Wechselwirkungsterme sind, liegt der Schluß nahe, daß beide Interaktionsverläufe hauptsächlich autoregressiv bestimmt sind. Vernachlässigt man jedoch die Wechselwirkungsterme in der Simulation, d.h. setzt man

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(k) &= \prod_{j=0}^k \dot{S}_{11}(j) y_1(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{i=0}^j \dot{S}_{11}(k-i) \hat{d}_1 + \hat{d}_1 \\ \dot{y}_2(k) &= \prod_{j=0}^k \dot{S}_{22}(j) y_2(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{i=0}^j \dot{S}_{22}(k-i) \hat{d}_2 + \hat{d}_2 \end{aligned} \tag{IV.25}$$

so zeigt Abbildung 4.20, daß dieser Schluß bestenfalls für das Interaktionsverhalten des Ehemannes zulässig ist. Der größte Teil der Variation im Interaktionsverhalten der Ehefrau wird in diesem Modell durch die Wechselwirkung mit dem Partner erklärt.

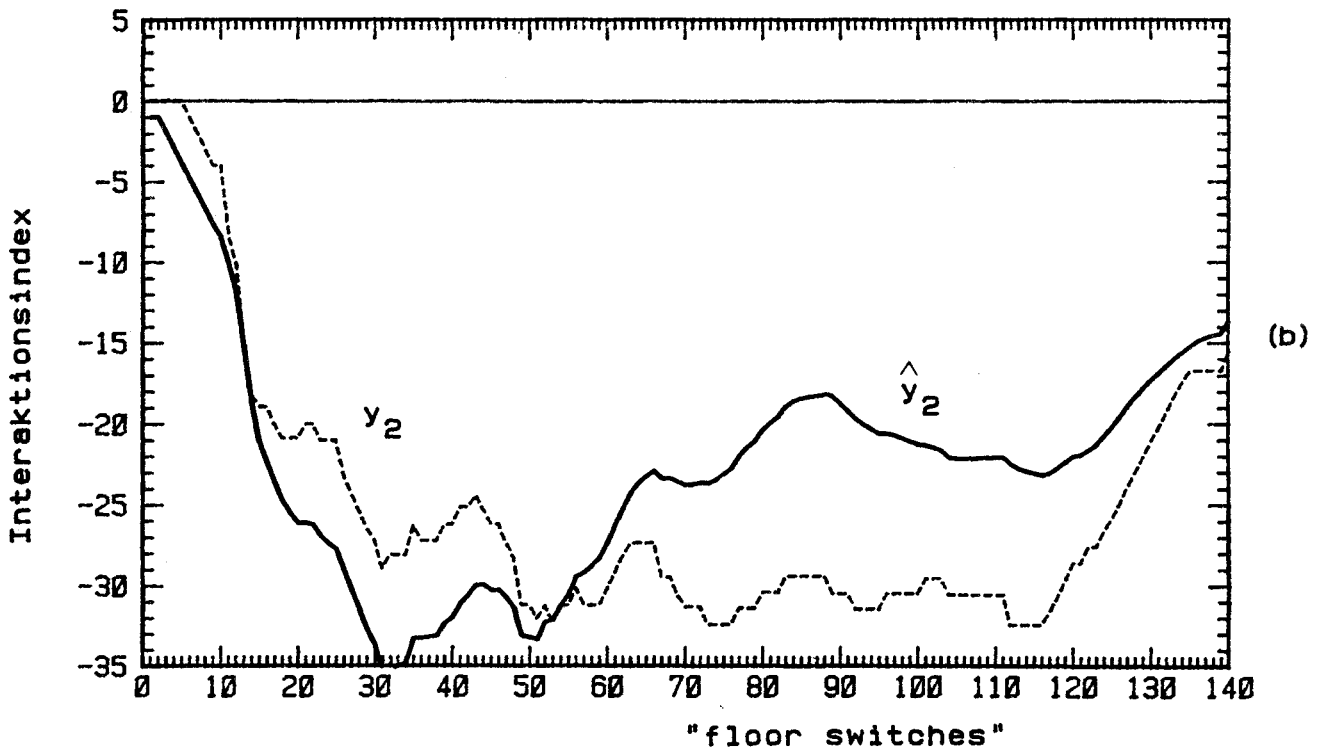
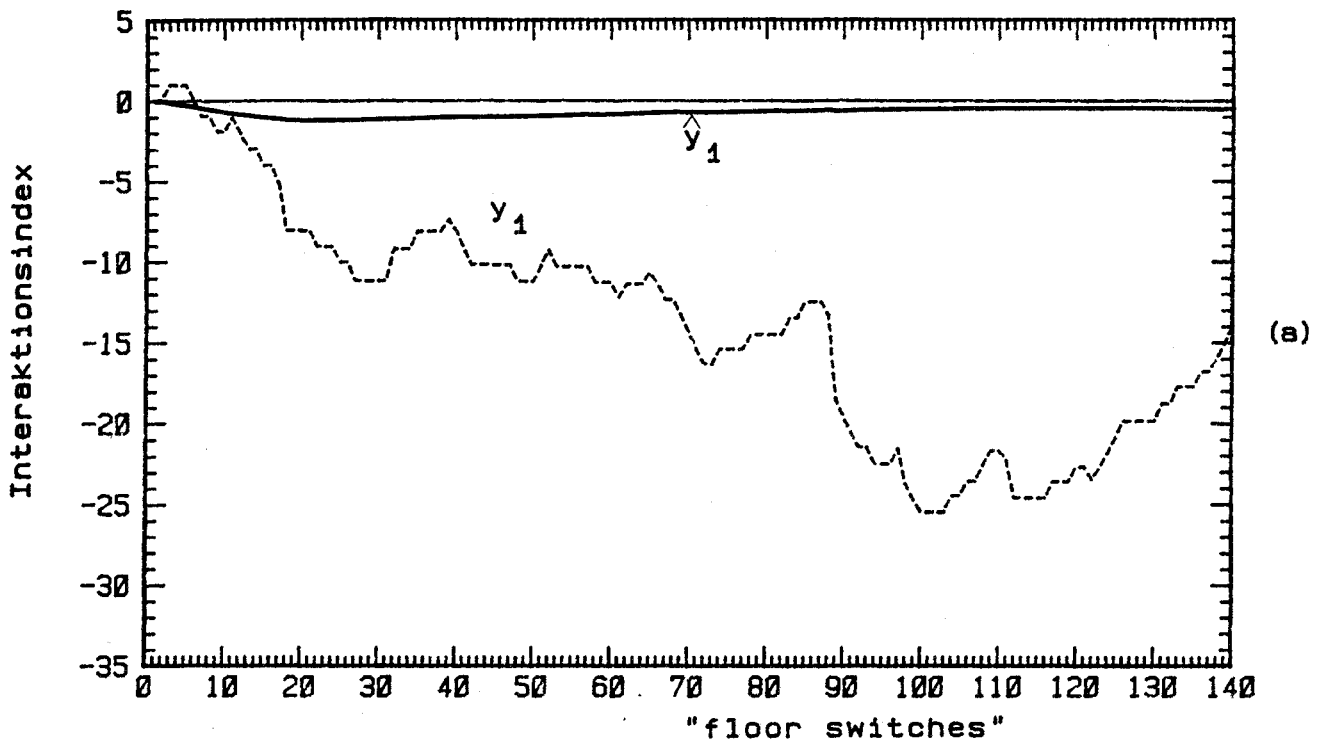


Abbildung 4.20: Rekursive Modellsimulation der Verläufe der Interaktionsindizes unter Vernachlässigung der Wechselwirkungsparameter S_{12} und S_{21}

- (a) für die Ehefrau
- (b) für den Ehemann

Der autoregressive Interaktionsparameter \hat{S}_{11} der Ehefrau (Abbildung 4.19a) fällt über das gesamte Beobachtungsintervall leicht ab. Für den Interaktionsindex y_1 der Ehefrau bedeutet dies, daß das eigene negative Interaktionsverhalten mit geringer werdendem Gewicht berücksichtigt wird, das heißt von Seiten der Frau liegt eine Tendenz zu positiverem Interaktionsverhalten vor.

Der autoregressive Parameter S_{22} des Ehemannes (Abbildung 4.19 d) fällt dagegen über das Beobachtungsintervall nicht ab, sondern zeichnet sich in der ersten Hälfte des Intervalls durch mehr oder weniger ausgeprägte, lokale Maxima aus (Abbildung 4.19d,2). Diese Maxima treten immer dort auf, wo der Interaktionsindex y_2 des Ehemannes stark negativ abfällt. Insgesamt ist \hat{S}_{22} fast überall kleiner als 1, so daß sich langfristig auch hier eine Tendenz zu positiverem Interaktionsverhalten abzeichnet. Insbesondere ist der starke Anstieg beider Interaktionsindizes am Ende des Beobachtungszeitraumes auf das autoregressive Verhalten des Mannes zurückzuführen (Abbildung 4.20).

Der Einfluß des Interaktionsverhaltens des Ehemannes auf das der Ehefrau nimmt bis zum "floor switch" 87 langsam zu (Abbildung 4.19b,3) und steigt anschließend sprunghaft an. Dies bewirkt einen starken Abfall im Interaktionsverlauf von y_1 bei "floor switch" 87. Gleichzeitig verliert das Interaktionsverhalten der Ehefrau seinen Einfluß auf das des Ehemannes (Abbildung 4.19c,4). Der negative Einbruch im Interaktionsindex y_1 der Frau bei "floor switch" 87 wird nicht durch den Spike im Verlauf von \hat{S}_{11} bei "floor switch" 87 bewirkt. Denn unterdrückt man diesen Spike in \hat{S}_{11} künstlich, so resultiert eine kaum veränderte Simulationskurve, wie Abbildung 4.21 zeigt. Am Verlauf

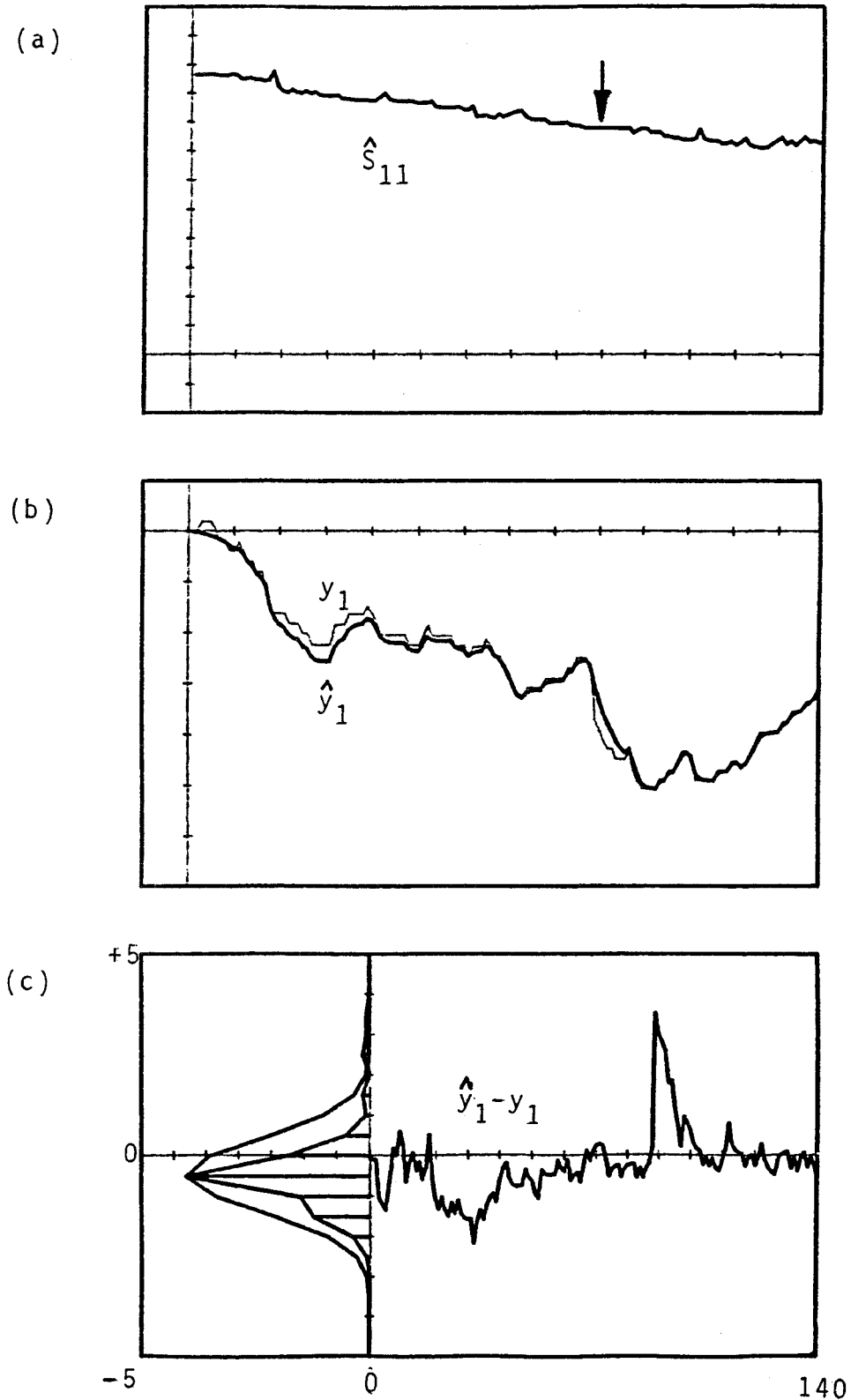


Abbildung 4.21:

- (a) Unterdrückung des Spikes im Verlauf von \hat{S}_{11}
- (b) Aus dem modifizierten Datenverlauf resultierende Datensimulation
- (c) Abweichungsverlauf der Simulationskurve von den Originaldaten bei geändertem Parameterverlauf.

der zugehörigen Abweichungskurve der Simulation ist zu erkennen, daß lediglich der Abfall im Interaktionsindex bei "floor switch" 87 weniger steil wiedergegeben wird.

