

**Investigation of the  
Dynamics of Runaway Electrons  
in the Magnetic Field  
of a Tokamak**

B. Kurzan

IPP 1/287

Juni 1995



**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**

**85748 GARCHING BEI MÜNCHEN**



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK  
GARCHING BEI MÜNCHEN

Abstract

Investigation of the  
Dynamics of Runaway Electrons  
in the Magnetic Field  
of a Tokamak

B. Kurzan

IPP 1/287

Juni 1995

The runaway electrons, which are captured in a ripple resonance, form a monoenergetic electron beam with an energy spread of  $\Delta E/E < 10^{-2}$ . These extremely monoenergetic runaways fulfill the conditions necessary for a free-electron maser. The maser radiation of the runaways, which lies in the microwave region, is clearly detected on ASDEX Upgrade.

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*



I	Einleitung	1
II	Kernfusion	2
II.1	<b>Abstract</b>	2
II.1.1	Supraenergische Elektronen	3
II.1.1.1	The dynamics of runaway electrons in tokamaks are investigated theoretically by taking into account the acceleration in the toroidal electric field, the collisions with the plasma particles, the deceleration due to synchrotron radiation and the resonance of their gyromotion with the ripple of the toroidal magnetic field. With this ripple resonance mechanism the momentum parallel to the magnetic field is converted into momentum of the gyromotion. As a consequence the synchrotron radiation losses are increased and can balance the energy gain in the electric field such, that the energy of the runaways stays constant. So the maximum energy, which is finally reached is much lower, than the maximum possible energy of about 65 MeV, which is obtained if they move on a circle centered around the torus axis.	4
II.1.1.2	Resonanz der Gyrationbewegung der Runawayelektronen mit dem Ripple des Magnetfeldes	6
II.1.1.3	Experimentell wird die Energieblockierung durch Messung des Bremsstrahlungsspektrums von Runaways, die zu Runawayenergien von 10 - 15 MeV, abhängig von den Plasma Parametern, in Übereinstimmung mit dem beschriebenen Ripple Resonanz Mechanismus, abgeleitet.	7
II.1.2	Resonanz der Gyrationbewegung der Runawayelektronen mit dem Ripple des Magnetfeldes	8
II.1.2.1	Experimentelle Ableitung der Energieblockierung durch Messung des Bremsstrahlungsspektrums von Runaways, die zu Runawayenergien von 10 - 15 MeV, abhängig von den Plasma Parametern, in Übereinstimmung mit dem beschriebenen Ripple Resonanz Mechanismus, abgeleitet.	8
II.1.2.2	Berücksichtigung des Ripplefeldes ohne Stöße	9
II.1.2.3	Die Runaway Elektronen, die in einer Ripple Resonanz gefangen werden, bilden einen monoenergetischen Elektronenstrahl mit einer Energiespanne von $\Delta E/E < 10^{-2}$ . Diese extremen monoenergetischen Runaways erfüllen die Bedingungen, die für einen freien Elektronenmaser notwendig sind. Die Maserstrahlung der Runaways, die im Mikrowellenbereich liegt, ist klar auf dem ASDEX Upgrade nachgewiesen.	10
II.1.2.4	Notwendige Feldstärke für das Überqueren einer Rippleresonanz	11
II.1.2.5	Diffusion des Gyrationimpulses in der Rippleresonanz im Plasma	14
II.1.2.6	Zufällige Phasen durch eng benachbarte Resonanzen?	15
II.1.2.6.1	Diffusion des Gyrationimpulses durch Stöße	19
II.1.2.6.2	Analytischer Diffusionskoeffizient für den Gyrationimpuls in der Rippleresonanz im Plasma	21
II.1.2.6.3	"Energieblockierung" von Runawayelektronen	22
II.1.3	Bewegung von Runawayelektronen unter Berücksichtigung von Stößen	23
II.1.3.1	Relativistische Fokker-Planck-Gleichung	24
II.1.3.1.1	"Energieblockierung" der Runawayelektronen durch Stöße mit den Plasmateilchen?	24
II.1.3.1.2	Bewegung der Runawayelektronen unter Berücksichtigung von Stößen und Rippleresonanz	25
II.1.3.2	Fokker-Planck-Gleichung mit Diffusion in den Rippleresonanzen	26
II.1.3.2.1	"Energieblockierung" der Runawayelektronen durch Rippleresonanz	28
II.1.3.2.2	Stationäre Verteilungsfunktion durch "Energieblockierung" in der Rippleresonanz	30
II.1.3.2.3	Idealisiertes Impulsverteilung der energieblockierten Runawayelektronen	31
II.1.3.3		32



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einleitung</b> . . . . .	1
I.1	Kernfusion . . . . .	2
I.2	Tokamaks . . . . .	2
I.3	Runawayelektronen . . . . .	3
I.4	Zielsetzung der Arbeit . . . . .	4
I.5	Gliederung der Arbeit . . . . .	6
<b>II</b>	<b>Theoretischer Teil</b> . . . . .	7
<b>II.1</b>	<b>Bewegung von Runawayelektronen in Tokamaks</b> . . . . .	8
II.1.1	Bewegung der Runawayelektronen auf Driftflächen im axialsymmetrischen Magnetfeld eines Tokamak . . . . .	8
II.1.1.1	Geschwindigkeit der Runawayelektronen im Plasma . . . . .	9
II.1.1.2	Beschleunigung der Runawayelektronen im Plasma . . . . .	10
II.1.1.3	Einschluß von Runawayelektronen . . . . .	11
II.1.2	Resonanz der Gyrationbewegung der Runawayelektronen mit dem Ripple des toroidalen Magnetfelds . . . . .	14
II.1.2.1	Rippelmagnetfeld auf den Driftflächen . . . . .	15
II.1.2.2	Bewegungsgleichung eines Runawayelektrons in ebener Geometrie unter Berücksichtigung des Ripplefelds ohne Stöße . . . . .	19
II.1.2.3	Qualitatives Bild der Energieblockierung durch Rippleresonanz . . . . .	21
II.1.2.4	Diskussion der Bewegung der Runawayelektronen in der Rippleresonanz . . . . .	22
II.1.2.4.1	Dynamik für mikroskopische Zeiten . . . . .	22
II.1.2.4.2	Dynamik für makroskopische Zeiten . . . . .	22
II.1.2.5	Notwendige Feldstärke für das Überqueren einer Rippleresonanz . . . . .	23
II.1.2.6	Diffusion des Gyrationimpulses in der Rippleresonanz im Plasma . . . . .	24
II.1.2.6.1	Zufällige Phasen durch eng benachbarte Resonanzen ? . . . . .	24
II.1.2.6.2	Diffusion des Gyrationimpulses durch Stöße . . . . .	25
II.1.2.6.3	Analytischer Diffusionskoeffizient für den Gyrationimpuls in der Rippleresonanz im Plasma . . . . .	26
II.1.3	“Energieblockierung” von Runawayelektronen . . . . .	28
II.1.3.1	Bewegung von Runawayelektronen unter Berücksichtigung von Stößen . . . . .	28
II.1.3.1.1	Relativistische Fokker-Planck-Gleichung . . . . .	28
II.1.3.1.2	“Energieblockierung” der Runawayelektronen durch Stöße mit den Plasmateilchen? . . . . .	30
II.1.3.2	Bewegung der Runawayelektronen unter Berücksichtigung von Stößen und Rippleresonanz . . . . .	31
II.1.3.2.1	Fokker-Planck-Gleichung mit Diffusion in den Rippleresonanzen . . . . .	32
II.1.3.2.2	“Energieblockierung” der Runawayelektronen durch Rippleresonanz . . . . .	32
II.1.3.2.3	Stationäre Verteilungsfunktion durch “Energieblockierung” in der Rippleresonanz . . . . .	33
II.1.3.3	Idealisierte Impulsverteilung der energieblockierten Runawayelektronen . . . . .	34



II.1.4	Simulationsverfahren der Dynamik der Runawayelektronen . . . . .	34
II.1.4.1	Monte-Carlo-Simulation der zeitabhängigen Fokker-Planck-Gleichung . . . . .	34
II.1.4.2	Simulation der Dynamik der Runawayelektronen in einer Tokamakentladung . . . . .	35
II.1.5	Zusammenfassung des theoretischen Teils . . . . .	35
<b>III</b>	<b>Experimenteller Teil . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>III.1</b>	<b>Relativistische Thomsonstreuung an Runawayelektronen und Bestimmung ihrer Dichte aus der Bremsstrahlung . . . . .</b>	<b>39</b>
III.1.1	Relativistische Thomsonstreuung . . . . .	39
III.1.2	Bestimmung der Dichte der Runawayelektronen aus der von ihnen emittierten Bremsstrahlung . . . . .	41
<b>III.2</b>	<b>Bremsstrahlungsspektren der Runawayelektronen in ASDEX . . . . .</b>	<b>43</b>
III.2.1	Aufnahme der Spektren . . . . .	43
III.2.2	Charakteristische Form und typisches Zeitverhalten der Bremsstrahlungsspektren . . . . .	44
III.2.3	Bestimmung der Energieverteilung der Runawayelektronen aus den Bremsstrahlungsspektren . . . . .	45
III.2.4	Erklärung der beobachteten Energie . . . . .	46
<b>III.3</b>	<b>Runawayelektronen im Tokamak- ein free-electron-maser . . . . .</b>	<b>48</b>
III.3.1	Phänomenologie . . . . .	48
III.3.2	Prinzip des free-electron-masers . . . . .	49
III.3.3	Dynamik des free-electron-masers . . . . .	50
III.3.3.1	Grundgleichungen . . . . .	51
III.3.3.2	Kohärenzbedingung im Vakuum . . . . .	52
III.3.3.3	Vereinfachung der Grundgleichungen . . . . .	53
III.3.3.3.1	Zeitliche Änderung der Phase . . . . .	53
III.3.3.3.2	Zeitliche Änderung der Elektronenenergie . . . . .	54
III.3.3.3.3	Zeitliche Änderung der Amplitude der elektromagnetischen Welle . . . . .	54
III.3.3.4	FEM-Gleichungen mit normierten Variablen und Raumladungseffekten . . . . .	55
III.3.3.5	Berechnung des Gewinns . . . . .	56
III.3.4	FEM im Tokamak . . . . .	58
III.3.4.1	Kohärenzbedingung im Plasma . . . . .	58
III.3.4.2	Strahlführung im Plasmatorus und im FEM . . . . .	60
III.3.4.3	Linienbreite der Maserstrahlung . . . . .	60
III.3.5	Abschätzung der Dichte der Runawayelektronen aus der Maserschwelle . . . . .	60
III.3.6	Anwendung der entwickelten Modellvorstellungen auf Plasmaentladungen von ASDEX Upgrade . . . . .	61
III.3.6.1	Bestimmung der Endenergie der Runawayelektronen . . . . .	61
III.3.6.2	Ermittlung der Resonanzstellen . . . . .	64
III.3.6.3	Auftreten des FEM-Effekts . . . . .	66
III.3.6.4	Ermittlung der Emissionsfrequenz des FEM aus der Energie der Runawayelektronen und den Resonanzstellen . . . . .	68
III.3.6.5	Zusammenstellung der berechneten und gemessenen Maserfrequenzen verschiedener Entladungen . . . . .	69
III.3.6.6	Abschätzung der Dichte der Runawayelektronen aus dem Gewinn des FEM . . . . .	69



<b>IV</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	71
<b>Anhang A</b>	<b>Numerische Lösung der zeitunabhängigen relativistischen Fokker-Planck-Gleichung</b>	73
A.1	Lösungsgebiet und Randbedingungen	73
A.1.1	Randbedingung bei $q_a$	73
A.1.2	Randbedingung bei $q_e$	73
A.1.3	Randbedingung bei $\mu = 1$	74
A.1.4	Randbedingung bei $\mu_{\text{grenz}}(q)$	74
A.2	Gitterpunkte	74
A.3	Annäherung der Differentialquotienten durch endliche Differenzen	75
A.4	Lösung der Differentialgleichung	76
<b>Anhang B</b>	<b>Numerische Lösung der zeitunabhängigen relativistischen Fokker-Planck-Gleichung mit Rippleresonanz</b>	77
B.1	Randbedingung bei $\mu = 1$	77
B.2	Randbedingung bei $\mu = \mu_{\text{Rand}}(q)$	77
B.3	Randbedingung bei $q = q_a$	78
B.4	Randbedingung bei $q = q_{\text{res}}$	78
B.5	Randbedingung bei $q = q_{\text{sch}}$	78
B.6	Numerische Berechnung der Verteilungsfunktion	78
<b>Anhang C</b>	<b>Abschätzung der Dichte der Runawayelektronen aus dem Gleichstromsignal der 50 <math>\mu\text{m}</math> Aluminiumfilter Kanäle</b>	79
<b>Anhang D</b>	<b>Ausschluß anderer Mechanismen zur Erklärung der beobachteten fluktuierenden Emission</b>	81
<b>Anhang E</b>	<b>Emission von höheren Harmonischen im helikalen Undulator</b>	83
<b>Anhang F</b>	<b>Brechungsindex eines kalten Plasmas</b>	85
	<b>Verwendete Literatur</b>	86
	<b>Danksagung</b>	89







## I.1 Kernfusion

Die Menschheit und die Tierwelt beziehen ihre Lebensenergie von den Pflanzen, die diese ihrerseits aus dem Licht der Sonne beziehen. Die von der Sonne abgestrahlte Energie wird bei der in ihrem Inneren stattfindenden Verschmelzung von Wasserstoff zu Helium frei. Aufgrund der in der Reaktionskette beteiligten schwachen Wechselwirkung ist die hierbei ablaufende Kernreaktion sehr langsam, und die große abgestrahlte Energiemenge ist nur durch die hohe Zahl der Teilchen, aus der die Sonne besteht, möglich. Die technische Nutzung dieser in der Natur stattfindenden Kernfusion als Energiequelle erfolgt indirekt über die fossilen Brennstoffe, sowie im kleinen Maßstab durch Wind- und Wasserkraft, sowie durch Photovoltaik und Absorbertechnik. Für die technische Nutzung der Kernfusion im großen Maßstab wird auf der Erde die kontrollierte Verschmelzung von Deuterium und Tritium zu Helium favorisiert. Diese Reaktion besitzt wegen des Fehlens der schwachen Wechselwirkung im Reaktionsmechanismus eine hohe Reaktionsrate. Es kann damit im Gegensatz zur Sonne schon in einem kleinen Volumen genügend viel Energie freigesetzt werden. Wenn die Energieverluste des Brennstoffgemisches durch die freigesetzte Fusionsenergie kompensiert werden, ist ein "Brennen" bei konstanter Temperatur möglich. Dazu muß das Produkt aus Teilchendichte und Energieeinschlußzeit, die das Verhältnis zwischen der thermischen Energie des Brennstoffgemischs und dessen Verlustleistung ist, einen Grenzwert überschreiten. Dieser ist bei einer Temperatur des Gemisches von etwa  $25 \text{ keV}^1$  minimal, da dann die Deuterium- und Tritiumkerne mit genügend großer Häufigkeit die Coulombbarriere durchtunneln können und damit in den Bereich der anziehenden Kernkräfte gelangen. Bei diesen Temperaturen befindet sich das Brennstoffgemisch im Plasmazustand.

## I.2 Tokamaks

In der Sonne werden die Teilchen durch die Gravitation zusammengehalten. Die Stärke dieser Wechselwirkung ist jedoch für die angestrebten kleinen Reaktionsvolumina auf der Erde für den Einschluß nicht ausreichend. Das am weitesten fortgeschrittene Konzept des Einschlusses eines Fusionsplasmas ist der magnetische Einschluß. Der Plasmateilchen erfolgt hierbei durch helikale Magnetfelder, die zu einem Torus geschlossen sind. Die Plasmateilchen sind durch Lorentzkräfte in ihrer Bewegung senkrecht zu den Magnetfeldlinien stark eingeschränkt und können sich deshalb nur noch in Richtung des Magnetfelds frei bewegen. Der Einschluß der Teilchen in der Richtung parallel zu den Magnetfeldlinien wird durch die in sich geschlossenen Magnetfeldlinien in einem Torus möglich. Die Helizität der Magnetfeldlinien ist nötig, um die Trägheitskräfte der Plasmateilchen, die bei ihrer toroidalen Bewegung entstehen, zu bilanzieren. Dieser Magnetfeldkäfig ergibt sich durch Überlagerung eines rein toroidalen Feldes, von den toroidal verteilten Hauptfeldspulen erzeugt wird, und eines poloidalen Feldes, das in einem Tokamak (russisches Kunstwort mit der Bedeutung "toroidale Kammer mit Magnetfeld") von einem im Plasma fließenden Strom erzeugt wird. Der Strom im Plasmatorus, der die Sekundärspule eines Transformators darstellt, wird durch ein im Plasma induziertes elektrisches Feld getrieben und heizt dabei das Plasma wegen dessen elektrischen Widerstands über Joulesche Wärme auf (Bild I.2.1). Für das Gleichgewicht des Plasmas ist zusätzlich ein vertikales Magnetfeld notwendig.

An den weltgrößten Tokamaks JET und TFTR wurden schon Fusionsleistungen bis zu 10 MW (TFTR) erreicht, wenn auch bisher nur für kurze Zeiten ( $\leq 0,5 \text{ s}$ ).

Verunreinigungen des Wasserstoffplasmas durch erodiertes Wandmaterial erschweren das Erreichen des Zündkriteriums durch erhöhte Strahlungsverluste des Plasmas und Verdünnung des Brennstoffgemischs. Es wird deshalb am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching die Kontrolle des Verunreinigungszuflusses durch das axialsymmetrische Divortorexperiment ASDEX Upgrade untersucht. Hierbei

<sup>1</sup> In der Plasmaphysik werden Temperaturen  $T$  in Energieeinheiten  $E = k T$  ( $k$  : Boltzmannkonstante) angegeben:  
 $1 \text{ eV} \equiv 11604 \text{ K}$



wird durch die Umlenkung (Divertierung) der äußeren Plasmaschicht der Wandkontakt des Plasmas auf Orte reduziert, die weit vom Plasma entfernt sind. Die dort freigesetzten Verunreinigungen können dann mit guter Effizienz abgepumpt werden, bevor sie in das Hauptplasma gelangen. Für den international geplanten International Thermonuclear Experimental Reactor ITER werden als Hauptprobleme die Kontrolle der Verunreinigungen und die sogenannten Runawayelektronen angesehen, die wegen ihrer möglichen hohen Energie und Anzahl ein großes Gefährdungspotential für den Reaktor darstellen.

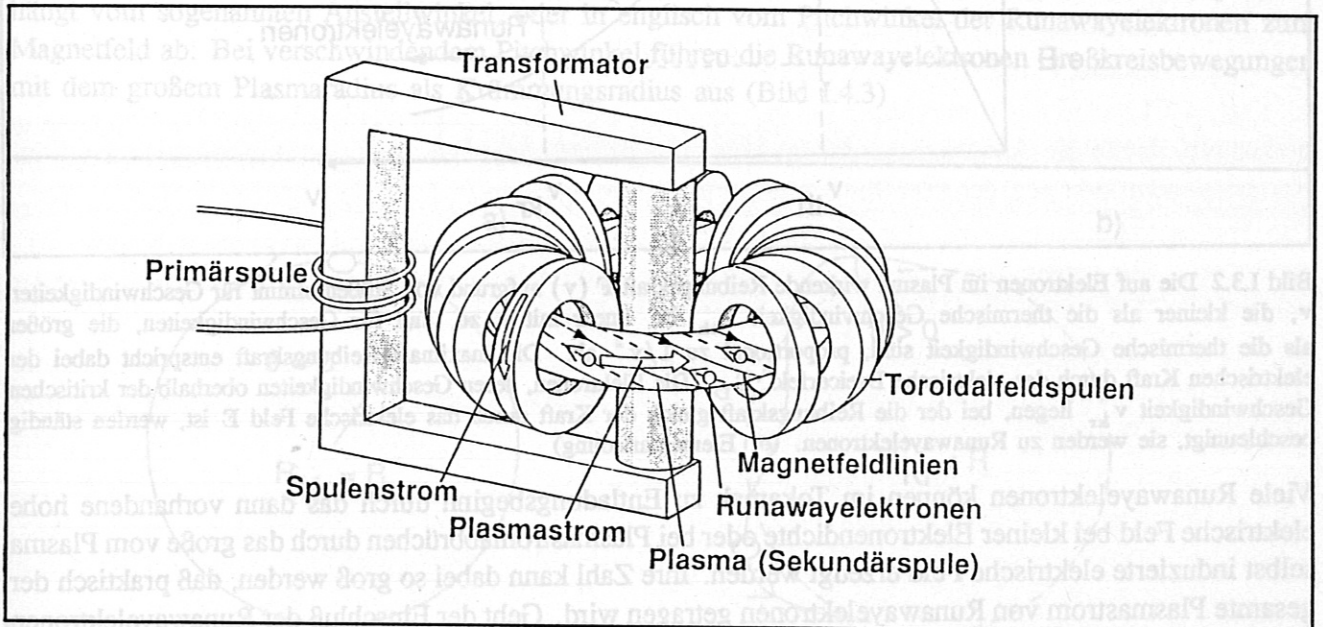


Bild I.2.1 Bei einem Tokamak wird im Plasmatorus, der die Sekundärspule eines Transformators ist, ein Plasmastrom induktiv getrieben. Das vom Plasmastrom erzeugte poloidale Magnetfeld ergibt zusammen mit dem toroidalen Magnetfeld der Hauptfeldspulen verschraubte Magnetfeldlinien, die die Plasmateilchen einschließen. Das für das Gleichgewicht des Plasmas notwendige vertikale Magnetfeld ist hier nicht gezeigt. Die im Tokamak erzeugten hochenergetischen Elektronen, die Runawayelektronen, bewegen sich entgegen der Richtung des Plasmastroms und folgen näherungsweise den helikalen Feldlinien.

### I.3 Runawayelektronen

Die auf Elektronen im Plasma wirkende Reibungskraft aufgrund von Stößen nimmt für Geschwindigkeiten der Elektronen  $v$ , die kleiner als die thermische Geschwindigkeit  $v_{th}$  ist, linear mit  $v$  zu, und für  $v > v_{th}$  proportional zu  $1/v^2$  ab. Es existiert deshalb eine maximale Reibungskraft bei  $v_{th}$ , die einer elektrischen Kraft mit der Dreierfeldstärke  $E_D$  entspricht [Dre1], [Dre2]. Für elektrische Feldstärken  $E > E_D$  können die Elektronen durch Stöße nicht abgebremst werden, sondern sie werden ständig beschleunigt und entfernen sich von der thermischen Verteilung, sie werden zu Runawayelektronen. Aber auch für elektrische Felder  $E < E_D$  werden alle Elektronen, deren Geschwindigkeiten bereits oberhalb einer kritischen Geschwindigkeit liegen, bei der die Reibungskraft gleich der elektrischen Kraft ist, ständig beschleunigt und werden zu Runawayelektronen (Bild I.3.2).

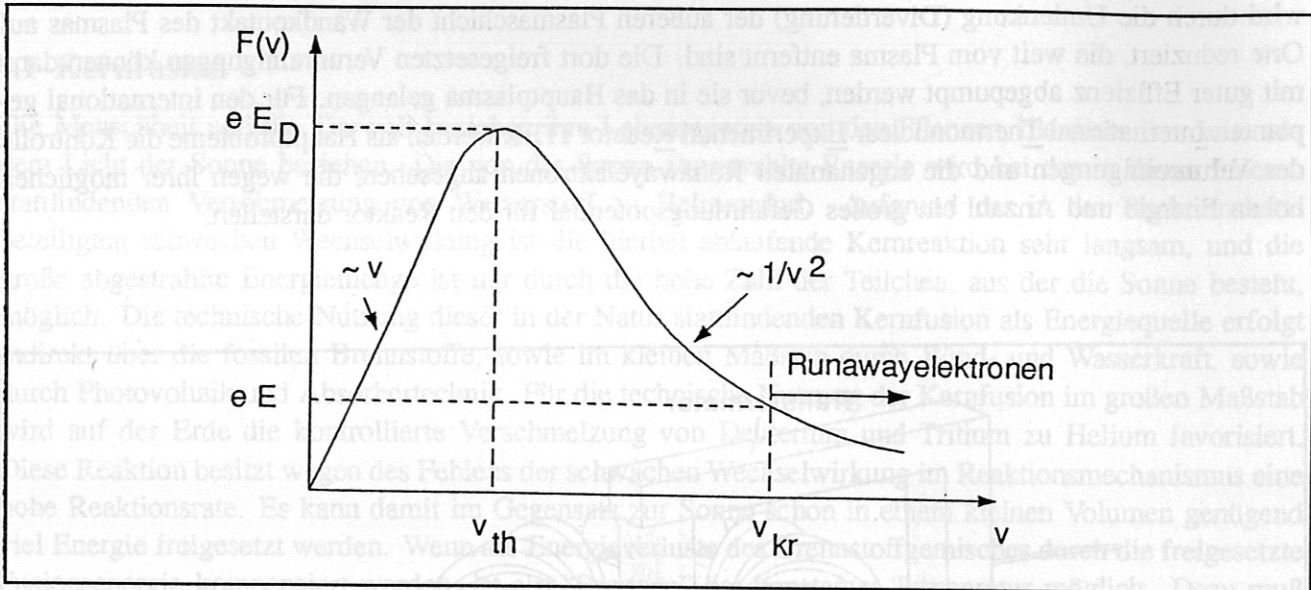


Bild I.3.2 Die auf Elektronen im Plasma wirkende Reibungskraft  $F(v)$  aufgrund von Stößen nimmt für Geschwindigkeiten  $v$ , die kleiner als die thermische Geschwindigkeit  $v_{th}$  ist, linear mit  $v$  zu, und für Geschwindigkeiten, die größer als die thermische Geschwindigkeit sind, proportional zu  $1/v^2$  ab. Die maximale Reibungskraft entspricht dabei der elektrischen Kraft durch das elektrische Dreierfeld,  $E_D$ . Die Elektronen, deren Geschwindigkeiten oberhalb der kritischen Geschwindigkeit  $v_{kr}$  liegen, bei der die Reibungskraft gleich der Kraft durch das elektrische Feld  $E$  ist, werden ständig beschleunigt, sie werden zu Runawayelektronen. ( $e$ : Elementarladung)

Viele Runawayelektronen können im Tokamak zu Entladungsbeginn durch das dann vorhandene hohe elektrische Feld bei kleiner Elektronendichte oder bei Plasmastromabbrüchen durch das große vom Plasma selbst induzierte elektrische Feld erzeugt werden. Ihre Zahl kann dabei so groß werden, daß praktisch der gesamte Plasmastrom von Runawayelektronen getragen wird. Geht der Einschluß der Runawayelektronen z. B. durch Plasmainstabilitäten oder durch eine Verringerung des Plasmastroms am Ende der Entladung verloren, so können sie das Vakuumgefäß, in dem sich das Plasma befindet, oder Einbauten beschädigen, oder sie gar zerstören [Jarv], [Wess], [TFR], [Joy]. Wird zu Beginn der Entladung nur eine geringe Zahl von Runawayelektronen erzeugt, die nur einen Bruchteil des Plasmastroms tragen und damit das von den thermischen Teilchen erzeugte poloidale Magnetfeld nur wenig stören, können die Runawayelektronen als Testteilchen zum Ausmessen der vom Plasma erzeugten Magnetfeldfluktuationen verwendet werden [KDWF]. Auf diese Anwendung der Runawayelektronen wird jedoch im weiteren Verlauf der Arbeit nicht eingegangen.

#### I.4 Zielsetzung der Arbeit

Es besteht eine große Unsicherheit darüber, welche maximalen Energien die Runawayelektronen in einer Tokamakentladung erreichen können. Für ITER werden für die Runawayelektronen, die bei Stromabbrüchen erzeugt werden, eine maximale Energie von 550 MeV und ein von ihnen getragener Strom von 1 MA erwartet. Aufgrund der von den Runawayelektronen mit diesen hohen Energien und Teilchenzahlen ausgehenden Gefahr für das Vakuumgefäß ist es fraglich, ob ITER überhaupt baulich so ausgelegt werden kann, daß die Beschädigungen an der Maschine durch die erzeugten Runawayelektronen tolerierbar bleiben. Die Abschätzungen über die maximalen Parameter der Runawayelektronenpopulation beruhen allerdings auf einem sehr geringen Kenntnisstand über die Dynamik der Runawayelektronen im Tokamak. Eine direkte Messung der Energie und Zahl der Runawayelektronen existiert bisher nicht.

Eine wichtige Aufgabe ist deshalb die Messung ihrer tatsächlichen Zahl und Energie in den schon existierenden Tokamaks. Die Runawayelektronen wurden bisher indirekt durch die von ihnen emittierte Bremsstrahlung [Ogu], [Jarv], [Joy], Synchrotronstrahlung [Fin], [Jas] und harte Bremsstrahlung bei Auftreffen auf die Wand [KDWF] untersucht.



Eine direkte Messung der Parameter der Runawayelektronen ist prinzipiell durch relativistische Thomsonstreuung möglich, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurde.

Es stellt sich des weiteren die Frage, ob die Gefährdung der Maschine durch Runawayelektronen erniedrigt werden kann, indem man durch geeignete Methoden die maximal erreichbare Energie und Zahl der Runawayelektronen begrenzt. Man ist deshalb auf der Suche nach Mechanismen, die dies bewirken:

Die maximal erreichbare Energie der Runawayelektronen ergibt sich aus der Bilanzierung des Energiegewinns im elektrischen Feld und dem Energieverlust durch Synchrotronstrahlung, die vom Krümmungsradius der Bahn der Runawayelektronen und deren Energie abhängt. Der Krümmungsradius hängt vom sogenannten Anstellwinkel, oder in englisch vom Pitchwinkel der Runawayelektronen zum Magnetfeld ab: Bei verschwindendem Pitchwinkel führen die Runawayelektronen Großkreisbewegungen mit dem großem Plasmaradius als Krümmungsradius aus (Bild I.4.3)

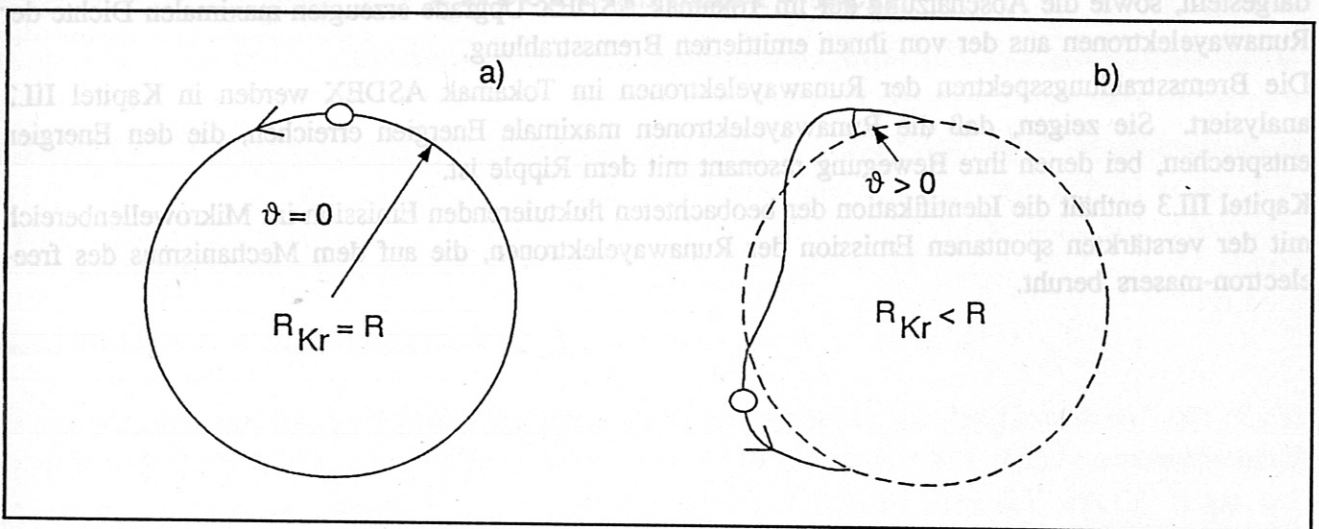


Bild I.4.3 Der Krümmungsradius  $R_{Kr}$  der Bahn der Runawayelektronen hängt vom sogenannten Pitchwinkel  $\vartheta$  der Runawayelektronen zum Magnetfeld ab: Ist  $\vartheta = 0$ , so führen die Runawayelektronen im Tokamak Großkreisbewegungen mit  $R_{Kr} = R$  mit  $R$  als großem Plasmaradius aus (a). Für Pitchwinkel  $\vartheta > 0$  führen die Runawayelektronen Schraubenbewegungen um das Magnetfeld durch (b), wodurch der mittlere Krümmungsradius der Bahn,  $R_{Kr}$  erniedrigt wird. Im Fall (a) ist die maximal erreichbare Energie der Runawayelektronen größer als im Fall (b).

Die hierbei für den Tokamak ASDEX Upgrade erreichbare maximale Energie ist dann 65 MeV. An den Tokamaks ASDEX und ASDEX Upgrade werden jedoch nur Energien von 10 – 20 MeV beobachtet. Eine Erniedrigung der maximal erreichbaren Energie ergibt sich durch höhere Synchrotronstrahlungsverluste, als sie bei der Großkreisbewegung auftreten. Die Bewegung entlang der helikalen Magnetfeldlinien erniedrigt die maximal erreichbare Energie der Runawayelektronen kaum. Die Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen führen zu einem endlich großen Pitchwinkel. Zu fragen ist deshalb, ob nicht Stöße allein über die Vergrößerung des Pitchwinkels die maximale Energie der Runawayelektronen erniedrigen (Bild I.4.3). Wie in dieser Arbeit gezeigt wird, sind die Stöße allerdings in der Erhöhung des Pitchwinkels nicht effektiv genug, um die Beschleunigung der Runawayelektronen durch das elektrische Feld aufgrund erhöhter Synchrotronstrahlungsverluste zu blockieren.

Ganz wesentlich für die Energieblockierung der Runawayelektronen - und das ist das Hauptergebnis der Arbeit - ist die Wechselwirkung der Runawayelektronen mit dem magnetischen "Ripple" des Tokamaks. Der "Ripple" ist eine Störung der Axialsymmetrie des Magnetfelds aufgrund der endlichen Anzahl der Hauptfeldspulen. Es wird gezeigt, daß durch die Resonanz der relativistischen Elektronen mit dem Ripple unter Berücksichtigung ihrer Synchrotronabstrahlung und der Stöße mit den Plasmateilchen die gemessenen Energien der Runawayelektronen erklärt werden können.

Die monoenergetischen Elektronen, die in der Rippleresonanz eingefangen werden, können dann, wie in dieser Arbeit erstmals gezeigt wird, an bestimmten Stellen im Plasma die von ihnen spontan emittierte Strahlung kohärent verstärken und zu einem free-electron-maser führen.

## 1.5 Gliederung der Arbeit

Im theoretischen Teil dieser Arbeit, Kapitel II.1 wird die Bewegung der Runawayelektronen auf Driftflächen sowie der Effekt ihrer Energieblockierung im Tokamak dargestellt. Es wird hierbei gezeigt, daß die Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen dies nicht leisten können, sondern nur der Mechanismus der Rippleresonanz.

Den experimentellen Teil der Arbeit bilden die folgenden Kapitel:

In Kapitel III.1 sind die Untersuchungen der Runawaypopulation durch relativistische Thomsonstreuung dargestellt, sowie die Abschätzung der im Tokamak ASDEX Upgrade erzeugten maximalen Dichte der Runawayelektronen aus der von ihnen emittierten Bremsstrahlung.

Die Bremsstrahlungsspektren der Runawayelektronen im Tokamak ASDEX werden in Kapitel III.2 analysiert. Sie zeigen, daß die Runawayelektronen maximale Energien erreichen, die den Energien entsprechen, bei denen ihre Bewegung resonant mit dem Ripple ist.

Kapitel III.3 enthält die Identifikation der beobachteten fluktuierenden Emission im Mikrowellenbereich mit der verstärkten spontanen Emission der Runawayelektronen, die auf dem Mechanismus des free-electron-masers beruht.



## II

# Theoretischer Teil

Das Magnetfeld des Tokamak zwingt die Runawayelektronen, sich auf geschlossenen Driftflächen zu bewegen. Die Axialsymmetrie des Magnetfelds zwingt die Runawayelektronen, sich auf geschlossenen Driftflächen im Raum zu bewegen (Abschnitt II.1.1). Da das toroidale Magnetfeld durch endlich viele Spulen erzeugt wird, ist es nicht streng achsensymmetrisch, sondern enthält kleine Rippeln. Bei bestimmten Phasen der Runawayelektronen kommt es zu einer Resonanz zwischen der Gyrationbewegung und den räumlichen Rippelmagnetfeldern, wodurch Parallel- in Senkrechtrichtung Energie wandelt wird (Abschnitt II.1.2). Durch die dadurch eintreffende Erhöhung von Synchronstrahlung kann der Energiegewinn in toroidalen elektrischen Feldern kompensiert werden und die Energie der Runawayelektronen bleibt konstant (Abschnitt II.1.3). Für die Simulation der Bewegung der Runawayelektronen im Tokamak unter Berücksichtigung der Stöße mit den Plasmatteilchen und der Rippelmagnetfelder sind die relativistischen Gleichungen (II.1.1.1) bis (II.1.1.4) zu lösen.

Hochrelativistische Elektronen können in guter Näherung als stoßfrei behandelt werden. Der durch vorhandene Einfluß der Stöße auf die Dynamik wird in den Abschnitten II.1.2.2, II.1.3 und II.1.4 untersucht. Die relativistische Lagrange-Funktion für stoßfreie Runawayelektronen lautet (II.1.1.1) bis (II.1.1.4):

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e \Phi(\vec{r}) + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (II.1.1.1)$$

Bei einem idealen Tokamak ist  $\vec{A}(\vec{r})$  azialsymmetrisch zur  $z$ -Achse. In Zylinderkoordinaten  $(R, \varphi, z)$  (siehe Bild II.1.1.1) gilt deshalb:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_\varphi(R, z) \vec{e}_\varphi \quad (II.1.1.2)$$

Die zeitliche Änderung der Komponenten des kanonischen Drehimpulses der Runawayelektronen (aus  $0 = \frac{d}{dt} \vec{L} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{Synch}} + \vec{r} \times \vec{F}_R$ ) ist durch die Gleichung (II.1.1.7) gegeben, falls man das Drehmoment  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  in Gleichung (II.1.1.1) einsetzt.

während der das endliche Drehmoment die  $z$ -Komponente des kanonischen Drehimpulses nur wenig ändern kann. Für Runawayelektronen im Tokamak ist die toroidale Geschwindigkeit  $v_{\text{tor}}$  viel größer als die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht dazu, da die Runawayelektronen durch das elektrische Feld  $\vec{E}_{\text{tor}}$  nur in der toroidalen Richtung beschleunigt werden. Für hochrelativistische Elektronen wird deshalb  $v_{\text{tor}} = c$  gesetzt.

Die Ortsvektoren  $\vec{r}$ , die bei konstanter Energie der Runawayelektronen die Gleichung (II.1.1.7) erfüllen, bilden die sogenannte Driftfläche, in der die Geschwindigkeitsvektoren der Runawayelektronen liegen.

