

Klaus Hallatschek

Beobachtung hochfrequenter kaskadierender Röntgenoszillationen im Tokamak ASDEX Upgrade mit Hilfe von Zeit-/Frequenztransformationen zur Erkennung von Ereignissen und Identifikation der Oszillationen als Tearing-Moden

# Abstract

The data volumes which are generated by the fast diagnostics of modern magnetic fusion experiments during a plasma discharge are so large that they can not be stored completely and their analysis in whole is impossible. To solve this problem, it is necessary, to detect the interesting plasma events automatically, to reduce the sampling rate in uninteresting time windows during a discharge, or limit the off-line analysis to the interesting portions of the data. These problems and their solutions are discussed in the first part of this thesis. With the methods developed there, high frequency mode cascades have been discovered in ASDEX Upgrade. Their phenomenology and physical interpretation are reported in the second part. In the first part, the possibility to detect plasma events with the help of time-frequency transforms is examined. It has been found, that the wavelet-transform is a good way of sorting signal amplitudes by time and frequency simultaneously, which separates different events from each other and from noise. To carry out the wavelet-transform in real time, a novel transform algorithm for multi-voice gabor wavelets is described. This algorithm forms the basis for the implementation of a novel data acquisition system for the soft-X-ray diagnostic of ASDEX Upgrade, which is presented later on. Furthermore an off-line algorithm for the detection and *identification* of modes in the ASDEX Upgrade tokamak using wavelet-transformed soft-X-ray and Mirnov data is described.

In the second part, high frequency mode cascades, a transient event in the ASDEX Upgrade tokamak, are discussed. A cascade consists of a sequence of modes of the form  $(m, n) = (n + 1, n)$ , where each mode destabilizes one with  $n$  increased by one and is subsequently stabilized again. In some kind of chain reaction,  $n$  is observed to run from  $n \sim 5$  up to  $n \sim 23$ . It is shown, that the modes can be interpreted as tearing modes, which interact through local changes of the  $m = 0$  component of the current profile. The appearance of cascades is always related to a region of low shear, which is ascribed to previous activity of a  $(m, n) = (1, 1)$ -mode and strong impurity accumulation, and leads to instability of tearing modes with high mode numbers. The destabilization and stabilization of the modes have been reproduced by a simple quasilinear model.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Erkennung von Ereignissen</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Automatische Erkennung von Ereignissen</b>	<b>7</b>
2.1	Zeit-/Frequenztransformationen zur Erkennung von Ereignissen . . . . .	7
2.2	Wahl der Zeit-/Frequenztransformationen . . . . .	8
2.3	Schätzung des Hintergrundniveaus . . . . .	11
2.4	Extraktion von Ereignissen . . . . .	13
2.5	Aliasing . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Schneller Transformationsalgorithmus</b>	<b>19</b>
3.1	Notation . . . . .	20
3.2	Algorithmus . . . . .	21
3.2.1	Berechnung der Startwerte $u_{k,v}^0$ . . . . .	22
3.2.2	Schritt von $u_{k,v}^b \rightarrow u_{k,v}^{b+1}$ . . . . .	22
3.3	Umkehrung der Transformation . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Echtzeitdatenreduktion</b>	<b>29</b>
4.1	Hardwareaufbau . . . . .	29
4.2	Ablauf der Datenerfassung . . . . .	31
4.3	Ergebnisse . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Automatische Erkennung von Modenzahlen</b>	<b>35</b>
<b>II</b>	<b>Modenkaskaden — hochfrequente Tearing-Moden an der <math>q = 1</math>-Fläche</b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>41</b>
6.1	Prinzip des Tokamaks . . . . .	41
6.2	Die Röntgendiagnostik von ASDEX-Upgrade . . . . .	43
6.3	Auswertung von Modenoszillationen bei der SXR-Diagnostik . . . . .	45

6.4	Die Mirnov-Diagnostik . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Experimentelle Beobachtungen</b>	<b>49</b>
7.1	Kaskadierende Oszillationen . . . . .	49
7.2	Niederfrequente SXR-Signaturen . . . . .	50
7.3	Vorläufer- und Folgeereignisse . . . . .	50
7.4	Bestimmung der Modenzahlen . . . . .	51
7.5	Modenpositionen und $q$ -Verlauf . . . . .	53
<b>8</b>	<b>Oszillationsfrequenzen</b>	<b>67</b>
8.1	Überlegungen zur Plasmarotation . . . . .	67
8.1.1	Elektronen- und Ionendrift . . . . .	67
8.1.2	Berechnung der Modenfrequenz aus der Ionendriftgeschwindigkeit . . . . .	68
8.2	Interpretation der experimentellen Befunde . . . . .	69
8.2.1	Absolute Frequenzen kurz nach Verunreinigungsakkumulation . . . . .	70
8.2.2	Frequenzänderung über mehrere Kaskaden hinweg . . . . .	71
8.2.3	Schnelle Frequenzänderung während der Existenz einer Mode . . . . .	73
<b>9</b>	<b>Stabilitätsanalyse</b>	<b>75</b>
9.1	Überlegungen zum Instabilitätstyp . . . . .	75
9.2	Zylindrische $\Delta'$ -Schätzung . . . . .	78
9.2.1	Die Tearing-Mode Gleichung . . . . .	78
9.2.2	Abschätzung für große $m$ . . . . .	80
9.2.3	Abschätzung der Stabilität für die $q$ -Verläufe bei den Kaskaden . . . . .	82
9.3	Numerische Überprüfung der Abschätzung . . . . .	82
<b>10</b>	<b>Triggerungsmechanismus</b>	<b>85</b>
10.1	Quasilineare Simulation des Triggerungsmechanismus . . . . .	86
10.2	Zeitdauer des Triggerungsvorgangs . . . . .	88
<b>11</b>	<b>Bedingungen für Kaskaden</b>	<b>91</b>
11.1	Herkunft des $q$ -Plateaus . . . . .	91
11.2	Entstehung hoher Modenzahlen . . . . .	95
11.3	Negative Feldlinienverscherung . . . . .	99
<b>12</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>103</b>
12.1	Teil I . . . . .	103
12.2	Teil II . . . . .	105

# Kapitel 1

## Einleitung

Ein zentrales Thema bei der Entwicklung eines Fusionsreaktors basierend auf dem magnetischen Einschluß eines Plasmas ist die Stabilität des Kräftegleichgewichts von Plasma und Magnetfeld. Instabilitäten können an Tokamaks zur Verschlechterung des Energieeinschlusses (z.B. Ballooning-, Interchange-, Tearing-Moden), zum Auswurf schneller Teilchen (z.B. Fishbones) oder sogar zum Abreißen des Plasmastroms und damit zur abrupten Beendigung einer Plasmaentladung (Disruption) führen. Eine Mode ist in diesem Zusammenhang eine Normalschwingung, die sich aus den um das Gleichgewicht linearisierten Bewegungsgleichungen für das Plasma ergibt.

Die auf Grund der Instabilitäten anwachsenden Störungen des Gleichgewichts ändern die Temperatur- und Dichteverteilung des Plasmas in charakteristischer Weise, was Änderungen der vom Plasma emittierten weichen Röntgenstrahlung nach sich zieht. Eine Möglichkeit, Instabilitäten zu untersuchen, ist daher die Messung der emittierten Strahlung entlang von mittels Kollimatoren definierten Linien quer durch das Plasma. Der Nachweis der Störungen des Gleichgewichts wird dabei in vielen Fällen durch Oszillationen der gemessenen Röntgenintensität vereinfacht, da die Störungen durch die Rotation des Plasmas periodisch (mit  $\sim 10$  kHz an ASDEX-Upgrade) an den Detektoren vorbeigeführt werden.

Am Tokamak ASDEX-Upgrade geschieht die Messung der weichen Röntgenstrahlung mit den fünf Lochkameras der SXR-Diagnostik (soft X-ray), welche die Emittivität entlang von je 12 bis 32 Linien messen. Die insgesamt 124 gemessenen Röntgenintensitäten werden mit einer Abtastrate von 500 kHz und einer Auflösung von 12 Bit digitalisiert und von einem Transputersystem erfaßt. Wegen der großen Datenmenge von  $3,72 \cdot 10^8$  Werten, die während einer etwa 6 s dauernden Plasmaentladung anfällt, und der endlichen Speicherkapazität des Transputersystems von  $1,24 \cdot 10^8$  Meßwerten, muß eine Auswahl der aufzuzeichnenden Daten getroffen werden. Bisher wurde dazu die Abtastrate in Zeitintervallen fest vor jeder Entladung eingestellt.

Ist die voreingestellte Abtastrate kleiner als die zweifache Frequenz der Röntgensignale, werden die Meßdaten verfälscht. *Aliasing* tritt auf und ändert die scheinbare Frequenz des Signals. Durch diesen Effekt werden Ereignisse verschiedener Frequenz miteinander und mit dem Hintergrundrauschen vermischt und es können nur noch sehr begrenzt phy-

sikalische Informationen aus dem Signal gewonnen werden. Ferner macht es das hohe Datenaufkommen sehr schwer, interessante und physikalisch relevante Ereignisse darin zu entdecken. Für beide Probleme wurden in der vorliegenden Arbeit Lösungen gesucht.

Um dem hohen Datenaufkommen der Röntgendiagnostik zu begegnen, wurden hauptsächlich auf Zeit-/Frequenztransformationen basierende Methoden entwickelt, um interessante Plasmaereignisse automatisch zu erkennen und herauszufiltern.

Als eine konkrete Anwendung der erarbeiteten Methodik wurde anschließend ein verbessertes Datenaufnahmeverfahren für die Röntgendiagnostik entwickelt und am Experiment erprobt, mit dem das erwähnte Problem des Aliasing beseitigt werden kann. Dabei wird *während* einer Plasmaentladung anhand der Daten einiger Röntgenkanäle periodisch entschieden, ob aufzeichnenswerte Plasmaereignisse vorliegen, und die Abtastrate gemäß dem Abtasttheorem an die höchste vorkommende Frequenz angepaßt. Hierzu wurde ein sehr effizienter Wavelettransformationalgorithmus für Gaborwavelets entwickelt, der für die Echtzeitanwendung in der Lage ist, mit der Datenrate der SXR-Diagnostik schrittzuhalten.

Als zweite Anwendung der Zeit-/Frequenztransformationen wurde ein Verfahren entwickelt, welches anhand von Oszillationen in den Meßdaten der SXR-Diagnostik und den mit der Mirnov-Diagnostik gemessenen Magnetfeldoszillationen am Plasmarand automatisch Moden erkennt und sie durch Projektion ihrer Meßdaten auf typspezifische Untervektorräume des Raums der Meßdaten nach ihren poloidalen und toroidalen Modenzahlen, d.h. nach ihren Wellenzahlen bei einem Umlauf um den kleinen bzw. großen Torusumfang, unterscheidet. Damit ist es z.B. möglich, eine große Menge von Entladungen nach bestimmten Moden zu durchsuchen, um Gesetzmäßigkeiten für ihr Auftreten zu ermitteln.

Dank der erarbeiteten Methoden und den bei der Erprobung des neuen Datenaufnahmeverfahrens gewonnenen Daten war es möglich, ein bisher noch nicht an Tokamaks beobachtetes Ereignis in ASDEX-Upgrade nachzuweisen, welches eine bemerkenswerte Signatur besitzt: Unter bestimmten Plasmabedingungen treten Oszillationen der Röntgenintensität aus dem Plasmakern mit diskreten Frequenzen auf, bei denen eine Frequenz die nächsthöhere anregt, bevor sie selbst wieder verschwindet. In Form einer Kettenreaktion werden dabei Frequenzen bis über die maximale mit der Röntgendiagnostik nachweisbare Frequenz von 250 kHz hinaus angeregt. Solche Kaskaden von niedrigen zu hohen Frequenzen treten mehrfach hintereinander auf.

Die den beobachteten Oszillationen zugeordneten poloidalen und toroidalen Modenzahlen erreichen ungewöhnlich hohe Werte bis etwa 23. Bisher waren an ASDEX-Upgrade nur Modenzahlen bis etwa fünf beobachtet worden.

Eine genaue Analyse der Meßdaten ergab, daß sich die Moden trotz ihrer hohen Modenzahlen als Tearing-Moden erklären lassen:

Die beobachteten Oszillationsfrequenzen konnten im Rahmen der Meßfehler auf die diamagnetische Drift und die toroidale Rotation der Ionen zurückgeführt werden. Die Instabilität von Moden mit den beobachteten Modenzahlen in den konkreten Entladungsszenarien wurde theoretisch durch analytische und numerische Rechnungen gezeigt. Die Wechselwirkung zwischen den Moden, welche zur Kettenreaktion führt, wurde numerisch

modelliert. Abgeschätzte Zeitskalen für die Anregung der Folgemoden ergaben sich in der richtigen Größenordnung.

Davon ausgehend konnte schließlich ein Kriterium für das Auftreten von Kaskaden aufgestellt werden. Dabei wurde aus den experimentellen Beobachtungen auf die Existenz eines Bereichs nahezu konstanter Helizität der Magnetfeldlinien vor dem Auftreten der Kaskaden geschlossen, welcher offenbar auf eine Mode mit poloidaler und toroidaler Modenzahl gleich Eins, einen "Internen Kink", zurückzuführen ist. Aus direkten Messungen der Ströme oder Felder im Plasma läßt sich die Variation der Helizität der Magnetfeldlinien nicht mit solcher Genauigkeit ermitteln. Deshalb konnte eine solche Region konstanter Helizität bisher nur aus der Beobachtung reduzierter Ablation von ins Plasma geschossenen Pellets aus festem Wasserstoff oder Deuterium im Bereich konstanter Helizität [32] und dem Verhalten von "Snakes" während Sägezahnaktivität [33, 68] gefolgert werden.

Der folgende erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Erkennung und Extraktion von Ereignissen aus den Meßdaten der Röntgendiagnostik. Dabei kommen überwiegend Methoden der Informatik bzw. Numerik zum Einsatz. Im zweiten Teil werden die experimentellen und theoretischen Ergebnisse zur Physik der kaskadierenden Moden behandelt.





# Teil I

## Erkennung von Ereignissen

# Kapitel 2

## Automatische Erkennung von Ereignissen

### 2.1 Zeit-/Frequenztransformationen zur Erkennung von Ereignissen

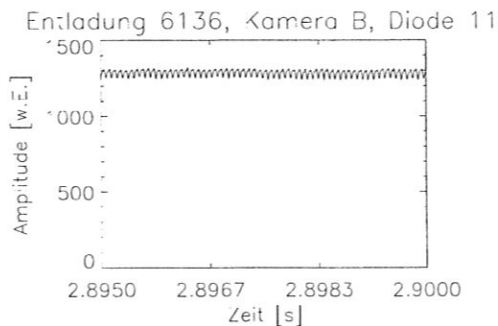


Abbildung 2.1: SXR-Signal einer (1,1)-Mode

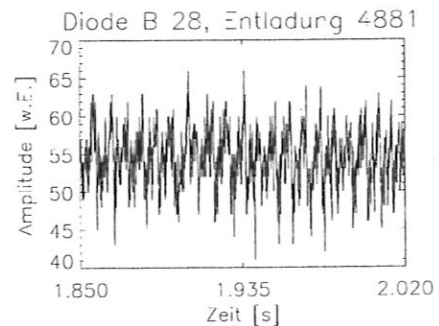


Abbildung 2.2: SXR-Signal von Typ I-Elms

Die Abbildungen 2.1 und 2.2 zeigen jeweils beispielhafte Ereignisse in den Daten der Röntgendiagnostik. Wie bei vielen anderen Plasmaereignissen sind die gemessenen Röntgensignale nahezu periodisch. Dies bewirkt, daß die Ereignisse im Frequenzraum lokalisiert sind, d.h. einen endlichen Bereich einnehmen, wie man etwa aus der Fouriertransformierten des Ausschnitts von Abbildung 2.1 in Abbildung 2.3 sieht.

Da ein Ereignis einen Anfangs- und Endzeitpunkt hat, es also auch in der Zeit lokalisiert ist, und sich seine Frequenz zeitlich ändert, wird eine gute Trennung der Ereignisse voneinander und vom Signalhintergrund, der sowohl Rauschen als auch Störungen umfaßt, durch gleichzeitiges Sortieren der Signalamplituden nach Zeit und Frequenz erreicht [7]. Dies leisten die Zeit-/Frequenztransformationen .

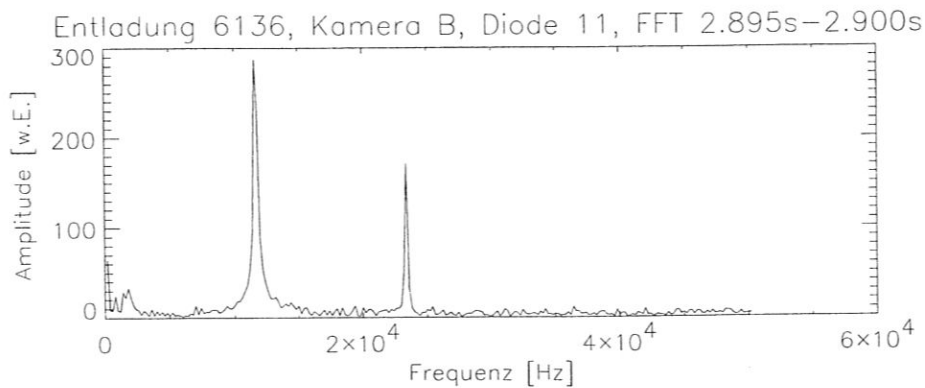


Abbildung 2.3: Fouriertransformierte des Ausschnitts von Abbildung 2.1

Besonders deutlich wird dieser Sachverhalt anhand von Abbildung 2.4. Hier sind die Rohdaten, ihre Fouriertransformierte und, in Vorwegnahme der Ergebnisse von Abschnitt 2.2, der Betrag der Zeit-/Frequenztransformierten<sup>1</sup> einer der Ereignisfolgen, die in Teil II behandelt werden, dargestellt. Weder in den Rohdaten noch in der Fouriertransformierten sind die Ereignisse zu sehen. Sie werden dort jeweils miteinander und mit dem Rauschen bis zur Unkenntlichkeit vermischt. In der Zeit-/Frequenztransformierten treten jedoch deutliche, klar getrennte Strukturen zu Tage, da die Amplituden, die zu den Ereignissen gehören, in relativ wenigen Koeffizienten “konzentriert” werden.

Die Suche nach Ereignissen besteht nach Ausführen der Transformation aus der Suche nach signifikanten Koeffizienten in der Zeit-/Frequenzebene. Dazu ist es erforderlich, das Hintergrundniveau des Signals abschätzen zu können, was in Abschnitt 2.3 behandelt wird. Zwei konkrete Varianten der Suche nach Ereignissen werden im Abschnitt 4.2 und im Kapitel 5 behandelt.

## 2.2 Wahl der Zeit-/Frequenztransformationen

Anzumerken ist zunächst, daß neben den Zeit-/Frequenztransformationen auch bilineare Verteilungen wie etwa die Wigner-Ville-Verteilung [71, 6] zum “Sortieren nach Zeit und Frequenz” benutzt werden können. Wegen der Bilinearität steigt der Aufwand zu ihrer Berechnung jedoch quadratisch mit der Zahl der Meßwerte. Dies macht sie ungeeignet für den interaktiven Betrieb und die Echtzeitverarbeitung, weshalb in dieser Arbeit die Zeit-/Frequenztransformationen weiter verfolgt wurden.

Eine Zeit-/Frequenztransformation berechnet im Grunde genommen ein zeitabhängiges Frequenzspektrum. Dafür bieten sich zunächst die Fenster-Fouriertransformationen an. Das Frequenzspektrum für einen Zeitpunkt wird dabei berechnet, indem das Signal mit einer dort lokalisierten Fensterfunktion multipliziert, und anschließend die Fouriertransformierte gebildet wird. D.h. der Koeffizient der Transformierten zum Zeitpunkt  $t$

<sup>1</sup>Es handelt sich um eine Wavelettransformierte.

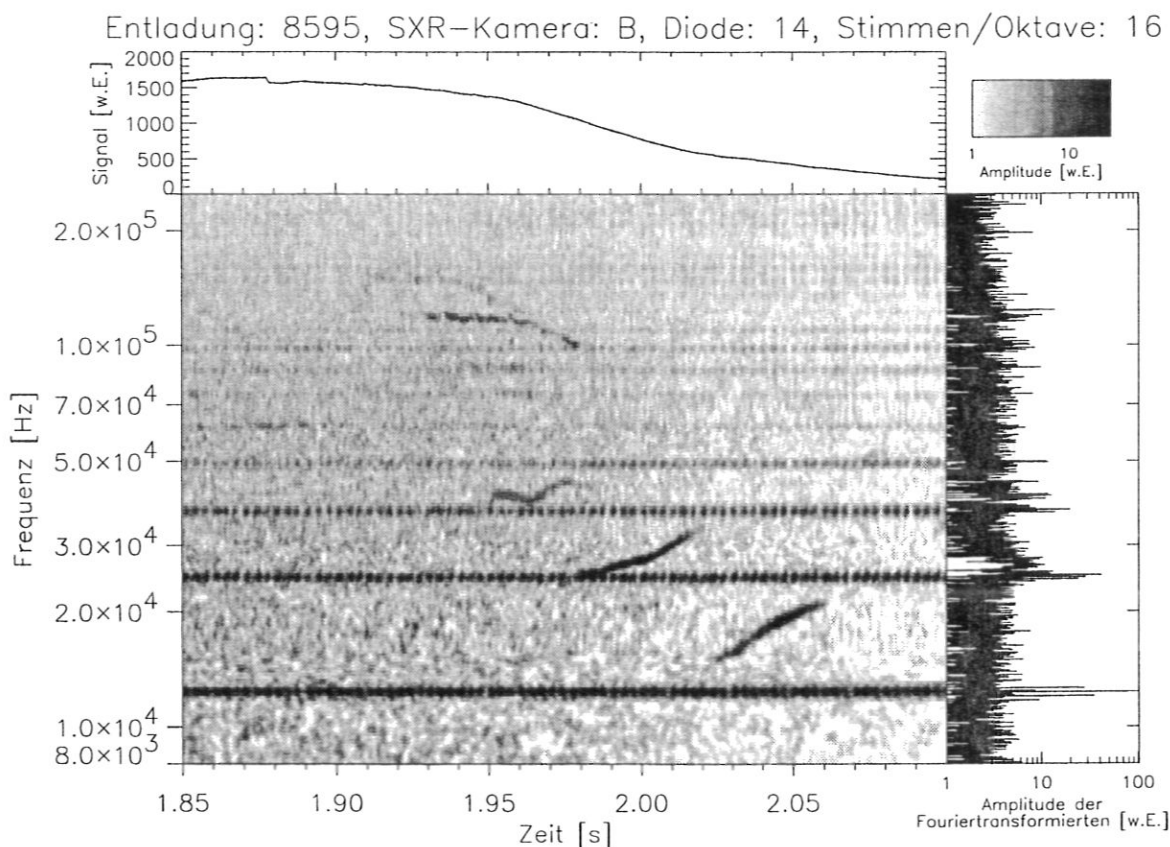


Abbildung 2.4: Hochfrequente Tearing-Moden in einem zentralen SXR-Kanal (siehe Teil II). Oben: Rohsignal. Rechts: Betrag der Fouriertransformierten. Mitte: Wavelettransformierte in Graustufendarstellung. Die waagerechten Linien im Waveletbild sind elektronische Störungen konstanter Frequenz, welche sich auch in der Fouriertransformierten als scharfe Spitzen manifestieren. Das interessierende Ereignis ist nur in der Wavelettransformierten in Form der schrägen und gekrümmten Kurven erkennbar.

läßt sich — äquidistantes Abtasten des Signals vorausgesetzt — nach

$$c_{t,\omega} = \sum_{j|x_j-t \in S} s_j w(x_j - t) e^{-i\omega x_j} \quad (2.1)$$

berechnen, wobei  $S$  der Träger der am Ursprung lokalisierten Fensterfunktion  $w$  ist,  $s_j$  der  $j$ -te Signalwert und  $x_j$  dessen Zeitpunkt ist. Falls die Fensterfunktion keinen endlichen Träger hat, jedoch für große Argumente schnell abfällt, kann die Summe für numerische Berechnungen approximativ nach wenigen Gliedern abgebrochen werden.

Die Zeit- bzw. Frequenzauflösung solcher Transformation kann wegen der Linearität der Transformation an unendlich gut in der Zeit bzw. Frequenz lokalisierten Signalen festgestellt werden. Für ein Signal, welches nur am Meßpunkt zu  $j = x_j = 0$  von 0 verschieden ist, ergibt sich  $c_{t,\omega} = s_0 w(t)$ . Für ein Signal  $s_j = s_0 e^{i\omega_0 x_j}$  mit der reinen

Frequenz  $\omega_0$  erhält man, falls  $t = x_k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$c_{t,\omega} = s_0 \sum_{j|x_j-t \in S} w(x_j - t) e^{i(\omega_0 - \omega)x_j} \quad (2.2)$$

$$= s_0 e^{i(\omega_0 - \omega)t} \sum_{j|x_j \in S} w(x_j) e^{i(\omega_0 - \omega)x_j} \quad (2.3)$$

$$= s_0 e^{i(\omega_0 - \omega)t} \widehat{w}(\omega - \omega_0). \quad (2.4)$$

Dies ist die in Frequenz und Phase verschobene Fouriertransformierte  $\widehat{w}$  der Fensterfunktion  $w$ . Zeit- und Frequenzauflösung sind also durch die Breiten der Fensterfunktion bzw. ihrer Fouriertransformierten gegeben.

Nach der Unschärferelation [2, Theorem 3.5],

$$\Delta\omega\Delta t \geq 1/2, \quad (2.5)$$

$$(\Delta t)^2 := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |w(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt}, \quad (2.6)$$

$$(\Delta\omega)^2 := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\widehat{w}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{w}(\omega)|^2 d\omega}, \quad (2.7)$$

ist das Produkt aus Zeit- und Frequenzbreite der Fensterfunktion nach unten begrenzt. Die Gleichheit wird in (2.5) zwar nur von den Gaußfunktionen erreicht, für "vernünftige" Fensterfunktionen ohne Merkmale mit sehr kleinen Skalenlängen wie Kanten und Knicks kann jedoch näherungsweise ebenfalls von Gleichheit ausgegangen werden.

Die Fenster-Fouriertransformation besitzt damit eine endliche Zeit- und Frequenzauflösung, die unabhängig von der Frequenz ist. Bei physikalischen Signalen ist jedoch eher davon auszugehen, daß die *relative* Frequenzbreite der Ereignisse eine Konstante ist und die *absolute* Frequenzbreite proportional zur Frequenz ist. Um die Auflösung den erwarteten Breiten anzupassen, kann man in (2.1) die Fensterbreite umgekehrt proportional zur Frequenz variieren:

$$c_{t,\omega} = \sum_{j|\alpha\omega(x_j-t) \in S} s_j w(\alpha\omega(x_j - t)) e^{-i\omega x_j}. \quad (2.8)$$

Dabei ist  $\alpha$  eine Konstante, die die relative Frequenzauflösung festlegt. Mit  $w_\alpha(t) := w(\alpha t) e^{it}$  erhält man daraus

$$c_{t,\omega} = e^{-i\omega t} \sum_{j|\alpha\omega(x_j-t) \in S} s_j w_\alpha^*(\omega(x_j - t)), \quad (2.9)$$

was bis auf den Phasenfaktor einer sogenannten *Wavelettransformation* [10] mit dem Wavelet<sup>2</sup>  $w_\alpha$  entspricht. Ein Koeffizient der Wavelettransformierten kann damit als Skalarprodukt des Signals mit dem um den Faktor  $\omega$  gestauchten oder gestreckten Wavelet aufgefaßt werden.

<sup>2</sup>In einem strengeren Sinne werden manchmal nur Funktionen, die gewisse Orthogonalitäts und Integralbedingungen erfüllen, als Wavelets bezeichnet [2, Definition 3.9].

Neben den Wavelets, die sich als Produkt einer komplexen Exponentialfunktion mit einer Fensterfunktion ergeben, sind Wavelets mit den verschiedensten Eigenschaften, wie z.B. gewissen Orthogonalitätseigenschaften für reelle Wavelets [9, 16, 4], in der Literatur gebräuchlich. Für die in dieser Arbeit vorgesehene Anwendung kommt es jedoch nur auf die leichte physikalische Interpretierbarkeit der Transformaten und die möglichst gute Auflösung in Zeit und Frequenz an. Aus diesem Grund wurden Gaborfunktionen als Wavelets benutzt, welche mit einer Gaußfunktion als Fensterfunktion  $w$  entstehen:

$$w_\alpha(t) := e^{-\alpha^2 t^2 + it}. \quad (2.10)$$

Die entstehenden Waveletkoeffizienten liefern bei reellen Signalen dieselbe Amplitude unabhängig von der Phase eines Ereignisses, da die Fouriertransformierte von (2.10) im wesentlichen bei positiven Frequenzen lokalisiert ist, weshalb keine phasenabhängigen Interferenzeffekte zwischen dem positiven und dem negativen Frequenzanteil eines reellen Signals auftreten können. Da die Fouriertransformierte einer Gaußfunktion wieder eine Gaußfunktion ist, hat man mit zunehmender Entfernung von einem Ereignis in Zeit oder Frequenz ein superexponentielles Abklingen des Beitrags des Ereignisses in den Koeffizienten, so daß nahe beieinanderliegende Ereignisse mit sehr verschiedenen Amplituden noch getrennt werden können.

Der Übergang in den Frequenzraum ist für nichtäquidistante Gitter sehr kompliziert [8, 11]. Aus diesem Grund beschränken sich die obigen Transformationen und der in Kapitel 3 angegebene Algorithmus auf äquidistante Gitter. Die im Archivsystem gespeicherten Meßpunkte der SXR-Diagnostik sind insofern häufig nichtäquidistant, als sie Intervalle mit unterschiedlichen Abtastraten enthalten. Zur Berechnung des Skalarprodukts eines archivierten Signals mit einem Wavelet wurde immer das feinste äquidistante Gitter benutzt, welches sich im Zeitbereich des Wavelets durch die gespeicherten Meßpunkte legen ließ.

Zur genauen Festlegung einer auf einem Computer zu berechnenden Wavelettransformierten müssen noch die Punkte der Zeit-/Frequenzebene, für die die Koeffizienten  $c_{t,\omega}$  berechnet werden, festgelegt werden. Dies geschieht in Kapitel 3 beim Aufstellen des Transformationsalgorithmus. Dort wird auch die Forderung nach konstanter relativer Frequenzauflösung aus Effizienzgründen etwas abgeschwächt.

## 2.3 Schätzung des Hintergrundniveaus

Abbildung 2.5 zeigt einen Ausschnitt einer SXR-Spur einer 5kA Testentladung<sup>3</sup> ohne Ereignisse mit ihrer Fourier- und Wavelettransformierten. Es ist ein frequenzabhängiges Rauschen zu sehen, sowie mehrere scharfe Frequenzen, die von elektronischen Störungen herrühren<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>Solche Plasmaentladungen werden zu Beginn eines Versuchstages zu Kalibrationszwecken durchgeführt.

<sup>4</sup>Die Schwingung bei 12,6kHz und ihre Harmonischen stammen z.B. von einem Zerhacker der Stromversorgung der Hauptverstärker.

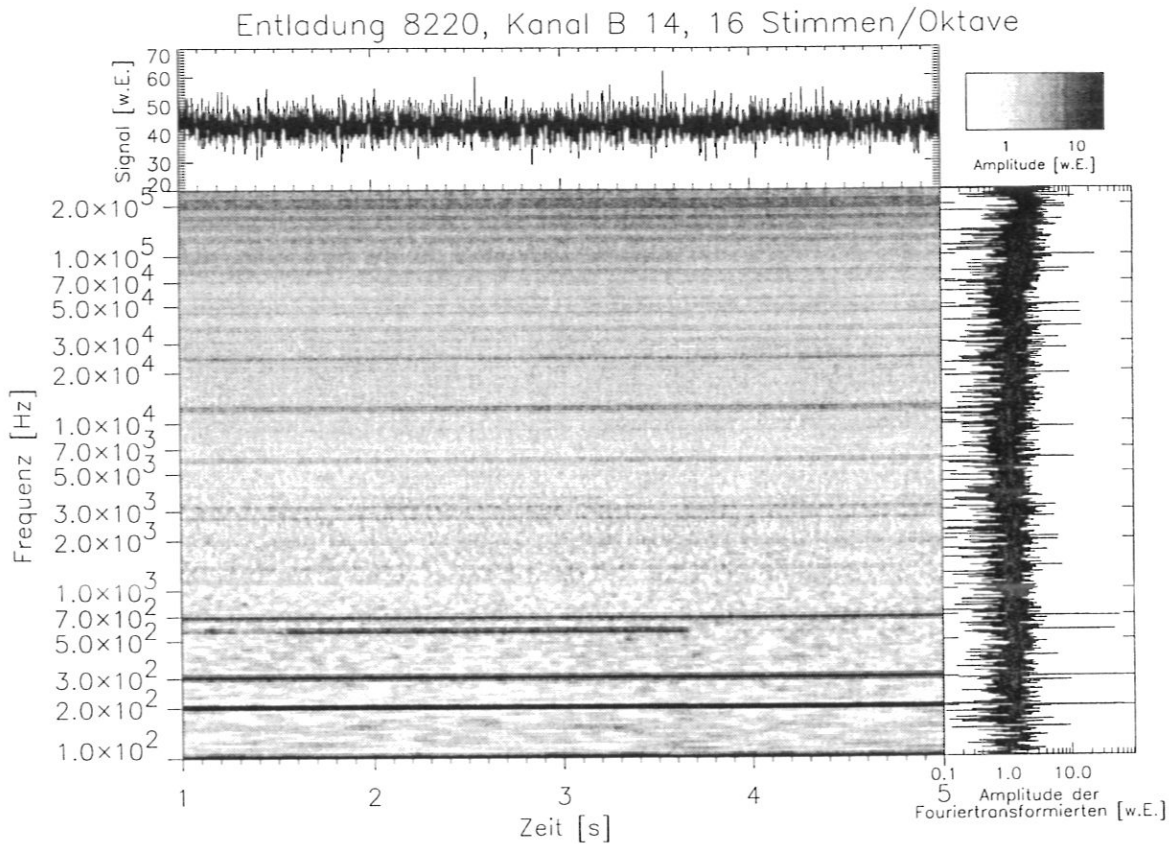


Abbildung 2.5: 5kA Testentladung. Oben: SXR-Signal. Rechts: Betrag der Fouriertransformierten. Mitte: Wavelettransformierte in Graustufendarstellung. Die waagerechten Linien im Waveletbild sind elektronische Störungen konstanter Frequenz, welche sich auch in der Fouriertransformierten als scharfe Spitzen manifestieren.

Nicht alle elektronischen Störungen befinden sich in verschiedenen Entladungen immer bei der selben Frequenz, und es handelt sich dabei nicht um reine harmonische Schwingungen. Es muß daher für jede Entladung, die nach Ereignissen durchsucht wird, das Hintergrundniveau für jede Ergebnisfrequenz der Wavelettransformation getrennt bestimmt werden. Zur Schätzung des Hintergrunds steht als Information nur das Signal selbst in Form der Beträge der Waveletkoeffizienten zur Verfügung, obwohl von jedem einzelnen nicht bekannt ist, ob er Beiträge von einem Ereignis enthält, die die Schätzung durch ihre hohen Amplituden verfälschen.

Die Idee zur Konstruktion eines robusten Schätzers [15, Abschnitt 15.7] für das Hintergrundniveau besteht darin, nur den unteren Bruchteil  $p$  ( $p \sim 30\%$ ) aller Beträge der Waveletkoeffizienten einer Frequenz zur Schätzung zu benutzen. Sofern nicht mehr als ein Anteil von  $1 - p$  aller Koeffizienten durch Ereignisse für die Schätzung "verdorben" ist, kann daraus die Größenordnung des Hintergrunds geschätzt werden.

Hierfür kann angenommen werden, die Verteilung der komplexen Waveletkoeffizien-

ten bei einer Frequenz, die lediglich Rauschen oder Störungen aufweisen, sei durch eine gaußförmige Dichtefunktion

$$\rho(c_{t,\omega}) = N \exp\left(-\frac{|c_{t,\omega}|^2}{2\sigma_\omega^2}\right) \quad (2.11)$$

bestimmt, wobei  $N$  eine Normierungskonstante und  $\sigma_\omega$  das Hintergrundniveau bei der Frequenz  $\omega$  ist. Die Dichtefunktion des Betrags ist damit

$$\rho(|c_{t,\omega}|) = N2\pi|c_{t,\omega}| \exp\left(-\frac{|c_{t,\omega}|^2}{2\sigma_\omega^2}\right), \quad (2.12)$$

die Verteilungsfunktion  $f(x) := P(|c_{t,\omega}| \leq x)$  ist damit

$$f(|c_{t,\omega}|) = 1 - \exp\left(-\frac{|c_{t,\omega}|^2}{2\sigma_\omega^2}\right), \quad (2.13)$$

wobei an dieser Stelle die Normierungskonstante sehr einfach bestimmt werden kann, da  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  gelten muß. Aus der Gleichung  $f(\sigma_s) = p$  kann man bereits einen für den angestrebten Zweck ausreichenden Schätzwert  $\sigma_s$  angeben:

$$\sigma_s = \frac{|c_p|}{\sqrt{-2 \ln(1-p)}}. \quad (2.14)$$

Dabei ist  $|c_p|$  der Betrag des Koeffizienten, der betraglich an  $p \cdot n$ -ter Stelle aller Koeffizienten steht,  $n$  ist die Gesamtzahl der Koeffizienten, die in die Schätzung eingehen. Wirken sich Ereignisse unter den Koeffizienten aus, so wird die Relation (2.14) etwas verfälscht. Es läßt sich abschätzen, daß dieser Effekt für  $0,1 < p < 0,9$  weniger als  $2q\sigma_s$  ausmacht, wobei  $0 \leq q < 1$  der Anteil der betroffenen Koeffizienten ist. Davon abgesehen ist die Standardabweichung von  $\sigma_s$  für große  $n$  durch  $\sigma_\omega \sqrt{\frac{p}{2n(1-p)\ln(1-p)^2}}$  gegeben, was für  $0,2 < p < 0,9$  kleiner als  $1,2\sigma_\omega/\sqrt{n}$  ist.

## 2.4 Extraktion von Ereignissen

Für die genauere Analyse eines Ereignisses ist es wünschenswert, seine Signale von den anderen Ereignissen sowie von Rauschen und Störungen zu befreien. Dazu kann man z.B. alle Koeffizienten der Wavelettransformierten bis auf diejenigen auf Null setzen, welche Beiträge des Ereignisses enthalten, und die Wavelettransformation umkehren. Sofern sich die Störungen und anderen Ereignisse nicht mit dem gewünschten Ereignis in der Zeit-/Frequenzebene überlappen, kann es auf diese Weise extrahiert werden. Da das Hintergrundrauschen bis auf seine schwache Frequenzabhängigkeit im wesentlichen in den Waveletkoeffizienten gleichverteilt ist, das Signal hingegen in wenigen Koeffizienten "konzentriert" ist (siehe Abschnitt 2.1), wird das Rauschen dabei zum größten Teil vom Nutzsignal entfernt. Voraussetzung ist, daß die Rücktransformation das Rauschen in den Waveletkoeffizienten



nicht verstärkt. Dies trifft z.B. für die in Kapitel 3 besprochene Transformation zu, die Rücktransformation ist jedoch relativ kompliziert und wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht implementiert.

Eine sehr einfache Methode, ein Ereignis mit diskreter zeitabhängiger Frequenz<sup>5</sup> aus den Daten herauszufiltern, besteht darin, die Zeitabhängigkeit der Signalfrequenz zu eliminieren, indem man es durch einen an den Frequenzverlauf angepaßten Phasenfaktor  $e^{i\phi(t)}$  dividiert, und es anschließend mit einem digitalen Bandpaßfilter [15, Abschnitt 13.5] mit fester Mittenfrequenz filtert.

Sei etwa ein Signal durch

$$s(t) := \Re[a(t)e^{i\psi(t)}], \quad a(t) \in \mathbb{C}, \psi(t) \in \mathbb{R}, \quad \psi'(t) = \omega(t) \quad (2.15)$$

gegeben. Dabei sind  $a(t)$  bzw.  $\omega(t)$  die zeitabhängige Amplitude bzw. Winkelgeschwindigkeit des Signals. Wählt man  $\phi(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\phi'(t) := \tilde{\omega}(t)$ , wobei  $\tilde{\omega}$  eine Approximation von  $\omega(t)$ , etwa mittels Splineinterpolation, ist, so erhält man als zu filterndes Signal

$$f(t) := s(t)e^{-i\phi(t)} = a(t)e^{i\psi(t)-i\phi(t)} + a^*(t)e^{-i\psi(t)-i\phi(t)}. \quad (2.16)$$

Der erste Summand oszilliert mit sehr niedriger Frequenz, da sich die beiden Phasen gegenseitig herausheben. Der zweite Summand oszilliert mit ungefähr der zweifachen Signalfrequenz. Anwenden eines Tiefpaßfilters mit einer Abschneidefrequenz kleiner als  $\min(\omega(t))$  auf  $f(t)$  hinterläßt somit nur den ersten Summanden  $f_0(t) := a(t)e^{i\psi(t)-i\phi(t)}$ . Die optimale Wahl der Abschneidefrequenz des Tiefpaßfilters hängt von der Güte der Approximation von  $\omega(t)$  durch  $\tilde{\omega}(t)$  ab. Er muß empirisch so klein gewählt werden, daß  $f_0(t)$  gerade noch unverändert durchgelassen wird.

Das gefilterte Signal mit dem korrekten Frequenzverlauf erhält man schließlich durch Multiplikation von  $f_0(t)$  mit dem Phasenfaktor  $e^{i\psi(t)}$ . Das reelle Nutzsignal ergibt sich daraus durch Bilden des Realteils. Anzumerken ist, daß aus der Polarkoordinatendarstellung des gefilterten *komplexen* Signals sofort die momentane Phase und Amplitude abgelesen werden können.

Ein Beispiel zur Anwendung dieses Verfahrens wird im nächsten Abschnitt gegeben.