Der Einfluß des Interaktionsverhaltens der Ehefrau auf das des Ehemannes ist im ersten Teil des Beobachtungsintervalls streckenweise negativ (Abbildung 4.19c,5), das heißt hier wirkt das Verhalten der Ehefrau hemmend auf den raschen Abfall im Interaktionsindex y_2 des Ehemannes. Dies wird besonders deutlich bei "floor switch" 22, wo \hat{S}_{21} ein lokales Minimum aufweist und gleichzeitig der starke Abfall in y_2 abgebremst wird (vgl. Abbildung 4.1). Von "floor switch" 43 bis zirka "floor switch" 87 (Abbildung 4.19c,6) verstärkt das Interaktionsverhalten der Ehefrau das negative Interaktionsverhalten des Ehemannes.

Insgesamt sind die Variationen in den Interaktionsparametern zwar relativ klein, jedoch können sie zu einem qualitativen Verständnis der Interaktionsdynamik herangezogen werden, wie die oben geführte Diskussion der Parameterverläufe zeigt.

Die Verträglichkeit der geschätzten Parameterverläufe mit der Annahme des Prozeßmodells, daß die Interaktionsbeiträge sich von Beobachtungszeitpunkt zu Beobachtungszeitpunkt nur durch stochastische Beiträge mit Varianzen von 0.001 ändern, kann wiederum durch die Elemente der Matrix \tilde{P} der Schätzfehler beurteilt werden.

Es gilt wieder (vgl. Anhang 3):

$$\begin{aligned} \tilde{P} (1,1) &= \tilde{P} (3,3) \\ \text{und } \tilde{P} (2,2) &= \tilde{P} (4,4), \end{aligned} \tag{IV.26}$$

daher sind in Abbildung 4.22 nur $\tilde{P} (1,1)$ und $\tilde{P} (4,4)$

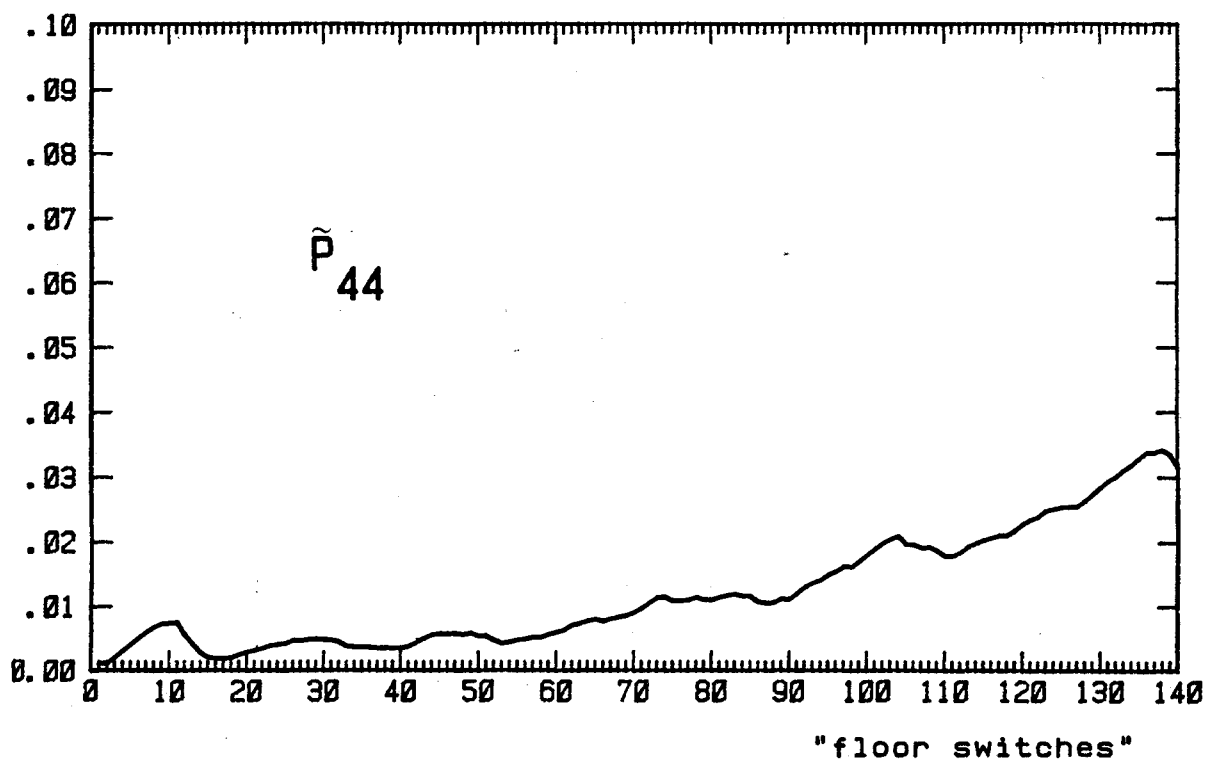
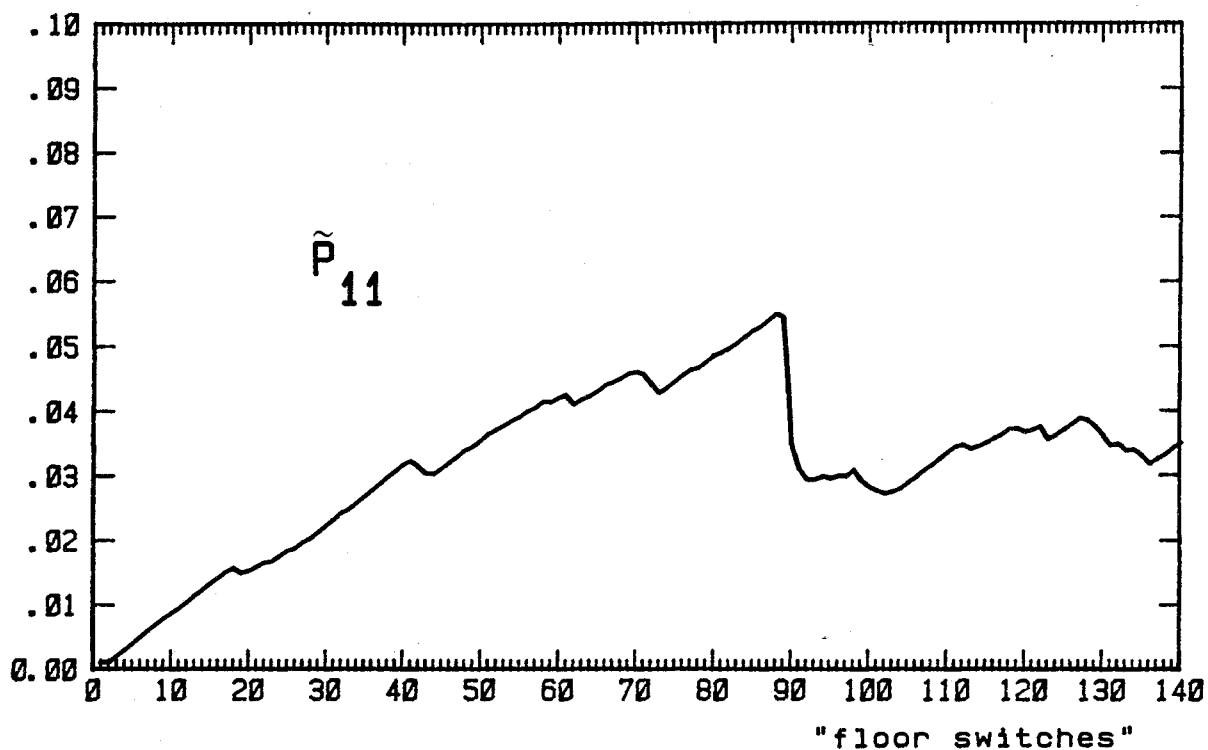


Abbildung 4.22: Schätzfehlervarianzen der rekursiven Modellsimulationen

aufgetragen. Da diese Matrixelemente bis zu einer Größe von 0.055 ansteigen, ist die Verträglichkeit der geschätzten Parameterverläufe mit dem Modellansatz nicht sehr groß. Da jedoch andererseits die Daten durch die Parameterverläufe sehr gut simuliert werden, bedeutet dies, daß der Interaktionsprozeß durch das Prozeßmodell nur ungenügend beschrieben wird; die Fehlanpassung des Prozeßmodells wird durch die Prozeßfehlervarianzen aufgefangen. Im nächsten Schritt müßte nun eine Prozeßmatrix geschätzt werden, die vermutlich zeitabhängig gewählt werden muß, wie der Verlauf von $\tilde{P}(1,1)$ im Bereich von "floor switch" 87 zeigt. Für eine Analyse der Interaktionsdynamik ist dieser Schritt allerdings nicht erforderlich; er wird erst dann notwendig, wenn zuverlässige Extrapolationen über das Beobachtungsintervall hinaus berechnet werden sollen. Die extrapolierten Simulationsverläufe in Abbildung 4.18 sind somit aufgrund der großen Extrapolationsfehlervarianzen nur grobe Schätzungen.

Aus kritischen Untersuchungen zur cross-lagged-correlation-Analyse ist bekannt, daß eine Kausalattribution für Modellparameter zum Zwecke von Interaktionsanalysen nur unter größten Vorbehalten denkbar ist (KENNY 1975; HUMPHREYS & PARSONS 1979). Diese Untersuchungen beziehen sich jedoch alle auf stationäre Modellansätze.

Obwohl mit dem hier diskutierten Beispiel nur ein erster Ansatz zur dyadischen Interaktionsanalyse vorgestellt wurde, scheint es, daß durch die dynamische Schätzung von Modellparametern ein Schritt in Richtung kausaler Wechselwirkungsanalyse getan werden kann.

Um hierzu nur ein Beispiel zu erwähnen, scheint in diesem Anwendungsfall speziell das deutliche Absinken des

Interaktionswertes der Frau im letzten Drittel des Gesprächsverlaufes durch den Einfluß des Ehemannes induziert worden zu sein, wie die Parameterverläufe von S_{12} und S_{21} deutlich zeigen. Ein solcher Schluß kann durch Interpretation der beobachteten Interaktionsverläufe ohne das Hilfsmittel der dynamischen Parameterschätzung nicht gezogen werden.

Um von dem hier rein qualitativ durchgeführten Vergleich der Verläufe der Modellparameter zu einer quantitativen Interaktionsanalyse zu gelangen, müssen weitere methodische Hilfsmittel herangezogen werden.

Prinzipiell geeignet für diesen weiteren methodischen Schritt sind die Untersuchungen von GOTTMAN & RINGLAND (1981), WAMPOLD & MARGOLIN (1982) und WAMPOLD (1984) zur Analyse von Dominanzstrukturen in sequentiellen Interaktionsdaten.

Jedoch wird in diesen Arbeiten ein globales Dominanzkriterium gesucht, das heißt ein Kriterium, welches die Dominanz eines Interaktionspartners über den anderen während des gesamten Beobachtungszeitraumes impliziert.

Wie das oben diskutierte Beispiel zeigt, liegt eine solche globale Dominanz allerdings nicht in allen Interaktionsverläufen vor. Vielmehr scheint es notwendig, lokale Dominanzkriterien abzuleiten, die die augenblickliche Struktur der Interaktion und damit auch deren Dynamik quantitativ beschreiben.

Zur Beantwortung der anfangs gestellten Frage nach möglichen kurzfristigen Verletzungen der asymptotischen Stabilität soll schließlich noch kurz das Stabilitätsverhalten des Wechselwirkungsprozesses über den gesamten Gesprächsverlauf diskutiert werden. Dieser Prozeß konnte bereits anhand des stationären Modells (IV.1a,b) als asymptotisch stabil diagnostiziert werden.

Ein rein formales Stabilitätskriterium liefert der Betrag der beiden komplex-konjugierten Eigenwerte der Parametermatrix \underline{S} . Der Interaktionsprozeß ist asymptotisch stabil, solange dieser Betrag kleiner als 1 ist.