### II.1.1.1 Geschwindigkeit der Runawayelektronen im Plasma

Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  der Runawayelektronen setzt sich aus der Geschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{GZ}}$  des Gyrationenzentrums entlang der Driftfläche  $\lambda_z = \text{const.}$  und der dazu senkrechten Gyrationgeschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{G}}$  (Erhaltung des magnetischen Moments (Norr)) zusammen:

Das kleine Drehmoment führt dazu, dass diese Flächen auch im Rahmen der Driftnäherung erhalten werden, bei der über die schnelle Gyration der Runawayelektronen im Magnetfeld der Driftfläche nur die zeitliche Entwicklung der Driftfläche betrachtet wird.

## II.1 Bewegung von Runawayelektronen in Tokamaks

Das Magnetfeld des Tokamak beeinflusst die Dynamik der Runawayelektronen im Orts- und Impulsraum: Die Axialsymmetrie des Magnetfelds zwingt die Runawayelektronen, sich auf sogenannten Driftflächen im Raum zu bewegen (Abschnitt II.1.1). Da das toroidale Magnetfeld durch endlich viele Spulen erzeugt wird, ist es nicht streng axialsymmetrisch, sondern enthält einen Ripple. Bei bestimmten Energien der Runawayelektronen kommt es zu einer Resonanz zwischen der Gyrationbewegung und dem radialen Ripplermagnetfeld, wodurch Parallel- in Senkrechtenergie umgewandelt wird (Abschnitt II.1.2). Durch die dadurch erhöhte Emission von Synchrotronstrahlung kann der Energiegewinn im toroidalen elektrischen Feld kompensiert werden und die Energie der Runawayelektronen bleibt konstant (Abschnitt II.1.3). Für die Simulation der Bewegung der Runawayelektronen im Tokamak unter Berücksichtigung der Stöße mit den Plasmateilchen und der Rippleresonanz werden in Abschnitt II.1.4 Monte-Carlo-Operatoren abgeleitet.

### II.1.1 Bewegung der Runawayelektronen auf Driftflächen im axialsymmetrischen Magnetfeld eines Tokamak

Hochrelativistische Elektronen können in guter Näherung als stoßfrei behandelt werden. Der dennoch vorhandene Einfluß der Stöße auf ihre Dynamik wird in den Abschnitten II.1.2.6.2, II.1.3 und II.1.4 untersucht. Die relativistisch korrekte Lagrangefunktion für stoßfreie Runawayelektronen lautet [Gol], [Spo]

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = -m_e c^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} + e \Phi(\vec{r}) - e \vec{A}(\vec{r}) * \vec{v} \quad (\text{II.1.1.1})$$

( $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ : Ort, Geschwindigkeit des Elektrons,  $m_e$ : Ruhemasse des Elektrons,  $c$ : Lichtgeschwindigkeit,  $e$ : Elementarladung,  $\vec{A}(\vec{r})$ : Vektorpotential,  $\Phi(\vec{r})$ : elektrisches Potential aufgrund der Umfangsspannung) Bei einem idealen Tokamak ist  $\vec{A}(\vec{r})$  axialsymmetrisch zur  $z$ -Achse. In Zylinderkoordinaten ( $R$ ,  $\varphi_{\text{tor}}$ ,  $z$ ) (siehe Bild II.1.1.4) gilt deshalb:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi_{\text{tor}}} = 0 \quad (\text{II.1.1.2})$$

Die zeitliche Änderung der  $z$ -Komponente des kanonischen Drehimpulses

$$\lambda_z = R \frac{\partial L}{\partial v_{\text{tor}}} = R \gamma m_e v_{\text{tor}} - e R A_{\text{tor}} \quad (\text{II.1.1.3})$$

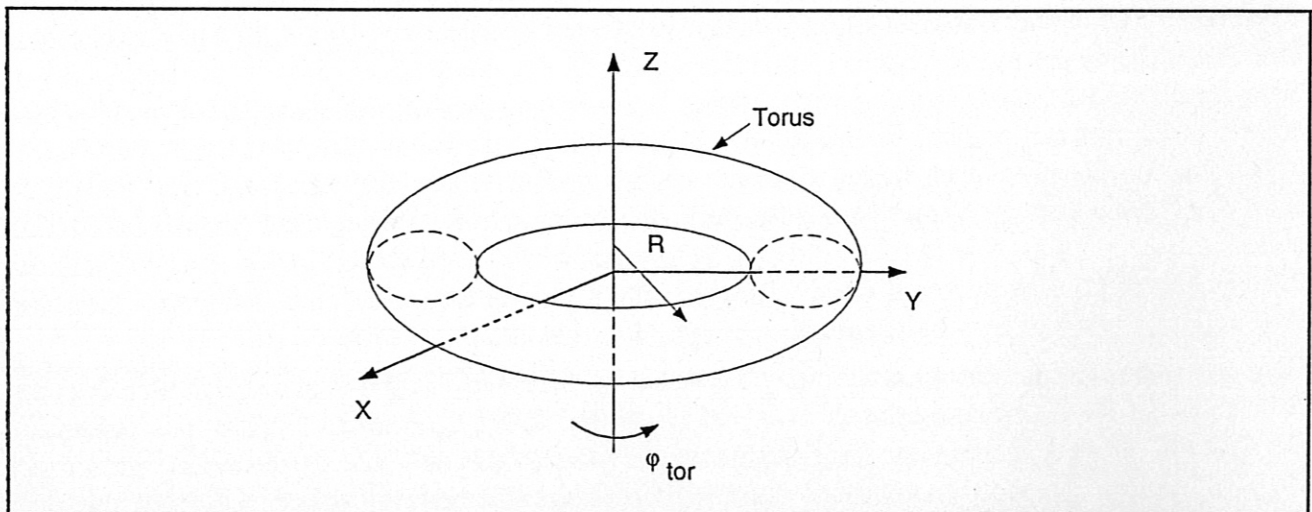


Bild II.1.1.4 Zylinderkoordinaten ( $R$ ,  $\varphi_{\text{tor}}$ ,  $z$ ) zur Beschreibung der Axialsymmetrie des Tokamaks



( $v_{\text{tor}}$ : toroidale Komponente der Geschwindigkeit der Runawayelektronen,  $\gamma$ : relativistischer Faktor der Runawayelektronen,  $A_{\text{tor}}$ : toroidale Komponente von  $\vec{A}$  )

ergibt sich unter Berücksichtigung der dissipativen Kräfte  $\vec{F}_{\text{R}}$  (Reibung durch Stöße) und  $\vec{F}_{\text{Synch}}$  (Energieverlust durch Synchrotronstrahlung) aus [Gol]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_{\text{tor}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\text{tor}}} = \left( \vec{F}_{\text{Synch}} + \vec{F}_{\text{R}} \right) * \vec{e}_{\text{tor}} \quad (\text{II.1.1.4})$$

( $t$ : Zeit,  $\vec{e}_{\text{tor}}$ : Einheitsvektor in toroidaler Richtung, der zu ansteigenden Werten von  $\varphi_{\text{tor}}$  zeigt)  
Wegen (II.1.1.2) , also

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_{\text{tor}}} = e \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{\text{tor}}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi_{\text{tor}}} * \vec{v} \right) = e \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{\text{tor}}} =: -e E_{\text{tor}} \quad (\text{II.1.1.5})$$

( $E_{\text{tor}}$ : toroidales elektrisches Feld)  
folgt aus (II.1.1.4)

$$\dot{\lambda}_z = \frac{d}{dt} \left( R \gamma m_e v_{\text{tor}} - e R A_{\text{tor}} \right) = R \left[ e E_{\text{tor}} + \left( \vec{F}_{\text{Synch}} + \vec{F}_{\text{R}} \right) * \vec{e}_{\text{tor}} \right] \quad (\text{II.1.1.6})$$

Die z-Komponente des kanonischen Drehimpulses

$$\begin{aligned} \lambda_z(\vec{r}) &= \left( R \gamma m_e v_{\text{tor}} - e R A_{\text{tor}} \right) = R \gamma m_e v_{\text{tor}} - e \psi = \\ &= \text{const.} - \int_0^{t'} R \left[ e E_{\text{tor}} + \left( \vec{F}_{\text{Synch}} + \vec{F}_{\text{R}} \right) * \vec{e}_{\text{tor}} \right] dt' \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.7})$$

( $\psi = R A_{\text{tor}}$ : poloidale Flußfunktion an Tokamaks,  $t'$ : Integrationsvariable über die Zeit,  $\vec{r}$ : Ortsvektor des Runawayelektrons)

ist konstant, falls kein Drehmoment in z- Richtung ( $e E_{\text{tor}} + \left( \vec{F}_{\text{Synch}} + \vec{F}_{\text{R}} \right) * \vec{e}_{\text{tor}} = 0$ ) auf die Runawayelektronen wirkt. Die Konstanz von  $\lambda_z$  ist näherungsweise über kurze Zeiträume gegeben, während der das endliche Drehmoment die z-Komponente des kanonischen Drehimpulses nur wenig ändern kann. Für Runawayelektronen im Tokamak ist die toroidale Geschwindigkeit  $v_{\text{tor}}$  viel größer als die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht dazu, da die Runawayelektronen durch das elektrische Feld  $E_{\text{tor}}$  nur in der toroidalen Richtung beschleunigt werden. Für hochrelativistische Elektronen wird deshalb  $v_{\text{tor}} = c$  gesetzt.

Die Ortsvektoren  $\vec{r}$ , die bei konstanter Energie der Runawayelektronen die Gleichung (II.1.1.7) erfüllen, bilden die sogenannte Driftfläche, in der alle Geschwindigkeitsvektoren der Runawayelektronen liegen.<sup>2</sup>

### II.1.1.1 Geschwindigkeit der Runawayelektronen im Plasma

Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  der Runawayelektronen setzt sich aus der Geschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{GZ}}$  des Gyrationenzentrums entlang der Driftfläche  $\lambda_z = \text{const.}$  und der dazu senkrechten Gyrationgeschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{g}}$  (Erhaltung des magnetischen Moments [Nor]) zusammen:

<sup>2</sup> Der Name "Driftfläche" rührt daher, daß diese Flächen auch im Rahmen der Driftnäherung erhalten werden, bei der über die schnelle Gyrationbewegung gemittelt und nur die Bewegung des Gyrationenzentrums verfolgt wird [KSp], [ZFG].

$$\vec{v}^2 = \vec{v}_{GZ}^2 + \vec{v}_g^2 = c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \quad (\text{II.1.1.8})$$

Die Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums, die eine Tangente an die Driftfläche  $\lambda_z(\vec{r}) = \text{const.}$  ist, berechnet sich zu [ZFG]

$$\vec{v}_{GZ} = v_{GZ} \frac{\vec{B}^*}{|\vec{B}^*|} \quad (\text{II.1.1.9})$$

( $v_{GZ} = |\vec{v}_{GZ}|$ )  
mit

$$\begin{aligned} \vec{B}^* &= B_{\text{tor}} \vec{e}_{\text{tor}} + \vec{e}_{\text{tor}} \times \frac{1}{R} \vec{\nabla} \left[ -\frac{\lambda_z(R, z)}{e} \right] \\ &= B_{\text{tor}} \vec{e}_{\text{tor}} + \vec{e}_{\text{tor}} \times \frac{1}{R} \vec{\nabla} \left[ \psi(R, z) - \frac{R \gamma m_e v_{\text{tor}}(R, z)}{e} \right] \\ &= B_{\text{tor}} \vec{e}_{\text{tor}} + \vec{B}_{\text{pol}} - \vec{e}_{\text{tor}} \times \frac{1}{R} \vec{\nabla} \left[ \frac{R \gamma m_e v_{\text{tor}}(R, z)}{e} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.10})$$

( $B_{\text{tor}}$ : toroidales Magnetfeld,  $\vec{B}_{\text{pol}} = \vec{e}_{\text{tor}} \times 1/R \{ \vec{\nabla}[\psi(R, z)] \}$ : poloidales Magnetfeld)

### II.1.1.2 Beschleunigung der Runawayelektronen im Plasma

Für die zeitliche Änderung des Impulses  $p_{\text{tor}} = \gamma m_e v_{\text{tor}}$  in toroidaler Richtung folgt aus (II.1.1.6)

$$\frac{dp_{\text{tor}}}{dt} = e E_{\text{tor}} + \frac{e}{R} \frac{d\psi}{dt} + \left( \vec{F}_{\text{Synch}} + \vec{F}_R \right) * \vec{e}_{\text{tor}} \quad (\text{II.1.1.11})$$

Der Term

$$\frac{1}{R} \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{R} \left( \vec{v}_{GZ} * \vec{\nabla} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \quad (\text{II.1.1.12})$$

stellt dabei die Spannung dar, die bei der Bewegung über die magnetischen Flächen ( $(\vec{v}_{GZ} * \vec{\nabla} \psi)/R$ ) und aufgrund der Plasmastromänderung im Plasma erzeugt wird ( $(1/R) (\partial \psi / \partial t)$ , Skineffekt). Nach einem poloidalen Umlauf mittelt sich allerdings der Betrag von  $(\vec{v}_{GZ} * \vec{\nabla} \psi)/R$  zu Null. Er wird deshalb im folgenden nicht mehr berücksichtigt.

Die Runawayelektronen bewegen sich nicht exakt in toroidaler Richtung, sondern in Richtung von  $\vec{B}^*$  (Gleichung (II.1.1.10)). Aus Gleichung (II.1.1.9) ergibt sich für die typischen Magnetfelder  $B_{\text{tor}} = 2 \text{ T}$ ,  $B_{\text{pol}} = 0,24 \text{ T}$  (für einen Plasmastrom von 600 kA) und relativistische  $\gamma$ -Werte kleiner 60, wie sie für die Runawayelektronen in ASDEX und ASDEX Upgrade beobachtet werden, für den Winkel zwischen  $p_{\text{tor}}$  und  $p_{GZ}$  eine obere Grenze von  $7^\circ$  am Plasmarand. Die Beschleunigung in Richtung  $p_{GZ}$  durch das effektive elektrische Feld

$$E_{\text{eff}} = E_{\text{tor}} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{II.1.1.13})$$

ergibt sich zu

$$\frac{dp_{GZ}}{dt} = e E_{\text{eff}} \vec{e}_{\text{tor}} * \frac{\vec{p}_{GZ}}{p_{GZ}} = e E_{\text{eff}} \cos(7^\circ) = e E_{\text{eff}} * 0,993 \approx e E_{\text{eff}} \quad (\text{II.1.1.14})$$

und ist deshalb praktisch genau so groß wie in Richtung von  $p_{\text{tor}}$ .

Die Komponente des toroidalen elektrischen Feldes  $E_{\text{tor}}$ , die senkrecht zu  $\vec{B}$  gerichtet ist, führt im Rahmen der Driftnäherung zu einer Driftgeschwindigkeit, die für typische Plasmaparameter gegenüber der Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums (Gleichung (II.1.1.9)) völlig vernachlässigbar ist [KS<sub>P</sub>].



### II.1.1.3 Einschluß von Runawayelektronen

Runawayelektronen können sich für längere Zeiten in toroidaler Richtung bewegen, sie sind "eingeschlossen", falls die Driftflächen  $\lambda_z(\vec{r}) = \text{const.}$  nach Gleichung (II.1.1.7) für die jeweiligen Energien der Runawayelektronen und dem jeweiligen Plasmastrom in poloidaler Richtung geschlossen sind und im Bereich des Plasmas, oder im Vakuum verlaufen, wo sie auf keine materiellen Hindernisse treffen.

Die Fläche  $\lambda_z(\vec{r}) = \text{const.}$  erlaubt unter bestimmten Bedingungen (siehe unten) sowohl geschlossene, als auch offene Driftflächen (Bild II.1.1.3.5).

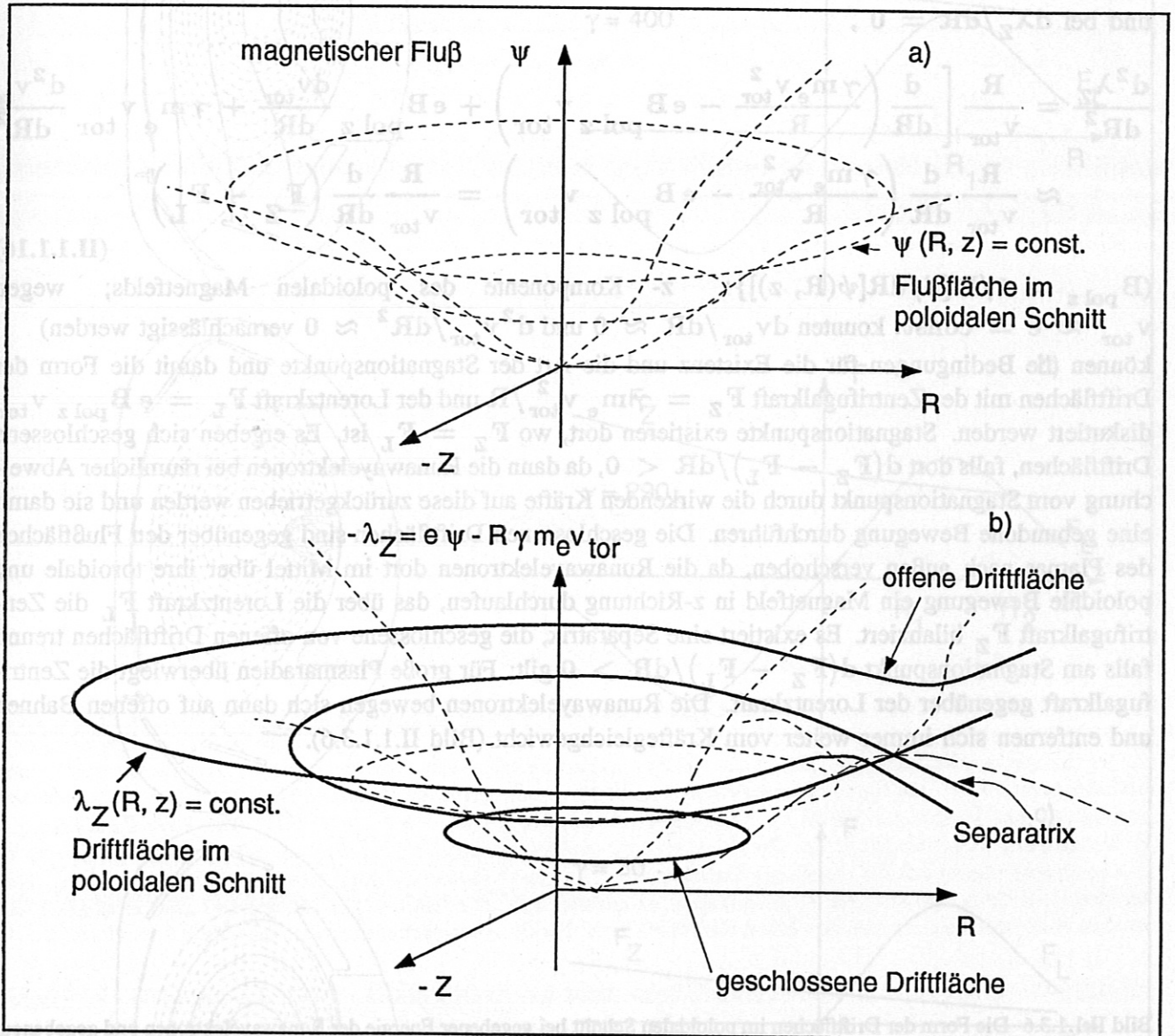


Bild II.1.1.3.5 Das Bild zeigt in einem poloidalen Schnitt ((R,z)-Ebene) eine für Tokamaks typische Form des poloidalen magnetischen Flußes  $\psi$  (a) und die sich daraus ergebende z-Komponente des kanonischen Drehimpulses  $\lambda_z$  (b). Der poloidale magnetische Fluß  $\psi$  nimmt von der magnetischen Seele, bei der das poloidale Magnetfeld verschwindet, hier bei  $(R, z) = (0, 0)$ , nach außen hin zu. Die Flächen  $\psi = \text{const.}$  werden als magnetische Flußflächen bezeichnet (a). Die Subtraktion von  $R \cdot \gamma m_e v_{\text{tor}}$  von  $e \psi$  ergibt die Fläche  $-\lambda_z(R, z)$  (b). Die Runawayelektronen bewegen sich auf den Driftflächen  $\lambda_z(R, z) = \text{const.}$ . An den Stagnationspunkten  $\vec{\nabla} \lambda_z = 0$  führen die Runawayelektronen keine poloidale Bewegung durch, sondern laufen nur toroidal im Torus um. In dem Bereich um den Stagnationspunkt mit  $d^2 \lambda_z / dR^2 < 0$  existieren geschlossene Driftflächen. Der Stagnationspunkt mit  $d^2 \lambda_z / dR^2 > 0$  liegt auf der Separatrix, die den Übergang von geschlossenen zu offenen Driftflächen darstellt.

An Stagnationspunkten,  $\vec{\nabla} \lambda_z = 0$ , führen die Runawayelektronen keine poloidale Bewegung durch (siehe Gleichung (II.1.1.9) mit (II.1.1.10)). In dem Bereich um den Stagnationspunkt mit

$d^2\lambda_z/dR^2 < 0$  existieren geschlossene Driftflächen. Der Stagnationspunkt mit  $d^2\lambda_z/dR^2 > 0$  liegt auf der Separatrix [ZFG], die den Übergang von geschlossenen zu offenen Driftflächen darstellt. Da

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_z}{dR} &= \gamma m_e v_{\text{tor}} - e R B_{\text{pol } z} + R \gamma m_e \frac{dv_{\text{tor}}}{dR} \\ &\approx \frac{R}{v_{\text{tor}}} \left( \frac{\gamma m_e v_{\text{tor}}^2}{R} - e B_{\text{pol } z} v_{\text{tor}} \right) = \frac{R}{v_{\text{tor}}} \left( F_Z - F_L \right) \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.15})$$

und bei  $d\lambda_z/dR = 0$ ,

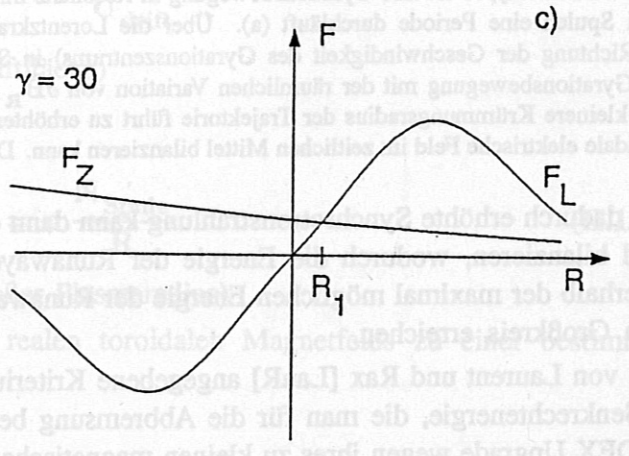
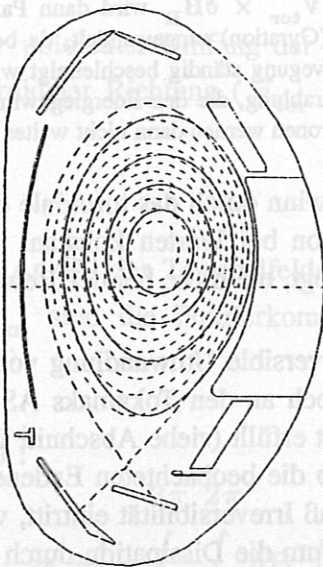
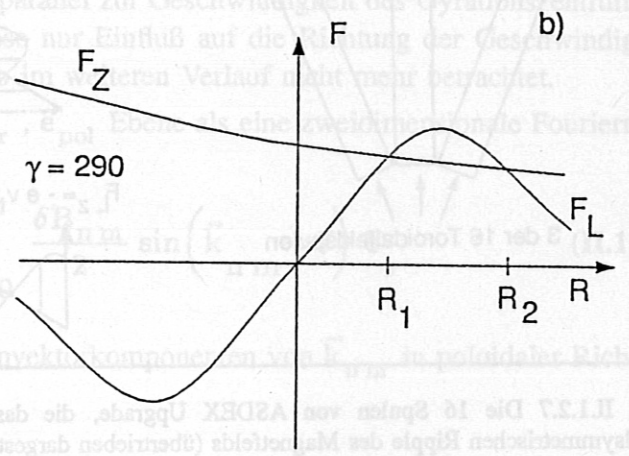
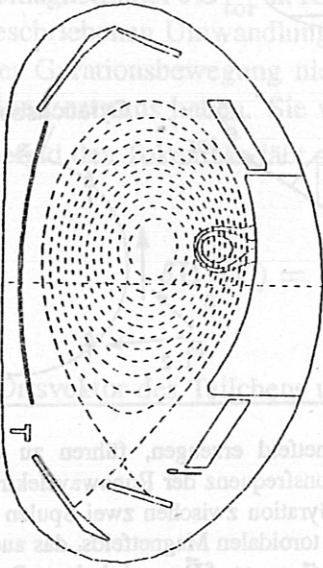
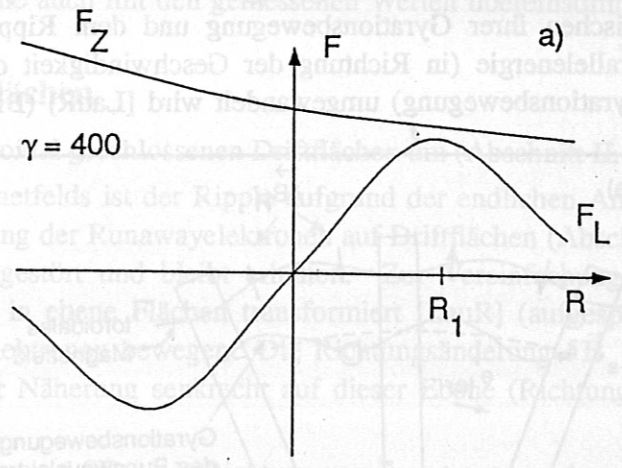
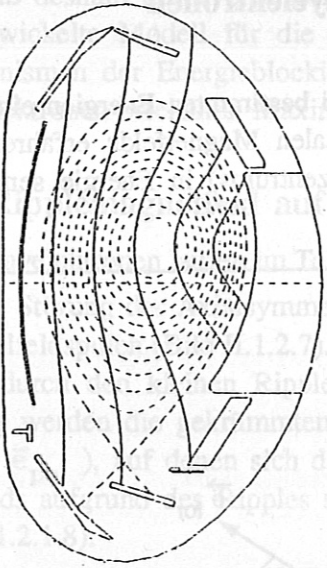
$$\begin{aligned} \frac{d^2\lambda_z}{dR^2} &= \frac{R}{v_{\text{tor}}} \left[ \frac{d}{dR} \left( \frac{\gamma m_e v_{\text{tor}}^2}{R} - e B_{\text{pol } z} v_{\text{tor}} \right) + e B_{\text{pol } z} \frac{dv_{\text{tor}}}{dR} + \gamma m_e v_{\text{tor}} \frac{d^2v_{\text{tor}}}{dR^2} \right] \\ &\approx \frac{R}{v_{\text{tor}}} \frac{d}{dR} \left( \frac{\gamma m_e v_{\text{tor}}^2}{R} - e B_{\text{pol } z} v_{\text{tor}} \right) = \frac{R}{v_{\text{tor}}} \frac{d}{dR} \left( F_Z - F_L \right) \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.16})$$

( $B_{\text{pol } z} = 1/R\{d/dR[\psi(R, z)]\}$ ):  $z$ -Komponente des poloidalen Magnetfelds; wegen  $v_{\text{tor}} \approx c = \text{const.}$  konnten  $dv_{\text{tor}}/dR \approx 0$  und  $d^2v_{\text{tor}}/dR^2 \approx 0$  vernachlässigt werden)

können die Bedingungen für die Existenz und die Art der Stagnationspunkte und damit die Form der Driftflächen mit der Zentrifugalkraft  $F_Z = \gamma m_e v_{\text{tor}}^2/R$  und der Lorentzkraft  $F_L = e B_{\text{pol } z} v_{\text{tor}}$  diskutiert werden. Stagnationspunkte existieren dort, wo  $F_Z = F_L$  ist. Es ergeben sich geschlossene Driftflächen, falls dort  $d(F_Z - F_L)/dR < 0$ , da dann die Runawayelektronen bei räumlicher Abweichung vom Stagnationspunkt durch die wirkenden Kräfte auf diese zurückgetrieben werden und sie damit eine gebundene Bewegung durchführen. Die geschlossenen Driftflächen sind gegenüber den Flußflächen des Plasmas nach außen verschoben, da die Runawayelektronen dort im Mittel über ihre toroidale und poloidale Bewegung ein Magnetfeld in  $z$ -Richtung durchlaufen, das über die Lorentzkraft  $F_L$  die Zentrifugalkraft  $F_Z$  bilanziert. Es existiert eine Separatrix, die geschlossene von offenen Driftflächen trennt, falls am Stagnationspunkt  $d(F_Z - F_L)/dR > 0$  gilt: Für große Plasmaradien überwiegt die Zentrifugalkraft gegenüber der Lorentzkraft. Die Runawayelektronen bewegen sich dann auf offenen Bahnen und entfernen sich immer weiter vom Kräftegleichgewicht (Bild II.1.1.3.6).

Bild II.1.1.3.6 Die Form der Driftflächen im poloidalen Schnitt bei gegebener Energie der Runawayelektronen und gegebenem poloidalem Magnetfeld hängt von der Zentrifugalkraft  $F_Z = \gamma m_e v_{\text{tor}}^2/R$  und der Lorentzkraft  $F_L = e B_{\text{pol } z} v_{\text{tor}}$  ab. Die gestrichelten Linien stellen dabei die Flußflächen  $\psi(R, z) = \text{const.}$  und die durchgezogenen Linien die Driftflächen  $\lambda_z(R, z) = \text{const.}$  dar (siehe auch Bild II.1.1.3.5). Die relativistischen  $\gamma$ -Faktoren der Runawayelektronen sind  $\gamma = 400$  (a),  $\gamma = 290$  (b) und  $\gamma = 30$  (c), der Plasmastrom beträgt jeweils 600 kA. Ist für sehr hochenergetische Runawayelektronen stets  $F_Z > F_L$ , so existiert kein Kräftegleichgewicht, was zu offenen Driftflächen führt (a). Existieren zwei Schnittpunkte von  $F_Z$  und  $F_L$ , so führt dies in der Umgebung von  $R_1$  mit  $d(F_Z - F_L)/dR < 0$  zu geschlossenen Driftflächen und bei  $R_2$  mit  $d(F_Z - F_L)/dR > 0$  zu einer Separatrix (b). Die geschlossenen Driftflächen sind dabei gegenüber den Flußflächen des Plasmas nach außen verschoben, da die Runawayelektronen dort im Mittel über ihre toroidale und poloidale Bewegung ein Magnetfeld in  $z$ -Richtung durchlaufen, das über die Lorentzkraft  $F_L$  die Zentrifugalkraft  $F_Z$  bilanziert. Falls die Energie der Runawayelektronen sehr niedrig ist, existiert nur ein Schnittpunkt von  $F_Z$  und  $F_L$  bei  $R_1$ . Es kommt dann wegen  $d(F_Z - F_L)/dR < 0$  nur zu geschlossenen Driftflächen (c).





## II.1.2 Resonanz der Gyrationbewegung der Runawayelektronen mit dem Ripple des toroidalen Magnetfelds

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Runawayelektronen bei bestimmten Energien eine Resonanz zwischen ihrer Gyrationbewegung und dem Ripple des toroidalen Magnetfelds erfahren, wodurch Parallelenergie (in Richtung der Geschwindigkeit des Gyrationzentrums) in Energie senkrecht dazu (Gyrationbewegung) umgewandelt wird [LauR] (Bild II.1.2.7).

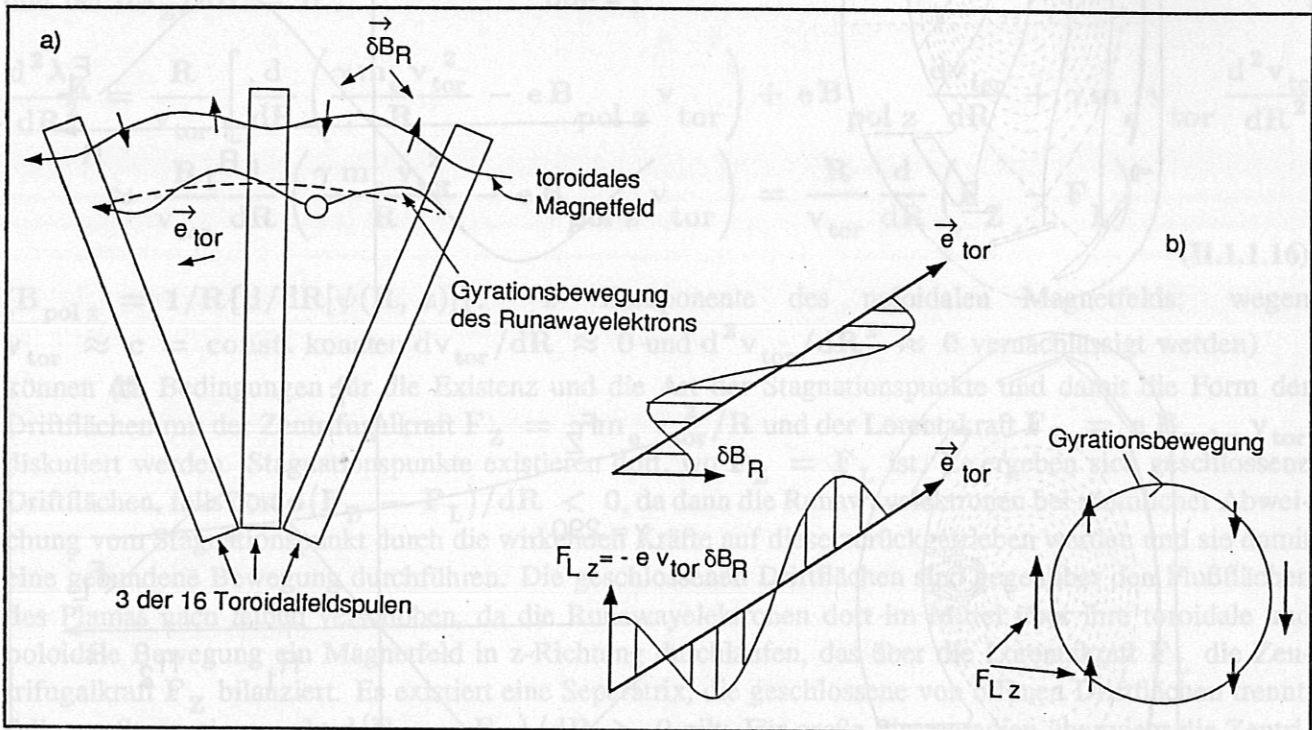


Bild II.1.2.7 Die 16 Spulen von ASDEX Upgrade, die das toroidale Magnetfeld erzeugen, führen zu einem nicht axialsymmetrischen Ripple des Magnetfelds (übertrieben dargestellt). Die Gyrationfrequenz der Runawayelektronen nimmt mit der Energie der Elektronen ab. Führen die Runawayelektronen genau eine Gyration zwischen zwei Spulen durch (oder Vielfache davon), so ist ihre Gyrationbewegung in Resonanz mit dem Ripple des toroidalen Magnetfelds, das auch zwischen zwei Spulen eine Periode durchläuft (a). Über die Lorentzkraft  $\vec{F}_{Lz} = -e \vec{v}_{\text{tor}} \times \delta \vec{B}_R$  wird dann Parallelenergie (in Richtung der Geschwindigkeit des Gyrationzentrums) in Senkrechtenergie (Gyration) umgewandelt, da bei Resonanz der Gyrationbewegung mit der räumlichen Variation von  $\delta \vec{B}_R$  die Gyrationbewegung ständig beschleunigt wird (b). Der nun kleinere Krümmungsradius der Trajektorie führt zu erhöhter Synchrotronabstrahlung, die den Energiegewinn durch das toroidale elektrische Feld im zeitlichen Mittel bilanzieren kann. Die Runawayelektronen werden dann nicht weiter beschleunigt.

Die dadurch erhöhte Synchrotronstrahlung kann dann den Energiegewinn durch das toroidale elektrische Feld bilanzieren, wodurch die Energie der Runawayelektronen schon bei Werten konstant bleibt, die unterhalb der maximal möglichen Energie der Runawayelektronen liegt, die diese bei der Bewegung auf dem Großkreis erreichen.

Das von Laurent und Rax [LauR] angegebene Kriterium für die irreversible Umwandlung von Parallel- in Senkrechtenergie, die man für die Abbremsung benötigt, ist jedoch an den Tokamaks ASDEX und ASDEX Upgrade wegen ihres zu kleinen magnetischen Ripples nicht erfüllt (siehe Abschnitt II.1.2.6.1). Mit dem von [LauR] vorgeschlagenen Mechanismus können deshalb die beobachteten Endenergien der Runawayelektronen nicht erklärt werden. Es zeigt sich allerdings, daß Irreversibilität eintritt, wenn man gegenüber [LauR] die Bewegungsgleichung der Runawayelektronen um die Dissipation durch Emission von Synchrotronstrahlung erweitert. Aufgrund der Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen, die von [LauR] nicht berücksichtigt wurden, enthält die Bewegung der Runawayelektronen stochastische



Anteile, wodurch die Umwandlungseffizienz etwas abgeschwächt wird. Der Rippleresonanzeffekt im Plasma muß deshalb durch eine Diffusion des Gyrationimpulses beschrieben werden. Das in dieser Arbeit entwickelte Modell für die Runawaydynamik erklärt nun konsistent und quantitativ korrekt die Mechanismen der Energieblockierung durch Rippleresonanz und erlaubt die Berechnung der von Runawayelektronen erreichten Maximalenergien, die auch mit den gemessenen Werten übereinstimmen.

### II.1.2.1 Ripplemagnetfeld auf den Driftflächen

Die Runawayelektronen laufen im Tokamak auf toroidal geschlossenen Driftflächen um (Abschnitt II.1.1). Eine kleine Störung der Axialsymmetrie des Magnetfelds ist der Ripple aufgrund der endlichen Anzahl der Toroidalfeldspulen (Bild II.1.2.7). Die Bewegung der Runawayelektronen auf Driftflächen (Abschnitt II.1.1) ist durch den kleinen Ripple nur wenig gestört und bleibt erhalten. Zur Vereinfachung der Darstellung werden die gekrümmten Driftflächen in ebene Flächen transformiert [LauR] (aufgespannt von  $\vec{e}_{\text{tor}}$ ,  $\vec{e}_{\text{pol}}$ ), auf denen sich die Runawayelektronen bewegen. Die Richtungsänderung  $\delta\vec{B}_s$  des Toroidalfelds aufgrund des Ripples steht in dieser Näherung senkrecht auf dieser Ebene (Richtung  $\vec{e}_s$ ) (Bild II.1.2.1.8).