## 2.5 Aliasing

Aliasing tritt auf, wenn die halbe Abtastrate, die sogenannte Nyquistfrequenz [14], kleiner als die Maximalfrequenz des abgetasteten Signals ist. In diesem Fall gibt es z.B. bei harmonischen Signalen ein Signal mit niedrigerer Frequenz, welches die Meßwerte interpoliert (siehe Abbildung 2.6). In Abbildung 2.7 ist dargestellt, welche Frequenzen auf diese Weise miteinander verwechselt werden können. Um bei der digitalen Signalverarbeitung einen um die Frequenz 0 angeordneten Bereich korrekt bearbeiten zu können, werden vor dem Digitalisieren von Signalen normalerweise alle Frequenzen über der Nyquistfrequenz mit einem analogen Tiefpaß, einem sogenannten "Anti-Aliasing"-Filter, ausgeblendet. Bei

<sup>5</sup>Dies ist die typische Signatur einer *Mode* in Mirnov- und SXR-Diagnostik.

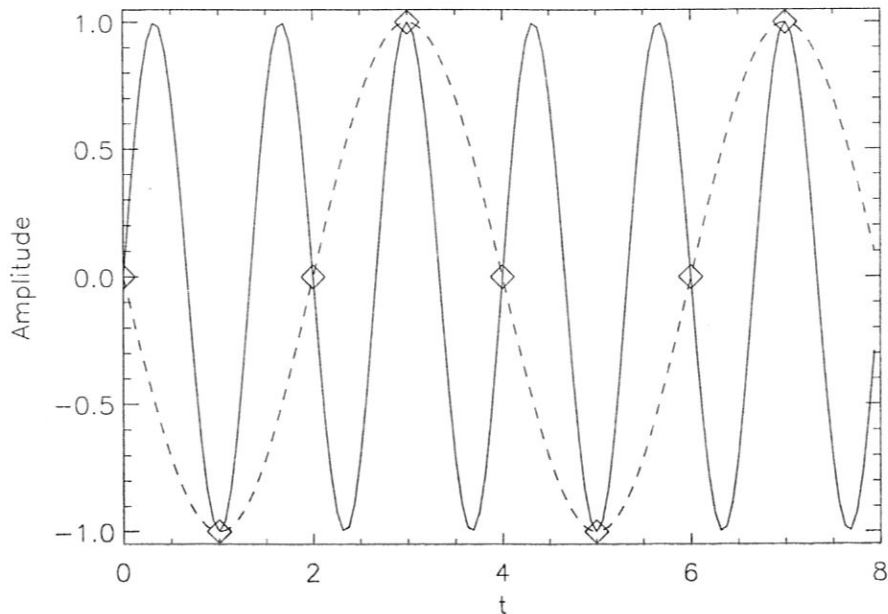


Abbildung 2.6: Fehlerhafte Interpolation eines mit zu niedriger Rate abgetasteten Signals hoher Frequenz

der SXR wird die Grenzfrequenz des Filters auf die halbe maximale für eine Entladung voreingestellte Abtastfrequenz gesetzt.

Benutzt man bei der Wavelettransformation Waveletfrequenzen bis zur maximalen Signalfrequenz, auch wenn diese über der Nyquistfrequenz liegt, so erscheint das Ereignis an allen Positionen in der Zeit-/Frequenzebene, von denen es gemäß Abbildung 2.7 herkommen könnte. Ein Beispiel hierfür ist in Abbildung 2.8 gegeben. Für Ereignisse mit langsam veränderlicher Frequenz läßt sich die Frequenz ausgehend von Zeitbereichen mit ausreichender Abtastrate in Bereiche mit Aliasing hineinverfolgen.

Die herkömmlichen Interpolationsverfahren wie z.B. die Splineinterpolation sind nur für Signalfrequenzen deutlich kleiner als die Nyquistfrequenz geeignet. Zur Rekonstruktion muß daher das Verfahren von Abschnitt 2.4 benutzt werden: Division durch einen aus dem Frequenzverlauf bestimmten Phasenfaktor senkt die Signalfrequenz auf nahezu Null. Dadurch kann das Signal leicht interpoliert oder gefiltert werden. Am Ende wird der Phasenfaktor wieder auf das interpolierte Signal multipliziert.

Die Interpolation ist z.B. nötig um die relativen Phasen in verschiedenen Kanälen korrekt zu bestimmen.

Abbildung 2.9 zeigt die rekonstruierte Grundschwingung und erste Harmonische bei einer (1,1)-Oszillation. Zum Test des Verfahrens wurde das rekonstruierte Ereignis von den Rohdaten abgezogen und abermals einer Wavelettransformation unterworfen. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.10 zu sehen: Wo vorher in der Zeit-/Frequenzebene die Mode

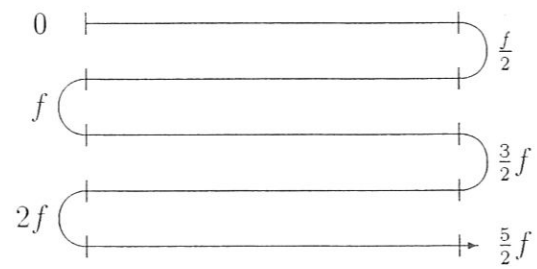


Abbildung 2.7: Bei einer Abtastrate  $f$  ununterscheidbare Frequenzen liegen in dieser gefalteten Darstellung des Frequenzraums übereinander.

war, ist jetzt nichts mehr.

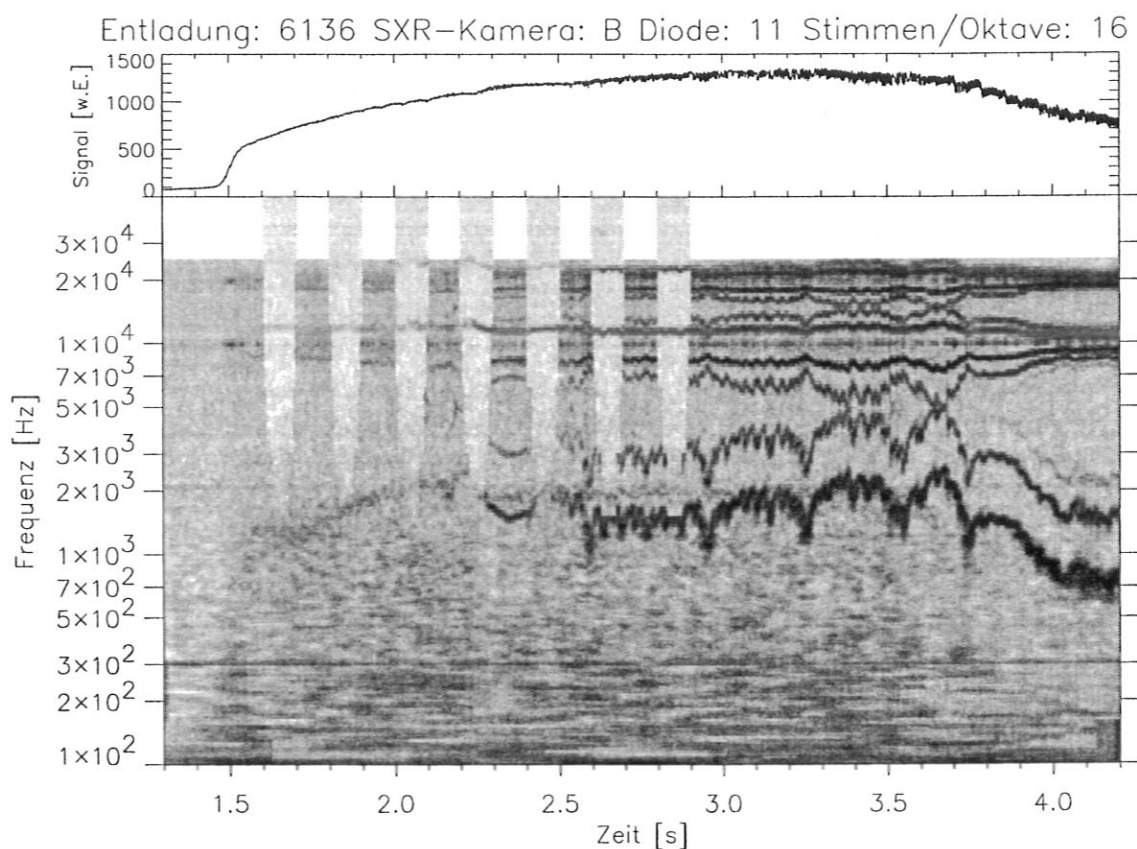


Abbildung 2.8: SXR-Signal und Wavelettransformierte in Graustufendarstellung. Die Entladung wurde durchgehend mit 10 kHz abgetastet, 7 Zeitfenster mit einer Rate von 250 kHz. In den Bereichen mit 10 kHz Abtastrate wurden die Waveletkoeffizienten bis zur fünffachen Nyquistfrequenz berechnet. Anhand der Transformierten in den schnell abgetasteten Zeitfenstern läßt sich der korrekte Frequenzverlauf des Ereignisses (eine (1,1)-Mode und ihre Harmonische) unter den durch Alasing entstehenden Spiegelungen auswählen.

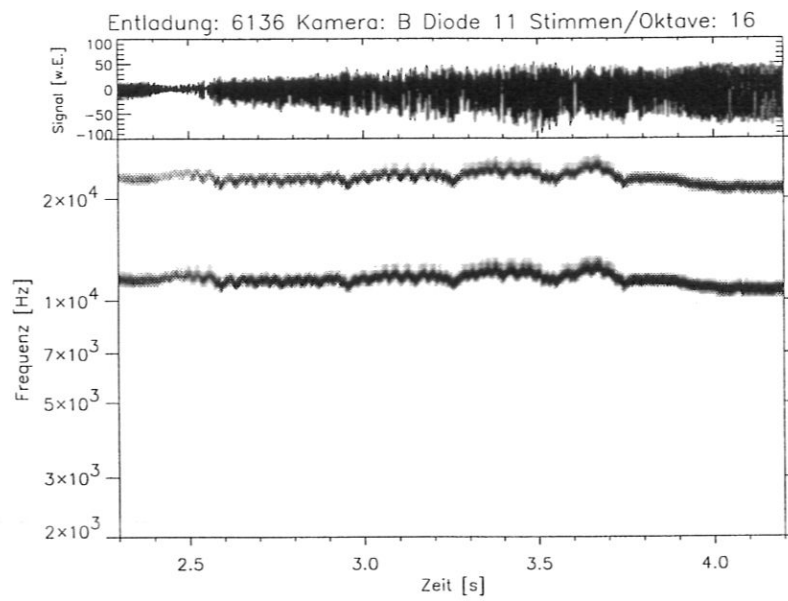


Abbildung 2.9: Rekonstruiertes SXR-Signal bei Entladung 6136

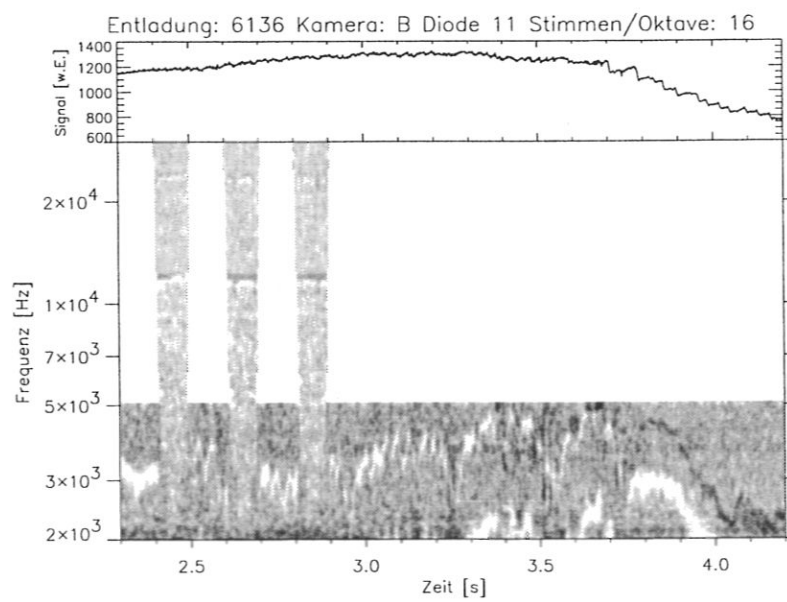


Abbildung 2.10: Ursprüngliches SXR-Signal abzüglich des rekonstruierten Signals



wird innerhalb einer Oktave proportional zur Frequenzbreite des Wellenpakets gewählt (siehe Abbildung 3.1). Damit sind die Wavelets innerhalb einer Oktave nicht durch Kontrahieren bzw. Dehnen und Verschieben der Zeitachse ineinander überführbar, wohl aber die jeweils in Oktavabstand liegenden Wavelets. Die gesamte Menge der "Testfunktionen", deren Skalarprodukte mit dem Signal berechnet werden, läßt sich somit aus den um Zweierpotenzen gedehnten Wavelets einer Oktave, den sogenannte "Stimmen" erhalten. Die gesamte Transformation ist eine sogenannte "mehrstimmige Wavelettransformation" [10].

Der Algorithmus wurde zur Erkennung von Ereignissen in Echtzeit auf einem PowerPC-601 Prozessor mit 80MHz Taktfrequenz implementiert und ist in der Lage, eine Million Werte pro Sekunde zu transformieren (siehe Kapitel 4).

### 3.1 Notation

Im folgenden ist mit Frequenz immer die Winkelgeschwindigkeit gemeint.

Es wird folgende Abkürzung für die Testfunktionen benutzt:

$$t_{k,v}^b(t) := g_{\sigma_b, (2\nu - v - \frac{1}{2})\Delta_{\omega b}} \left( t - (k + \frac{1}{2})\Delta_{tb} \right), \quad (3.1)$$

$$g_{\sigma, \omega_0}(t) := \exp \left( i\omega_0 t - \frac{t^2}{2\sigma^2} \right), \quad (3.2)$$

$$\sigma_b = 2^b \sigma_0, \quad \Delta_{\omega b} = \frac{\pi}{2\nu} 2^{-b}, \quad \Delta_{tb} = 2^b \Delta_{t0},$$

$k \in \mathbb{Z}$	...	Zeitlicher Index
$b \in \mathbb{N}_0$	...	Oktavenindex
$v \in \{0, \dots, \nu - 1\}$	...	Frequenzindex innerhalb einer Oktave
$\nu \in \mathbb{N}$	...	Zahl der Stimmen pro Oktave

$\nu$  bezeichnet dabei die Zahl der Subbänder, in die eine Oktave unterteilt wird,  $\Delta_{\omega b}$  und  $\Delta_{tb}$  beschreiben den Zeit- und Frequenzabstand der Testfunktionen.

$\Delta_{t0}$  wird unten bei der Ableitung des Algorithmus festgelegt.  $\sigma_0$  wird so gewählt, daß das Verhältnis der Breiten der Testfunktionen in Frequenzraum und im Zeitraum dem Verhältnis der Schrittweiten in der Frequenz und in der Zeit entspricht:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\Delta_{t0}}{\Delta_{\omega 0}}}. \quad (3.3)$$

Zur Ableitung des Algorithmus werden auch Funktionen  $t_{k,v}^b$  mit  $v \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, \nu - 1\}$  benutzt, die nicht zu einer Oktave gehören.

Das zu transformierende Signal wird als Funktion von  $\mathbb{Z}$  aufgefaßt:

$$s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diskrete Skalarprodukte werden mittels der Trapezregel berechnet:

$$\langle f; g \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^*(k)g(k).$$

Da einer der Faktoren im folgenden immer im wesentlichen eine Gaborfunktion ist, kann die Reihe in sehr guter Näherung durch endliche Summen approximiert werden.

Die Skalarprodukte von Signal und Testfunktionen werden mit

$$u_{k,v}^b := \langle t_{k,v}^b; s \rangle$$

bezeichnet.

$\delta(x)$  bezeichnet die Dirac-Distribution mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0).$$

## 3.2 Algorithmus

Die Skalarprodukte mit Wellenpaketen einer bestimmten Breite können besonders effizient berechnet werden, wenn es gelingt, diese mit wenigen Operationen aus den Skalarprodukten zur halben Breite zu berechnen. Der Algorithmus besteht dann in der sukzessiven Berechnung der Skalarprodukte mit den Funktionen

$$\{t_{k,v}^b : k \in \mathbb{Z}, v \in \{0, \dots, 2\nu - 1\}\}$$

für  $b = 0, \dots, b_{\max}$  aus den Skalarprodukten für den jeweils vorhergehenden Wert von  $b$ . Die Startwerte für  $b = 0$  lassen sich als Kurzzeit-Fouriertransformierte interpretieren und mittels FFT berechnen.

Die Transformierte besteht aus den Koeffizienten  $u_{k,v}^b$  mit

$$(b, k, v) \in \{0, \dots, b_{\max} - 1\} \times \mathbb{Z} \times \{0, \dots, \nu\} \cup \{b_{\max}\} \times \mathbb{Z} \times \{0, \dots, 2\nu\}. \quad (3.4)$$

Für reale endliche Signale wird  $k$  abgeschnitten, sobald kein nennenswerter Überlapp zwischen dem Signal und den Testfunktionen mehr existiert.



### 3.2.1 Berechnung der Startwerte $u_{k,v}^0$

Die Berechnung der Skalarprodukte für  $b = 0$  läßt sich wie folgt auf die schnelle Fouriertransformation zurückführen:

$$u_{k,v}^0 = \left\langle g_{\sigma_0, (2\nu - v - \frac{1}{2})\Delta_{t0}} \left( t - \left( k + \frac{1}{2} \right) \Delta_{t0} \right); s \right\rangle = \quad (3.5)$$

$$= \left\langle \exp \left( i(2\nu - v - \frac{1}{2})\Delta_{t0} \left( t - \left( k + \frac{1}{2} \right) \Delta_{t0} \right) - \frac{(t - (k + \frac{1}{2})\Delta_{t0})^2}{2\sigma_0^2} \right); s \right\rangle \quad (3.6)$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}} s(l) \cdot \exp \left( -i(2\nu - v - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2\nu} \left( l - \left( k + \frac{1}{2} \right) \Delta_{t0} \right) - \frac{(l - (k + \frac{1}{2})\Delta_{t0})^2}{2\sigma_0^2} \right) \quad (3.7)$$

$$= \sum_{m=0}^{4\nu} \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(m + 4\nu n) \cdot \exp \left( -i(2\nu - v - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2\nu} \left( m + 4\nu n - \left( k + \frac{1}{2} \right) \Delta_{t0} \right) - \frac{(m + 4\nu n - (k + \frac{1}{2})\Delta_{t0})^2}{2\sigma_0^2} \right) \quad (3.8)$$

$$= \exp \left( -iv\frac{\pi}{2\nu} \left( k + \frac{1}{2} \right) \Delta_{t0} \right) \sum_{m=0}^{4\nu} \exp \left( i\frac{vm\pi}{2\nu} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(m + 4\nu n) \cdot \exp \left( -i(2\nu - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2\nu} \left( m + 4\nu n - \left( k + \frac{1}{2} \right) \Delta_{t0} \right) - \frac{(m + 4\nu n - (k + \frac{1}{2})\Delta_{t0})^2}{2\sigma_0^2} \right) \quad (3.9)$$

$$- \frac{(m + 4\nu n - (k + \frac{1}{2})\Delta_{t0})^2}{2\sigma_0^2} \quad (3.10)$$

Die innere Summe ist unabhängig von  $v$  und muß deshalb nur einmal für jedes Indexpaar  $k, m$  berechnet werden. Wegen des Faktors  $\exp \left( -\frac{(4\nu n)^2}{2\sigma_0^2} \right)$  konvergiert sie zudem so schnell, daß nur wenige Glieder berücksichtigt werden müssen. Die äußere Summe entspricht einer Fouriertransformation der Länge  $4\nu$ , welche sich mittels FFT besonders effizient ausführen läßt, falls  $\nu$  eine 2er-Potenz ist.

### 3.2.2 Schritt von $u_{k,v}^b \rightarrow u_{k,v}^{b+1}$

Um ein Rechenverfahren für den Schritt von den Skalarprodukten bestimmter Länge zu denen doppelter Länge zu erhalten, genügt es die  $t_{k,v}^{b+1}$  durch die  $t_{k',v'}^b, k', v' \in \mathbb{Z}$  darzustellen. Hierzu wird zunächst eine Beziehung zwischen Gaborfunktionen verschiedener Breiten abgeleitet. Damit wird anschließend ein Gleichungssystem zwischen den ursprünglichen Testfunktionen und den Testfunktionen doppelter Länge gebildet, wobei einige noch freie Parameter der Transformation festgelegt werden. Um das Gleichungssystem nach den gesuchten Testfunktionen doppelter Länge aufzulösen, ist schließlich noch eine diskrete Faltung zu invertieren.

## Identität für Gaborfunktionen

Es wird folgende Identität für die diskrete Faltung von Gaborfunktionen benutzt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{\sigma_1, \omega_1}(t - t_1 - k\Delta_t) \cdot g_{\sigma_2, \omega_2}(k\Delta_t - t_2) = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp \left( i\omega_1(t - t_1 - k\Delta_t) + i\omega_2(k\Delta_t - t_2) - \frac{(t - t_1 - k\Delta_t)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(k\Delta_t - t_2)^2}{2\sigma_2^2} \right) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp \left( i\omega_1(t - t_1) - i\omega_2 t_2 + ik\Delta_t(\omega_2 - \omega_1) - \frac{(t - t_1 - t_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \exp \left( - \left( \frac{t_2\sigma_1^2 + (t - t_1)\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - k\Delta_t \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2} \right) \right) \\
&= NK(t) \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \exp(ik\Delta_t(\omega_2 - \omega_1)) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( i\omega \left( \frac{t_2\sigma_1^2 + (t - t_1)\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - k\Delta_t \right) - \frac{\omega^2}{\frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{2}{\sigma_2^2}} \right) d\omega \right] \\
&= NK(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp \left( i\omega \frac{t_2\sigma_1^2 + (t - t_1)\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \frac{\omega^2}{\frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{2}{\sigma_2^2}} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(ik\Delta_t(\omega_2 - \omega_1 - \omega)) \right] d\omega \\
&= NK(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp \left( i\omega \frac{t_2\sigma_1^2 + (t - t_1)\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \frac{\omega^2}{\frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{2}{\sigma_2^2}} \right) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{\Delta_t} \delta \left( \frac{2\pi l}{\Delta_t} + \omega_2 - \omega_1 - \omega \right) \right] d\omega \\
&= \frac{2\pi NK(t)}{\Delta_t} \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} \exp \left( i \left( \frac{2\pi l}{\Delta_t} + \omega_2 - \omega_1 \right) \frac{t_2\sigma_1^2 + (t - t_1)\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \frac{\left( \frac{2\pi l}{\Delta_t} + \omega_2 - \omega_1 \right)^2}{\left( \frac{2}{\sigma_1^2} + \frac{2}{\sigma_2^2} \right)} \right) \\
&= \frac{2\pi N}{\Delta_t} \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \frac{\omega_1\sigma_1^2 + (\frac{2\pi l}{\Delta_t} + \omega_2)\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}(t - t_1 - t_2) \cdot \\
&\quad \cdot g_{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}, 0} \left( \frac{2\pi l}{\Delta_t} + \omega_2 - \omega_1 \right) \cdot \exp \left( i \frac{2\pi l}{\Delta_t} t_2 \right), \tag{3.11}
\end{aligned}$$

wobei definiert wird:

$$N := \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)}}, \quad K(t) := \exp\left(i\omega_1(t-t_1) - i\omega_2 t_2 - \frac{(t-t_1-t_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right).$$

Diese Gleichung beschreibt, wie durch Addition passender Wellenpakete mit zeitlicher Breite  $\sigma_1$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  bis auf gewisse Korrekturen und konstante Faktoren ein Wellenpaket mit der größeren Breite  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{\omega_1\sigma_1^2 + \omega_2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  konstruiert werden kann.

### Gleichungssystem für Testfunktionen doppelter Breite

Um mit Gleichung (3.11) die Breite  $\sigma_1$  zu verdoppeln, wie es für den Übergang von einer Oktave zur nächsthöheren erforderlich ist, muß  $\sigma_2 = \sqrt{3}\sigma_1$  sein.

Die in der Reihe auf der rechten Seite von (3.11) für  $l \neq 0$  auftretenden Korrekturwellenpakete haben die gleiche zeitliche Ausdehnung wie das Ergebniswellenpaket. Sie haben zu diesem folgende Winkelgeschwindigkeitsdifferenzen ( $\sigma_2 = \sqrt{3}\sigma_1$ ):

$$\frac{\frac{2\pi l}{\Delta_t} \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2\pi l}{\Delta_t}, \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.12)$$

Um ein abgeschlossenes Gleichungssystem zu erhalten, sollten die Testfunktionen  $t_{k,v}^{b+1}$  die Korrekturwellenpakete enthalten. Dazu muß deren Frequenzabstand für  $\Delta_t = \Delta_{tb} = 2^b \Delta_{t0}$  ein Vielfaches von  $\Delta_{\omega b+1} = 2^{-b-1} \frac{\pi}{2\nu}$  sein. Das bedeutet:

$$\Delta_{t0} = \frac{6\nu}{m}, \quad m \in \mathbb{N} \text{ beliebig.}$$

Es stellt sich heraus, daß für  $m \geq 2$  ein abgeschlossenes lösbares Gleichungssystem für die gesuchten Testfunktionen der Oktave  $b+1$  aufgestellt werden kann.

Die Dichte der Testfunktionen  $t_{k,v}^b$  im Frequenzraum ist in folgender Tabelle für verschiedene  $m$  im Verhältnis zur kritischen Dichte  $\rho_{\text{krit.}} = 1/2\pi$  aufgeführt:

$m$	2	3	4	5
$\frac{1}{\Delta_{tb}\Delta_{\omega b}} / \rho_{\text{krit.}}, b \in \mathbb{N}$	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$

(3.13)

Da der Berechnungsaufwand der Wavelettransformierten mit wachsender Stützpunktdichte steigt, ist für Echtzeitanwendungen  $m = 2$  der interessanteste Fall. Er wird deshalb meistens im folgenden detaillierter betrachtet.

Zum Aufstellen eines Gleichungssystems für die  $t_{k,v}^{b+1}$  wählt man die Parameter in Gleichung (3.11) so, daß die Korrekturterme für  $l \neq 0$  möglichst klein sind. Man bestimmt also aus einer Zeile von Testfunktionen in der Zeit-/Frequenzebene mittels (3.11) näherungsweise jeweils zwei benachbarte Zeilen von Testfunktionen der nächsthöheren Oktave.

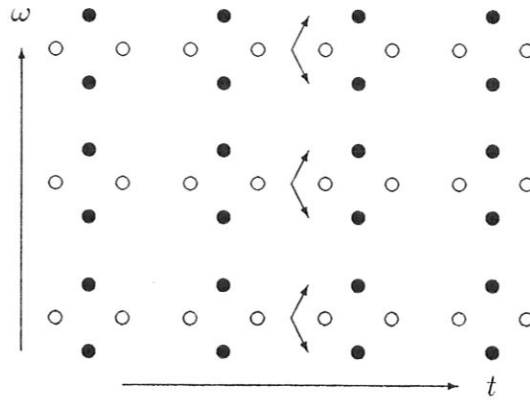


Abbildung 3.2: Verfeinerungsoperation in der Zeit-/Frequenzebene

Die Anordnung der Zentren der Testfunktionen ist dabei Abbildung 3.2 dargestellt. Zusammen mit den Korrekturtermen ergibt sich dann ein Gleichungssystem für die exakten Testfunktionen.

Aus Gleichung (3.11) erhält man bei diesem Vorgehen nach Einsetzen von

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_b = 2^b \sigma_0, & \sigma_0 &= \sqrt{\frac{\Delta_{t0}}{\Delta_{\omega 0}}} = 2\nu \sqrt{\frac{3}{m\pi}}, & \sigma_2 &= \sqrt{3}\sigma_1 \\
 \omega_1 &= (2\nu - \nu - \frac{1}{2})\Delta_{\omega b}, & \omega_2 &= \omega_1 \pm \frac{1}{2}\Delta_{\omega b+1} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2^2} = \omega_1 \pm \frac{2}{3}\Delta_{\omega b+1} \\
 t_1 &= \frac{1}{2}\Delta_{tb} & t_2 &= (k' + \frac{1}{2})\Delta_{tb+1} - t_1 = (2k' + \frac{1}{2})\Delta_{tb} \\
 \Delta_t &= \Delta_{tb} = 2^b \frac{6\nu}{m}, & \Delta_{\omega b} &= \frac{\pi}{2\nu} 2^{-b}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

unter Einführung der Bezeichnung  $t_{k',v'}^{b+1}$  für die zwischenzeitlich bestimmten groben Näherungen der Testfunktionen der nächsthöheren Oktave folgendes Gleichungssystem:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} t_{k,v}^b(t) \cdot g_{\sigma_2, \omega_2}(k\Delta_t - t_2) =: t_{k', 2\nu + (1 \pm 1)/2 - 2\nu}^{b+1} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 &t_{k', 2l + 2\nu + (1 \pm 1)/2 - 2\nu}^{b+1} = \\
 &= \frac{2\pi N}{\Delta_t} \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \frac{\omega_1 \sigma_1^2 + (\frac{2\pi l}{\Delta_t} + \omega_2) \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}(t - t_1 - t_2) \cdot \\
 &\quad \cdot g_{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}, 0}\left(\frac{2\pi l}{\Delta_t} + \omega_2 - \omega_1\right) \cdot \exp\left(i \frac{2\pi l}{\Delta_t} t_2\right) \\
 &= \sqrt{\frac{m}{8}} \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{2^{b+1}\sigma_0, \omega_1 + (m l \pm \frac{1}{2})\Delta_{\omega b+1}}\left(t - (2^{b+1}k' + \frac{1}{2})\Delta_{t0}\right) \cdot \\
 &\quad \cdot g_{\sqrt{\frac{4}{3}}/\sigma_1, 0}\left(\left(\frac{4m}{3}l \pm \frac{2}{3}\right)\Delta_{\omega b+1}\right) \cdot \exp\left(i \frac{4m}{3}l \Delta_{\omega b+1} t_2\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{m}{8}} \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} t_{k', 2l+2v+(1 \pm 1)/2-2\nu}^{b+1} \cdot g_{1,0} \left( \frac{2ml \pm 1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \right) \cdot \exp \left( i \frac{4m}{3} l \Delta_{\omega b+1} t_2 \right) \\
&= \sqrt{\frac{m}{8}} \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \cdot t_{k', 2l+2v+(1 \pm 1)/2-2\nu}^{b+1} \cdot g_{1,0} \left( \frac{2ml \pm 1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \right). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Für die Skalarprodukte  $\langle t_{k', v'}^{b+1}; s \rangle =: u_{k', v'}^{b+1}$  und  $u_{k', v'}^{b+1}$  ergibt sich das hierzu konjugiert komplexe Gleichungssystem:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{k, v}^b(t) \cdot g_{\sigma_2, -\omega_2}(k \Delta_t - t_2) = u_{k', 2v+(1 \pm 1)/2-2\nu}^{b+1} \quad (3.17)$$

$$u_{k', 2v+(1 \pm 1)/2-2\nu}^{b+1} = \sqrt{\frac{m}{8}} \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_{k', 2l+2v+(1 \pm 1)/2-2\nu}^{b+1} \cdot h(\pm l), \quad (3.18)$$

$$h(l) := (-1)^l g_{1,0} \left( \frac{2ml + 1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \right), \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (3.19)$$

Die linke Seite von Gleichung (3.17) läßt sich wie folgt umschreiben:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{k, v}^b(t) \cdot g_{\sigma_2, -\omega_2}(k \Delta_t - t_2) = \quad (3.20)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{k, v}^b(t) \cdot g_{\sigma_2, (v-2\nu+\frac{1}{2} \mp \frac{1}{3}) \Delta_{\omega b}} \left( \left( k - 2k' - \frac{1}{2} \right) \Delta_{tb} \right) \quad (3.21)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{k, v}^b(t) \cdot g_{1, (3v-6\nu+\frac{3}{2} \mp 1) \sqrt{\frac{\pi}{m}}} \left( \left( k - 2k' - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{m}} \right) \quad (3.22)$$

Einige Amplitudenwerte des Faltungskerns

$$g(k - 2k') := g_{1, (3v-6\nu+\frac{3}{2} \mp 1) \sqrt{\frac{\pi}{m}}} \left( \left( k - 2k' - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{m}} \right)$$

auf der rechten Gleichungsseite für den Fall  $m = 2$

$k - 2k'$	-4	-3	-2	-1	0
$ g(k - 2k') $	$1,24 \cdot 10^{-7}$	$6,63 \cdot 10^{-5}$	$7,38 \cdot 10^{-3}$	0,171	0,822
$k - 2k'$	1	2	3	4	5
$ g(k - 2k') $	0,822	0,171	$7,38 \cdot 10^{-3}$	$6,63 \cdot 10^{-5}$	$1,24 \cdot 10^{-7}$

(3.23)

zeigen, daß man für eine Genauigkeit von  $10^{-5}$  nur 8 Glieder des Kerns berücksichtigen muß. In einer realen Implementierung können noch gemeinsame Teilausdrücke bei der Berechnung der Faltung in Gleichung (3.22) für positives und negatives Vorzeichen mittels der kartesischen Darstellung komplexer Zahlen eliminiert werden.

Die rechte Seite von Gleichung (3.18) ist bis auf den Phasenfaktor eine diskrete Faltung der Koeffizienten  $u_{k', 2v'}^{b+1}, v' \in \mathbb{Z}$  bzw.  $u_{k', 2v'+1}^{b+1}, v' \in \mathbb{Z}$  mit einer Gaborfunktion im Frequenzraum.

Für  $m = 2$  sind hier einige Werte des Faltungskerns aufgeführt:

$l$	-3	-2	-1	0
$h(l)$	$-4,81 \cdot 10^{-11}$	$6,63 \cdot 10^{-5}$	-0,171	0,822
$l$	1	2	3	
$h(l)$	$-7,38 \cdot 10^{-3}$	$1,24 \cdot 10^{-7}$	$-3,88 \cdot 10^{-15}$	

(3.24)

Wie man sieht kann man für in der Signalverarbeitung typische Genauigkeitsanforderungen  $|l|$  auf 1 – 2 beschränken. Mit wachsendem  $m$  nehmen die Beiträge für  $l \neq 0$  exponentiell ab.

Um die so gekürzte Gleichung (3.18) nach den  $u_{k,v}^{b+1}$  aufzulösen, kann man z.B. mittels eines Exponentialansatzes den zur gekürzten Faltung auf der rechten Seite inversen Faltungskern  $f^{l\max}(l), l \in \mathbb{Z}$  mit

$$\sum_{|l| \leq l_{\max}} f^{l\max}(k-l)h(l) = \begin{cases} 1, & \text{für } k = 0 \\ 0, & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases} \quad (3.25)$$

bestimmen. Die Koeffizienten  $u_{k',v'}^{b+1}$  ergeben sich damit näherungsweise zu

$$u_{k',2v+(1\pm 1)/2-2\nu}^{b+1} \approx \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_{k',2l+2v+(1\pm 1)/2-2\nu}^{b+1} f^{l\max}(l). \quad (3.26)$$

Für  $m = 2$  und  $l_{\max} = 1$  erhält man:

$$f^1(i) = 1,221523(\exp_{-}(-4,710516i) + \exp_{-}(1,568924i)), \quad (3.27)$$

$$\exp_{-}(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } \mathbb{R} \ni x > 0 \\ e^x, & \text{für } \mathbb{R} \ni x \leq 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Wegen des exponentiellen Abfalls der  $f^1(i)$  mit wachsendem  $|i|$  genügt z.B. für eine relative Genauigkeit von  $10^{-4}$  die Berechnung von  $u_{k,v}^{b+1}$  für  $v \in \{-6, 2\nu + 6\}$  zur Berechnung der  $u_{k,v}^{b+1}, v \in \{0, \dots, 2\nu - 1\}$ . Die anderen Werte können in Formel (3.26) zu 0 gesetzt werden. Berücksichtigt man noch die Asymmetrie des Kerns  $f^1(i)$ , lassen sich noch einige weitere Werte weglassen.

Für ein anderen Abschneidewert von  $l$  in (3.18) oder höhere Werte von  $m$  ist der Abfall des inversen Faltungskerns ebenfalls exponentiell, so daß in jedem Fall Gleichung (3.26) stark gekürzt werden kann.

Wegen der endlichen Abtastrate des Signals tritt Aliasing auf, d.h.

$$u_{k,v}^b = u_{k,v+2^{b+2}\nu}^b \in \mathbb{Z}. \quad (3.29)$$

Da  $s$  eine reelle Funktion ist, gilt zusätzlich noch

$$u_{k,v}^b = u_{k,4\nu+1-v+2^{b+2}\nu}^* \in \mathbb{Z}. \quad (3.30)$$

Damit ergibt sich eine weitere Reduktion des Gleichungssystems (3.26).

Für  $m = 2$  und Abschneiden von Gleichung (3.18) mit  $|l| \leq 1$  werden mit den erwähnten Näherungen zur Berechnung der  $u_{k,v}^{b+1}, v \in \{0, \dots, 2\nu - 1\}$  nur noch die Werte  $u_{k,v}^{b+1}$  für  $v \in \{-11, -9, -7, -5, -3, -2, -1, 0, \dots, 2\nu - 1\}$  zur Berechnung der  $u_{k,v}^{b+1}, v \in \{0, \dots, 2\nu - 1\}$  benötigt.

Formel (3.26) kann effizient ausgewertet werden, indem man die  $u_{k,v}^{b+1}$  einzeln mit den Exponentialfunktionen, aus denen der Kern  $f(i), i \in \mathbb{Z}$  besteht, faltet, und die Resultate addiert. Es gilt nämlich folgende Rekursionsrelation:

$$\sum_{l=m}^n \exp_{-}(\lambda(l-k))c_l = c_k + e^{\lambda} \sum_{l=m}^n \exp_{-}(\lambda(l-(k+1)))c_l \quad (3.31)$$

für

$$c_l \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad m \leq k, \quad k+1 \leq n, \quad \mathbb{R} \ni \lambda < 0$$

Eine analoge Formel existiert für  $\lambda > 0$ .

Alternativ kann natürlich Gleichung (3.18) nach Anwenden der behandelten Näherungen und Vereinfachungen mittels des Gaußverfahrens gelöst werden.

Unter Anwendung der beschriebenen Methoden wurde für den Verfeinerungsschritt bei  $m = 2$  und  $l_{\max} = 1$  ein Aufwand von 12 reellen Multiplikationen und 12 reellen Additionen pro berechneten komplexen Koeffizienten benötigt, was im Bereich des Aufwands der schnellen Wavelettransformation von Wavelets sehr niedriger Ordnung liegt. Dieser geringe Aufwand macht das Verfahren für Echtzeitanwendungen interessant.

### 3.3 Umkehrung der Transformation

Durch Anwenden des beschriebenen Verfeinerungsalgorithmus auf die um  $90^\circ$  gedrehte Zeit-/Frequenzebene (Abbildung 3.2) kann die Länge der Skalarprodukte wieder um den Faktor zwei gekürzt werden. Für  $m = 2$  ist der auf diese Weise konstruierte Operator auf dem Raum der Koeffizienten  $u_{k,v}^b$  bis auf die gemachten Näherungen das Inverse zu dem oben beschriebenen Verfeinerungsoperator.

Durch geeignete Anwendungen von Verfeinerungs- und Vergrößerungsschritten ist es möglich, aus der in Abschnitt 3.2 beschriebenen transformierten die Startwerte  $u_{k,v}^0$  zurückzugewinnen. Zur vollständigen Umkehrung der beschriebenen waveletartigen Transformation muß noch aus den  $u_{k,v}^0$ , einer Fenster-Fouriertransformierten, das ursprüngliche Signal berechnet werden. Dies ist mittels einer zur Gaußfunktion dualen Fensterfunktion (siehe z.B. [1]) möglich.

## Kapitel 4

# Ein System zur automatischen Echtzeitdatenreduktion bei der Röntgendiagnostik von ASDEX-Upgrade

Zur Erprobung des Einsatzes der Zeit-/Frequenztransformationen bei der Erkennung von Ereignissen zur Regelung der Abtastrate nach ihrer Frequenz, um Aliasing (siehe Abschnitt 2.5) zu vermeiden, wurde die Wavelettransformation auf einer Testanlage für eine geplante Erweiterung der Röntgendatenerfassungsanlage implementiert.

Sie bestand aus acht T800-Transputern, welche auch in der alten Anlage zum Einsatz kamen, sowie zwei PowerPC 601-Prozessoren, die zur schnellen Erledigung der numerischen Rechnungen benutzt wurden.

Das Testsystem wurde parallel zur alten Datenerfassungsanlage an 20 Eingangskanäle der Diagnostik angeschlossen und während dreier Monate als eigenständige Diagnostik an ASDEX-Upgrade betrieben.

Zur Erkennung der Ereignisse wurden die Kanäle 14 und 29 von Kamera B (siehe Abbildung 6.3) benutzt, um sowohl für zentrale wie auch für Ereignisse am Plasmarand empfindlich sein zu können.