Die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte λ der Parametermatrix \underline{S} lautet:

$$\det \begin{bmatrix} S_{11}(k) - \lambda & S_{12}(k) \\ S_{21}(k) & S_{22}(k) - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.27})$$

Dieses Kriterium ist streng genommen nur für den stationären Fall gültig und liefert dann - im zweidimensionalen Fall - zwei Eigenwerte. Hier dient die jeweils geschätzte Parametermatrix $\hat{\underline{S}}$ zur Extrapolation zum nächsten Beobachtungszeitpunkt; sie wird daher für jeden Beobachtungszeitpunkt als "aktuelle stationäre Lösung" betrachtet. Berechnet man daher die Eigenwerte in jedem Zeitpunkt neu, so erhält man zwei Eigenwertverläufe, die Auskunft über das jeweils aktuelle Stabilitätsverhalten geben. Da die beiden Eigenwerte für jeden Zeitpunkt komplex-konjugiert sind, genügt es, eine Betragskurve zu untersuchen. Der Betragsverlauf in Abbildung 4.23 zeigt, daß die Stabilität des

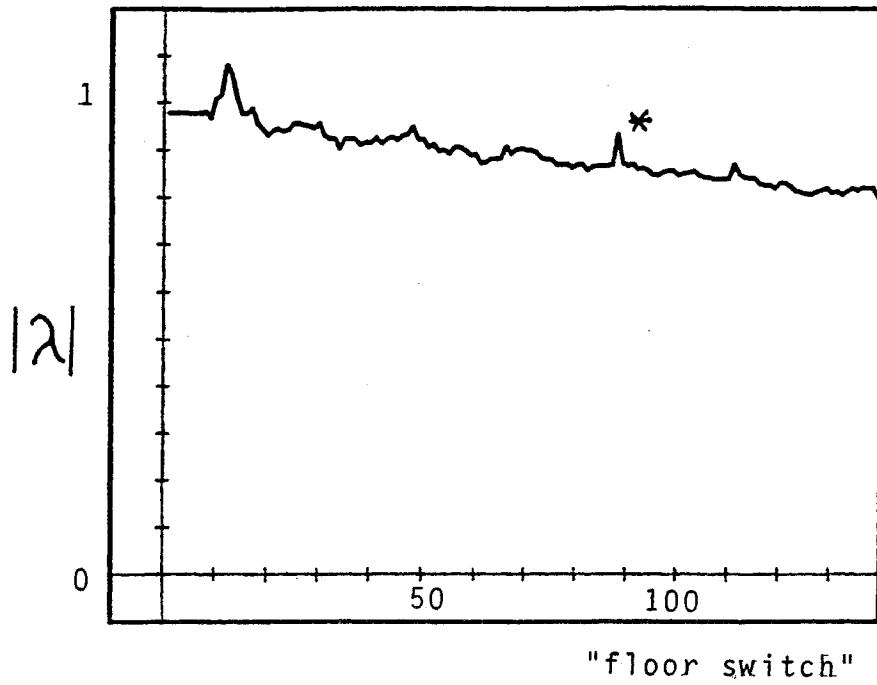


Abbildung 4.23: Verlauf des Betrages der Eigenwerte der Parametermatrix \hat{S} über das Beobachtungsintervall.

Interaktionssystem im Bereich von "floor switch" 10 bis "floor switch" 15 verletzt ist. Dies ist der Bereich, in dem die Verläufe der Interaktionsindizes steil zu negativen Werten abfallen. Verletzung der Stabilität in diesem Bereich bedeutet, daß eine Extrapolation der Interaktionsverläufe auf der Basis der ersten 10 bis 15 Beobachtungen zu keinem asymptotisch konstanten Interaktionsindex führen würde. Im weiteren Verlauf ist der Betrag der Eigenwerte jedoch stets kleiner als 1 und fällt mit zunehmender Beobachtungsdauer sogar ab. Dieser Abfall des Eigenwertbetrages bedeutet, daß der asymptotische Grenzwert der Interaktionsindizes bei Extrapolation vom jeweiligen Beobachtungzeitpunkt aus immer schneller erreicht wird.

Zur Orientierung ist die Trajektorie des Eigenwertes mit positivem Imaginärteil in Abbildung 4.24 in der komplexen Ebene aufgetragen. Der gesamte Prozeß findet dementsprechend zwar am Rande der Stabilitätsgrenze statt, jedoch wird diese nur einmal überschritten. Mit zunehmender Beobachtungsdauer wandert der Eigenwert immer weiter in das Stabilitätsgebiet hinein. An der mit * gekennzeichneten Stelle nimmt der Eigenwertbetrag zwar kurzfristig zu, jedoch ist die Stabilität nicht gefährdet.

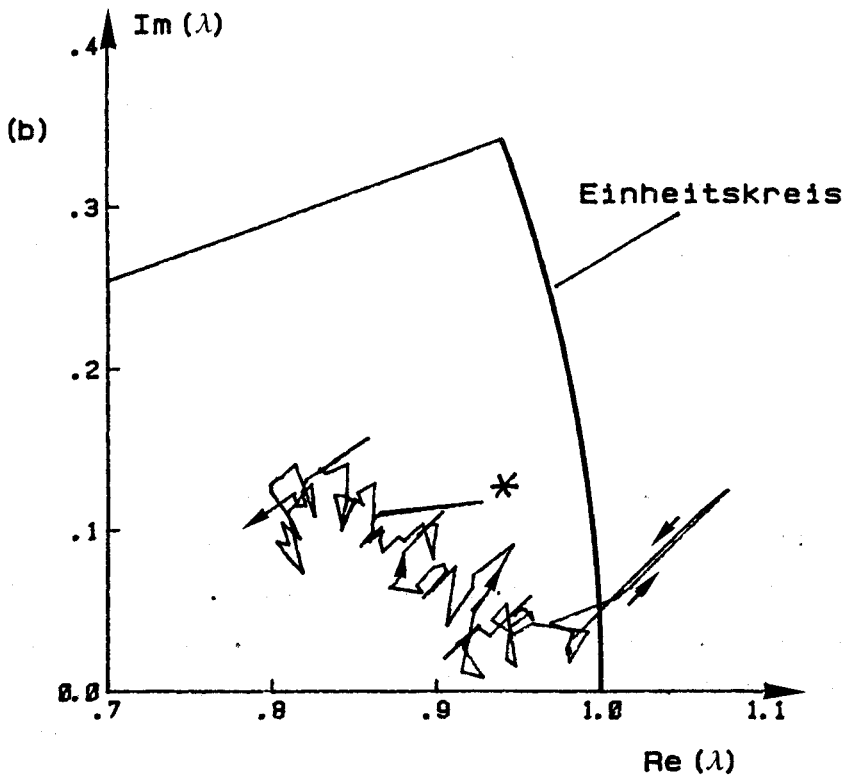
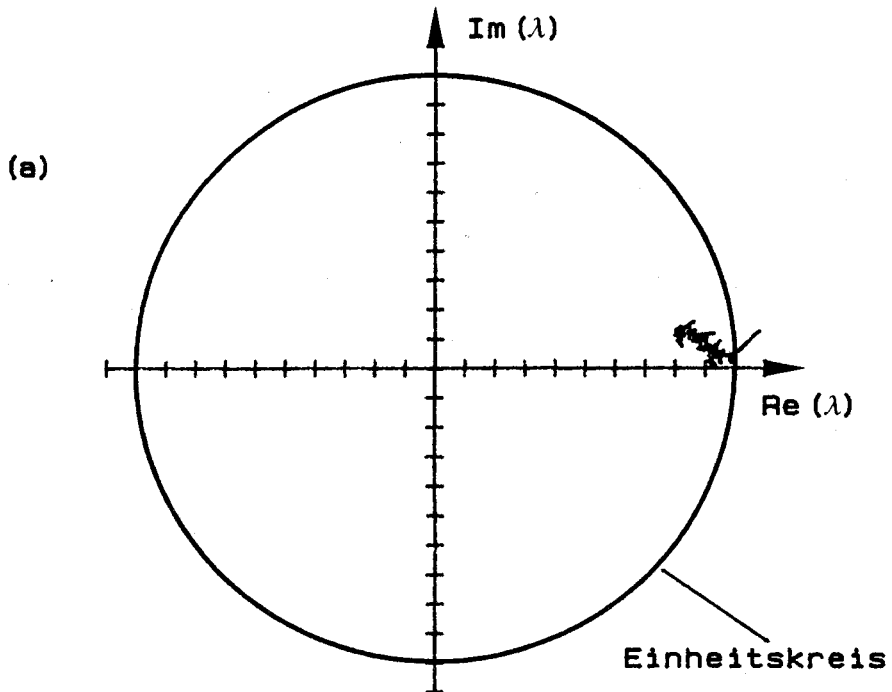


Abbildung 4.24: Verlauf der Eigenwerte der Parametermatrix \hat{S} in der komplexen Ebene
(a) Gesamtübersicht
(b) vergrößerte Teilansicht von (a)

V. Nichtlineare Systeme: Ein Ausblick

Zur Schätzung der Zustandsgrößen linearer Systeme in Zustandsraumdarstellung, insbesondere also auch zur Schätzung latenter Variablen in linearen Strukturmodellen bei Längsschnittstudien, ist die rekursive Filtermethode optimal in dem Sinne, daß die Varianz der Schätzfehler minimiert wird. Die Anwendbarkeit dieser Methode ist nicht auf stationäre, stochastisch gestörte Systeme beschränkt, sondern es läßt sich auch der Verlauf der Zustandsgrößen von Systemen mit zeitabhängigen Parametern schätzen, sofern diese Zeitabhängigkeit der Modellparameter vorgegeben ist.

Mit Hilfe dieser methodischen Mittel kann zwar eine große Vielzahl psychologischer Prozesse modelliert werden, jedoch haben lineare Modellansätze immer den Nachteil, daß sie nur Systeme im Gleichgewicht beschreiben, wie im Rahmen des modernen Forschungsgebietes der Synergetik nachgewiesen wurde (HAKEN 1983a). Gleichgewicht bedeutet hier, daß ohne Berücksichtigung aller externen Einflüsse keine spontanen Änderungen, sogenannte Phasenübergänge, und irreversible Prozesse im betrachteten Entwicklungsablauf beschrieben werden können.

Besonders deutlich wird dies am Dualitätsprinzip, das für alle linearen Systeme - auch bei Berücksichtigung externer Einflüsse! - gilt. Dieses Prinzip besagt, daß ein Prozeßablauf durch Umkehrung des Zeitablaufs auch rückwärts durchlaufen werden kann, wobei speziell in Zustandsraummodellen noch zusätzlich die Regressionsmatrizen zur Kopplung des Zustandsvektors an die externen Einflüsse und an die Meßwerte vertauscht sowie alle Systemmatrizen transponiert werden müssen.

Für physikalische und technische Systeme ist diese Eigenschaft in den meisten Fällen akzeptabel und unter Um-

ständen für Steuerungsprobleme sogar erwünscht; in der Entwicklungspsychologie ist die Annahme der Zeitumkehrbarkeit jedoch in den meisten Fällen nicht gerechtfertigt.

Entwicklung vollzieht sich vielfach krisenhaft und in zeitlich begrenzten Phasen, wie zum Beispiel den Stadien kognitiver Entwicklung nach PIAGET (1972), die das Ergebnis langfristiger Lernprozesse sind und nicht auf die plötzliche Änderung externer Einflüsse zurückgeführt werden können. Phasen solcher beschleunigten Entwicklung können nicht auf dem gleichen Wege rückwärts durchlaufen werden, wie sie entstanden sind.

Dennoch ist es wünschenswert, auch für solche Entwicklungsverläufe eine methodische Beschreibungsmöglichkeit zu finden, da auf diese Weise eine Möglichkeit geschaffen werden könnte, systematisch die Bedingungen für das Auftreten struktureller Entwicklungsänderungen zu untersuchen.

Das Auftreten neuartiger Zustände in offenen Systemen, das heißt in Systemen, die äußeren Einflüssen ausgesetzt sind, durch Selbstorganisation des Systems kann durch Modellgleichungen beschrieben werden, die nichtlineare Terme in den zu untersuchenden Variablen enthalten.

In Anlehnung an die Terminologie der Synergetik können somit lineare Modellansätze, die im allgemeinen nur eine sehr eingeschränkte Gültigkeitsdauer haben, als mikroskopische Beschreibungsmodelle aufgefaßt werden, während nichtlineare Modelle, die einen größeren Entwicklungszeitraum beschreiben, als makroskopische Modelle zu bezeichnen sind. Solche makroskopische Modelle zeichnen sich durch die Berücksichtigung von Ordnungsparametern aus, die das Maß der Selbstorganisation eines Systems und damit die Struktur der Lösung des zugehörigen Modells festlegen.

V.1 Nichtlineare Zustandsschätzung

Da sich der rekursive Algorithmus zur dynamischen Schätzung der Zustandsgrößen in linearen Längsschnittmodellen bestens eignet, andererseits aber strukturelle Änderungen im Zustand eines Systems besser durch nichtlineare Modellgleichungen beschrieben werden können, ist es erstrebenswert, auch für nichtlineare Systeme einen rekursiven Algorithmus aufzustellen.