Die Ripplemagnetfelder  $\delta\vec{B}_{\text{tor}}$  in Richtung von  $\vec{e}_{\text{tor}}$  und  $\delta\vec{B}_{\text{pol}}$  in Richtung von  $\vec{e}_{\text{pol}}$  tragen zu der nachfolgend beschriebenen Umwandlung von Energie parallel zur Geschwindigkeit des Gyrationzentrums in Energie der Gyrationbewegung nicht bei, da diese nur Einfluß auf die Richtung der Geschwindigkeit des Gyrationzentrums haben. Sie werden deshalb im weiteren Verlauf nicht mehr betrachtet.

Das Ripplefeld des Tokamaks läßt sich in der  $\vec{e}_{\text{tor}}$ ,  $\vec{e}_{\text{pol}}$  Ebene als eine zweidimensionale Fourierreihe darstellen:

$$\delta\vec{B}_s(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta B_{nm}}{2} \sin(\vec{k}_{nm} * \vec{r}) \vec{e}_s \quad (\text{II.1.2.1})$$

mit  $\vec{r}$  als Ortsvektor des Teilchens und den Wellenvektorkomponenten von  $\vec{k}_{nm}$  in poloidaler Richtung ( $\vec{e}_{\text{pol}}$ ),

$$k_{\text{pol}}(m) = m \frac{2\pi}{U_{\text{drift}}} \quad (\text{II.1.2.2})$$

(  $U_{\text{drift}}$  : poloidaler Umfang der jeweiligen Driftfläche)

und in toroidaler Richtung ( $\vec{e}_{\text{tor}}$ ),

$$k_{\text{tor}}(n) = n \frac{N_{\text{Spule}}}{R} \quad (\text{II.1.2.3})$$

( $N_{\text{Spule}}$ : Anzahl der Toroidalfeldspulen,  $R$ : großer Plasmaradius)

Die  $\delta B_{nm}$  sind die Fourierkomponenten des realen toroidalen Magnetfelds zu einer bestimmten Driftfläche:

$m = 0$  :

$$\delta B_{nm} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta B'_s(\varphi_{\text{tor}}, \varphi_{\text{pol}}) \sin(n N_{\text{Spule}} \varphi_{\text{tor}}) d\varphi_{\text{tor}} d\varphi_{\text{pol}} \quad (\text{II.1.2.4})$$

$m \geq 1$ :

$$\delta B_{nm} = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta B'_s(\varphi_{\text{tor}}, \varphi_{\text{pol}}) \sin(n N_{\text{Spule}} \varphi_{\text{tor}}) \cos(m \varphi_{\text{pol}}) d\varphi_{\text{tor}} d\varphi_{\text{pol}} \right\}^2 + \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta B'_s(\varphi_{\text{tor}}, \varphi_{\text{pol}}) \sin(n N_{\text{Spule}} \varphi_{\text{tor}}) \sin(m \varphi_{\text{pol}}) d\varphi_{\text{tor}} d\varphi_{\text{pol}} \right\}^2 \frac{1}{2} \quad (\text{II.1.2.5})$$

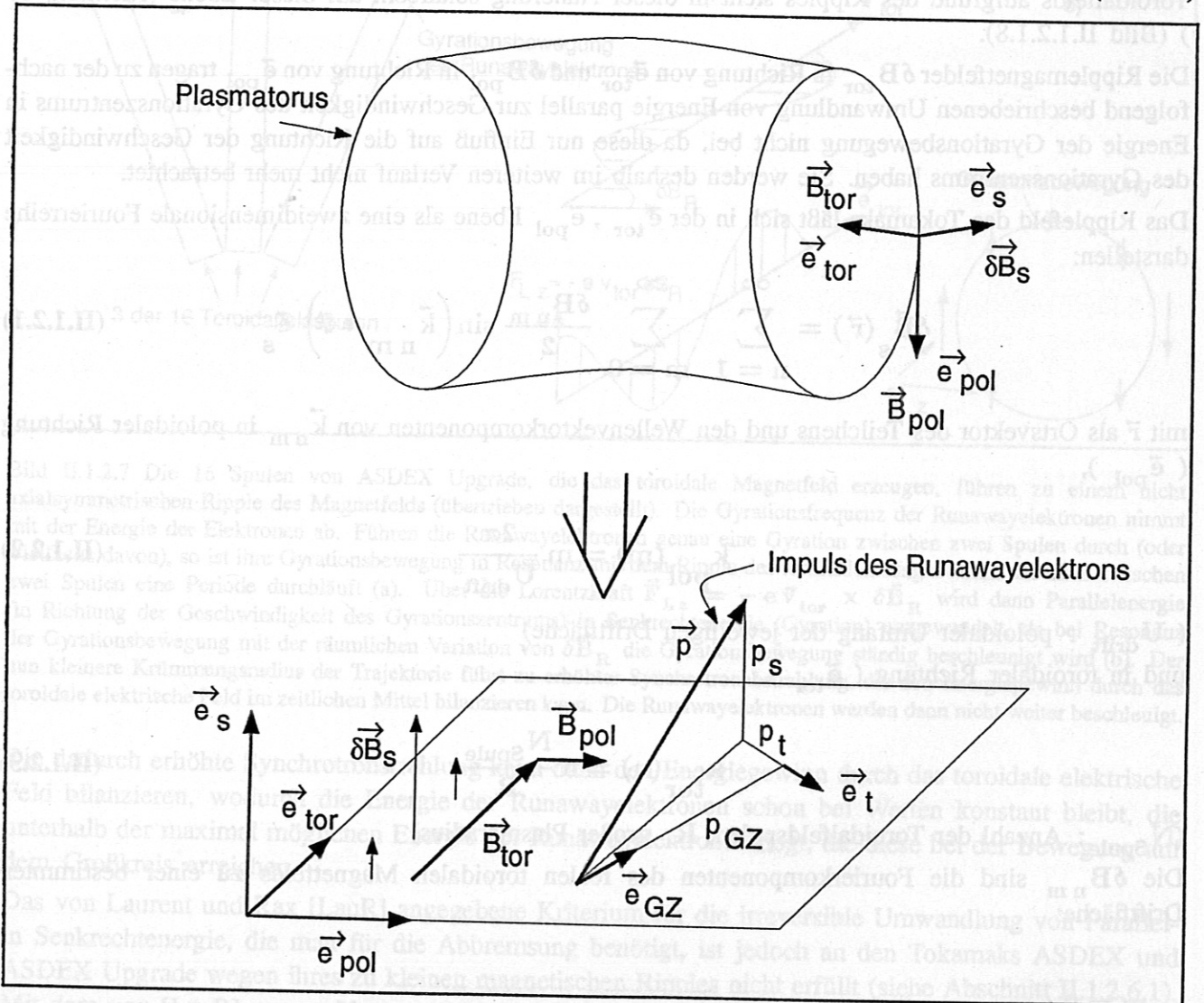


Bild II.1.2.1.8 Die gekrümmten Driftflächen werden in ebene Flächen transformiert (aufgespannt von  $\vec{e}_{\text{tor}}$ ,  $\vec{e}_{\text{pol}}$ ), auf denen sich die Runawayelektronen bewegen. Die Richtungsänderung  $\delta \vec{B}_s$  des Toroidalfelds aufgrund des Ripples steht in dieser Näherung senkrecht auf dieser Ebene (Richtung  $\vec{e}_s$ ). Die Runawayelektronen führen Gyrationbewegungen (Gyrationimpulse  $p_s, p_t$ ) um die Geschwindigkeitsrichtung des Gyrationenzentrums ( $\vec{e}_{\text{GZ}}$ ) aus, die näherungsweise parallel zum Magnetfeld  $\vec{B} = \vec{B}_{\text{tor}} + \vec{B}_{\text{pol}}$  ist.



mit  $\delta \mathbf{B}'_s = \delta \vec{\mathbf{B}} * \vec{\mathbf{e}}_{s \text{ drift}}$  und  $\vec{\mathbf{e}}_{s \text{ drift}}$  als nach außen weisenden Normaleneinheitsvektor auf der realen Driftfläche und  $\delta \vec{\mathbf{B}}$  als Störung des axialsymmetrischen Toroidalfelds.  $\varphi_{\text{tor}}$  und  $\varphi_{\text{pol}}$  sind Winkelkoordinaten zu den Einheitsvektoren  $\vec{\mathbf{e}}_{\text{tor}}$ ,  $\vec{\mathbf{e}}_{\text{pol}}$ , die die reale Driftfläche beschreiben.<sup>3</sup> Die cos und sin Fourierkomponenten in poloidaler Richtung sind für die nicht kreisförmigen Driftflächen, wie sie in ASDEX Upgrade vorkommen, notwendig. Die mit den Rippleharmonischen  $\delta \mathbf{B}_{nm}$  resonanten  $\gamma$ -Werte  $\gamma_{nm}$  der Runawayelektronen, von denen die Form der Driftflächen abhängt (Bild II.1.1.3.6), über die die Fouriertransformation durchgeführt wird, ergibt sich aus der Resonanzbedingung

$$\frac{e \mathbf{B}}{\gamma_{nm} m_e} = \vec{\mathbf{k}}_{nm} * \vec{\mathbf{v}}_{\text{GZ}}(\gamma_{nm}, \vartheta) \quad (\text{II.1.2.6})$$

( $\vec{\mathbf{v}}_{\text{GZ}}$ : Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums,  $\vartheta$ : Pitchwinkel)

Für das toroidale Magnetfeld von ASDEX Upgrade, das nach dem Biot-Savartschen Gesetz durch Integration über die Spulenströme berechnet wurde [Mar], nehmen die Fourierkomponenten  $\delta \mathbf{B}_{nm}$  mit wachsenden n und m im wesentlichen für eine Driftfläche ab. Der Ripple am Plasmarand ist größer als in der Plasmamitte (Bild II.1.2.1.9).

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und das Magnetfeld  $\mathbf{B} = \text{const.}$  weisen in Richtung der Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums  $\vec{\mathbf{v}}_{\text{GZ}}$ , was nach den Abschnitten II.1.1.1 und II.1.1.2 schon gut die wahren Verhältnisse wiedergibt. Die Variation des Magnetfelds  $B \sim 1/R$  im Torus mit dem großen Radius  $R$  muss nicht mitgeführt werden. Es wird die mittlere  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  Geschwindigkeit in toroidaler Richtung  $\mathbf{v}_{\text{tor}}$  (n), die hauptsächlich die Resonanzfrequenz nach Gleichung (II.1.2.5) bestimmt (Bild II.1.2.1.9) ebenfalls mit  $1/R$  variiert (Gleichung (II.1.2.3)). Die Verwendung eines konstanten Magnetfeldes ist also für die Beschreibung der Rippleresonanz ungeeignet.

Für die Bremskraft durch Synchrotronstrahlung [Schw]

$$F_{\text{Synch}} = \frac{P_{\text{ges Synch}}}{c} = -\frac{2}{3} \frac{r_e m_e c^2 \gamma^4}{R_{\text{Kr}}} \langle \frac{1}{R_{\text{Kr}}} \rangle (\rho + \vartheta) \quad (\text{II.1.2.8})$$

( $P_{\text{ges Synch}}$ : gesamte emittierte Synchrotronstrahlungsleistung,  $r_e$ : Elektronenradius,  $R_{\text{Kr}}$ : Krümmungsradius der Runawaybahn,  $\langle \frac{1}{R_{\text{Kr}}} \rangle$ : Mittelwert über eine Gyrationperiode,  $\rho = |\vec{\mathbf{p}}|$  wird der Ausdruck  $\langle \frac{1}{R_{\text{Kr}}} \rangle$  benötigt. Er ergibt sich aus [Bro])

$$\frac{1}{R_{\text{Kr}}} = \frac{(\vec{\mathbf{r}}^2 - (\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{e}})^2)}{2R_{\text{Kr}}} \quad (\text{II.1.2.9})$$

mit  $\vec{\mathbf{r}}$  als zeitabhängigem Ortsvektor des Runawayelektronen. Die Runawayelektronen in einem Tokamak bewegen sich im wesentlichen auf einer Kreisbahn von einem Radius, der dem großen Radius  $R$  des Plasmas entspricht (siehe Abschnitt II.1.1.1). Durch die Führung der Teilchen durch das toroidale Magnetfeld  $\mathbf{B}$  des Tokamak ist der Großkreisbewegung eine Gyrationbewegung mit Gyrationradius  $r_g = |\sin(\vartheta)| / (e/B)$  überlagert.

<sup>3</sup> Der Faktor 1/2 in (II.1.2.1) ist erforderlich, da in (II.1.2.5) die Fouriertransformation mit  $\sin(a) \cdot \cos(b)$ , bzw.  $\sin(a) \cdot \sin(b)$  berechnet wird und in (II.1.2.1) die Darstellung mit  $\sin(a+b)$  benötigt wird. Der Faktor 1/2 folgt dann aus Additionstheoremen trigonometrischer Funktionen [Rott].

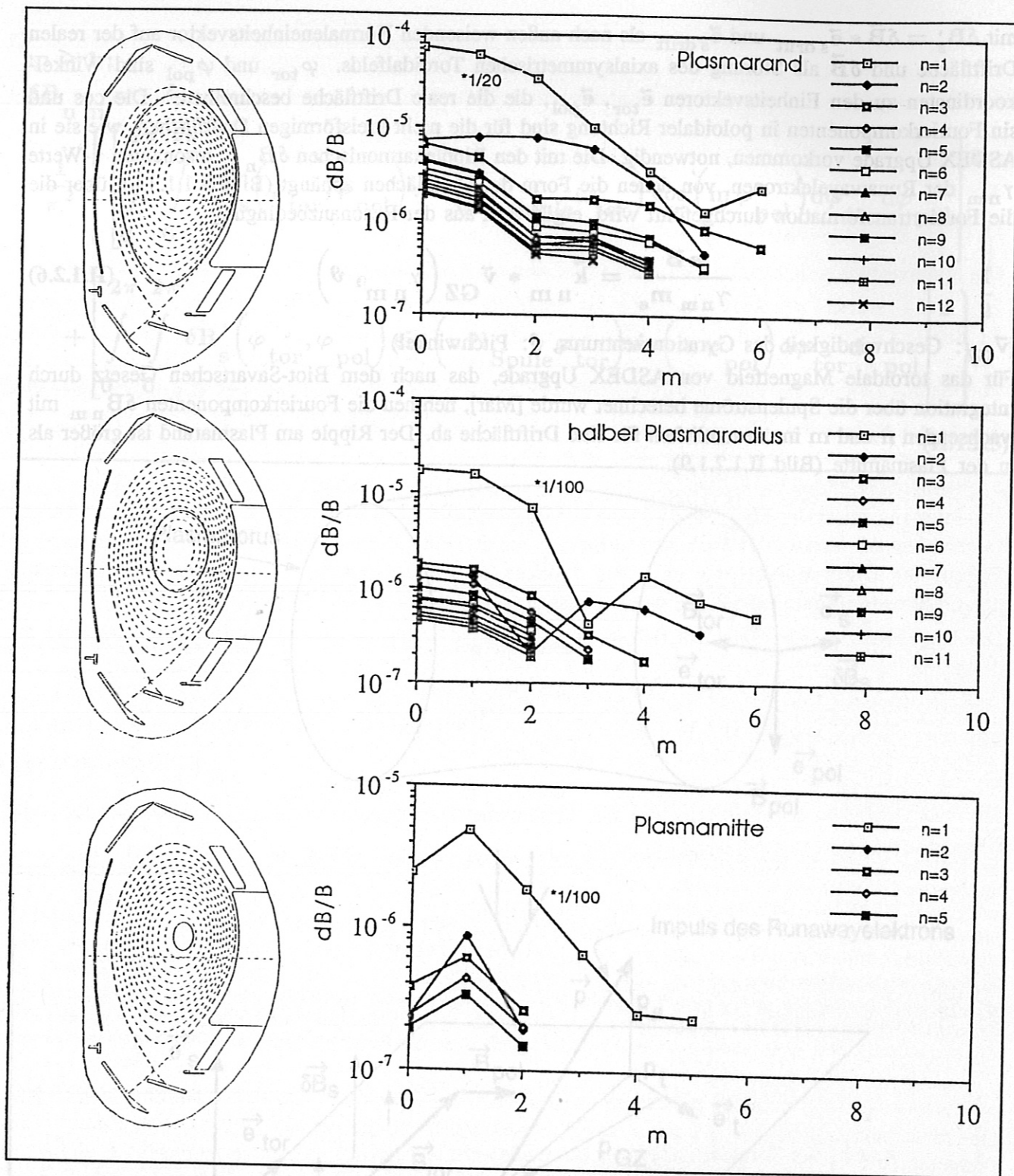


Bild I.1.2.1.6 Für ASDEX Upgrade berechnete Fourierkomponenten des relativen radialen magnetischen Ripples  $\delta B_{nm}/B$  für verschiedene Positionen im Plasma: Die hier gezeigten Werte von  $\delta B_{nm}/B$  wurden für die Driftflächen berechnet, die die Runawayelektronen mit den dazugehörigen Rippleresonanzenergien bei einem Magnetfeld von 2T mit dem Pitchwinkel 0 durchlaufen. Beispielhaft sind hier für die verschiedenen Orte im Plasma als durchgezogene poloidal geschlossene Linien die jeweiligen Driftflächen der Runawayelektronen mit Energie 15 MeV dargestellt. Die gestrichelten Linien stellen die Flächen konstanten poloidalen Flußes des Plasmas mit äußerer Separatrix dar. Die relativen Fourierkomponenten  $\delta B_{nm}/B$  nehmen im wesentlichen mit wachsenden  $n$  und  $m$  für eine Driftfläche ab. Außerdem ist der Ripple am Plasmarand größer als in der Plasmamitte.





wobei  $\vartheta$  den Pitchwinkel der Runawayelektronen im Magnetfeld bezeichnet (Pitchwinkel =  $\angle(\vec{p}, \vec{B})$ ). Gleichung (II.1.2.11) ist der korrekt gemittelte Ausdruck für die Bremskraft durch Synchrotronstrahlung in Tokamaks und weicht von den bisher in der Literatur [Rus], [JaF] verwendeten Ausdrücken

$$\frac{1}{R_{Kr}^2} = \left[ \frac{\cos(\vartheta)}{R} \pm \frac{\sin(\vartheta)}{r_G} \right]^2 \quad (\text{II.1.2.12})$$

ab: (II.1.2.12) führt im Vergleich zu (II.1.2.11) zu einer zu starken Abbremsung durch Synchrotronstrahlung.

Die Berücksichtigung der poloidalen Bewegung der Runawayelektronen auf Driftflächen (siehe Abschnitt II.1.1) ändert den Synchrotronstrahlungsverlust kaum.

Die Separation von (II.1.2.7) in die einzelnen Impulskomponenten (siehe Bild II.1.2.1.8)

$$\vec{p} = p_{GZ} \vec{e}_{GZ} + p_s \vec{e}_s + p_t \vec{e}_t \quad (\text{II.1.2.13})$$

wobei  $p_s$ ,  $p_t$  die Gyrationimpulse und  $p_{GZ}$  der zur Geschwindigkeit des Gyrationzentrums gehörige Impuls sind, liefert für eine Resonanz ( $n$ ,  $m$ ):

$$\begin{aligned} \dot{p}_{GZ} &= eE - F_{\text{Synch}} \frac{p_{GZ}}{p} - e \frac{p_t}{\gamma m_e} \frac{\delta B_{nm}}{2} \sin(\psi) \\ \dot{p}_t &= -\frac{eB}{\gamma m_e} p_s - F_{\text{Synch}} \frac{p_t}{p} + e \frac{p_{GZ}}{\gamma m_e} \frac{\delta B_{nm}}{2} \sin(\psi) \\ \dot{p}_s &= \frac{eB}{\gamma m_e} p_t - F_{\text{Synch}} \frac{p_s}{p} \\ \dot{\psi} &= k \frac{p_{GZ}}{nm \gamma m_e} \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.14})$$

Dieser Gleichungssatz ist mit

$$\begin{aligned} p_g &= \sqrt{p_s^2 + p_t^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \arcsin\left(\frac{p_t}{p_g}\right) & \text{falls } p_s \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{p_t}{p_g}\right) & \text{falls } p_s < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.15})$$

äquivalent zu

$$\begin{aligned} \dot{p}_{GZ} &= eE - F_{\text{Synch}} \frac{p_{GZ}}{p} - e \frac{p_g}{\gamma m_e} \frac{\delta B_{nm}}{2} \sin(\psi) \sin(\varphi) \\ \dot{p}_g &= -F_{\text{Synch}} \frac{p_g}{p} + e \frac{p_{GZ}}{\gamma m_e} \frac{\delta B_{nm}}{2} \sin(\psi) \sin(\varphi) \\ \dot{\varphi} &= \frac{eB}{\gamma m_e} \\ \dot{\psi} &= k \frac{p_{GZ}}{nm \gamma m_e} \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.16})$$



Nahe an der Resonanz  $p_{GZ} \approx p_{GZnm}$ , wobei sich der Resonanzimpuls  $p_{GZnm}$  aus der Resonanzbedingung

$$\vec{k}_{nm} * \frac{\vec{p}_{GZnm}}{\gamma_{nm} m_e} = \omega_{ce} \quad (\text{II.1.2.17})$$

zwischen Gyrationfrequenz  $\omega_{ce} = eB/(\gamma_{nm} m_e)$  und Frequenz der Störkraft  $k_{nm} p_{GZnm}/(\gamma_{nm} m_e)$  ergibt, folgt aus (II.1.2.16) nach zeitlicher Mittelung über  $t = 0, \dots, \pi/\omega_{ce}$ :

$$\begin{aligned} \dot{p}_{GZ} &= eE - F_{\text{Synch}} \frac{p_{GZ}}{p} - e \frac{p_g}{\gamma m_e} \frac{\delta B_{nm}}{4} \cos(\delta) \\ \dot{p}_g &= -F_{\text{Synch}} \frac{p_g}{p} + e \frac{p_{GZ}}{\gamma m_e} \frac{\delta B_{nm}}{4} \cos(\delta) \\ \dot{\delta} &= k_{nm} \frac{p_{GZ}}{\gamma m_e} - \frac{eB}{\gamma m_e} = \Delta\omega \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.18})$$

( $\dot{\delta} = \Delta\omega$ : Schwebungsfrequenz,  $\delta$ : Schwebungsphase)

Die Beträge der Resonanzimpulse nach Gleichung (II.1.2.17) nehmen mit steigenden Werten von  $n$  und  $m$  ab. Sie sind wegen der aus (II.1.2.17) folgenden Bedingung  $\vec{k}_{nm} * \vec{p}_{GZnm} = eB$  unabhängig vom Gyrationimpuls (Bild II.1.2.2.10).

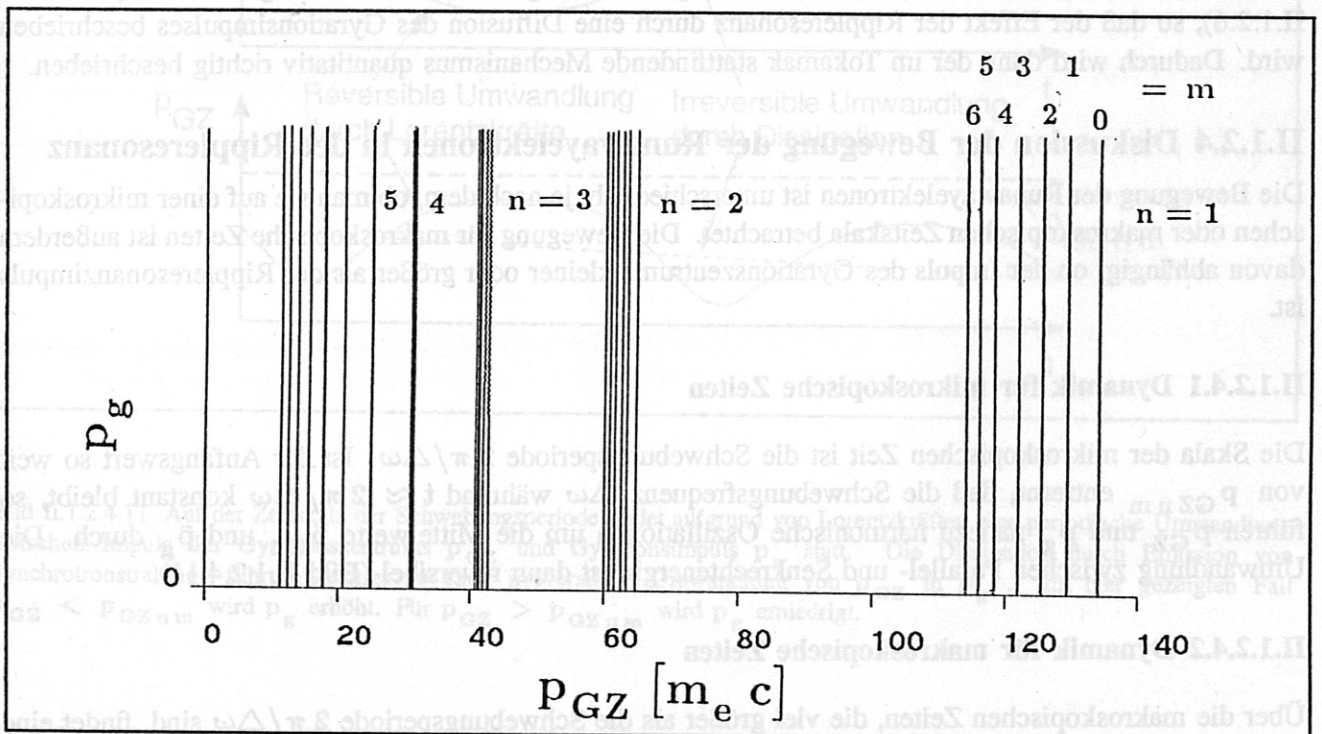


Bild II.1.2.2.10 Die nach  $\vec{k}_{nm} * \vec{p}_{GZnm} = eB$  für ein Magnetfeld von  $B = 2 \text{ T}$  und ASDEX Upgrade Geometrie berechneten Rippleresonanzimpulse  $p_{GZnm}$  fallen mit steigenden Werten von  $n$  und  $m$  jeweils ab und sind unabhängig vom Gyrationimpuls  $p_g$ . Die Resonanzimpulse zu gleicher toroidaler Harmonischer  $n$  bilden jeweils eng zusammenliegende Gruppen, da der poloidale Wellenvektor kleiner als der toroidale Wellenvektor ist und in obiger Resonanzbedingung die Resonanzenergie kaum beeinflusst.

### II.1.2.3 Qualitatives Bild der Energieblockierung durch Rippleresonanz

Die Runawayelektronen werden zu Beginn der Entladungen in einem engen Zeitfenster erzeugt. Die Runawayelektronen haben deshalb in etwa die gleiche Energie. Bei der Beschleunigung im elektrischen Feld

erhöht sich ihr Parallelimpuls  $p_{GZ}$ . Sie gelangen dabei in der Reihenfolge abnehmenden toroidalen Indizes  $n$  zu den Resonanzimpulsen  $p_{GZ n m}$ . Die Ripplermagnetfelder  $\delta B_{n m}$  nehmen mit abnehmendem Index  $n$  zu (siehe Bild II.1.2.1.9). Es erhöht sich deshalb die Effizienz der Umwandlung von Parallel- in Senkrechtenergie mit abnehmender toroidaler Harmonischer  $n$ . Gelangen nun die Runawayelektronen zu einem Rippleresonanzimpuls  $p_{GZ n m}$ , bei dem die Umwandlung von Parallel- in Senkrechtenergie aufgrund des Ripples so schnell vor sich geht, daß sie die durch die erhöhte Senkrechtenergie vergrößerte Synchrotronstrahlung den Energiegewinn im elektrischen Feld bilanzieren kann, so bleibt die Energie der Runawayelektronen konstant. Ein Maß für die Stärke einer Rippleresonanz ist dabei das elektrische Feld, das mindestens aufgewendet werden muß, damit es nicht zu einer Energieblockierung kommt (siehe Abschnitt II.1.2.5). Bei welcher toroidalen Harmonischen des Ripples diese Energieblockierung eintritt, hängt dabei von der Entladungsführung ab: Einerseits variiert der zeitliche Verlauf des toroidalen elektrischen Feldes, das den Plasmastrom treibt, für verschiedene Entladungstypen. Andererseits hängt die toroidale Harmonische  $n$ , in der die Runawayelektronen gefangen werden auch vom Magnetfeld ab, da nach (II.1.2.17) die Resonanzimpulse proportional zum Magnetfeld sind.

Die Runawayelektronen erreichen deshalb nicht immer die gleiche Rippleresonanzenergie, sondern die Endenergie hängt von der jeweiligen Entladung ab und muß durch Simulation der Dynamik der Runawayelektronen bestimmt werden (siehe Abschnitt II.1.4).

In den folgenden Abschnitten wird die Bewegung der Runawayelektronen in der Rippleresonanz nach der Bewegungsgleichung diskutiert, sowie die Umwandlungseffizienz quantifiziert. Die Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen erniedrigen allerdings diese Umwandlungseffizienz (Abschnitt II.1.2.6), so daß der Effekt der Rippleresonanz durch eine Diffusion des Gyrationimpulses beschrieben wird. Dadurch wird dann der im Tokamak stattfindende Mechanismus quantitativ richtig beschrieben.

#### II.1.2.4 Diskussion der Bewegung der Runawayelektronen in der Rippleresonanz

Die Bewegung der Runawayelektronen ist unterschiedlich, je nach dem, ob man sie auf einer mikroskopischen oder makroskopischen Zeitskala betrachtet. Die Bewegung für makroskopische Zeiten ist außerdem davon abhängig, ob der Impuls des Gyrationenzentrums kleiner oder größer als der Rippleresonanzimpuls ist.

##### II.1.2.4.1 Dynamik für mikroskopische Zeiten

Die Skala der mikroskopischen Zeit ist die Schwebungsperiode  $2\pi/\Delta\omega$ . Ist der Anfangswert so weit von  $p_{GZ n m}$  entfernt, daß die Schwebungsfrequenz  $\Delta\omega$  während  $t \approx 2\pi/\Delta\omega$  konstant bleibt, so führen  $p_{GZ}$  und  $p_g$  nahezu harmonische Oszillationen um die Mittelwerte  $\bar{p}_{GZ}$  und  $\bar{p}_g$  durch. Die Umwandlung zwischen Parallel- und Senkrechtenergie ist dann reversibel (Bild II.1.2.4.11).

##### II.1.2.4.2 Dynamik für makroskopische Zeiten

Über die makroskopischen Zeiten, die viel größer als die Schwebungsperiode  $2\pi/\Delta\omega$  sind, findet eine irreversible Umwandlung von Parallel- in Senkrechtenergie statt: Ist  $p_{GZ}$  nahe an  $p_{GZ n m}$ , so werden die Oszillationen auf der Zeitskala der Schwebungsfrequenz  $\Delta\omega$  anharmonisch: Die Entwicklung der Bewegungsgleichungen (II.1.2.18) nach Harmonischen der Schwebungsphase  $\delta$  ergibt in der 2. Ordnung für die zeitliche Änderung  $\dot{p}_{g2}$  von  $p_g$  den Term

$$\dot{p}_{g2} = -\frac{e \delta B_{n m}}{\gamma m_e} p_g F_{\text{Synch}} \frac{\cos^2(\delta)}{\Delta\omega} \quad (\text{II.1.2.19})$$

Die Änderung von  $p_g$  im Zeitintervall  $\Delta t$ , bzw. während der Phasenänderung  $\Delta\delta$  ist



$$\Delta p_g = \dot{p}_{g2} \Delta t = \dot{p}_{g2} \frac{\Delta \delta}{\Delta \omega} = - \frac{e \delta B_{nm}}{\gamma m_e} p_g F_{\text{Synch}} \frac{\cos^2(\delta)}{\Delta \omega^2} \Delta \delta \quad (\text{II.1.2.20})$$

Für  $F_{\text{Synch}} \neq 0$  kann irreversibel Parallel- in Senkrechtenergie umgewandelt werden (Bild II.1.2.4.11). Das Verhalten der Runawayelektronen in der Nähe der Rippleresonanz ist demnach analog zu einem getriebenen harmonischen Oszillator mit Reibung, bei dem auch in einer endlichen Umgebung um die Resonanzfrequenz der Oszillator schon angeregt wird.

Die Umwandlungsrichtung zwischen Parallel- und Senkrechtenergie hängt von dem Vorzeichen von  $\Delta \omega$  ab. Ist  $p_{\text{GZ}} < p_{\text{GZnm}}$ , so ist nach (II.1.2.18)  $\Delta \omega < 0$  und damit  $\Delta \delta = \Delta \omega \Delta t < 0$ , wodurch sich die Senkrechtenergie erhöht. Im umgekehrten Fall,  $p_{\text{GZ}} > p_{\text{GZnm}}$  wird die Senkrechtenergie erniedrigt.

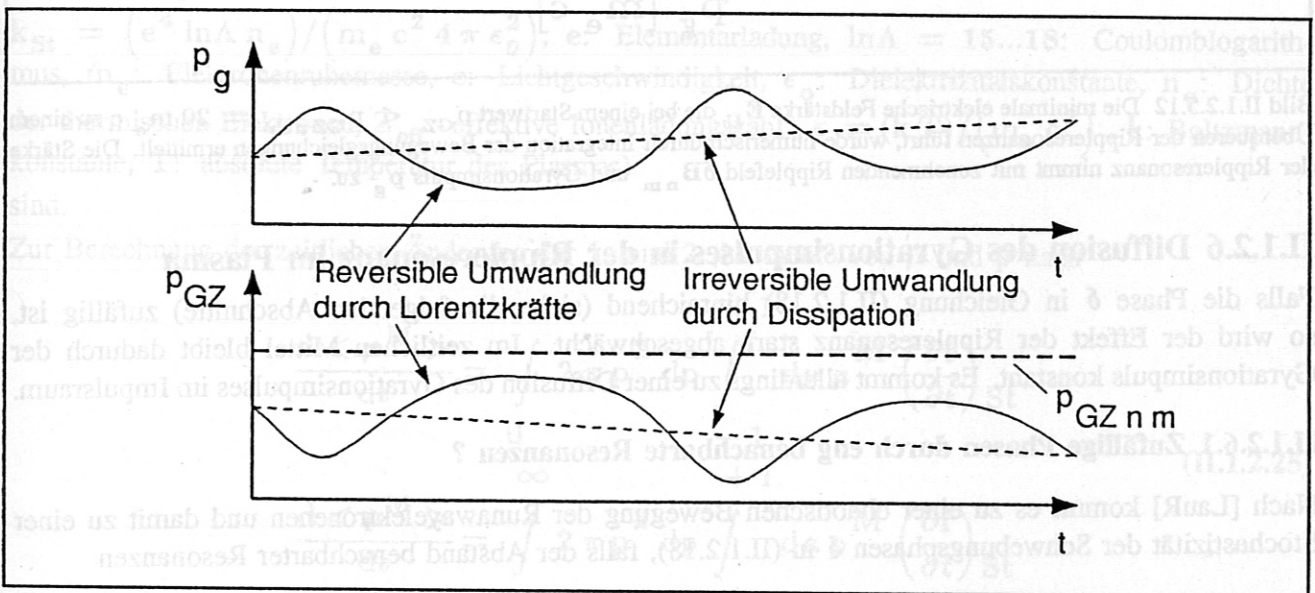


Bild II.1.2.4.11 Auf der Zeitskala der Schwebungsperiode findet aufgrund von Lorentzkräften eine periodische Umwandlung zwischen Impuls des Gyrationenzentrums  $p_{\text{GZ}}$  und Gyrationimpuls  $p_g$  statt. Die Dissipation durch Emission von Synchrotronstrahlung führt allerdings zu einer irreversiblen Umwandlung von  $p_{\text{GZ}}$  in  $p_g$ . Im hier gezeigten Fall  $p_{\text{GZ}} < p_{\text{GZnm}}$  wird  $p_g$  erhöht. Für  $p_{\text{GZ}} > p_{\text{GZnm}}$  wird  $p_g$  erniedrigt.

### II.1.2.5 Notwendige Feldstärke für das Überqueren einer Rippleresonanz

Ist das elektrische Feld genügend groß, so reicht die von  $\delta B_{nm}$  vermittelte Umwandlung von  $p_{\text{GZ}}$  in  $p_g$  nicht aus, um die Senkrechtenergie der Runawayelektronen hinreichend schnell zu erhöhen, so daß sie aufgrund erhöhter Synchrotronstrahlungsverluste nicht mehr weiter beschleunigt werden. Für typische Pitchwinkel von 0,15 rad sind zum Überqueren von schwachen Resonanzen ( $\delta B_{nm} \approx 10^{-6}$  T) schon elektrische Feldstärken von 1 V/m erforderlich (Bild II.1.2.5.12), was eine Größenordnung über dem tatsächlich in Tokamaks vorkommenden Wert von 0,1 V/m liegt. Die Runawayelektronen dürften demnach nie relativistische Energien erreichen, da sie schon in sehr schwachen Resonanzen (hohe toroidale Harmonische n des magnetischen Ripples, also niedrige Resonanzenergie) "gefangen"

werden. Der Effekt der Rippleresonanz wird allerdings durch die vorhandenen schwachen Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen abgeschwächt (siehe Abschnitt II.1.2.6).

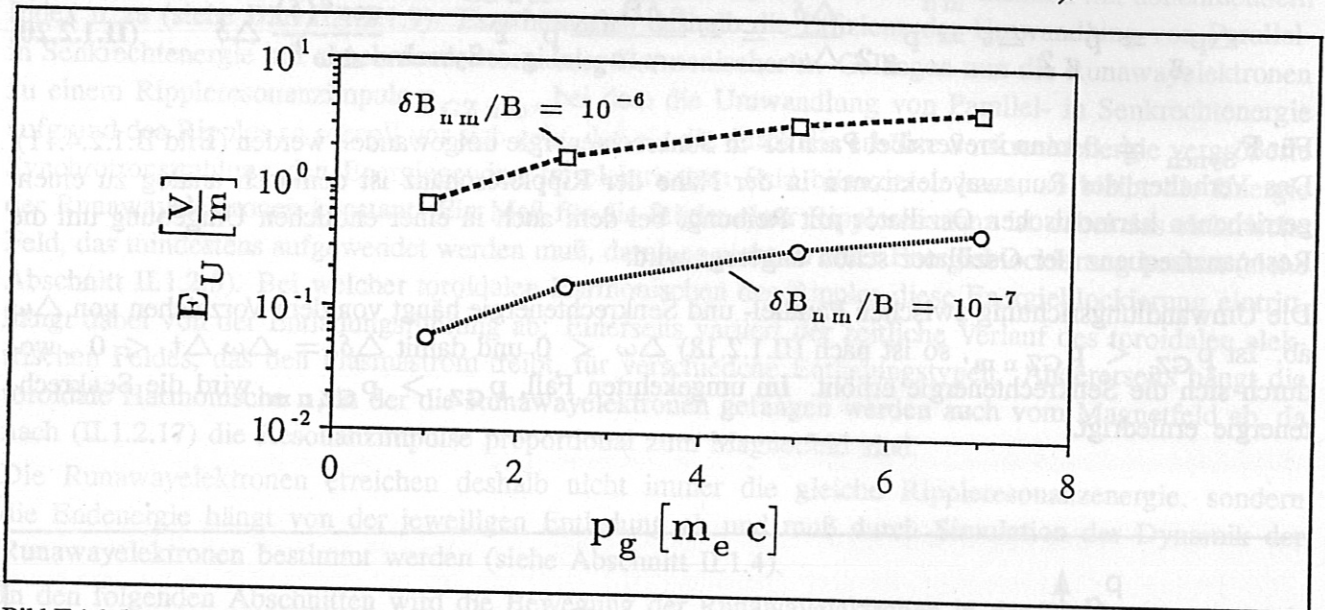


Bild II.1.2.5.12 Die minimale elektrische Feldstärke  $E_U$  die bei einem Startwert  $p_{GZ} < p_{GZnm} = 20 m_e c$  zu einem Überqueren der Rippleresonanzen führt, wurde numerisch durch Integration der Bewegungsgleichungen ermittelt. Die Stärke der Rippleresonanz nimmt mit zunehmenden Ripplefeld  $\delta B_{nm}$  und Gyrationimpuls  $p_g$  zu.