### 4.1 Hardwareaufbau

Abbildung 4.1 zeigt den Aufbau des Datenerfassungssystems. Es besteht aus 2 Modulen, die einen PowerPC 601-Prozessor und einen T800-Transputer beinhalten, die über gemeinsame Speicherbereiche kommunizieren können, und 8 alleinstehenden T800-Transputern. Bei den Transputern handelt es sich um Prozessoren, die zum Aufbau von Verbindungsnetzwerken mit vier Verbindungsmöglichkeiten, sogenannten Links, ausgestattet sind, die ohne zusätzlichen Schaltungsaufwand miteinander verbunden werden können. Die PowerPC-Module sind mit je 32 MByte, die alleinstehenden Transputer mit 4 MByte



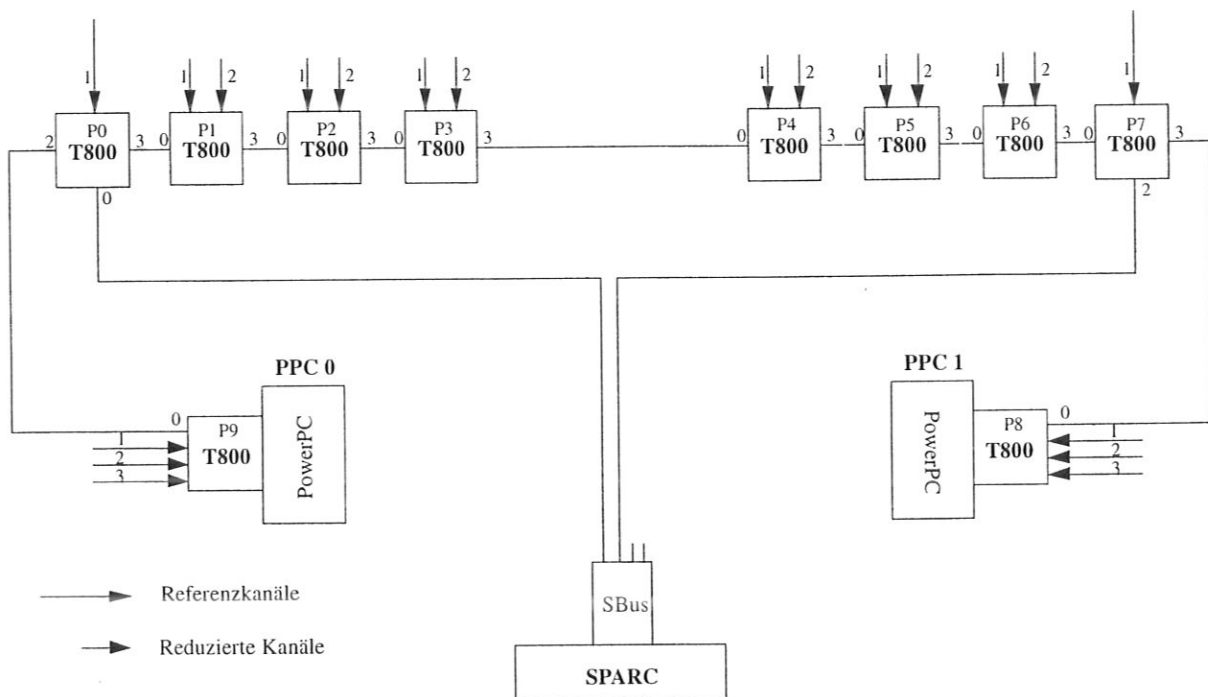


Abbildung 4.1: Aufbau des Datenerfassungssystems bestehend aus 2 PowerPC-Modulen und 8 Transputern, welche über eine Sun-Workstation mit dem Archivsystem verbunden ist. Die Pfeile bedeuten jeweils Signale die von den Detektoren der SXR-Diagnostik stammen. (Quelle [19])

Arbeitsspeicher ausgestattet.

Die PowerPC-Prozessoren dienen dazu, die für die Erkennung von Ereignissen notwendigen numerischen Rechnungen in Echtzeit durchzuführen, die Transputer können mit ihren Links die Meßdaten aufnehmen. Wegen ihrer geringen Arbeitsgeschwindigkeit können die Transputer in Echtzeit lediglich rudimentäre Signalverarbeitungsaufgaben, wie etwa das Abspeichern der von den PowerPCs als relevant erkannten Daten, übernehmen.

Neben den in der Abbildung eingezeichneten Verbindungen ist das System an 20 Datenkanäle der Röntgendiagnostik angeschlossen, die in der Abbildung durch Pfeile gekennzeichnet sind. Sobald eine Plasmaentladung läuft, werden dem Erfassungssystem die Daten mit einer festen Datenrate von 500kHz über einen Pufferspeicher von 4096 Byte auf diesen Verbindungen zur Verfügung gestellt. Die langen Pfeile kennzeichnen Kanäle, deren Daten über die gesamte Entladung zu Referenzzwecken vollständig im Arbeitsspeicher der PowerPCs aufgezeichnet werden. Die kurzen Pfeile stehen für Kanäle, deren Daten nur mit Abstraten gemäß der Frequenz der von den PowerPCs erkannten Ereignisse gespeichert werden.

Über zwei Transputerlinks und ein S-Bus-Interface ist das Datenerfassungssystem an eine Sun-Workstation angeschlossen. Diese befindet sich im lokalen Rechnernetz und leitet die aufgenommenen Daten an das Archivsystem weiter.

## 4.2 Ablauf der Datenerfassung

Da die Transputer eine etwa 40-fach geringere Arbeitsgeschwindigkeit als die PowerPCs haben, werden sie während des Aufzeichnens der Meßdaten einer Plasmaentladung nur für einfachste Datentransferaufgaben benutzt. Die Transputer P1–P6 in Abbildung 4.1 haben folgende Aufgaben:

- Sie speichern temporär die eingelesenen Meßdaten in einem Ringpuffer, der für  $0,5\text{s}$  ( $\cong 250000$  Meßwerte pro Kanal) ausreicht, bis die PowerPCs über die Abtastrate jedes Blocks entschieden haben.
- Sie übermitteln Botschaften der PowerPCs durch die Transputerketten
- Sie sichern gemäß den Anweisungen der PowerPCs die relevanten Daten jeden Blocks auf der Halde.

Die Transputer P0 und P7 leiten lediglich die Daten der Signalkanäle, an die sie angeschlossen sind, an die ihnen benachbarten PowerPC-Module weiter und übermitteln Botschaften der PowerPCs an die Transputerkette.

Die meisten Vorgänge finden wegen der höheren Arbeitsgeschwindigkeit auf den PowerPC-Module statt:

- Die Transputer P8 und P9 lesen und speichern die Daten der Kanäle 1 bis 3 und die, welche sie indirekt über den Transputer P0 bzw. P7 von deren Kanäle 1 übermittelt bekommen.

Die Kanäle 1 von P8 und P9 sind die Referenzkanäle für die Ereigniserkennung und werden im gemeinsamen Speicherbereich zwischen PowerPC und Transputer abgelegt.

- Die PowerPCs unterziehen die im gemeinsamen Speicherbereich liegenden Daten schritthaltend einer Wavelettransformation.
- Sobald  $0,3\text{s}$  der Entladung vorüber sind, wird einmalig — basierend auf den bereits transformierten Daten — das Hintergrundniveau in Abhängigkeit von der Frequenz geschätzt (siehe Abschnitt 2.3).
- Ab  $0,3\text{s}$  bis zum Ende der Entladung werden in Blöcken von jeweils  $1,5\text{ms}$  Länge ( $1,5\text{ms} \cdot 500\text{kHz} = 768$  Werte) die Waveletkoeffizienten ermittelt, deren Beträge oberhalb eines einstellbaren Schwellenfaktors  $\alpha$  multipliziert mit dem Hintergrundniveau liegen.
- Die signifikanten Betragsquadrate innerhalb einer Oktave<sup>1</sup> werden addiert und durch die Zahl der Waveletkoeffizienten in der Oktave in dem Block dividiert. Dadurch ergibt sich ein Verhältnis von Nutzen (die Ereignisamplitude) zu Kosten (der Speicherplatz, der zur aliasingfreien Speicherung der Ereignisse in der Oktave benötigt wird).

---

<sup>1</sup>Damit ist ein Frequenzintervall gemeint, in dem der Algorithmus von Kapitel 3 Koeffizienten mit äquidistanten Frequenzabständen liefert

Dieses Verhältnis wird für jede Oktave mit einem zweiten einstellbaren Schwellwert  $\beta$  verglichen. Die Abtastfrequenz des Blocks wird gemäß dem Abtasttheorem [14] doppelt so hoch gewählt wie die Maximalfrequenz der höchsten Oktaven, die diesen Schwellwert überschreitet, in jedem Fall größer als eine einstellbare Minimalfrequenz. Damit PPC0 feststellen kann, welches die höchste zu berücksichtigende Oktave für beide Referenzkanäle ist, sendet PPC1 für jeden Block die höchste Oktave seines Referenzkanals über die Transputerkette an PPC0.

- Die Transputer werden angewiesen, so viele Meßwerte in dem gerade gelesenen Block auf der Halde zu sichern, daß sich für diesen die festgelegte Abtastrate ergibt, und den Block aus dem Puffer zu entfernen.

### 4.3 Ergebnisse

Abbildung 4.2 zeigt die Rohdaten und die Wavelet- und Fouriertransformierten eines vollständig abgetasteten Referenzkanals und eines Kanals mit geregelter Abtastrate. Die Abtastgrenzfrequenz, d.i. die halbe Abtastrate, ist in den Bildern die Grenze, oberhalb der keine Waveletkoeffizienten mehr dargestellt sind.

Es ist in der Tat festzustellen, daß die gewählte Grenzfrequenz sich nach den auftretenden Ereignissen und nicht nach den ebenfalls vorhandenen Störungen richtet, welche durch waagerechte Linien in den Wavelettransformierten erkennbar sind. Weiter wechselt die Abtastrate trotz der geringen Blocklänge von 1,5ms nur etwa 20 Mal während einer Entladung. In dem hier gezeigten Fall mußten statt der gesamten Daten der Entladung von 6 MB Volumen nur 200 KB pro Kanal aufgehoben werden.

Die festen Schwellwerte für die Erkennung von Ereignissen stellten sich als ein Problem heraus. Oft war der Speicher der Transputer bereits durch signifikante Ereignisse belegt, als gegen Ende der Entladung noch signifikantere (und interessantere) Ereignisse auftraten, die wegen Speichermangel leider nicht mehr berücksichtigt werden konnten. In einem professionellen Datenaufnahmesystem sollten noch nachträglich bereits abgespeicherte Meßwerte durch signifikantere überschrieben werden können. Wegen der geringen Leistung der Transputer ist für diese komplexere Datenverwaltung ein Optimierungsaufwand der Transputersoftware nötig, der sich für ein Testsystem nicht lohnt.

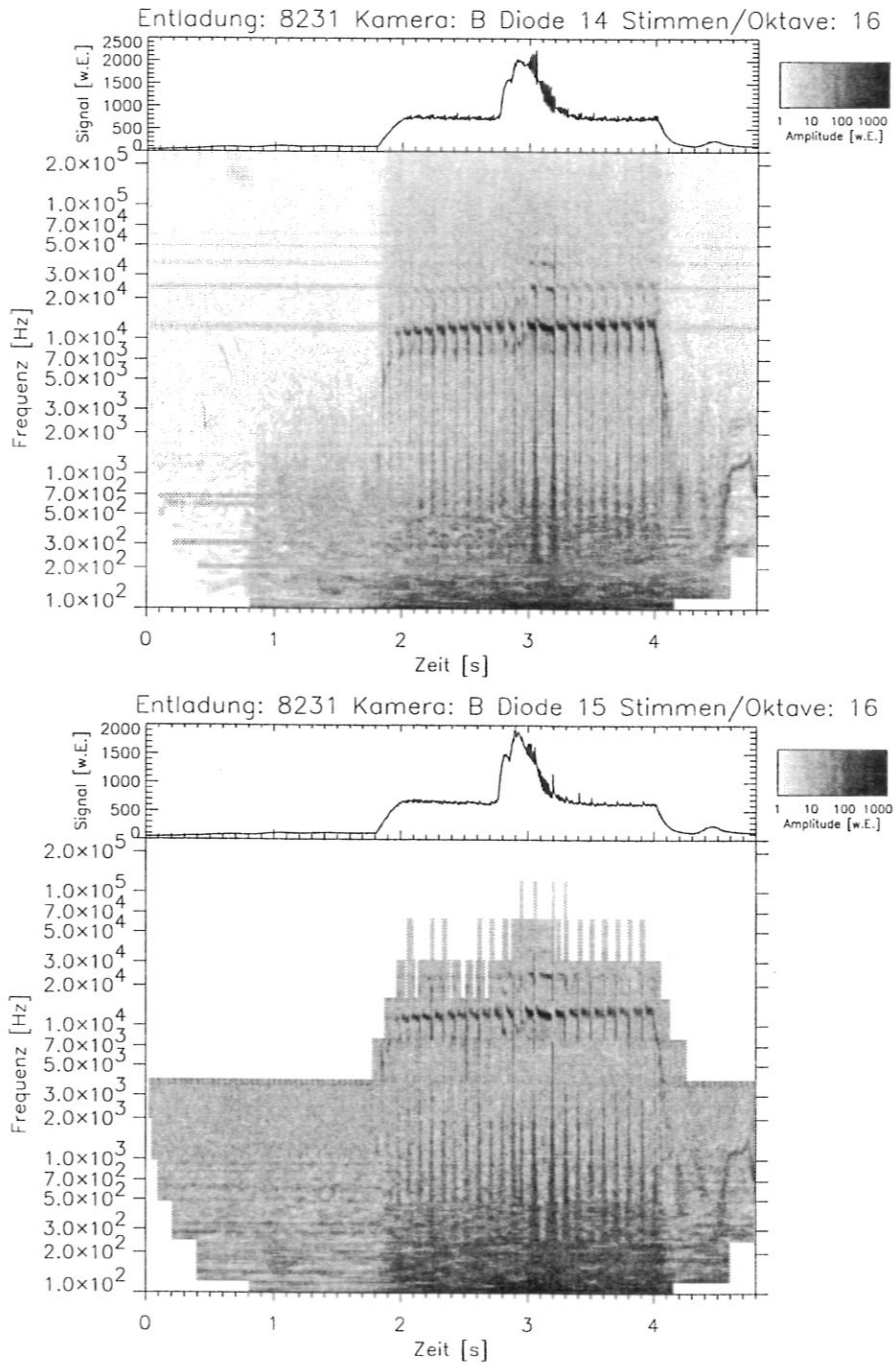


Abbildung 4.2: Oben: Rohsignal und Wavelettransformierte eines Referenzkanals von Entladung 8231. Unten: Rohsignal und Wavelettransformierte eines reduzierten Kanals von Entladung 8231. Die in der Wavelettransformierten erkennbare Nyquistfrequenz folgt den Ereignissen und läßt sich nicht durch die Störungen, welche als waagerechte Linien in der Waveletdarstellung erkennbar sind, beeinflussen.



## Kapitel 5

# Automatische Erkennung von Modenzahlen unter Berücksichtigung mehrerer Diagnostiken

Für die folgenden Betrachtungen werden für jeden Zeitpunkt die Meßwerte der Signalkanäle von Mirnov<sup>1</sup>- und SXR-Diagnostik als ein Vektor in einem Meßraum aufgefaßt.

Um in archivierten Mirnov- und SXR-Meßdaten automatisch Moden suchen und bezüglich ihrer Modenzahlen (siehe Abschnitt 6.3) unterscheiden zu können, wurde zunächst unter Benutzung des Extraktionsverfahrens von Abschnitt 2.4 eine Datenbasis von Röntgen- und Mirnovprofilen für die verschiedenen Modenzahlen und Entladungsszenarien angelegt. Ein Profil ist in diesem Zusammenhang ein komplexer Amplitudenvektor  $\mathbf{a}$  im Meßraum, mit dem die Grundschiwingung  $\mathbf{g}(t)$  des Signals einer Mode durch  $\mathbf{g}(t) = \Re[\mathbf{a}e^{i\omega t}]$  dargestellt werden kann. Beispiele zu Profilen finden sich in den Abschnitten 6.3, 7.4 und 7.3.

Wegen z.B. unterschiedlicher Position und Stärke der Moden unterscheiden sich die gesammelten Profile eines Typs. Um die Charakteristika der verschiedenen Modentypen zu erhalten, wurden mittels Singulärwertzerlegung der Matrix  $A := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  aus den normierten Profilvektoren  $\mathbf{a}_i$  zu einem Modentyp und Auswahl der Eigenvektoren zu den höchsten Singulärwerten wenige repräsentative orthogonale Profilvektoren gebildet.

Die "Signalenergie" (hier das Quadrat der euklidischen Norm), die bei einer Darstellung der ursprünglichen Profilvektoren durch die Eigenvektoren der Singulärwertzerlegung im Mittel auf die verschiedenen Eigenvektoren entfällt (diese ist gleich dem Quadrat des Singulärwerts dividiert durch die Zahl der Profilvektoren), ist für das Beispiel der (1,1)-Mode in Abbildung (5.1) dargestellt. Man erkennt, daß mit den ersten beiden Eigenvektoren die verschiedenen Varianten der (1,1)-Moden bereits ausreichend beschrieben werden. Die ermittelten Vektoren spannen einen Raum  $R_j$  auf, in dem näherungsweise die Profile zum Modentyp  $j$  in allen Entladungsszenarien liegen. Es läßt sich zeigen, daß auf solche Weise mittels Singulärwertzerlegung gefundene Räume bei gegebener Dimension die maximale

---

<sup>1</sup>Die Mirnov-Diagnostik mißt Magnetfeldfluktuationen am Plasmarand (siehe Abschnitt 6.4).

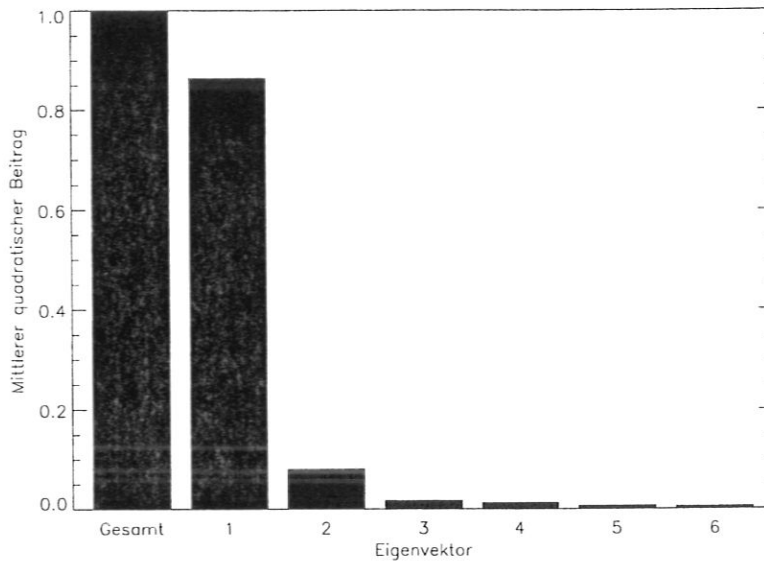


Abbildung 5.1: Mittlerer quadratischer Beitrag der Eigenvektoren der Singulärwertzerlegung von zehn Referenzvektoren. Die ersten drei Vektoren sind zur Charakterisierung der (1,1)-Moden bereits ausreichend.

mittlere Signalenergie der ursprünglichen Profilvektoren enthalten.

Zur Analyse werden die Meßsignale einer Entladung zunächst auf die repräsentativen Vektoren projiziert und anschließend wavelettransformiert. Durch die Projektion wird bereits ein Teil des Rauschens und der Störungen eliminiert. Dieser Schritt mußte in Kapitel 4 wegen der Echtzeitanforderungen entfallen.

In den Waveletkoeffizienten wird anschließend nach signifikanten Ereignissen gesucht. Dabei werden zeitlich benachbarte signifikante Koeffizienten zu Listen verbunden. Auf diese Weise werden die zusammenhängenden Kurven, die auf Grund der Aktivität kohärenter Moden entstehen, jeweils in einer Liste gespeichert.

Die Identifikation der so gefundenen kohärenten Moden geschieht durch Ermittlung des Raumes  $R_{j_{\max}}$ , der die größte mittlere Signalenergie der Mode enthält. Die Mittelung wird jeweils über alle zu einer Liste gehörenden Waveletkoeffizienten (diese sind eigentlich jeweils Vektoren aus den Räumen  $R_j$ ) ausgeführt, was die Zuordnung sicherer macht.

Die Zuordnung wird anschließend noch überprüft, indem die Waveletkoeffizientenvektoren der Projektion auf den gefundenen Raum  $R_{j_{\max}}$  noch auf die ausgeschiedenen Räume  $R_j, j \neq j_{\max}$  projiziert werden. Werden auf diese Weise die Waveletkoeffizienten bei einfacher Projektion auf  $R_j$  für ein  $j \neq j_{\max}$  nicht gut reproduziert, so wird die Mode durch den Raum  $R_j$  offenbar nicht gut repräsentiert und die Zuordnung ist unsicher, oder es handelt es sich um einen Modentyp der nicht in der Datenbasis enthalten ist. Der einfachere und zuverlässigere direkte Vergleich des Ergebnisses bei Projektion auf den Raum  $R_{j_{\max}}$  mit den ursprünglichen Daten scheidet wegen der zu bewältigenden Datenmenge aus.

Daneben mußten noch folgende Probleme berücksichtigt werden:

- Wechselnde Abtastraten
- Aliasing
- Unterschiedliche Abtastraten in Mirnov- und SXR-Diagnostik
- Variierende relative Signalamplitude und -phase einer Mode in Mirnov- und SXR-Diagnostik
- Wechselnde defekte oder übersteuerte Kanäle in Mirnov- und SXR-Diagnostik
- Störung der Modenerkennung durch singuläre Ereignisse

Abbildung 5.2 zeigt die Wavelettransformierte der Daten eines Referenzstrahls der in Kapitel 4 beschriebenen Testdiagnostik für eine Entladung, in der wegen der in Teil II beschriebenen Mechanismen viele Moden auftraten. Abbildung 5.3 stellt in Form von unterschiedlich ausgeführten Kurven die darin vollautomatisch erkannten Moden dar.



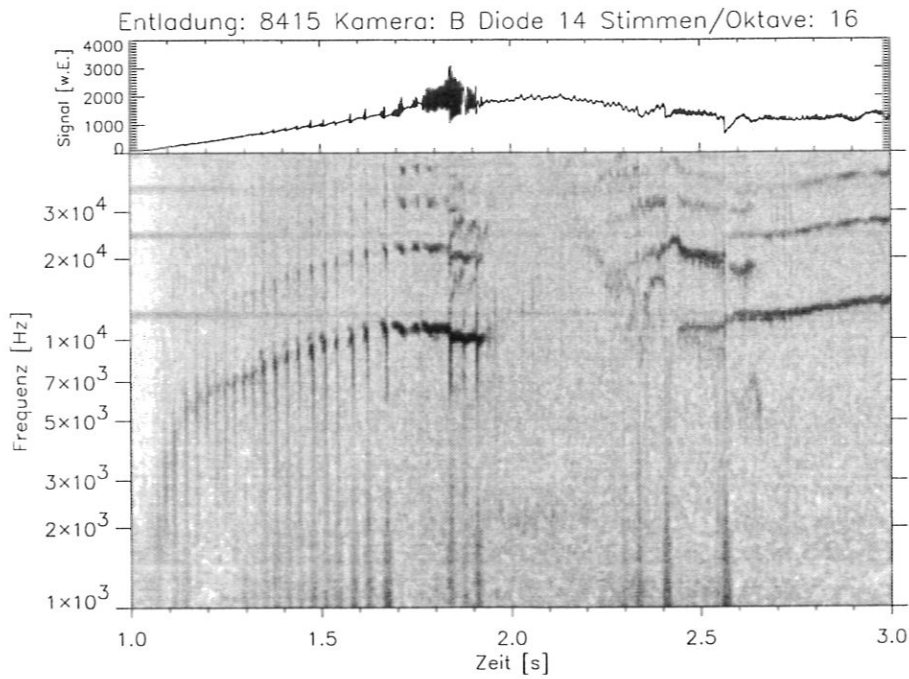


Abbildung 5.2: Rohsignal und Wavelettransformierte eines vollständig abgetasteten Referenzsignals von Entladung 8415.

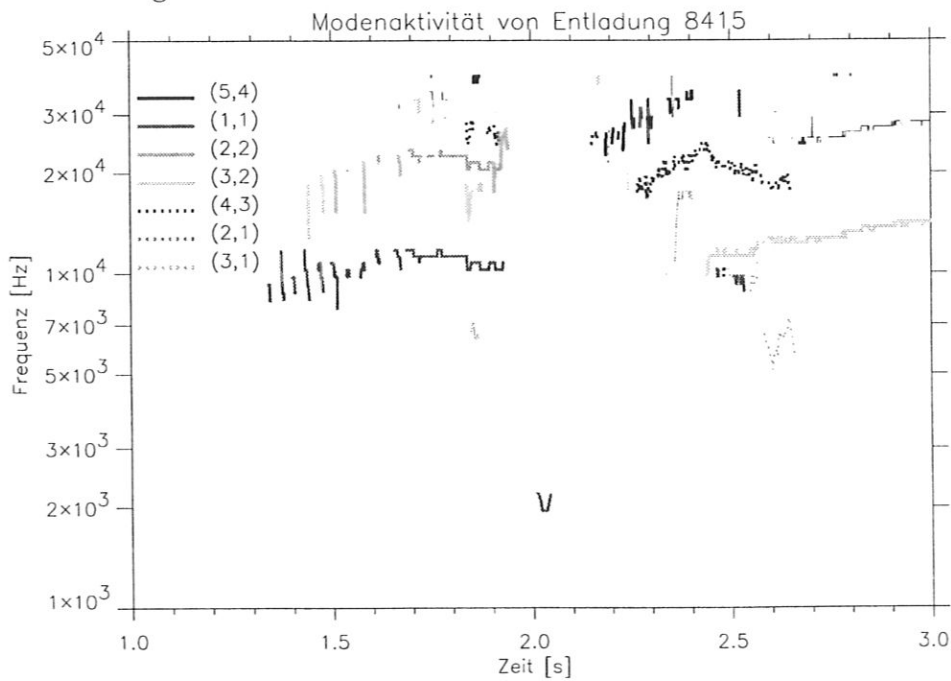


Abbildung 5.3: Anhand des Röntgensignals und der magnetischen Messungen automatisch identifizierte Moden. Nicht sicher erkannte Moden sind dünn gezeichnet.

## Teil II

### Modenkaskaden — hochfrequente Tearing-Moden an der $q = 1$ -Fläche

# Kapitel 6

## Physikalische Grundlagen

### 6.1 Prinzip des Tokamaks

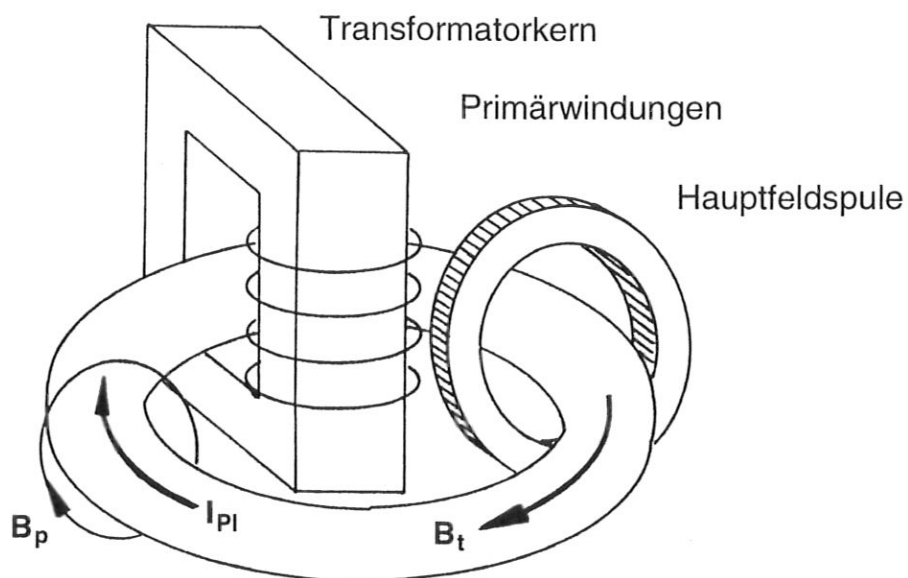


Abbildung 6.1: Schema eines Tokamaks [60] Die Hauptfeldspulen, von denen nur eine dargestellt ist, erzeugen ein starkes toroidales Magnetfeld. Mittels eines Transformators wird in einem Plasmaring ein Strom erzeugt, der ein überlagertes poloidales Magnetfeld bewirkt. Zusätzlich notwendige Lageregelungsspulen sind nicht eingezeichnet.

Der Aufbau eines Tokamaks ist in Abbildung 6.1 schematisch dargestellt. In einem Gefäß, in dem sich das verdünnte Arbeitsgas, etwa Deuterium, befindet, wird mittels Spulen ein starkes toroidales Magnetfeld (1 – 2T an ASDEX-Upgrade) erzeugt. Ein Transformator induziert in dem Gas ein elektrisches Feld, welches einen Strom treibt, der zum einen das Gas aufheizt, bis es im Plasmazustand ist und zum anderen ein poloidales, d.h. den kleinen Torusradius umlaufendes, Magnetfeld erzeugt. Da die Bestandteile des Plasmas,

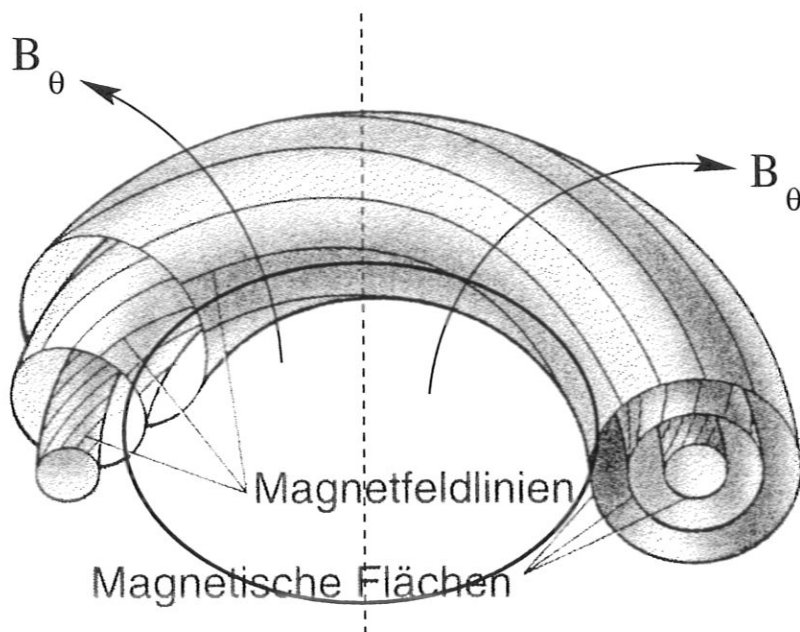


Abbildung 6.2: Der poloidalen Fluß  $\Psi$  an einem Punkt ist der magnetische Fluß durch einen Kreis durch diesen Punkt um die Torusachse. Die Überlagerung von dem poloidalen Magnetfeld des Plasmastroms und dem toroidalen Hauptfeld erzeugt schraubenförmige Magnetfeldlinien, die auf den Flächen mit konstantem  $\Psi$  umlaufen.

Elektronen und Ionen, geladen sind, gyrieren sie um die Feldlinien und eine Bewegung des Plasmas senkrecht zu den Magnetfeldern wird unterdrückt, sofern keine elektrischen Felder auftreten.

Ein Abschnüren bzw. Knicken des Plasmarings wird durch die Kompressibilität bzw. Zugspannung des Toroidalfeldes verhindert [42, Abschnitt 10.6], ein Austausch der Feldlinien des Toroidalfeldes (sogenannte Rayleigh-Taylor-Instabilität) wird durch die Zugspannung des Poloidalfeldes unterdrückt. Die horizontale Position und der große Radius des Plasmarings bzw. seine vertikale Position werden durch zusätzliche vertikale bzw. horizontale Magnetfelder über die Lorentzkraft auf den Plasmastrom kontrolliert.

Den Druck im Plasma bestimmen das poloidale und toroidale Magnetfeld gemeinsam. An ASDEX-Upgrade wird in den meisten Fällen der Plasmadruck durch das poloidale Magnetfeld kompensiert (Pinch-Effekt [42, Abschnitt 10.5]), während das toroidale Feld den entgegengesetzten Effekt hat: Durch sekundäre poloidale Ströme wird das Toroidalfeld im Plasmazentrum verstärkt (sog. paramagnetisches Plasma), weshalb der Druck des toroidalen Magnetfelds im Zentrum höher ist als am Rand und somit zusätzlich expandierend wirkt. Vorzeichen und Größe der poloidalen Ströme hängen von der Vorgeschichte des Plasmas ab.

Mit steigender Temperatur sinkt der Plasmawiderstand und die Heizung durch den Strom wird schließlich ineffektiv. Um höhere Temperaturen<sup>1</sup> ( $\sim 6\text{keV}$ ) erreichen zu kön-

<sup>1</sup>In der Plasmaphysik werden Temperaturen mit der Boltzmannkonstanten multipliziert angegeben.

nen, werden deshalb an ASDEX-Upgrade unter anderem die Neutralteilchenheizung (NI) und die Ionenzyklotronresonanzheizung (ICRH) eingesetzt. Die NI [65] heizt das Plasma durch Einschuß von Deuteriumatomen hoher Energie ( $\sim 60\text{keV}$ ). Diese werden wegen ihrer Neutralität nicht durch die Magnetfelder im Tokamak abgelenkt. Bei der ICRH [52, 53, 54, 55] werden elektromagnetische Felder in Resonanz mit der Ionenzyklotronfrequenz an das Plasma angelegt. Zur guten Ankopplung müssen die Sendeantennen dazu sehr nahe an das Plasma gebracht werden.

Man definiert in dieser Konfiguration den *poloidalen Fluß* an einem Punkt als den magnetischen Fluß durch einen Kreis durch diesen Punkt um die Torusachse. Die Flußflächen werden als Flächen konstanten poloidalen Flusses definiert (siehe Abbildung 6.2). Die magnetische Achse ist die Kreislinie um die Torusachse, die von allen Flußflächen umschlossen wird. Durch die Überlagerung von toroidalem und poloidalem Magnetfeld entstehen helikale Magnetfeldlinien, die sich auf den Flußflächen bewegen. Ein Maß für die Helizität der Feldlinien auf einer Flußfläche ist das Verhältnis der Zahl der toroidalen Umläufe zur Zahl der poloidalen Umläufe, die eine Feldlinie im Mittel ausführt, der sogenannte Sicherheitsfaktor, der im folgenden mit  $q$  bezeichnet wird.

Der Verlauf von  $q$  ist von entscheidender Bedeutung für die Stabilität des Plasmarings: Die Helizität der Instabilitäten folgt in der Regel der Helizität der Feldlinien, da es so möglich ist, das Plasma umzuordnen, ohne die darin eingefrorenen Magnetfeldlinien stark komprimieren oder dehnen zu müssen. Beispielsweise ist das Verhältnis der Wellenzahlen  $m$  bzw.  $n$  des gestörten radialen Magnetfelds einer Tearing-Mode bei einem poloidalen bzw. toroidalen Umlauf gleich dem Sicherheitsfaktor an der Position der Mode. Die Wellenzahlen werden im folgenden auch als "Modenzahlen" bezeichnet. Die Instabilitäten bilden sich bevorzugt auf Flußflächen, auf denen  $q$  durch einfache rationale Zahlen gegeben ist, da die Helizitätsbedingung an diesen Stellen mit relativ langwelligen Störungen erfüllt werden kann.

## 6.2 Die Röntgendiagnostik von ASDEX-Upgrade

Eine wichtige Meßapparatur, um schnelle Vorgänge im Plasma zu registrieren, ist die im weichen Röntgenlicht (1–10keV) arbeitende SXR-Diagnostik (soft-X-Ray) [22] (siehe Abbildung 6.3). Fünf Röntgenlochkameras, die an einem poloidalen Querschnitt des Tokamaks angeordnet sind, messen die entlang von insgesamt 124 Sichtlinien integrierte Röntgenemissivität des Plasmas.

Die Strahlung des Plasmas im weichen Röntgenbereich entsteht durch Linienstrahlung von Verunreinigungionen oder Bremsstrahlung [37]. Sie hängt damit von Dichte, Temperatur, Verunreinigungskonzentration und der Art der Verunreinigungen ab. Die Magnetfeldstörungen auf Grund von Moden verursachen wegen ihrer Wirkung auf Dichte, Temperatur und Einschlußeigenschaften des Plasmas kleine Änderungen der Röntgenemissivität. Wegen des Impulsübertrags beim Einschuß schneller Teilchen durch die NI

---

$k_B \cdot 1\text{K} = 86\mu\text{eV}$ ,  $1\text{eV} = k_B \cdot 11610\text{K}$ .

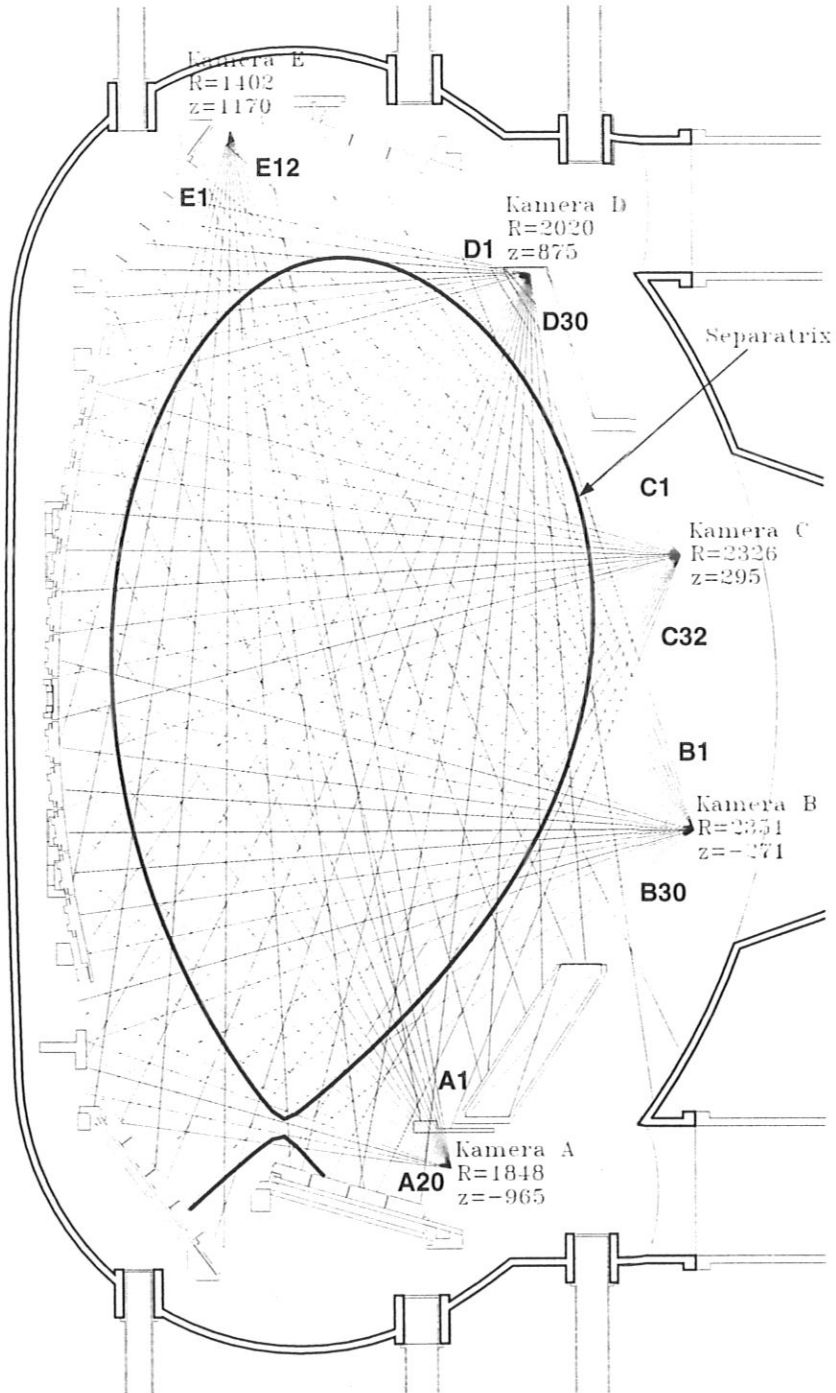


Abbildung 6.3: Sichtlinien, entlang derer die SXR-Diagnostik die Röntgenemissivität aufintegriert, vor einem poloidalen Querschnitt des ASDEX-Upgrade-Plasmas [62]. Die 124 Sehstrahlen gehen von jeweils einer von fünf Röntgenlochkameras aus, die mit den Buchstaben A–E bezeichnet sind.

(siehe Abschnitt 6.1) rotiert das Plasma mit hoher Frequenz ( $\approx 10\text{kHz}$ ) um die Torusachse. Die Moden und die Emissivitätsfluktuationen rotieren zusammen mit dem Plasma (siehe auch Kapitel 8), werden also periodisch an den feststehenden Röntgendetektoren vorbeigeführt. Dadurch verursachen sie eine nachweisbare periodische Oszillation der gemessenen Röntgenintensität.

### 6.3 Auswertung von Modenoszillationen bei der SXR-Diagnostik

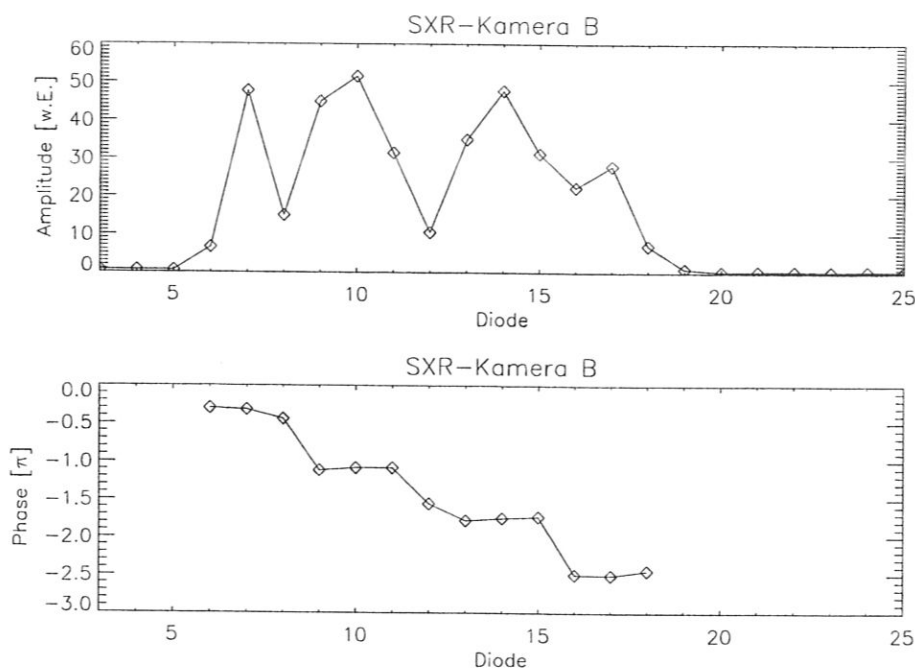


Abbildung 6.4: Amplituden und Phasen der Oszillationen einer (3,2)-Mode in den Kanälen der SXR-Kamera B (Entladung 8415, Zeitpunkt 3.64s)

Die Emissivitätsoszillationen in dem poloidalen Querschnitt, der von der Röntgendiagnostik beobachtet wird, lassen sich mittels der Fouriertransformation oder dem Verfahren von Abschnitt 2.4 in die Grundschwingung und die verschiedenen Harmonischen zerlegen. Die Grundschwingung in allen Röntgenkanälen kann durch

$$g_j(t) = \Re[a_j e^{i\omega t}] \quad (6.1)$$

beschrieben werden, wobei  $j$  die einzelnen SXR-Detektoren indiziert,  $g_j(t)$  die Signalamplitude, die im Detektor  $j$  zur Zeit  $t$  gemessen wird, bezeichnet und die komplexe Amplitude  $a_j$  die relative Amplitude und Phase der Schwingung im Detektor  $j$  angibt.