Ähnlich wie bei linearen Modellen geht man hier wieder von der Zustandsraumdarstellung des Systems aus. Für den Fall der zeitkontinuierlichen Systeme werden die Zustandsgleichungen in folgender Form angegeben (vgl. zum Beispiel ARNOLD 1973):

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{f}(\underline{x}, t) + \underline{v}(\underline{x}, t) \underline{n}(t) \quad (\text{V.1.1a})$$

$$\frac{d}{dt} \underline{y}(t) = \underline{h}(\underline{x}, t) + \underline{w}(t) \underline{m}(t) \quad (\text{V.1.1b})$$

Hier bezeichnet \underline{x} wieder den Zustandsvektor, der der direkten Beobachtung nicht zugänglich ist, und \underline{y} den Vektor der beobachtbaren Indikatoren. Die vektorwertigen Funktionen \underline{f} und \underline{h} sind nichtlineare Funktionen des Zustandsvektors und übernehmen hier die Rolle der Prozeßmatrix und der Regressionsmatrix auf die beobachtbaren Größen in linearen Systemen; \underline{n} und \underline{m} bezeichnen normiertes, vektorielles, Gauß'sches weißes Rauschen.

Die Kovarianzmatrizen der Prozeßfehler \underline{v} und der Meßfehler \underline{w} sind gegeben durch:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) \underline{v}^T(\underline{x}, t) = \underline{Q}(\underline{x}, t) \quad (\text{V.1.2a})$$

$$\underline{w}(t) \underline{w}^T(t) = \underline{R}(t) \quad (\text{V.1.2b})$$

Die Lösung der stochastischen Differentialgleichungen (V.1.1a) und (V.1.1b) für die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\underline{\hat{x}}, t \mid \underline{y}[0, t])$ des geschätzten Zustandsvektors $\underline{x}(t)$ bei gegebenen Beobachtungswerten $\underline{y}(t)$ im Beobachtungsintervall $[0, t]$ wurde von KUSHNER (1964) und STRATONOVITCH (1963) angegeben. Die Gleichung für die Lösung soll hier nur kurz wiedergegeben werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(\underline{\hat{x}}, t \mid \underline{y}[0, t]) = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_i p)}{\partial \hat{x}_i} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 (Q_{ij} \cdot p)}{\partial \hat{x}_i \partial \hat{x}_j} + \\ & + p(\underline{\hat{x}}, t \mid \underline{y}[0, t]) \cdot \{ \underline{h}(\underline{\hat{x}}, t) - \underline{\hat{h}}(t) \}^T \underline{R}^{-1}(t) \\ & \cdot \left\{ \frac{d}{dt} \underline{y}(t) - \underline{\hat{h}}(t) \right\} \end{aligned} \tag{V.1.3}$$

wobei $\underline{\hat{h}}$ der bedingte Erwartungswert von \underline{h} bei gegebenem $\underline{y}[0, t]$ ist.

Die beiden ersten Terme in (V.1.3) haben die Form der Fokker-Planck-Gleichung in allgemeiner Darstellung, die charakteristisch für nichtlineare statistische Systeme mit Selbstorganisation ist (vgl. HAKEN 1983a).

Basierend auf dieser allgemeinen Lösung finden sich in der Literatur (zum Beispiel BASS u.a. 1966) bereits für zeitkontinuierliche Systeme Filteralgorithmen, die als Spezialfall die rekursiven Filtergleichungen für lineare Systeme enthalten und eine optimale Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichte für den Zustandsvektor nichtlinearer Systeme liefern.

Es wird eine weitere Aufgabe der Systemforschung im Rahmen der mathematischen Psychologie sein, solche Schätzalgorithmen für zeitdiskrete Beobachtungen psychologischer Prozesse zu formulieren und ihre Eignung bei der Behandlung nichtlinearer Prozeßmodelle zu untersuchen.

V.2 Beispiel: Verhaltenswahrscheinlichkeiten des Pflegepersonals in Altenheimen

In einer Reihe von experimentellen Arbeiten untersuchte M. BALTES (LESTER & BALTES 1978; BALTES u.a. 1980; BALTES & BALTES 1980; BALTES 1982; BALTES u.a. 1983) das Verhalten von Pflegepersonal in Altenheimen gegenüber den Heimbewohnern in Abhängigkeit von der beobachteten Selbständigkeit/Unselbständigkeit der Bewohner.

Es zeigte sich in diesen Studien, daß Heimbewohnern, die ein starkes Abhängigkeitsverhalten zeigten, ein hohes Maß an Zuwendung durch das Pflegepersonal zuteil wurde, andererseits jedoch Heimbewohner, die sich selbständig verhielten, durch das Personal kaum beachtet wurden und auch keine Verstärkung für ihr Verhalten erhielten. Eine Übersicht über die experimentellen Ergebnisse geben die Balkendiagramme in Abbildung 5.1.

Es soll hier versucht werden, diese extreme Aufspaltung in den Verhaltensweisen des Pflegepersonals durch ein nichtlineares Modell zu beschreiben. Hier soll im wesentlichen die Selbstorganisation des Pflegepersonals berücksichtigt werden, das durch seine Einstellung zu den Heimbewohnern mit Hilfe eines "Ordnungsparameters" gesteuert wird.

Three behaviors of nursing home residents and their consequences separately for male and female residents

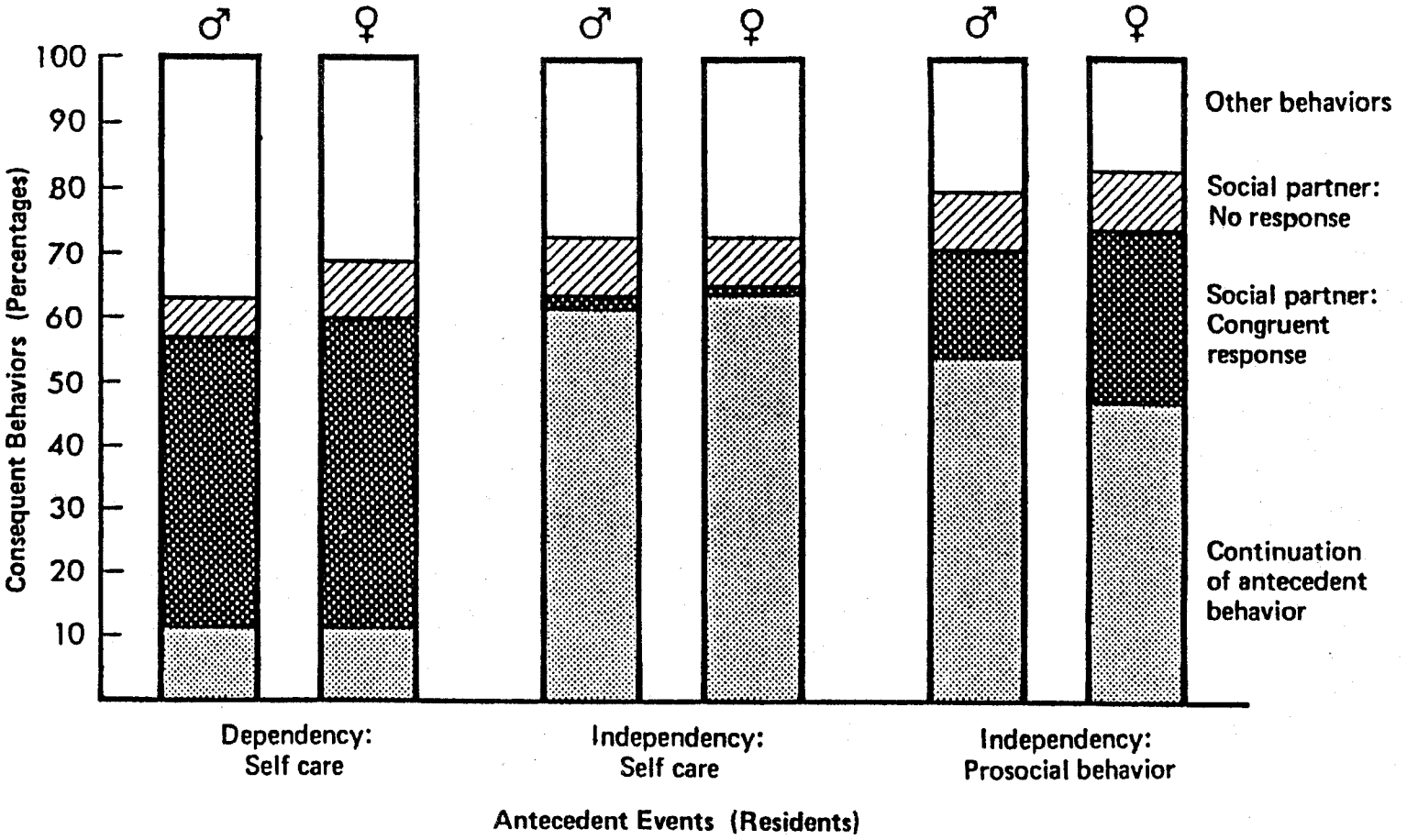


Abbildung 5.1: Ergebnis experimenteller Studien zum Verhalten von Pflegepersonal in Altenheimen gegenüber den Heimbewohnern in Abhängigkeit von der beobachteten Selbständigkeit/Unselbständigkeit der Bewohner.

aus: BALTES, M. M.: 'Unselbständiges und selbständiges Verhalten im Alter: Die Rolle der sozialen Umwelt'. Zwischenbericht und Fortsetzungsantrag zu einem Projekt der Stiftung Volkswagenwerk. März 1983.

V.2.1 Ableitung der Modellgleichungen

Es soll hier in einem ersten Ansatz lediglich ein stark vereinfachendes Modell vorgestellt werden, wobei die Verhaltensweise der Gruppe des Pflegepersonals durch die Verhaltensweise eines repräsentativen Mitglieds dieser Gruppe beschrieben wird. Weiterhin werden die gezeigten Verhaltensweisen grob in zwei Klassen unterteilt: unterstützendes Verhalten und nicht unterstützendes Verhalten.

Wurden nach einer Beobachtungsdauer t insgesamt n Verhaltensweisen gezeigt, so ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, mit der n_+ unterstützende und n_- nicht unterstützende Verhaltensweisen gezeigt wurden, wobei $n_+ + n_- = n$ gilt.

Die unterschiedlichen Aufteilungen der n Verhaltensweisen in die Anteile n_+ und n_- können durch die eindimensionale Verteilungsvariable

$$q = \frac{n_+ - n_-}{n} \quad (\text{V.2.1})$$

beschrieben werden, die für den Fall $n \gg 1$ als kontinuierlich betrachtet werden kann.

Diese Variable überstreicht den Bereich von -1 bis $+1$, wobei für $q = -1$ ausschließlich nicht unterstützendes Verhalten und für $q = +1$ ausschließlich unterstützendes Verhalten bis zum Zeitpunkt t vorliegt.

Es soll nun eine Bestimmungsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(q,t)$ für das bis zum Zeitpunkt t gezeigte Verhaltensmuster q abgeleitet werden.

Als Ausgangspunkt zur Ableitung einer solchen Gleichung dient die "master equation" (HAKEN 1983b) für statistische Systeme, die besagt, daß die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmter Zustand eines

solchen Systems vorliegt, gegeben ist durch die Differenz aus der Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Zustand erreicht wird, und der Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Zustand in einen anderen übergeht.

Wird die Übergangswahrscheinlichkeit von der Verhaltensverteilung q_1 zur Verhaltensverteilung q_2 pro beobachteter Verhaltensweise mit $w(q_1, q_2)$ bezeichnet, so gilt damit für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(q, t)$ die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} f(q, t) = \sum_{q'} w(q', q) f(q', t) - \sum_{q''} w(q, q'') f(q, t)$$

(V.2.2)

Es muß nun festgelegt werden, über welche Werte der Verteilungsvariablen q' , q'' sich die Summen in (V.2.2) erstrecken und welche Struktur die Übergangswahrscheinlichkeit w hat.

Soll nach n Beobachtungen eine bestimmte Verhaltensverteilung q vorliegen, so können in der vorangegangenen Beobachtung nur die Verteilungen $q + 1/n$ oder $q - 1/n$ vorgelegen haben mit den Verteilungswahrscheinlichkeiten $f(q+1/n, t)$ beziehungsweise $f(q-1/n, t)$; hierbei wird angenommen, daß $n \gg 1$ ist und t , das heißt die gesamte Beobachtungsdauer, sich bei einer zusätzlichen Beobachtung nicht wesentlich verändert.

Beim Übergang vom vorangegangenen zum zuletzt beobachteten Verhalten kann ein Wechsel von unterstützend nach nicht unterstützend und umgekehrt stattfinden, je nachdem, welches Verhalten als letztes gezeigt wurde; oder es wird das alte Verhalten wiederholt.

Wie im nächsten Abschnitt näher ausgeführt wird, müssen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen ein Verhaltenswechsel stattfindet beziehungsweise mit dem das alte Verhalten wiederholt wird, als abhängig von der Verteilung des zuvor gezeigten Verhaltens angesetzt werden.