### II.1.2.6 Diffusion des Gyrationimpulses in der Rippleresonanz im Plasma

Falls die Phase  $\delta$  in Gleichung (II.1.2.18) hinreichend (siehe die folgenden Abschnitte) zufällig ist, so wird der Effekt der Rippleresonanz stark abgeschwächt. Im zeitlichen Mittel bleibt dadurch der Gyrationimpuls konstant. Es kommt allerdings zu einer Diffusion des Gyrationimpulses im Impulsraum.

#### II.1.2.6.1 Zufällige Phasen durch eng benachbarte Resonanzen ?

Nach [LauR] kommt es zu einer chaotischen Bewegung der Runawayelektronen und damit zu einer Stochastizität der Schwebungsphasen  $\delta$  in (II.1.2.18), falls der Abstand benachbarter Resonanzen

$$\delta p_{GZ n 0,1} = p_{GZ n 0} - p_{GZ n 1} \quad (\text{II.1.2.21})$$

(gleiche toroidale Harmonische  $n$ , benachbarte poloidale Harmonische  $m = 0, 1$ ) kleiner als die Summe der Breiten der benachbarten Resonanzen ist:

$$0,7 * \delta p_{GZ n 0,1} \leq \Delta p_{GZ}(n, 0) + \Delta p_{GZ}(n, 1) \quad (\text{II.1.2.22})$$

mit

$$\Delta p_{GZ}(n, m) = \sqrt{\frac{\delta B_{nm}}{B} p_{GZ n m} p_g} \quad (\text{II.1.2.23})$$

als Breite der Resonanz, innerhalb der eine ständige Umwandlung von Parallel- in Senkrechtenergie stattfindet (die hier um den Faktor  $\sqrt{2}$  geringere Breite  $\Delta p_{GZ}(n, m)$  gegenüber [LauR] rührt von der unterschiedlichen Berechnung der Fourierkoeffizienten des Ripplefelds  $\delta B_{nm}$  her (siehe Gleichungen (II.1.2.4), (II.1.2.5)). Die Bedingung (II.1.2.22) ist jedoch weder bei ASDEX, noch bei ASDEX Upgrade erfüllt, da dort aufgrund des geringen Ripples die Resonanzbreiten  $\Delta p_{GZ}(n, m)$  schmaler als die Resonanzabstände sind. Aufgrund einer chaotischen Bewegung zwischen zwei benachbarten Resonanzen kommt es also bei ASDEX und ASDEX Upgrade zu keiner Zufälligkeit der Phasen  $\delta$ .

Die Theorie von Laurent und Rax ist deshalb an diesen Tokamaks nicht anwendbar.



### II.1.2.6.2 Diffusion des Gyrationimpulses durch Stöße

Die Runawayelektronen erfahren im Plasma Stöße, die jedoch bisher in der Bewegungsgleichung und auch in [LauR] (II.1.2.18) noch nicht berücksichtigt wurden. In der Folge wird das Resultat der Stöße, die Pitchwinkel- und Impulsbetragdiffusion, in die Bewegungsgleichung mitaufgenommen:

Es werden dazu Monte-Carlo-Operatoren [Booz] für  $\mu$ , den Cosinus des Pitchwinkels und den Impulsbetrag  $p = \sqrt{p_{GZ}^2 + p_g^2}$  verwendet, die im Zeitverhalten der 1. und 2. Momente äquivalent zu dem Fokker-Planck-Stoßterm für hochrelativistische Elektronen [CoHa]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{St} = D_{\vartheta\vartheta St} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left\{ k_{St} \left[ 1 + \left(\frac{m_e c}{p}\right)^2 \right] f + \frac{\partial (k_{St} m_e c \epsilon f)}{\partial p} \right\} \quad (p \gg m_e c) \quad (\text{II.1.2.24})$$

$$D_{\vartheta\vartheta St} = \left[ (Z_{eff} + 1) k_{St} m_e c \sqrt{p^2 + (m_e c)^2} \right] / (2 p^3),$$

$k_{St} = (e^4 \ln \Lambda n_e) / (m_e c^2 4 \pi \epsilon_0^2)$ ,  $e$ : Elementarladung,  $\ln \Lambda = 15 \dots 18$ : Coulomblogarithmus,  $m_e$ : Elektronenruhemasse,  $c$ : Lichtgeschwindigkeit,  $\epsilon_0$ : Dielektrizitätskonstante,  $n_e$ : Dichte der thermischen Elektronen,  $Z_{eff}$ : effektive Ionenladungszahl<sup>4</sup>,  $\epsilon = (k T) / (m_e c^2)$ ,  $k$ : Boltzmannkonstante,  $T$ : absolute Temperatur des Plasmas

sind.

Zur Berechnung der zeitlichen Änderung der 1. und 2. Momente von  $\mu$  und  $p$  nach

$$\frac{d \langle \mu^M \rangle}{dt} = \int_0^\infty 2 \pi p^2 dp \int_{-1}^{+1} d\mu \mu^M \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{St} \quad (\text{II.1.2.25})$$

$$\frac{d \langle p^M \rangle}{dt} = \int_0^\infty 2 \pi p^2 dp \int_{-1}^{+1} d\mu p^M \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{St}$$

( $M$ : Ordnung der Momente)

für ein Einzelteilchen, das mit den Plasmateilchen stößt, wird die Verteilungsdichtefunktion für ein Teilchen, das zur Zeit  $t$  die Impulskoordinaten  $p(t)$ ,  $\mu(t)$  besitzt,

$$f(p, \mu, t) = \frac{\delta[(p - p(t)) / (m_e c)] \delta[\mu - \mu(t)]}{2 \pi p^2} \quad (\text{II.1.2.26})$$

verwendet.

Die Monte-Carlo-Operatoren [Booz]

$$\begin{aligned} \mu(t + \Delta t) &= \mu(t) \left( 1 - 2 D_{\vartheta\vartheta St} \Delta t \right) \pm \sqrt{\left[ 1 - \mu^2(t) \right] 2 D_{\vartheta\vartheta St} \Delta t} \\ p(t + \Delta t) &= p(t) + k_{St} \left\{ - \left[ 1 + \left(\frac{m_e c}{p}\right)^2 \right] + \frac{2 \epsilon m_e c}{p} \right\} \Delta t \pm \sqrt{2 k_{St} \epsilon m_e c \Delta t} \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.27})$$

<sup>4</sup> Die effektive Ionenladungszahl  $Z_{eff} = \sum n_i Z_i^2 / n_e$  ( $n_i$ : Dichte,  $Z_i$ : Ladung der Ionensorte  $i$  im Plasma) ist zu verwenden, wenn die Runawayelektronen in einem Plasma mit verschiedenen Ionensorten stoßen.

(die Vorzeichen  $\pm$  treten gleichwahrscheinlich auf)

sind im Zeitverhalten der Mittelwerte,  $d \langle \mu \rangle / dt$ ,  $d \langle p \rangle / dt$  und der Varianzen  $(d \langle \mu^2 \rangle / dt) - (d \langle \mu \rangle^2 / dt)$ ,  $(d \langle p^2 \rangle / dt) - (d \langle p \rangle^2 / dt)$  äquivalent zu dem Fokker-Planck-Stoßterm (II.1.2.24).

Für die Simulation der häufigen Kleinwinkelstöße muß der Zeitschritt  $\Delta t$  in Gleichung (II.1.2.27) so gewählt werden, daß  $2 D_{\vartheta\vartheta St} \Delta t \ll 1$  und  $2 k_{St} \epsilon m_e c \Delta t \ll 1$  erfüllt ist [Booz]. Die Simulation der Teilchendynamik erfolgt nun in zwei Teilschritten, wobei zunächst die Änderungen von  $p_{GZ}$ ,  $p_g$  und  $\delta$  nach Gleichung (II.1.2.18) und danach die Änderungen von  $p_{GZ}$  und  $p_g$  nach Gleichung (II.1.2.27) berechnet werden.

Die kohärente Bewegung in der Rippleresonanz wird hauptsächlich durch die Pitchwinkelstreuung gestört, da diese zu dem größten stochastischen Anteil in  $p_{GZ}$  beiträgt. Die notwendige elektrische Feldstärke zum Überqueren einer Rippleresonanz erniedrigt sich deshalb bei Berücksichtigung der Stöße sehr stark gegenüber dem Wert, der sich bei Vernachlässigung der Stöße ergab (Bild II.1.2.6.13).

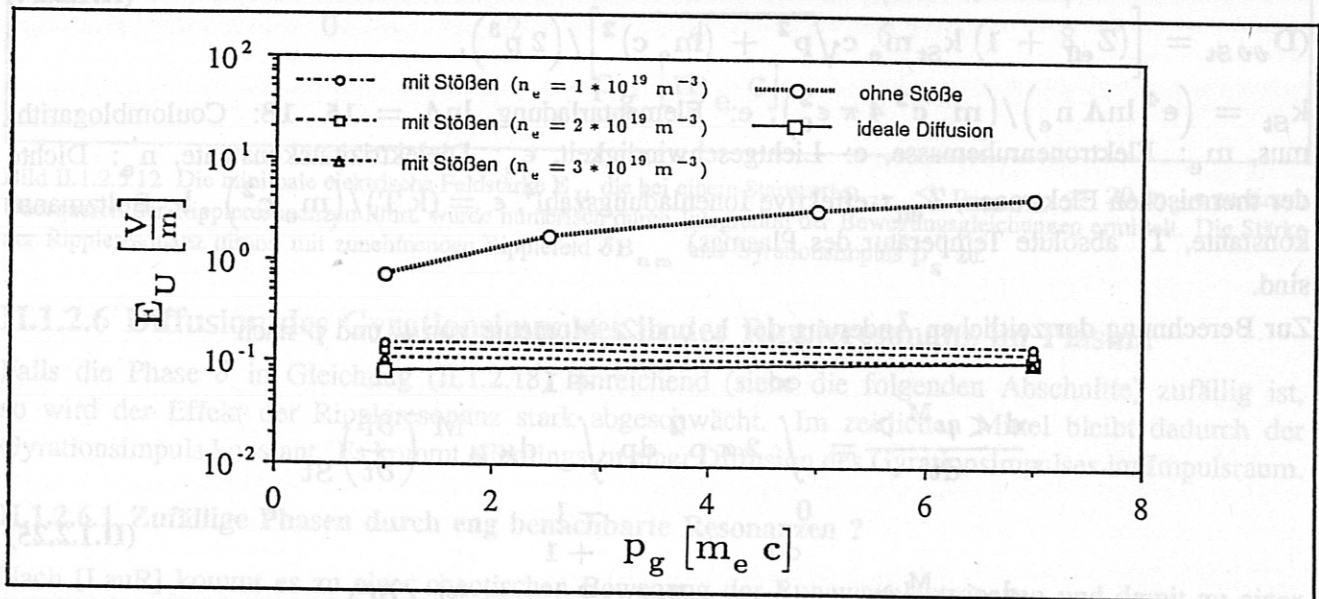


Bild II.1.2.6.13 Die minimale elektrische Feldstärke  $E_U$ , bei der ein Überqueren einer Rippleresonanz ( $\delta B_{nm}/B = 10^{-6}$ ) stattfindet, erniedrigt sich bei Berücksichtigung der Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen für verschiedene Plasmadichten ( $1 \cdot 10^{19} m^{-3}$  bis  $3 \cdot 10^{19} m^{-3}$ ) auf etwa den gleichen Wert von 0,1 V/m. Dieselbe niedrige Feldstärke  $E_U$  ergibt sich auch durch Simulation der Dynamik mit dem analytischen Diffusionskoeffizienten für die Gyrationimpulse, der in Abschnitt (II.1.2.6.3) hergeleitet wird.

Die mit dem analytischen Diffusionskoeffizienten (siehe Abschnitt II.1.2.6.3) durch Simulation der Dynamik erhaltene Feldstärke für das Überqueren der Rippleresonanz stimmt mit den durch Simulation der Stöße erhaltenen Werten gut überein. Die Annahme der zufälligen Phasen  $\delta$  für die Ableitung des analytischen Diffusionskoeffizienten in Abschnitt II.1.2.6.3 ist also durch die hinreichend oft erfolgenden Stöße gerechtfertigt.

### II.1.2.6.3 Analytischer Diffusionskoeffizient für den Gyrationimpuls in der Rippleresonanz im Plasma

Eine vereinfachte Beschreibung der Bewegung der Runawayelektronen im Bereich der Rippleresonanz unter Berücksichtigung der Stöße mit den Plasmateilchen ergibt sich durch die Einführung eines Diffusionskoeffizienten für den Gyrationimpuls im Bereich der Rippleresonanz.

Für die Ableitung des Diffusionskoeffizienten werden zufällige Schwebungsphasen vorausgesetzt. Diese geforderte Zufälligkeit der Schwebungsphasen kommt dabei durch die hinreichend oft erfolgenden Stöße zustande (siehe Abschnitt II.1.2.6.2).



Zur Ableitung des Diffusionskoeffizienten werden die Bewegungsgleichungen (II.1.2.18) zunächst vereinfacht: Falls man als maximale Bremskraft durch Synchrotronstrahlung,  $F_{\text{Synch}}$ , die elektrische Kraft  $e E$  ansetzt, so können  $F_{\text{Synch}}$  und  $e E$  für  $\dot{p}_g$  in (II.1.2.18) gegen die Lorentzkraft vernachlässigt werden, falls

$$F_{\text{Synch}} \frac{p_g}{p} < e E \frac{p_g}{p} \ll e \frac{p_{\text{GZ}}}{\gamma m_e} \frac{\delta B_{nm}}{4} \quad (\text{II.1.2.28})$$

gilt. Dies ist für die typischen Werte  $E = 0,1 \text{ V/m}$  und  $p_g/p \approx 0,1$  (aus kinetischer Theorie) für  $\delta B_{nm} \gg 10^{-10} \text{ T}$  erfüllt. Für die Gültigkeit der folgenden Rechnung sind also mindestens Störmagnetfelder von  $\delta B_{nm} > 10^{-9} \text{ T}$  notwendig.

Mit der Näherung (II.1.2.28) und der Berücksichtigung der zufälligen Phasen durch Stöße erhält man aus (II.1.2.18) die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\text{GZ}} &= -e \frac{p_g}{\gamma m_e} \frac{\delta B_{nm}}{4} \cos(\delta) \\ \dot{p}_g &= e \frac{p_{\text{GZ}}}{\gamma m_e} \frac{\delta B_{nm}}{4} \cos(\delta) \\ \dot{\delta} &= k_{nm} \frac{p_{\text{GZ}}}{\gamma m_e} - \frac{e B}{\gamma m_e} + (\dot{\delta})_{\text{St}} \end{aligned} \quad (\text{II.1.2.29})$$

Aufgrund von  $(\dot{\delta})_{\text{St}}$  geht nun die Kohärenz der Schwebungsphase  $\delta$  verloren. Im zeitlichen Mittel ändert sich deshalb der Gyrationimpuls im Gegensatz zu Abschnitt II.1.2.4.2 nicht mehr:

$$\langle \dot{p}_g \rangle_t = 0 \quad (\text{II.1.2.30})$$

Aufgrund des stochastischen Charakters von  $\dot{p}_g$  kommt es zu einer Diffusion von  $p_g$ , die durch den Diffusionskoeffizient (LauR)

$$D_{p_g p_g} = \lim_{dt \rightarrow \infty} \left[ \left\langle \frac{dp_g(dt) dp_g(dt)}{dt} \right\rangle_{\delta(0)} \right] \Delta p_{\text{GZ}} \quad (\text{II.1.2.31})$$

(dt: Zeitintervall,  $\langle \rangle_{\delta(0)}$ : Mittelung über die zufälligen Schwebungsphasen  $\delta(0)$  bei  $dt = 0$ ,  $[ ]_{\Delta p_{\text{GZ}}}$ : Mittelung über die Resonanzbreite  $\Delta p_{\text{GZ}}$ , siehe Gleichung (II.1.2.23))

beschrieben wird.

Die Mittelung über die Längsimpulse  $p_{\text{GZ}}$  mit  $|p_{\text{GZ}} - p_{\text{GZ}_{nm}}| < \Delta p_{\text{GZ}}$  ist nötig, da nicht nur für  $p_{\text{GZ}} = p_{\text{GZ}_{nm}}$  Parallel- in Senkrechtenergie umgewandelt wird, sondern auch schon in einer endlich großen Impulsumgebung um  $p_{\text{GZ}_{nm}}$  (siehe Abschnitt II.1.2.4).

Der über die Resonanzbreite gemittelte Diffusionskoeffizient ist dann

$$D_{p_g p_g} = \begin{cases} \frac{\pi}{32} \frac{e B}{\gamma m_e} \left( \frac{\delta B_{nm}}{B} \right)^2 \frac{p_{\text{GZ}_{nm}}^3}{\Delta p_{\text{GZ}}}, & \text{falls } |p_{\text{GZ}} - p_{\text{GZ}_{nm}}| < \Delta p_{\text{GZ}} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{II.1.2.32})$$

bzw. mit der Resonanzbreite nach Gleichung (II.1.2.23),

$$\Delta p_{\text{GZ}}(n, m) = \sqrt{\frac{\delta B_{nm}}{B} p_{\text{GZ}} p_g} \quad (\text{II.1.2.33})$$

$$D_{p_g p_g} = \begin{cases} \frac{\pi}{32} \frac{eB}{\gamma m_e} \left( \frac{\delta B_{nm}}{B} \right)^{3/2} \frac{p_{GZnm}^{5/2}}{p_g^{1/2}}, & \text{falls } |p_{GZ} - p_{GZnm}| < \Delta p_{GZ} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{II.1.2.34})$$

Nach der Theorie von [LauR] kommt es aufgrund des kleinen Ripples bei den Tokamaks ASDEX und ASDEX Upgrade zu keiner Umwandlung von Parallel- in Senkrechtenergie. Die Runawayelektronen müßten demnach also eine maximale Energie von etwa 65 MeV für die Großkreisbewegung erreichen, was nicht mit den beobachteten Endenergien der Runawayelektronen übereinstimmt. Berücksichtigt man allerdings die Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen, so wird zwar nicht die starke Umwandlungseffizienz von Parallel- in Senkrechtenergie wie bei der ungestörten Bewegung erreicht, sondern nur eine Erhöhung des Gyrationimpulses durch Diffusion. Die hierdurch mögliche Konstanthaltung der Energie der Runawayelektronen bei den Rippleresonanzenergien wird im nächsten Abschnitt dargestellt.

### II.1.3 "Energieblockierung" von Runawayelektronen

Die Bremskraft durch Emission von Synchrotronstrahlung steigt mit zunehmender Energie der Runawayelektronen und zunehmendem Pitchwinkel an (Gleichung (II.1.2.8)). Die maximal mögliche Energie für die Runawayelektronen ergibt sich deshalb aus der Kraftbilanz zwischen beschleunigender elektrischer Kraft und Bremskraft durch Synchrotronstrahlung (Gleichung (II.1.2.8)) bei Pitchwinkel 0. Für eine typische Umfangsspannung von 1 V ergibt sich am Tokamak ASDEX Upgrade eine maximale Energie von etwa 65 MeV. Für Energien der Runawayelektronen, die viel kleiner als diese maximale Energie sind, ist die Bremskraft durch Synchrotronstrahlung bei Pitchwinkel 0 vernachlässigbar klein und die beschleunigende elektrische Kraft überwiegt gegenüber der Bremskraft durch Synchrotronstrahlung (siehe Abschnitt II.1.3.1). Bei diesen niedrigen Energien der Runawayelektronen kommt es zu einer "Energieblockierung" der Runawayelektronen, falls durch die Erhöhung des Pitchwinkels die Synchrotronverluste erhöht werden und der Energiegewinn durch das elektrische Feld bilanziert werden kann, so daß sich die Energie der Runawayelektronen zeitlich nicht mehr ändert, obwohl hier bei Pitchwinkel 0 die elektrische Kraft noch größer als die Bremskraft durch Synchrotronstrahlung ist. Die dazu notwendige Erhöhung des Pitchwinkels ist allein durch Stöße mit dem Plasma nicht erreichbar (siehe Abschnitt II.1.3.1), jedoch durch die starke Diffusion der Gyrationimpulse im Bereich der Rippleresonanz (siehe Abschnitt II.1.3.2).

#### II.1.3.1 Bewegung von Runawayelektronen unter Berücksichtigung von Stößen

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen und der Einfluß des Energieverlusts der Runawayelektronen durch Emission von Synchrotronstrahlung auf ihre Bewegung untersucht.

##### II.1.3.1.1 Relativistische Fokker-Planck-Gleichung

Runawayelektronen bewegen sich im Magnetfeld des Tokamak auf Driftflächen (siehe Abschnitt II.1.1), die den magnetischen Flußflächen für nicht zu große Energien der Runawayelektronen sehr ähnlich sind (siehe Bild II.1.1.3.6). Wegen der hohen Beweglichkeit der Plasmateilchen entlang den Magnetfeldlinien, ist auf den magnetischen Flußflächen die Plasmadichte konstant. Der Einfluß der Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen kann deshalb durch eine ortsunabhängige Fokker-Planck-Gleichung erfolgen. Da die Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums praktisch in Richtung des toroidalen elektrischen Feldes  $\vec{E}_{tor}$  weist (siehe Abschnitt II.1.1.2) und die Gyrationbewegung senkrecht zur Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums erfolgt (siehe Abschnitt II.1.1.1) gibt es nur die Vorzugsrichtung des elektrischen Feldes. Da die Phase der Gyrationbewegung der Runawayelektronen im weiteren nicht von Bedeutung



ist, wird das Magnetfeld des Tokamak in der Fokker-Planck-Gleichung nicht berücksichtigt. Der Impuls  $\vec{p}$  der Runawayelektronen ist damit nur durch den Pitchwinkel  $\vartheta = \angle(\vec{p}, \vec{B}) = \angle(\vec{p}, \vec{E})$  und seinen Betrag  $p$  festgelegt. Der Azimutwinkel, die Gyrationphase, wird also nicht mitgeführt. Die bei der Gyrationbewegung und bei der toroidalen Bewegung auftretende Beschleunigung führt bei hochrelativistischen Elektronen zu einem starken Energieverlust durch die Emission von Synchrotronstrahlung [Schw]. Um den Einfluß dieser neben der Abbremsung durch Stöße zusätzlichen Abbremsung auf die Runawayelektronen zu untersuchen, wird die ortsunabhängige Fokker-Planck-Gleichung für Runawayelektronen [CoHa] um die Bremskraft  $\vec{F}_{\text{Synch}}$  durch Synchrotronstrahlung erweitert:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} * \left[ \left( \vec{F}_e + \vec{F}_R + \vec{F}_{\text{Synch}} \right) f \right] = 0 \quad (\text{II.1.3.1})$$

(f: Verteilungsdichtefunktion der Runawayelektronen, t: Zeit)

Mit dem normierten Impuls  $q = p/(m_e c)$  ( $m_e$ : Elektronenruhemasse,  $c$ : Lichtgeschwindigkeit) und  $\mu = \cos(\vartheta)$  ist die elektrische Kraft

$$\vec{F}_e = e E \left( \mu \vec{e}_q - \sqrt{1 - \mu^2} \vec{e}_\vartheta \right) \quad (\text{II.1.3.2})$$

( $\vec{e}_q$ : Einheitsvektor in Richtung von  $q$ ,  $\vec{e}_\vartheta$ : Einheitsvektor in Richtung von  $\vartheta$ ,  $e$ : Elementarladung,  $E$ : elektrisches Feld).

Die Reibungskraft durch Stöße mit den Plasmateilchen ist

$$\vec{F}_R = k_{\text{St}} \left[ - \left( 1 + \frac{1}{q^2} \right) \vec{e}_q + \frac{\sqrt{q^2 + 1}}{2q^2} (Z_{\text{eff}} + 1) \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \vec{e}_\vartheta \right] \quad (\text{II.1.3.3})$$

$$k_{\text{St}} = \frac{e^4 n_e \ln \Lambda}{m_e c^2 4 \pi \epsilon_0^2}$$

( $Z_{\text{eff}}$ : effektive Ionenladungszahl des Plasmas,  $n_e$ : Dichte der thermischen Elektronen,  $\ln \Lambda \approx 15 \dots 18$ : Coulomblogarithmus,  $\epsilon_0$ : Dielektrizitätskonstante)

Die Bremskraft durch Synchrotronstrahlung ist mit Gleichung (II.1.2.8)

$$\vec{F}_{\text{Synch}} = - \frac{2}{3} r_e m_e c^2 (q^2 + 1)^2 \left\langle \frac{1}{R_{\text{Kr}}^2} \right\rangle_t (q, \mu) \vec{e}_q \quad (\text{II.1.3.4})$$

mit

$$\left\langle \frac{1}{R_{\text{Kr}}^2} \right\rangle_t (q, \mu) = \frac{1}{R^2} \left[ \mu^6 + \mu^2 (1 - \mu^2)^2 + \mu^4 (1 - \mu^2) \left( \frac{5}{2} + \frac{r_G^2}{8 R^2} \right) \right] + \frac{1}{r_G^2} (1 - \mu^2)^2 \quad (\text{II.1.3.5})$$

( $r_G$ : Gyrationradius,  $R$ : großer Plasmaradius)

### II.1.3.1.2 "Energieblockierung" der Runawayelektronen durch Stöße mit den Plasmateilchen?

Die Bremskraft durch Emission von Synchrotronstrahlung,  $F_{\text{Synch}}$  nimmt mit zunehmendem Pitchwinkel zu, da dadurch der Krümmungsradius der Bahn abnimmt. Es stellt sich nun die Frage, ob nicht allein durch Stöße der Runawayelektronen der mittlere Pitchwinkel  $\bar{\vartheta}$  soweit erhöht wird, daß  $F_{\text{Synch}}$  die elektrische Kraft bilanzieren kann und die Runawayelektronen ihre Energie zeitlich nicht mehr ändern.

Zum Verständnis der Dynamik der Runawayelektronen müssen zwei konkurrierende Prozesse unterschieden werden: Isotropisierung der Impulsrichtung durch Stöße, sowie Anisotropisierung der Impulsrichtung durch die elektrische Kraft. Der Einfluß beider Prozesse wird durch die Fokker-Planck-Gleichung (II.1.3.1) beschrieben. Vereinfacht soll hier zunächst, ohne die Form der Verteilungsfunktion zu berücksichtigen, nur eine Abschätzung der zu erwartenden Effekte erfolgen:

Als Maß für die Isotropisierung wird

$$\frac{d(p_{\perp}^2)}{dt} := p^2 D_{\vartheta\vartheta \text{ St}} \quad (\text{II.1.3.6})$$

( $D_{\vartheta\vartheta \text{ St}} = \left[ (Z_{\text{eff}} + 1) k_{\text{St}} m_e c \sqrt{p^2 + (m_e c)^2} \right] / (2 p^3)$ : Diffusionskoeffizient für die Pitchwinkel durch Stöße, der sich aus Gleichung (II.1.3.1) mit (II.1.3.3) ergibt)

und als Maß für die Anisotropisierung wird bei vernachlässigter Bremskraft durch Synchrotronstrahlung

$$\frac{d(p_{\parallel}^2)}{dt} := 2 \left( \vec{F}_e + \vec{F}_R \right) * \vec{p} = 2 \left[ e E \mu - k_{\text{St}} \left( 1 + \left( \frac{m_e c}{p} \right)^2 \right) \right] p \quad (\text{II.1.3.7})$$

verwendet.

Die "Energieblockierung" ist nur dann möglich, falls die Isotropisierung gegenüber der maximalen Anisotropisierung ( $\mu = 1$  in Gleichung (II.1.3.7)) überwiegt,

$$\frac{d(p_{\perp}^2)}{dt} > \left[ \frac{d(p_{\parallel}^2)}{dt} \right]_{\text{Max}} \quad (\text{II.1.3.8})$$

da dann die Runawayelektronen schnell genug aus dem Gebiet der Beschleunigung in das Gebiet der Abbremsung gelangen können und dadurch die erhöhte Energie sofort wieder abbauen.

Aus der Bedingung (II.1.3.8) folgt für die Größe der elektrischen Kraft:

$$\frac{e E}{k_{\text{St}}} - 1 < \frac{\sqrt{p^2 + (m_e c)^2}}{4 p^2} (Z_{\text{eff}} + 1) m_e c = \frac{(Z_{\text{eff}} + 1) m_e c}{4 p} < 1 \quad \left( p \gg m_e c \right) \quad (\text{II.1.3.9})$$

Diese Bedingung ist erfüllt für  $e E \approx k_{\text{St}}$ , wenn also die elektrische Kraft ungefähr genauso groß ist wie die Reibungskraft, und die Runawayelektronen nur noch marginal existieren können.

Da für die existierenden Runawayelektronen im Plasma stets  $e E > k_{\text{St}}$  gilt, besitzen die Runawayelektronen bei Wechselwirkung mit den Plasmateilchen bei jeder Energie eine anisotrope Impulsverteilung, und erfahren keine Energieblockierung.

Die zeitunabhängige Verteilungsfunktion für  $e E > k_{\text{St}}$ , die sich aus der Lösung der zeitunabhängigen Fokker-Planck-Gleichung ergibt ( $\partial f / \partial t = 0$  in Gleichung (II.1.3.1)), wurde numerisch gelöst (siehe Anhang A). Es wurde in der Bahnkrümmung nur die Gyrationbewegung berücksichtigt ( $R = \infty$  in Gleichung (II.1.2.11)), da sonst nur die zeitunabhängige Lösung existiert, bei der die Runawayelektronen ihre maximale Energie für Pitchwinkel  $\vartheta = 0$  erreichen, was nicht der hier zu untersuchenden Frage



nach der möglichen Energieblockierung bei kleineren Energien entspricht. Die Runawayelektronen besitzen dann wegen der geringen Isotropisierung durch Stöße hauptsächlich kleine Pitchwinkel, und werden deshalb wegen der dann schwachen Abbremsung durch Synchrotronstrahlung im elektrischen Feld weiterbeschleunigt (Bild II.1.3.1.14) und nicht in ihrer Energie blockiert.

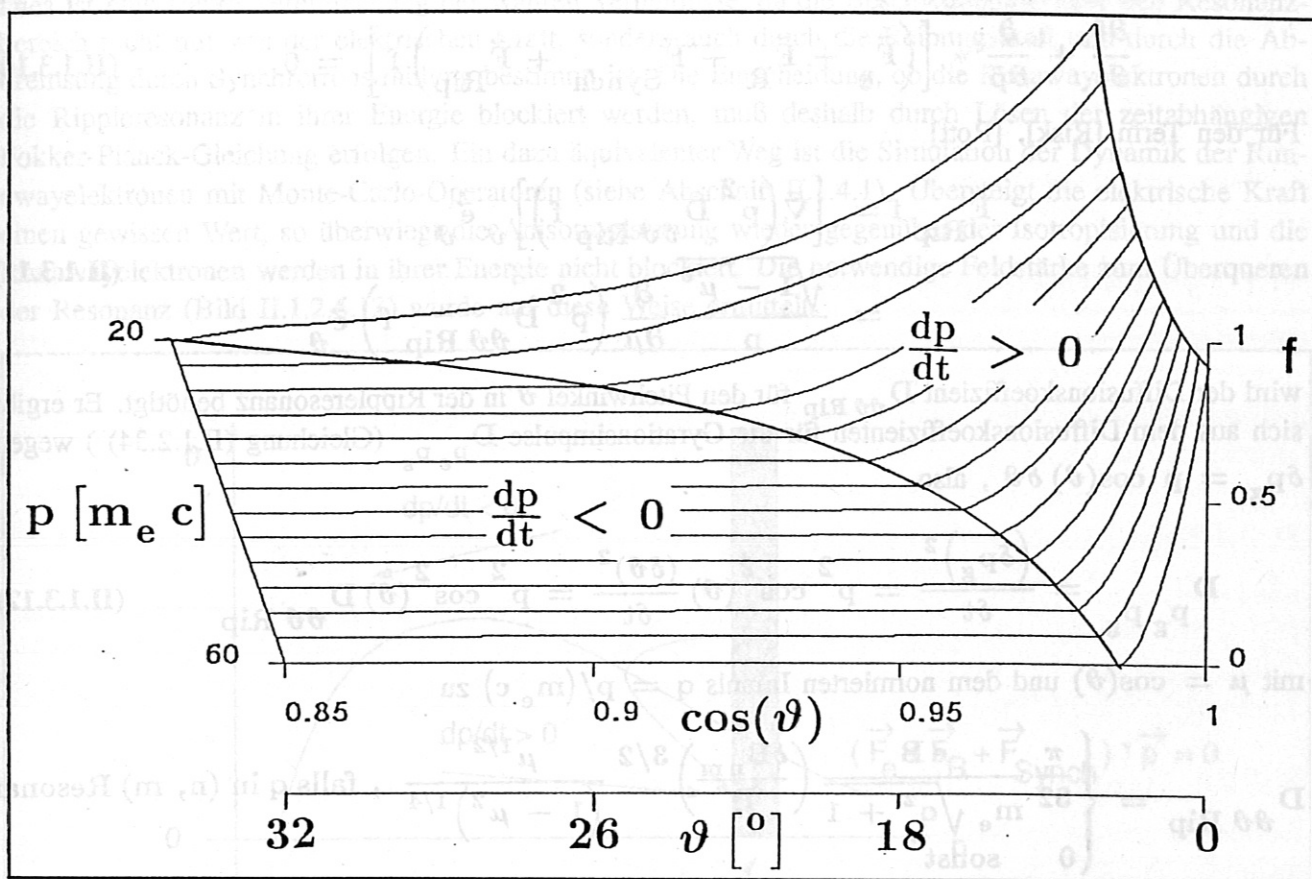


Bild II.1.3.1.14 Die hier in einem Ausschnitt des Impulsraums ( $p$ : Impulsbetrag,  $\vartheta$ : Pitchwinkel) dargestellte stationäre Verteilungsdichtefunktion  $f$  der Runawayelektronen wurde numerisch berechnet, wobei in der Bahnkrümmung nur die Gyrationbewegung berücksichtigt wurde ( $R = \infty$  in Gleichung (II.1.2.11)). Man erkennt, daß die Runawayelektronen hauptsächlich kleine Pitchwinkel besitzen. Sie befinden sich damit in dem Gebiet des Impulsraums, in dem die elektrische Kraft die Bremskraft durch Synchrotronstrahlung überwiegt und werden deshalb ständig weiterbeschleunigt ( $dp/dt > 0$ ) und können wegen der fehlenden Bahnkrümmung ( $R = \infty$ ) für den Pitchwinkel  $\vartheta = 0$  auch zu unendlich hohen Energien beschleunigt werden. Die Isotropisierung der Impulse der Runawayelektronen durch Stöße ist also nicht ausreichend, um die Runawayelektronen in das Gebiet zu bringen, in dem die Abbremsung durch Synchrotronstrahlung gegenüber der Beschleunigung durch das elektrische Feld überwiegt ( $dp/dt < 0$ ) (berechnet für die typischen Plasmaparameter  $E = 0,1 \text{ V/m}$ ,  $B = 2 \text{ T}$ ,  $n_e = 3 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ,  $\ln \Lambda = 18$ ,  $Z_{\text{eff}} = 1,6$ ).

### II.1.3.2 Bewegung der Runawayelektronen unter Berücksichtigung von Stößen und Rippleresonanz

Die exakte Beschreibung der Bewegung der Runawayelektronen im Plasma und in den Rippleresonanzen ist durch eine zeitabhängige Fokker-Planck-Gleichung möglich (Abschnitt II.1.3.2.1). Falls die Isotropisierung durch die Diffusion im begrenzten Gebiet der Rippleresonanz hinreichend groß ist (Abschnitt II.1.3.2.2), erreichen die Runawayelektronen einen stationären Zustand (Abschnitt II.1.3.2.3), in dem sie nicht weiter beschleunigt werden, im Gegensatz zum Verhalten der Runawayelektronen ohne Berücksichtigung der Rippleresonanz (Abschnitt II.1.3.1.2).

### II.1.3.2.1 Fokker-Planck-Gleichung mit Diffusion in den Rippleresonanzen

Um die Dynamik der Runawayelektronen unter Berücksichtigung der Stöße mit den Plasmateilchen, des Energieverlusts durch Synchrotronstrahlung und der Rippleresonanzen zu beschreiben, wird die aus Abschnitt II.1.3.1.1 bekannte Fokker-Planck-Gleichung (II.1.3.1) um den Term  $\vec{F}_{\text{Rip}} f$  erweitert, der die Rippleresonanzeffekte beschreibt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}} * \left[ \left( \vec{F}_e + \vec{F}_R + \vec{F}_{\text{Synch}} + \vec{F}_{\text{Rip}} \right) f \right] = 0 \quad (\text{II.1.3.10})$$

Für den Term [Risk], [Rott]

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Rip}} f &= \left[ \vec{\nabla} \left( p^2 D_{\vartheta\vartheta \text{ Rip}} f \right) \right]_{\vartheta} \vec{e}_{\vartheta} \\ &= \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{p} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( p^2 D_{\vartheta\vartheta \text{ Rip}} f \right) \vec{e}_{\vartheta} \end{aligned} \quad (\text{II.1.3.11})$$

wird der Diffusionskoeffizient  $D_{\vartheta\vartheta \text{ Rip}}$  für den Pitchwinkel  $\vartheta$  in der Rippleresonanz benötigt. Er ergibt sich aus dem Diffusionskoeffizienten für die Gyrationimpulse  $D_{p_g p_g}$  (Gleichung (II.1.2.34)) wegen  $\delta p_g = p \cos(\vartheta) \delta \vartheta$ , also

$$D_{p_g p_g} = \frac{(\delta p_g)^2}{\delta t} = p^2 \cos^2(\vartheta) \frac{(\delta \vartheta)^2}{\delta t} = p^2 \cos^2(\vartheta) D_{\vartheta\vartheta \text{ Rip}} \quad (\text{II.1.3.12})$$

mit  $\mu = \cos(\vartheta)$  und dem normierten Impuls  $q = p/(m_e c)$  zu

$$D_{\vartheta\vartheta \text{ Rip}} = \begin{cases} \frac{\pi}{32} \frac{e B}{m_e \sqrt{q^2 + 1}} \left( \frac{\delta B_{nm}}{B} \right)^{3/2} \frac{\mu^{1/2}}{(1-\mu^2)^{1/4}}, & \text{falls } q \text{ in } (n, m) \text{ Resonanz} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{II.1.3.13})$$

### II.1.3.2.2 "Energieblockierung" der Runawayelektronen durch Rippleresonanz

Ein Überwiegen der Isotropisierung gegenüber der Anisotropisierung (siehe Gleichung (II.1.3.8)) ist nur für einen starken Diffusionskoeffizienten für die Pitchwinkel möglich, wie er bei der Diffusion in der Rippleresonanz ( $D_{\vartheta\vartheta \text{ Rip}}$ ) auftritt. Die Bedingung an die Größe von  $D_{\vartheta\vartheta \text{ Rip}}$ , die zu einer Energieblockierung der Runawayelektronen führt, ist deshalb:

$$\left( D_{\vartheta\vartheta \text{ St}} + D_{\vartheta\vartheta \text{ Rip}} \right) > \frac{2(eE - k_{\text{St}})}{p} \quad (\text{II.1.3.14})$$

Ein in  $p$  und  $\vartheta$  Richtung ausgedehntes Gebiet hoher Isotropisierung wird von den bei niedrigen Pitchwinkeln (Beschleunigung) eintretenden Runawayelektronen bei hohen Pitchwinkeln (Abbremsung durch Synchrotronstrahlung) wieder verlassen. Die Runawayelektronen werden "reflektiert". Im Gebiet der starken Anisotropisierung wird der Pitchwinkel wieder verkleinert, wodurch sich die Kreislaufbewegung schließt (Bild II.1.3.2.15). Die sich hierbei einstellende stationäre Verteilungsfunktion kann numerisch berechnet werden (siehe Abschnitt II.1.3.2.3).