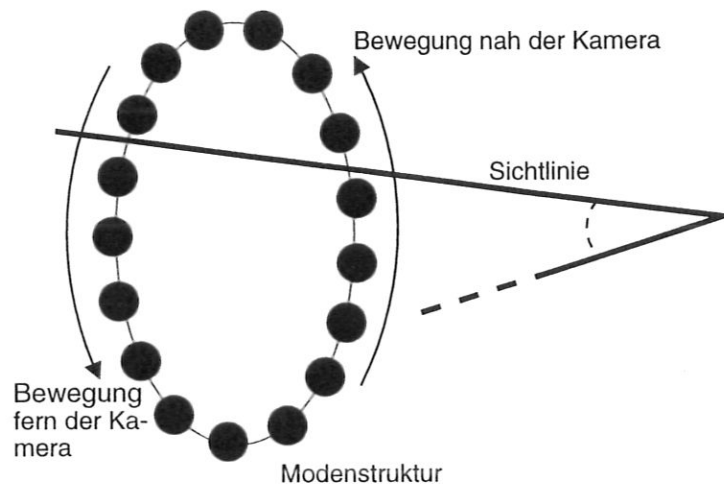


Abbildung 6.5: Eine Sichtlinie mißt die Überlagerung gegenläufiger Emissivitätsfluktuationen nah und fern der Kamera.

Die Gesamtheit der  $a_j$  wird im folgenden als "Profil" bezeichnet. Die Bestimmung der Phasen und Amplituden der Schwingungen wird ebenfalls in Abschnitt 2.4 beschrieben.

Abbildung 6.4 stellt für eine  $(m, n) = (3, 2)$ -Mode den Betrag und die Phase der Amplituden  $a_j$  dar.  $j$  durchläuft dabei die Dioden der B-Kamera (siehe Abbildung 6.3), d.h. die den Kanälen zugeordneten Sehstrahlen überstreichen den poloidalen Querschnitt von oben nach unten. Man erkennt darin im wesentlichen die Signatur einer *stehenden Welle* mit 3 Knoten und 4 Maxima. Die Emissivitätsfluktuation der Mode rotiert nämlich scheinbar auf dem poloidalen Querschnitt der Flußfläche. Beim Kreuzen eines Sehstrahls bewegt sich die "Welle" nahe an der Kamera in der einen Richtung, und fern von der Kamera in der anderen (siehe Abbildung 6.5). Da die Röntgendetektoren das Integral entlang der Sehstrahlen messen, überlagern sich die gegenläufigen Wellen, weshalb es zur stehenden Welle kommt. Die Zahl der Knoten ist dabei gleich der Zahl der Perioden der Mode auf der Flußfläche, also gleich der poloidalen Modenzahl [44].

Ein Knoten kann auch anhand des an ihm erfolgenden Phasensprungs um  $180^\circ$  nachgewiesen werden, falls die Röntgendetektoren das zu ihm gehörende Minimum nicht erfassen sollten.

Anzumerken ist, das auf Grund der fächerartigen Anordnung der Sichtlinien einer Kamera, der Elliptizität der Flußflächen in ASDEX-Upgrade und toroidaler Effekte auf die Moden, die *scheinbaren* Fortbewegungsgeschwindigkeiten der Emissivitätswellen nahe an der Kamera und entfernt davon unterschiedlich sind. Dies überlagert dem normalen Phasenverlauf einer stehenden Welle noch eine glatte Funktion. Da die *Frequenzen* der "Wellen" nah und entfernt von der Kamera jedoch gleich sind, entsteht nach wie vor eine stehende Welle.

Weiter ist die Knotendichte nahe der tangentialen Sichtlinien an die Flußfläche viel höher als bei zentralen Sichtlinien, da die scheinbare Geschwindigkeit der Mode dort gegen Null geht. Zur Illustration dieser Effekte zeigt Abbildung 6.6 ein SXR-Profil, welches für



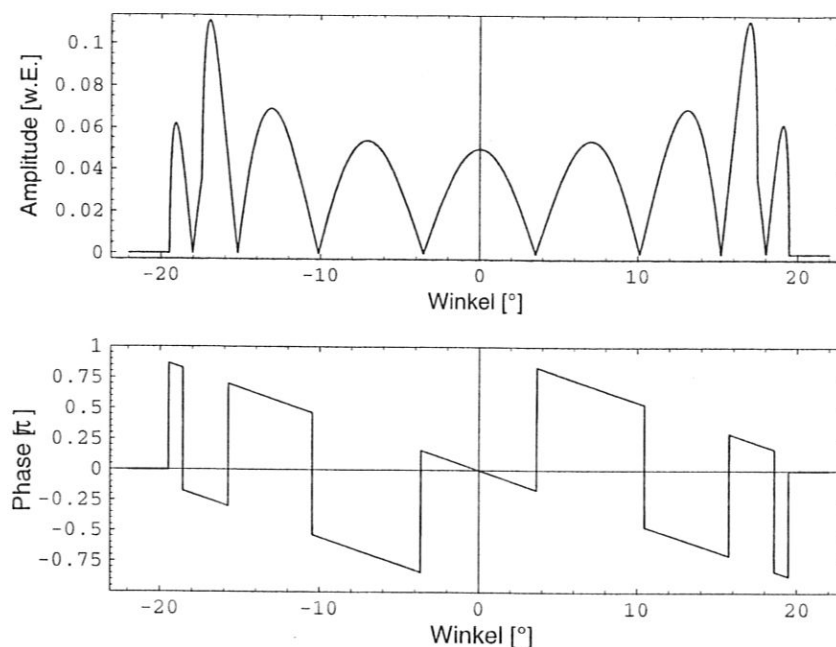


Abbildung 6.6: Berechnete Amplituden und Phasen einer  $m = 8$ -Mode. Die Abnahme der Amplitude am Rand entsteht durch die endliche Breite der Mode von 10% ihres Radius, das Vorzeichen der Phasenänderung zwischen zwei Knoten hängt von der Rotationsrichtung der Mode ab.

ein kreisförmiges Plasma und eine Mode mit poloidaler Modenzahl  $m = 8$  berechnet wurde.

## 6.4 Die Mirnov-Diagnostik

Die Mirnov-Diagnostik an ASDEX-Upgrade besteht aus Spulen zur Messung der poloidalen Magnetfeldfluktuationen außen am Plasma. Sie enthält einen poloidalen und einen toroidalen Spulenkranz (siehe Abbildung 6.7).

Analog, wie oben für die SXR-Diagnostik beschrieben wurde, lassen sich die relativen Phasen einer Mode in den verschiedenen Mirnov-Kanälen bestimmen. Da in diesem Fall jedoch keinerlei Interferenz zwischen den Detektoren nahen bzw. fernen Teilen der Mode auftritt, verläuft die Phase bei einem poloidalen Durchgang durch die Spulen relativ glatt. Die poloidale Modenzahl ist durch die gesamte durchlaufene Phasendifferenz dividiert durch  $360^\circ$  gegeben.

Da im Tokamak eine fast exakte Axisymmetrie gegeben ist, ist die Phasendifferenz zwischen den Signalen toroidal versetzter Spulen mit gleicher poloidaler Position gleich dem toroidalen Winkelabstand der Spulen multipliziert mit der toroidalen Modenzahl. Dies erlaubt die einfache Bestimmung toroidaler Modenzahlen durch einen Phasenfit.



# Kapitel 7

## Experimentelle Beobachtungen

Beim Durchsuchen der Daten der vollständig abgetasteten Kanäle (siehe Kapitel 4) der Röntgendiagnostik nach Ereignissen — was durch das im ersten Teil beschriebene schnelle Wavelettransformationsverfahren trotz der großen Datenmengen ermöglicht wurde — wurden unerwartet hochfrequente Oszillationen mit diskreten Frequenzen mit bisher nicht beobachteten Eigenschaften entdeckt: In Form einer Kettenreaktion regen Schwingungen niederer Frequenz über mehrere Zwischenstufen Schwingungen sehr hoher Frequenz an. In diesem Kapitel werden ihre hervorstechenden Merkmale behandelt.

### 7.1 Kaskadierende Oszillationen

Abbildung 7.1 zeigt ein schönes Beispiel für die beobachteten hochfrequenten Oszillationen. Man erkennt einige Folgen von Ausbrüchen von Modenaktivität mit zunehmender Frequenz. Die Frequenzen innerhalb einer solchen “Kaskade” sind nahezu äquidistant mit einem typischen Abstand von 10kHz. Eine Kaskade besteht aus 5 bis 17 Ausbrüchen, die jeweils im Abstand von  $100\mu\text{s}$  bis 2ms aufeinander folgen. Von Kaskade zu Kaskade beobachtet man eine Verschiebung aller Frequenzen nach oben, wobei die erreichte Maximalfrequenz abnimmt.

In Abbildung 7.2 ist ein durchschnittliches Beispiel für die Ereignisse dargestellt. Hier treten die einzelnen Frequenzen in einem weniger geordneten Muster auf, es lassen sich jedoch immer noch Teilkaskaden ausmachen.

Die unmittelbare Aufeinanderfolge der Frequenzen legt einen Kausalzusammenhang zwischen ihnen nahe. Unter dieser Annahme lassen sich in den Abbildungen folgende Vorgänge beobachten:

- Eine Frequenz löst die jeweils nächsthöhere aus. (Punkte a).
- Manchmal unterdrückt eine Frequenz bei ihrem Auftreten zunächst die unmittelbar über ihr liegende (Punkte b).
- Eine Frequenz unterdrückt die unter ihr liegende solange, bis sie verschwindet, wobei

dieser Effekt bei weiter auseinanderliegenden Frequenzen schwächer wird (Punkte c sowie Punkte a gleich nach jedem Auslösevorgang).

Ferner beobachtet man in beiden Abbildungen eine sehr schnelle Frequenzvariation der Moden während ihrer Lebensdauer ( $100\mu\text{s}$ - $2\text{ms}$ ) um etwa 10%, sowie eine langsamere, im Verhältnis zu den normalerweise beobachteten Frequenzverläufen von Moden aber immer noch schnelle, Frequenzänderung von Kaskade zu Kaskade (Kurve 2 für die unterstender kaskadierenden Moden), die insgesamt bis zu 70% über alle Kaskaden hinweg betragen kann.

Die untersuchten Entladungen mit Kaskaden sind zusammen mit ihren Eigenschaften in Tabelle 9.1 aufgeführt.

## 7.2 Niederfrequente SXR-Signaturen

In Abbildung 7.3 ist die gemessene zeitliche Abhängigkeit der Integrale der Röntgenemissivitäten entlang einiger Sichtlinien (siehe Abbildung 6.3) mit unterschiedlichen Abständen zur magnetischen Achse während zweier Kaskaden dargestellt.

Man erkennt deutlich, daß simultan mit dem Auftreten der Moden Röntgenemissivität von innen nach außen verlagert wird. Dabei tritt der höheren Frequenzen zugeordnete Transport näher an der magnetischen Achse auf.

Diese Beobachtung zeigt, daß die den Oszillationen zugeordneten Plasmastörungen ebenfalls für höhere Frequenzen näher an der magnetischen Achse lokalisiert sind. Die Positionen der Plasmastörungen werden in Abschnitt 7.5 noch genauer diskutiert.

## 7.3 Vorläufer- und Folgeereignisse

Abbildung 7.4 zeigt einen Überblick über eine beispielhafte Entladung mit Kaskaden. Während der ganzen Entladung bis zum Einsetzen der Kaskaden wird eine starke Mode bei einer Frequenz von etwa 9kHz beobachtet. Sie wird bis kurz vor dem Auftreten der Kaskaden regelmäßig durch Sägezähne [36] unterbrochen, die in den Rohdaten durch ihre namensgebende Signatur sichtbar sind und in der Wavelettransformierten als singuläre Ereignisse auftreten. Durch Betrachten der SXR- und Mirnov-Profile (siehe Abschnitte 6.3, 6.4) der Mode stellt man fest, daß die poloidale und die toroidale Modenzahl der Mode gleich eins ist. Solche (1,1)-Moden werden fast immer in Entladungen mit Sägezähnen beobachtet. Dabei handelt es sich häufig um interne Kinks, wie man etwa mittels Tomographie feststellen kann [62].

Vor den Kaskaden hören die regelmäßigen Sägezähne auf. Dies ermöglicht wegen des verringerten Teilchentransport [50, Abschnitt 7.3] die Akkumulation von Verunreinigungen im Plasmazentrum. Daß tatsächlich Akkumulation stattfindet, läßt sich anhand der Gesamtstrahlungsleistung aus dem Plasmazentrum und spektroskopischer Daten nachweisen. In Abbildung 7.5 sind hierzu Tomogramme der Gesamtstrahlungsleistung, welche aus

Meßdaten der Bolometriadiagnostik berechnet wurden, vor und nach dem Ende der Sägezähne dargestellt. Die stark erhöhte Abstrahlung wird in diesem Fall durch ein schweres Element — möglicherweise Gold aus der ICRH-Antenne — verursacht, was aus der Linienstrahlung des Plasmas im Vakuum-UV zu diesem Zeitpunkt geschlossen werden kann. Ebenfalls läßt sich mit der Ladungsaustauschspektroskopie nachweisen, daß das Element Neon akkumuliert (Abbildung 7.5).

Tatsächlich weisen alle Entladungen, in denen die Kaskaden auftraten, Verunreinigungsakkumulation auf. Dabei handelt es sich entweder um leichte Verunreinigungen wie Neon, welches in CDH-Entladungen [38] absichtlich ins Vakuumgefäß geblasen wurde, oder um schwere Verunreinigungen wie Wolfram, welches bei Untersuchungen zum Wolframtransport ins Plasma gebracht wurde [20], oder Xenon, welches zum Auslösen von invertierter Feldlinienverschönerung [57] ins Plasma geblasen wurde, oder möglicherweise Gold, welches beim Kontakt der Ionenzyklotronresonanzantennen mit dem Plasma eingebracht wurde.

Die Ereignisse gegen Ende der Kaskaden treten deutlich in Abbildung 7.6 hervor. Die maximale in einer Kaskade erreichte Frequenz fällt mit der Zeit ab und das Kaskadieren wird immer langsamer, bis es schließlich aufhört. Übrig bleiben zwei gleichzeitig aktive, relativ niederfrequente Moden bei etwa 10kHz und 16kHz. Sie fügen sich übergangslos in die regelmäßige Frequenzstaffelung der Kaskaden ein. Ihre SXR- und Mirnov-Profile sind in Abbildung 7.7 dargestellt. Es handelt sich um eine (3, 2)- bzw. eine (4, 3)-Mode.

## 7.4 Bestimmung der Emissivitätsprofile und Modenzahlen der kaskadierenden Moden

Für die weitere Analyse ist es wichtig, die Symmetrieeigenschaften der Plasmastörungen, die den beobachteten Röntgenoszillationen zugrunde liegen, zu bestimmen. Dies wird anhand einiger Beispiele vorgeführt.

Dazu sind nach den Abschnitten 6.3 und 6.4 SXR- und Mirnovprofile der Moden erforderlich. Leider sind die Kaskaden in der Mirnovdiagnostik nicht nachweisbar, da sie im Plasmakern lokalisiert sind und ihre Magnetfelder wegen ihrer hohen Modenzahlen nach außen hin zu schnell abfallen. Die Abtastgrenzfrequenz der normalen SXR-Kanäle mit fest eingestellter Abtastrate war in jedem Fall zu niedrig, so daß bei den Frequenzen der kaskadierenden Moden Aliasing auftrat (siehe Abschnitt 2.5). Zur Unterscheidung und Frequenzbestimmung der Moden wurden daher die Kanäle mit geregelter Abtastrate des in Kapitel 4 beschriebenen Datenerfassungssystems benutzt. Die Zahl der damit aufgenommenen Kanäle reichte leider für eine direkte Bestimmung der poloidalen Modenzahl nicht aus. Deshalb mußte trotz des Problems des Aliasing mit den Kanälen mit vor-eingestellter Rate des alten Datenerfassungssystems gearbeitet werden. Die SXR-Profile konnten jedoch häufig mit dem Verfahren von Abschnitt 2.5 korrekt bestimmt werden. Zusätzlich wurde durch Betrachtung der Wavelettransformierten benachbarter vollständig abgetasteter Kanäle sichergestellt, daß bei der Ermittlung der Profile keinerlei Überlap-

pung verschiedener Frequenzen auftrat.

In Abbildung 7.8 sind für einige Moden in den Kaskaden die SXR-Profile einer Kamera, die von der Außenseite des Torus auf das Plasma blickt, dargestellt. Es sind, wie in Abschnitt 6.3 beschrieben, eine Anzahl von Phasensprüngen erkennbar. Diese können nur durch Interferenz der Emissivitätsstörungen auf der Innen- und Außenseite des Torus entstanden sein. Dies spricht sehr gegen die Ballooning-Instabilität [67] als Ursache für die Moden, da diese nur an der Außenseite des Torus lokalisiert ist.

Aus der Zahl der Phasensprünge läßt sich bis etwa  $m \sim 8$  die poloidale Modenzahl ablesen. Es ergibt sich für alle Fälle, für die  $m$  bestimmt werden konnte, daß die kaskadierenden Moden sich darin an die in Abschnitt 7.3 beschriebene (3, 2)- und (4, 3)-Mode anschließen. Es liegt nahe zu vermuten, daß dies auch für die toroidalen Modenzahlen gilt. Ein Beweis dafür läßt sich über die Differenzfrequenz zweier in der poloidalen Modenzahl aufeinanderfolgender Moden führen. Wie in Kapitel 8 detailliert beschrieben wird, setzt sich die Frequenz einer Mode gemäß

$$f_{(m,n)} = m f_{\text{Diamagnetisch}} + n f_{\text{I,Toroidal}} \quad (7.1)$$

zusammen, wobei  $f_{\text{Diamagnetisch}}$  der diamagnetischen Rotationsanteil für den Modentyp und  $f_{\text{I,Toroidal}}$  die toroidale Ionenrotationsfrequenz ist. Dort wird weiter abgeschätzt, daß  $|f_{\text{Diamagnetisch}}| \sim 4\text{kHz}$  ist. Für die hier betrachteten Entladungen mit Plasmastrom in Richtung der Neutralteilcheninjektion (Co-Injektion) ist das Vorzeichen von  $f_{\text{Diamagnetisch}}$  negativ. Wie in Abschnitt 7.5 noch näher ausgeführt wird, sind zwei aufeinanderfolgende Moden mit den Modenzahlen  $(m, n_1)$  und  $(m+1, n_2)$  auch radial eng benachbart (radialer Abstand  $\lesssim 3\text{cm}$ ), weshalb man die diamagnetische und die Ionenrotationsfrequenz für beide als gleich ansetzen kann. Die Differenzfrequenz ist damit

$$f_{(m+1,n_2)} - f_{(m,n_1)} = f_{\text{Diamagnetisch}} + (n_2 - n_1) f_{\text{I,Toroidal}} \quad (7.2)$$

Auflösen nach der gesuchten Differenz  $n_2 - n_1$  ergibt

$$n_2 - n_1 = \frac{f_{(m+1,n_2)} - f_{(m,n_1)} - f_{\text{Diamagnetisch}}}{f_{\text{I,Toroidal}}} \quad (7.3)$$

Die Ionenrotationsgeschwindigkeit am Modenort wird mit der CER-Spektroskopie gemessen. Es treten durchgehend Werte um 10kHz mit einem Fehler von etwa 3kHz auf. Der diamagnetische Beitrag nach der Abschätzung in Abschnitt 8.1.2 von der Größenordnung 4kHz. Der Frequenzabstand aufeinanderfolgender Moden lag durchgehend zwischen 7 und 12kHz, wobei der Meßfehler bedingt durch die Unschärferelation 3kHz betrug. Damit muß nach Formel 7.3 die Schrittweite in der toroidalen Modenzahl in der gleich Eins sein. Man erhält somit für die kaskadierenden Moden die Beziehung

$$m = n + 1 \quad (7.4)$$

zwischen poloidalen und toroidalen Modenzahlen.

Für höhere Frequenzen in den Kaskaden konnten die poloidalen Modenzahlen nicht direkt bestimmt werden, da ab einer Modenzahl von etwa  $m = 8$  teilweise von Kanal zu Kanal mehrere Phasensprünge von  $180^\circ$  auftreten<sup>1</sup>, die sich nicht mehr eindeutig identifizieren lassen. Die Frequenzabstände sind jedoch immer in der Größenordnung von 10kHz und damit mit einer Erhöhung von  $n$  und  $m$  um eins von einer Mode zur nächsten verträglich.

Ein weiteres Argument für die Richtigkeit von (7.4) wird in Abschnitt 7.5 aus der monotonen Abfolge der Radien der resonanten Flächen der Moden abgeleitet.

## 7.5 Modenpositionen und $q$ -Verlauf

Zur Bestimmung der radialen Position der Moden, werden aus den — wie in Abschnitt 7.4 beschrieben — ermittelten SXR-Profilen die tangentialen Sehstrahlen an die Flußfläche bestimmt, auf der die Mode sitzt.

Dabei müssen drei Effekte beachtet werden, nämlich das sogenannte “Ballooning” der Moden (nicht zu verwechseln mit der Ballooning-Instabilität), die endliche Ausdehnung der Moden und die endliche Breite der SXR-Sichtlinien.

- Mit Ballooning bezeichnet man die Tatsache, daß die Moden vorwiegend auf der Torusaußenseite lokalisiert sind, da hier die Feldlinienkrümmung destabilisierend ist [61]. Die Lokalisierung bewirkt, daß die Modenamplitude auf der Ober- und Unterseite des Plasmarings etwas geringer als auf der Außenseite ist. Dies bewirkt eine Abnahme der beobachteten Modenamplitude für weiter außen liegende Sehstrahlen der von der Torusaußenseite nach innen blickenden B- oder C-Kamera (siehe Abbildungen 6.3 und 7.9). Da, wie im vorigen Abschnitt erwähnt, auf der Innenseite des Torus noch deutliche Fluktuationsamplituden der Moden feststellbar sind, kann dieser Effekt jedoch nicht sehr ausgeprägt sein.
- Die endliche Ausdehnung der Mode und die geometrische Mittelung der Sichtlinien über ihre poloidale Breite (3,7cm im Plasmazentrum) bewirkt ein “Ausschmieren” des Randes eines SXR-Profiles.
- Bei den höheren Moden mit  $m \gtrsim 12$  und kleinen Radien  $r \lesssim 20\text{cm}$  mittelt ein SXR-Sehstrahl auf Grund seiner Breite unter Umständen über mehr als eine Halbwelle der in Abschnitt 6.3 beschriebenen scheinbaren stehenden Welle im SXR-Profil, was eine starke Reduktion der Oszillationsamplitude in dem betroffenen Kanal verursacht. Dies tritt bevorzugt für nahezu tangentiale Sichtlinien an die resonante Fläche einer Mode auf, da für diese die scheinbare Knotendichte der stehenden Welle besonders hoch ist (siehe Abbildung 7.10). Für Moden mit  $m \gtrsim 12$  ist aus dem genannten Grund eine Bestimmung des Modenradius aus dem SXR-Profil nicht möglich.

---

<sup>1</sup>vor allem am nahe der tangentialen Sichtlinien an die resonante Fläche

Insgesamt dürfen also nicht die Sehstrahlen mit der maximalen Oszillationsamplitude als tangential angesehen werden, sondern die etwas weiter außen liegenden, bei denen die Amplitude bereits auf nahezu Null abgefallen ist. Zur Bestimmung der Flußflächen wurden daher jeweils die Sichtlinien, bei denen keine signifikante Amplitude der Oszillationen mehr feststellbar war, benutzt.

Zur Berechnung der Flußflächengeometrie, die für die Ermittlung der Radien der tangentialen Flußflächen benötigt wird, wird an ASDEX-Upgrade das aus verschiedenen magnetischen Messungen am Torus abgeleitete MHD-Gleichgewicht [49] herangezogen. Als Flußflächenradius wird im Folgenden der Abstand der magnetischen Achse vom äußeren Schnittpunkt der Flußfläche mit einer horizontalen Linie durch die magnetische Achse benutzt. Für die Profile der B- und der C-Kamera konnten jeweils zwei tangentiale Sehstrahlen und die dazugehörigen Flußflächenradien bestimmt werden. Diese wichen etwa 2cm von ihrem Mittelwert ab. Da beim Vergleich der vier Radien auch Fehler in der Positionsbestimmung der magnetischen Achse auffallen, dürfte dies ein guter Schätzwert für den Gesamtfehler in der Bestimmung des Radius sein.

Die Modenpositionen lassen sich auch aus den Radien, an denen erhöhter Transport (siehe Abschnitt 7.2) auftritt, bestimmen. Dies ist für die Ermittlung der Positionen der höheren Moden  $m \geq 12$  notwendig, die wegen der geometrischen Interferenzeffekte nicht aus SXR-Profilen bestimmt werden können. Zur Bestimmung der Positionen wurde ein zeitliches Minimum der von einem Sehstrahl registrierten Röntgenintensität als Durchgangszeitpunkt der Erregungswelle durch die Sichtlinie angesehen. Der Radius der tangentialen Flußfläche an die Sichtlinie konnte daraufhin mit der zum Durchgangszeitpunkt aktiven Mode verknüpft werden.

In Abbildung 7.11 sind die Positionen einiger kaskadierender Moden in Abhängigkeit von ihrer toroidalen Modenzahl  $n$  dargestellt. Man erkennt, daß eine Mode um so näher am Plasmazentrum liegt, je höher ihre Modenzahl ist. Eine Kaskade kann somit als Erregungswelle angesehen werden, die sich von außen aufs Plasmazentrum zubewegt. Hierbei ist anzumerken, daß in manchen Fällen neben den hochfrequenten Moden mit von außen nach innen wachsender Modenzahl, weiter innen im Plasma Moden mit von innen nach außen wachsender Modenzahl existieren. In diesen Fällen ist auch das Aussehen der Ereignisse in der Zeit-/Frequenzebene etwas anders. Auf diese Form der Kaskaden wird in Kapitel 11.3 näher eingegangen.

Geht man von der Annahme aus, daß sich eine Plasmastörung mit den Modenzahlen  $(m, n)$  bevorzugt an ihrer resonanten Fläche  $q = m/n$  bildet und daß sich das  $q$ -Profil während einer Kaskade nicht wesentlich ändert, kann man mit den anhand einer Kaskade bestimmten Modenradien ein  $q$ -Profil zeichnen. In Abbildung 7.12 sind einige so ermittelte Profile gegenübergestellt. Hierbei wurde auch der Radius der  $q = 1$ -Fläche, sofern das Vorhandensein einer (1,1)-Mode seine Bestimmung erlaubte, mit eingezeichnet.

In jedem Profil springt sofort eine abgeflachte Stelle ins Auge, die mit einem regelrechten Knick in den normalen  $q$ -Verlauf nach außen hin übergeht. Die Werte der minimalen magnetischen Feldlinienverscherung  $d \ln(q)/d \ln(r)$  sind bei den Diagrammen mit aufgeführt, es werden Werte bis 0,004 erreicht.

Man beachte, daß das Plateau in  $q$  trotz der Fehler in der Bestimmung des Modenra-



dus von etwa 2cm sicher nachgewiesen werden kann, da die  $q$ -Werte selbst als Quotienten zweier ganzer Zahlen keine Fehler aufweisen.

In den Fällen, in denen der Radius der  $q = 1$ -Fläche bestimmt werden konnte, stellt man auch vom Plateau nach innen hin einen Knick zu höheren Verschönerungswerten hin fest.

Daneben beobachtet man, daß sich die Moden mit der Zeit nach innen bewegen (Entladung 8533 in den Abbildungen 7.11 und 7.12).

Nachdem der Sicherheitsfaktor entscheidend für die Stabilität aller Plasmastörungen ist, kann man vermuten, daß das  $q$ -Plateau für die Entstehung der Kaskaden verantwortlich ist. Ein Modell für die Kaskaden hat nun zu erklären, woher die abgeflachte Stelle kommt, was sie mit den hochfrequenten Moden zu tun hat, und warum sie an einem bestimmten Zeitpunkt in Erscheinung tritt.

An dieser Stelle ergibt sich ein weiteres Argument für die Regel  $m = n + 1$  bei den Kaskaden: Wäre etwa ab einer gewissen Modenzahl  $m = n + 2$ , gäbe es an dieser Stelle einen unphysikalischen Sprung in  $q$ , da die  $q$ -Differenz zur vorhergehenden Mode gleich  $\frac{n+2}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{n-2}{n(n-1)} \approx \frac{1}{n}$  wäre, was betragsmäßig viel größer als der normale  $q$ -Abstand in den Kaskaden bei der Modenzahl  $n$  von  $\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{-1}{n(n-1)} \approx \frac{-1}{n^2}$  ist und ein anderes Vorzeichen besitzt. Wäre  $m = n$  müßten alle Moden auf der  $q = 1$ -Fläche liegen.

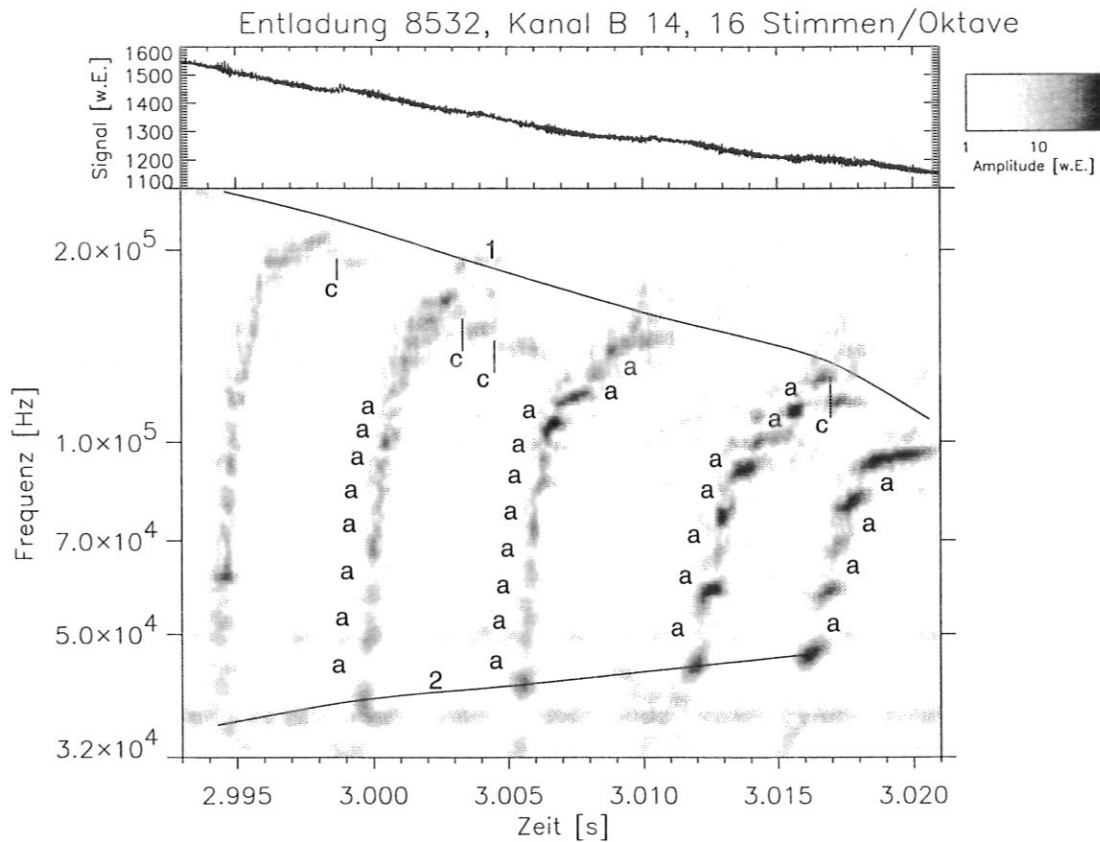


Abbildung 7.1: Rohdaten und Graustufenbild der Wavelettransformierten eines Ausschnitts eines SXR-Signals mit hochfrequenten kaskadierenden Moden. Waagerechte Linien in der Wavelettransformierten sind elektronische Störungen konstanter Frequenz. Erkennbar sind in Frequenz und Zeit aufeinanderfolgende Zentren von Modenaktivität. Die maximale in einer Folge erreichte Frequenz nimmt ab, alle in einer Folge durchlaufenen Frequenzen nehmen von Folge zu Folge zu. a,b und c markieren unterschiedliche Wechselwirkungen zwischen den Moden. Kurve 1 stellt den Abfall der maximalen in den Kaskaden erreichten Frequenz dar, Kurve 2 interpoliert die langsame Frequenzänderung der untersten Mode der Kaskaden.

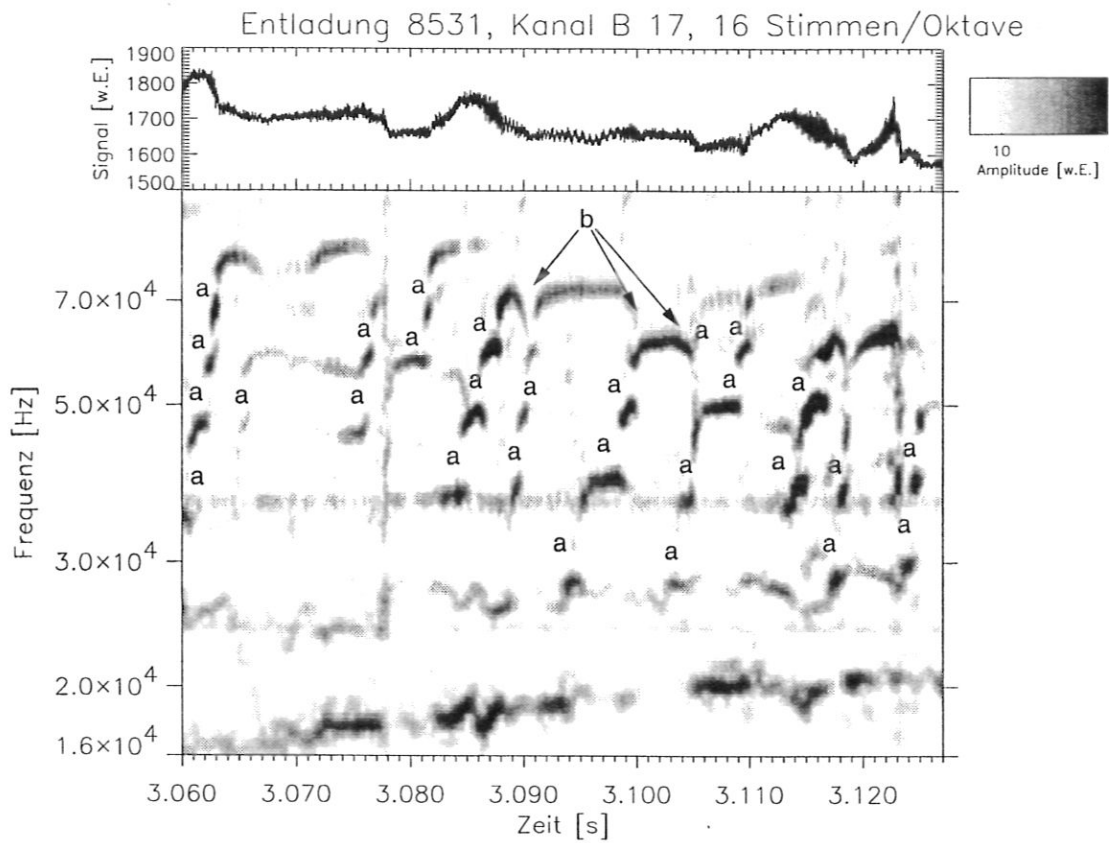


Abbildung 7.2: Rohdaten und Graustufenbild der Wavelettransformierten eines Ausschnitts eines SXR-Signals mit kaskadierenden Moden. Waagerechte Linien in der Wavelettransformierten sind elektronische Störungen konstanter Frequenz, senkrechte Linien sind singuläre Ereignisse, die von den hier betrachteten kohärenten Oszillationen unterschieden werden müssen.

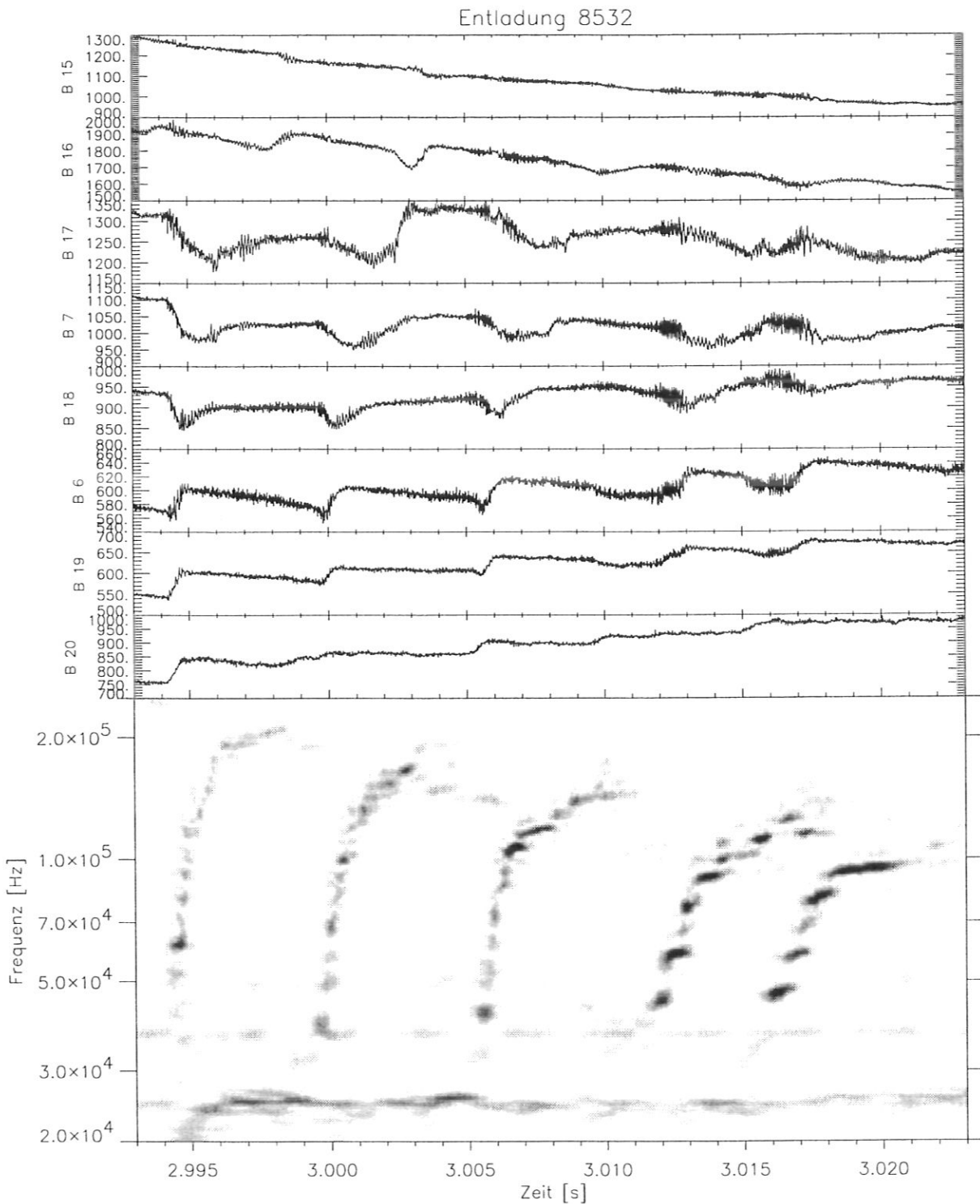


Abbildung 7.3: Rohdaten einiger SXR-Kanäle und Wavelettransformierten des Kanals B 14 von Entladung 8532. Die SXR-Sichtlinien sind von oben nach unten in steigendem Abstand von der magnetischen Achse angeordnet. Simultan mit dem Auftreten der hochfrequenten Moden wird ein Transport von Röntgenemissivität beobachtet: Die Emissivität in einem zentralen Kanal geht zurück und gleichzeitig steigt die Emissivität im nächstäußeren Kanal.

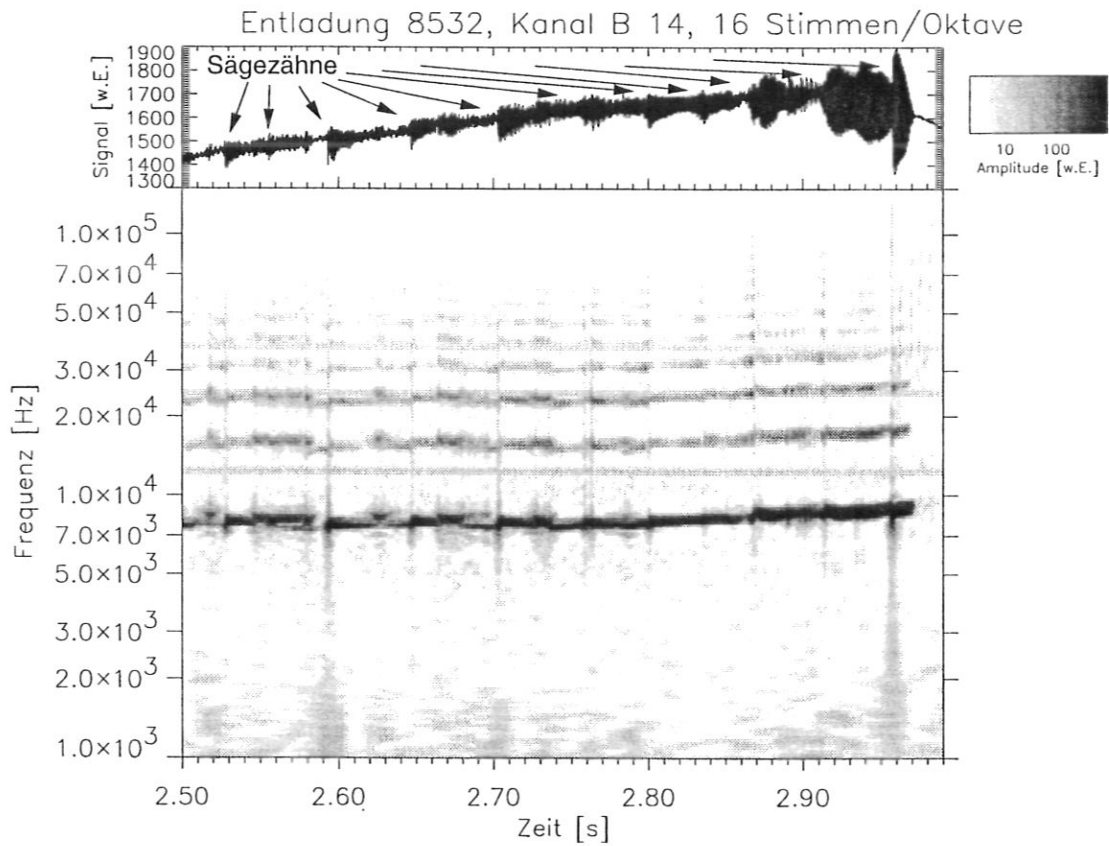


Abbildung 7.4: Größerer Zeitausschnitt der Rohdaten und der Wavelettransformierten von Kanal B 14 der SXR in Entladung 8532. Dominant sind in der Waveletdarstellung die (1,1) und ihre Harmonische, die durch singuläre Ereignisse, sogenannte Sägezähne, unterbrochen werden.