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten wird folgende Notation eingeführt:

$p_{+-}(q')$ = Wahrscheinlichkeit für einen Wechsel von "unterstützend" nach "nicht unterstützend" bei zuvor beobachteter Verteilung q' mit letztem Verhalten "unterstützend"

$p_{-+}(q')$ = Wahrscheinlichkeit für einen Wechsel von "nicht unterstützend" nach "unterstützend" bei zuvor beobachteter Verteilung q' mit letztem Verhalten "nicht unterstützend"

$p_{++}(q')$ = $1 - p_{+-}(q')$ = Wahrscheinlichkeit für Fortsetzung des unterstützenden Verhaltens bei zuvor beobachteter Verteilung q' mit letztem Verhalten "unterstützend"

$p_{--}(q')$ = $1 - p_{-+}(q')$ = Wahrscheinlichkeit für Fortsetzung des nicht unterstützenden Verhaltens bei zuvor beobachteter Verteilung q' mit letztem Verhalten "nicht unterstützend"

Die Wahrscheinlichkeit, daß das letzte Verhalten "unterstützend" beziehungsweise "nicht unterstützend" war, ist durch die Verhältnisse n_+/n beziehungsweise n_-/n gegeben.

Damit nimmt (V.2.2) für das Beispiel der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Verhaltensmuster q folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(q, t) &= \left[\frac{n_+}{n} p_{+-}(q+\frac{1}{n}) + \frac{n_-}{n} p_{--}(q+\frac{1}{n}) \right] f(q+\frac{1}{n}, t) + \\ &+ \left[\frac{n_-}{n} p_{-+}(q-\frac{1}{n}) + \frac{n_+}{n} p_{++}(q-\frac{1}{n}) \right] f(q-\frac{1}{n}, t) - \\ &- \left[\frac{n_+}{n} p_{+-}(q) + \frac{n_-}{n} p_{--}(q) + \frac{n_-}{n} p_{-+}(q) + \frac{n_+}{n} p_{++}(q) \right] \\ &f(q, t) \end{aligned}$$

(V.2.3)

oder abgekürzt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(q, t) &= w_1(q+\frac{1}{n}) f(q+\frac{1}{n}, t) + w_2(q-\frac{1}{n}) f(q-\frac{1}{n}, t) - \\ &- [w_1(q) + w_2(q)] f(q, t) \end{aligned}$$

(V.2.4)

wobei sich die Definition für w_1 und w_2 durch Vergleich mit (V.2.3) ergeben.

Da die Summe $w_1(q) + w_2(q)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der überhaupt ein nächstes Verhalten gezeigt wird, gilt:

$$w_1(q) + w_2(q) = 1 \quad (V.2.5)$$

was auch anhand des expliziten Ausdruckes in (V.2.3) nachgerechnet werden kann.

Die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich durch Potenzreihenentwicklung der einzelnen Terme in der Variablen $1/n$ bis zur zweiten Ordnung vereinfachen.

$$w_1(q + \frac{1}{n}) f(q + \frac{1}{n}, t)$$

$$w_1(q) f(q, t) + \frac{1}{n} [w_1(q) f(q, t)]' + \\ + \frac{1}{2n^2} [w_1(q) f(q, t)]''$$

(V.2.6a)

$$w_2(q - \frac{1}{n}) f(q - \frac{1}{n}, t)$$

$$w_2(q) f(q, t) - \frac{1}{n} [w_2(q) f(q, t)]' + \\ + \frac{1}{2n^2} [w_2(q) f(q, t)]''$$

(V.2.6b)

Die Striche an den eckigen Klammern symbolisieren Ableitungen nach q ; höhere Ableitungen als zweiter Ordnung müssen nicht berücksichtigt werden, da $n \gg 1$ vorausgesetzt wurde.

Setzt man die Näherungsausdrücke (V.2.6a, b) in (V.2.4) ein und berücksichtigt die Beziehung (V.2.5), so ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(q, t)$ die Fokker-Planck-Gleichung in spezieller Form:

$$\frac{d}{dt} f(q, t) = \frac{1}{n} \frac{d}{dq} [(w_1(q) - w_2(q) f(q, t))] + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \frac{d^2}{dq^2} f(q, t)$$

(V.2.7)

Diese Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Verhaltensmusters q stellt einen Spezialfall der allgemeinen Gleichung von KUSHNER (1964) und STRATONOVITCH (1963) dar und hätte direkt aus (V.2.4) abgeleitet werden können.

Die nichtlinearen Zustandsgleichungen entsprechend (V.1.1) nehmen für das vorliegende Beispiel somit folgende Form an:

$$\frac{d}{dt} q(t) = [w_1(q) - w_2(q)] q(t) \quad (\text{V.2.8a})$$

$$y(t) = q(t) \quad (\text{V.2.8b})$$

Hier wurden keine stochastischen Störeinflüsse berücksichtigt.

V.2.2 Festlegung der Änderungswahrscheinlichkeiten des Verhaltens

Psychologische Annahmen über die Art und Weise, in der die Selbstorganisation der betrachteten Gruppe des Pflegepersonals stattfindet, gehen entscheidend in den Ansatz für die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{+-} und p_{-+} ein.

Da in den experimentalpsychologischen Untersuchungen von M. BALTES nicht zwischen einzelnen Mitgliedern der Gruppe des Pflegepersonals unterschieden wird, soll hier angenommen werden, diese Gruppe sei homogen strukturiert, das heißt ihr Verhalten lasse sich durch das Verhalten eines typischen Mitgliedes repräsentieren.

Die Änderungswahrscheinlichkeiten p_{+-} und p_{-+} für das Verhalten beziehen sich somit auf ein charakteristisches Mitglied der Gruppe des Pflegepersonals.

Zur Festlegung dieser Änderungswahrscheinlichkeiten sollen hier Überlegungen aus FESTINGERS Theorie der kognitiven Dissonanz (FESTINGER 1957, 1964) herangezogen werden. Diese Theorie geht von der Annahme aus, daß Individuen ein Gleichgewicht ihres kognitiven Systems anstreben.

Kognitive Dissonanz erzeugt die Motivation, entstandene Dissonanz zu reduzieren. Diese Reduktion kann auf unterschiedliche Weise durch Veränderung des kognitiven Systems erfolgen. Insbesondere wird postuliert, daß nach nahezu allen Entscheidungen, bei denen der Entscheidende aus mehreren Entscheidungsalternativen eine Alternative auswählt, kognitive Dissonanz entsteht. Die positiven Aspekte der nicht gewählten Alternativen und die negativen Aspekte der gewählten Alternativen sind dissonant bei der Entscheidung.

Zur Dissonanzreduktion können Kognitionen über negative Aspekte der gewählten Alternative eliminiert und/oder Kognitionen über positive Aspekte addiert werden. Ebenso können Kognitionen über negative Aspekte der nicht gewählten Alternative addiert und/oder Kognitionen über positive Aspekte der nicht gewählten Alternative eliminiert werden.

Kognitionen werden somit den Entscheidungen angepaßt. Das Ergebnis dieses Prozesses ist ein Anstieg der Attraktivität der gewählten beziehungsweise ein Absinken der Attraktivität der nicht gewählten Entscheidungsalternative.

Dieser "spreading apart of alternatives" genannte Effekt ist nach FESTINGER die wirksamste und häufigste Art der Dissonanzreduktion nach Entscheidungen.

In Anlehnung an diesen Effekt soll im Rahmen des hier betrachteten Modells angenommen werden, daß bei jeder Entscheidung die Wahrscheinlichkeit für einen Verhaltenswechsel von nicht unterstützendem zu unterstützendem Verhalten der einzelnen Individuen aus der Gruppe des Pflegepersonals zunimmt, je häufiger bisher unterstützendes Verhalten gezeigt wurde, ebenso soll umgekehrt die Wahrscheinlichkeit für einen Wechsel von unterstützendem zu nicht unterstützendem Verhalten zunehmen, je häufiger ein solches nicht unterstützendes Verhalten bisher beobachtet wurde.

Ähnlich wie der "spreading apart"-Effekt um so stärker wird, je weniger eine Person die Chance einer Entscheidungsrevision kogniziert (IRLE, GNIECH, FREY & KUMPF 1978) muß auch hier die Höhe der Übergangswahrscheinlichkeiten zusätzlich von der Stärke der "Kopplung" des Pflegepersonals an die Heimbewohner abhängen. Je mehr "Hilflosigkeit" gezeigt wird, desto mehr "spreading apart" in der Verhaltenswahrscheinlichkeit wird erwartet.

Formal lassen sich diese Zusammenhänge in folgender Weise fassen:

$$p_{+-} (n_+, n_-) = N \cdot e^{-[kq+h]} \quad (\text{V.2.9a})$$

$$p_{-+} (n_+, n_-) = N \cdot e^{[k \cdot q+h]} \quad (\text{V.2.9b})$$

wobei N eine Normierungskonstante ist.

Über den Faktor k im Exponenten der Ausdrücke (V.2.9) wird die "Kopplungsstärke" des Personals an die Bewohner des Heimes berücksichtigt. Grundsätzliche Tendenzen zu der einen oder anderen Verhaltensweise werden durch den zusätzlichen Beitrag h im Exponenten einbezogen.

V.2.3 Eine Lösung des Modells

Die Bestimmung der vollen Lösung von (V.2.7) würde den Rahmen dieses kleinen Beispiels überschreiten; stattdessen kann jedoch ohne große Mühe eine stationäre Lösung angegeben werden, das heißt eine Lösung für den Fall

$$\frac{d}{dt} f(q,t) = 0 \quad (\text{V.2.10})$$

Eine solche Lösung beschreibt einen Gleichgewichtszustand in dem Sinne, daß sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung zeitlich nicht mehr ändert.

Die stationäre Lösung hat folgende Gestalt:

$$f_{\text{stat}}(q) = N_0 e^{k(q)} \quad (\text{V.2.11a})$$

mit

$$k(q) = 2n \int_{-1}^q [w_2(s) - w_1(s)] ds \quad (\text{V.2.11b})$$

An dieser stationären Lösung lassen sich bereits die wesentlichen Eigenschaften der allgemeinen Modellösung ablesen. In Abbildung 5.2 ist $f_{\text{stat}}(q)$ für verschiedene Werte des Kopplungsparameters k aufgetragen. Man erkennt, daß für den Fall keiner Verpflichtung des Pflegepersonals an die Heimbewohner (Abbildung 5.2a) sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für das zu erwartende Verhalten ergibt, die ihr Maximum bei $q = 0$ annimmt. Unterstützendes und nicht unterstützendes Verhalten treten daher im Falle keiner Abhängigkeit der Heimbewohner vom Pflegepersonal mit gleicher, maximaler Wahrscheinlichkeit auf. Mit zunehmender Unselbständigkeit der Heimbewohner verbreitert sich die Verteilungsfunktion, das heißt eine breitere Vielfalt von Verhaltenskombinationen wird möglich (Abbildung 5.2b).

Bei weiterer Steigerung der Kopplungsstärke tritt ein überraschender Effekt ein. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das gezeigte Verhalten des Pflegepersonals weist nun zwei deutlich getrennte Maxima in der Nähe der Enden der Verteilungsachse (Abbildung 5.2c) auf.

Psychologisch bedeutet dies folgendes: Sobald in der Gruppe der Heimbewohner Mitglieder ein ausgeprägtes Abhängigkeitsverhalten zeigen und damit das Pflegepersonal stark an sich binden, werden zwei Verhaltensweisen des Personals sehr wahrscheinlich: Einerseits gibt es eine hohe Wahrscheinlichkeit für extrem unterstützendes Verhalten, das den unselbständigen Heimbewohnern zukommt, während das zweite Wahrscheinlichkeitsmaximum bei extrem nicht unterstützendem Verhalten liegt, was diejenigen Bewohner betrifft, die sich selbständig verhalten und das Pflegepersonal kaum in Anspruch nehmen.

Die Beobachtung, daß unselbständiges Verhalten alter Menschen in Heimen vom Personal kontingente Verstärkung erfährt, dagegen selbständiges Verhalten weitgehend ignoriert oder sogar unterbunden wird, erscheint somit im Rahmen eines Modellansatzes, wie er oben beschrieben ist, verständlich als ein Effekt der Selbstorganisation der Gruppe des Pflegepersonals, das durch die Verpflichtung den Heimbewohnern gegenüber reguliert wird.

Um zu erreichen, daß auch selbständiges Verhalten durch das Pflegepersonal unterstützt wird, das heißt um das Maximum bei negativen q -Werten in der Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Verhaltensmuster zu unterdrücken, bieten sich im Rahmen des Modells zwei Möglichkeiten.