Besitzt das Gebiet hoher Isotropisierung in  $p$ -Richtung nur eine endliche Breite, wie bei der Rippleresonanz (Bild II.1.3.2.15), so muß außerdem die Diffusion der Impulsrichtungen so groß sein, daß innerhalb der Zeit, die zum Überqueren der Resonanz benötigt wird,  $\Delta t = \frac{2 \Delta p_{\text{GZnm}}}{eE}$ , der Pitchwinkel in das



Gebiet diffundieren kann ( $\vartheta > \vartheta_{\text{krit}}$ ) in dem die Runawayelektronen durch starken Synchrotronstrahlungsverlust abgebremst werden (Bild II.1.3.2.15) [LauR]:

$$D_{\vartheta\vartheta} \text{Rip} \Delta t \geq \vartheta_{\text{krit}}^2 \quad (\text{II.1.3.15})$$

Dies ist eine starke Vereinfachung der wahren Verhältnisse, da die Beschleunigung über den Resonanzbereich nicht nur von der elektrischen Kraft, sondern auch durch die Reibungskraft und durch die Abbremsung durch Synchrotronstrahlung bestimmt ist. Die Entscheidung, ob die Runawayelektronen durch die Rippleresonanz in ihrer Energie blockiert werden, muß deshalb durch Lösen der zeitabhängigen Fokker-Planck-Gleichung erfolgen. Ein dazu äquivalenter Weg ist die Simulation der Dynamik der Runawayelektronen mit Monte-Carlo-Operatoren (siehe Abschnitt II.1.4.1). Übersteigt die elektrische Kraft einen gewissen Wert, so überwiegt die Anisotropisierung wieder gegenüber der Isotropisierung und die Runawayelektronen werden in ihrer Energie nicht blockiert. Die notwendige Feldstärke zum Überqueren der Resonanz (Bild II.1.2.6.13) wurde auf diese Weise ermittelt.

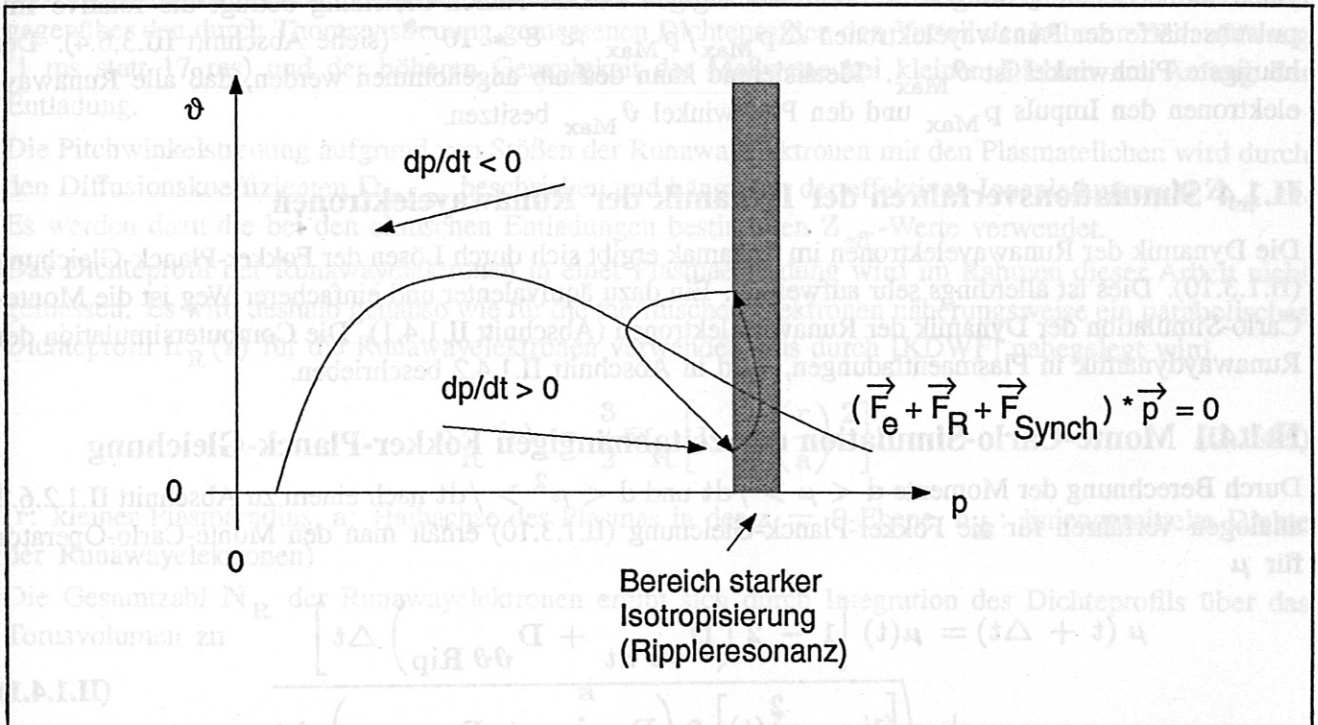


Bild II.1.3.2.15 Der Impulsraum ( $p, \vartheta$ ) der Runawayelektronen wird durch die Kurve, auf der  $(\vec{F}_e + \vec{F}_R + \vec{F}_{\text{Synch}}) * \vec{p} = 0$  gilt, in Gebiete mit  $dp/dt > 0$  (Beschleunigung) und  $dp/dt < 0$  (Abbremsung) aufgeteilt. Die Runawayelektronen führen dann bei Vorhandensein eines Gebiets genügend starker Isotropisierung zwischen den Gebieten unterschiedlich starker Isotropisierung im Impulsraum eine geschlossene Bewegung aus: Die in das Gebiet starker Isotropisierung bei kleinen Pitchwinkeln ( $\vartheta \approx 0$ ) eintretenden Teilchen verlassen dieses bei hohen Pitchwinkeln wieder. Im Gebiet der starken Anisotropisierung wird der Pitchwinkel wieder verkleinert, wodurch sich die Kreislaufbewegung schließt.

### II.1.3.2.3 Stationäre Verteilungsfunktion durch "Energieblockierung" in der Rippleresonanz

Die sich einstellende stationäre Verteilungsfunktion für die Runawayelektronen, die das stark isotropisierende Resonanzgebiet nicht überqueren können, kann numerisch berechnet werden (siehe Anhang B). Es wurde dazu jedoch eine Vereinfachung der Topologie vorgenommen: Die Rippleresonanz tritt für konstanten Parallelimpuls,  $p_{\text{GZnm}} = \cos(\vartheta) p_{\text{res}}(\vartheta) = \text{const.}$  auf, mit  $\vartheta$  als Pitchwinkel (siehe Bild II.1.2.2.10). Die Resonanz hat deshalb im  $(p, \vartheta)$ -Raum die Form der Kurve,  $p_{\text{res}}(\vartheta) = p_{\text{GZnm}} / \cos(\vartheta)$ .

Aufgrund der zu erwartenden starken Gradienten der Verteilungsfunktion beim Übergang in den Resonanzbereich müssen die Stützstellen dort sehr eng gelegt werden, oder das Koordinatengitter an die Topologie angepaßt werden. Letzteres ist sehr aufwendig und wurde hier nicht durchgeführt. Stattdessen wurde angenommen, daß die Resonanz bei konstantem Gesamtimpuls  $p_{\text{res}}(\vartheta) = p_{\text{GZnm}}$  angenommen wird. Es kann dann ein einfacheres Koordinatengitter verwendet werden. Das Maximum der Verteilungsfunktion befindet sich dadurch bei einem Impuls  $p_{\text{Max}}^*$ , der aus geometrischen Gründen mit der Position des Maximums nach der exakten Lösung  $p_{\text{Max}}$  nach  $p_{\text{Max}}^* = \cos(\vartheta_{\text{Max}}) p_{\text{Max}}$  zusammenhängt, wobei bei dem Pitchwinkel  $\vartheta_{\text{Max}}$  das Maximum der Verteilungsfunktion liegt. Der relative Unterschied zwischen  $p_{\text{Max}}^*$  und  $p_{\text{Max}}$  liegt im Bereich von 2 - 3 %. Die Bestimmung von  $p_{\text{Max}}^*$ ,  $\vartheta_{\text{Max}}$  (siehe Abschnitt III.3.6.4) mit obiger Vereinfachung in der Berechnung der Verteilungsfunktion kann deshalb ohne großen Fehler erfolgen. Die Einzelheiten der numerischen Berechnung sind Anhang B zu entnehmen.

### II.1.3.3 Idealisierte Impulsverteilung der energieblockierten Runawayelektronen

Nach numerischen Lösungen der zeitunabhängigen Fokker-Planck-Gleichung beträgt die relative Impulsunschärfe der Runawayelektronen  $\Delta p_{\text{Max}}/p_{\text{Max}} \approx 8 \cdot 10^{-3}$  (siehe Abschnitt III.3.6.4). Der häufigste Pitchwinkel ist  $\vartheta_{\text{Max}}$ . Idealisierend kann deshalb angenommen werden, daß alle Runawayelektronen den Impuls  $p_{\text{Max}}$  und den Pitchwinkel  $\vartheta_{\text{Max}}$  besitzen.

### II.1.4 Simulationsverfahren der Dynamik der Runawayelektronen

Die Dynamik der Runawayelektronen im Tokamak ergibt sich durch Lösen der Fokker-Planck-Gleichung (II.1.3.10). Dies ist allerdings sehr aufwendig. Ein dazu äquivalenter und einfacherer Weg ist die Monte-Carlo-Simulation der Dynamik der Runawayelektronen (Abschnitt II.1.4.1). Die Computersimulation der Runawaydynamik in Plasmaentladungen, wird in Abschnitt II.1.4.2 beschrieben.

#### II.1.4.1 Monte-Carlo-Simulation der zeitabhängigen Fokker-Planck-Gleichung

Durch Berechnung der Momente  $d \langle \mu \rangle / dt$  und  $d \langle \mu^2 \rangle / dt$  nach einem zu Abschnitt II.1.2.6.2 analogen Verfahren für die Fokker-Planck-Gleichung (II.1.3.10) erhält man den Monte-Carlo-Operator für  $\mu$

$$\mu(t + \Delta t) = \mu(t) \left[ 1 - 2 \left( D_{\vartheta\vartheta St} + D_{\vartheta\vartheta Rip} \right) \Delta t \right] \pm \sqrt{\left[ 1 - \mu^2(t) \right] 2 \left( D_{\vartheta\vartheta St} + D_{\vartheta\vartheta Rip} \right) \Delta t} \quad (\text{II.1.4.1})$$

( $D_{\vartheta\vartheta St} = (Z_{\text{eff}} + 1)k_{St} \sqrt{q^2 + 1} / (2q^3 m_e c)$  mit dem normierten Impuls  $q = p / (m_e c)$ ) Dieser Operator ist im Zeitverhalten des Mittelwerts  $d \langle \mu \rangle / dt$  und der Varianz  $d \langle \mu^2 \rangle / dt - d \langle \mu \rangle^2 / dt$  äquivalent zur Fokker-Planck-Gleichung (II.1.3.10), falls der Zeitschritt  $\Delta t$  für die Simulation von Kleinwinkelstößen so klein ist, daß

$$2 \left( D_{\vartheta\vartheta St} + D_{\vartheta\vartheta Rip} \right) \Delta t \ll 1 \quad (\text{II.1.4.2})$$

Für die zeitliche Entwicklung des normierten Impulses  $q$  ergibt sich durch Berechnung von  $d \langle q \rangle / dt$  (siehe Abschnitt II.1.2.6.2)

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \left[ \frac{eE}{m_e c} \mu - \frac{k_{St}}{m_e c} \left( 1 + \frac{1}{q^2} \right) - \frac{F_{\text{Synch}}(q, \mu)}{m_e c} \right] \Delta t \quad (\text{II.1.4.3})$$

Die Dynamik der Runawayelektronen wird mit den Gleichungen (II.1.4.1) und (II.1.4.3) simuliert.



### II.1.4.2 Simulation der Dynamik der Runawayelektronen in einer Tokamakentladung

Die Simulation der Dynamik der Runawayelektronen in einer Plasmaentladung erfolgt mit den Gleichungen (II.1.4.1) und (II.1.4.3). Das zu verwendende elektrische Feld berechnet sich nach Gleichung (II.1.1.13) nach

$$E_{\text{eff}} = E_{\text{tor}} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{II.1.4.4})$$

wobei  $E_{\text{tor}} = U_L / (2 \pi R)$  mit  $R = 1,65$  m als großem Radius und  $U_L$  die von einer toroidalen Schleife gemessene Umfangsspannung ist (Zeitauflösung 1 ms).

Der poloidale magnetische Fluß  $\psi(R, z, t)$  ergibt sich aus der routinemäßigen Rekonstruktion der magnetohydrodynamischen Plasmagleichgewichte aus magnetischen Messungen.

Die Werte für die lokale Elektronendichte werden aus der interferometrisch gemessenen liniengemittelten Dichte unter der Annahme eines parabolischen Dichteprofil berechnet. Diese Annahme ist für die hier untersuchten ohmsch geheizten Plasmen gut erfüllt. Die interferometrisch gemessene Dichte hat gegenüber den durch Thomsonstreuung gemessenen Dichteprofilen den Vorteil der höheren Zeitauflösung (1 ms statt 17 ms) und der höheren Genauigkeit der Meßwerte bei kleinen Dichten am Anfang der Entladung.

Die Pitchwinkelstreuung aufgrund von Stößen der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen wird durch den Diffusionskoeffizienten  $D_{\psi \psi \text{St}}$  beschrieben und hängt von der effektiven Ionenladungszahl  $Z_{\text{eff}}$  ab. Es werden dazu die bei den ohmschen Entladungen bestimmten  $Z_{\text{eff}}$ -Werte verwendet.

Das Dichteprofil der Runawayelektronen in einer Plasmaentladung wird im Rahmen dieser Arbeit nicht gemessen. Es wird deshalb genauso wie für die thermischen Elektronen näherungsweise ein parabolisches Dichteprofil  $n_R(r)$  für die Runawayelektronen verwendet, was durch [KDWF] nahegelegt wird.

$$n_R(r) = \frac{3}{2} \bar{n}_R \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (\text{II.1.4.5})$$

( $r$ : kleiner Plasmaradius,  $a$ : Halbachse des Plasmas in der  $z = 0$ -Ebene,  $\bar{n}_R$ : liniengemittelte Dichte der Runawayelektronen)

Die Gesamtzahl  $N_R$  der Runawayelektronen ergibt sich durch Integration des Dichteprofiles über das Torusvolumen zu

$$N_R = 2 \pi R \int_0^a n_R(r) 2 \pi \left( 1 + \frac{b}{a} \right) r dr \quad (\text{II.1.4.6})$$

( $a = 0,5$  m,  $b = 0,8$  m: Halbachsen des elliptischen Plasmas,  $R = 1,65$  m: großer Plasmaradius)

Die mit dem kleinen Plasmaradius gewichtete Dichte ist also ein Maß für die Zahl der Runawayelektronen bei einem bestimmten Radius  $r$ . Das Maximum des so gewichteten parabolischen Dichteprofiles liegt bei  $r = a/\sqrt{3}$

Um die Dynamik der Majorität der Runawayelektronen mit den Gleichungen (II.1.4.1) und (II.1.4.3) zu simulieren, sind diese also etwa bei dem kleinen Plasmaradius  $r = a/\sqrt{3}$  durchzuführen.

### II.1.5 Zusammenfassung des theoretischen Teils

Die Runawayelektronen werden bei ihrer Bewegung auf den Driftflächen im toroidalen elektrischen Feld beschleunigt. Die Endenergie der Runawayelektronen ergibt sich aus der Bilanz zwischen Energiegewinn

im elektrischen Feld und Energieverlust durch Synchrotronstrahlung. Die maximal mögliche Energie ergibt sich dabei für die Großkreisbewegung der Runawayelektronen bei verschwindender Senkrechtenergie. Bei endlich großer Senkrechtenergie erhöhen sich die Synchrotronstrahlungsverluste, weshalb dann die Bilanz zwischen Energiegewinn und -verlust schon bei kleinen Endenergien erfüllt ist. Eine Erhöhung der Senkrechtenergie durch Stöße mit den Plasmateilchen ist allerdings nicht effektiv genug, um die Energieerhöhung der Runawayelektronen zu bremsen. Dies ist nur durch den Mechanismus der Rippleresonanz möglich: Erreichen die Runawayelektronen die Rippleresonanzenergien  $E_n$  bei denen die Gyrationbewegung in Resonanz mit der n-ten Harmonischen des radialen Ripplefelds ist, kommt es zu einer irreversiblen Umwandlung von Parallel- in Senkrechtenergie, die für die Runawayelektronen im Tokamakplasma von ASDEX und ASDEX-Upgrade durch eine Diffusion des Gyrationimpulses beschrieben wird.

Die Dynamik der Runawayelektronen wird durch die Fokker-Planck-Gleichung beschrieben, die die zeitliche Entwicklung der Dichtefunktion  $N_R(r, v, t)$  in Abhängigkeit von dem radialen Abstand  $r$  und der Geschwindigkeit  $v$  darstellt. Die Gleichung enthält Terme für die Beschleunigung durch das elektrische Feld, die Bremsung durch die Synchrotronstrahlung und die Stöße mit den Plasmateilchen. Die Lösung dieser Gleichung zeigt, dass Runawayelektronen bei hohen Energien in der Peripherie des Plasmas auftreten können, was zu einer Erhöhung der Strahlungsverluste führt.

### 4.1.1 Monte-Carlo-Simulation der Fokker-Planck-Gleichung

Durch Berechnung der Momente  $\langle v^n \rangle$  und  $\langle r^n \rangle$  der Dichtefunktion  $N_R(r, v, t)$  lässt sich die zeitliche Entwicklung der Runawayelektronenpopulation analysieren. Die Monte-Carlo-Simulation ist eine numerische Methode zur Lösung der Fokker-Planck-Gleichung, bei der die Bewegung der Runawayelektronen durch eine Reihe von zufälligen Schritten simuliert wird.

Die Gesamtzahl  $N_R$  der Runawayelektronen ergibt sich durch Integration der Dichtefunktion über das Torusvolumen  $V$  zu:

$$N_R = \int_V N_R(r, v, t) dV \quad (4.1.1)$$

Die mittlere Geschwindigkeit  $\langle v \rangle$  der Runawayelektronen ist durch:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_V v N_R(r, v, t) dV}{N_R} \quad (4.1.2)$$

Die mittlere radiale Position  $\langle r \rangle$  der Runawayelektronen ist durch:

$$\langle r \rangle = \frac{\int_V r N_R(r, v, t) dV}{N_R} \quad (4.1.3)$$

Die Runawayelektronen werden bei ihrer Bewegung auf den Diffusionskoeffizienten  $D$  im radialen elektrischen Feld beschleunigt. Die Fokker-Planck-Gleichung lautet:



### III Experimenteller Teil

Die Runawayelektronen werden zu Beginn der Entladung erzeugt, da aufgrund der erhöhten Umfangespannung das elektrische Feld groß und die Elektronenenergie klein ist. Die Runawayelektronen werden durch die Beschleunigung im Plasma erzeugt. Die Runawayelektronen werden durch die Beschleunigung im Plasma erzeugt. Die Runawayelektronen werden durch die Beschleunigung im Plasma erzeugt.

Für die Thomsonstreuung an thermischen Elektronen befindet sich am Tokamak ASDEX Upgrade ein periodisch betriebenes Nd-YAG-Lasersystem mit einer Pulsenergie von 6 J. Die relativistische Thomsonstreuung an Runawayelektronen unter Verwendung dieses Lasersystems ist möglich, falls das Signal-zu-Rausch-Verhältnis pro Puls größer als eins ist. Unter der im Jahr 1991 gemachten Annahme, daß, wie vom Tokamak TEXTOR berichtet [Fuj], auch im Tokamak ASDEX Upgrade ein Runawaystrom von 50 kA möglich ist, und das Rauschen im weichen Röntgengebiet, in dem die Streuquanten für Runawayelektronen mit Energien größer 5 MeV liegen, nur durch die Plasmabremstrahlung und die Bremsstrahlung der Runawayelektronen bestimmt ist, könnte ein Signal-zu-Rausch-Verhältnis größer eins abgeschätzt werden. Eine Messung der Runawayelektronenparameter durch relativistische Thomsonstreuung erschien daher möglich. Es werden deshalb Röntgenpektrometer, die aus Siliziumkristallen (Tabelle 1.1.1), die mit Metallfolien als Filter bedeckt waren, in das Vakuumgefäß eingebaut (Bild III.1.1.2). Das experimentell bestimmte Rauschen während einer Entladung mit Runawayelektronen

Bild III.1.1.1. Zeitlicher Verlauf der Bremsstrahlungsemission  $I_{HX}$  der Runawayelektronen im weichen Röntgenbereich der Untarmpassung  $U_{\text{pl}}$  der mittleren Fickstromdichte  $j_{\text{pl}}$  und des Plasmapotentials  $\phi_{\text{pl}}$  während der Plasmaentladung im Tokamak ASDEX Upgrade. Die gesamte Entladungsdauer des Plasmas, das eine Ionenfrequenz von 6 hat, ist  $t_{\text{pl}} = 0,35 \text{ s}$ . Die Runawayelektronen werden zu Beginn der Entladung bei  $t = 0,35 \text{ s}$  erzeugt, da dort die Elektronenenergie klein und das elektrische Feld aufgrund der Untarmpassung groß ist.

MP-003-PIN-02x5	Quantum Corporation	1 cm	300 $\mu\text{m}$	0,2 $\mu\text{m}$ Silizium
Detektormodul, bestehend aus 4 Stück SFH870/F170	KETEK GmbH, Siemens	4 x 25 mm <sup>2</sup>	381 $\mu\text{m}$	1,0 $\mu\text{m}$ Aluminium, 0,18 $\mu\text{m}$ p-Silizium

Tabelle 1.1.1.1. Zwei Nachweise des weichen Röntgenbereichs der Streuquanten im weichen Röntgengebiet verwendet Röntgenkristalle [Qua], [Sie]

Ein typischer Verlauf einer ohmschen Plasmaentladung im Tokamak ASDEX Upgrade enthält drei Phasen: Plasmaaufbau, Plateauphase und Plasmaabbau. Zu Beginn der Entladung wird durch eine erhöhte Umfangsspannung aus Wasserstoffgas ein Plasma kleiner Dichte erzeugt, das schon durch den kleinen Plasmastrom eingeschlossen ist. Die Sollwerte des Plasmastroms (hier 600 kA) und der Elektronendichte (hier  $3 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ) werden durch Feedbackregelung nach einer Zeit von etwa 1 s erreicht (Plasmaaufbau). Daran schließt sich eine Plateauphase von typischerweise 3 – 4 s an, in der die Plasmaparameter auf konstante Werte geregelt werden. Die Verringerung der Plasmadichte und des Plasmastroms leitet das Ende der Entladung ein.

Runawayelektronen werden zu Beginn der Entladung erzeugt, da aufgrund der erhöhten Umfangsspannung das elektrische Feld groß und die Elektronendichte klein ist. Mit zunehmender Energie erzeugen die Runawayelektronen dann Bremsstrahlung im harten Röntgengebiet. Die Erzeugung von Runawayelektronen ist im weiteren Verlauf der Entladung vernachlässigbar klein. Aufgrund von Transportprozessen, auf die im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen wird, verringert sich die Zahl der im Plasma eingeschlossenen Runawayelektronen. Die Bremsstrahlungsintensität nimmt deshalb ab etwa 1,4 s wieder ab (Bild III.1).

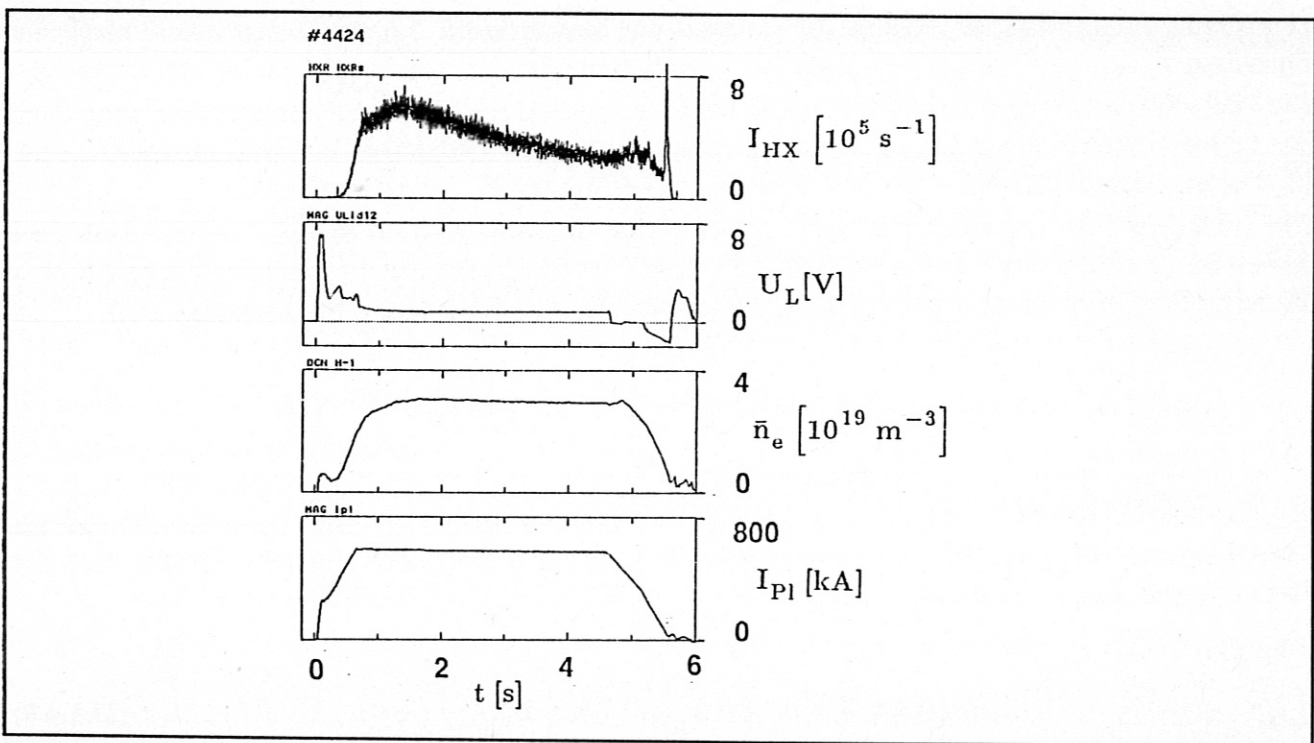


Bild III.1 Zeitlicher Verlauf der Bremsstrahlungsintensität  $I_{HX}$  der Runawayelektronen im harten Röntgenbereich, der Umfangsspannung  $U_L$ , der mittleren Elektronendichte  $\bar{n}_e$  und des Plasmastroms  $I_{P1}$  für eine ohmsche Plasmaentladung im Tokamak ASDEX Upgrade: Zur Zeit  $t = 0 \text{ s}$  erfolgt die Erzeugung des Plasmas, das eine Lebensdauer von 6 s hat. Die gesamte Entladung besteht aus den drei Phasen Plasmaaufbau ( $t = 0 - 1 \text{ s}$ ), Plateauphase ( $t = 1 - 5 \text{ s}$ ) und Plasmaabbau ( $t = 5 - 6 \text{ s}$ ). Die Runawayelektronen werden zu Beginn der Entladung bei  $t \approx 0,35 \text{ s}$  erzeugt, da dort die Elektronendichte klein und das elektrische Feld aufgrund der Umfangsspannung groß ist.



# III.1 Relativistische Thomsonstreuung an Runawayelektronen und Bestimmung ihrer Dichte aus der Bremsstrahlung

## III.1.1 Relativistische Thomsonstreuung

Mit der experimentellen Methode der relativistischen Thomsonstreuung an Runawayelektronen können alle die Runawayelektronenpopulation bestimmenden Parameter wie Teilchendichte, Energie und Pitchwinkel bestimmt werden: Die Energie [WaPe], [JaRo], [KuKo] der an Runawayelektronen mit relativistischem Gammafaktor  $\gamma$  gestreuten Quanten ist bei  $90^\circ$ -Streuung durch Dopplerverschiebung um den Faktor  $2\gamma^2$  größer als die Energie des Quants der Lichtquelle. Durch Bestimmung der Energie des gestreuten Quants kann deshalb die Energie des Runawayelektrons bestimmt werden. Die Teilchendichte der Runawayelektronen kann aus der Intensität der gestreuten Strahlung, die proportional zur Teilchendichte der Runawayelektronen ist, bestimmt werden. Da hochrelativistische Teilchen die gestreuten Photonen in Richtung ihrer momentanen Geschwindigkeit in einen Raumwinkel der Winkelbreite  $1/\gamma$  rad emittieren, kann für hochrelativistische Runawayelektronen durch Ausmessen der räumlichen Verteilung der gestreuten Strahlung die Pitchwinkelverteilung der Runawayelektronen bestimmt werden. Durch Einengung des Streuvolumens, das von der Lichtquelle beleuchtet wird und aus dem die gestreute Strahlung empfangen wird, erfolgt eine lokale Messung dieser Parameter im Plasma.

Für die Thomsonstreuung an thermischen Elektronen befindet sich am Tokamak ASDEX Upgrade ein periodisch betriebenes Nd-YAG-Lasersystem mit einer maximalen Pulsenergie von 6 J. Die relativistische Thomsonstreuung an Runawayelektronen unter Verwendung dieses Lasersystems ist möglich, falls das Signal-zu-Rausch-Verhältnis pro Puls größer als eins ist. Unter der im Jahr 1992 gemachten Annahme, daß, wie vom Tokamak TEXTOR berichtet [Fin], auch im Tokamak ASDEX Upgrade ein Runawaystrom von 50 kA möglich ist, und das Rauschen im weichen Röntgengebiet, in dem die Streuquanten für Runawayelektronen mit Energien größer 15 MeV liegen, nur durch die Plasmabremsstrahlung und die Bremsstrahlung der Runawayelektronen bestimmt ist, konnte ein Signal-zu-Rausch-Verhältnis größer eins abgeschätzt werden. Eine Messung der Runawayelektronenparameter durch relativistische Thomsonstreuung erschien daher möglich. Es wurden deshalb Röntgendetektoren, die aus Siliziumdioden bestanden (Tabelle 1.1.1), die mit Metallfolien als Filter bedeckt waren, in das Vakuumgefäß eingebaut (Bild III.1.1.2). Das experimentell bestimmte Rauschen während einer Entladung mit Runawayelektronen

Typ	Hersteller	strahlungsempfindliche Fläche	Dicke der Verarmungszone	Beschichtung des Eintrittsfensters
5x20-PIN-300-MP	Quantrad-Corporation	1 cm <sup>2</sup>	300 µm	0,2 µm n+Silizium
Detektormodul, bestehend aus 4 Stück SFH870/F170	KETEK GmbH, Siemens	4 x 25 mm <sup>2</sup>	381 µm	0,1 µm Aluminium, 0,18 µm p+Silizium

Tabelle 1.1.1 Zum Nachweis der Streuquanten im weichen Röntgengebiet verwendete Röntgendioden [Qua], [Sie]

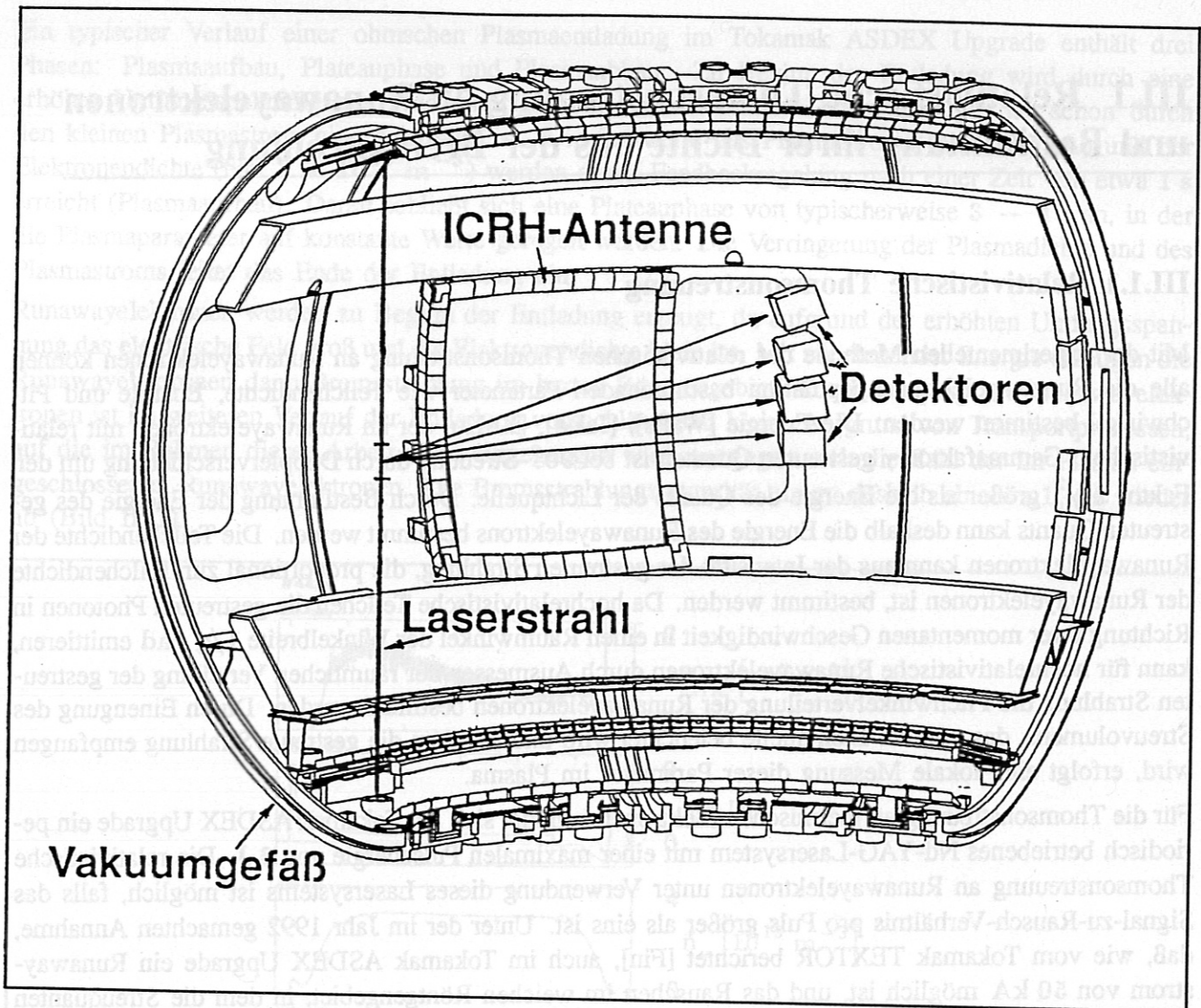


Bild III.1.1.2 Die Thomsonstreuungsapparatur für Runawayelektronen besteht aus vier Ortskanälen, die auf einen Punkt im Plasma kollimiert sind. Mit den verschiedenen Kanälen kann deshalb die Pitchwinkelverteilung der Runawayelektronen an einem Ort im Plasma gemessen werden.

lag allerdings über dem aus der Abschätzung erwarteten Wert. Eine Untersuchung des Rauschens zeigte, daß das erhöhte Rauschen auf die von den Runawayelektronen bei Stößen mit den Plasmateilchen und der Gefäßwand erzeugte Bremsstrahlung im harten Röntgengebiet zurückzuführen ist: Die Detektorkanäle, die mit  $50 \mu\text{m}$  dickem Aluminium als Filter bedeckt waren, sind empfindlich für Quantenenergien größer als etwa  $5 \text{ keV}$ . Sie sind deshalb unempfindlich für die Plasmabremsstrahlung ohmsch geheizter Plasmen, deren Strahlungsmaximum bei einer Quantenenergie von  $1 \text{ keV}$  liegt. Das Rauschen  $\Delta q_{\text{Rausch}}$  des über die Dauer  $\Delta t = 200 \text{ ns}$  integrierten Signalstroms  $I_{\text{DC}}$  kann durch Schrotrauschen erklärt werden, das nach [Pau]

$$\Delta q_{\text{Rausch}}^2 = 2 q \Delta t I_{\text{DC}} \quad (\text{III.1.1.1})$$

skaliert (Bild III.1.1.3). Aus den Meßwerten (Bild III.1.1.3) wurde mit der Beziehung (III.1.1.1) die in



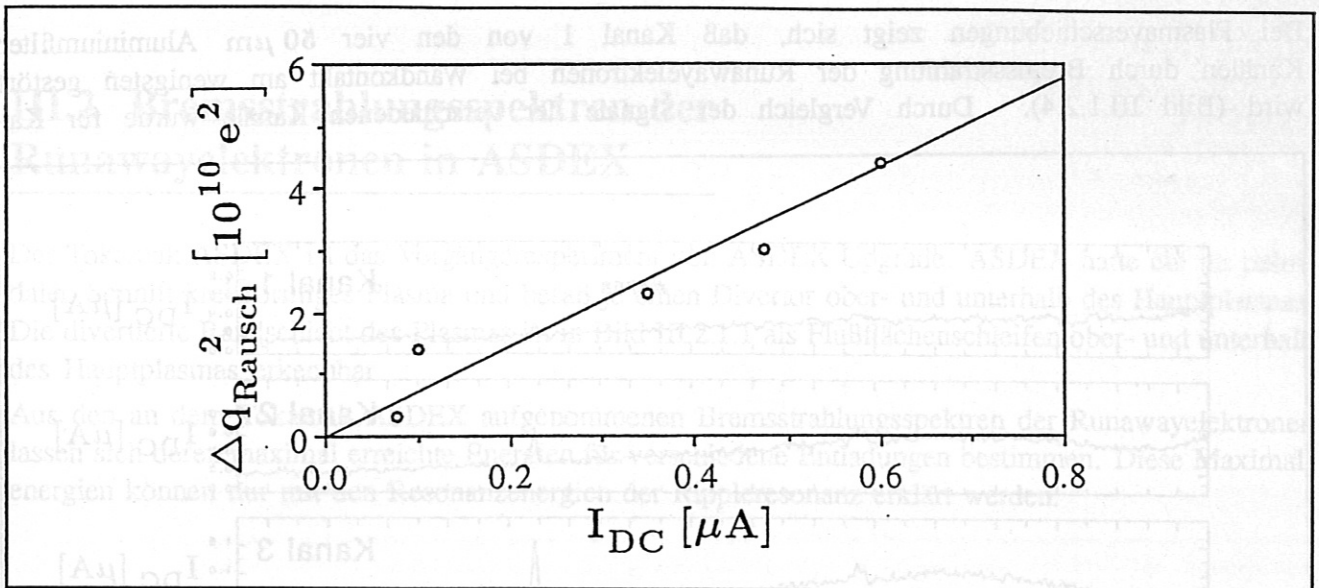


Bild III.1.1.3 Das Quadrat der beobachteten mittleren Ladungsschwankung  $\Delta q_{Rausch}$  des über die Dauer  $\Delta t = 200 \text{ ns}$  integrierten Signalstroms  $I_{DC}$  kann durch eine Gerade angenähert werden.

der Diode pro Quant erzeugte Ladung  $q$  zu  $q = 2.9 \cdot 10^4 e$  ( $e$ : Elementarladung) bestimmt. Da das primär in der Diode von einem Quant erzeugte freie Elektron für die Erzeugung eines Elektron-Loch-Paares im Mittel eine Energie von  $3,6 \text{ eV}$  benötigt, ist die von den Quanten in der Diode deponierte Energie  $E_{dep} = 3,6 \text{ eV} \cdot 2,9 \cdot 10^4 = 100 \text{ keV}$ : Elektronen mit einer höheren Energie werden in der  $300 \mu\text{m}$  dicken Diode nicht abgebremst, sondern verlassen die Diode wieder [Ort]. Diese experimentell bestimmte maximale absorbierte Energie pro Quant wird bei der Abschätzung der Dichte der Runawayelektronen aus der Bremsstrahlung benötigt (Abschnitt III.1.2 und Anhang C). Das Rauschen durch die harte Röntgenstrahlung konnte nicht durch Verwendung eines Hoch-Z-Materials anstelle des V2A-Stahls als Gehäusematerial und der dadurch besseren Abschirmung der Diode erniedrigt werden: wegen der Gefahr der Verunreinigung des Plasmas mit Hoch-Z-Materialien ist der Einbau derselben in das Vakuumgefäß, das mit Kohlenstoff ausgekleidet ist, nicht erlaubt. Auch eine Kapselung der Hoch-Z-Materialien konnte wegen der begrenzten Platzverhältnisse im Vakuumgefäß nicht durchgeführt werden. Durch dieses erhöhte Rauschen aufgrund der harten Röntgenstrahlung sank nun das erwartete Signal-zu-Rauschverhältnis unter eins, weshalb eine Fortsetzung der relativistischen Thomsonstreuung nicht mehr sinnvoll war.