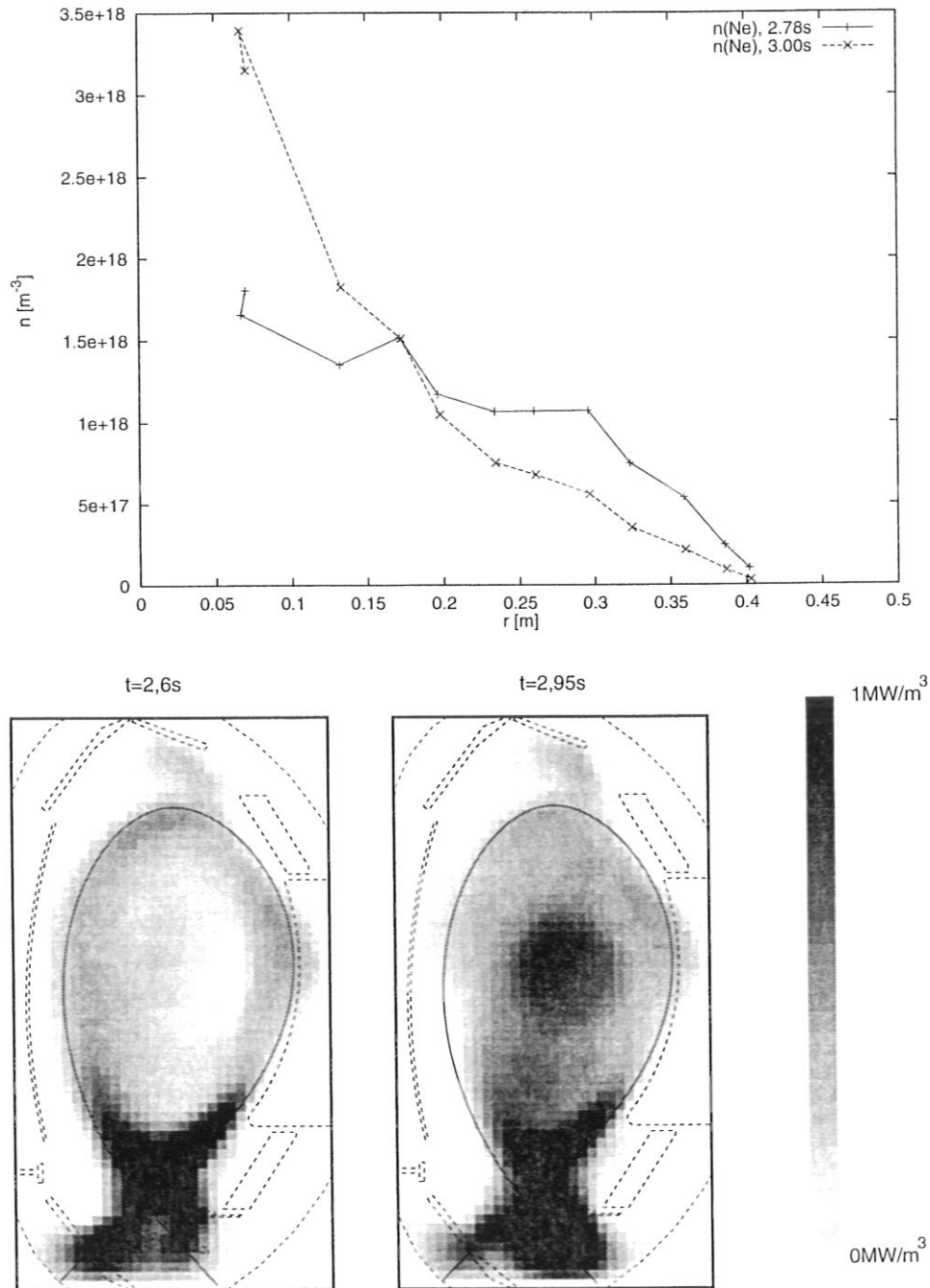


Abbildung 7.5: Oben: Neondichte in Abhängigkeit des kleinen Plasmaradius lange vor und während der Kaskaden. Unten: Tomogramme der Gesamtstrahlungsleistung vor und nach Verunreinigungsakkumulation. Es handelt sich um Entladung 8532.

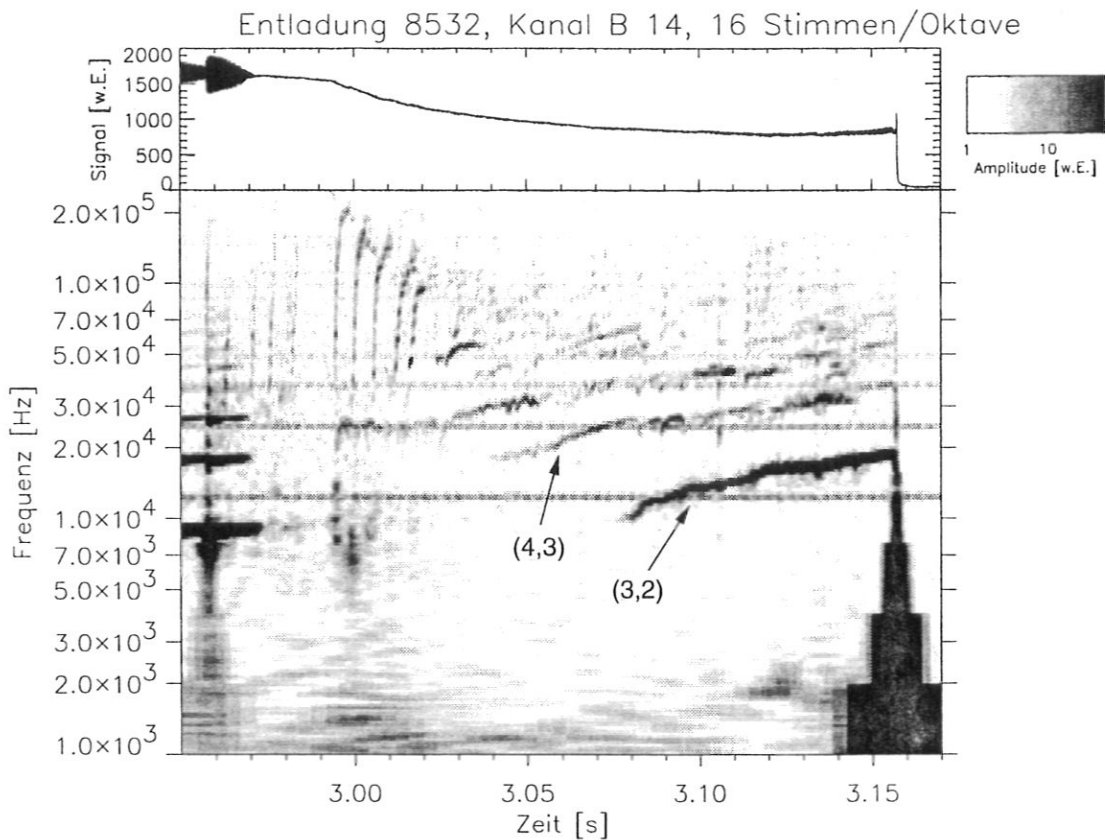


Abbildung 7.6: Rohdaten und Graustufenbild der Wavelettransformierten von SXR-Kanal B14 bei Entladung 8532. Deutlich erkennbar sind neben den Kaskaden ab 2,96s und 2,995s die Signale einer (4,3) und der (3,2)-Mode bei 23kHz bzw. 16kHz gegen Ende der Entladung. Die waagerechten Linien in der Wavelettransformierten sind elektronische Störungen, das singuläre Ereignis bei 3,16s ist eine Disruption, die die Entladung beendet.

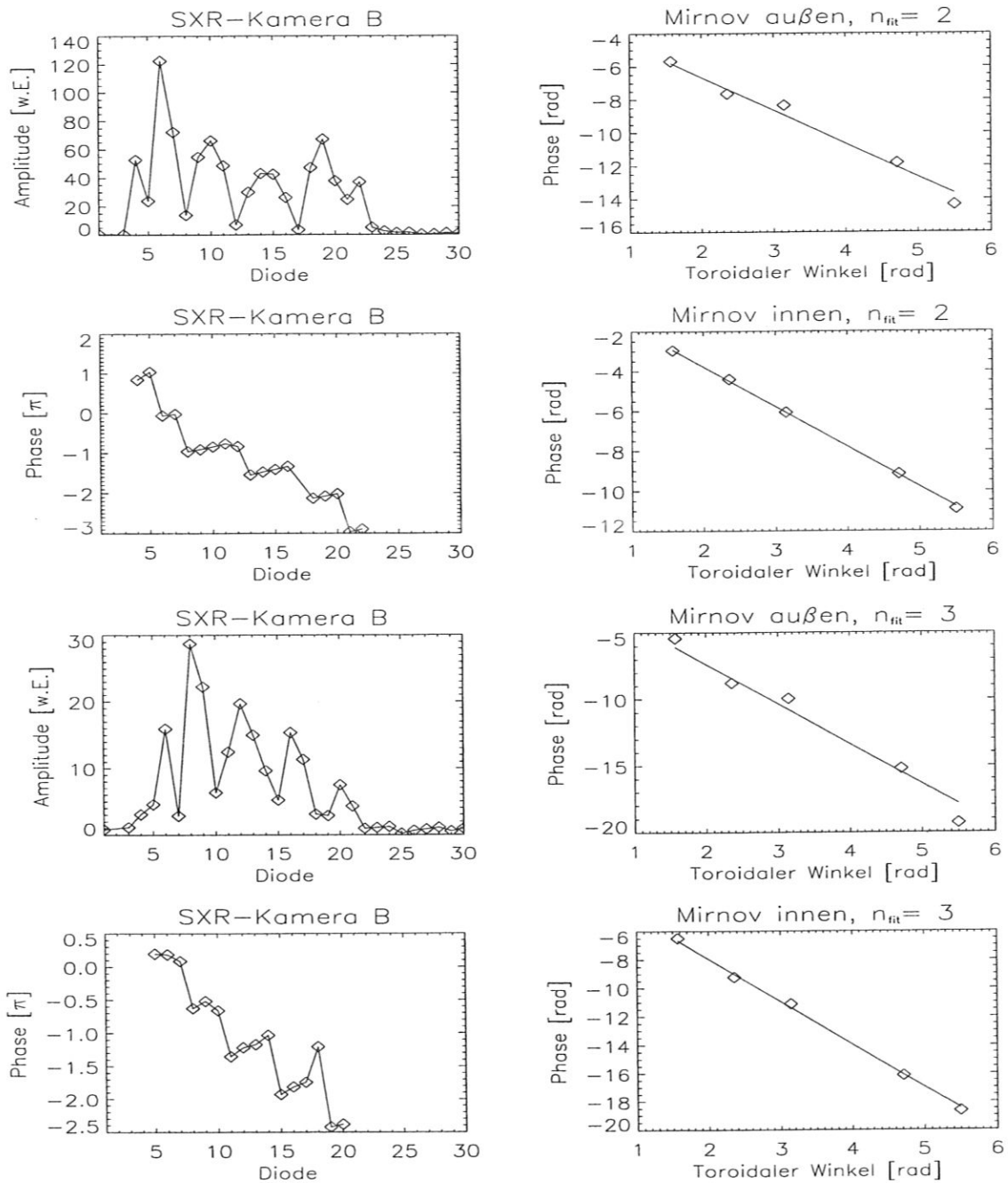


Abbildung 7.7: Meßdaten zur (3,2)- und zur (4,3)- Mode bei 3,1s bzw. 3,05s in Entladung 8532 Links: Amplituden und Phasen für SXR-Kanäle von Kamera B Rechts: Phasen der Oszillationen des poloidalen Magnetfelds gemessen mit den beiden toroidalen Spulenkränzen der beiden Mirnov-Diagnostik mit eingezeichneter gefitteter Phase Die Zahl der Phasensprünge oder Knoten in einem SXR-Profil entspricht jeweils der poloidalen Modenzahl. Bei der (3,2)-Mode treten noch zwei untergeordnete Ausläufer am Rand des Profils mit entgegengesetzter Phase auf. Sie rühren von der radialen Struktur der Emissivitätsfluktuationen her, welche sich bei großen radialen Ausdehnungen der Moden bemerkbar macht. Die poloidale Modenzahl der (3,2)-Mode wurde mittels Tomographie [62] verifiziert.



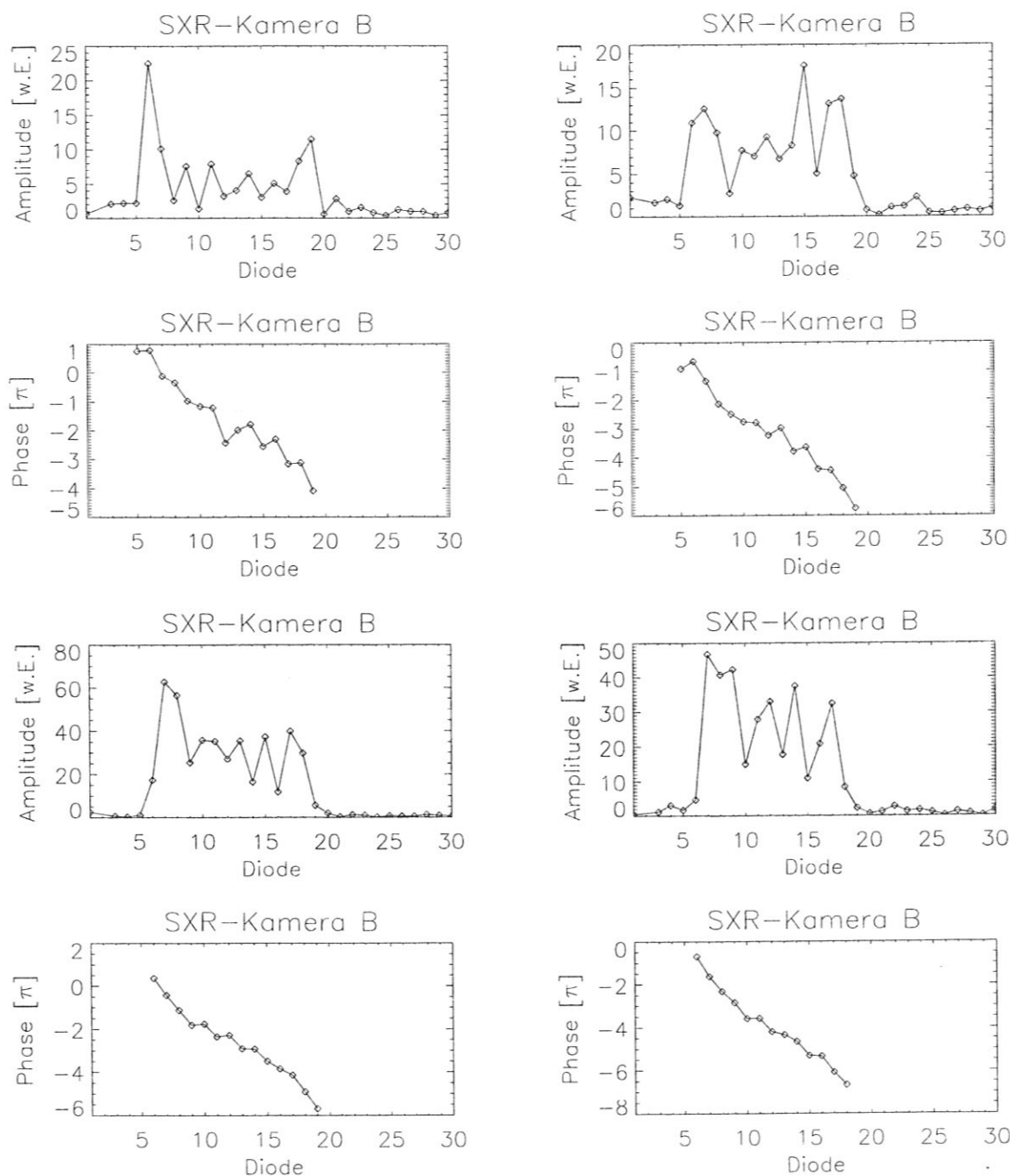


Abbildung 7.8: SXR-Profil von kaskadierenden Moden in Entladung 8528 bei 2,7s, Links oben: (7,6), Rechts oben: (8,7), Links unten: (9,8), Rechts unten: (10,9). Die Treppenstruktur der Phase und die Minima in den Amplituden entstehen durch Überlagerung der Emissivitätsfluktuationen an den fernen und nah an der SXR-Kamera liegenden Schnittpunkten der SXR-Sichtlinien mit der Flußfläche der Mode, was gegen die Ballooning-Instabilität als Ursache der Kaskaden spricht.

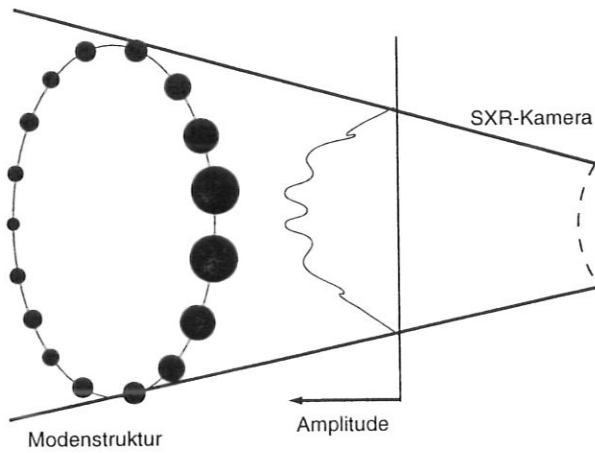


Abbildung 7.9: Ballooning reduziert die Randamplitude

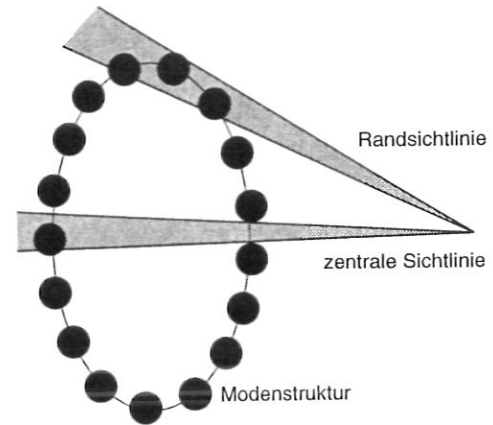


Abbildung 7.10: Mittelung mehrerer Maxima bei Randstrahlen

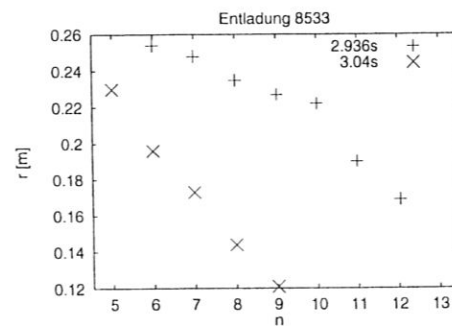
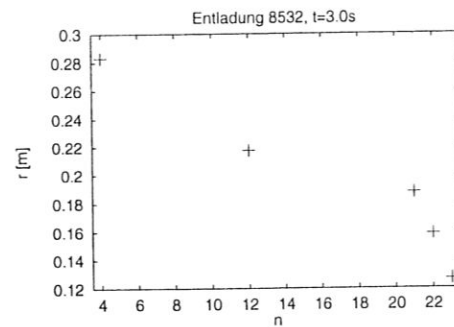
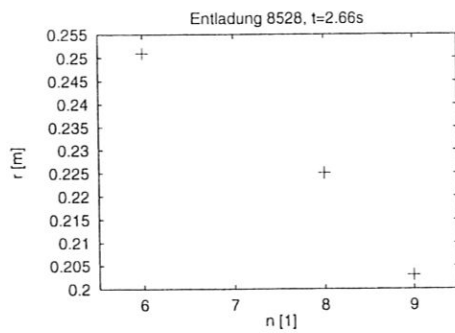


Abbildung 7.11: Radien einiger kaskadierender Moden über ihre aus der Frequenz abgeleitete toroidale Modenzahl  $n$

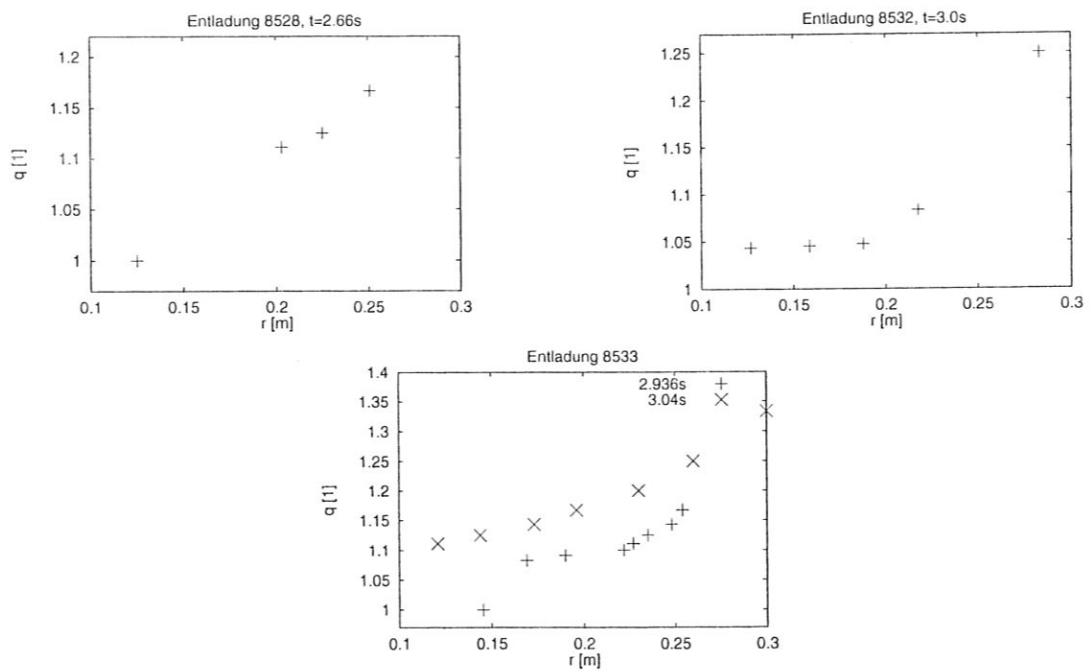


Abbildung 7.12: Aus den Modenradien abgeleitete  $q$ -Verläufe, die minimale Feldlinienverschiebung  $d \ln(q)/d \ln(r)$  war 0,14, 0,004 bzw. 0,06



# Kapitel 8

## Oszillationsfrequenzen

Für die Oszillation der Signale von Röntgen- und Mirnov-Diagnostik können die Rotation des Plasmas, welches die Moden mit sich führt, oder eine Oszillation der Moden selbst<sup>1</sup> verantwortlich sein.

Es zeigt sich, daß die Modenfrequenzen durch den ersten Effekt allein im Rahmen der Meßgenauigkeit der benötigten Plasmamaparameter erklärt werden können. Damit können als erster Schritt zum Verständnis der hochfrequenten Oszillationen die schnellen Änderungen der Modenfrequenzen vom Phänomen der Kaskaden getrennt werden, da sie keine spezielle Eigenschaft der zugrundeliegenden Moden, sondern durch den herrschenden Druckgradienten und die Rotationsgeschwindigkeit des Plasmas bedingt sind.

### 8.1 Überlegungen zur Plasmarotation

#### 8.1.1 Elektronen- und Ionendrift

Bei der Berechnung der Modenfrequenz auf Grund der Plasmarotation muß berücksichtigt werden, daß die Rotationsfrequenzen der verschiedenen Plasmakomponenten, Elektronen und Ionen, je nach Modentyp unterschiedlich zur beobachteten Oszillationsfrequenz der Moden beitragen [29, S. 74].

In die Oszillationsfrequenz einer Mode fließt nur die Bewegung der Teilchen senkrecht zu den Magnetfeldlinien ein, da eine Phasenvariation der Mode entlang einer Magnetfeldlinie wegen der hohen magnetischen Zugspannung stark unterdrückt ist<sup>2</sup>. Zunächst wird im sogenannten Zweiflüssigkeitsmodell, d.h. unter getrennter Behandlung der Elektronen und Ionen des Plasmas, diese Geschwindigkeit berechnet. Hierbei wird vereinfachend der Torus als Zylinder der Länge  $2\pi R$  ( $R$ : großer Tokamakradius) angesehen, was wegen des großen Verhältnisses  $R/r_s \approx 8$  ( $r_s$ : Entfernung der Moden von der magnetischen Achse)

---

<sup>1</sup>sogenannte "overstable modes" [34]

<sup>2</sup>Dies ist nicht richtig im Fall von Modenkopplung durch Abweichungen des Torus von der Zylindersymmetrie oder im Fall von Ballooning-Moden. Ersteres führt evtl. zu Beiträgen von Moden mit benachbarten Modenzahlen, die die Frequenzen nicht stark ändern, letzteres wird in Kapitel 9.1 für die kaskadierenden Moden ausgeschlossen

erlaubt ist. Im folgenden werden Vektoren immer in fett und ihre Beträge in normaler Schrift gedruckt.

Die Driftgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_i$  einer geladenen Teilchenspezies  $i$  verursacht eine Stromdichte  $\mathbf{j}_i = \rho_i \mathbf{v}_i$ ,  $\rho_i := q_i n_i$ , wobei  $q_i$  bzw.  $n_i$  Ladung bzw. Teilchendichte der Spezies  $i$  sind. Die durch  $\mathbf{j}_i$  und das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  im Tokamak verursachte Lorentzkraft muß dem Partialdruckgradienten  $\nabla P_i$  der Teilchen  $i$  und der Kraft durch das radiale elektrische Feld  $\mathbf{E}$  standhalten. Damit gilt:

$$\mathbf{j}_{i\perp} \times \mathbf{B} = \nabla P_i - \mathbf{E} \rho_i \quad (8.1)$$

$$\Leftrightarrow \rho_i \mathbf{v}_{i\perp} \times \mathbf{B} = \nabla P_i - \mathbf{E} \rho_i \quad (8.2)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_{i\perp} = -\frac{\nabla P_i \times \mathbf{B}}{\rho_i B^2} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (8.3)$$

wobei  $\mathbf{j}_{i\perp}$  die elektrische Stromkomponente der Teilchen  $i$  senkrecht zum Magnetfeld ist.

Die Phase einer Mode ändert sich wie oben diskutiert nur senkrecht zu den Magnetfeldlinien. Der Betrag von  $k$  setzt sich nach

$$k = k_\perp = \sqrt{k_{\text{poloidal}}^2 + k_{\text{toroidal}}^2} \quad (8.4)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{m}{r_s}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2} \approx \frac{m}{r_s} \quad (8.5)$$

zusammen, wobei  $R$  der große Tokamakradius und  $r_s$  der Abstand der Mode zur magnetischen Achse ist. Die angegebene Näherung ist richtig, da für die hier betrachteten Moden  $m \geq n$  und  $R/r_s \approx 8$  gilt.

Die Modenoszillationsfrequenz läßt sich nun aus dem Produkt von (8.3) und (8.5) berechnen. Dabei müssen jedoch wie oben erwähnt, die Driftgeschwindigkeiten der einzelnen Teilchenspezies richtig gewichtet eingehen. Nach den in [29, S. 74] angegebenen Beitragsverhältnissen erhält man für ideale, resistive Interchange- bzw. Tearing-Moden, die so schwach sind, daß sie noch mit linearer Störungsrechnung behandelt werden können,

$$f_{\text{ideal}} = \frac{m}{2\pi r_s} v_{I\perp}, \quad f_{\text{r. Inter.}} = \frac{m}{2\pi r_s} \frac{|\mathbf{v}_{E\perp} + \mathbf{v}_{I\perp}|}{2}, \quad f_{\text{Tearing}} = \frac{m}{2\pi r_s} v_{E\perp}, \quad (8.6)$$

wobei  $i = E$  bzw.  $i = I$  für Elektronen bzw. Ionen steht.

### 8.1.2 Berechnung der Modenfrequenz aus der Ionendriftgeschwindigkeit

Alle Entladungen mit Kaskaden wurden mittels Neutralteilcheninjektion geheizt. Die toroidale Rotation des Plasmas wird dabei durch den Impulsübertrag der etwas tangential eingeschossenen Neutralteilchen bewirkt. Mittels der CER-Diagnostik (Charge Exchange Recombination spectroscopy, für eine detaillierte Beschreibung siehe z.B. [50]) ist es möglich, aus der Dopplerverschiebung der Spektrallinien von Verunreinigungsionen, welche

nach Ladungsaustauschreaktionen mit den eingeschossenen Neutralteilchen beobachtbar sind, die toroidale Driftgeschwindigkeit der Ionen zu bestimmen. Nimmt man an, daß die poloidale Rotation der Ionen vernachlässigbar ist (sie wird durch "magnetic pumping" stark gedämpft [26, 66]), so erhält man

$$v_{I\perp} = v_{I,\text{toroidal}} \frac{k_{\text{toroidal}}}{k} \approx v_{I,\text{toroidal}} \frac{nr_s}{mR} \quad (8.7)$$

Sind Druckgradient und Teilchendichten bekannt, so läßt sich damit unter Verwendung von (8.3), (8.5) und (8.6) die von der Plasmarotation her erwartete Modenoszillationsfrequenz bestimmen. Man erhält für Tearing-Moden

$$f_{\text{Tearing}} = \frac{m}{2\pi r_s} v_{E\perp} \quad (8.8)$$

$$= \mp \frac{m}{2\pi r_s} |v_{E\perp} - v_{I\perp}| + \frac{m}{2\pi r_s} |v_{I\perp}| \quad (8.9)$$

$$= \mp \frac{m}{2\pi r_s} |v_{E\perp} - v_{I\perp}| + \frac{n}{2\pi R} v_{I,\text{toroidal}} \quad (8.10)$$

$$= \mp \frac{m}{2\pi r_s} \left| -\frac{\nabla P_E \times \mathbf{B}}{\rho_E B^2} + \frac{\nabla P_I \times \mathbf{B}}{\rho_I B^2} \right| + \frac{n}{2\pi R} v_{I,\text{toroidal}} \quad (8.11)$$

$$= \mp \frac{m}{2\pi r_s} \left| \frac{\nabla(P_E + P_I) \times \mathbf{B}}{\rho_E B^2} \right| + \frac{n}{2\pi R} v_{I,\text{toroidal}} \quad (8.12)$$

$$=: \mp m f_{\text{Diamagnetisch}} + n f_{I,\text{Toroidal}}, \quad (8.13)$$

wobei auf Grund der Quasineutralität des Plasmas  $\rho_I = -\rho_E$  gesetzt werden kann und das negative Vorzeichen für den Fall der Co-Injektion steht, während das positive für Counter-Injektion steht. Bei Co-Injektion fließt der Plasmastrom in Richtung des Neutralteilchenstrahls (und damit der Ionenrotationsrichtung) und das toroidale Magnetfeld weist in die Gegenrichtung. Bei Counter-Injektion wechseln Strom und Magnetfeld das Vorzeichen.

Für ideale bzw. resistive Interchange-Moden verschwindet der Druckterm in (8.12) bzw. erhält den Vorfaktor 1/2.

Unter Annahme eines parabolischen Druckprofils mit einem zentralen Druck von 100kPa, einer Teilchendichte von  $10^{20} \text{m}^{-3}$ , einem Magnetfeld von 2T und einem kleinen Plasmaradius von 0,5m erhält man als typischen diamagnetischen Rotationsbeitrag für eine Tearing-Mode unabhängig vom Radius der Mode  $f_{\text{Diamagnetisch}} = 4 \text{kHz}$ .

## 8.2 Interpretation der experimentellen Befunde

Für einen Vergleich der gemessenen Frequenzen mit den von den Plasmabedingungen her erwarteten, ist nach dem oben gesagten neben der Ionenrotationsgeschwindigkeit der Gesamtdruck von Ionen- und Elektronen zu bestimmen.

Ionen- und Elektronendruck erhält man nach der idealen Gasgleichung  $P_i = n_i k_B T_i$  aus der jeweiligen Temperatur und Dichte. Die Elektronentemperatur wird an ASDEX-Upgrade aus der Linienverbreiterung bei Thomsonstreuung durch die Elektronen bzw. aus ihrer thermischen Zyklotronstrahlung radial aufgelöst bestimmt.

Die Iontemperatur kann im Prinzip aus der Dopplerverbreiterung der Ladungsaustausch-Spektrallinien mit der CER-Diagnostik bestimmt werden. Leider war die Meßgenauigkeit der Iontemperatur in den Entladungen, in denen die Modenzahlen der kaskadierenden Moden bestimmt werden konnten, für eine Bestimmung des Ionendruckgradienten ungenügend. Sie werden daher in den folgenden Abschnitten durch die Gradienten der gemessenen Elektronentemperatur abgeschätzt.

Zur Elektronendichtemessung wurden die DCN-Laserinterferometriediagnostik und die Thomsonstreuungsdiagnostik benutzt. Die Ionendichte ergibt sich wegen der Quasineutralität des Plasmas aus den Dichten der Elektronen und der Verunreinigungsionen. Die Dichte hierbei relevanter Verunreinigungen läßt sich ebenfalls mit der Ladungsaustauschdiagnostik bestimmen.

### 8.2.1 Absolute Frequenzen kurz nach Verunreinigungsakkumulation

In einigen Entladungen hat sich bis zu den Kaskaden kurz nach der Verunreinigungsakkumulation die Elektronentemperatur durch Wärmeabstrahlung fast nicht verändert. Da die Ionen sich durch Strahlungsverluste wesentlich langsamer abkühlen als die Elektronen, kann in diesem Fall auch die Iontemperatur als unverändert angesehen werden. Nach [70, Abschnitt 2.9] ist die Wärmeaustauschzeit zwischen Elektronen und Ionen für ein Deuteriumplasma der Dichte  $10^{20} \text{m}^{-3}$  etwa 13ms. Da dies deutlich kürzer als die typische Energieeinschlußzeit von 0,1s ist, welche die thermische Ankopplung des Plasmas zur Gefäßwand beschreibt, kann man in den genannten Fällen den Iontemperaturgradienten durch den der Elektronen abschätzen.

In Tabelle 8.1 sind für einige Moden in den Kaskaden sowie für die (1,1)-Mode vor dem Einsetzen der Kaskaden die experimentellen Frequenzwerte und mit verschiedenen hohen diamagnetischen Beiträgen nach (8.13) bzw. (8.6) berechnete theoretische Oszillationsfrequenzen aufgeführt.

Die Frequenzen der kaskadierenden Moden werden offenbar mit dem vollen diamagnetischen Beitrag in (8.13), wie es den Tearing-Moden entspricht, gut beschrieben. Die Frequenz der (1,1)-Moden und der nicht kaskadierenden starken (5,4)-Mode bei Entladung 8532 wird am besten ohne diamagnetische Plasmarotation beschrieben. Dies liegt möglicherweise daran, daß die Moden den Druckgradienten durch erhöhten Teilchen- und Wärmetransport an ihren resonanten Fläche ausgleichen. Ein so entstandenes lokales Druckplateau wird bei der Bestimmung des Druckgradienten aus Dichte- und Temperaturmessungen übersehen.



Entladung	Mode	$f$ [kHz]	$f_{I,t}$ [kHz]	$\nabla P_e$ [kPa/m]	$f_D$ [kHz]	$f_I$ [kHz]	$f_{r.I.}$ [kHz]	$f_T$ [kHz]
8528	(1,1)	10,3	10	1,3	0,1	10	10	10
8528	(7,6)	36,0	9	46	1,3	54	50	45
8528	(8,7)	45,5	10	35	1,0	67	63	59
8528	(9,8)	61	9	31	0,9	78	73	69
8528	(10,9)	73,8	10	23	0,7	91	88	84
8532	(5,4)	23,8	7,9	117	3,2	32	24	15
8533	(1,1)	10,4	12	25	2,0	12	11	10
8533	(5,4)	21,6	6,3	87	2,2	25	20	14
8533	(7,6)	36,1	7,9	66	1,8	47	41	35
8533	(9,8)	57,4	8,5	56	1,6	68	61	53

Tabelle 8.1: Gemessene und auf Grund diamagnetischer Drift und toroidaler Ionenrotation erwartete Frequenzen einiger kaskadierender Moden.  $f$  ist die gemessene Frequenz der Mode,  $f_{I,t}$  die gemessene toroidale Rotationsfrequenz der Verunreinigungsionen,  $f_D$  ist die aus dem Druckgradienten, der Elektronendichte und dem Modenradius berechnete diamagnetische Driftfrequenz in Gleichung 8.13,  $f_I$  bzw.  $f_{r.I.}$  bzw.  $f_T$  sind die aus diamagnetischer Frequenz und toroidaler Ionenrotationsfrequenz berechneten erwarteten Modenfrequenzen für Ideale bzw. resistive Interchange bzw. Tearing-Moden. Die Fehler in den Modenfrequenzen sind bedingt durch die in Abschnitt (8.2.3) behandelte schnelle Frequenzänderung der Moden etwa 10%. Die Unsicherheit des Druckgradienten ist etwa 30%, was sich auf die berechnete diamagnetische Driftfrequenz auswirkt, die Unsicherheit der toroidalen Ionendriftgeschwindigkeiten auf Grund von systematischen Fehlern etwa 1,5kHz.

## 8.2.2 Frequenzänderung über mehrere Kaskaden hinweg

Tabelle 8.2 stellt die Frequenzänderung einiger Moden in den Kaskaden der Änderung der toroidalen Ionenrotationsfrequenz am Modenort und der Änderung des diamagnetischen Frequenzbeitrags in (8.13) gegenüber. Wieder mußte der Temperaturgradienten der Ionen durch den der Elektronen ersetzt werden. Dadurch wird evtl. die Temperaturänderung der Ionen überschätzt, da sie im Gegensatz zu den Elektronen kaum Energieverluste durch Strahlung erleiden, welche während der Kaskaden durch die erhöhte Verunreinigungskonzentration verursacht wird, und sich somit nur durch die Ankopplung an das Elektronengas abkühlen. Im Extremfall würde sich der Ionendruckgradient im Gegensatz zur Abschätzung gar nicht ändern, was nach (8.13) den diamagnetischen Beitrag zur Frequenzänderung halbieren würde.

Alle Entladungen in der Tabelle wurden mit Co-Injektion ausgeführt, weshalb die diamagnetische Rotation einen negativen Beitrag zu den Rotationsfrequenzen liefert. Durch die Reduktion der Druckgradienten auf Grund von Verunreinigungsstrahlung senken sich die diamagnetischen Frequenzen, was einen positiven Beitrag zur Frequenzänderung der Moden ergibt.

Nur bei Entladung 8532 ergaben sich große Änderungen der diamagnetischen Fre-

Entladung	Mode	$\Delta f$ [kHz]	$\Delta f_{I,t}$ [kHz]	$-\Delta f_D$ [kHz]	$\Delta f_I$ [kHz]	$\Delta f_{r.I.}$ [kHz]	$\Delta f_T$ [kHz]
8529	(1,1)	1,0	0,4	-0,7	0,4	0,0	-0,3
8529	(4,3)	7,6	1,9	-0,1	6	6	5
8529	(6,5)	8,0	1,7	0,4	9	10	11
8529	(10,9)	29	0,9	1,6	8	17	25
8532	(5,4)	8,5	2,1	2,1	8	14	19
8532	(7,6)	26	1	2,3	6,6	15	23
8532	(11,10)	49	1	3,7	9	30	50
8533	(1,1)	3,7	3,9	1,8	4	5	6
8533	(5,4)	8,6	1,8	0,7	7	9	11
8533	(7,6)	14,8	1,9	0,8	12	14	17

Tabelle 8.2: Langsame Frequenzänderung von Moden über mehrere Kaskaden hinweg.  $\Delta f$  ist die gemessene Frequenzänderung der Mode,  $\Delta f_{I,t}$  die Änderung der gemessenen toroidale Rotationsfrequenz der Ionen am Modenort auf Grund der Verschiebung der Mode und der Änderung der Rotationsgeschwindigkeiten,  $\Delta f_D$  ist die aus dem Druckgradienten, der Elektronendichte und dem Modenradius berechnete diamagnetische Driftfrequenzänderung in Gleichung (8.13),  $\Delta f_I$ ,  $\Delta f_{r.I.}$  bzw.  $\Delta f_T$  sind die aus diamagnetischer Frequenz und toroidaler Ionenrotationsfrequenz berechneten Modenfrequenzen für Ideale, resistive Interchange bzw. Tearing-Moden. Die Fehler in den Modenfrequenzen sind bedingt durch die in Abschnitt (8.2.3) behandelte schnelle Frequenzänderung der Moden etwa 10%. Die Unsicherheit des Druckgradienten ist etwa 30%, was sich auf die berechnete diamagnetische Driftfrequenz auswirkt. Systematische Fehler in der Ionenrotationsgeschwindigkeit treten in den hier betrachteten Frequenzdifferenzen kaum auf, der verbleibende statistische Fehler ist etwa 0,5kHz.

quenz. In diesem Fall stimmte die Frequenzänderung mit der für Tearing-Moden erwarteten überein. Bei den (1,1)-Moden und der starken nicht kaskadierenden (4,3)-Mode bei Entladung 8529 und (5,4)-Mode bei Entladung 8532 sind die Ergebnisse mit einem vollständigen Abbau des Druckgradienten an der resonanten Fläche durch die Modenaktivität vereinbar.

Bei den Entladungen mit Counter-Injektion war es wegen zu kleiner Modenradien leider nicht möglich, die Modenzahlen der kaskadierenden Moden zu ermitteln. Deshalb konnten ihre Frequenzvariationen nicht quantitativ mit den Berechnungen verglichen werden. Im Gegensatz zu den Co-Injektionsentladungen wird hier eine zeitliche Abnahme der Modenfrequenzen beobachtet (Abbildung 8.1). Dies läßt sich durch den zeitlich abnehmenden im Counter-Injektionsfall positiven diamagnetischen Frequenzbeitrag erklären (siehe Abschnitt 11.3).