Die einfachste Möglichkeit ist es, genügend externen Druck auf das Pflegepersonal auszuüben, was sich im Modell durch einen positiven Wert für den Parameter h in den Übergangswahrscheinlichkeiten (V.2.9) ausdrückt. Abbil-

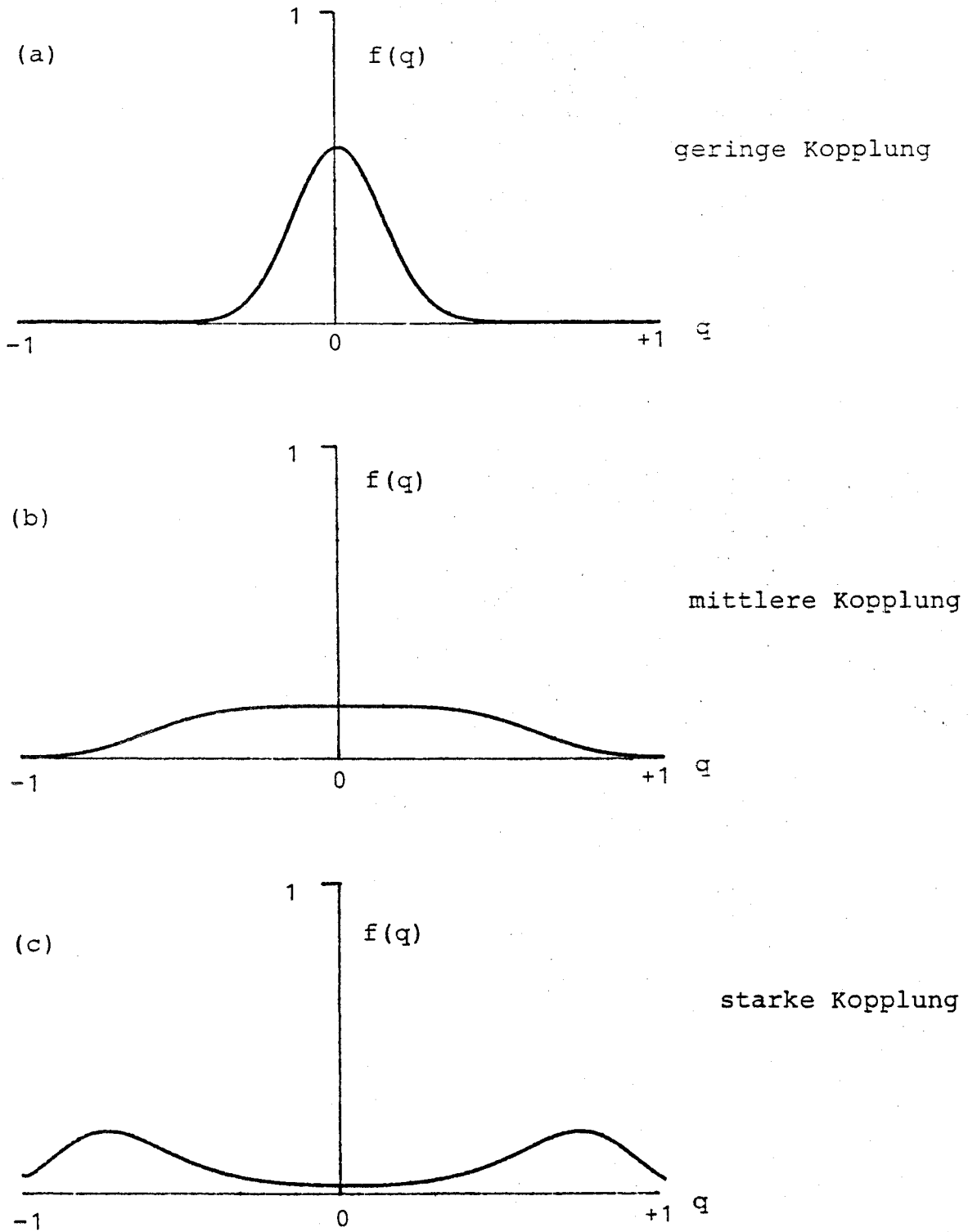


Abbildung 5.2:

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Verhaltensmuster bei unterschiedlichem Kopplungsgrad

dung 5.3 zeigt, daß auf diese Weise die Wahrscheinlichkeit für nicht unterstützendes Verhalten unterdrückt werden kann.

Eine weitere Möglichkeit selbständigkeitsunterstützendes Verhalten zu erreichen, besteht darin, die Strategien zur Auflösung der kognitiven Dissonanz beim Pflegepersonal zu ändern, was durch Training erreicht werden kann. Im Modell würde sich dies durch eine gegenüber (V.2.9) geänderte funktionale Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten vom bisher gezeigten Verhaltensmuster bemerkbar machen.

Der hier beschriebene Ansatz ist keineswegs vollständig und kann in vieler Hinsicht erweitert und verbessert werden. Es sollte hier lediglich auf einer rein qualitativen Ebene gezeigt werden, daß durch einen nichtlinearen Ansatz in der zu untersuchenden Variablen q strukturelle Phänomene in der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die beobachteten Verhaltensweisen beschrieben werden können.

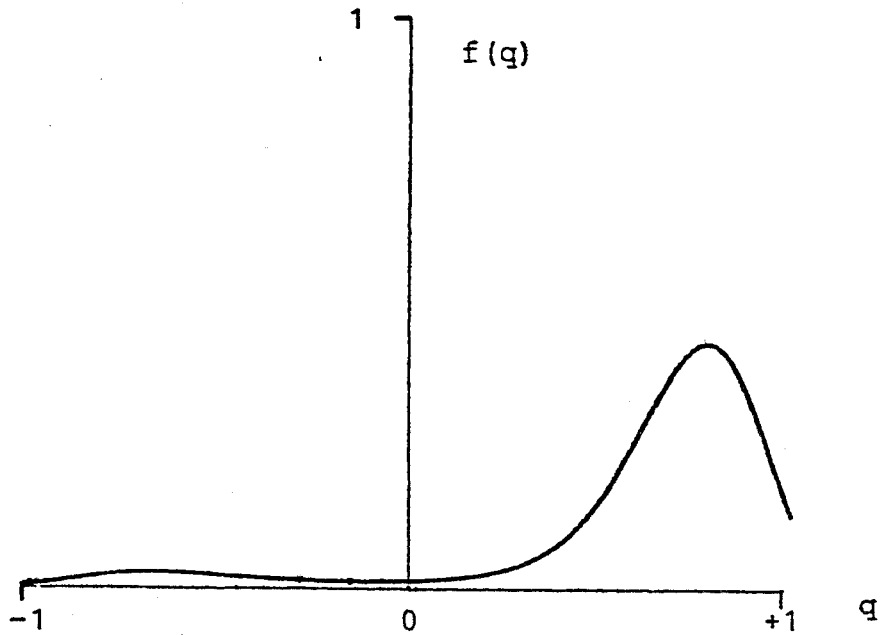


Abbildung 5.3:

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Verhaltensmuster
bei starker Kopplung und positivem bias

Anhang 1

Liste der Originaldaten

floor- switch Nr.	Y1	Y2
0	-. 027	. 027
1	. 093	. 027
2	. 960	. 027
3	. 960	. 027
4	. 960	. 027
5	. 067	-1. 040
6	-. 960	-2. 000
7	-. 960	-2. 960
8	-1. 933	-3. 987
9	-1. 933	-3. 987
10	-1. 067	-8. 293
11	-2. 027	-10. 200
12	-3. 000	-15. 027
13	-3. 000	-18. 240
14	-4. 000	-18. 973
15	-4. 000	-18. 973
16	-5. 120	-20. 067
17	-8. 040	-20. 933
18	-8. 040	-20. 933
19	-8. 040	-20. 933
20	-8. 027	-20. 000
21	-9. 040	-20. 000
22	-9. 040	-21. 053
23	-9. 040	-21. 053
24	-10. 013	-21. 053
25	-10. 013	-23. 200
26	-11. 160	-24. 293
27	-11. 160	-25. 427
28	-11. 160	-26. 453
29	-11. 160	-27. 187
30	-11. 147	-28. 987
31	-9. 160	-28. 107
32	-9. 160	-28. 107
33	-9. 160	-28. 107
34	-8. 080	-26. 240

floor- switch Nr.	Y1	Y2
35	-8.080	-27.213
36	-8.080	-27.213
37	-8.080	-27.213
38	-7.373	-26.187
39	-8.080	-26.187
40	-9.133	-25.120
41	-10.173	-25.120
42	-10.173	-24.373
43	-10.173	-25.293
44	-10.173	-26.173
45	-10.173	-26.173
46	-10.173	-27.320
47	-11.187	-28.307
48	-11.187	-31.253
49	-11.187	-31.253
50	-10.253	-32.107
51	-9.240	-31.267
52	-10.280	-32.200
53	-10.280	-31.240
54	-10.280	-31.240
55	-10.280	-30.187
56	-10.280	-31.227
57	-11.253	-31.227
58	-11.253	-31.227
59	-11.253	-30.187
60	-12.173	-29.160
61	-11.347	-28.120
62	-11.347	-27.307
63	-11.347	-27.307
64	-10.640	-27.307
65	-11.320	-27.307
66	-12.333	-29.467
67	-12.333	-29.467
68	-13.280	-30.520
69	-14.333	-31.333

floor- switch Nr.	Y1	Y2
70	-15.400	-31.333
71	-16.293	-31.333
72	-16.293	-32.453
73	-15.360	-32.453
74	-15.360	-32.453
75	-15.360	-32.427
76	-15.360	-31.387
77	-14.467	-31.387
78	-14.467	-31.387
79	-14.467	-30.413
80	-14.467	-30.413
81	-14.440	-30.413
82	-13.413	-29.400
83	-13.413	-29.400
84	-12.453	-29.400
85	-12.453	-29.400
86	-12.453	-29.400
87	-13.267	-29.400
88	-18.547	-30.507
89	-19.600	-30.507
90	-20.627	-30.507
91	-21.440	-31.467
92	-21.440	-31.467
93	-22.467	-31.467
94	-22.467	-31.467
95	-22.467	-30.480
96	-21.533	-30.480
97	-23.667	-30.480
98	-24.707	-30.480
99	-25.440	-30.480
100	-25.440	-29.547
101	-25.440	-29.547
102	-25.440	-29.547
103	-24.427	-30.560
104	-24.427	-30.560

floor- switch Nr.	Y1	Y2
105	-23.547	-30.560
106	-23.547	-30.560
107	-22.533	-30.560
108	-21.640	-30.560
109	-21.640	-30.560
110	-22.200	-30.560
111	-24.560	-32.467
112	-24.560	-32.467
113	-24.560	-32.467
114	-24.560	-32.467
115	-24.560	-32.467
116	-23.547	-31.693
117	-23.547	-30.747
118	-23.547	-29.733
119	-22.640	-28.587
120	-22.640	-28.587
121	-23.440	-27.547
122	-22.720	-27.547
123	-21.813	-26.613
124	-20.867	-25.840
125	-19.813	-24.853
126	-19.813	-23.853
127	-19.813	-22.920
128	-19.813	-22.013
129	-19.813	-21.040
130	-18.733	-20.187
131	-18.733	-19.173
132	-17.680	-18.187
133	-17.680	-17.360
134	-17.680	-16.640
135	-16.733	-16.640
136	-16.733	-16.640
137	-15.973	-16.640
138	-14.960	-16.640
139	-13.933	-15.480
140	-12.627	-14.760