### III.1.2 Bestimmung der Dichte der Runawayelektronen aus der von ihnen emittierten Bremsstrahlung

Die maximal in Entladungen erreichte Dichte der Runawayelektronen kann aus der Bremsstrahlungintensität der Runawayelektronen, die diese bei Stößen mit den Plasmateilchen emittieren und die mit den  $50 \mu\text{m}$  Aluminiumfilter Kanälen absolut gemessen wird, abgeschätzt werden: Die Runawayelektronen-Plasma-Bremsstrahlung führt in den Dioden zu einem Signalstrom  $I_{DC}$  der faktorisiert werden kann in (siehe Anhang C):

$$I_{DC} = e \bar{n}_R \bar{n}_e c I(\vartheta, \gamma) \quad (\text{III.1.2.1})$$

( $\bar{n}_R$ : mittlere Dichte der Runawayelektronen,  $\bar{n}_e$ : mittlere Dichte der thermischen Elektronen,  $c$ : Lichtgeschwindigkeit,  $e$ : Elementarladung,  $I(\vartheta, \gamma)$ : Gewichtungsfaktor (siehe Anhang C),  $\vartheta$ : Pitchwinkel der Runawayelektronen,  $\gamma$ : relativistischer Gammafaktor der Runawayelektronen)

Bei Plasmaverschiebungen zeigt sich, daß Kanal 1 von den vier 50  $\mu\text{m}$  Aluminiumfilter Kanälen durch Bremsstrahlung der Runawayelektronen bei Wandkontakt am wenigsten gestört wird (Bild III.1.2.4). Durch Vergleich der Signale der verschiedenen Kanäle wurde für Ka-

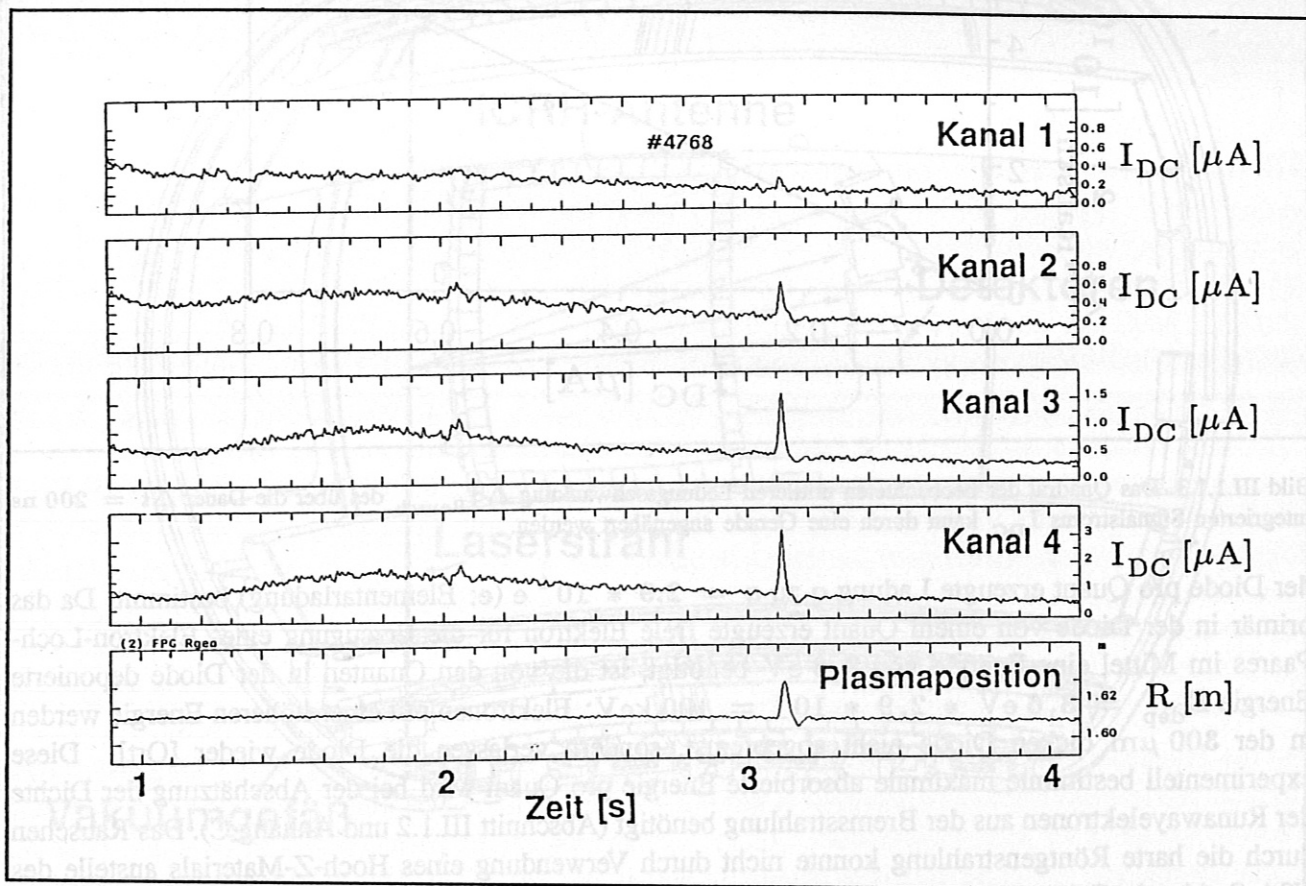


Bild III.1.2.4 Die Gleichstromsignale der vier 50  $\mu\text{m}$  Aluminiumfilter Kanäle, die nur für die harte Röntgenstrahlung empfindlich sind, die von den Runawayelektronen als Bremsstrahlung emittiert wird, zeigen unterschiedliches Verhalten: Bei einer Verschiebung des Plasmas um etwa 2 cm nach außen trifft kurzzeitig ein höherer Fluß von Runawayelektronen an die den Detektoren nahegelegene ICRH-Antenne (Bild III.1.1.2). Dadurch wird die Bremsstrahlung, die bei Wechselwirkung der Runawayelektronen mit der Wand erzeugt wird, kurzzeitig erhöht. Der Kanal 1 ist davon jedoch am geringsten gestört.

nal 1 ein Signalanteil an Wandbremsstrahlung von 26% abgeschätzt. Der tatsächlich aus der Runawayelektronen-Plasma-Bremsstrahlung stammende maximale Anteil am Signalstrom ist deshalb  $I_{\text{DC Max}} \approx (1 - 0,26) * 0,38 \mu\text{A} = 0,28 \mu\text{A}$ . Für diese Entladung wurde durch Simulation der Dynamik (siehe Kapitel II.1) für die Endenergie der Runawayelektronen der relativistische Gammawert  $\gamma = 43,4$  und der Pitchwinkel  $\vartheta = 0,23$  rad bestimmt. Mit dem dazu bestimmten  $I(\vartheta, \gamma) = 6,5 \cdot 10^{-31} \text{ m}^5$  und der mittleren Elektronendichte  $\bar{n}_e = 3 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$  folgt mit Gleichung (III.1.2.1) eine mittlere Dichte der Runawayelektronen von

$$\bar{n}_R \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3} \quad (\text{III.1.2.2})$$

was einem von den Runawayelektronen getragenen Strom von

$$I_R \approx 1 \cdot 10^4 \text{ A} \quad (\text{III.1.2.3})$$

entspricht.

Die für den Tokamak TEXTOR angegebenen Runawayströme von 50 kA [Fin] wurden im Jahr 1993 [Jas] auf 5 kA korrigiert, in Übereinstimmung mit den an ASDEX Upgrade gefundenen Runawayströmen.



## III.2 Bremsstrahlungsspektren der Runawayelektronen in ASDEX

Der Tokamak ASDEX ist das Vorgängerexperiment von ASDEX Upgrade. ASDEX hatte ein im poloidalen Schnitt kreisförmiges Plasma und besaß je einen Divertor ober- und unterhalb des Hauptplasmas. Die divertierte Randschicht des Plasmas ist in Bild III.2.1.1 als Flußflächenschleifen ober- und unterhalb des Hauptplasmas erkennbar.

Aus den an dem Tokamak ASDEX aufgenommenen Bremsstrahlungsspektren der Runawayelektronen lassen sich deren maximal erreichte Energien für verschiedene Entladungen bestimmen. Diese Maximalenergien können nur mit den Resonanzenergien der Rippleresonanz erklärt werden.

### III.2.1 Aufnahme der Spektren

An ASDEX wurde als Target für die Runawayelektronen eine Kugel aus Wolfram, bzw. Molybdän verwendet, die sich einige cm außerhalb der Plasmaseparatrix im Vakuum befand (Bild III.2.1.1). Die

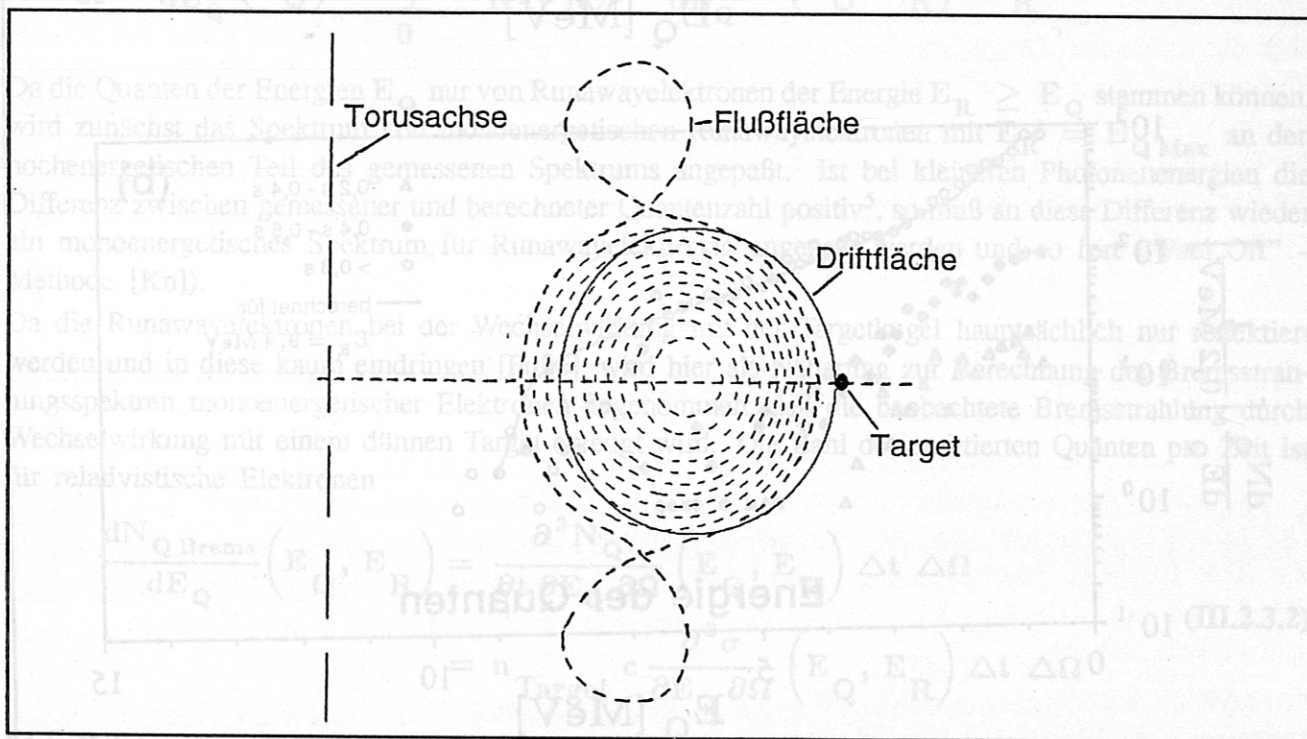


Bild III.2.1.1 Im Tokamak ASDEX treffen die radial nach außen verschobenen Driftflächen der Runawayelektronen auf die außerhalb des Plasmas befindliche Wolfram- (Molybdän-) Kugel und erzeugen durch Wechselwirkung mit diesem Target Bremsstrahlung (Plasmastrom 240 kA, Driftfläche berechnet für Runawayelektronen der Energie 13 MeV)

Runawayelektronen, die sich auf der äußeren Driftfläche bewegen, treffen auf diese Kugel und werden hauptsächlich durch Wechselwirkung mit den Kernladungen des Targets abgebremst und emittieren Bremsstrahlung. Die Strahlung, die unter einem Winkel von 0,6 rad gegen die Richtung der Gyration-zentrums-geschwindigkeit der Runawayelektronen emittiert wird, verläßt das Vakuumgefäß durch ein Be-fenster, das für die hier interessierenden Quantenenergien von einigen MeV die Transmission 1 hat, und wird dann durch ein Spektrometer detektiert [Fußp].

### III.2.2 Charakteristische Form und typisches Zeitverhalten der Bremsstrahlungsspektren

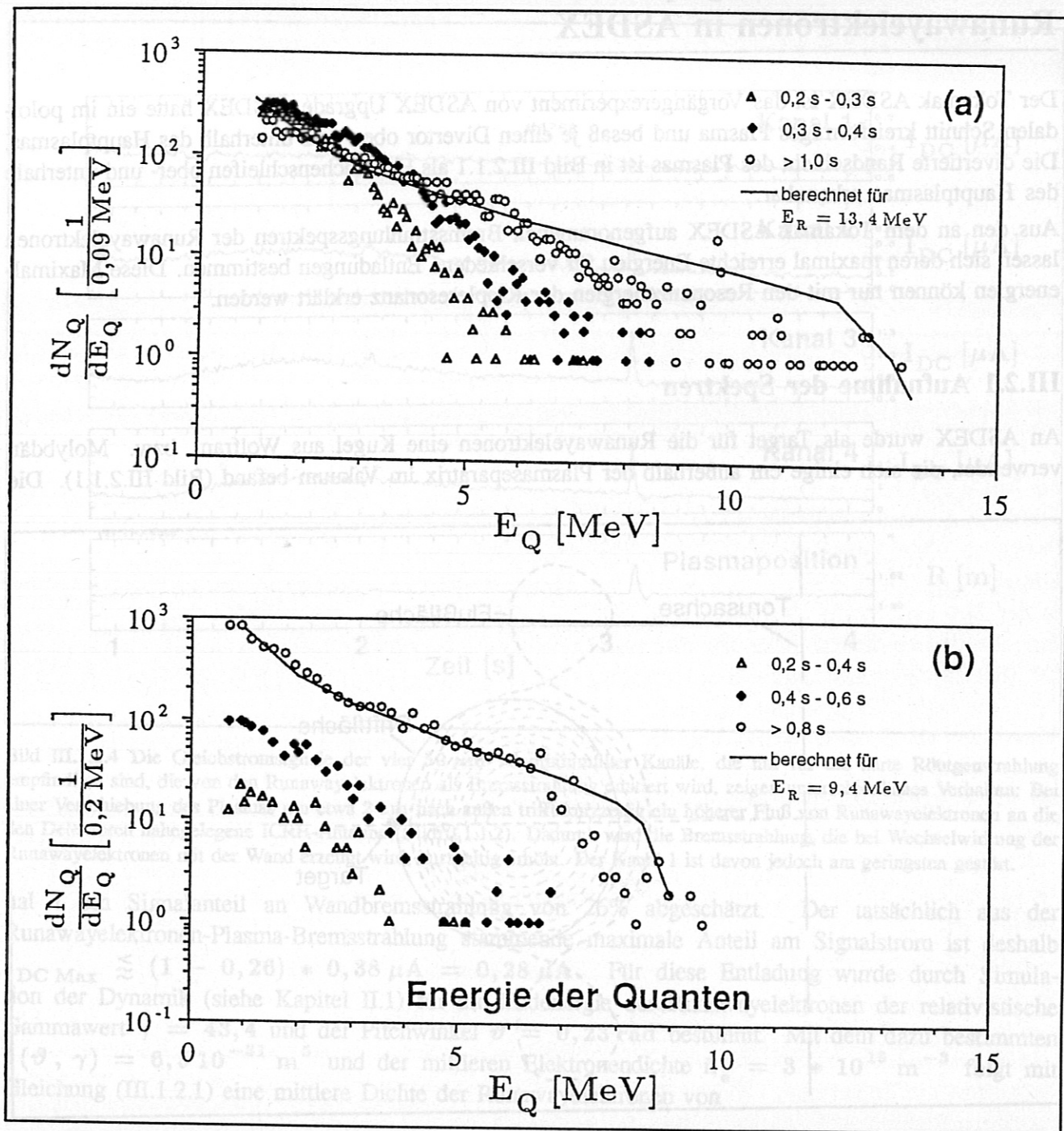


Bild III.2.2.2 Die über ein Zeitintervall von jeweils 100 ms (a) (bzw. 200 ms (b)) gezählte und über identische Entladungen summierte Anzahl  $dN_Q/dE_Q$  der Quanten mit Energie  $E_Q$  im Energieintervall  $dE_Q$  fällt stets exponentiell mit der Quantenenergie  $E_Q$  ab. Allerdings wird der Betrag der Steigung  $\left| d\left(\frac{dN_Q}{dE_Q}\right)dE_Q \right|$  mit zunehmender Zeit in der Entladung kleiner und die maximale noch gemessene Quantenenergie  $E_{Q \text{ Max}}$  größer, bis diese ab 1,0 s (a), bzw. 0,8 s (b) konstant bleiben. Die stationären Spektren lassen sich als Bremsstrahlungsspektren von monoenergetischen Runawayelektronen der Energie  $E_R = 13,4$  MeV (a), bzw.  $E_R = 9,4$  MeV (b) erklären. ((a): Entladungen mit Nummer 2057, 2058, 2062, (b): Entladungen mit Nummer 3378 - 3390)

Die über ein Zeitintervall von jeweils 100 ms (bzw. 200 ms) gezählte und über identische Entladungen summierte Anzahl der Quanten  $dN_Q/dE_Q$  mit Energie  $E_Q$  im Energieintervall  $dE_Q$  fällt stets



exponentiell mit der Quantenenergie  $E_Q$  ab (Bild III.2.2.2). Allerdings wird der Betrag der Steigung  $|d(dN_Q/dE_Q)dE_Q|$  mit zunehmender Zeit in der Entladung kleiner und die maximale noch gemessene Quantenenergie  $E_{Q\text{Max}}$  größer, bis diese ab einer bestimmten Zeit konstant bleiben (Bild III.2.2.2). Diese Quantenspektren werden von monoenergetischen Runawayelektronen erzeugt (siehe Abschnitt III.2.4). Das Photonenspektrum monoenergetischer Elektronen fällt also mit steigender Energie ab. Die Bremsstrahlungsenergie  $E_Q * (dN_Q/dE_Q)$ , die in das Energieintervall  $dE_Q$  emittiert wird, ist für monoenergetische Elektronen jedoch näherungsweise konstant, wie in [Ku] untersucht wurde.

### III.2.3 Bestimmung der Energieverteilung der Runawayelektronen aus den Bremsstrahlungsspektren

Die Zahl  $N_R(E_R)$  der Runawayelektronen mit Energie  $E_R$ , also die Energieverteilung der Runawayelektronen, kann aus dem Spektrum  $dN_Q/dE_Q(E_Q)$  gewonnen werden, wenn man die Bremsstrahlungsspektren  $dN_{Q\text{Brems}}/dE_Q(E_Q, E_R)$  der monoenergetischen Runawayelektronen mit Energie  $E_R$  kennt:

$$\frac{dN_Q}{dE_Q}(E_Q) = \int_0^{\infty} N_R(E_R) \frac{dN_{Q\text{Brems}}}{dE_Q}(E_Q, E_R) dE_R \quad (\text{III.2.3.1})$$

Da die Quanten der Energien  $E_Q$  nur von Runawayelektronen der Energie  $E_R \geq E_Q$  stammen können, wird zunächst das Spektrum von monoenergetischen Runawayelektronen mit  $E_R = E_{Q\text{Max}}$  an den hochenergetischen Teil des gemessenen Spektrums angepaßt. Ist bei kleineren Photonenergien die Differenz zwischen gemessener und berechneter Quantenzahl positiv<sup>5</sup>, so muß an diese Differenz wieder ein monoenergetisches Spektrum für Runawayelektronen angepaßt werden und so fort ("Peel Off" - Methode [Kn]).

Da die Runawayelektronen bei der Wechselwirkung mit der Targetkugel hauptsächlich nur reflektiert werden und in diese kaum eindringen [Fuß], wird hier als Näherung zur Berechnung der Bremsstrahlungsspektren monoenergetischer Elektronen angenommen, daß die beobachtete Bremsstrahlung durch Wechselwirkung mit einem dünnen Target erzeugt wird. Die Zahl der emittierten Quanten pro Zeit ist für relativistische Elektronen

$$\begin{aligned} \frac{dN_{Q\text{Brems}}}{dE_Q}(E_Q, E_R) &= \frac{\partial^3 N_Q}{\partial t \partial E_Q \partial \Omega}(E_Q, E_R) \Delta t \Delta \Omega \\ &= n_{\text{Target}} c \frac{\partial^2 \sigma}{\partial E_Q \partial \Omega}(E_Q, E_R) \Delta t \Delta \Omega \end{aligned} \quad (\text{III.2.3.2})$$

( $\Delta t$ : Zeitdauer des Quantenzählens,  $\Delta \Omega$ : Beobachtungsraumwinkel,  $c$ : Lichtgeschwindigkeit,  $n_{\text{Target}}$ : Teilchendichte des Targets)

mit dem Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E_Q \partial \Omega} = \frac{1}{h c \sin(\alpha)} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial k \partial \alpha} \quad (\text{III.2.3.3})$$

( $h$ : Plancksches Wirkungsquantum,  $\alpha$ : Winkel zwischen Emissionsrichtung und Bewegungsrichtung des Runawayelektrons,  $k = E_Q/(hc)$ : Wellenvektor des Quants der Energie  $E_Q$ )

<sup>5</sup> Der negative Fall ist ausgeschlossen!

und [KoMo], Formel (2BS)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial k \partial \alpha} = \frac{4 Z^2 r_e^2 y E_R}{137 k} \left\{ \frac{16 y^2 E}{(y^2 + 1)^4 E_R} - \frac{(E_R + E)^2}{(y^2 + 1)^2 E_R^2} + \left[ \frac{E_R^2 + E^2}{(y^2 + 1)^2 E_R^2} - \frac{4 y^2 E}{(y^2 + 1)^4 E_R} \right] \ln(M(y)) \right\} \quad (\text{III.2.3.4})$$

mit

$$y = \frac{E}{E_R} \alpha$$

$$\frac{1}{M(y)} = \left( \frac{k}{2 E_R E} \right)^2 + \frac{Z}{[111 (y^2 + 1)]^2} \quad (\text{III.2.3.5})$$

$$E = E_R - E_Q$$

Am besten wird das Bremsstrahlungsspektrum beschrieben durch monoenergetische Runawayelektronen der Energie  $(13,4 \pm 0,2)$  MeV (Entladungen 2057, 2058, 2062), bzw.  $(9,4 \pm 0,2)$  MeV (Entladungen 3378 - 3390) (Bild III.2.2.2). Allerdings wird durch den Wirkungsquerschnitt (III.2.3.4) die Zahl der emittierten Quanten bei hohen Energien ( $E_Q \approx E_R$ ) überschätzt: Die Wechselwirkung der Runawayelektronen mit der Wolframkugel ist keine reine Wechselwirkung mit einem dünnen Target, sondern enthält Anteile der Wechselwirkung mit einem dicken Target. Dadurch sinkt die Häufigkeit für die Emission von Quanten mit Energie  $E_Q \approx E_R$  (Penfold-Rechnungen [KoMo]). Zur Berechnung der Bremsstrahlung bei dickem Target müssen die Streuprozesse der Elektronen im Festkörper simuliert werden [KoMo], was jedoch im Rahmen dieser Arbeit unterbleiben soll.

### III.2.4 Erklärung der beobachteten Energie

Die beobachteten maximalen Energien der Runawayelektronen von 13.4 MeV, bzw. 9,4 MeV sind nicht auf die existierende Einschlußgrenze für Runawayelektronen (siehe Abschnitt II.1.1.3) zurückzuführen, die für diese Entladungen mit einem Plasmastrom von 240 kA, bzw. 320 kA etwa bei  $E_R = 85$  MeV liegt (Bild III.2.4.3). Die beobachteten maximalen Energien der Runawayelektronen sind deshalb keine Einschlußgrenze. Allerdings kann die zur Einschlußgrenze gehörige Energie in dieser Entladung auch nicht erreicht werden.

Die maximale im Tokamak erreichbare Energie der Runawayelektronen ergibt sich bei vernachlässigbarer Plasmadichte am Plasmarand (Meßort) aus dem Kräftegleichgewicht zwischen Beschleunigung durch das toroidale elektrische Feld und Abbremsung durch Abstrahlung von Synchrotronstrahlung.

$$\vec{F}_e * \vec{e}_{v_{GZ}} + \vec{F}_{\text{Synch}} = 0 \quad (\text{III.2.4.1})$$

( $\vec{F}_e$ : elektrische Kraft,  $\vec{F}_{\text{Synch}}$ : Bremskraft durch Synchrotronstrahlung (siehe Gleichung II.1.2.8))

Die maximale Energie  $E_{\text{Max}}$ , die für den Pitchwinkel 0 rad, also einer Bahn mit dem großen Plasmaradius als Krümmungsradius erreicht wird (siehe Tabelle III.2.4.1), kann jedoch die beobachtete maximale Energie nicht erklären.



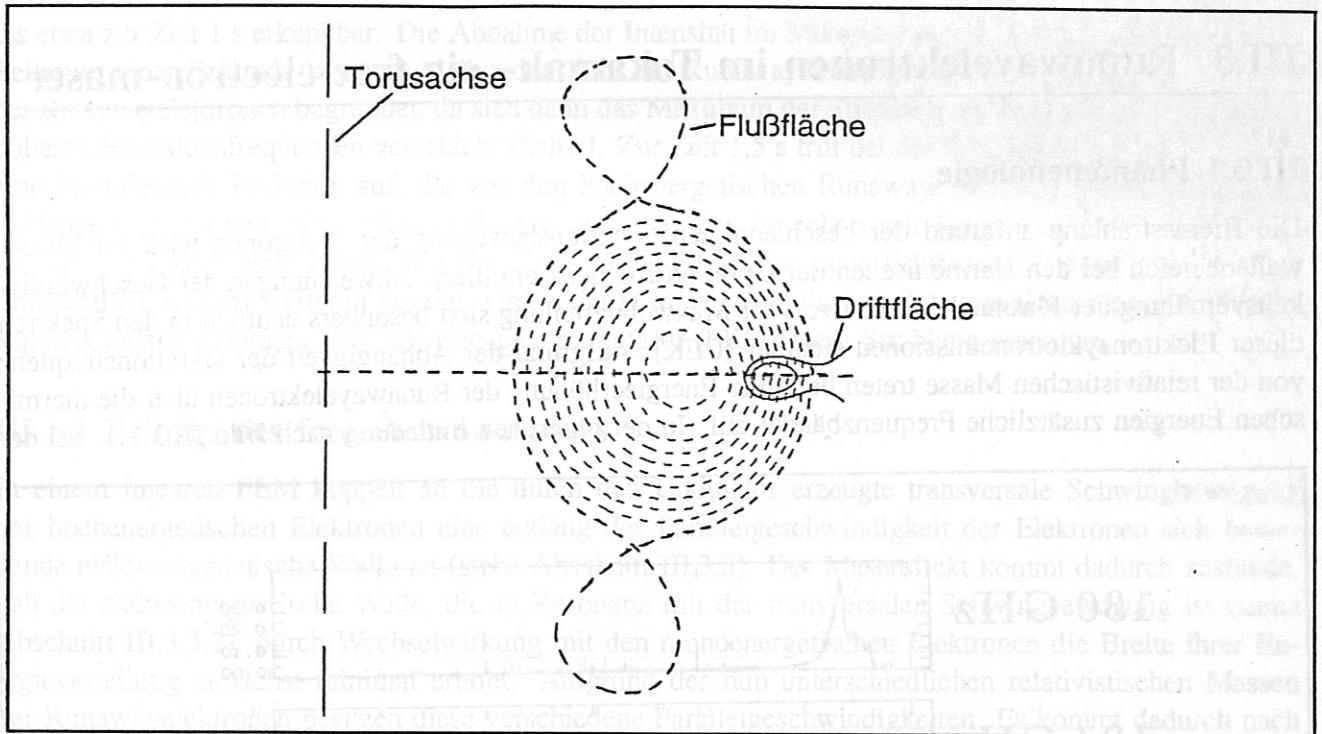


Bild III.2.4.3 Die Runawayelektronen der Energie  $E_R = 85 \text{ MeV}$  sind im Plasma des Tokamak ASDEX bei dem Plasmastrom 240 kA gerade noch eingeschlossen: In einem kleinen Raumbereich am äußeren Plasmarand existiert noch eine geschlossene Driftfläche. Für Runawayelektronen mit einer höheren Energie existieren nur offene Driftflächen, so daß diese nicht mehr eingeschlossen sind.

#	E [V/m]	$E_{\text{Max}}$ [MeV]	$E_{\text{beob}}$ [MeV]
2057, 2058, 2062	0,109	66,5	13,4
3378 - 3390	0,130	69,0	9,4

Tabelle III.2.4.1 Die für verschiedene Entladungen (Nummer #) mit Pitchwinkel 0 rad und dem toroidalen elektrischen Feld E erreichbare maximale Energie der Runawayelektronen  $E_{\text{Max}}$  kann die beobachteten maximalen Energien  $E_{\text{beob}}$  nicht erklären.

Die aus den Bremsstrahlungsspektren bestimmten Energien der Runawayelektronen lassen sich durch die Rippleresonanzenergien erklären, bei denen die Runawayelektronen in ihrer Energieerhöhung blockiert sind (siehe Tabelle III.2.4.2).

#	B [T]	n	$E_n$ [MeV]	$E_{\text{beob}}$ [MeV]
2057, 2058, 2062	2,2	4	16,6	
		5	13,3	13,4 ± 0,2
		6	11,1	
3378 - 3390	2,2	6	11,1	
		7	9,5	9,4 ± 0,2
		8	8,3	

Tabelle III.2.4.2 Vergleich zwischen den Rippleresonanzenergien  $E_n$  zu den n-ten toroidalen Rippleharmonischen für das Magnetfeld B und den beobachteten Maximalenergien  $E_{\text{beob}}$  der Runawayelektronen: Nur die  $n = 5$  (#2057, 2058, 2062), bzw.  $n = 7$  (#3378 - 3390) Rippleresonanzenergien erklären die jeweils beobachteten Energien der Runawayelektronen.

### III.3 Runawayelektronen im Tokamak- ein free-electron-maser

#### III.3.1 Phänomenologie

Die Bremsstrahlung aufgrund der beschleunigten Gyrationbewegung der Elektronen wird im Mikrowellenbereich bei den Harmonischen der Gyrationfrequenz emittiert. Abweichungen der Geschwindigkeitsverteilung der Plasmaelektronen von der Maxwellverteilung sind besonders deutlich in den Spektren dieser Elektronenzyklotronemissionen sichtbar [CEK]: Aufgrund der Abhängigkeit der Gyrationfrequenz von der relativistischen Masse treten bei einer Energieerhöhung der Runawayelektronen über die thermischen Energien zusätzliche Frequenzbänder auf. In der ohmschen Entladung nach Bild III.3.1.1, bei der

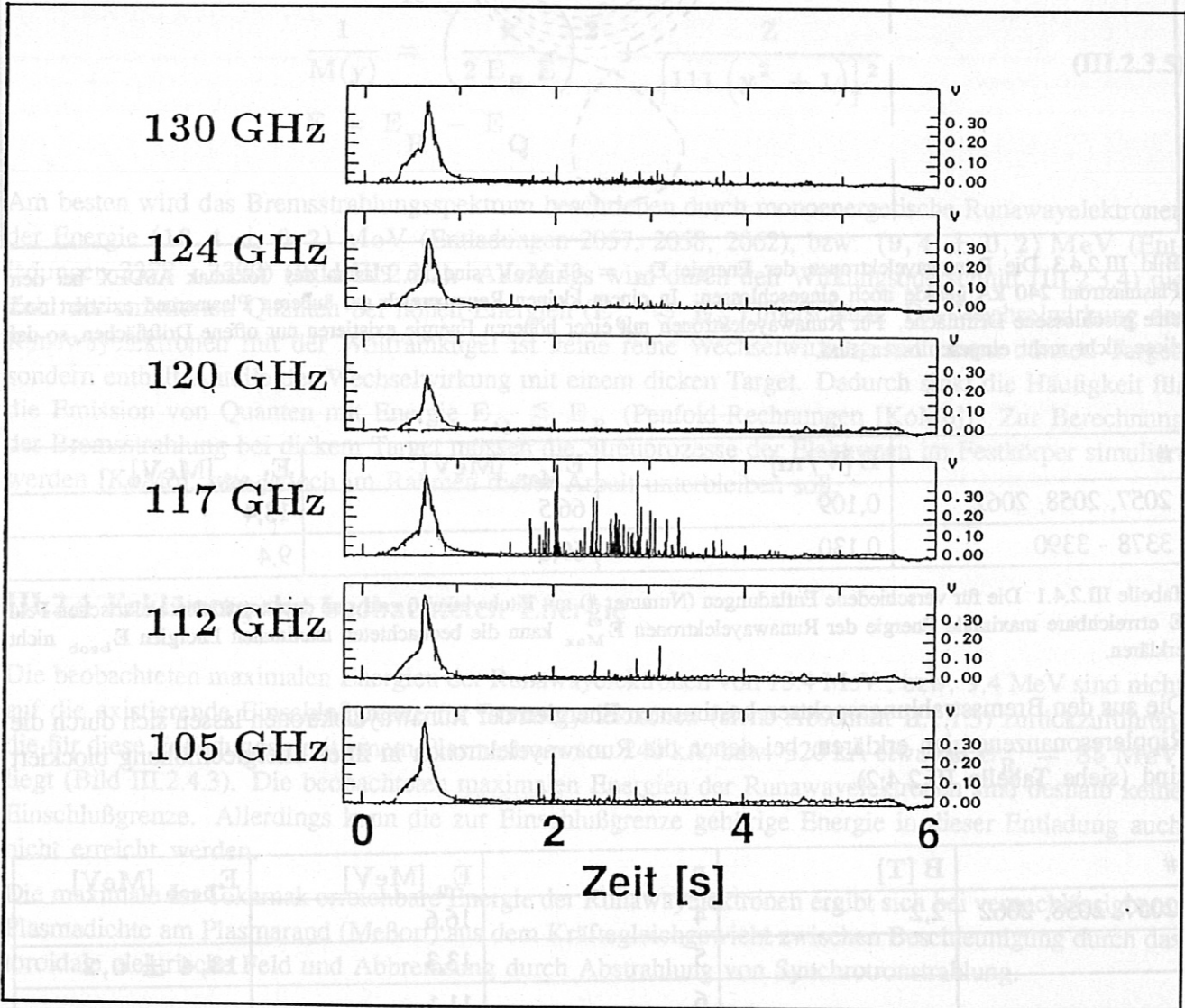


Bild III.3.1.1 Zeitverlauf mehrerer Frequenzkanäle des Mikrowellenbereichs für die ohmsche Divertor-Entladung 4770, bei der zu Beginn gezielt Runawayelektronen erzeugt wurden. Die zunächst niederenergetischen Runawayelektronen strahlen im Mikrowellenbereich inkohärente Strahlung bis zur Zeit  $t \approx 1$  s ab. Diese Emission geht zurück, da mit zunehmender Energie der Runawayelektronen sich das Emissionsmaximum zu höheren Frequenzen verschiebt. Ab der Zeit  $t \approx 1,7$  s wird von den Runawayelektronen eine fluktuierende Strahlung emittiert, die in dem Kanal mit der Frequenz 117 GHz sichtbar ist. Die Nachbarkanäle zeigen eine deutlich reduzierte Intensität trotz gleicher Empfindlichkeit. Die Emission kann also auf die Frequenz  $(116 \pm 4)$  GHz eingegrenzt werden.

am Anfang bewußt Runawayelektronen erzeugt wurden, sind diese Frequenzbänder als starke Emission



bis etwa zur Zeit 1 s erkennbar. Die Abnahme der Intensität im Mikrowellenbereich ist bei der über einen Zeitraum einer Sekunde konstant bleibenden Zahl der Runawayelektronen in der Erhöhung der Energie der Runawayelektronen begründet, da sich dann das Maximum der Strahlung als Synchrotronstrahlung zu höheren Emissionsfrequenzen verschiebt [Schw]. Zur Zeit 1,5 s tritt bei der Frequenz  $(116 \pm 4)$  GHz eine fluktuierende Emission auf, die von den hochenergetischen Runawayelektronen wieder im Mikrowellenbereich erzeugt wird. Das Auftreten dieser Spikes ist schon seit langem bekannt. Allerdings konnten sie bisher nicht erklärt werden (siehe Anhang D). Eine neue Erklärung für diese fluktuierende Emission ist, wie im weiteren gezeigt wird, daß die monoenergetischen Runawayelektronen, die in einer Rippleresonanz gefangen sind, als free-electron-maser (FEM) diese Strahlung erzeugen.