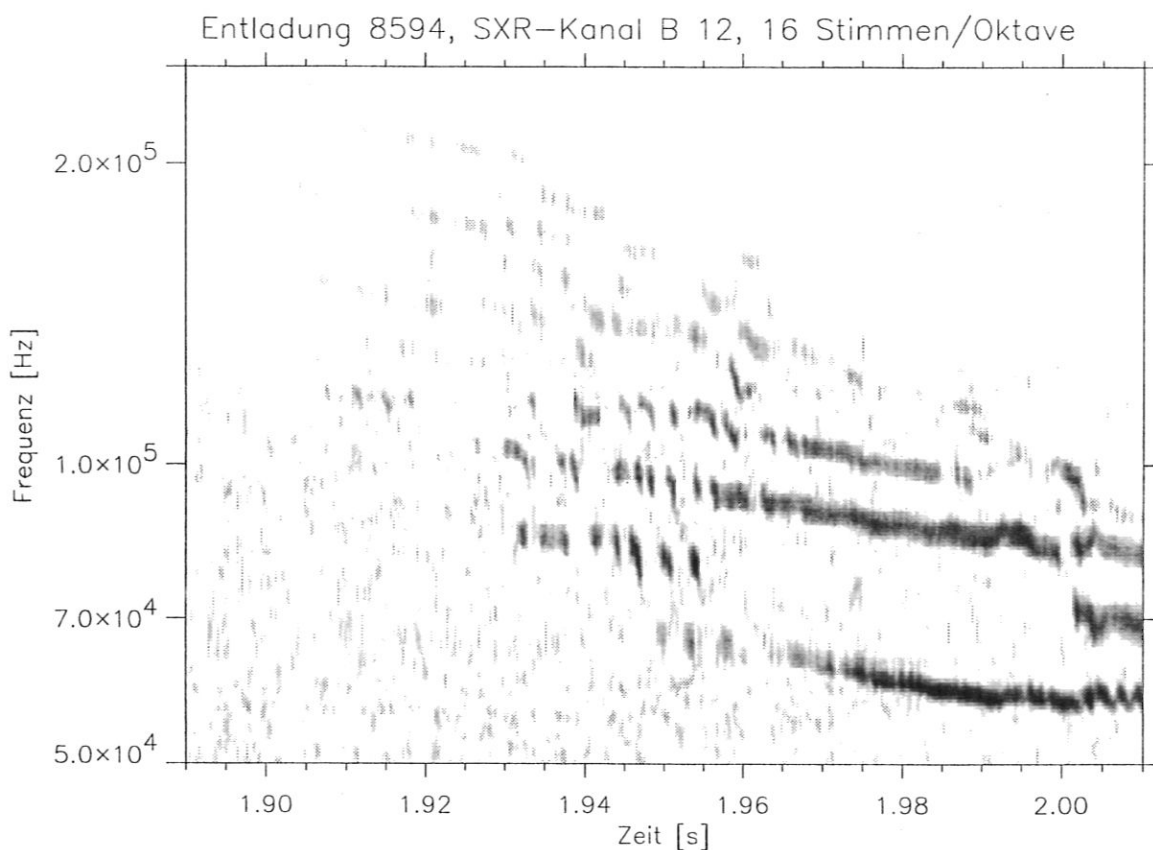


Abbildung 8.1: Wavelettransformierte eines Röntgensignals während einer Entladung mit Counter-Injektion. Es sind einige Kaskaden sowie auslaufend kontinuierliche hochfrequente Modenaktivität erkennbar. Die Modenfrequenzen nehmen über den gesamten gezeigten Zeitausschnitt wie auch während der Lebenszeit einer Mode innerhalb einer Kaskade ab.

### 8.2.3 Schnelle Frequenzänderung während der Existenz einer Mode

Die Frequenzänderung während der Existenz einer Mode läßt sich als Änderung der diamagnetischen Driftfrequenz durch den teilweisen Abbau des Druckgradienten durch Wärme- und Teilchentransport am Modenort verstehen. Dies legt auch der beobachtete Transport von Röntgenemissivität nach außen nahe (siehe Abschnitt 7.2). Wie im vorigen Abschnitt geschildert erhöht bei Co-Injektion die Senkung des Druckgradienten die Modenfrequenz. In Tabelle 8.3 wird die Frequenzänderung einiger Moden aus Kaskaden mit der Größe der diamagnetisch verursachten Rotationsfrequenz verglichen. Wegen der Abschätzung des Ionentemperaturgradienten durch den der Elektronen sind die errechneten Frequenzen möglicherweise um bis zu einem Faktor Zwei zu niedrig, da die Ionen ihren Temperaturgradienten wie oben erwähnt durch die Strahlungsverluste nicht so stark reduzieren wie die Elektronen. Es zeigt sich jedoch, daß die Frequenzänderung in jedem Fall von

der Größe her durch die diamagnetischen Frequenzen verursacht sein könnte. Es reicht meist eine etwa 20-prozentige Änderung des Druckgradienten aus, um die beobachteten Frequenzvariationen zu erklären.

Entladung	Mode	$\delta f$ [kHz]	$\nabla P_e$ [ $\frac{\text{kPa}}{\text{m}}$ ]	$f_D$ [kHz]	$mf_{D,I}$ [kHz]	$mf_{D,r.I}$ [kHz]	$mf_{D,T}$ [kHz]
8528	(7,6)	4,4	46	1,3	0	5	9
8528	(8,7)	5,1	35	1,0	0	4	8
8528	(10,9)	8,5	23	0,7	0	4	7
8532	(5,4)	2,6	36	3,2	0	8	17
8532	(8,7)	4,9	118	3,6	0	14	29
8532	(12,11)	5,6	36	2,4	0	14	29
8533	(7,6)	1,7	50	1,4	0	5	10
8533	(9,8)	2,2	50	1,6	0	7	14

Tabelle 8.3: Schnelle Frequenzänderung  $\delta f$  einiger kaskadierender Moden und diamagnetische Frequenzen.  $f_D$  ist die aus dem Druckgradienten, der Elektronendichte und dem Modenradius berechnete diamagnetische Driftfrequenz in Gleichung 8.13,  $f_{D,I}$ ,  $f_{D,r.I}$  bzw.  $f_{D,T}$  sind die aus diamagnetischer Frequenz und toroidaler Ionenrotationsfrequenz berechneten erwarteten maximalen Frequenzänderungen bei einer vollständigen Abflachung des Drucks am Modenort für Ideale, resistive Interchange bzw. Tearing-Moden. Die Unsicherheit des Druckgradienten ist etwa 30%, was sich auf die berechnete diamagnetische Driftfrequenz auswirkt.

Im Falle der Counter-Injektion ändert sich wegen vertauschter Vorzeichen von Hauptmagnetfeld und Plasmastrom das Vorzeichen des diamagnetischen Frequenzbeitrags in (8.12). Die Modenfrequenz nimmt danach während der Lebensdauer einer Mode ab. Dies ist verträglich mit den Beobachtungen an den Kaskaden in Abbildung 8.1.

# Kapitel 9

## Stabilitätsanalyse

### 9.1 Überlegungen zum Instabilitätstyp

Die in Kapitel 7 beschriebenen kaskadierenden Moden besitzen poloidale und toroidale Modenzahlen von 5–23, ihr Abstand von der magnetischen Achse beträgt 13–25cm.

Ideale Kink-Moden mit den beobachteten Modenzahlen sind in Zylindernäherung für kleine inverse Aspektverhältnisse  $\epsilon = r_s/R$  ( $r_s$ : Radius der resonanten Fläche,  $R$ : großer Tokamakradius) sehr stabil [70, Abschnitt 6.3], was sie als Kandidaten für die kaskadierenden Moden unwahrscheinlich macht. Für die kaskadierenden Moden ist nämlich  $\epsilon \approx 0,2\text{m}^1/1,6\text{m}^2 = 1/8$ , weshalb bis auf die Abweichung der Flußflächen von der Kreisform diese Moden mit einem zylindrischen Modell gut beschrieben werden können.

Ideales [67] und resistives [21] Ballooning befindet sich bei den beobachteten moderaten Druckgradienten in ASDEX-Upgrade bzw. wegen der kleinen Feldlinienverscherung am Ort der Moden im Stabilitätsregime (siehe Abbildung 9.1 für den Arbeitsbereich im  $S - \alpha$ -Diagramm). Wie schon in Abschnitt 7.4 erwähnt wurde, ist Ballooning auch deshalb unwahrscheinlich, weil die kaskadierenden Moden auch auf der Innenseite des Torus Oszillationen der SXR-Emissivität verursachen.

Resistive Interchange- oder auch Twisting-Moden [29] wären in einem Plasma mit kreisförmigen Flußflächen wegen der für  $q > 1$  günstigen mittleren Magnetfeldlinienkrümmung stabil [61]. Die Elliptizität der Flußflächen und toroidale Effekte in ASDEX-Upgrade könnte evtl. jedoch diese Moden trotz der gerade noch günstigen Krümmung destabilisieren. Aus diesem Grund müßten sie im Prinzip berücksichtigt werden. Sie werden jedoch ebenso wie resistive Ballooning-Moden durch die anomale Plasmaviskosität senkrecht zu den Magnetfeldlinien, die bei ASDEX-Upgrade  $1\text{--}3\text{m}^2/\text{s}$  beträgt [51], stark stabilisiert [28, 29], wären jedoch ohne diese instabil.

Als Abart der idealen Ballooning-Moden findet man in der Literatur die "Infernal-Modes" [48], die bei sehr kleiner Feldlinienverscherung instabil sein sollen. Diese weisen jedoch typischerweise kleinere Modenzahlen als die Kaskaden auf. Eine toroidale Stabili-

---

<sup>1</sup>Radius der resonanten Fläche

<sup>2</sup>großer Tokamakradius

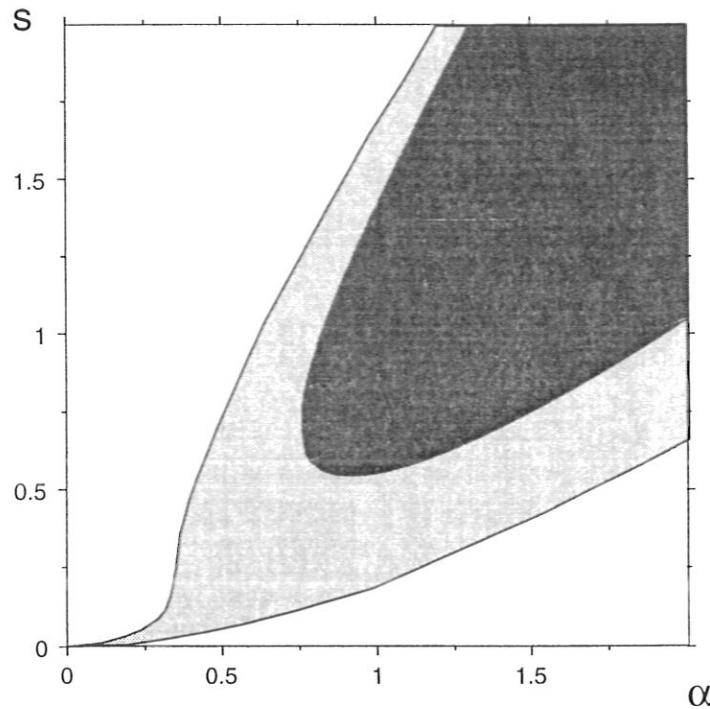


Abbildung 9.1:  $s$ : Feldlinienverscherung  $d \ln(q)/d \ln(r)$ ,  $\alpha$ : Druckgradientenparameter  $-(2\mu_0/B^2)Rq^2 dp/dr$ . Hellgrau: Bereich der Ballooning-Instabilität für unendlich kleines Verhältnis  $r/R$ . Dunkelgrau: Bereich der Ballooning-Instabilität für Verhältnis  $r/R = 0,1$  wie für die Kaskaden typisch. Die Arbeitspunkte der Kaskaden liegen bei  $\alpha \sim 0,14$ ,  $s \sim 0,004-0,14$  und damit weit im stabilen Bereich. Für elliptische Plasmaquerschnitte wie an ASDEX-Upgrade weicht der Instabilitätsbereich noch weiter zurück. (Quelle: [73])

tätsrechnung gestützt auf die experimentellen  $q$ -Verläufe und Druckprofile findet keinerlei ideale Instabilitäten [41].

Durch nichtthermische schnelle Teilchen angeregte Moden (z.B. kinetisches Ballooning) können die kaskadierenden Moden ebenfalls nicht erklären, da die Entladung 8415 (siehe Tabelle 9.1) Kaskaden aufwies, obwohl sie neben der Heizung durch den Plasmastrom nur durch Neutralteilcheneinschuß von 2MW Leistung geheizt wurde, was sehr wenig im Vergleich zu den üblichen NI-Heizleistungen  $\sim 8$  MW ist.

Als Kandidat verbleiben damit noch die schon lange [31] bekannten Tearing-Moden, die wegen des Plateaus und des Knicks im  $q$ -Verlauf instabil sein könnten.

Experimentell spricht für die Tearing-Moden die hohe Amplitude der (23, 22) Mode, die in Entladung 8532 trotz ungünstiger Bedingungen beobachtet werden konnte:

- Die resonante Fläche der Mode lag nur 13cm von der magnetischen Achse entfernt. Da der Emissivitätsgradient zum Plasmazentrum hin gegen 0 geht, kann die Mode nur geringe Röntgenemissivitätsunterschiede zur Erzeugung von beobachtbaren Emissivitätsoszillationen ausnützen.

Entladung	8415	8528	8529	8531	8532	8533	8594	8595	8596	8597
Arbeitsgas	D	D	D	D	D	D	He	He	He	He
$I_{\text{Plasma}}$ [MA]	0,6	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$B_{\text{toroidal}}$ [T]	-1,5	-2,1	-2,1	-2,1	-2,1	-2,1	2,5	2,5	2,5	2,5
$q_{95}$	3,9	3,2	3,1	3,1	3,1	3,1	3,8	3,8	3,8	3,04
$P_{\text{NI}}$ [MW]	1,9	7,5	7,4	7,4	7,4	7,4	5,0	5,0	7,4	3,8
$P_{\text{ICRH}}$ [MW]	0	1,0	1,6	0,8	1,0	1,1	0,9	0,9	0	1,2
$\beta_{\text{poloidal}}$	0,8	0,7	0,9	0,9	0,8	0,8	0,6	0,6	0,6	0,3
$\beta_{\text{toroidal}}$ [%]	1,2	1,4	1,8	1,9	1,5	1,7	0,8	0,8	0,8	0,7
Verunreinigungen	W	Au? Fe Ne	Fe Ne	Ne	Au? Ne	Au? Ne	W	W	W	W

Tabelle 9.1: Kenndaten von Entladungen mit Kaskaden.  $q_{95}$  ist der Sicherheitsfaktor am Plasmarand.  $P_{\text{NI}}$  ist die Heizleistung durch Neutralteilcheninjektion beim Auftreten der Kaskaden.  $P_{\text{ICRH}}$  ist die maximale ICRH-Heizleistung in der Entladung. Bei Entladung 8415 war die Beschleunigungsspannung der NI nur 32kV im Gegensatz zu den sonst üblichen 64kV. Die Entladungen 8528–8533 streben die CDH-Mode [38] an, wobei durch absichtliches Einblasen von Neon der Plasmarand durch erhöhte Strahlungsverluste gekühlt wird. In einigen Fällen mit ICRH-Heizung wurden durch die Vakuumultravioletspektren starke Verunreinigungen mit einem schweren Element festgestellt. Dabei handelt es sich vermutlich um Gold, welches durch engen Kontakt zwischen Plasma und ICRH-Antenne ins Plasma gelangte.

- Die Sichtlinien der SXR-Diagnostik (siehe Abschnitt 6.2) weisen in der Nähe des Plasmazentrums in poloidaler Richtung eine Breite von 3,7cm auf [62, S. 42]. Da dies von der Größenordnung der poloidalen Wellenlänge der Mode, 3,5cm, ist, wurde die gemessene Oszillation durch räumliche Mittelung unterdrückt.
- Die Anti-Aliasing-Filter<sup>3</sup> der SXR-Diagnostik waren auf eine Abschneidefrequenz von 125kHz eingestellt, was die gemessene Emissivitätsoszillation, die bei etwa 210kHz lag, weiter unterdrückte.

Trotzdem war die Oszillation noch mit einem Anteil von etwa 0,4% auf einer Sichtlinie durchs Plasmazentrum sichtbar. Interchange- oder Ballooning-Moden würden lediglich kontinuierlich Plasma innerhalb und außerhalb der resonanten Fläche austauschen, was nur ein kleines Röntgensignal auslösen kann, da die entstehende Temperatur- und Dichte-

<sup>3</sup>Ein Tiefpaß, der die Signalfrequenzen auf die halbe maximale Abtastrate der Digitalisierer begrenzt (siehe Abschnitt 2.5).

modulation durch Transport schritthaltend ausgeglichen wird. Tearing-Moden hingegen führen zur Bildung von magnetischen Inseln [70, Abschnitt 7.2], Störungen der Magnetfeldtopologie, die bei ihrer Bewegung durch das Plasma eine beständige Modulation der Plasmaparameter verursachen.

In Abschnitt 10.2 wird als ein weiteres Argument für eine stromgetriebene Instabilität gewertet, daß der Druckgradient an der resonanten Fläche einer Mode am Ende ihrer Lebensdauer manchmal zunimmt.

Das Verhältnis von Druck des poloidalen Magnetfelds zum Plasmadruck,  $\beta_p$ , war in allen Entladungen gemäßig, auch  $\beta_t$  für das toroidale Feld hielt sich in gewöhnlichem Rahmen auf. Es handelt sich also nicht um die z.B. in [62],[74] untersuchten  $\beta$ -begrenzenden neoklassischen Moden.

Wie in Abschnitt 9.2 gezeigt wird, muß zur Destabilisierung einer Tearing-Mode normalerweise ein Stromdichtegradient von der Größenordnung

$$|\nabla j| \gtrsim j \frac{n^2 r_s}{ma^2} \quad (9.1)$$

existieren ( $r_s$ : Radius der resonanten Fläche,  $a$ : kleiner Plasmaradius), was es bisher unmöglich scheinen ließ, Tearing-Moden mit  $n \gtrsim 4$  zu beobachten. Das in Abschnitt 7.5 beschriebene Plateau im  $q$ -Verlauf bei den Kaskaden, welches mit einem Knick in den normalen Verlauf weiter außen übergeht, wird jedoch von dieser Abschätzung nicht korrekt beschrieben. Die Stabilität der Tearing-Mode wird deshalb in den folgenden Abschnitten genauer untersucht.

## 9.2 Zylindrische $\Delta'$ -Schätzung

In diesem Abschnitt wird die Stabilität von resistiven Tearing-Moden in zylindrischer Näherung abgeschätzt. Die Zylinderkoordinaten werden wie üblich mit  $r$ ,  $\theta$  und  $z$  bezeichnet. Die Stromdichte wird mit  $\mathbf{j}$ , das Magnetfeld mit  $\mathbf{B}$  und der Druck mit  $P$  bezeichnet.

### 9.2.1 Die Tearing-Mode Gleichung

Bei der Ableitung der Tearing-Mode Gleichung (siehe z.B. [70, Abschnitt 6.5]) kann die Trägheit im gesamten Plasma bis auf die unmittelbare Umgebung der resonanten Fläche vernachlässigt werden, da das Wachstum der Tearing-Moden wegen der sehr kleinen Resistivität viel langsamer geschieht, als die Einstellung des MHD-Gleichgewichts auf einer Flußfläche. Änderungen des Gleichgewichts breiten sich nämlich mit der Alfvénwellengeschwindigkeit entlang einer Magnetfeldlinie aus. Das somit herrschenden Kräftegleichgewicht entfernt von der resonanten Fläche wird durch

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla P \quad (9.2)$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (9.3)$$

$$\Leftrightarrow (\nabla \mathbf{B}) \mathbf{j} - (\nabla \mathbf{j}) \mathbf{B} = 0 \quad (9.4)$$

$$\Rightarrow (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{j} - (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{B} = 0 \quad (9.5)$$



beschrieben, wobei im letzten Schritt die Divergenzfreiheit des magnetischen Feldes und die Quasineutralität des Plasmas, aus der die Divergenzfreiheit der Stromdichte folgt, ausgenutzt wurde.

Für kleine inverse Aspektverhältnisse  $\epsilon := r/R$  kann im Zylinder die  $z$ -Komponente der Magnetfeldstörung durch die Instabilität vernachlässigt werden. Mit einer vom Ort unabhängigen  $z$ -Komponente  $B_{0z}$  des Hintergrundmagnetfeldes erhält man dann aus (9.5)

$$\left( B_{0\theta} \frac{\partial}{r \partial \theta} + B_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \right) j_{1z} + B_{1r} \frac{\partial}{\partial r} j_{0z} = 0, \quad (9.6)$$

wobei der Index 0 die ungestörten Größen und der Index 1 die gestörten Größen bezeichnet und  $r$ ,  $\theta$  und  $z$  die üblichen Zylinderkoordinaten sind.

Durch Einführung der Flußfunktion  $\psi$  für das gestörte Magnetfeld

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \psi \times \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1), \quad (9.7)$$

Ersetzen der Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  durch  $im$  und  $\frac{\partial}{\partial z}$  durch  $-in/R$ , d.h. Fourierentwicklung nach  $\theta$  und  $z$ , Anwendung der Ampèreschen Gesetzes unter Vernachlässigung des Verschiebungsstroms

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (9.8)$$

und Eliminieren von  $B_{0\theta}$  mittels

$$q = \frac{r B_{0z}}{R B_{0\theta}} \quad (9.9)$$

erhält man die Tearing-Mode Gleichung [31]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \left( \frac{m^2}{r^2} + \frac{\mu_0 q R \partial j_{0z} / \partial r}{B_z r (1 - n q(r) / m)} \right) \psi = 0. \quad (9.10)$$

Zur Vereinfachung kann man annehmen, das Plasma sei von einer leitenden Wand umgeben. Da die interessierenden Moden im Zentrum lokalisiert sind ändert sich dadurch nichts an ihren Stabilitätseigenschaften. Als Randbedingungen muß dann  $\psi$  bei  $r = 0$  und  $r = a$  ( $a$ : kleiner Plasmaradius) verschwinden.

Die Singularität in Gleichung (9.10) an der resonanten Fläche entsteht, da hier die gemachte Näherung der Trägheitslosigkeit zusammenbricht. Genaue Analysen [24, 34, 29] zeigen, daß in der Nähe der resonanten Fläche sowohl die Trägheit (gegeben durch die Maßendichte  $\rho$  des Plasmas) und die Resistivität  $\eta$  als auch andere Effekte wie z.B. die Viskosität  $\nu$ , bedeutsam werden und gemeinsam mit den Anschlußbedingungen an die Lösung weiter weg von der resonanten Fläche über die Stabilität in Form der Anwachsrate  $\gamma$  der Störung bestimmen. Es ergibt sich eine Gleichung der Form

$$\Delta(\gamma, \rho, \eta, \nu, \dots) = \Delta', \quad (9.11)$$

wobei die Anschlußbedingungen der Lösung der nichtidealen MHD-Gleichungen nahe der resonanten Fläche an die Lösung der Gleichung (9.10) durch

$$\Delta' := \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\psi'(r_s + w/2) - \psi'(r_s - w/2)}{\psi(0)} \quad (9.12)$$

charakterisiert werden.

Für den rein resistiven Fall ergibt sich als Anwachsrate der Tearing-Instabilität [70, Abschnitt 6.5]

$$\gamma = 0,55 \left( \frac{\eta}{\mu_0} \right)^{3/5} \left( \frac{B_\theta(r_s)}{\sqrt{\mu_0 \rho(r_s)}} \frac{nq'(r_s)}{r_s} \right)^{2/5} \Delta'^{4/5}. \quad (9.13)$$

Die Rate hat einen positiven Realteil, wenn  $\Delta' > 0$  ist, was das übliche Kriterium für Tearing-Instabilität ist.

Nach der Tearing-Mode-Gleichung (9.10) krümmt ein starker Abfall der Stromdichte knapp innerhalb der resonanten Fläche für monoton mit  $r$  steigendes  $q$  die Funktion  $\psi$  nach unten, während ein Abfall von  $j$  außerhalb der resonanten Fläche  $\psi$  nach oben krümmt. Nach Definition (9.12) erhöht sich damit im ersten Fall  $\Delta'$ , während es sich im zweiten Fall verkleinert. Ein hoher Stromabfall innerhalb bzw. außerhalb der resonanten Fläche ist folglich für die Tearing-Mode destabilisierend bzw. stabilisierend, sofern  $q$  monoton mit  $r$  wächst, was in Tokamaks der Normalfall ist. Für fallendes  $q$  (invertierte Feldlinienverscherung) treten genau die entgegengesetzten Wirkungen auf.

### 9.2.2 Abschätzung für große $m$

In diesem Abschnitt werden die Indizes 0 weggelassen, da außer  $\psi$  nur Gleichgewichtsgrößen vorkommen. Sei  $\hat{\psi} := \psi/\sqrt{r}$ . Ersetzt man in (9.10)  $\psi$  durch  $\sqrt{r}\hat{\psi}$  und entwickelt alle Koeffizienten um die resonante Fläche  $q(r_s) = m/n$  unter der Annahme, daß für hohes  $m$  der gestörte Fluß um diese herum lokalisiert ist, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial r^2} - \left( \frac{m^2 - 1/4}{r_s^2} + \frac{\mu_0 m^2 R j'(r_s)}{n^2 B_z r_s q'(r_s) (r_s - r)} \right) \hat{\psi} = 0 \quad (9.14)$$

Diese Gleichung kann für geeignete approximative Randbedingungen ( $\hat{\psi} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \pm\infty$ ,  $\hat{\psi}$  stetig bei  $r_s$ ) numerisch oder mittels hypergeometrischer Funktionen gelöst werden. Die Lösung ist von der Form

$$\hat{\psi}(r) = C \hat{\psi}_\alpha(k(r - r_s)), \quad (9.15)$$

$$k := \frac{\sqrt{m^2 - 1/4}}{r_s} \approx \frac{m}{r_s}, \quad (9.16)$$

$$\alpha := \frac{\mu_0 m^2 R j'(r_s)}{n^2 B_z r_s q'(r_s)} \Big/ k, \quad (9.17)$$

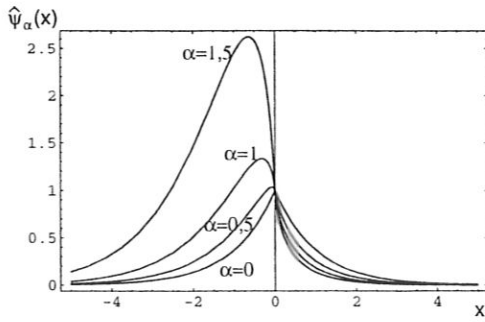


Abbildung 9.2: Näherungslösungen der Tearing-Mode-Gleichung für verschiedene  $\alpha$

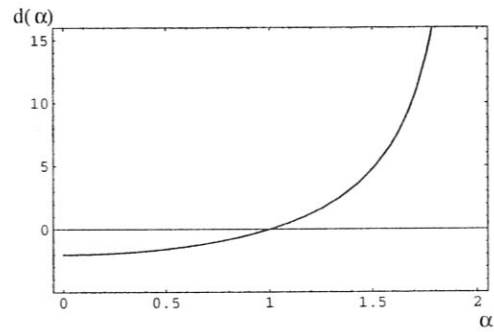


Abbildung 9.3: Normierter Stabilitätsparameter  $d(\alpha)$

wobei  $\hat{\psi}_\alpha$  über  $\alpha$  nur vom Stromprofil abhängt und  $C$  eine Konstante ist.  $\hat{\psi}_\alpha$  ist für verschiedene Werte von  $\alpha$  in Abbildung 9.2 dargestellt. Für große Werte von  $x$  verhält sich  $\hat{\psi}_\alpha(x)$  asymptotisch wie  $O(e^{-x})$ , was bewirkt, daß sich  $\psi(r)$  wie  $O(e^{-k(r-r_s)})$  verhält. Die Flußfunktion ist also in der Tat in einem Bereich der Breite  $1/k$  um die resonante Fläche lokalisiert.

$\Delta'$  läßt sich durch Einsetzen von (9.15) in (9.12) in folgender Form angeben

$$\Delta' = kd(\alpha), \quad (9.18)$$

$$d(\alpha) := \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\hat{\psi}'_\alpha(w/2) - \hat{\psi}'_\alpha(-w/2)}{\hat{\psi}_\alpha(0)} \quad (9.19)$$

wobei  $d$  vom Stromprofil unabhängig ist. Da  $k$  immer positiv ist, ist das Stabilitätskriterium damit auf den Parameter  $\alpha$  zurückgeführt.  $d$  ist in Abbildung 9.3 dargestellt. Man erkennt, daß es für  $\alpha > 1$  positiv wird. Für diesen Fall ist also die Tearing-Mode instabil.

Normalerweise gelten in Tokamaks die Größenordnungen

$$q'(r_s) \sim r_s/a^2 \quad (9.20)$$

$$q(0) = \frac{2B_z}{R\mu_0 j(0)} \sim 1 \quad (9.21)$$

$$\Rightarrow \frac{B_z}{R\mu_0} \sim j. \quad (9.22)$$

Mit  $j(r_s) \sim j(0)$  und (9.16) und (9.17) ist

$$\alpha \sim \frac{ma^2 j'}{n^2 r_s j}, \quad (9.23)$$

was bei relativ glatten Stromverteilungen, wie man sie auf Grund der Widerstandsverteilung im Plasma erwartet, von der Ordnung  $\frac{m}{n^2}$  ist. Dieses kann für  $n \approx m \gtrsim 4$  nicht größer als eins sein. Für die bei den Kaskaden gemessenen abgeflachten  $q$ -Profile ergibt sich in den folgenden Abschnitten jedoch ein anderes Ergebnis.

### 9.2.3 Abschätzung der Stabilität für die $q$ -Verläufe bei den Kaskaden

In diesem Abschnitt werden die Näherungen  $k \approx m/r_s$  und  $m \approx n \gg 1$  für die Kaskaden benutzt.

Im  $q$ -Verlauf bei den Kaskaden wurde in Abschnitt 7.5 ein Plateau nachgewiesen, welches nach obigem Kriterium Instabilität ermöglichen könnte. Um das Kriterium anwenden zu können, muß noch der Stromgradient an der resonanten Fläche ermittelt werden. Dazu werden hier einige Formeln zusammengestellt:

$$q(r) = \frac{2\pi r^2 B_z}{R J(r) \mu_0}, \quad J(r) := \int_0^r 2\pi r' j(r') dr' \quad (9.24)$$

$$q'(r) = \frac{q(r) (2B_z - R j(r) q(r) \mu_0)}{r B_z} \quad (9.25)$$

$$j(r) = \frac{B_z (2q(r) - r q'(r))}{R q(r)^2 \mu_0} \quad (9.26)$$

$$j'(r) = -\frac{B_z (-2r q'(r)^2 + q(r) (3q'(r) + r q''(r)))}{R q(r)^3 \mu_0}. \quad (9.27)$$

Hierbei bezeichnet  $J(r)$  den Gesamtstrom in  $z$ -Richtung innerhalb des Zylinders mit Radius  $r$ .

Ein Vergleich von (9.27) und (9.17) zeigt, daß nur für  $r_s q'' \gg q'$  mit  $\alpha > 1$  gerechnet werden darf. Weiter darf man im folgenden wegen  $m \approx n$  annehmen, daß  $q \approx 1$  gilt. Zum Zwecke der Instabilitätsschätzung genügt also die Approximation

$$j'(r) \approx -\frac{B_z r q''(r)}{R \mu_0}. \quad (9.28)$$

Tearing-Instabilität ist mit (9.16) und (9.17) zu erwarten, wenn

$$\alpha > 1 \Leftrightarrow \frac{r_s q''}{q'} > n. \quad (9.29)$$

Ein hoher Wert von  $q''$  tritt am Übergang vom Plateau zum steileren  $q$ -Verlauf auf. Tabelle 9.2 gibt für verschiedene Entladungen die aus den gemessenen  $q$ -Werten mittels finiter Differenzen approximierten Instabilitätsparameter  $\frac{r_s q''}{q'}$  und die in den Kaskaden erreichte maximale Modenzahl an. In allen Fällen ergibt sich nach dem Kriterium für die beobachteten Modenzahlen Instabilität.

## 9.3 Numerische Überprüfung der Abschätzung

Um die obige Abschätzung numerisch überprüfen zu können, wurden einige gemessene  $q$ -Verläufe mittels kubischer Splines interpoliert und aus der Interpolationsfunktion nach

Entladung	$q'$ [ $\text{m}^{-1}$ ]	$q''$ [ $\text{m}^{-2}$ ]	$r_s q''/q'$	$n_{\text{max}}$
8528	0,6	37	13	11
8532	0,07	38	92	23
8533	0,3	55	31	13

Tabelle 9.2: Mittels Differenzenquotienten abgeschätzte Werte für  $q'$  im Plateaubereich,  $q''$  am Knick und den Instabilitätsparameter  $r_s q''/q'$  sowie die höchste in den Kaskaden beobachtete toroidale Modenzahl  $n_{\text{max}}$

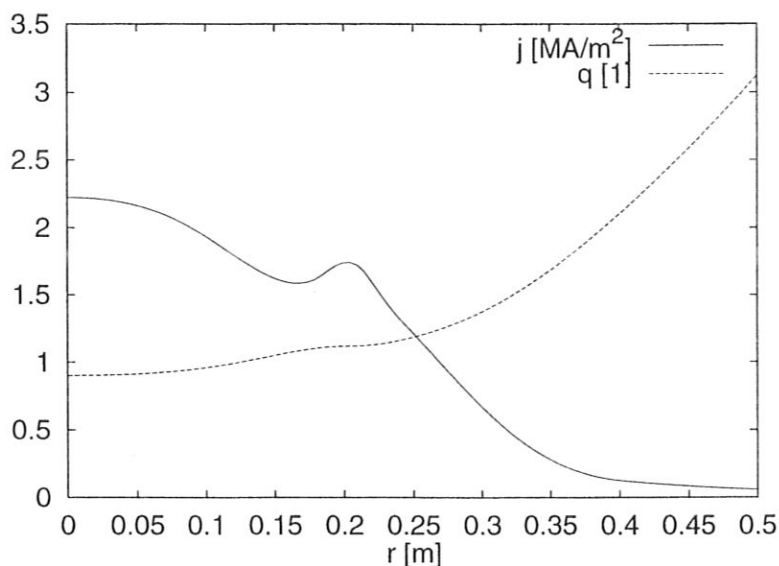


Abbildung 9.4: Mit kubischen Splines interpolierter  $q$ -Verlauf und zugehöriges Stromprofil für Entladung 8528. Instabilität trat für  $(9,8)$ ,  $(8,7)$ ,  $(7,6)$  mit  $\Delta' = 168\text{m}^{-1}$ ,  $76\text{m}^{-1}$ ,  $16\text{m}^{-1}$  auf.

(9.26) die Stromprofile bestimmt. Abbildung 9.4 stellt ein solches Profil zusammen mit dem  $q$ -Verlauf dar. Man erkennt eine "Stromspitze", deren relativ steile äußere Flanke sich gerade noch in dem flachen Bereich von  $q$  befindet und dort die im vorigen Abschnitt abgeschätzte Tearing-Instabilität verursacht.

Numerische Lösung der Tearing-Mode-Gleichung (9.10) im Zylinder unter Vernachlässigung des Drucks mittels des Programms FURTH (Lackner, 1980) ergab für die berechneten Stromprofile ebenfalls Tearing-Instabilität für die an den Kaskaden beteiligten Modenzahlen. Es zeigte sich jedoch, daß bereits kleine Modifikationen an der Interpolationsfunktion des  $q$ -Profils zu Stabilität führen können (siehe Abbildung 9.5).

Dies kann man verstehen, wenn man bedenkt, daß  $\alpha \approx 1$  nach (9.29) bedeutet, daß  $r_s q''/n \approx k q'' \approx q'$ . Da der Bereich, in dem der gestörte Fluß um die resonante Fläche lokalisiert ist, die Breite  $1/k$  hat, muß sich  $q'$  in diesem deutlich ändern, falls Instabilität vorausgesagt wird. Instabilität wird also nur am Rande des Gültigkeitsbereichs der zugrundeliegenden Näherung vorausgesagt. Man muß die Aussage des Kriteriums (9.29)

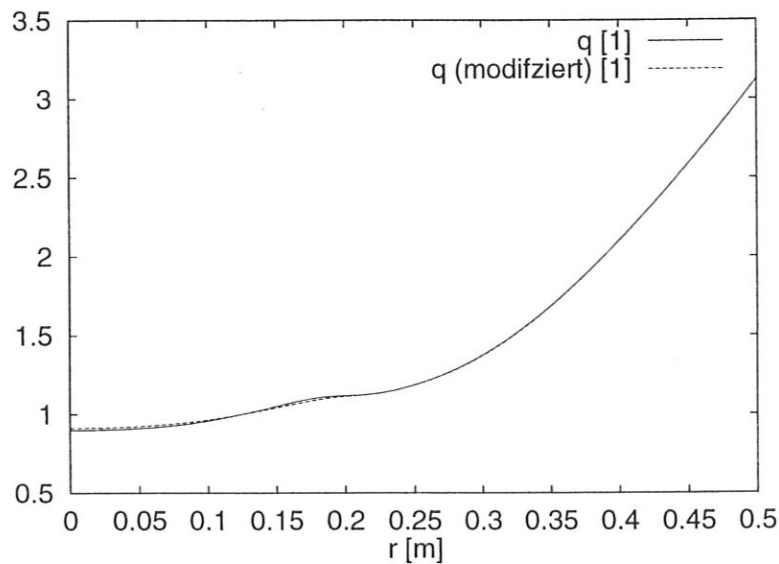


Abbildung 9.5: Gefitteter  $q$ -Verlauf und leicht modifizierter  $q$ -Verlauf. Der ursprüngliche Verlauf war gegen die (9,8)-Mode instabil, der modifizierte ist dagegen stabil.

also so verstehen, daß für  $\alpha > 1$  nahe an dem analysierten  $q$ -Verlauf ein  $q$ -Verlauf mit Instabilität gegen Tearing-Moden liegt.

Man kann somit feststellen, daß die gemessenen  $q$ -Profile zumindest potentiell gegen Tearing-Moden instabil sind, wobei die Instabilität empfindlich gegen kleine Änderungen der Profile ist.

Die erzeugten Stromprofile wurden auch mittels des Programms CASTOR [45] auf Stabilität gegen allgemeine resistive und ideale Moden (Tearing, Interchange, niedrig  $n$ -Ballooning) untersucht [40]. Dabei wurden realistische toroidale Gleichgewichtskonfigurationen von ASDEX-Upgrade, die an die Druckmeßwerte der betrachteten Entladungen angelehnt waren, und realistische Werte für den Plasmawiderstand benutzt. Die anomale Viskosität des Plasmas und die toroidale Plasmarotation und diamagnetische Drieffekte wurden nicht berücksichtigt. Es ergaben sich Modifikationen der Tearing-Moden durch Koppelung von Moden verschiedener poloidaler Modenzahlen. Die berechneten Wachstumsraten der Moden sind im wesentlichen proportional zum Druckgradienten an der resonanten Fläche, aber auch stark vom Stromprofil abhängig.

# Kapitel 10

## Triggerungsmechanismus

Da die kaskadierenden Moden unterschiedliche toroidale Modenzahlen haben, scheidet eine direkte Wechselwirkung zwischen ihnen aus Symmetriegründen aus. Die Situation ist analog der Drehimpulserhaltung in der Quantenmechanik: Da der Torus rotations-symmetrisch ist, bleibt die zugehörige "Quantenzahl" (die toroidale Modenzahl) erhalten, weshalb eine Mode allein keine Mode mit höherer toroidaler Modenzahl erzeugen kann. Nichtlineare Kopplung mit einer  $(1, 1)$  Mode scheidet als Triggerungsmechanismus ebenfalls aus, da in den meisten Fällen gar keine derartige Mode vorhanden war. Gegen eine direkte Wechselwirkung spricht auch die Beobachtung an Abbildung 7.2, daß die Frequenzen von Vorgänger- und Folgemode nicht in einem festen ganzzahligen Verhältnis stehen: Die Moden sind offenbar ungekoppelt.

Es verbleiben nun noch indirekte Wechselwirkungen zwischen den Moden durch Änderungen der Gleichgewichtsprofile von Strom und Druck.

Ein Argument für einen stromgetriebenen Auslösevorgang der Moden liest man aus Abbildung 7.2 ab. Wie in Abschnitt 8.2.3 geschildert, läßt sich die Frequenzvariation während der Existenz einer Mode durch die Reduktion des Druckgradienten an ihrer resonanten Fläche erklären. Diese verursacht im gezeigten Fall der Co-Injektion (Strom in Richtung der Neutralstrahlinjektion) einen Frequenzanstieg zu Beginn einer Mode. Man erkennt im Bild, daß in vielen Fällen am Ende einer Mode wieder eine Frequenzabsenkung und damit ein *Druckgradientenanstieg* auftritt. Wäre der Druckgradient der entscheidende Auslösemechanismus für die Moden, würde ein solcher Gradientenanstieg die Mode weiter destabilisieren, was mit dem beobachteten Ende der Mode nicht vereinbar ist.

Es wird deshalb im folgenden untersucht, inwiefern die Änderung des Gleichgewichtstromprofils durch eine Mode die anderen Moden stabilisieren bzw. destabilisieren kann. Diese Möglichkeit wird durch die Tatsache, daß Tearing-Moden das Stromprofil lokal abflachen [23, Abschnitt 5.5.1], und durch die Beobachtung in Abschnitt 9.2 nahegelegt, daß die Stabilität der Tearing-Moden durch kleine Änderungen des  $q$ -Profils, welches wiederum durch das Stromprofil bedingt ist, beeinflusst werden kann.