Anhang 2

KID : Kalmanfilter fuer Interaktions-Daten
- ein Basic Programm


```
10 | | BASIC-PROGRAMM >> K I D <<
20 | | ZUR REKURSIVEN SCHAETZUNG
30 | | VON INTERAKTIONSPARAMETERN
40 | | (FUER TISCHRECHNER HP85)
50 | | -----
60 | |
70 | | Variablendefinitionen
80 | |
90 | | -----
100 | |
110 | | Y1, Y2 Urdaten
120 | | Y   Datenvektor fuer den
130 | |     rekursiven Algorithmus
140 | | X0  Vektor der stationaer
150 | |     geschaezten Parameter
160 | | X   Zustandsvektor
170 | | P0  Kov.-Matrix von X0
180 | | P   Kov.-Matrix der Schaezt-
190 | |     fehler
200 | | P1  Kov.-Matrix der Extra-
210 | |     polationsfehler
220 | | R   Kov.-Matrix der Be-
230 | |     obachtungsfehler
240 | | Q   Kov.-Matrix der Prozess-
250 | |     fehler
260 | | C   Regressionsmatrix
270 | |     Y nach X
280 | | K   Kalman-Korrektur-
290 | |     Matrix
300 | | S   Interaktionsmatrix
310 | |     mit: S11=X1 S12=X2
320 | |         S21=X3 S22=X4
330 | | D   Konstanter Interaktions-
340 | |     beitrag mit:
350 | |         D1=X5 D2=X6
360 | | L   Simulationvektor
370 | | R0, I0, E Realteil, Imaginaer-
380 | |     teil und Betrag
390 | |     der Eigenwerte von S
400 | | B, H, Z, Z0 : Hilfsgrößen
410 | |
420 | | -----
```

```
430 | OPTION BASE 1
440 | DIM Y1(141), Y2(141), Y(2)
450 | DIM X0(6), X(6), Z0(6), Z(2)
460 | DIM P(6, 6), P0(6, 6), P1(6, 6)
470 | DIM R(2, 2), Q(6, 6), C(2, 6)
480 | DIM K(6, 2), B(2, 2), H(2, 6)
490 | DIM S(2, 2), L(2), D(2)
500 | | -----
510 | |
520 | |   Daten einlesen
530 | |   von File "GOTTMN"
540 | |
550 | | -----
560 | ASSIGN# 1 TO "GOTTMN"
570 | FOR I=1 TO 141
580 | READ# 1 ; Y1(I)
590 | NEXT I
600 | FOR I=1 TO 141
610 | READ# 1 ; Y2(I)
620 | NEXT I
630 | | -----
640 | |
650 | | Besetzung der Startwerte
660 | | fuer: X0, P0, Q, R, D, L
670 | |
680 | | -----
690 | X0(1) = .96676957
700 | X0(2) = .01988894
710 | X0(3) = -.0462718
720 | X0(4) = .99372448
730 | X0(5) = -.092572413
740 | X0(6) = -.981772349
750 | D(1) = X0(5)
760 | D(2) = X0(6)
770 | |
780 | MAT P0 = IDN
790 | MAT P0 = (.001) * P0
800 | P0(5, 5) = 0
810 | P0(6, 6) = 0
820 | |
830 | MAT Q = IDN
840 | MAT Q = (.001) * Q
```

```
850 | |
860 | MAT R=IDN
870 | |
880 | L(1)=Y1(2) @ L(2)=Y2(2)
890 | |
900 | MAT P1=P0@ MAT X=X0
910 | |
920 | | =====
930 | |   Beginn der Rekursions-
940 | |           schleife
950 | | =====
960 | |
970 | FOR I=1 TO 139
980 | |
990 | | Bivariater Datenvektor Y:
1000 | |
1010 | Y(1)=Y1(I+1)
1020 | Y(2)=Y2(I+1)
1030 | |
1040 | | Regressionmatrix des
1050 | Messmodelle :
1060 |
1070 | MAT C=ZER
1080 | C(1,1)=Y1(I)
1090 | C(1,2)=Y2(I)
1100 | C(2,3)=Y1(I)
1110 | C(2,4)=Y2(I)
1120 | C(1,5)=1
1130 | C(2,6)=1
1140 | |
1150 | | Kalman-Gain-Matrix K:
1160 | |
1170 | MAT K=P1*TRN(C)
1180 | MAT B=C*K
1190 | MAT B=B+R
1200 | MAT B=INV(B)
1210 | MAT K=K*B
1220 | |
1230 | | Kovarianzmatrix P der
1240 | | Schaeetzfehler :
1250 | |
1260 | MAT H=C*P1
```

```
1270 | MAT P=K*H
1280 | MAT P=P1-P
1290 | |
1300 | | Kovarianzmatrix P1 der
1310 | | Extrapolationsfehler
1320 | | fuer i+1 :
1330 | |
1340 | MAT P1=P+Q
1350 | |
1360 | | Korrektur des Schaetz-
1370 | | vektors X :
1380 | |
1390 | MAT Z=C*X
1400 | MAT Z=Y-Z
1410 | MAT Z0=K*Z
1420 | MAT X=X+Z0
1430 | |
1440 | | Besetzung der Modellpa-
1450 | | rametermatrix S :
1460 | |
1470 | S(1,1)=X(1)
1480 | S(1,2)=X(2)
1490 | S(2,1)=X(3)
1500 | S(2,2)=X(4)
1510 | |
1520 | | Simulation fuer den
1530 | | Zeitpunkt i+1 :
1540 | |
1550 | MAT L=S*L
1560 | MAT L=L+D
1570 | |
1580 | | Berechnung der Eigen-
1590 | | werte von S :
1600 | |
1610 | R0=(S(1,1)+S(2,2))/2
1620 | I0=S(1,1)*S(2,2)
1630 | I0=R0^2-I0+S(1,2)*S(2,1)
1640 | I0=ABS(I0)
1650 | I0=SQR(I0)
1660 | E=SQR(R0^2+I0^2)
```

```
1670 | |
1680 | | *****
1690 | | * Hier Plotroutinen *
1700 | | * fuer die Groessen *
1710 | | * L, X, P, R0, I0, E ein- *
1720 | | * setzen *
1730 | | *****
1740 | |
1750 | NEXT I
1760 | |
1770 | | -----
1780 | | Rekursionsende
1790 | | -----
1800 | |
1810 | END
```

Anhang 3

Struktur der Kovarianzmatrix der Schätzfehler

Um die Struktur der Kovarianzmatrix $\tilde{P}(k)$ der Schätzfehler zu ermitteln, muß der folgende Ausdruck untersucht werden:

$$\tilde{P}(k) = P^*(k) - K(k) C(k) P^*(k)$$

Für $k = k_0$ gilt $P^*(k_0) = P(k_0)$, wobei $P(k_0)$ vorgegeben wird. Es soll daher hier der Fall $k = k_0$ betrachtet werden; der allgemeinere Fall läßt sich analog behandeln. Wegen der festen Wahl $k = k_0$ kann im folgenden das Argument k weggelassen werden.

Die Matrizen P^* , C und R haben im Beispiel in Abschnitt IV folgende Gestalt:

$$P^* = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

Die Korrekturmatrix ist gegeben durch:

$$K = P^* C^T [C P^* C^T + R]^{-1}$$

Die Struktur der einzelnen Terme ist wie folgt:

$$C P^* C^T = C P I \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ 0 & a \\ 0 & a \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & & \\ a P + b P & & & 0 \\ & & & \\ 0 & & 2 & 2 \\ & & a P + b P & & \end{bmatrix}$$

$$[C P^* C^T + R] = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$$

mit

$$u = \frac{1}{\frac{2}{a P + b P} + \frac{2}{P + r}}$$

Schließlich erhält man für K:

$$K = \begin{bmatrix} a_F & 0 \\ b_F & 0 \\ 0 & a_F \\ 0 & b_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a_{FU} & 0 \\ b_{FU} & 0 \\ 0 & a_{FU} \\ 0 & b_{FU} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hieraus folgt für die Struktur von \tilde{P} :

$$K C P^* = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_F & b_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_F & b_F \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} k a_F & k b_F & 0 & 0 \\ l a_F & l b_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k a_F & k b_F \\ 0 & 0 & l a_F & l b_F \end{bmatrix}$$

und

$$P = P^* - K C P^* =$$

$$\begin{bmatrix} P-k_{AP} & k_{BP} & 0 & 0 \\ l_{AP} & P-l_{BP} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P-k_{AP} & k_{BP} \\ 0 & 0 & l_{AP} & P-l_{BP} \end{bmatrix}$$

Somit gilt $\tilde{P}_{11} = \tilde{P}_{33}$ und $\tilde{P}_{22} = \tilde{P}_{33}$.

Die Schätzfehlervarianzen derjenigen Interaktionsparameter, die als Koeffizienten des gleichen Interaktionsindex im Modell auftreten, sind gleich.

Literaturverzeichnis

- ALLPORT, G. W.: Werden der Persönlichkeit. Bern: Huber 1958.
- ALLPORT, G. W.: "The general and the unique in psychological science". In: Journal of Personality, 1962, 30, S. 405-422.
- ARNOLD, L.: Stochastische Differentialgleichungen. München: Oldenbourg 1973.
- ATHANS, M., DERTOUZOS, M. L., SPANN, R. N., und MASON, S. J.: Systems, networks and communication: Multi-variable methods. New York: McGraw-Hill 1974.
- BALTES, M. M.: "Environmental factors in dependency among nursing home residents: A social ecology analysis". In: WILLS, T. A.: Basic processes in helping relationships. New York: Academic Press 1982, S. 405-425.
- BALTES, M. M., BURGESS, R. L., und STEWART, R. B.: "Independence and dependence in self-care behaviors in nursing home residents: An operant-observational study". In: International Journal of Behavioral Development, 1980, 3, S. 489-500.
- BALTES, M. M., HONN, S., BARTON, E. M., ORZECH, M. J., und LAGO, D.: "On the social ecology of dependence and independence in elderly nursing home residents: A replication and extension". In: Journal of Gerontology, 1983, 38, S. 556-564.
- BALTES, P. B., und BALTES, M. M.: "Plasticity and variability in psychological aging: Methodological and theoretical issues". In: GURSKI, G. (Hrsg.): The effects of aging on the central nervous system. Berlin: Schering 1980.
- BALTES, P. B., REESE, H. W., und NESSELROADE, J. R.: Life-span developmental psychology: Introduction to research methods. Monterey: Brooks/Cole 1977.
- BASS, R. W., NORUM, V. D., und SCHWARTZ, L.: "Optimal multichannel nonlinear filtering". In: Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1966, 16, S. 152-164.
- BELLMAN, R., und ASTROM, K. J.: "On structural identifiability". In: Mathematical Biosciences, 1970, 7, S. 329-339.
- BOX, G. E., und JENKINS, G. M.: Time series analysis: forecasting and control. San Francisco: Holden-Day 1976.

- BRANDT, S.: Datenanalyse. Mannheim: Bibliographisches Institut 1981.
- CATTELL, R. B.: "The description of personality: Basic traits resolved into clusters". In: The journal of abnormal and social psychology, 1943, 56, S. 195-216.
- CATTELL, R. B.: The description and measurement of personality. New York: World Book Co. 1946.
- CATTELL, R. B.: "On the disuse and misuse of P, Q, Qs, O-techniques in clinical psychology". In: J. clin. Psychol., 1951, 7, S. 203-214.
- DRÖSLER, J.: "Extending the temporal range of psychometric prediction by optimal linear filtering of mental test scores". In: Psychometrika, 1978, 43, S. 533-549.
- ERWE, F.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Mannheim: Bibliographisches Institut 1961.
- EYKHOFF, P.: System identification. London: Wiley 1974.
- FESTINGER, L.: A theory of cognitive dissonance. Stanford: Stanford University Press 1957.
- FESTINGER, L.: Conflict, decision and dissonance. Stanford: Stanford University Press 1964.
- GANTMACHER, F. R.: Matrizenrechnung. Berlin: VEB-Verlag der Wissenschaften 1958.
- GÖLDNER, K.: Mathematische Grundlagen der Systemanalyse. Bd. 1-3, Frankfurt a.M.: Harri Deutsch 1983.
- GOTTMAN, J. M.: "Detecting cyclicity in social interaction". In: Psychological Bulletin, 1979a, 86, S. 338-348.
- GOTTMAN, J. M.: "Time series analysis of continuous data in dyads". In: LAMB, M., SUOMI, S., und STEPHENSON, G. (Hrsg.): Methodological problems in the study of social interaction. Madison: University of Wisconsin Press 1979b, S. 207-229.
- GOTTMAN, J. M., MARKMAN, H., und NOTARIUS, C.: "The Topography of marital conflict: A sequential analysis of verbal and nonverbal behavior". In: Journal of Marriage and the Family, 1977, S. 461-477.
- GOTTMAN, J. M., und RINGLAND: "The analysis of dominance and bidirectionality". In: Child Development, 1981, 52, S. 393-412.

- GREGSON, R. M.: Time series in psychology. London: Lawrence Erlbaum 1983.
- GULLIKSEN, H.: Theory of mental tests. New York: Wiley 1950.
- GUTTMAN, L.: "A new approach to factor analysis: The radex". In: LAZARFELD, P. F. (Hrsg.): Mathematical thinking in the social sciences. New York: Columbia University Press 1954, S. 258-348.
- HAKEN, H.: Synergetics. An introduction. Berlin: Springer 1983a.
- HAKEN, H.: Advanced synergetics. Berlin: Springer 1983b.
- HART, M. C., und MULHOLLAND, R. J.: "Structural identifiability of compartmental systems based upon measurements of accumulated tracer in closed pools". In: Mathematical Biosciences, 1979, 47, S. 239-253.
- HEATH, R. A.: "Detection of change in physiological measures using an adaptive Kalman filter algorithm". In: Psychological Bulletin, 1984, 96, S. 581-588.
- HUBER, H. P.: Psychometrische Einzelfalldiagnostik. Weinheim: Beltz 1973.
- HUMPHREYS, L. G., und PARSONS, C. K.: "A simplex process model for describing differences between cross-lagged correlations". In: Psychological Bulletin, 1979, 86, S. 325-334.
- IRLE, M., GNIECH, G., FREY, D., und KUMPF, M.: Die Umwertung der Attraktivität von Alternativen nach Entscheidungen. Bericht aus dem SFB der Universität Mannheim 1978.
- JÖRESKOG, K. G.: "Statistical estimation of structural models in longitudinal-developmental investigations". In: NESSELROADE, J. R., und BALTES, P. B. (Hrsg.): Longitudinal research in the study of behavior and development. New York: Academic Press 1979, S. 303-351.
- JÖRESKOG, K. G., und SÖRBOM, D.: "Statistical models and methods for analysis of longitudinal data". In: AIGNER, D. J., und GOLDBERGER, A. S. (Hrsg.): Latent variables in socio-economic models. Amsterdam: North-Holland 1977, S. 285-325.
- JÖRESKOG, K. G., und SÖRBOM, D.: LISREL IV: Analysis of linear structural relationships by the method of maximum likelihood. Chicago: National Educational Resources 1978.