### III.3.2 Prinzip des free-electron-masers

In einem linearen FEM koppelt an die durch den Undulator erzeugte transversale Schwingbewegung der hochenergetischen Elektronen eine entlang der Parallelgeschwindigkeit der Elektronen sich bewegendelektromagnetische Welle an (siehe Abschnitt III.3.3): Der Masereffekt kommt dadurch zustande, daß die elektromagnetische Welle, die in Resonanz mit der transversalen Schwingbewegung ist (siehe Abschnitt III.3.3.2), durch Wechselwirkung mit den monoenergetischen Elektronen die Breite ihrer Energieverteilung zunächst minimal erhöht. Aufgrund der nun unterschiedlichen relativistischen Massen der Runawayelektronen besitzen diese verschiedene Parallelgeschwindigkeiten. Es kommt dadurch nach einer bestimmten Zeit zu einer Konzentration der Elektronendichte (Bunchen) in Parallelrichtung. Durch die Konzentration der schwingenden Ladungen an einem Ort kann die elektromagnetische Welle sehr effektiv ankoppeln und wird verstärkt (Bild III.3.2.2).

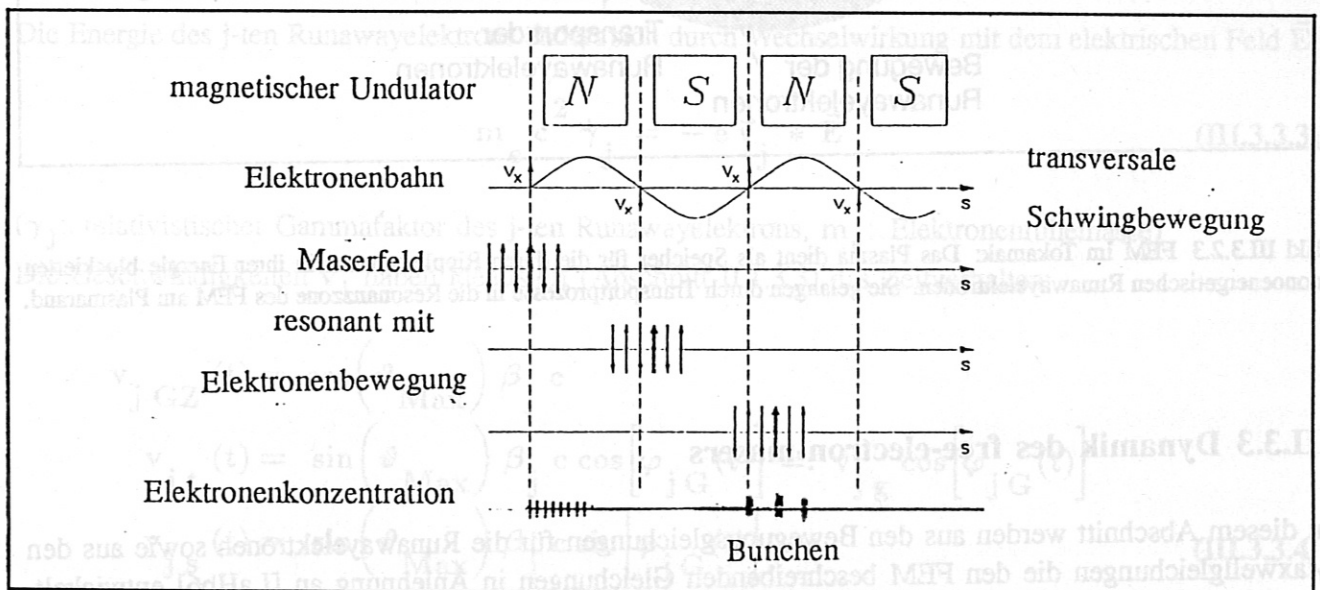


Bild III.3.2.2 Prinzip eines linearen FEM mit magnetischem Undulator

Beim Cyclotron AutoResonance Maser CARM [RiCo], [Bek] wird die transversale Schwingbewegung durch die Gyrationbewegung der monoenergetischen Elektronen in einem homogenen Magnetfeld erreicht. Es kommt hierbei zusätzlich zum Bunchen in Parallelrichtung auch zu einem Bunchen der Gyrationphasen.

Der FEM im Tokamak ist ein CARM. Es tritt hierbei das Problem der Wellenführung entlang des gekrümmten Elektronenstrahls auf, worauf in Abschnitt III.3.4.2 eingegangen wird. Da der Pitchwinkel  $\vartheta$  der Runawayelektronen mit relativistischem Faktor  $\gamma$  größer als die Winkelbreite  $1/\gamma$  rad der von ihnen spontan emittierten Strahlung ist, kann diese Strahlung nicht sofort mit den Runawayelektronen resonant wechselwirken und verstärkt werden [Wille]. Nur an den Orten, an denen die Welle durch Brechung

im Plasmedium parallel mit dem Elektronenstrahl laufen kann und trotzdem in Resonanz mit den Runawayelektronen bleibt (Abschnitt III.3.4.1) ist eine Verstärkung der spontan emittierten Strahlung möglich. Das Plasma dient hier als Speicher für die monoenergetischen Runawayelektronen, die ständig in die Resonanzzone transportiert werden, wodurch die Emission kohärenter Strahlung über mehrere Sekunden anhält (siehe Bild III.3.2.3).

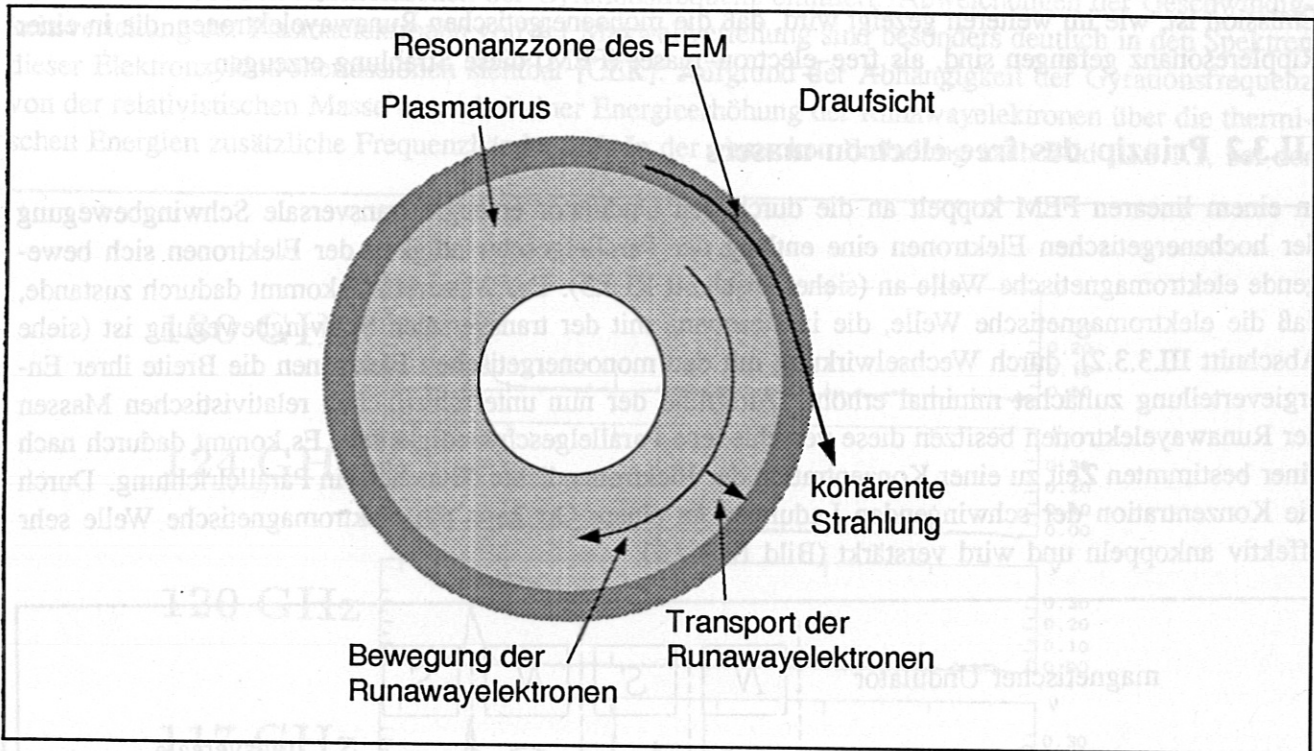


Bild III.3.2.3 FEM im Tokamak: Das Plasma dient als Speicher für die durch Rippleresonanz in ihrer Energie blockierten monoenergetischen Runawayelektronen. Sie gelangen durch Transportprozesse in die Resonanzzone des FEM am Plasmatorand.

### III.3.3 Dynamik des free-electron-masers

In diesem Abschnitt werden aus den Bewegungsgleichungen für die Runawayelektronen sowie aus den Maxwellgleichungen die den FEM beschreibenden Gleichungen in Anlehnung an [LaHb6] entwickelt. Mit Hilfe dieser Beziehungen ergeben sich die Bedingungen für das Einsetzen der kollektiven Instabilität, durch die die Amplitude der elektromagnetischen Welle, die Energiebreite des Elektronenstrahls und das Bunchen der Elektronendichte mit der Zeit exponentiell zunimmt. Die bei der Beschreibung des FEM durch die Pendelgleichung [Wille], [LaHb6] notwendige Annahme konstanter Phase der Maserwelle, wird bei der Beschreibung durch die kollektive Instabilität fallengelassen. Bei Zulassung einer nicht konstanten Wellenphase ergibt sich eine Führung der Welle durch den FEM-Effekt (Abschnitt III.3.4.2), die für den FEM im Tokamak benötigt wird. Außerdem ergibt sich eine Abhängigkeit der Verstärkung von der Elektronenenergie, mit der die beobachtete Emission konsistent erklärt werden kann (Abschnitt III.3.6.3). Mit dem Wert der Gewinns kann die für den stattfindenden FEM-Prozess notwendige Dichte der Runawayelektronen abgeschätzt werden (Abschnitt III.3.5). Im folgenden wird die Verstärkung des CARM, die sich aus der kollektiven Instabilität ergibt, hergeleitet.



### III.3.3.1 Grundgleichungen

Aus den Maxwellgleichungen ergeben sich für das Vektorpotential  $\vec{A}$  und das elektrostatische Potential  $U$  (elektrisches Feld  $\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \partial\vec{A}/\partial t$ ) im Vakuum die Wellengleichungen [BeSa], [LaHb6]

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U &= -\frac{1}{\epsilon_0} n_R e \end{aligned} \quad (\text{III.3.3.1})$$

( $c$ : Lichtgeschwindigkeit,  $\mu_0$ : magnetische Feldkonstante,  $\epsilon_0$ : Dielektrizitätskonstante,  $n_R$ : Teilchendichte der Runawayelektronen,  $e$ : Elementarladung).

Das Vektorpotential hat seine Quelle in der Stromdichte

$$\vec{J} = -e \sum_{j=1}^{N_R} \vec{v}_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (\text{III.3.3.2})$$

( $\vec{v}_j, \vec{r}_j$ : Geschwindigkeit, Ort des  $j$ -ten Runawayelektrons,  $N_R$ : Zahl der in Wechselwirkung mit der elektromagnetischen Welle stehenden Runawayelektronen)

Die Energie des  $j$ -ten Runawayelektrons ändert sich durch Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld  $\vec{E}$ :

$$m_e c^2 \dot{\gamma}_j = -e \vec{v}_j * \vec{E} \quad (\text{III.3.3.3})$$

( $\gamma_j$ : relativistischer Gammafaktor des  $j$ -ten Runawayelektrons,  $m_e$ : Elektronenruhemasse)

Die Geschwindigkeiten  $\vec{v}_j$  haben idealisiert (Abschnitt II.1.3.3) das Zeitverhalten:

$$\begin{aligned} v_{j \text{ GZ}}(t) &= \cos(\vartheta_{\text{Max}}) \beta_j c \\ v_{j t}(t) &= \sin(\vartheta_{\text{Max}}) \beta_j c \cos[\varphi_{j G}(t)] =: v_{j g} \cos[\varphi_{j G}(t)] \\ v_{j s}(t) &= \sin(\vartheta_{\text{Max}}) \beta_j c \sin[\varphi_{j G}(t)] \\ \varphi_{j G}(t) &= \int_0^t k_{j u} v_{j \text{ GZ}} dt' + \varphi_{j G 0} \end{aligned} \quad (\text{III.3.3.4})$$

( $v_{j \text{ GZ}}, v_{j t}, v_{j s}$ : Geschwindigkeit der Runawayelektronen in Richtung von  $\vec{e}_{\text{GZ}}, \vec{e}_t, \vec{e}_s$ ,  $c$ : Lichtgeschwindigkeit,  $\vartheta_{\text{Max}}$ : Pitchwinkel der Runawayelektronen,  $\beta_j = \sqrt{1 - 1/\gamma_j^2}$  mit  $\gamma_j$  als jeweiligem relativistischem Gammafaktor mit  $\gamma_j(t=0) = \gamma_0$  und  $\gamma_0$  als relativistischen Gammafaktor bei Eintritt in den FEM-Prozeß,  $k_{j u} = (eB)/[\gamma_j m_e \cos(\vartheta_{\text{Max}}) \beta_j c]$ ,  $\varphi_{j G}$ : Gyrationphase,  $\varphi_{j G 0}$ : Gyrationphase bei  $t=0$ )

### III.3.3.2 Kohärenzbedingung im Vakuum

Bewegt sich eine zirkularpolarisierte elektromagnetische Welle parallel zur Geschwindigkeit des Gyrationzentrums der Runawayelektronen,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_M \cos(k_M r_{GZ} - \omega_M t + \psi_M) \vec{e}_s + E_M \sin(k_M r_{GZ} - \omega_M t + \psi_M) \vec{e}_t \quad (\text{III.3.3.5})$$

( $E_M, \omega_M, k_M, \psi_M$ : Amplitude, Kreisfrequenz, Wellenvektor und Phase der Maserwelle,  $r_{GZ}$ : Wegkoordinate entlang  $\vec{e}_{GZ}$ )

so ist ein irreversibler Energieaustausch zwischen dem Elektron und der elektromagnetischen Welle möglich, falls in Gleichung (III.3.3.3) der Ausdruck

$$\begin{aligned} \vec{v}_j * \vec{E} &= v_{jg} \sin[\varphi_{jG}(t)] E_M \cos(k_M r_{jGZ} - \omega_M t + \psi_M) \\ &+ v_{jg} \cos[\varphi_{jG}(t)] E_M \sin(k_M r_{jGZ} - \omega_M t + \psi_M) \\ &= E_M v_{jg} \left[ \sin(\theta_j + \psi_M) - \sin(\theta'_j + \psi_M) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.3.3.6})$$

mit

$$\theta_j = \int_0^t k_{ju} v_{jGZ} dt' + \varphi_{jG0} + k_M r_{jGZ} - \omega_M t \quad (\text{III.3.3.7})$$

$$\theta'_j = - \int_0^t k_{ju} v_{jGZ} dt' - \varphi_{jG0} + k_M r_{jGZ} - \omega_M t$$

von der Zeit  $t$  unabhängig ist. Es muß also die Bewegung so erfolgen, daß entweder  $\theta_j$ , oder  $\theta'_j$  unabhängig von  $t$  ist.

Der Ort des Elektrons,  $r_{jGZ}(t) = \int_0^t v_{jGZ} dt' + r_{j0}$  ändert sich mit der Geschwindigkeit  $v_{jGZ}$ .

Es kann deshalb nur die Phase  $\theta_j$  zeitunabhängig werden, da hier die Geschwindigkeit  $v_{jGZ} < c$  multipliziert mit dem größeren Wellenvektor  $k_M + k_{ju}$  wieder den Wert  $\omega_M = k_M c$  haben kann, was bei  $\theta'_j$  nicht möglich ist. Aus der sich hierdurch ergebenden Kohärenzbedingung

$$\dot{\theta}_j = (k_M + k_{ju}) v_{jGZ} - \omega_M = 0 \quad (\text{III.3.3.8})$$

ergibt sich die Kreisfrequenz der Strahlung, die zu den Elektronen mit  $\gamma_j = \gamma_r$  resonant ist, zu

$$\omega_M = \frac{v_{GZr} k_{ur}}{1 - v_{GZr}/c} \quad (\text{III.3.3.9})$$

( $v_{GZr}, k_{ur}$ : Werte von  $v_{jGZ}, k_{ju}$  für  $\gamma_j = \gamma_r$ )

Die Phase  $\theta'_j$  mittelt sich nach kurzer Zeit stets zu Null und trägt deshalb zum längerfristigen Energieaustausch zwischen Welle und Teilchen nicht bei.



### III.3.3.3 Vereinfachung der Grundgleichungen

Zur Berechnung der Verstärkung des CARM werden die Grundgleichungen aus Abschnitt III.3.3.1 vereinfacht:

Zum Verständnis der Wechselwirkung zwischen elektromagnetischer Welle und Teilchenbewegung werden hier zunächst Raumladungseffekte vernachlässigt, also  $U = 0$  gesetzt. Die Welle  $\vec{A}$  wird dann nur noch von der Stromdichte  $\vec{J}_\perp$  senkrecht zur Bewegungsrichtung der Runawayelektronen angetrieben.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_\perp = -\mu_0 \left( J_s \vec{e}_s + J_t \vec{e}_t \right) \quad (\text{III.3.3.10})$$

( $J_s, J_t$ : Stromdichte in Richtung  $\vec{e}_s, \vec{e}_t$  senkrecht zur Bewegungsrichtung  $\vec{e}_{GZ}$  der Runawayelektronen).

#### III.3.3.3.1 Zeitliche Änderung der Phase

In diesem Abschnitt wird die zeitliche Änderung der Phase zwischen Maserwelle und Schwingbewegung der Runawayelektronen berechnet. Es wird dazu der aus der Literatur bekannte Ausdruck für einen statischen Undulator, der zu longitudinalem Bunchen führt, erweitert, um den Effekt des Gyrationenbunchens in transversaler Richtung zu berücksichtigen.

Die Wechselwirkung zwischen Welle und Teilchen wird durch die Hamiltonfunktion

$$H = c \left[ \left( \sum_{j=1}^{N_R} \vec{\pi}_j - e \vec{A} \right)^2 + m_e^2 c^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.3.3.11})$$

( $\vec{\pi}_j$ : kanonischer Impuls des j-ten Elektrons)

beschrieben. Da die Gesamtenergie des Systems konstant ist, ist H eine Erhaltungsgröße [LaHb6].

Die Welle  $\vec{A}$ , die sich entlang der Geschwindigkeitsrichtung des Gyrationenzentrums  $\vec{e}_{GZ}$  mit Koordinate  $r_{GZ}$  bewegt, ändert bei Wechselwirkung mit den Elektronen ihre Amplitude mit der Zeit. Für das Verständnis der Dynamik reicht es hier anzunehmen, daß über einen genügend kleinen Raumbereich senkrecht zu  $\vec{e}_{GZ}$ , also in Richtung von  $\vec{e}_s, \vec{e}_t$  sich die Amplitude von  $\vec{A}$  nicht ändern soll. Es soll deshalb  $\vec{A}$  nur eine Funktion von  $r_{GZ}$  und t sein:

$$\vec{A} = \vec{A} \left( r_{GZ}, t \right) \quad (\text{III.3.3.12})$$

$\pi_{js}, \pi_{jt}$  sind deshalb Erhaltungsgrößen und die entsprechenden Geschwindigkeiten  $v_{js}, v_{jt}$  variieren durch die Wechselwirkung mit der Welle  $\vec{A}$ :

$$v_{js, t} = -\frac{e}{\gamma_j m_e} A_{s, t} + \frac{\pi_{js, t}}{\gamma_j m_e} \quad (\text{III.3.3.13})$$

Die Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums

$$v_{jGZ}^2 = \left( 1 - \frac{1}{\gamma_j^2} \right) c^2 - v_{js}^2 - v_{jt}^2 \quad (\text{III.3.3.14})$$

variiert aufgrund der Abhängigkeit von  $v_{js}, v_{jt}$ , (Gleichung (III.3.3.13)) durch die Wechselwirkung mit der Welle  $\vec{A}$  in der Zeit.

Bei einem statischen Undulator wird nur die Variation von  $v_{j\text{GZ}}$  mit  $\gamma_j$  bei konstantem  $k_{j\text{u}}$  berücksichtigt, was zu einem Bunchen in longitudinaler Richtung führt. In dieser Arbeit wird allerdings auch die Abhängigkeit von  $k_{j\text{u}}$  von  $\gamma_j$  (Gleichung (III.3.3.4)) berücksichtigt, die von der Änderung der Gyrationfrequenz mit  $\gamma_j$  herrührt und zu einem Bunchen der Gyrationphasen führt. Es wird dazu der Term  $k_{j\text{u}} v_{j\text{GZ}}$  im Ausdruck (III.3.3.8) für  $\dot{\theta}_j$  um  $\gamma_j = \gamma_r$  entwickelt:

$$k_{j\text{u}} v_{j\text{GZ}} = \frac{eB}{\gamma_j m_e} = \frac{eB}{\gamma_r m_e} + \frac{eB}{\gamma_r m_e} \frac{\gamma_r - \gamma_j}{\gamma_r} \quad (\text{III.3.3.15})$$

Setzt man dann  $v_{j\text{GZ}}$  nach (III.3.3.14) in die Beziehung für  $\dot{\theta}_j$  ein und berücksichtigt  $\pi_{jt}/\gamma_j m_e c = \pi_{js}/\gamma_j m_e c = \sin(\alpha) \ll 1$  (erfüllt für die typischen Pitchwinkel der Runawayelektronen  $\alpha \approx 0,1 - 0,2$  rad), so ergibt sich für die zeitliche Änderung der Phase  $\theta_j$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_j = & v_{\text{GZr}} k_{\text{ur}} \left( 1 - \frac{\gamma_r^2}{\gamma_j^2} \right) + \frac{e E_M}{\gamma_j^2 m_e c} \left[ \gamma_0 \frac{v_{j\text{G}}}{c} \cos(\theta_j + \psi_M) - \frac{e E_M}{2 m_e c^2 k_M} \right] \\ & + \frac{eB}{\gamma_r m_e} \frac{\gamma_r - \gamma_j}{\gamma_r} \end{aligned} \quad (\text{III.3.3.16})$$

### III.3.3.2 Zeitliche Änderung der Elektronenenergie

Die zeitliche Änderung der Energie der einzelnen Elektronen ist nach Gleichung (III.3.3.3)

$$\dot{\gamma}_j = - \frac{e E_M v_{j\text{G}}}{m_e c^2} \sin(\theta_j + \psi_M) \quad (\text{III.3.3.17})$$

### III.3.3.3 Zeitliche Änderung der Amplitude der elektromagnetischen Welle

Zur Vereinfachung der Wellengleichung wird die komplexe Wellenamplitude

$$\hat{A} := A_s - i A_t = \frac{E_M e^{i\psi_M}}{k_M} e^{i k_M (z - ct)} =: \frac{i \alpha}{k_M} e^{i k_M (z - ct)} \quad (\text{III.3.3.18})$$

mit  $\alpha := -i E_M e^{i\psi_M}$

und der komplexe Strom  $\hat{J} := J_s - i J_t$  verwendet. Unter der Annahme, daß die relative Änderung der Amplitude über die Wegstrecke einer Wellenlänge vernachlässigbar klein ist,

$$\frac{1}{k_M \alpha} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial r_{\text{GZ}}} \right| \ll 1, \quad \frac{1}{k_M \alpha c} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right| \ll 1 \quad (\text{III.3.3.19})$$

folgt aus der Wellengleichung (III.3.3.10) [LaHb6]

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial r_{\text{GZ}}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \alpha(r_{\text{GZ}}, t) = \\ & = \frac{\mu_0}{2} c e \sigma_0 \sum_{j=1}^{N_R} \delta(r_{\text{GZ}} - r_{j\text{GZ}}) \frac{1}{\gamma_j} \left( \gamma_0 \frac{v_{j\text{G}}}{c} e^{-i\theta_j} - \frac{i e \alpha}{m_e c^2 k_M} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.3.3.20})$$



wobei  $e \sigma_0$  die Flächenladungsdichte des Elektronenstrahls in der  $\vec{e}_s, \vec{e}_t$  Ebene ist.  $\alpha$  beschreibt das durch den FEM laufende Wellenpaket. Entwickelt man  $\alpha$  in eine Fourierreihe,

$$\alpha \left( t, r_{GZ} - v_{gr} t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) e^{i \frac{2\pi n}{L_W} \left( r_{GZ} - v_{gr} t \right)} \quad (\text{III.3.3.21})$$

( $v_{gr}$  : Gruppengeschwindigkeit der Welle,  $L_W$  : charakteristische Länge des Wellenpakets) und setzt diese Entwicklung in (III.3.3.20) ein, so ergibt sich in nullter Ordnung:

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{\mu_0 e c \gamma_0 v_g \sigma_0 N_R}{2 L_W} B(t) - \frac{\mu_0 e^2 \sigma_0}{2 m_e k_M L_W} i \alpha_0 \sum_{j=1}^{N_R} \frac{1}{\gamma_j} \quad (\text{III.3.3.22})$$

$$B(t) = \frac{1}{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} \frac{e^{-i\theta_j}}{\gamma_j}$$

( $v_g$  : Wert von  $v_{jg}$  für  $\gamma_j = \gamma_0$ )

Der Bunchingfaktor  $B(t)$  beschreibt die Kopplung zwischen Welle und Teilchen: Sie ist dann maximal, falls alle Teilchen die gleiche Phase  $\theta_j = \theta$  ( $j = 1, \dots, N_R$ ) besitzen. Sind die Phasen gleichmäßig verteilt, so ist  $B(t) = 0$  und die Teilchen koppeln nicht mit der Welle. Der zweite Term in (III.3.3.22) trägt zu einer Änderung der Phase  $\psi_M$  der Welle bei [LaHb6] und stellt damit den grundlegenden Unterschied zur Beschreibung des FEM durch die Pendelgleichung dar, bei der  $\psi_M$  als konstant angenommen wird [LaHb6], [Wille].

### III.3.3.4 FEM-Gleichungen mit normierten Variablen und Raumladungseffekten

Zur weiteren Vereinfachung der Gleichungen (III.3.3.16), (III.3.3.17), (III.3.3.22) werden normierte Variablen verwendet:

Mit den neuen Variablen [LaHb6]

$$\psi_j := \theta_j - \dot{\theta}_0 t; \quad \Gamma_j := \frac{1}{\rho} \frac{\gamma_j}{\gamma_0}; \quad A := e \alpha_0 e^{i \dot{\theta}_0 t} \frac{K}{4 m_e c^2 \gamma_r^2 k_{ur} \rho^2}; \quad (\text{III.3.3.23})$$

( $K = \gamma_0 v_{g0}/c$ : Undulatorparameter)

und

$$\dot{\theta}_0 = v_{GZr} k_{ur} \left( 1 - \frac{\gamma_r^2}{\gamma_0^2} \right); \quad \rho = \left( \frac{v_g \gamma_0^2 \Omega_p}{4 \gamma_r^2 c v_{GZr} k_{ur}} \right)^{\frac{2}{3}}; \\ \Omega_p = \sqrt{\frac{n_R e^2}{\epsilon_0 \gamma_0 m_e}}; \quad \xi = \frac{\gamma_0^2 - \gamma_r^2}{2 \gamma_r^2 \rho}; \quad \tau = 2 v_{GZr} k_{ur} \rho \left( \frac{\gamma_r}{\gamma_0} \right)^2 t; \quad (\text{III.3.3.24})$$

ergeben sich die FEM-Gleichungen (III.3.3.16), (III.3.3.17), (III.3.3.22) zu

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_j}{d\tau} &= \frac{1}{2\rho} \left( 1 - \frac{1}{\rho^2 \Gamma_j^2} \right) + \left( \xi + \frac{1}{2\rho} \right) \left( 1 - \rho \Gamma_j \sqrt{2\rho\xi + 1} \right) \\
&+ \frac{i}{\rho \Gamma_j^2} \left[ A e^{i\psi_j} - \text{c.c.} \right] - 2\rho \frac{1 + K^2}{K^2} \frac{|A|^2}{\Gamma_j^2} \\
\frac{d\Gamma_j}{d\tau} &= -\frac{1}{\rho} \left( \frac{A}{\Gamma_j} e^{i\psi_j} + \text{c.c.} \right) \\
\frac{dA}{d\tau} &= \left\langle \frac{e^{-i\psi_j}}{\rho \Gamma_j} \right\rangle + i A \xi - i A 2\rho \frac{1 + K^2}{K^2} \left\langle \frac{1}{\Gamma_j} \right\rangle
\end{aligned} \tag{III.3.3.25}$$

$$\text{mit } \langle \cdot \rangle = \frac{1}{N_R} \sum_{j=1}^{N_R} (\cdot)$$

Ist der Elektronenstrahl gebuncht, so ergibt sich durch die modulierte Ladungsdichte ein longitudinales elektrisches Feld, das nach Gleichung (III.3.3.3) mit den Elektronen Energie austauscht. Für eine Dichtemodulation mit der Wellenlänge der Strahlung lauten die FEM-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_j}{d\tau} &= \frac{1}{2\rho} \left[ 1 - \frac{1}{\rho^2 \Gamma_j^2} + (2\rho\xi + 1) \left( 1 - \rho \Gamma_j \sqrt{2\rho\xi + 1} \right) \right] \\
&+ \frac{i}{\rho \Gamma_j^2} \left( A e^{i\psi_j} - \text{c.c.} \right) - \sigma^2 \frac{|A|^2}{2 \Gamma_j^2} \\
\frac{d\Gamma_j}{d\tau} &= -\frac{1}{\rho} \left[ \left( \frac{A}{\Gamma_j} + i \sigma^2 \langle e^{-i\psi_j} \rangle \right) e^{i\psi_j} + \text{c.c.} \right] \\
\frac{dA}{d\tau} &= \left\langle \frac{e^{-i\psi_j}}{\rho \Gamma_j} \right\rangle + i A \xi - i \frac{\sigma^2}{2\rho} \left\langle \frac{1}{\Gamma_j} \right\rangle A
\end{aligned} \tag{III.3.3.26}$$

( $\sigma^2 = 4\rho^2 \frac{1+K^2}{K^2}$  : Raumladungparameter).

### III.3.3.5 Berechnung des Gewinns

Die kollektive Instabilität führt zu einer in der Zeit exponentiell anwachsenden Wellenamplitude und damit zum Einsetzen der Masertätigkeit. Zur Bestimmung der Bedingungen für ihr Auftreten werden die bisherigen Variablen um ihre Gleichgewichtswerte entwickelt:

$$\begin{aligned}
A &= 0 + A \\
\psi_j &= \psi_{0j} + \theta_j, \quad \psi_{0j} = \frac{2\pi(j-1)}{N_R} \\
\rho \Gamma_j &= 1 + \eta_j
\end{aligned} \tag{III.3.3.27}$$

Nach Einsetzen der neuen Variablen  $A$ ,  $\psi_j$ ,  $\eta_j$  in die Gleichungen (III.3.3.26) und Linearisierung ergeben sich mit den Variablen



$$\mathbf{X} = \mathbf{A}; \quad \mathbf{Y} = \langle e^{-i\psi_{0j}} \theta_j \rangle; \quad \mathbf{Z} = \langle \frac{e^{-i\psi_{0j}} \eta_j}{\rho} \rangle; \quad (\text{III.3.3.28})$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{X}} + i \left( \xi - \frac{\sigma^2}{2} \right) \mathbf{X} - i \mathbf{Y} - \rho \mathbf{Z} &= 0 \\ \dot{\mathbf{Y}} - i \rho \mathbf{X} - \mathbf{Z} \left[ 1 + \frac{(2\rho\xi + 1)^{3/2}}{2} \right] &= 0 \\ \dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{X} + \frac{\sigma^2}{\rho} \mathbf{Y} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3.3.29})$$

Mit dem Ansatz

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(0) e^{i\lambda\tau}; \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(0) e^{i\lambda\tau}; \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}(0) e^{i\lambda\tau}; \quad (\text{III.3.3.30})$$

wobei  $\lambda$  ein Eigenwert von (III.3.3.29) ist, folgt aus (III.3.3.29) die Dispersionsrelation:

$$\begin{aligned} \left( \lambda - \xi + \frac{\sigma^2}{2} \right) \left[ \lambda^2 - \frac{\sigma^2}{\rho} \left( 1 + \frac{(2\rho\xi + 1)^{3/2}}{2} \right) \right] + \\ + 2\rho\lambda + \rho\sigma^2 + 1 + \frac{(2\rho\xi + 1)^{3/2}}{2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3.3.31})$$

$\mathbf{X}(0)$ ,  $\mathbf{Y}(0) \neq 0$  sind Fluktuationen von  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ . Der Wert  $\mathbf{A}(0) \neq 0$  ist die von den Runawayelektronen mit der stärksten Intensität emittierte Welle (siehe Abschnitt III.3.4.1), die die kollektive Instabilität antreibt. Die Resonanzfrequenz bestimmt sich also aus dem Wert  $\gamma_r$  und dem Pitchwinkel  $\vartheta_{\text{Max}}$ , an dem die Verteilung der Runawayelektronen ein Maximum besitzt. Die kollektive Instabilität tritt auf, falls ein komplexes  $\lambda$  mit  $\text{Im}(\lambda) < 0$  existiert (Bild III.3.3.5.4). Dies ist dann der Gewinn. Für  $\rho \rightarrow 0$  (was typisch für die Runawayelektronendichten von  $10^{13} - 10^{14} \text{ m}^{-3}$  an ASDEX Upgrade ist) liegt der maximale Gewinn bei  $\xi \approx 0$ , also bei der Resonanzenergie. Dies widerspricht dem Verhalten des FEM, das man aus der Pendelgleichung erhält, da dort für  $\xi \approx 0$  die Verstärkung Null ist. Die Ursache hierfür ist, daß in der Pendelgleichung die Phase der elektromagnetischen Welle als konstant angenommen wird [LaHb6] (siehe Abschnitt III.3.3.3.3).

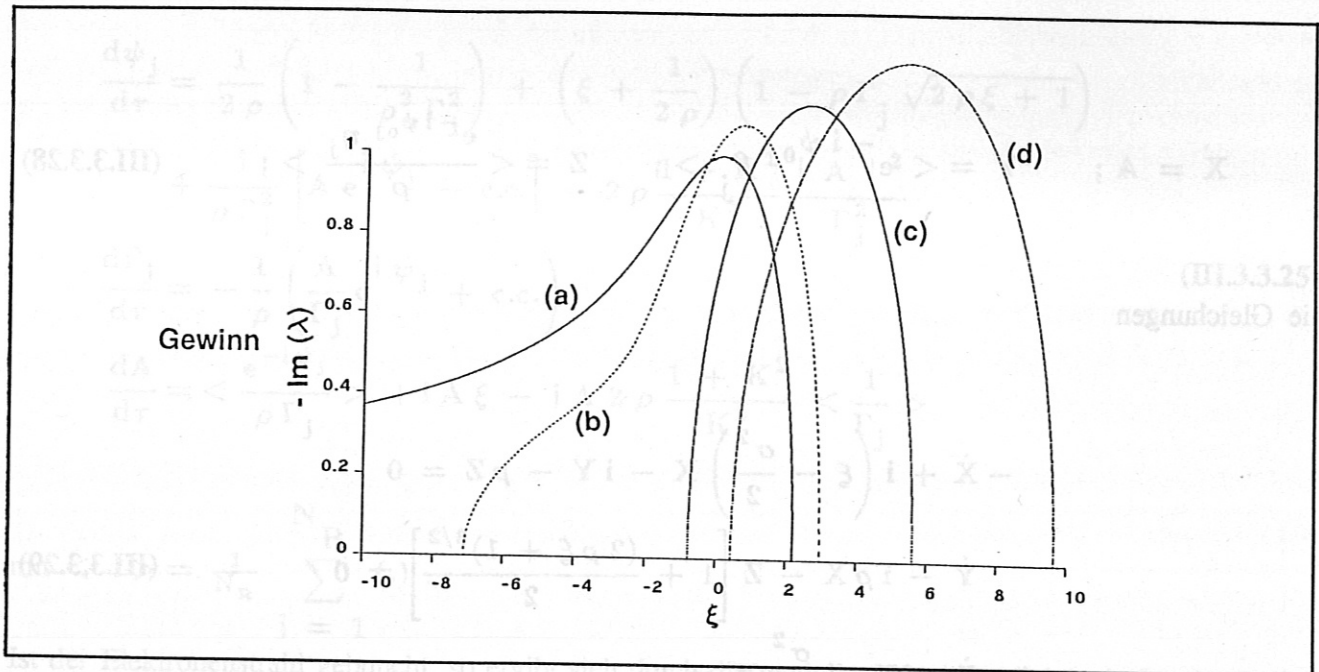


Bild III.3.3.5.4 Abhängigkeit des Gewinns  $\text{Im}(\lambda) < 0$  von der normierten Elektronenstrahldichte  $\rho$  und  $\xi$ , der Abweichung der Elektronenenergien von der Resonanzenergie ( $\xi < 0$ : Elektronenenergie kleiner Resonanzenergie,  $\xi > 0$ : umgekehrt). Der Gewinn wurde berechnet für eine typische Elektronenenergie von 11,5 MeV und den Pitchwinkel  $\vartheta_{\text{Max}} = 0,2$  rad und  $\rho = 0,01$  (a),  $\rho = 0,2$  (b),  $\rho = 0,4$  (c),  $\rho = 0,5$  (d). Für  $\rho \rightarrow 0$  (Kurve (a), was typisch für die Runawayelektronendichten von  $10^{13} - 10^{14} \text{ m}^{-3}$  an ASDEX Upgrade ist) liegt der maximale Gewinn bei  $\xi \approx 0$ , also bei der Resonanzenergie. Dies widerspricht dem Verhalten des FEM, das man aus der Pendelgleichung erhält, da dort für  $\xi \approx 0$  die Verstärkung Null ist. Die Ursache hierfür ist, daß in der Pendelgleichung die Phase der elektromagnetischen Welle als konstant angenommen wird (siehe Abschnitt III.3.3.3.3).