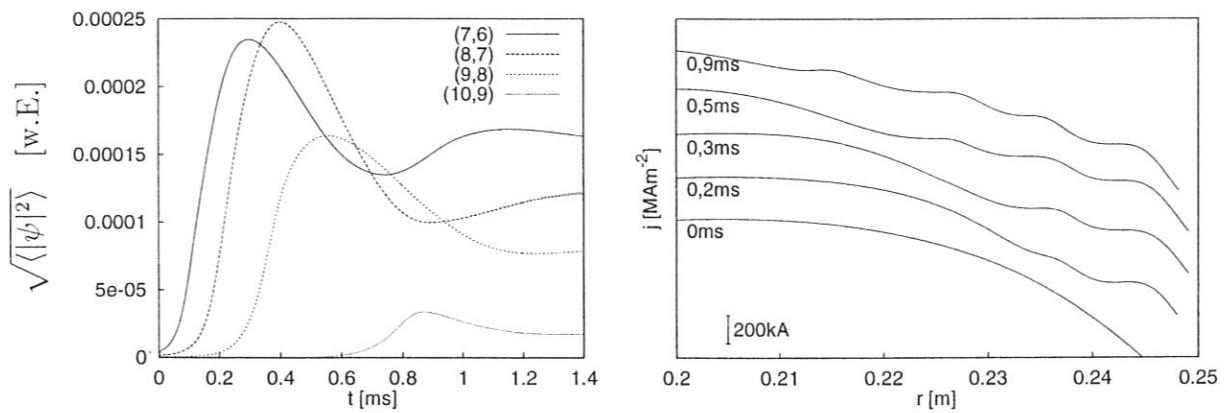


Abbildung 10.1: Links: Berechneter Zeitverlauf der mittleren Amplituden des gestörten Flusses für vier aufeinanderfolgende Moden bei einem dem von Entladung 8528 ähnlichen  $q$ -Verlauf. Die sukzessive Destabilisierung sowie die Amplitudenreduktion nach dem Auslösen der Folgemode sind deutlich zu erkennen. Rechts: Stromprofil, für verschiedene Zeitpunkte vertikal versetzt. Es sind durch die verschiedenen Moden verursachte Plateaus zu erkennen, wobei die höheren Moden zugeordneten Plateaus weiter innen liegen. Die Resistivität war gegenüber Entladung 8528 zur Reduktion der Rechenzeit zehnfach überhöht.

## 10.1 Quasilineare Simulation des Triggerungsmechanismus

Da eine lokale Abflachung des Stromprofils durch eine Mode den Stromgradienten etwas entfernt von der Mode erhöht, ist nach Abschätzung (9.17) zu erwarten, daß eine Mode eine weiter innen liegende destabilisiert. Nach dieser Argumentation müßte auch die nächstäußere Mode destabilisiert werden. Im Experiment wird jedoch eine *stabilisierende* Rückwirkung einer Mode auf ihren Vorgänger in einer Kaskade beobachtet (siehe Abschnitt 7.1). Es stellt sich nun die Frage, ob dies durch eine genauere Analyse der Änderung der Gleichgewichtstromdichte durch die Moden zu erklären ist.

Dazu wurde ein Programm entwickelt, welches das Wachstum einer gegebenen Menge helikaler Gleichgewichtsstörungen und die Reaktion der Gleichgewichtstromdichte darauf berechnet. Das Programm arbeitet mit den zylindrischen, reduzierten MHD-Gleichungen [23, Abschnitt 2.4]. Dabei wurden Wechselwirkungen zwischen Störungen mit verschiedenen Modenzahlen vernachlässigt, d.h. die helikalen Störungen wurden in der quasilinearen Näherung behandelt. Als Randbedingung wurden leitende Wände angenommen. Die Moden wurden zu Beginn eines Laufs mit geringer Anfangsamplitude der helikalen magnetischen Felder gestartet.

Zur Untersuchung der Wechselwirkungen wurden verschiedene den gemessenen ähnlichen  $q$ -Profile benutzt. In Abbildung 10.1 ist das Ergebnis einer Rechnung mit 4-Moden für ein  $q$ -Profil dargestellt, welches an das von Entladung 8528 angelehnt ist.

In der Tat beobachtet man das erwartete sukzessive Auslösen der höheren Moden



sowie einen stabilisierenden Effekt der Folgemoden auf ihre Vorgänger. Die Gesamtdauer der Kaskade beträgt 0,6ms. Die tatsächliche Dauer der Kaskade bei Entladung 8528 sollte wegen der um den Faktor zehn kleineren Resistivität im Experiment (siehe Diskussion von Abschnitt 10.2) etwa gleich 6ms sein, was mit dem experimentellen Wert von 3,9ms in etwa übereinstimmt. Das häufig im Experiment beobachtete wiederholte Kaskadieren tritt hier nicht auf: Nach einer Kaskade pendeln sich die Modenamplituden in einem gegenseitigen Gleichgewicht ein.

Wiederholtes Kaskadieren tritt bei einem stärkeren Knick in  $q$ , welcher einen wesentlich steileren Abfall der Stromdichte am Rand des  $q$ -Plateaus nach außen hin bewirkt, auf (Abbildung 10.2).

Um den Stabilisierungseffekt näher zu untersuchen, wurde ein Programmlauf mit lediglich einer (7,6)- und einer (8,7)-Mode ausgeführt, wobei die höhere Mode erst ab dem Zeitpunkt  $t = 10\text{ms}$  in der Rechnung berücksichtigt wurde (Abbildung 10.3). Wieder tritt die stabilisierende Wirkung der Folgemode auf ihren Vorgänger auf. Die ebenfalls dargestellte Zeitableitung des Stromprofils kurz nach Einsetzen der Folgemode zeigt die Ursache: Die (8,7) erhöht den Stromgradienten knapp *außerhalb* der resonanten Fläche der (7,6). Der Stromgradient an dieser Stelle wirkt nach der Diskussion am Ende von Abschnitt 9.2.1 stabilisierend. Die Abschätzung von Abschnitt 9.2.2 nimmt den Stromgradienten um die resonante Fläche als konstant an, weshalb dieser Effekt nicht darin enthalten ist.

Insgesamt läßt sich damit der Triggerungsmechanismus anschaulich wie folgt erklären: Eine Mode flacht lokal die Stromdichte ab, weshalb sich der Stromgradient etwas weiter innen erhöht. Sobald der Stromgradient *innerhalb* der nächsten resonanten Fläche stark genug ist, beginnt die Folgemode zu wachsen. Diese schiebt wiederum den Stromgradienten von ihrer resonanten Fläche weg nach innen und außen. Sobald der Stromgradient *außerhalb* der resonanten Fläche der Vorgängermode zu stark wird verschwindet diese wieder.

Bei weit auseinanderliegenden resonanten Flächen der beiden Moden ist die anfängliche Wirkung der Vorgänger- auf die Folgemode stabilisierend, da zunächst außerhalb der resonanten Fläche der Folgemode der Stromgradient ansteigt (Effekt b von Abschnitt 7.1).

Die Rechnungen geben insofern nicht die Wirklichkeit wieder, als sich außer für sehr steile Stromprofile nur eine Kaskade ergibt und die Moden danach in einem gegenseitigen Gleichgewicht verweilen. Für ein wiederholtes Kaskadieren könnten die Unterschiede zwischen der realen Geometrie (Elliptizität, Toroidizität) und dem zylindrischen Modell oder ein nichtlinearer Effekt verantwortlich sein, der die Moden mit Überschreiten einer Schwellenamplitude ein- bzw. ausschaltet. Ab einer gewissen Amplitude der Moden wirkt sich z.B. die Abflachung des Druckverlaufs am Modenort durch neoklassische Effekte [30, 25] destabilisierend aus.

## 10.2 Zeitdauer des Triggerungsvorgangs

Wegen der unvollständig bekannten  $q$ -Profile läßt sich leider die Triggerungszeit nicht mit dem oben beschriebenen Simulationsprogramm bestimmen. Näherungsweise kann man jedoch als Maß für die Zeit, die ein Triggerungsvorgang benötigt, die Zeit ansehen, die das durch eine Mode verursachte Stromplateau wachsen muß, bis es an die nächste resonante Fläche heranreicht. Die Breite des Stromplateaus kann durch die Breite der "magnetischen Insel" [70, Abschnitt 7.2], die durch die Mode verursacht wird, abgeschätzt werden [23, 5.5.1]. Nach [23, Abschnitt 5.4] gilt für das nichtlineare Inselwachstum, welches einsetzt, sobald die Inselbreite größer als die resistive Schicht ist, d.h. ab etwa einem halben Zentimeter,

$$\dot{W} = 1,22 \frac{\eta}{\mu_0} \Delta', \quad (10.1)$$

wobei  $W$  die Inselbreite bezeichnet. Effekte der Viskosität oder des Drucks lassen in diesem Fall nach [24] und werden für die Abschätzung nicht betrachtet.  $\Delta'$  wird nach der Diskussion in Abschnitt 9.2.3 und Diagramm 9.3 und den in der Bildunterschrift von Abbildung 9.4 angegebenen numerischen errechneten Werten von  $\Delta'$  als von der Größenordnung  $\Delta' \sim 2k = 2m/r_s$  geschätzt.

Manchmal ist es nicht möglich in den Kaskaden einzelne Moden zu trennen. In diesem Fall kann man die Zeit für mehrere Triggerungsvorgänge aus der dabei zurückgelegten radialen Entfernung und einem gemitteltem  $\Delta'$  abschätzen. Die Ermittlung der Resistivität wird in Abschnitt 11.1 beschrieben. In Tabelle 10.1 sind so abgeschätzte Zeiten den experimentellen Daten gegenübergestellt.

Entladung	$t$ [s]	$n_1$	$n_2$	$\Delta r$ [cm]	$\Delta t$ [ms] (gemessen)	$\Delta t$ [ms] (berechnet)
8528	2,66	6	8	2,6	2,1	10
8528	2,66	8	9	2,2	1,8	8
8533	2,936	11	12	2,1	2,2	5
8533	2,936	7	11	2,6	1,8	9
8533	3,040	6	9	7,5	8	21
8532	2,995	12	21	3	1,2	5
8532	2,996	21	22	3	1,8	3

Tabelle 10.1: Kaskadierungszeiten.  $t$ : Zeitpunkt der Kaskade.  $n_1, n_2$ : toroidale Modenzahlen.  $\Delta r$ : Radialer Abstand der Moden.  $\Delta t$  Zeit des Kaskadierungsprozesses von  $(n_1 + 1, n_1)$  nach  $(n_2 + 1, n_2)$ .

Es zeigt sich, daß die Größenordnung richtig ist, die geschätzten Zeiten jedoch systematisch um einen Faktor Zwei bis Fünf zu groß sind (auch gegenüber der quasilinearen Simulation von Abbildung 10.1). Dies könnte daran liegen, daß evtl. bereits deutlich bevor eine Insel an die nächste resonante Fläche heranreicht, die Wirkung einer Mode auf die folgende einsetzt oder daß  $\Delta'$  systematisch größer als der hier abgeschätzte Wert von  $2k$  ist, was nach Diagramm 9.3 bereits für wenig erhöhtes  $\alpha$  möglich ist.

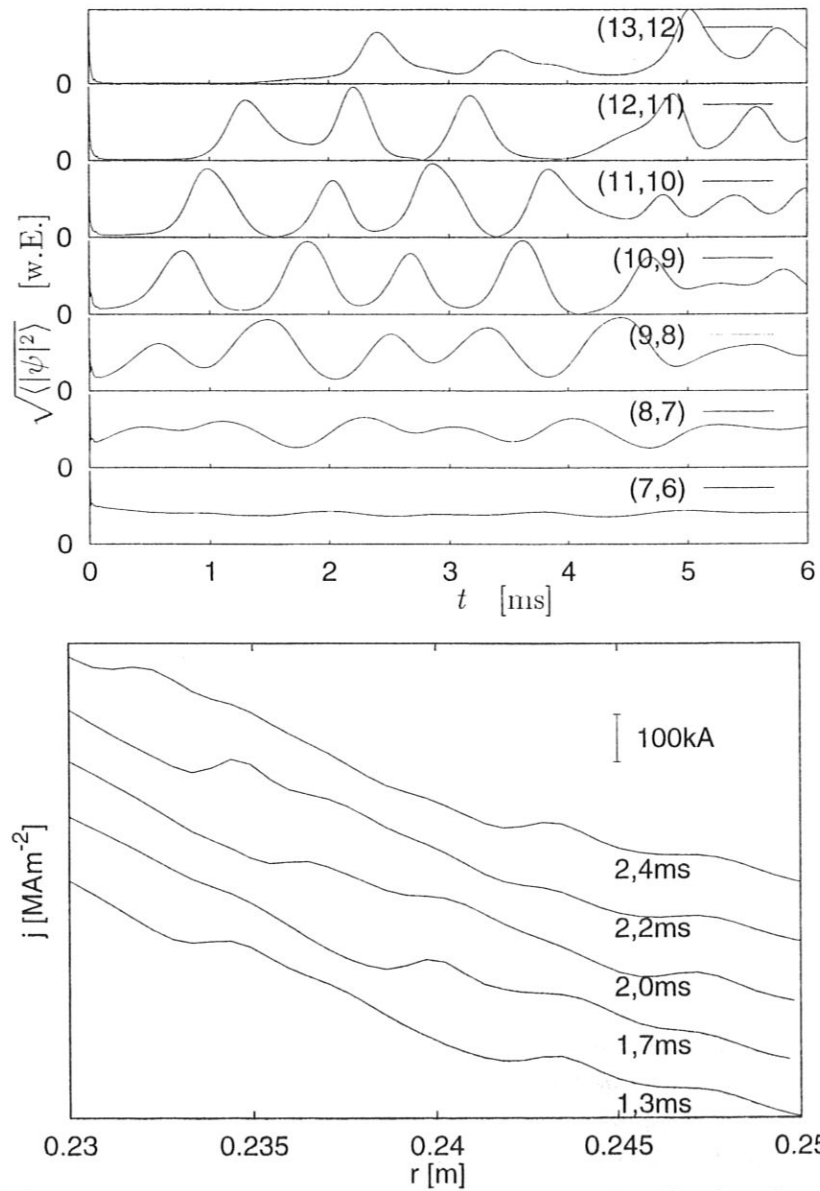


Abbildung 10.2: Oben: Berechneter Zeitverlauf der mittlere Amplituden des gestörten Flusses für 7 aufeinanderfolgende Moden für ein künstliches Stromprofil. Unten: Stromprofil, für verschiedene Zeitpunkte vertikal versetzt. Die Wanderung des durch Modenaktivität verursachten Stromplateaus nach innen ist klar zu beobachten. Die Resistivität war um einen Faktor zehn gegenüber den Entladungen mit Kaskaden überhöht.

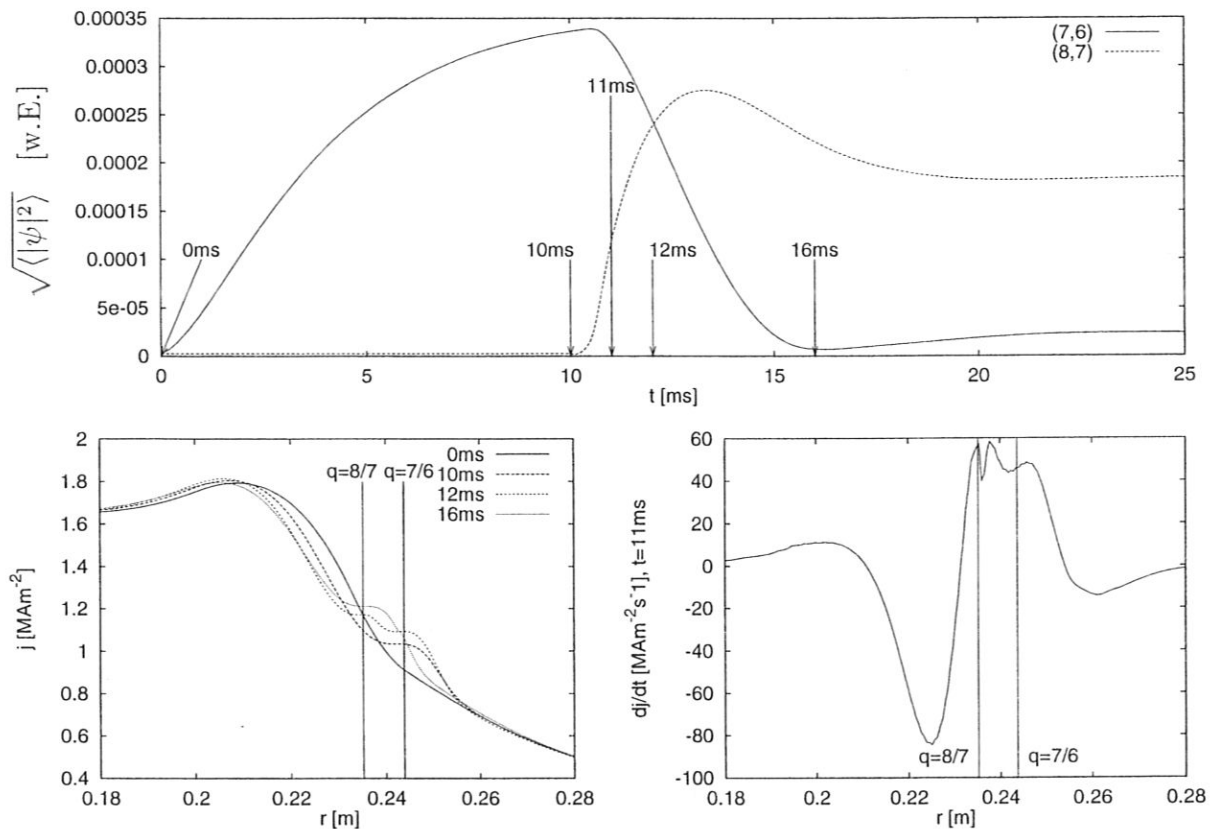


Abbildung 10.3: Oben: Berechneter Zeitverlauf der mittlere Amplituden des gestörten Flusses für eine (7,6) und eine (8,7) Mode für ein künstliches Stromprofil. Erst ab dem Zeitpunkt 10ms wurde die (8,7) bei der Rechnung berücksichtigt, um ihren Effekt auf die (7,6) herauszustellen. Unten Links: Stromprofil für verschiedene Zeitpunkte. Unten Rechts: Zeitliche Ableitung des Stromprofils kurz vor der Stabilisierung der (7,6) durch die (8,7).

# Kapitel 11

## Bedingungen für das Auftreten der Kaskaden

In Kapitel 9 wurde gezeigt, daß ein Plateau in den experimentellen  $q$ -Profile, die in Abschnitt 7.5 in Entladungen mit Kaskaden bestimmt wurden, für die Instabilität von Tearing-Moden mit hohen Modenzahlen verantwortlich ist.

Im folgenden wird eine Erklärung für die Ursache dieses Plateaus gegeben, die zu einem Kriterium für das Auftreten von Kaskaden führt. Anschließend wird die zeitliche Entwicklung und das Vergehen der Kaskaden untersucht.

### 11.1 Herkunft des $q$ -Plateaus

Wie in Abschnitt 7.3 geschildert wurde, beobachtet man vor dem Auftreten der Kaskaden starke Verunreinigungsakkumulation. Durch diese kann sich der Widerstand des Plasmas ändern, was Auswirkungen auf das Stromprofil hat.

Nach Spitzer [64] ist die Leitfähigkeit des Plasmas parallel zu den Magnetfeldlinien unter Auslassung neoklassischer Effekte gegeben durch

$$\eta_{\parallel} = 1,65 \cdot 10^{-9} Z_{\text{eff}} \ln \Lambda / T_E^{3/2}, \quad (11.1)$$

wobei der Coulomb-Logarithmus  $\Lambda \approx 17$  für Teilchendichten  $n = 10^{19} - 10^{20} \text{ m}^{-3}$  nur schwach von der Dichte abhängt und die effektive Ladungszahl durch

$$Z_{\text{eff}} = \frac{\overline{Z^2}}{\overline{Z}}, \quad \bar{x}: \text{Mittelung von } x \text{ über alle Ionen} \quad (11.2)$$

gegeben ist.

Unter der Annahme, daß in den CDH-Entladungen [38] von den Verunreinigungen hauptsächlich Neon zum erhöhten  $Z_{\text{eff}}$  beiträgt, kann man  $Z_{\text{eff}}$  für ein Wasserstoffplasma nach der Formel

$$Z_{\text{eff}} \approx \frac{n_E - 10n_{Ne} + 100n_{Ne}}{n_E} = 1 + 90 \frac{n_{Ne}}{n_E} \quad (11.3)$$

berechnen. Hierbei ist anzumerken, daß das Neon wegen der Temperaturen  $\sim 1\text{keV}$  vollständig ionisiert ist und daher die Ladungszahl 10 anzusetzen ist. Es traten bei einigen Entladungen mit Kaskaden Neonkonzentrationen von etwa 3% auf, was  $Z_{\text{eff}}$  auf etwa vier erhöht. Dies führt nach Formel (11.1) zu einer deutlichen Erhöhung des Plasmawiderstands.

Die Akkumulation von hoch- $Z$  Elementen im Plasma führt dagegen kaum zu einer Erhöhung von  $Z_{\text{eff}}$ . Bei einer Strahlungsleistung von  $1\text{MW}/\text{m}^3$  durch Wolfram bei einer Temperatur von  $1\text{keV}$  und einer Elektronendichte von  $10^{20}\text{m}^{-3}$  ist der Beitrag zu  $Z_{\text{eff}}$  etwa 0,13. Durch die hohen Strahlungsleistungen welche schwere Elemente verursachen, senken sie die Plasmatemperatur und erhöhen auf diesem Wege nach (11.1) den Plasmawiderstand.

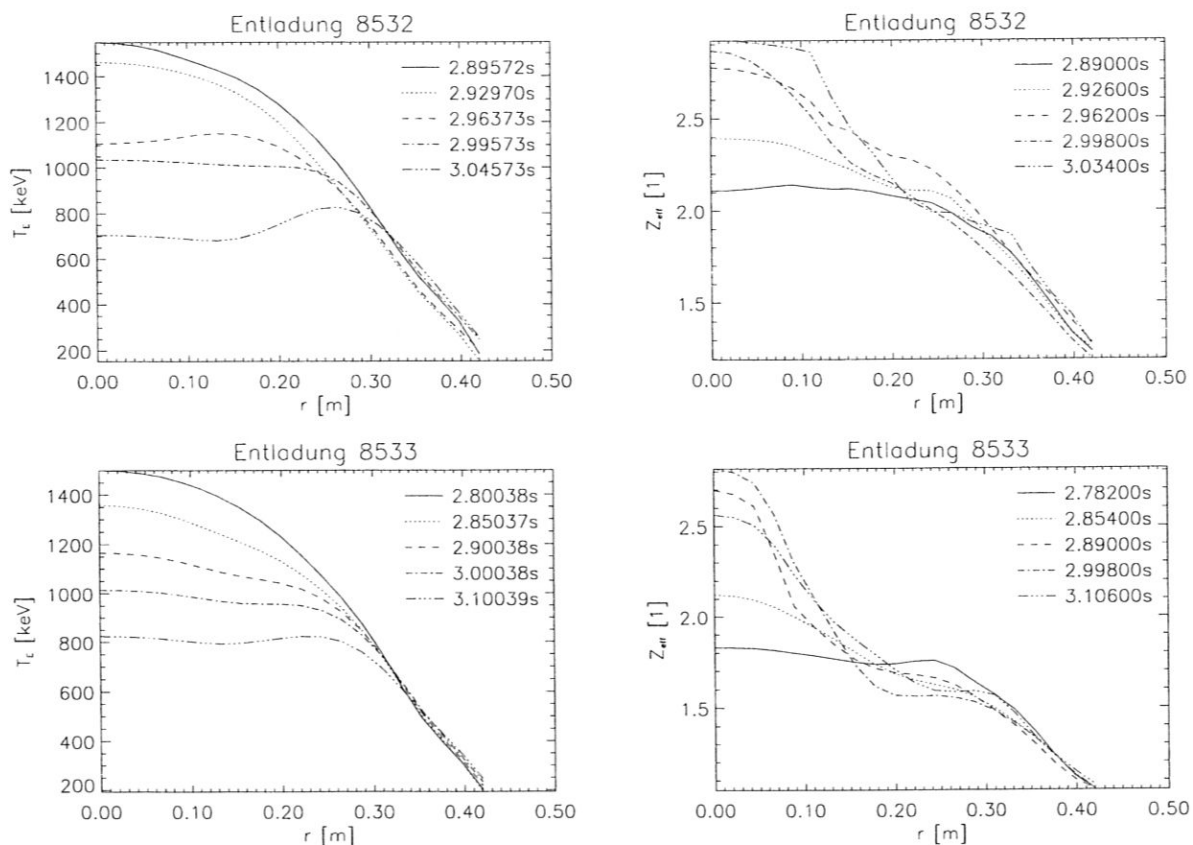


Abbildung 11.1: Elektronentemperatur- und  $Z_{\text{eff}}$ -Profile der Entladungen 8532 und 8533. Bei Entladung 8532 treten die Kaskaden ab 2,96s auf, bei Entladung 8533 ab 2,93s.

Abbildung 11.1 zeigt Bilder der radialen Temperaturprofile aus Thomsonstreuungsmessungen und  $Z_{\text{eff}}$ -Verteilungen, die für CDH-Schüsse aus den mit Ladungsaustauschspektroskopie gemessenen Neonkonzentrationen bestimmt wurden. In jedem Fall ist kurz vor dem Einsetzen der Kaskaden entweder eine Absenkung der zentralen Temperatur oder

eine Erhöhung der effektiven Ladungszahl festzustellen. Der Widerstand im Plasmazentrum war also in jedem Fall erhöht.

Eine Erhöhung des zentralen Plasmawiderstandes treibt natürlich Strom nach außen, da im resistiven Gleichgewicht überall im Plasma das toroidale elektrische Feld

$$E_{\text{toroidal}}(r) = \eta(r)j_{\text{toroidal}}(r) \quad (11.4)$$

gleich sein muß. Dies erhöht wegen Formel (9.24) den  $q$ -Wert im Zentrum, weshalb sich die  $q = 1$ -Fläche kontrahiert und eventuell verschwindet. Die Kontraktion der  $q = 1$ -Fläche kann man anhand der mit SXR bestimmten Modenpositionen (siehe Abschnitt 7.4) in Abbildung 11.2 verfolgen.

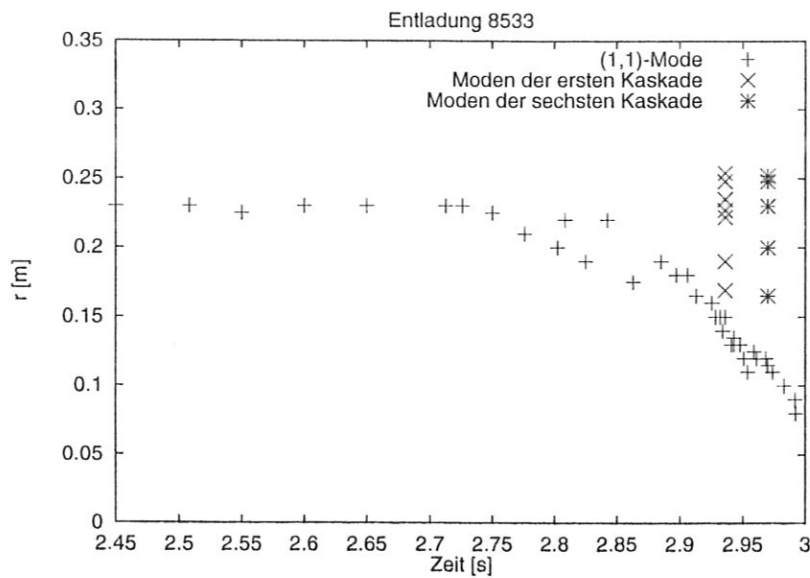


Abbildung 11.2: Positionen der (1,1) und einiger kaskadierenden Moden gegen die Zeit. Die kaskadierenden Moden befinden sich dort, wo vorher die sich kontrahierende (1,1)-Mode war.

Ebenfalls eingetragen sind der Zeitpunkt des Einsetzens der Kaskaden und ihre Position. Es fällt auf, daß die Kaskaden um die gleiche radiale Position entstehen, an der sich vorher die  $q = 1$ -Fläche befand.

Es drängt sich die Vermutung auf, daß die (1,1)-Mode das  $q$ -Profil bei  $q = 1$  abgeflacht hat. Ein solcher Effekt des internen Kinks ist Bestandteil verschiedener Theorien zur Sägezahninstabilität [69, 43]. Eine Region kleiner Feldlinienverscherung wurde auch aus der Beobachtung des Verhaltens einer "Snake" während Sägezähnen [68, 33] am Tokamak JET und der Beobachtung der Pelletablation [32] abgeleitet.

Im Plasmazentrum sollte dabei nach Messungen [63, 58, 47]  $q < 1$  sein. In Abbildung 11.3 ist die Form des vermuteten  $q$ -Verlaufs auf Grund der Aktivität der (1,1)-Mode zusammen mit dem zugehörigen Stromprofil dargestellt. Auffällig sind die Sprünge im Strom, die durch die beiden Knicks in der  $q$ -Kurve verursacht werden. Zusammen mit der

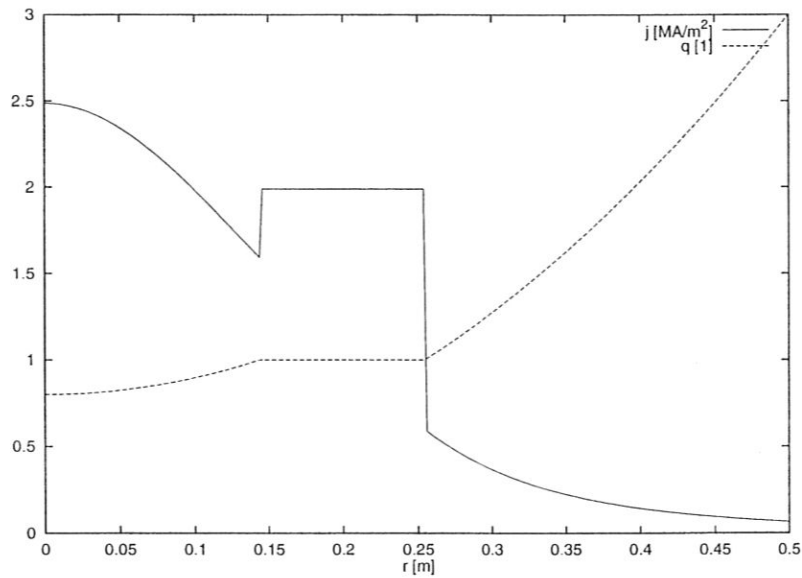


Abbildung 11.3: Idealisertes vermutetes  $q$ - bzw.  $j$ -Profil, welches den Kaskaden vorausgeht.

niedrigen Feldlinienverscherung bewirken sie nach Kapitel 9 die Instabilität von Tearing-Moden hoher Modenzahl.

Es nun noch zu klären, warum das  $q$ -Plateau nur manchmal, im Fall starker Verunreinigungsakkumulation oder zentraler Temperaturabsenkung, zu beobachtbarer Modenaktivität führt. Dazu wird die Diffusionsgleichung für den Plasmastrom aufgestellt. Hierfür müssen nur die  $z$ -Komponenten von elektrischem Feld und Stromdichte berücksichtigt werden. Nach Formel (9.25) ist innerhalb eines Plateaubereichs bei  $q = 1$   $j$  konstant gleich

$$j = \frac{2B_z}{R\mu_0}. \quad (11.5)$$

Das Faradaysche Induktionsgesetz lautet

$$\dot{B}_\theta = \frac{\partial E_z}{\partial r}. \quad (11.6)$$

Drückt man  $B_\theta$  über das Ampèresche Gesetz durch den Gesamtstrom  $J(r)$  innerhalb des Radius  $r$  und  $E_z$  nach (11.4) durch  $\eta$  und  $j$  aus, so erhält man

$$\dot{J}(r) = \frac{2\pi r}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial r} [\eta(r)j(r)] = \frac{2\pi r}{\mu_0} j\eta'(r). \quad (11.7)$$

Mit (9.24) und (11.5) gewinnt man daraus

$$\dot{q} = - \left[ \frac{1}{q} \right] = - \frac{2}{r} \frac{\eta'}{\mu_0}. \quad (11.8)$$



Die Bedingung dafür, daß  $q$  im Plateaubereich *steigt* ist also

$$\eta'(r) < 0. \quad (11.9)$$

Nur in diesem Fall können resonante Flächen der Kaskaden mit  $q = (n + 1)/n$ ,  $n = 5-10$ , in den flachen Bereich gelangen, was zu beobachtbarer Modenaktivität führt. Sobald  $q$  im gesamten Plateaubereich über eins gestiegen ist, kann die (1,1)-Mode, die auf den Bereich innerhalb der  $q = 1$ -Fläche beschränkt ist, nur noch bei kleineren Radien aktiv sein. Der Plateaubereich wird ab da nicht mehr von der (1,1) beeinflusst und entwickelt sich nach der Stromdiffusionsgleichung, modifiziert um die Effekte der kaskadierenden Moden (siehe Kapitel 10), weiter.

Bei schwächerer Verunreinigungsakkumulation ist nach wie vor  $\eta'(r) > 0$ , was bewirkt, daß  $q$  in dem Plateaubereich *nicht* über eins steigen kann. Die Einstellung des resistiven Stromgleichgewichts geschieht in diesem Fall nur durch Kontraktion der äußersten  $q = 1$ -Fläche bei fortdauernder Aktivität der (1,1)-Mode im Plateaubereich. In diesem Fall tritt also zu keinem Zeitpunkt ein  $q$ -Plateau mit  $q \neq 1$  auf, weshalb keine Kaskaden beobachtbar sein sollten.

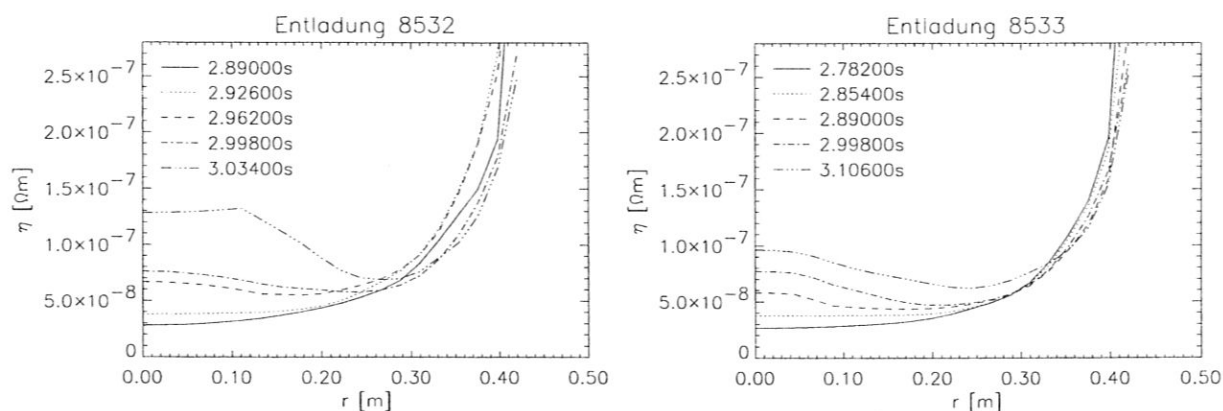


Abbildung 11.4: Resistivitätsprofile der Entladungen 8532 und 8533. Bei Entladung 8532 treten die Kaskaden ab 2,96s auf, bei Entladung 8533 ab 2,93s.

In Abbildung 11.4 sind die aus Temperaturen und effektiver Ladungszahl berechneten Leitfähigkeitsverteilungen um den Einsatzzeitpunkt der Kaskaden herum dargestellt. Offenbar ist die Inversion des  $\eta$ -Profils während der Existenz eines internen Kinks ein recht genauer Indikator für das Auftreten von Kaskaden. Beispielsweise kontrahiert sich die (1,1)-Mode in Abbildung 11.2 schon zwei Zehntelsekunden vor dem Beginn der Kaskaden, während der Umschlagszeitpunkt von  $\eta$  nur einige Hundertstelsekunden davor liegt.

## 11.2 Entstehung hoher Modenzahlen

Es wird nun die zeitliche Entwicklung der im vorigen Abschnitt postulierten  $q$ -Stromstufe untersucht, um zu zeigen, daß sie tatsächlich die hohen erreichten Modenzahlen erklären

kann.

Ableiten von (11.8) nach dem Radius ergibt die Entwicklung des Stromgradienten innerhalb des Plateaus direkt nach der Inversion des Leitfähigkeitsprofils:

$$\dot{q}' = \frac{2}{\mu_0 r^2} (\eta' - r\eta''). \quad (11.10)$$

Für kleine Zeiten ist  $q'$  daher im allgemeinen proportional zur Zeit. Das Vorzeichen wird dabei von Details von  $\eta$  bestimmt. Im folgenden wird die Entwicklung der Kaskaden für positives  $\dot{q}'$  analysiert. Der andere Fall wird in Kapitel 11.3 diskutiert.

Die Größe und das Vorzeichen von  $\dot{q}'$  läßt auf Grund der Meßungenauigkeiten nicht aus den experimentellen  $\eta$ -Verteilungen entnehmen. Um maximal erreichbare Modenzahlen abzuschätzen, wird hier von  $\dot{q}' = 0$  ausgegangen.

Die Entwicklung der Stromstufe wird am Rand überwiegend durch Stromdiffusion bestimmt. Die zugehörige Gleichung erhält man durch Ableiten von (11.7). Wegen der kleinen Stromgradientenlängen können die Beiträge des Radius und von  $\eta$  im folgenden bei allen Differentiation nach  $r$  vernachlässigt werden. Es ergibt sich

$$\dot{j} = D j'', \quad D := \frac{\eta}{\mu_0} \quad (11.11)$$

Die Lösung der Diffusionsgleichung mit einer Stufe als Anfangsstromverteilung ist das Integral einer Gaußfunktion:

$$j(r - r_{11}) = j_0 - \frac{\delta j}{2} \Phi\left(\frac{r - r_{11}}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad \sigma := \sqrt{2Dt}, \quad (11.12)$$

$$\Phi(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2} dz. \quad (11.13)$$

Dabei ist  $r_{11}$  der Radius an dem der Knick in  $q$  liegt,  $j_0$  die Stromdichte im  $q$ -Plateau (siehe (11.5)) und  $\delta j$  die Höhe der Stromstufe.

Mit Gleichung (9.25) erhält man wegen  $q \approx 1$

$$q'(r) = \frac{R\mu_0 \delta j \Phi\left(\frac{r-r_{11}}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{2r B_z} \quad (11.14)$$

$$\Rightarrow q''(r) \approx \frac{R\mu_0 \delta j e^{-\frac{(r-r_{11})^2}{2\sigma^2}}}{r B_z \sqrt{2\pi}\sigma}. \quad (11.15)$$

Die Näherung

$$\Phi(x) \approx -\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}, \quad \text{für } x \ll -1 \quad (11.16)$$

$$\Rightarrow q'(r) \approx \frac{R\mu_0 \delta j \sigma e^{-\frac{(r-r_{11})^2}{2\sigma^2}}}{r(r_{11} - r) B_z \sqrt{2\pi}} \quad (11.17)$$

liefert zusammen mit Kriterium (9.29) für die ohne Rückwirkungen der Moden auf das Stromprofil (siehe Kapitel 10) maximal destabilisierte Modenzahl

$$m_{\max} = \frac{r_{11}q''}{q'} = \frac{(r_{11} - r)r_{11}}{2Dt}. \quad (11.18)$$

Dieser Wert liegt in der Entladung 8532, die die höchsten Moden ( $n = 23$ ) aufwies, an der Stelle ihres Auftretens bei höchstens 6. Die  $\eta$ -Inversion fand mindestens  $t = 0.027s$  zuvor statt, was man anhand des Auftretens der ersten schwachen Kaskaden feststellen konnte,  $D$  war  $0,05m^2s^{-1}$ ,  $r$  war 16cm und  $r_{11} \approx 23cm$ .

Die ohne Rückwirkung der Moden auf das Stromprofil maximale destabilisierte Modenzahl ist viel zu gering um die höchsten Moden zu erklären. Nun wird untersucht welche Modenzahlen durch das Verlagern von Stromgradienten durch die Aktivität der Moden selbst angeregt werden können. Es wird hierbei angenommen, daß eine Mode den Stromgradienten an ihrem Ort an die nächste resonante Fläche weiter innen transportieren kann.

Die Entfernung zwischen benachbarten resonanten Flächen ist

$$\delta r \approx \frac{\delta q}{q'} \approx \frac{1}{n^2 q'}. \quad (11.19)$$

Der Stromgradient ist, wie in Abschnitt 9.2.3 geschildert wurde, für Zwecke der Stabilitätsschätzung bis auf konstante Faktoren gleich  $q''$ . Die maximale durch Kaskadieren anregbare Modenzahl ist mit Kriterium (9.29) gleich

$$n_{\max} = r_s \frac{\delta q''}{q'} \quad (11.20)$$

$$= r_s \frac{q''' \delta r}{q'} \quad (11.21)$$

$$= r_s \frac{q'''}{n^2 q'^2} \quad (11.22)$$

$$\Rightarrow n_{\max} = \left( \frac{r_s q'''}{n^2 q'^2} \right)^{1/3}. \quad (11.23)$$

Mit

$$q''' \approx \frac{R\mu_0 \delta j e^{-\frac{(r-r_{11})^2}{2\sigma^2}}}{B_z \sqrt{2\pi} \sigma^3} \quad (11.24)$$

und (11.14) erhält man

$$n_{\max} = \left( \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{(r-r_{11})^2}{2\sigma^2}} B_z r^2 (r - r_{11})^2}{\sigma^5 R\mu_0 \delta j} \right)^{1/3} \quad (11.25)$$

Für den Fall der oben erwähnten Entladung 8532 erhält man unter Annahme einer Stromstufe von  $\delta j = 200 \text{ kA/m}^2$  als maximal anregbare Modenzahl 22. Angemerkt sei, daß die genaue Größe der Stromstufe nicht wichtig ist, da nur ihre dritte Wurzel eingeht.

Damit erklärt sich, warum die kaskadierenden Moden normalerweise nicht alle gleichzeitig instabil sind: Erst durch den Transport von Stromgradienten nach innen können die höheren Moden angeregt werden. Die Startmoden für den Kaskadierungsprozeß mit poloidalen Modenzahlen von 4-6 werden jedoch offenbar schon durch das unmodifizierte Stromprofil destabilisiert.

Die Abschätzungen aus Abschnitt 9.2.3 können jetzt in einem neuen Licht gesehen werden: Durch den Vergleich von mit finiten Differenzen geschätzten Gradienten des Stroms und des Sicherheitsfaktors wurde gezeigt, daß *nahe* an der flachen Stelle in  $q$  ein ausreichender Stromgradient vorhanden war, um hochfrequente Moden auszulösen.