- JÖRESKOG, K. G., und SÖRBOM, D.: LISREL V: Analysis of linear structural relationships by maximum likelihood and least squares methods (Research Report 81-8). Uppsala, Sweden: University of Uppsala, Department of Statistics 1981.
- KALMAN, R. E.: "A new approach to linear filtering and prediction problems". In: Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, 1960, 82, S. 35-45.
- KALMAN, R. E., und BUCY, R. S.: "New results in linear filtering and prediction theory". In: Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, 1961, 83, S. 95-108.
- KAMKE, E.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig 1961.
- KENNY, D. A.: "Cross-lagged and synchronous common factors in panel data". In: GOLDBERG, A. S., und DUNCAN, O. D. (Hrsg.): Structural equation models in the social sciences. New York: Seminar Press 1973.
- KENNY, D. A.: "Cross-lagged panel correlation: A test for spuriousness". In: Psychological Bulletin, 1975, 82, S. 887-903.
- KUSHNER, H. J.: "On the differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes, with applications". In: J. SIAM Control, Ser. A, 1964, 2, S. 106-119.
- LESTER, P. B., und BALTES, M. M.: "Functional interdependence of the social environment and the behavior of the institutionalized aged". In: Journal of Gerontological Nursing, 1978, 4, S. 23-27.
- LORD, F. M., und NOVICK, M. R.: Statistical theories of mental test scores. Reading, Mass.: Adchison-Wesley 1968.
- MÖBUS, C., und NAGL, W.: "Messung, Analyse und Prognose von Veränderungen". In: BREDEKAMP, J., und FEGER, H. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie. Bd. 5. Hypothesenprüfung. Göttingen: Hogrefe 1983.
- NORMAN, F. M.: "Lectures on linear systems theory". In: Journal of Mathematical Psychology, 1981, 23, S. 1-89.
- ODD, J. H. L., und VAN DEN BERCKEN, J. H. L.: "Kalman filtering in factor analysis". Beitrag auf der Konferenz der Society for Multivariate Analysis in the Behavioral and Social Sciences. Bonn, 18.-19. Dezember 1984.
- PAPOULIS, A.: Signal analysis. New York: McGraw-Hill 1977.

- PETERMANN, F. & HEHL, F.-J.: "Einzelfallanalyse - ein Überblick". In: PETERMANN, F. & HEHL, F.-J. (Hrsg.): Einzelfallanalyse. München: Urban & Schwarzenberg, 1979, S. 1-14.
- PIAGET, J.: Psychologie der Intelligenz. Freiburg: Walter 1972.
- PENROSE, R.: "A generalized inverse for matrices". In: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1955, 51, S. 406-413.
- PHILLIPS, P. C. B.: "The structural estimation of a stochastic differential equation system." In: Econometrica, 1972, 40, S. 1021-1041.
- ROGOSA, D.: "A critique of cross-lagged correlation". In: Psychological Bulletin, 1980, 88, S. 245-258.
- REVENSTORF, D.: Zeitreihenanalyse für klinische Daten. Weinheim: Beltz 1979.
- REVENSTORF, D.: Faktorenanalyse. Stuttgart: Kohlhammer 1980.
- SCHLITTGEN, R., und STREITBERG, B. H. J.: Zeitreihenanalyse. München: Oldenbourg 1984.
- SCHWARZ, H.: Zeitdiskrete Regelungssysteme. Braunschweig: Vieweg 1979.
- SINGER, B., und SPILERMAN, S.: "Mathematical representations of development theories". In: NESSELROADE, J. R., und BALTES, P. B. (Hrsg.): Longitudinal research in the study of behavior and development. New York: Academic Press 1979, S. 155-177.
- STRATONOVITCH, R. L.: Topics in the theory of random noise. New York: Gordon u. Breach 1963.
- TACK, W. H.: "Testtheoretische Grundlagen der Einzelfallanalyse". In: PETERMANN, F., und HEHL, F.-J.: Einzelfallanalyse. München: Urban & Schwarzenberg 1979, S. 49-69.
- TÖLKE, I.: "Ein systemtheoretischer Ansatz zur dynamischen Schätzung latenter Variablen in Längsschnittstudien." 1. Halbjahresbericht zur Vorlage beim Leitungsgremium des institutsübergreifenden Modellvorhabens zur postgradualen Förderung in Entwicklungspsychologie. Berlin/Trier. April 1984a.

- TÖLKE, I.: "Zustandsraummodelle und Kalman-Filter in der Längsschnittanalyse". Vortrag auf dem Intensivseminar des institutsübergreifenden Modellvorhabens zur post-gradualen Förderung in Entwicklungspsychologie. Max-Planck-Institut für Bildungsforschung Berlin, 24.-26. Mai 1984b.
- TÖLKE, I.: "A dynamic procedure for estimating latent variables in longitudinal studies". Beitrag zum Seventeenth Annual Mathematical Psychology Meeting. Chicago, 21.-23. August 1984c.
- TÖLKE, I. & VON EYE, A.: "Optimale Schätzung und Vorhersage instationärer, stochastischer Folgen". Beitrag zum Aachener Methodensymposium zum Thema "Veränderungsmessung". Aachen, 28.-30. Juni 1984d.
- TÖLKE, I.: "Rekursive Filterung in der Zeitreihenanalyse, diskutiert am Beispiel einer Gesprächsaufzeichnung". Vortrag auf der 27. Tagung experimentell arbeitender Psychologen. Wuppertal, 31.3.-4.4.1985a.
- TÖLKE, I.: "Der Einsatz rekursiver Schätzalgorithmen zur Analyse multivariater Prozeßdaten". Vortrag auf der Arbeitstagung "Prozeßforschung in den Sozialwissenschaften". ZUMA Mannheim, 11.-12. Juni 1985b.
- TÖLKE, I.: "Recursive filtering in dynamic linear structural equation models". Beitrag zum Fourth European Meeting of the Psychometric Society and Classification Societies. Cambridge, GB, 2.-5. Juli 1985c.
- TÖLKE, I.: "Ein Prozeßmodell zur Veränderungsanalyse". In: Diagnostica, 1985d (im Druck).
- WAMPOLD, B. E.: "Tests of dominance in sequential categorical data". In: Psychological Bulletin, 96, S. 424-429.
- WAMPOLD, B. E. & MARGOLIN, G.: "Nonparametric strategies to test the independence of behavioral states in sequential data". In: Psychological Bulletin, 1982, 92, S. 755-765.
- WEISS, R. L., HOPS, H., und PATTERSON, G. R.: "A framework for conceptualizing marital conflict: A technology for altering it, some data for evaluating it". In: HAMMERLYNCK, L. A., HANDY, L. C., und MASH, E. J. (Hrsg.): Behavior Change: The Fourth Banff Conference on Behavior Modification. Champaign, Ill.: Research Press 1973, S. 309-342.
- WIENER, N.: The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. Massachusetts: MIT-Press 1949.
- ZADEH, L. A., und DESOER, C. A.: Linear systems theory, the state space approach. New York: McGraw-Hill 1963.

Max-Planck-Institut für Bildungsforschung
Veröffentlichungen (Stand August 1986)
Reihe: Materialien aus der Bildungsforschung

- 1 Christof Conrad
Schulsysteme im quantitativen Vergleich – Hamburg und Westberlin.
Statistische Indikatoren für Demokratisierung und Modernisierung im Schulwesen.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1972. DM 10,—
- 2 Christiane Bierbaum
Die schwedische Schuldemokratie.
Ein Modell für die Schulreform in der Bundesrepublik? Ein Bericht über Hintergründe,
Verlauf und Ergebnisse der Demokratisierung der Schule in Schweden.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1975. DM 10,—
- 3 Frank Braun, Detlef Glowka, Klaus-Dieter Mende, Peter Müller, Helga Thomas,
Jürgen Zimmer
Schulreform und Gesellschaft.
Vergleichende Studie über die gesellschaftlichen Bedingungen von Schulreformen in
sieben europäischen Ländern. Teil I und Teil II.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1975.
(Dieser Band ist über den Klett-Verlag, Stuttgart, zu beziehen.)
- 4 Heinrich Meulemann
Wortbedeutungsverständnis und Wortbedeutungsexplikation.
Eine empirische Analyse zweier Aspekte des Sprachverhaltens und ihrer sozialen
Determinanten im Rahmen der Theorie der linguistischen Codes. Teil I und Teil II.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1976. DM 33,—
- 5 Helga Gripp
Zur Struktur ehelicher Interaktion.
Determinanten der Genese pathologischer Kommunikationsformen in der Ehe und
ihre Behandlung in der Therapie. Eine Fallanalyse.
Zweite Auflage.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1978. DM 22,—
- 6 Helmut Köhler
Daten zur Situation der Hauptschule in Berlin (West).
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1976. DM 6,—
- 7 Yvonne Schütze
Innerfamiliäre Kommunikation und kindliche Psyche.
Eine exemplarische Analyse der Kommunikations- und Rollenstruktur zweier
Familien.
Zweite, korrigierte Auflage.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1978. DM 27,—
- 8 Helmut Köhler
Quellen der Bildungsstatistik.
Eine kommentierte Zusammenstellung statistischer Veröffentlichungen.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1977. DM 8,—
- 9 Ulrich W. Bamberg
Leistungsbezogene Persönlichkeitsmerkmale gelernter Maschinenschlosser.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1977. DM 10,—
- 10 Peter Siewert und Helmut Köhler
Grundschulfinanzierung und Grundschulpolitik.
Aufgaben und Lastenverteilung im Primarbereich.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1977. DM 8,—

- 11 Barbara Hegelheimer
Berufsqualifikation und Berufschancen von Frauen in der Bundesrepublik Deutschland.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1977. DM 14,—
- 12 Wolfgang Lempert
Untersuchungen zum Sozialisationspotential gesellschaftlicher Arbeit.
Ein Bericht.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1977. DM 11,—
- 13 Helmut Köhler
Der relative Schul- und Hochschulbesuch in der Bundesrepublik Deutschland 1952 bis 1975.
Ein Indikator für die Entwicklung des Bildungswesens.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1978. DM 10,—
- 14 Wolfgang Lempert, Ernst Hoff, Lothar Lappe
Konzeptionen zur Analyse der Sozialisation durch Arbeit.
Theoretische Vorstudien für eine empirische Untersuchung.
Zweite Auflage.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1980. DM 29,—
- 15 Marianne Müller-Brettel
Die Diskussion der Arbeitslehre 1964–1979.
Eine annotierte Bibliographie.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1979. DM 8,—
- 16 Klaus Stanjek
Die Entwicklung des menschlichen Besitzverhaltens.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1980. DM 13,—
- 17 Claudia von Grote
Die Bedeutung der soziolinguistischen Kodes für die kommunikativen Fähigkeiten eines Sprechers.
Eine empirische Analyse der objektiven Kommunikationseffizienz schichtenspezifischer Sprechweisen in variierenden situativen Kontexten.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1980. DM 28,—
- 18 Ulf Homann
Die Diskussion der Schulpflichtzeitverlängerung in der Bundesrepublik Deutschland 1949 bis 1979.
Eine annotierte Bibliographie.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1981. DM 10,—
- 19 Helmut Köhler, Luitgard Trommer
Quellen der Bildungsstatistik auf Länder- und Gemeindeebene.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1981. DM 12,—
- 20 Wilke Thomssen
Verarbeitung von beruflichen und betrieblichen Erfahrungen.
Gruppendiskussionen mit Befragten der Maschinenschlosserstudie über ausgewählte Ergebnisse dieser Studie.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1981. DM 20,—
- 21 Karl Anders
Von Worten zur Syntax:
Spracherwerb im Dialog.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1982. DM 19,—
- 22 Siegfried Reuss
Die Verwirklichung der Vernunft.
Hegels emanzipatorisch-affirmative Bildungstheorie.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1982. DM 52,—

- 23 Jürgen Peter Hess
Empirische Sozialforschung und automatisierte Datenverarbeitung.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1982. DM 17,—
- 24 Ernst Hoff, Lothar Lappe, Wolfgang Lempert
Methoden zur Untersuchung der Sozialisation junger Facharbeiter.
Teil I und Teil II.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1983. DM 48,—
- 25 Wolfgang Hoebig
Bedürftigkeit – Entfremdung der Bedürfnisse im Kapitalismus.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1984. DM 37,—
- 26 Gundel Schümer
Daten zur Entwicklung der Sekundarstufe I in Berlin (West).
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1985. DM 19,—
- 27 Hans-Uwe Hohner
Kontrollbewußtsein und berufliche Restriktivität.
Entwicklung und empirische Erprobung eines integrativen Modells.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1985. DM 49,—
- 28 Ingeborg Tölke
Ein dynamisches Schätzverfahren
für latente Variablen in Zeitreihenanalysen.
Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung 1986. DM 17,—