Der experimentell beobachtete zeitliche Abfall der maximalen Modenzahlen hat im beschriebenen Modell mehrere Ursachen:

- Das  $q$ -Plateau driftet zu höheren  $q$ -Werten, die nach der Regel  $m = n + 1$  nicht so hohe Modenzahlen zulassen.
- Die Zunahme des minimalen  $q$ -Gradienten nach (11.10) begrenzt wegen des Kriteriums (9.29) die erreichbaren Modenzahlen.
- Die diffusive Verbreiterung der Stromstufe sorgt nach Gleichung (11.25) für eine Abnahme der Modenzahlen.

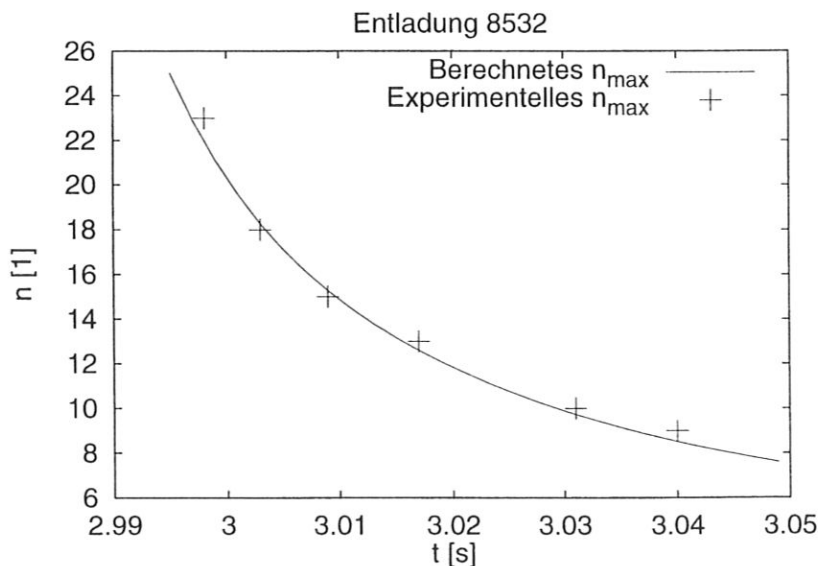


Abbildung 11.5: Nach (11.25) errechnete und experimentelle zeitliche Abnahme der höchsten in Kaskaden erreichten toroidalen Modenzahlen von Entladung 8532.

Im Fall der Entladung 8532 scheint die Abschätzung (11.25) die maßgebliche Begrenzung zu sein, wie man anhand von Abbildung 11.5 feststellt.

### 11.3 Negative Feldlinienverschönerung

Nach Formel (11.10) kann in Abhängigkeit vom genauen Verlauf von  $\eta$  ebenso wie positive auch negative Feldlinienverschönerung auftreten. Ihre Instabilität wäre analog der Diskussion von Abschnitt 11.2 durch die innenliegende Stromstufe bestimmt, eine Kaskade liefe vom Plasmazentrum weg, und wäre überwiegend am inneren Rand der Stromstufe angesiedelt, die die (1,1)-Mode hinterlassen hat.

Dieses Verhalten wurde tatsächlich bei den Entladungen mit Counter-Injektion<sup>1</sup>, gefunden. Es war hierbei allerdings lediglich möglich die umgekehrte radiale Anordnung von hoch- und niederfrequenten Moden nachzuweisen, da die Moden einen sehr kleinen Radius aufwiesen. Abbildung 11.6 zeigt die Wavelettransformierten der Signale zweier SXR-Sichtlinien mit verschiedenen Entfernungen zum Plasmazentrum. In dem entfernteren sind die Oszillationen mit der höchsten Frequenz über dem Rauschhintergrund zu sehen, in dem anderen befinden sich die Oszillationen mit niedrigerer Frequenz.

Wegen der negativen Feldlinienverschönerung dürften sich die Flußflächen mit dem Ansteigen von  $q$  nach außen in Bereiche niedrigerer toroidaler Ionenrotationsgeschwindigkeit bewegen (vgl. Abschnitt 8.2.2), was zu einem langsamen Absinken der Modenfrequenz führt. Die Vergrößerung des Modenradius läßt sich leider nicht mit der SXR-Diagnostik verfolgen, weil der gesamte Radius nur etwa 12cm beträgt und die geringe Expansion an die radiale Auflösungsgrenze der SXR-Diagnostik stößt.

Angemerkt sei, das wegen des ungewohnten Frequenzverlaufs dieses Ereignis erst nach Entwicklung des Verständnisses für die Kaskaden als verwandt erkannt wurde.

In der gezeigten Entladung treten etwas später auch weiter außen relativ hochfrequente Moden mit normaler radialer Anordnung auf. Sie sind in Abbildung 11.7 dargestellt. Ihre Flußflächen bewegen sich nach innen, was den gewohnten langsamen Frequenzanstieg bewirkt. Es tritt also offenbar ein Übergang von negativer zu positiver Feldlinienverschönerung im  $q$ -Plateau auf.

---

<sup>1</sup>Stromrichtung entgegen der Richtung der Neutralstrahlinjektion

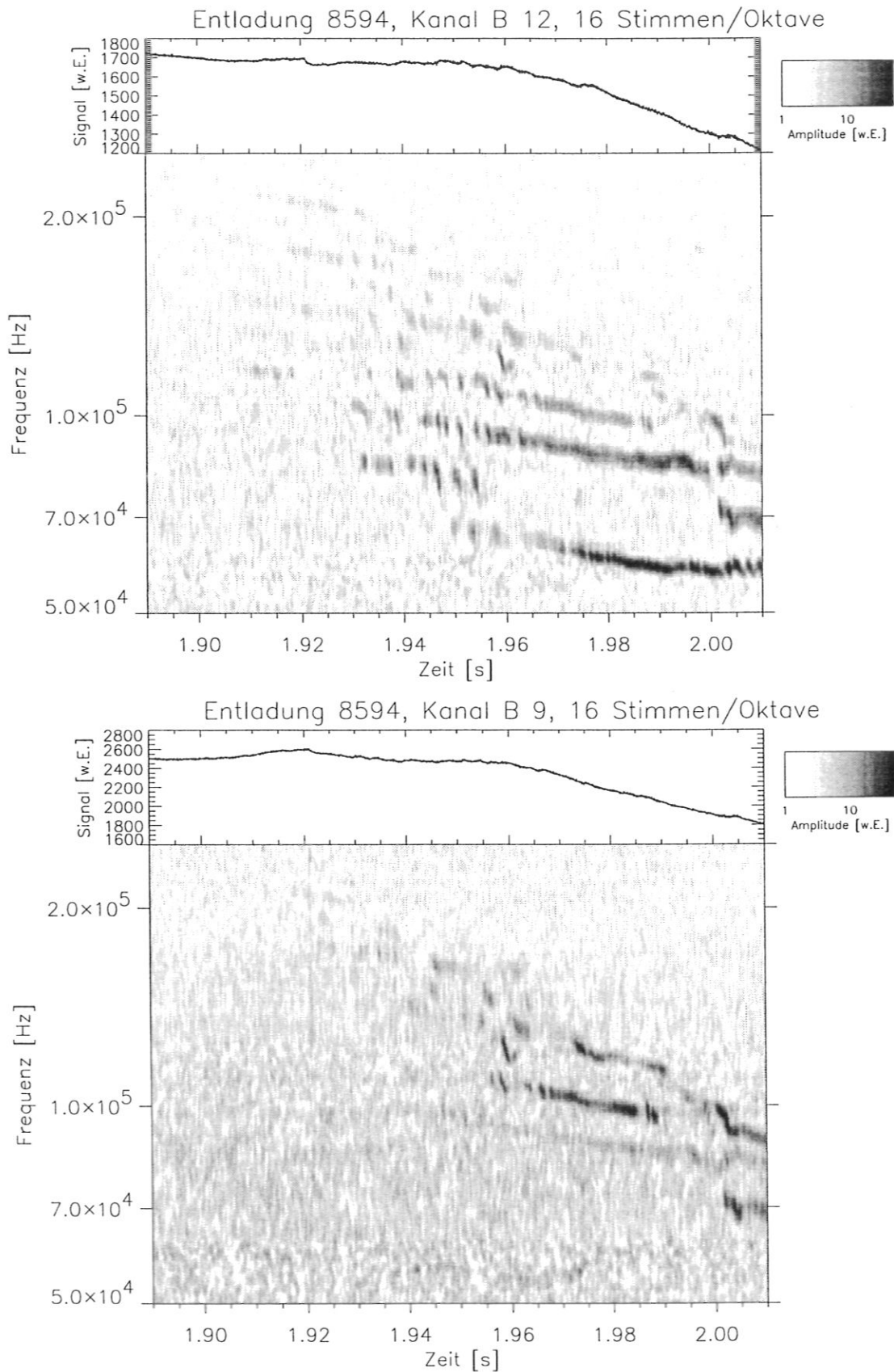


Abbildung 11.6: Rohdaten und Graustufenbild der Wavelettransformierten der SXR-Kanäle B 12 und B 9 bei Entladung 8594. Die niedrigeren Frequenzen der Kaskaden sind in diesem Fall nur im Kanal B 12 mit weiter innen liegender tangentialer Flußfläche sichtbar.

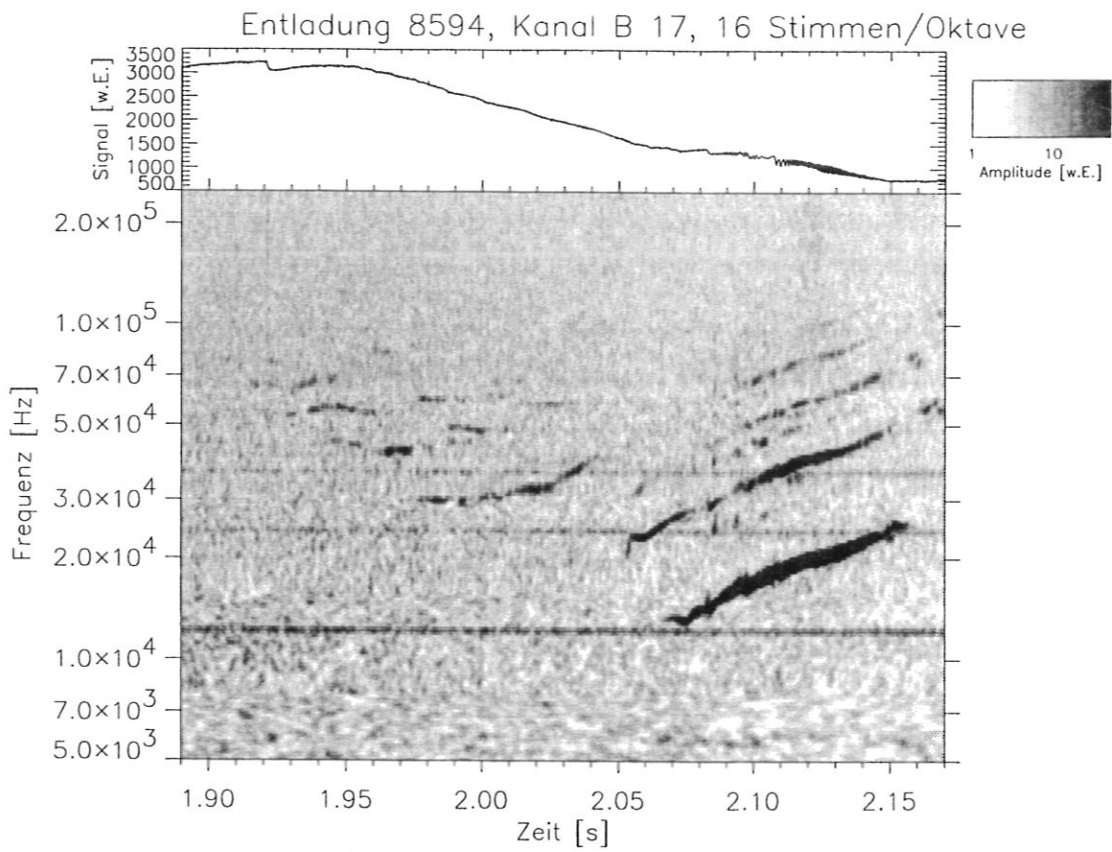


Abbildung 11.7: Rohdaten und Wavelettransformierten des Kanals B 17 von Entladung 8594. Es sind die außenliegenden Moden mit normaler radialer Anordnung sichtbar.





# Kapitel 12

## Zusammenfassung

Instabilitäten im Kräftegleichgewicht magnetisch eingeschlossener Plasmen resultieren in anwachsenden Störungen des Gleichgewichts, welche im Fall von Normalschwingungen der linearisierten Bewegungsgleichungen des Plasmas auch "Moden" genannt werden. Die Störungen führen in der Regel durch ihre Wirkungen auf z.B. Temperatur und Dichte zu Änderungen der Emissivitätsverteilung des Plasmas im weichen Röntgenbereich. Eine wichtige Methode, Instabilitäten zu untersuchen, besteht deshalb in der Messung der Röntgenemissivität.

Die Emissivität wird am Tokamak ASDEX-Upgrade mit Hilfe von Röntgenlochkameras entlang von insgesamt 124 Sichtlinien mit einer Rate von 500000 Meßwerten pro Sekunde gemessen. Die ungeheure Datenmenge, die dadurch bei jeder Entladung anfällt, läßt es wünschenswert erscheinen, interessante Ereignisse darin automatisch zu erkennen, um zum einen während einer Entladung eine günstige Auswahl der mit hoher Datenrate in der Datenerfassungseinrichtung aufzuzeichnenden Zeitabschnitte zu treffen und zum anderen, um in bereits archivierten Datenbeständen nach bestimmten Ereignissen zu suchen.

### 12.1 Teil I

Anhand typischer Signaturen in der Röntgendiagnostik wurde festgestellt, daß es für Zwecke der Ereigniserkennung sinnvoll ist, unter einem Ereignis in Zeit- und Frequenzraum lokalisierte über das Rauschen hinausgehende Signalamplituden zu verstehen.

Für die Erkennung von Ereignissen ist es notwendig, deren Signalamplituden in möglichst wenigen Koeffizienten zu konzentrieren, wobei Rauschen und Störungen in den Signalen nicht verstärkt werden dürfen. Anschließend kann durch Vergleich der Amplitude eines Koeffizienten mit dem Rauschniveau festgestellt werden, ob ein Ereignis vorliegt. Die Zeit-/Frequenztransformationen leisten den gewünschten Konzentrationsvorgang für jeweils einen Meßkanal, da sie die Signalamplituden quasi nach Zeit- und Frequenz sortieren. Bei der Suche nach bestimmten Ereignissen kann durch Bilden des Skalarprodukts der Datenvektoren mit Vektoren, die die Struktur des Ereignisses widerspiegeln, die Si-

gnalamplitude auch in wenigen Kanälen konzentriert werden. Dieses Verfahren ist aus Zeitgründen nicht für Echtzeitanwendungen geeignet.

Neben der Möglichkeit, die signifikanten Koeffizienten aus der Zeit-/Frequenztransformierten auszuschneiden und anschließend die Transformation umzukehren, kann ein Ereignis auch mittels eines digitalen Filters, der an den Frequenzverlauf des Ereignisses angepaßt ist, aus den Meßsignalen extrahiert werden, und dabei vom größten Teil des Rauschens und den anderen Ereignissen getrennt werden. Mit den selben Verfahren kann selbst bei Abtastraten unterhalb der doppelten Signalfrequenz, bei denen die Signale bei normaler Interpolation der Meßwerte durch "Aliasing" verfälscht werden, das Signal des Ereignisses aus den Meßwerten korrekt rekonstruiert werden.

Zur Implementierung eines Verfahrens zur automatischen Erkennung von Ereignissen wurden keine bilineare Verteilungen in der Zeit-/Frequenzebene, wie die Wigner-Ville-Verteilung [6], herangezogen, wegen des dafür erforderlichen Rechenaufwands proportional zum Quadrat der Zahl der Meßwerte. Von den linearen Verteilungen wurde den Wavelettransformierten der Vorzug vor den Fenster-Fouriertransformierten gegeben, da im ersten Fall die relative Frequenzauflösung unabhängig von der Frequenz ist, was physikalischen Signalen besser angepaßt ist. Als Wavelets wurden komplexe Gaborfunktionen benutzt, da sie gemäß der Heisenbergschen Unschärferelation das bestmögliche Produkt aus Zeit- und Frequenzauflösung bieten. Es wurden komplexe Wavelets gewählt, damit die Amplituden der Skalarprodukte der Wavelets mit dem reellen Meßsignal unabhängig von der Phase des Signals sind.

Zur Bestimmung des Signalhintergrunds wurde ein robuster Schätzer entwickelt, der aus einer Menge von Amplitudenwerten eine korrekte Schätzung ermittelt, auch wenn ein gewisser Anteil der Werte mit Amplituden eines Ereignisses belegt ist.

Ausgehend von einem Additionstheorem für Gaborfunktionen wurde ein schneller Algorithmus zur Ausführung einer mehrstimmigen Wavelettransformation mit Gaborwavelets entwickelt, welcher dem "algorithm à trous" [13] an Effizienz überlegen ist. Bei den Anwendungen auf die Röntgensignale war der Algorithmus um eine Größenordnung schneller.

Der Transformationsalgorithmus wurde auf einem PowerPC 601-Prozessor mit 80MHz Taktrate implementiert. Nach Laufzeitmessungen ist der Transformationsalgorithmus auf diesem Prozessor in der Lage, etwa eine Million Meßwerte pro Sekunde zu verarbeiten. Dies ist ausreichend für einen Kanal der Röntgendiagnostik mit 500kHz Datenrate.

Nach diesen Ergebnissen wurde das gesamte Verfahren zur Ereigniserkennung, mit dem Ziel, die Abtastrate der Röntgendiagnostik in Echtzeit an die auftretenden Ereignisse anzupassen, auf einem Transputersystem implementiert, das zur Ausführung der numerischen Berechnungen mit zwei PowerPC Prozessoren ausgestattet war.

Die beiden PowerPCs entscheiden blockweise anhand der Gesamtamplitude der Ereignisse in jeder Oktave zweier Kanäle der Röntgendiagnostik, mit welcher Abtastrate die Daten gespeichert werden sollen. Die Transputer nehmen die Daten von zwölf weiteren Kanälen zunächst mit der vollen Abtastrate von 500kHz auf und reduzieren deren Abtastrate in ihrem Speicher entsprechend der Entscheidung der beiden PowerPCs. Zu Vergleichszwecken wurden die zwei Referenzkanäle der PowerPCs sowie sechs weitere

Röntgenkanäle durchweg mit der vollen Abtastrate aufgenommen.

Zur Erprobung wurde das System parallel zur Datenerfassungsanlage der Röntgendiagnostik an insgesamt 20 Kanäle angeschlossen und damit Daten aufgenommen. Es stellte sich heraus, daß

- das Verfahren geeignet war, die Abtastrate an die jeweils höchste vorkommende Frequenz anzupassen,
- es die unvoreingenommene Wahl der Abtastrate *während* einer Entladung zur Entdeckung neuer physikalischer Phänomene geführt hat (siehe Teil II).

Es ist geplant, dieses Verfahren zukünftig für die gesamte Röntgendiagnostik einzusetzen.

Das obige Verfahren wurde auch für die Suche nach Moden in bereits aufgezeichneten Entladungen modifiziert. Das modifizierte Programm sucht nach zusammenhängenden Kurven in der Zeit-/Frequenzebene, die durch signifikant über das Hintergrundniveau hinausragende Koeffizienten verlaufen. Vor der Wavelettransformation werden die Meßkanäle auf für die verschiedenen Modenzahlen typische Vektorräume projiziert, was das Signalniveau im Verhältnis zum Hintergrund erhöht und eine Unterscheidung nach Modenzahlen ermöglicht.

## 12.2 Teil II

Durch Wavelettransformation des Zeitverlaufs der Röntgenemissivität entlang zentraler Sichtlinien der SXR-Diagnostik, deren Daten mit dem neuen Aufzeichnungssystem aufgenommen wurden, wurden in einigen Entladungen in ASDEX-Upgrade bisher nicht beobachtete Ereignisse mit bemerkenswerter Signatur gefunden: Es traten Moden auf, deren poloidale bzw. toroidale Modenzahlen  $m$  bzw.  $n$  (die Wellenzahlen bei einem Umlauf um den kleinen bzw. großen Torusumfang) der Relation  $m = n + 1$  folgen und die jeweils Moden mit um Eins erhöhter toroidaler und poloidaler Modenzahl anregen, bevor sie wieder erlöschen. In Form von Kettenreaktionen ("Kaskaden") entstehen durch diese Wechselwirkungen ungewöhnlich hochfrequente Moden. Es wurden Oszillationsfrequenzen bis zur Grenzfrequenz der SXR-Diagnostik von 250kHz beobachtet. Die höchsten bestimmten Modenzahlen waren  $(m, n) = (23, 22)$  bei einer Oszillationsfrequenz von 210kHz. Gleichzeitig mit der Existenz einer Mode wurde ähnlich wie bei einem Sägezahn ein radialer Transport von Röntgenemissivität beobachtet. Die Kaskaden können sich mehrfach wiederholen und auch zeitlich überlappen.

Während der Existenz einer Mode ändert diese ihre Frequenz um etwa 10%. Von Kaskade zu Kaskade ändern sich die Frequenzen ebenfalls. Von der ersten bis zur letzten Kaskade beträgt diese langsame Frequenzänderung insgesamt bis zu 70%. Die absoluten Frequenzen und die erwähnten Frequenzänderungen der Moden können in ihrer Größe durch diamagnetische Driteffekte und die toroidale Rotation der Ionen erklärt werden. Dabei spielen eine Rolle:

- die zeitliche Änderung der toroidalen Plasmarotationsfrequenz,

- die Änderung der toroidalen Modenrotationsfrequenz durch die Änderung der Modenradien,
- die Änderung der diamagnetischen Driftgeschwindigkeiten durch geänderte Druckgradienten.

In Abhängigkeit von der Neutralteilcheninjektionsrichtung ändert der Frequenzbeitrag der toroidalen Plasmarotation gegenüber dem der diamagnetischen Driftbewegung sein Vorzeichen, was sich ebenfalls in den Frequenzverläufen bemerkbar macht.

Unter der Annahme, daß die Helizität der Moden gleich der Helizität der Magnetfeldlinien an der Position ihres Auftretens ist, läßt sich aus dem Verhältnis ihrer poloidalen bzw. toroidalen Modenzahlen  $m$  bzw.  $n$  das Verhältnis der Zahl der toroidalen Umläufe zur Zahl der poloidalen Umläufe, die eine Feldlinie an der Position der Moden im Mittel ausführt, der sogenannte Sicherheitsfaktor  $q$ , gemäß  $q = m/n$  ermitteln. Die vielen Moden in den Kaskaden ermöglichten es, den Verlauf des Sicherheitsfaktors in Abhängigkeit vom Abstand zur magnetischen Achse zu rekonstruieren. Hierbei trat in allen Fällen ein Plateau mit geringer Feldlinienverscherung  $d \ln(q)/d \ln(r) = 0,004-0,14$  auf, welches mit einem Knick in den normalen  $q$ -Verlauf weiter weg von der magnetischen Achse übergang. In den Fällen, in denen gleichzeitig mit den kaskadierenden Moden eine  $(1,1)$ -Mode anwesend war, konnte auch die Position der  $q = 1$ -Fläche bestimmt werden. Dabei wurde immer auch ein Knick im  $q$ -Verlauf zur magnetischen Achse hin nachgewiesen.

Als näherungsweise Kriterium für die Instabilität hochfrequenter Tearing-Moden mit Modenzahlen  $(n+1, n)$  und einer resonanten Fläche im Abstand  $r_s$  von der magnetischen Achse wurde die Bedingung

$$\left. \frac{rd^2q/dr}{dq/dr} \right|_{r=r_s} > n \quad (12.1)$$

gefunden, wobei  $r$  den Abstand zur magnetischen Achse bezeichnet. Diese Abschätzung wie auch numerische Rechnungen in einem zylindrischen drucklosen Modell ergaben ausgehend von den gemessenen  $q$ -Profilen die Instabilität von Tearing-Moden mit den beobachteten Modenzahlen. Rechnungen mit Hilfe des Programms CASTOR [45] ergaben für realistische Druckprofile und ASDEX-Upgrade-Gleichgewichtskonfigurationen ebenfalls Instabilität für hohe Modenzahlen [40], jedoch für stark modifizierte Tearing-Moden. Diese theoretischen Ergebnisse waren unerwartet, da bisher in tokamakartigen Konfigurationen nur mit der Instabilität von Tearing-Moden bis zu poloidalen Modenzahlen von etwa  $m=4$  gerechnet wurde.

Direkte Wechselwirkungen zwischen den kaskadierenden Moden sind wegen der verschiedenen toroidalen Modenzahlen und der Axisymmetrie (Rotationssymmetrie um die große Torusachse) des Tokamaks nicht möglich. Zur Erklärung der Wechselwirkung zwischen den kaskadierenden Moden bleibt daher nur deren Rückwirkung auf die Gleichgewichtsprofile der Plasmamparameter. Mittels eines im Rahmen der Arbeit entwickelten quasilinearen Simulationsprogramms für ein zylindrisches druckloses Plasma, welches die indirekte Wechselwirkungen zwischen den Moden über Änderungen der Gleichgewichtsstromdichte berechnet, konnten die für das Kaskadieren notwendigen Triggerungseffekte

modelliert werden. Die Dauer der Auslösevorgänge wurde analytisch abgeschätzt, wobei sich die Kaskadierungszeit in der richtigen Größenordnung ergab.

Die zeitliche Abnahme der höchsten in den Kaskaden erreichten Modenzahlen läßt sich nach den in dieser Arbeit entwickelten Vorstellungen durch

- die Zunahme der minimalen Feldlinienverscherung im  $q$ -Plateau,
- die Zunahme des minimalen  $q$  im Plateau,
- die Verbreiterung des Knicks im  $q$ -Verlauf am Rand des Plateaus,

erklären, wobei die ersten beiden Prozesse durch die Verlagerung des Stroms durch den Resistivitätsgradienten im Plateaubereich und der letzte durch Stromdiffusion bedingt sind.

Vor dem Auftreten der Kaskaden wurde in jedem Fall die starke Anreicherung von Verunreinigungen wie Au, C, Ne, W oder Xe im Plasmazentrum festgestellt. Die Verunreinigungen erhöhen dort den elektrischen Widerstand nach Spitzer [64] (11.1) durch die Erhöhung der effektiven Ladungszahl und Absenkung der Temperatur als Folge der durch die Verunreinigungen verursachten Verluste durch Brems- und Linienstrahlung.

Zusätzlich wurde kurz vor dem Auftreten der Kaskaden eine starke (1,1)-Mode beobachtet, die sich wegen der Änderung des Stromprofils durch die erhöhte Resistivität im Plasmazentrum kontrahiert.

Unter der Annahme, daß die Aktivität der (1,1) ein  $q$ -Plateau bei  $q = 1$  erzeugt, wurde als Kriterium für das Auftreten der Kaskaden ein negativer Resistivitätsgradient an der  $q = 1$ -Fläche abgeleitet. Nur in diesem Fall driftet das Plateau zu höheren Werten von  $q$  und wird dadurch für Moden mit Helizität  $m/n > 1$  zugänglich. Normalerweise ist der Plasmawiderstand im Zentrum wegen der höheren Temperatur geringer als am Rand und selbst bei Verunreinigungsakkumulation wird normalerweise die Resistivität im Plasmazentrum zwar erhöht, bleibt aber konvex. Nur bei sehr starker Anreicherung von Verunreinigungen im Plasmazentrum kann ein invertiertes Resistivitätsprofil auftreten. In allen Entladungen mit Kaskaden, in denen das Resistivitätsprofil aus Messungen bestimmt werden konnte, fand tatsächlich etwa zum Einsatzzeitpunkt der Kaskaden der Übergang zu einem hohlen Resistivitätsprofil statt.

Umgekehrt kann aus den Beobachtungen auf eine sehr niedrige Feldlinienverscherung an der  $q = 1$ -Fläche geschlossen werden. Das hohle Resistivitätsprofil sorgt lediglich für eine Verschiebung der Struktur im  $q$ -Verlauf zu  $q$ -Werten welche eine mit der SXR-Diagnostik nachweisbare reichhaltige Modenaktivität zulassen. Damit wurde mit einer anderen Methode als durch Beobachtung von Pelletablation [32] oder einer "Snake" [33, 32] sehr niedrige Feldlinienverscherung bei  $q = 1$  gefunden. Erstmals konnte der Knick am Rand des Plateaus direkt nachgewiesen werden.



# Literaturverzeichnis

- [1] M. J. Bastiaans, *Gabor's Expansion and the Zak Transform for Continuous-time and Discrete-time Signals: Critical Sampling and Rational Oversampling*, EUT Report 95-E-295, Dec. 1995
- [2] C. K. Chui, *Wavelet analysis and its applications I: An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York (1992)
- [3] C. K. Chui (Ed.), *Wavelet analysis and its applications II: Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, New York (1992)
- [4] A. Cohen, *Biorthogonal Wavelets*, S. 123
- [5] J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Thamitchian (1989), Ed., *Wavelets-Time-Frequency Methods and Phase Space*, Proc. of the Int. Conf., Marseille, Dec. 1987, Springer-Verlag, Berlin.
- [6] C. Dorize, K. Gram-Hansen, *Related positive time-frequency energy distributions*, in [17], S. 77
- [7] D. Gabor, *Theory of communication*, J. Inst. Electr. Engrg., London, **93** (III), S. 429
- [8] J. J. Benedetto, *Irregular Sampling and Frames*, in [3], S. 445
- [9] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., IEEE **41**, S. 909
- [10] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Capital City Press, Montpelier, Vermont (1992)
- [11] K. Hallatschek, *Schnelle Fouriertransformation mit Hierarchischen Basen auf dünnen Gittern*, Numerische Mathematik **63** (1992), S. 83
- [12] Peter W. Hawkes, ed., *Advances in imaging and electron physics*, Academic Press Inc. Orlando, Florida
- [13] M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and Ph. Tchamitchian (1989), *A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform*, in [5], S. 286

- [14] A. J. Jerri, *The Shannon sampling theorem — its various extension and applications: a tutorial review*, Proc. IEEE, vol. 65, S. 1565 (1977)
- [15] W. H. Press, et al., *Numerical Recipes in FORTRAN*, Cambridge University Press (1992)
- [16] S. G. Mallat, *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation*, IEEE Trans. PAMI, 11, S. 674
- [17] Y. Meyer, ed., *Wavelets and Applications*, Proc. of the Int. Conf., Marseille, May 1989, Springer-Verlag, Berlin
- [18] R. Navarro, A. Taberero, G. Christóbal, *Image Representation with Gabor Wavelets and its Applications*, Jul. 12 1995, To be published in [12]
- [19] M. Zilker, persönliche Mitteilung
- [20] K. Asmussen, R. Neu et al., *Investigations of tungsten in the central plasma of ASDEX Upgrade*, Proceedings of the 24th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Berchtesgaden (1997) to be published
- [21] G. Bateman, D. B. Nelson, *Resistive-ballooning-mode equation*, Physical Review Letters **41**, S. 1804 (1978)
- [22] M. Bessenrodt-Weberpals, J.C. Fuchs, M. Sokoll, et. al, *Soft X-Ray Diagnostics for ASDEX Upgrade*, IPP Report 1/290, IPP, Garching
- [23] D. Biskamp, *Nonlinear Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1993)
- [24] D. Biskamp, *Nonlinear Behavior of Tearing Modes*, IPP Report 6/192, IPP-Garching (1980)
- [25] Z. Chang et al., *Observation of Nonlinear Neoclassical Pressure-Gradient-Driven Tearing Modes in TFTR*, Physical Review Letters **74**, S. 4663, 1995
- [26] B. P. Cluggish, C. F. Driscoll, *Transport and Damping from Rotational Pumping in Magnetized Electron Plasmas*, Physical Review Letters **74**, S. 4213 (1995)
- [27] B. Coppi, *Physics of Fluids* **7**, 1501 (1964)
- [28] J. F. Drake, T. M. Antonsen, Jr., *Physics of Fluids* **28** (1985), S. 544
- [29] R. Fitzpatrick, *Stability of Coupled Tearing and Twisting Modes in Tokamaks*, IFS Report #649, Institute for Fusion Studies, Austin (1994)
- [30] R. Fitzpatrick, *Helical Temperature Perturbations Associated with Tearing Modes in Inhomogeneous Plasmas*, *Physics of Plasmas* **2**, S. 825, 1995



- [31] H. P. Furth, J. Killeen, M. N. Rosenbluth, *Finite-Resistivity Instabilities of a Sheet Pinch*, Physics of Fluids **6** (1963), S. 459
- [32] R. D. Gill et al., *Determination of the shear on the  $q = 1$  surface of the JET tokamak* Nuclear Fusion **29** (1989), S. 821
- [33] R. D. Gill et al. *Snake-like density perturbations in JET*, Nucl. Fus. **32**, S.723 (1992)
- [34] A. H. Glasser, J. M. Greene, J. L. Johnson, *Resistive instabilities in general toroidal plasma configurations*, Physics of Fluids **18** (1975), S. 875
- [35] A. H. Glasser, J. M. Greene, J. L. Johnson, *Resistive instabilities in a tokamak*, Physics of Fluids **19** (1976), S. 567
- [36] S. von Goeler, W. Stodiek, N. Sauthoff, *Studies of Internal Disruptions and  $m = 1$  Oscillations in Tokamak Discharges with Soft X-ray Techniques*, Physical Review Letters **33**, S. 1201 (1974)
- [37] H. R. Griem, *Plasma Spectroscopy*, McGraw Hill, New York, 1964
- [38] O. Gruber, A. Kallenbach, M. Kaufmann, K. Lackner, V. Mertens, J. Neuhauser, F. Ryter, H. Zohm et al., *Observation of Continuous Divertor Detachment in H-Mode Discharges in ASDEX Upgrade*, Physical Review Letters **74**, S. 4217 (1995)
- [39] K. Hallatschek, A. Gude, et al. *High Frequency Mode Cascades in the ASDEX Upgrade Tokamak*, Physical Review Letters **80**, S. 293 (1998)
- [40] S. Günter, Proceedings of the 24th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Berchtesgaden (1997) to be published
- [41] S. Günter, Persönliche Mitteilung
- [42] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, Berlin, New York (1983)
- [43] B. B. Kadomtsev, *Disruptive Instability in Tokamaks*, Soviet Journal of Plasma Physics **1**, S.389 (1975)
- [44] J. Karlsson, I. Pázsit et al., *Spectral and Correlation Analysis of Soft X-ray Signals from the JET Tokamak*, JET-P(96)03, Jet Joint Undertaking, Culham (1996)
- [45] W. Kerner, S. Poedts et al., Proceedings of the 18th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Berlin (1991), IV, S. 89
- [46] O. Klüber, H. Zohm, H. Bruhns, J. Gernhardt, A. Kallenbach, H. P. Zehrfeld, *MHD Mode Structure and Propagation in the ASDEX Tokamak*, Nuclear Fusion **31**, S. 907 (1991)

- [47] F. M. Levinton et al., *Magnetic Field Pitch-Angle Measurements in the PBX-M Tokamak Using the Motional Stark Effect*, Physical Review Letters **63**, S. 2060 (1989)
- [48] J. Manickam, N. Pomphrey, A. M. M. Todd, *Ideal MHD stability properties of pressure driven modes in low shear tokamaks*, Nuclear Fusion **27** (1987), S. 1461
- [49] P. J. McCarthy, W. Schneider et al., *MHD Equilibrium Identification on ASDEX Upgrade*,
- [50] S. de Peña-Hempel, *Untersuchungen zum Transport leichter Verunreinigungen an ASDEX Upgrade*, Dissertation, Technische Universität München (1997)
- [51] H. Meister, *Untersuchungen zu Plasmarotationen und Impulstransport in ASDEX-Upgrade*, Diplomarbeit, Universität Augsburg (1997)
- [52] J.-M. Noterdaeme et al., *First results of ion cyclotron heating on ASDEX Upgrade*, in M. Porkolab, J. Hosea (Ed.), *Radiofrequency in Plasmas*, Bd. 1, S.12, New York, (1993) AIP.
- [53] J.-M. Noterdaeme et al., *The ASDEX Upgrade ICRH experiment*, in C. Gormezano, P. U. Lamalle, R. R. Weynants (Ed.), *Europhysics Conference Abstracts (Proc. Europhys. Topical Conference on Radiofrequency Heating and Current Drive of Fusion Devices)*, Bd. 16E, S. 61, Brüssel (1992) EPS.
- [54] J.-M. Noterdaeme et al., *Combination of fundamental and second harmonic minority ion cyclotron resonance heating on ASDEX Upgrade*, in J. A.+Costa Gabral, M. E. Manso, F. M. Serra, F. C. Schüller (Ed.), *Europhysics Conference Abstracts (Proc. of the 20th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Lisbon, 1993)*, Bd. 17C, Teil III, S. 945, Genf, (1993) EPS
- [55] J.-M. Noterdaeme, F. Wesner et al., *The ASDEX Upgrade ICRH antenna*, Fusion Eng. Des., **24**, S.65 (1994)
- [56] *Europhysics Conference Abstracts (Proc. of the 23rd EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Kiev, 1996)*, Genf, (1996)
- [57] J. Rapp et al., *Characteristics of the Impurities Mo and W in Discharges with Neon Edge Radiation Cooling in Textor-94*, in [56], Bd. 20C, Teil II, S. 819, Genf, (1996)
- [58] J. O'Rourke, *The change in the safety factor profile at a sawtooth collapse*, Plasma Physics and Controlled Fusion, **33**, S. 289 (1991)
- [59] M. Schittenhelm, *Untersuchung von Tearing Moden in asymmetrisch elongierten Plasmen am Tokamakexperiment ASDEX Upgrade*, Dissertation, Technische Universität München (1995)

- [60] U. Schumacher, *Fusionsforschung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1993
- [61] V. D. Shafranov, E. I. Yurchenko, *Condition for flute instability of a toroidal-geometry plasma*, Sov. Phys.-JETP, **38**, S.283 (1974)
- [62] M. Sokoll, *MHD-Instabilitäten in magnetisch eingeschlossenen Plasmen und ihre tomographische Rekonstruktion im Röntgenlicht*, Dissertation, Technische Universität München, 1997
- [63] H. Soltwisch, W. Stodiek et al., *Current density profiles in the TEXTOR tokamak*, Proceedings of the 11th Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna), Vol. I, S.263 (1987)
- [64] L. Spitzer, *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience Publishers, New York, 1960
- [65] A. Stäbler, O. Vollmer et al., *Performance of the First ASDEX Upgrade Neutral Beam Injector* in K. Herschbach, W. Maurer, J. E. Vetter, Ed., *Proc. of the 18th Symposium on Fusion Technology, Karlsruhe, 1994*, North-Holland Publ., Amsterdam, Bd. 1, S. 593 (1995)
- [66] T. H. Stix, *Decay of poloidal rotation in a tokamak plasma*, Phys. Fluids **16**, S. 1260 (1973)
- [67] A. M. M. Todd et al. *Stability limitations on high-beta tokamaks*, Physical Review Letters **38**, S. 826 (1977)
- [68] A. Weller et al., *Persistent Density Perturbations at Rational-q Surfaces Following Pellet Injection in the Joint European Torus*, Physical Review Letters **39**, S. 2303 (1987)
- [69] J. A. Wesson et al., *Sawtooth Oscillations*, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1986*, Proc. 11th Int. Conf. Kyoto 1986, S. 3 (1986)
- [70] J. A. Wesson, *Tokamaks*, Oxford University Press, Oxford, 1987
- [71] E. Wigner, Phys. Rev. **40**, S. 749 (1979)
- [72] M. F. Zabiego et al., *Threshold Condition for Nonlinear Tearing Modes in Tokamaks*, Report UW-CPTC 96-2, University of Wisconsin, 1996
- [73] H. P. Zehrfeld, Persönliche Mitteilung
- [74] H. Zohm et al.,  $\beta$ -Limiting Phenomena in ASDEX Upgrade, in [56]



# Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. F. Wagner für die akademische Betreuung trotz seiner Krankheit.

Besonders herzlich möchte ich Herrn Dr. R. Wolf dafür danken, daß er mich während des physikalischen Teils der Arbeit in vorbildlicher Weise betreut hat und mir wenn nötig mit Rat und Unterstützung zur Seite stand.

Herrn Prof. Dr. F. Hertweck danke ich für die Vergabe der Arbeit und die Möglichkeit, diese Arbeit in seinem Bereich anzufertigen, für seinen beständigen intensiven Einsatz, mir eine gute Arbeitsumgebung zu schaffen und die Voraussetzungen zur Ausführung dieser Arbeit bereitzustellen, für zahlreiche hilfreiche und motivierende Diskussionen.

Frau apl. Prof. Dr. M. Bessenrodt-Weberpals danke ich für die Themenstellung, das kontinuierliche Interesse am Fortschreiten der Arbeit und die Genehmigung, trotz ihrer Bedenken zwanzig Kanäle der SXR-Diagnostik für die Zwecke dieser Arbeit anzapfen zu dürfen.

Herrn Prof. Dr. C. Zenger möchte ich für viele wertvolle Diskussionen zu den numerischen Aspekten der Arbeit danken, sowie für die Möglichkeit die Rechner an seinem Lehrstuhl nutzen zu dürfen.

Herrn Dr. D. Biskamp danke ich für seine Bereitschaft, mir in umfangreichen Diskussionen über die Natur der Kaskaden sein großes plasmaphysikalisches Wissen zur Verfügung zu stellen.

Bei Frau Dr. A. Gude und Herrn Dr. S. Sesnic möchte ich mich für die intensive Zusammenarbeit und die Unterstützung bei der Bestimmung der  $q$ -Profile bedanken.

Ebenfalls danken möchte ich Herrn M. Zilker, der das Testdatenaufnahmegerät "Multitop-MX" entworfen und gebaut hat.

Ferner möchte ich mich bei den Herren Dr. A. Bergmann, C. Fuchs, Dr. M. Sokoll und Dr. R. Wolf für die kritische Durchsicht des Manuskripts bedanken.

Bei den Mitarbeitern der ASDEX-Upgrade-Datenverarbeitungsgruppe, besonders bei den Herren H. Blank und R. Merkel, sowie bei Herrn J. Maier bedanke ich mich für die Unterstützung bei der Datenerfassung und der Datenarchivierung.

Der gesamten Informatikgruppe danke ich für die freundliche Aufnahme und die vielen Kuchen.