### III.3.4 FEM im Tokamak

Für den FEM im Tokamak müssen noch zusätzliche Anforderungen gegenüber dem FEM im Vakuum erfüllt werden. Es sind dies eine spezielle Forderung an die Variation des Brechungsindex des Plasmas, die nur an bestimmten Orten erfüllt ist, und damit die FEM-Resonanz-Positionen im Tokamak bestimmt (Abschnitt III.3.4.1), sowie das Problem der Führung der Welle entlang des gekrümmten Elektronenstrahls (Abschnitt III.3.4.2) und die spektrale Breite der emittierten Strahlung (Abschnitt III.3.4.3).

#### III.3.4.1 Kohärenzbedingung im Plasma

Der momentane Geschwindigkeitsvektor schließt mit der Driftgeschwindigkeitsrichtung den Pitchwinkel  $\vartheta$  ein (siehe Abschnitt III.3.2).

Aus der Kohärenzbedingung

$$\left( k_M + k_{ur} \right) v_{GZr} - \omega_M = 0 \quad (\text{III.3.4.1})$$

folgt mit  $v_{GZr} = \cos(\vartheta) \beta_r c$ ,  $\beta_r = \sqrt{1 - 1/\gamma_r^2}$ ,  $k_M = k_{M \text{ Vak}} n$  und  $\omega_M = k_{M \text{ Vak}} c$  und  $n$  als Brechungsindex die Wellenzahl der resonanten Welle

$$k_{M \text{ Vak}} = \frac{v_{GZr} k_{ur}}{1 - n v_{GZr}} = \frac{\cos(\vartheta) \beta_r k_{ur}}{1 - n \beta_r \cos(\vartheta)} \quad (\text{III.3.4.2})$$

bzw. deren Kreisfrequenz



$$\omega_M = \frac{\cos(\vartheta) \beta_r c k_{ur}}{1 - n \beta_r \cos(\vartheta)} = \frac{\omega_{ce}}{1 - n \beta_r \cos(\vartheta)} \quad (\text{III.3.4.3})$$

Da die Runawayelektronen relativistische Teilchen sind, wird die von ihnen nach dem normalen Dopplereffekt emittierte elektromagnetische Welle mit der Winkelbreite  $1/\gamma$  rad in Richtung der momentanen Geschwindigkeit ausgestrahlt. Sie schließt also mit der Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums den Pitchwinkel  $\vartheta$  ein. In Richtung von  $\vec{e}_{GZ}$  wird deshalb praktisch keine Strahlung emittiert, da typischerweise  $K = \gamma \sin(\vartheta) \approx 4 \gg 1$  (Bild III.3.4.1.5).

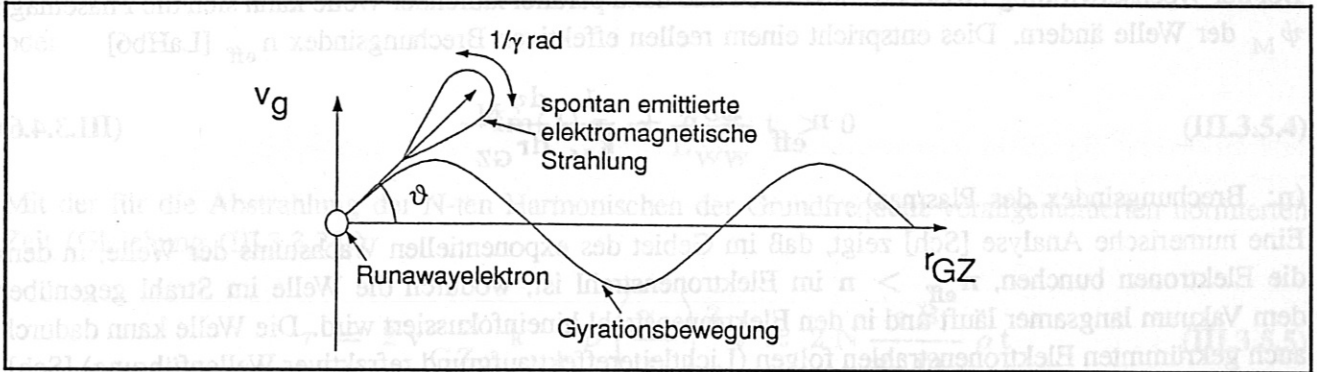


Bild III.3.4.1.5 Da die Runawayelektronen relativistische Teilchen sind, wird die von ihnen nach dem normalen Dopplereffekt emittierte elektromagnetische Welle mit der Winkelbreite  $1/\gamma$  rad in Richtung der momentanen Geschwindigkeit ausgestrahlt. Sie schließt also mit der Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums den Pitchwinkel  $\vartheta$  ein. In Richtung von  $\vec{e}_{GZ}$  wird deshalb praktisch keine Strahlung emittiert, da typischerweise  $K = \gamma \sin(\vartheta) \approx 4 \gg 1$ .

Die Strahlung, die von den Runawayelektronen spontan in Richtung der maximalen Brechzahländerung, also zum Plasmazentrum hin emittiert wird, läuft nach den Gesetzen der Brechung nach einem toroidalen Winkel von  $0,2 - 0,3$  rad und einer radialen Verschiebung von etwa  $1$  cm tangential und kann dann von den Elektronen geführt werden (siehe Abschnitt III.3.4.2), falls ihre Frequenz noch mit der Resonanzfrequenz an der neuen Position übereinstimmt.

Da im Plasma im allgemeinen die Gyrationfrequenz  $\omega_{ce} = \frac{e B(R)}{\gamma m_e}$  und der Brechungsindex  $n(\vartheta, \vec{r})$  mit dem Emissionsort  $\vec{r} = R \vec{e}_R + z \vec{e}_z$  und dem Emissionswinkel  $\vartheta$  variieren (Anhang F), ist für das Einsetzen der Instabilität zu fordern, daß die Resonanzfrequenz von  $\vec{r}$  nicht abhängt:  $\vec{\nabla} \omega_M = 0$ . Aus den Ableitungen  $\partial \omega_M / \partial R$  und  $\partial \omega_M / \partial z$  für  $\vec{\nabla} \vartheta \approx 0$  (was gut erfüllt ist),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_M}{\partial R} &= \frac{e B(R)}{\gamma_r m_e} \frac{1/R [1 - n \beta_r \cos(\vartheta)] - \beta_r \cos(\vartheta) \partial n / \partial R}{[1 - n \beta_r \cos(\vartheta)]^2} \\ \frac{\partial \omega_M}{\partial z} &= \frac{e B(R)}{\gamma_r m_e} \frac{\beta_r \cos(\vartheta) \partial n / \partial z}{[1 - n \beta_r \cos(\vartheta)]^2} \end{aligned} \quad (\text{III.3.4.4})$$

folgen mit den Forderungen  $\partial \omega_M / \partial R = 0$ ,  $\partial \omega_M / \partial z = 0$  Bedingungen an den Brechungsindex:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial R}(\vec{r}) &= \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\beta_r \cos(\vartheta)} - n(\vartheta, \vec{r}) \right] \\ \frac{\partial n}{\partial z}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3.4.5})$$

Der Brechungsindex hängt neben dem Magnetfeld bei der hier betrachteten Frequenz von etwa  $100$  GHz hauptsächlich von der Elektronendichte ab (Anhang F). Da das Magnetfeld nicht von  $z$  abhängt, entspricht die Bedingung  $\partial n / \partial z = 0$  der Bedingung  $\partial n_e / \partial z = 0$  für die Elektronendichte. Sie ist in der Äquatorebene des Plasmas erfüllt, da dort die Bewegung entlang der  $z$ -Koordinate der Bewegung entlang

der Flußfläche entspricht, auf der die Dichte und damit der Brechungsindex konstant ist (siehe Anhang F). Die Bedingung für  $\partial n / \partial R$  kann z. B. am äußeren Plasmarand erfüllt werden (siehe Abschnitt III.3.6.2).

### III.3.4.2 Strahlführung im Plasmatorus und im FEM

Der bisherigen eindimensionalen Analyse des FEM lag die Annahme zugrunde, daß die erzeugte Welle sich stets mit den Elektronen mitbewegt und sich nicht von diesen entfernt. Bei den Runawayelektronen, die im Tokamak auf gekrümmten Bahnen umlaufen, stellt sich die Frage, ob sich die Welle bei geradliniger Ausbreitung nicht von der Bahn der resonanten Runawayelektronen entfernt.

Bei der Wechselwirkung zwischen Elektronen und dazu parallel laufender Welle kann sich die Phasenlage  $\psi_M$  der Welle ändern. Dies entspricht einem reellen effektiven Brechungsindex  $n_{\text{eff}}$  [LaHb6]

$$n_{\text{eff}} = n + \frac{1}{k_M} \frac{d\psi_M}{dr_{\text{GZ}}} \quad (\text{III.3.4.6})$$

(n: Brechungsindex des Plasmas)

Eine numerische Analyse [Sch] zeigt, daß im Gebiet des exponentiellen Wachstums der Welle, in dem die Elektronen bunched,  $n_{\text{eff}} > n$  im Elektronenstrahl ist, wodurch die Welle im Strahl gegenüber dem Vakuum langsamer läuft und in den Elektronenstrahl hineinfokussiert wird. Die Welle kann dadurch auch gekrümmten Elektronenstrahlen folgen (Lichtleitereffekt aufgrund refraktiver Wellenführung) [Sch], [LaHb6].

### III.3.4.3 Linienbreite der Maserstrahlung

Wechselwirkt die Maserwelle mit den resonanten Elektronen über eine Strecke der Länge  $L_{\text{WW}}$  mit

$$L_{\text{WW}} = N_u \lambda_u \quad (\text{III.3.4.7})$$

( $N_u$ : reelle Zahl,  $\lambda_u = (2\pi)/k_{ur}$ )

so ist die Ausdehnung der verstärkten Maserwelle der Frequenz  $f_M$  in der Zeit begrenzt. Durch Fouriertransformation dieses zeitlich begrenzten Wellenzugs ergibt sich für die Intensitätsverteilung der Partialwellen der Frequenz  $f = f_M + \Delta f$  [Wille]

$$I(\Delta f) \sim \left[ \frac{\sin\left(\pi N_u \frac{\Delta f}{f_M}\right)}{\pi N_u \frac{\Delta f}{f_M}} \right]^2 \quad (\text{III.3.4.8})$$

Die Halbwertsbreite  $\Delta f_{\frac{1}{2}}$  der verstärkten Strahlung ist demnach [Wille]

$$\Delta f_{\frac{1}{2}} = \frac{f_M}{2 N_u} \quad (\text{III.3.4.9})$$

### III.3.5 Abschätzung der Dichte der Runawayelektronen aus der Maserschwelle

Bei der Führung der elektromagnetischen Welle auf der gekrümmten Bahn im Torus treten Verluste auf [MaSch]. Damit es trotzdem zu einer Verstärkung der resonanten elektromagnetischen Welle kommt, muß die Verstärkung  $e^{-\text{Im}(\lambda)\tau}$  des FEM größer als der Verlust sein.

Die beobachtete Linienbreite ist nach Abschnitt III.3.4.3 von der Wechselwirkungslänge  $L_{\text{WW}}$  abhängig:

$$L_{\text{WW}} = \frac{f_M}{2 \Delta f_{1/2}} \lambda_u = \frac{f_M}{2 \Delta f_{1/2}} \frac{2 \pi v_{\text{GZ}} \gamma_r m_e}{e B} \quad (\text{III.3.5.1})$$



$L_{\text{WW}}$  ist ein Maß für den Verlust  $V$  der geführten elektromagnetischen Welle

$$V(r_{\text{GZ}}) = e^{-\frac{r_{\text{GZ}}}{L_{\text{WW}}}} \quad (\text{III.3.5.2})$$

Der Maser ist möglich, falls der Gewinn durch die Verstärkung größer als der Verlust der Welle ist. Die Bedingung für das Einsetzen der Masertätigkeit ist mit  $r_{\text{GZ}} = v_{\text{GZ}} t$

$$e^{-\text{Im}(\lambda) \tau} e^{-\frac{v_{\text{GZ}}}{L_{\text{WW}}} t} > 1 \quad (\text{III.3.5.3})$$

oder

$$-\text{Im}(\lambda) \tau - \frac{v_{\text{GZ}}}{L_{\text{WW}}} t > 0 \quad (\text{III.3.5.4})$$

Mit der für die Abstrahlung der  $N$ -ten Harmonischen der Grundfrequenz verallgemeinerten normierten Zeit (Gleichung (III.3.3.24)),

$$\tau = 2 v_{\text{GZ}} r_{\text{ur}} k_{\text{ur}} \rho \left( \frac{\gamma_r}{\gamma_0} \right)^2 t \approx 2 N \frac{e B}{\gamma_r m_e} \rho t \quad (\text{III.3.5.5})$$

und  $\rho$  nach Gleichung (III.3.3.24) ergibt sich aus (III.3.5.4) für die Dichte der Runawayelektronen die Abschätzung

$$n_{\text{R}} \gtrsim \left( \frac{2 \Delta f_{1/2}}{N f_{\text{M}}} \right)^3 \frac{B^2}{\gamma_r \sin^2(\alpha_{\text{Max}})} \frac{\epsilon_0}{4 \pi^3 |\text{Im}(\lambda)|^3 m_e} \quad (\text{III.3.5.6})$$

Die hieraus erhaltenen Werte für die Dichte der Runawayelektronen (Abschnitt III.3.6.6) passen in das Bild über ein Profil, das in der Plasmamitte ein Maximum besitzt.

### III.3.6 Anwendung der entwickelten Modellvorstellungen auf Plasmaentladungen von ASDEX Upgrade

Aus den Endenergien der Runawayelektronen, die man durch Simulation der Runawaydynamik in den einzelnen Entladungen erhält, lassen sich durch Anwendung der bisher dargestellten FEM Theorie die Frequenzen der kohärent emittierten Strahlung berechnen. Diese sind in guter Übereinstimmung mit den Frequenzen der beobachteten Spikeemissionen.

In diesem Abschnitt wird ausführlich die ohmsche Divertor-unten-Entladung mit Nummer 4770 mit dem Maserspektrum nach Bild III.3.1.1 (Toroidalfeld 2,90 T, Plasmastrom 600 kA, liniengemittelte Dichte  $3 * 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ) analysiert, bei der durch verzögerten Dichteaufbau am Anfang der Entladung gezielt Runawayelektronen erzeugt wurden. Die Simulationen für ohmsche Entladungen mit anderem Toroidalfeld und anderer Elektronendichte werden dann summarisch verglichen.

#### III.3.6.1 Bestimmung der Endenergie der Runawayelektronen

Während des verzögerten Dichteaufbaus bleibt in der Entladung 4770 die Dichte der thermischen Elektronen auf einem niedrigen Niveau von etwa  $6 * 10^{18} \text{ m}^{-3}$ . Zur Zeit  $t = (0,36 \pm 0,01) \text{ s}$  hat die Umfangsspannung lokal einen maximalen Wert, wodurch die Erzeugung von Runawayelektronen beträchtlich erhöht ist. Wie aus dem Anstieg der Bremsstrahlung im harten Röntgenbereich ersichtlich, wurden die Runawayelektronen tatsächlich erst ab 0,35 s und nicht schon in der Zündungsphase des Plasmas erzeugt (siehe Bild III.3.6.1.6).

Nach dem im Kapitel II.1 beschriebenen Modell, das durch Monte-Carlo-Simulation die Runawaydynamik beschreibt, wurde die Zeitabhängigkeit der Energie der Runawayelektronen für diese Entladung berechnet. Es wurde dabei als Startzeit der Simulation der Zeitpunkt der Erzeugung verwendet (Bild III.3.6.1.7). Die Dynamik, die für die Driftfläche im Plasma simuliert wurde, auf der die volumetrisch gewichtete Dichte der Runawayelektronen ein Maximum durchläuft (kleiner Plasmaradius  $r \approx a/\sqrt{3}$ , siehe Abschnitt II.1.4.2), ist repräsentativ für die Runawaypopulation im Plasma.

Die Majorität der Runawayelektronen erreicht demnach in dieser Entladung zur Zeit 0,7 - 0,8 s ihre Endenergie von 11,5 MeV und bleibt in der  $n=8$  Rippleresonanz gefangen. Die beobachteten Spikes, deren Frequenz mit dieser Endenergie erklärt werden kann (siehe Abschnitt III.3.6.4) treten erst ab 1,7 s auf.

Eine Erklärung für diese Zeitverzögerung ist, daß für den Transport der Runawayelektronen zum Plasmarand, wo die FEM- Instabilität möglich ist (siehe Abschnitt III.3.6.2) eine bestimmte Zeit benötigt wird.

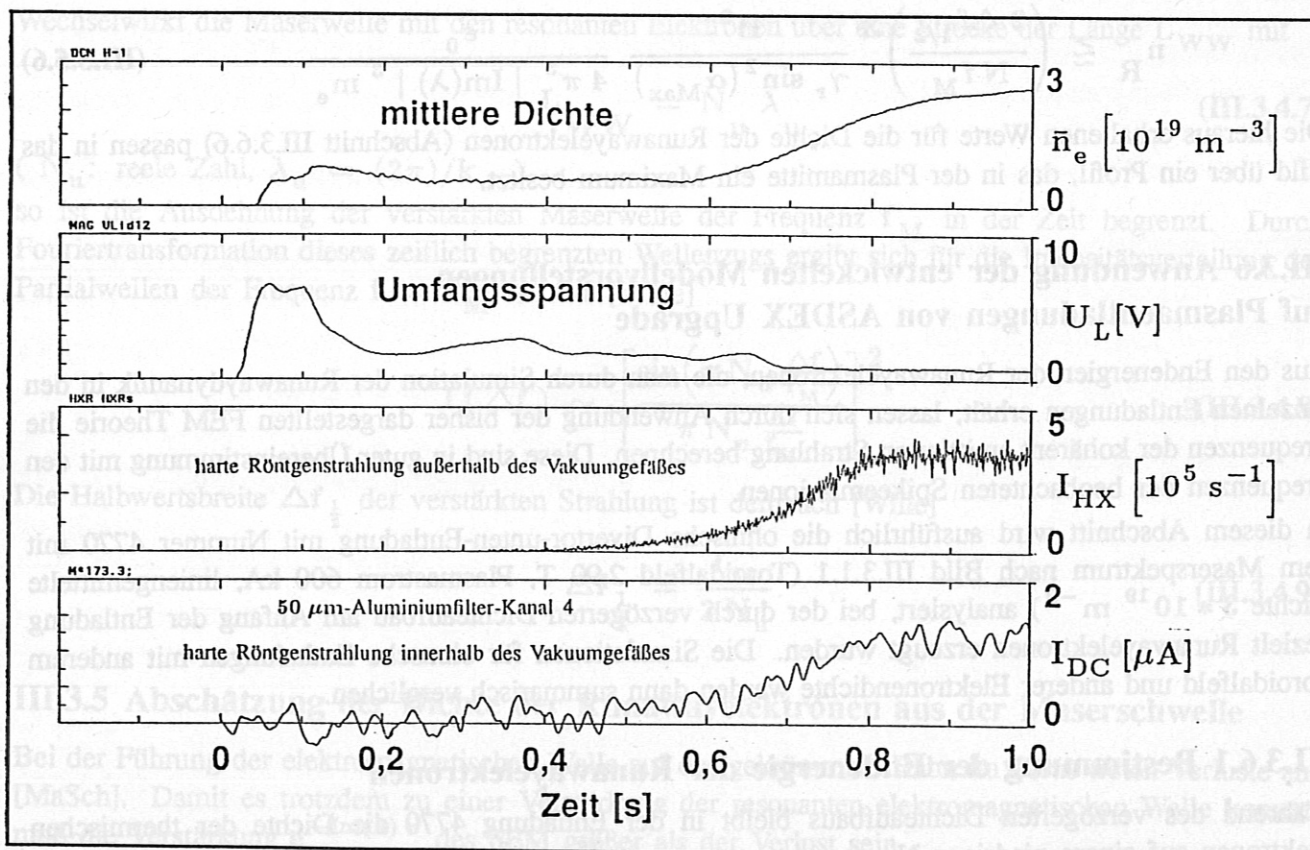


Bild III.3.6.1.6 Während des zur bewußten Erzeugung von Runawayelektronen verzögerten Dichteaufbaus bleibt in der Entladung 4770 die Dichte der thermischen Elektronen auf einem niedrigen Niveau von etwa  $6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$ . Zur Zeit  $t = (0,36 \pm 0,01) \text{ s}$  hat die Umfangsspannung lokal einen maximalen Wert, wodurch die Erzeugung von Runawayelektronen beträchtlich erhöht ist. Wie aus dem Anstieg der Bremsstrahlung im harten Röntgenbereich ersichtlich, wurden die Runawayelektronen erst ab 0,35 s und nicht in der Zündungsphase des Plasmas erzeugt.



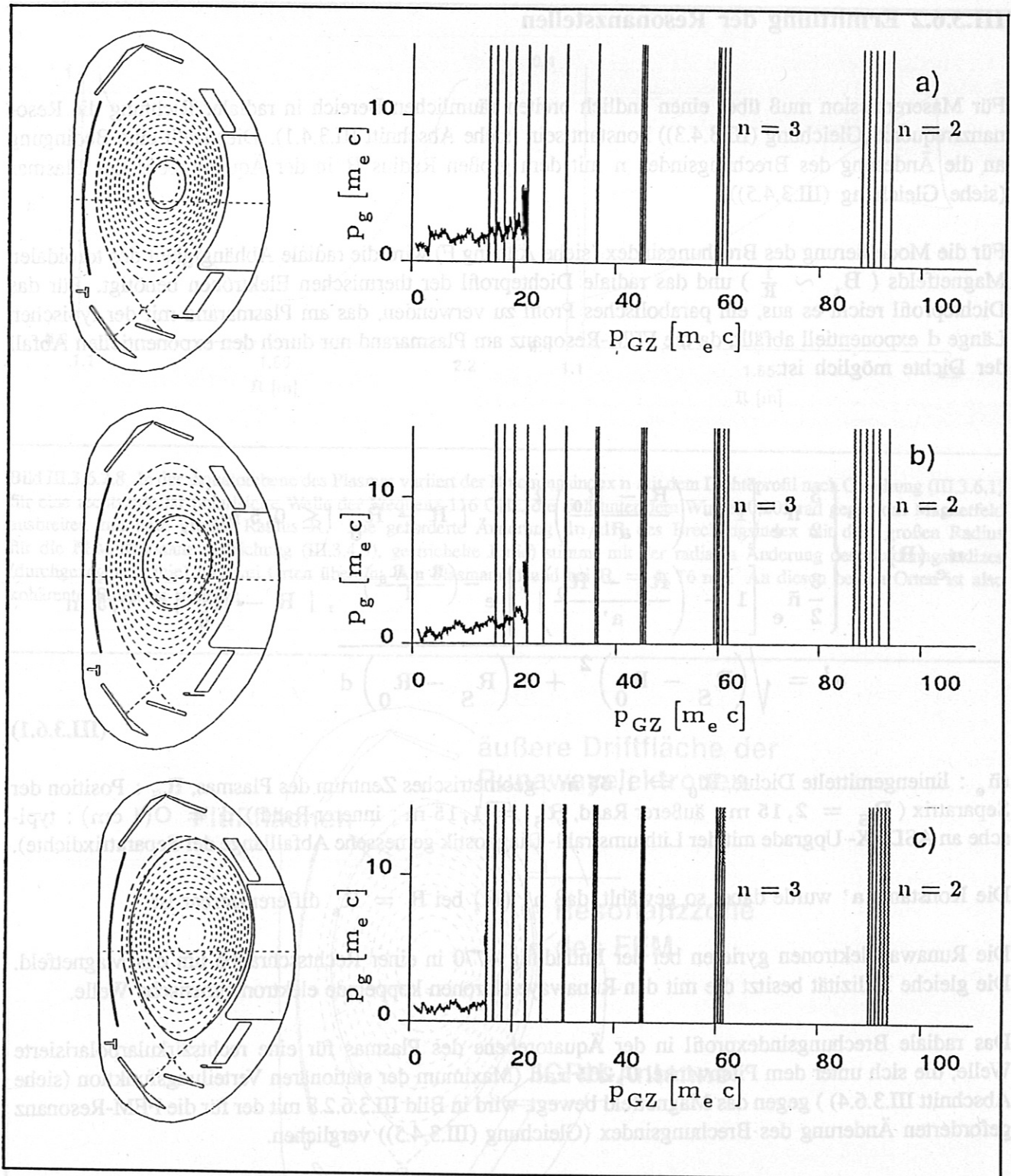


Bild III.3.6.1.7 Simulation der Runawaydynamik im Impulsraum  $(p_g, p_{GZ})$  (rechter Bildteil) unter Berücksichtigung der Rippleresonanzen für die Entladung 4770 für verschiedene Orte im Plasma (linker Bildteil). Die gestrichelten Linien sind die Flußflächen des Plasmas und die durchgezogenen Linien sind die Driftflächen der Runawayelektronen: die einzelnen Simulationen für die verschiedenen Driftflächen der Runawayelektronen im Plasma zeigen nahe der Plasmamitte (a) und etwa bei halbem Plasmaradius (b) einen maximal erreichten Impuls von  $p_{GZ} = 23 m_e c$ , bei dem sie in der toroidalen  $n = 8$  Rippleresonanz gefangen sind. Dies entspricht einer Endenergie der Runawayelektronen von  $11,5 \text{ MeV}$ . Am Plasmarand sind die Rippleresonanzen sehr stark, was zu einem Einfangen der Runawayelektronen bei niedrigeren Energien führt (c). Die Runawayelektronen am Plasmarand stellen nur eine Minorität dar. Die Majorität der Runawayelektronen hat deshalb die Energie  $11,5 \text{ MeV}$  und erzeugen dann die Maserstrahlung nach Bild III.3.1.1.

### III.3.6.2 Ermittlung der Resonanzstellen

Für Maseremission muß über einen endlich breiten räumlichen Bereich in radialer Richtung die Resonanzfrequenz (Gleichung (III.3.4.3)) konstant sein (siehe Abschnitt III.3.4.1). Dies stellt eine Bedingung an die Änderung des Brechungsindex  $n$  mit dem großen Radius  $R$  in der Äquatorebene des Plasmas (siehe Gleichung (III.3.4.5)).

Für die Modellierung des Brechungsindex (siehe Anhang F) wird die radiale Abhängigkeit des toroidalen Magnetfelds ( $B_t \sim \frac{1}{R}$ ) und das radiale Dichteprofil der thermischen Elektronen benötigt. Für das Dichteprofil reicht es aus, ein parabolisches Profil zu verwenden, das am Plasmarand mit der typischen Länge  $d$  exponentiell abfällt, da die FEM-Resonanz am Plasmarand nur durch den exponentiellen Abfall der Dichte möglich ist:

$$n_e(R) = \begin{cases} \frac{3}{2} \bar{n}_e \left[ 1 - \left( \frac{R - R_0}{a'} \right)^2 \right] & , |R - R_0| \leq 0,5 \text{ m} \\ \frac{3}{2} \bar{n}_e \left[ 1 - \left( \frac{R_S - R_0}{a'} \right)^2 \right] e^{-\left( \frac{R - R_S}{d} \right)} & , |R - R_0| > 0,5 \text{ m} \end{cases}$$

$$a' = \sqrt{\left( R_S - R_0 \right)^2 + 2 \left( R_S - R_0 \right) d}$$

(III.3.6.1)

( $\bar{n}_e$  : liniengemittelte Dichte,  $R_0 = 1,65 \text{ m}$  : geometrisches Zentrum des Plasmas,  $R_S$  : Position der Separatrix ( $R_S = 2,15 \text{ m}$  : äußerer Rand,  $R_S = 1,15 \text{ m}$  : innerer Rand),  $d = O(1 \text{ cm})$  : typische an ASDEX-Upgrade mit der Lithiumstrahl-Diagnostik gemessene Abfalllänge der Separatrixdichte).

Die Konstante  $a'$  wurde dabei so gewählt, daß  $n_e(R)$  bei  $R = R_S$  differenzierbar ist.

Die Runawayelektronen gyrieren bei der Entladung 4770 in einer Rechtsschraube um das Magnetfeld. Die gleiche Helizität besitzt die mit den Runawayelektronen koppelnde elektromagnetische Welle.

Das radiale Brechungsindexprofil in der Äquatorebene des Plasmas für eine rechtszirkularpolarisierte Welle, die sich unter dem Pitchwinkel  $0,205 \text{ rad}$  (Maximum der stationären Verteilungsfunktion (siehe Abschnitt III.3.6.4)) gegen das Magnetfeld bewegt, wird in Bild III.3.6.2.8 mit der für die FEM-Resonanz geforderten Änderung des Brechungsindex (Gleichung (III.3.4.5)) verglichen.

Nur an den Schnittpunkten der beiden Kurven, also am Plasmarand oder nahe der Plasmamitte ( $R = 1,76 \text{ m}$ ) ist die FEM-Resonanz möglich. Die Resonanzstelle im Plasma führt allerdings wegen des kleinen Brechungsindex von etwa  $0,92$  zu einer Frequenz, die bei etwa  $30 \text{ GHz}$  liegt, was nicht konsistent mit der beobachteten Frequenz von  $116 \pm 4 \text{ GHz}$  ist (siehe Abschnitt III.3.1). Die Resonanz, bei der die beobachtete Frequenz emittiert wird, muß sich also am äußeren Plasmarand, im Gebiet der exponentiell abfallenden Dichte ("Scrape-Off Layer", SOL) befinden.

Die Runawayelektronen können auch in diese Zone gelangen, da in ASDEX Upgrade Plasmen mit Divertor Driftflächen existieren, die über das Plasma hinaus in die SOL führen (Bild III.3.6.2.9).



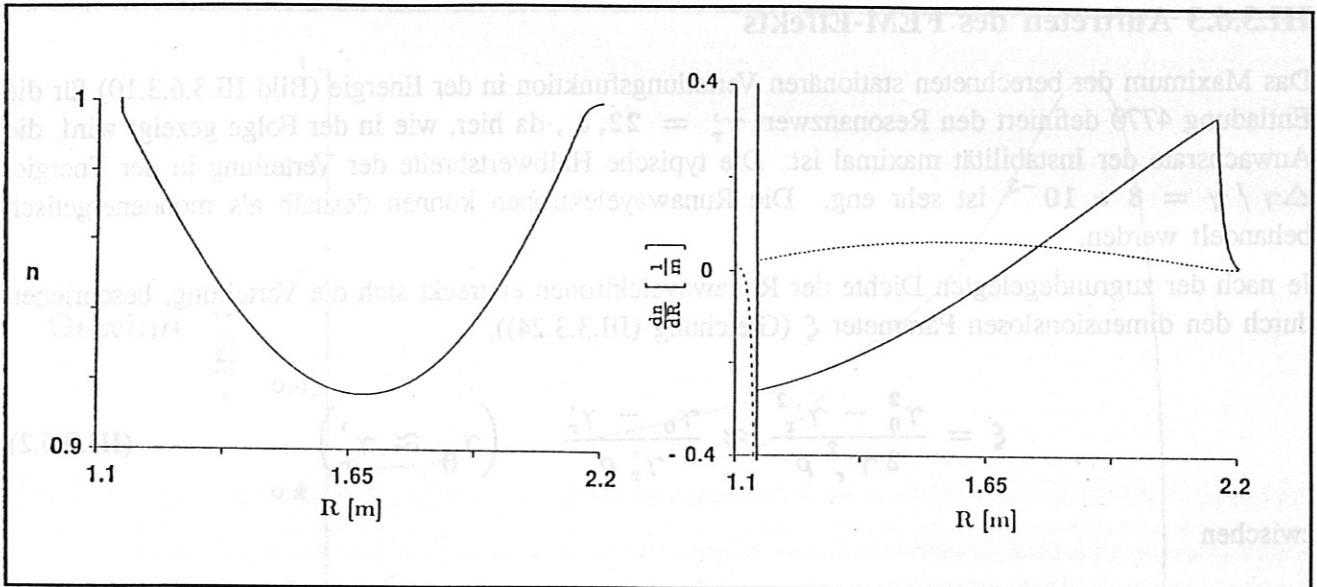


Bild III.3.6.2.8 In der Äquatorebene des Plasmas variiert der Brechungsindex  $n$  mit dem Dichteprofil nach Gleichung (III.3.6.1) für eine rechtszirkular polarisierte Welle der Frequenz 116 GHz, die sich unter dem Winkel  $0,205$  rad gegen das Magnetfeld ausbreitet, mit dem großen Radius  $R$ . Die geforderte Änderung  $dn/dR$  des Brechungsindex mit dem großen Radius für die FEM-Resonanz (Gleichung (III.3.4.5), gestrichelte Linie) stimmt mit der radialen Änderung des Brechungsindex (durchgezogene Linie) an zwei Orten überein: Am Plasmarand und bei  $R = 1,76$  m. An diesen beiden Orten ist also kohärente Emission möglich.

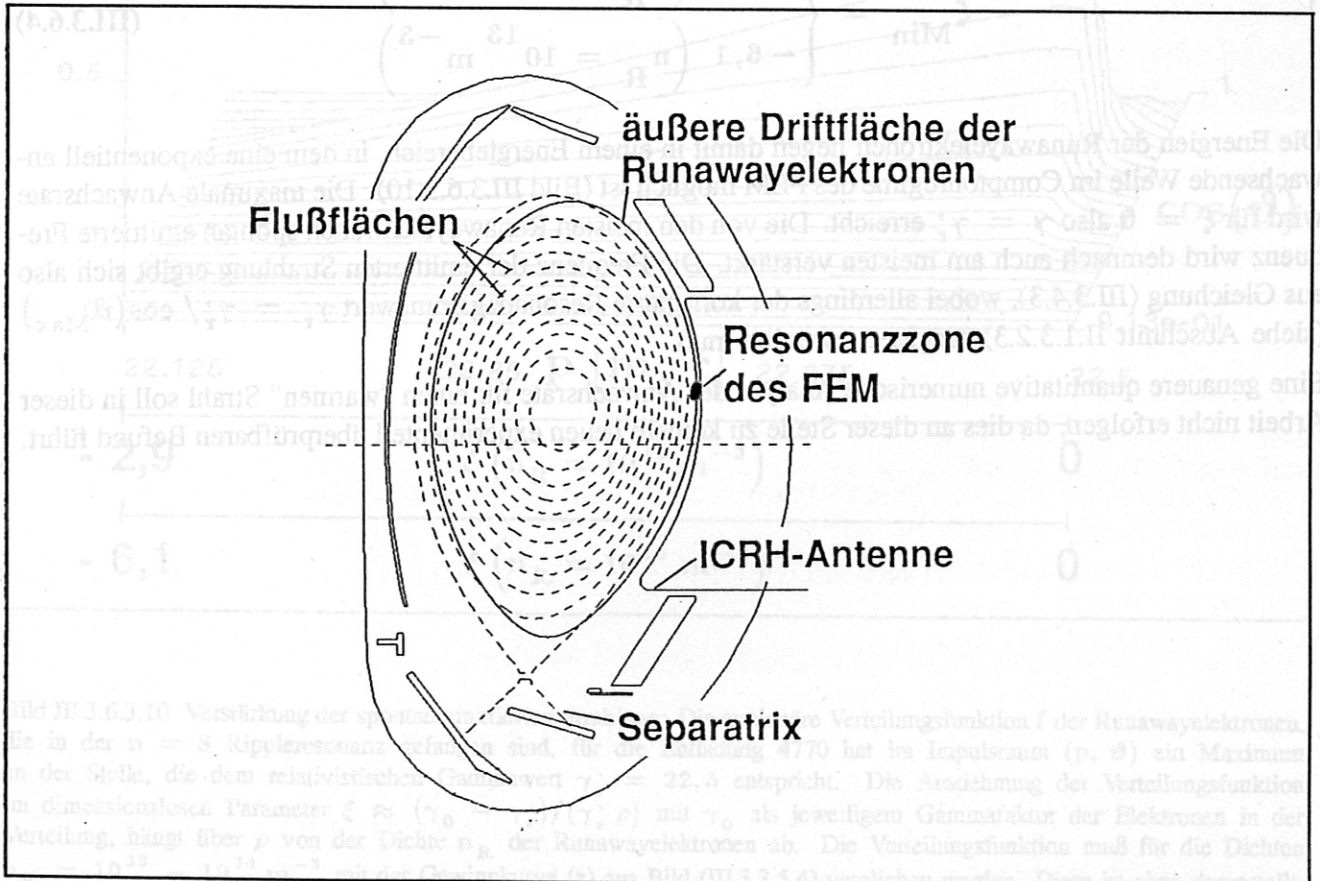


Bild III.3.6.2.9 Die äußeren Driftflächen der Runawayelektronen ( $E_R = 11,5$  MeV) verlaufen bei Divertorentladungen an ASDEX Upgrade bei hohen großen Radien in der Schicht exponentiell abfallender Dichte (SOL), die außerhalb der Separatrix des Plasmas existiert. Die Runawayelektronen gelangen dabei in den Resonanzbereich, in dem sie als free-electron-maser die beobachtete Strahlung emittieren.

### III.3.6.3 Auftreten des FEM-Effekts

Das Maximum der berechneten stationären Verteilungsfunktion in der Energie (Bild III.3.6.3.10) für die Entladung 4770 definiert den Resonanzwert  $\gamma'_r = 22,5$ , da hier, wie in der Folge gezeigt wird, die Anwachsrate der Instabilität maximal ist: Die typische Halbwertsbreite der Verteilung in der Energie,  $\Delta\gamma/\gamma = 8 \cdot 10^{-3}$  ist sehr eng. Die Runawayelektronen können deshalb als monoenergetisch behandelt werden.

Je nach der zugrundegelegten Dichte der Runawayelektronen erstreckt sich die Verteilung, beschrieben durch den dimensionslosen Parameter  $\xi$  (Gleichung (III.3.3.24)),

$$\xi = \frac{\gamma_0^2 - \gamma_r'^2}{2\gamma_r'^2 \rho} \approx \frac{\gamma_0 - \gamma_r'}{\gamma_r' \rho} \quad (\gamma_0 \approx \gamma_r') \quad \text{(III.3.6.2)}$$

zwischen

$$\xi_{\text{Max}} = 0 \quad \text{(III.3.6.3)}$$

und

$$\xi_{\text{Min}} = \begin{cases} -2,9 \left( n_R = 10^{14} \text{ m}^{-3} \right) \\ -6,1 \left( n_R = 10^{13} \text{ m}^{-3} \right) \end{cases} \quad \text{(III.3.6.4)}$$

Die Energien der Runawayelektronen liegen damit in einem Energiebereich, in dem eine exponentiell anwachsende Welle im Comptonregime des FEM möglich ist (Bild III.3.6.3.10). Die maximale Anwachsrate wird für  $\xi = 0$  also  $\gamma = \gamma'_r$  erreicht. Die von den meisten Runawayelektronen spontan emittierte Frequenz wird demnach auch am meisten verstärkt. Die Frequenz der emittierten Strahlung ergibt sich also aus Gleichung (III.3.4.3), wobei allerdings der korrigierte Resonanzgammawert  $\gamma_r = \gamma'_r / \cos(\vartheta_{\text{Max}})$  (siehe Abschnitt II.1.3.2.3) eingesetzt werden muß.

Eine genauere quantitative numerische Analyse der Anwachsrate für einen "warmen" Strahl soll in dieser Arbeit nicht erfolgen, da dies an dieser Stelle zu keinem neuen experimentell überprüfaren Befund führt.



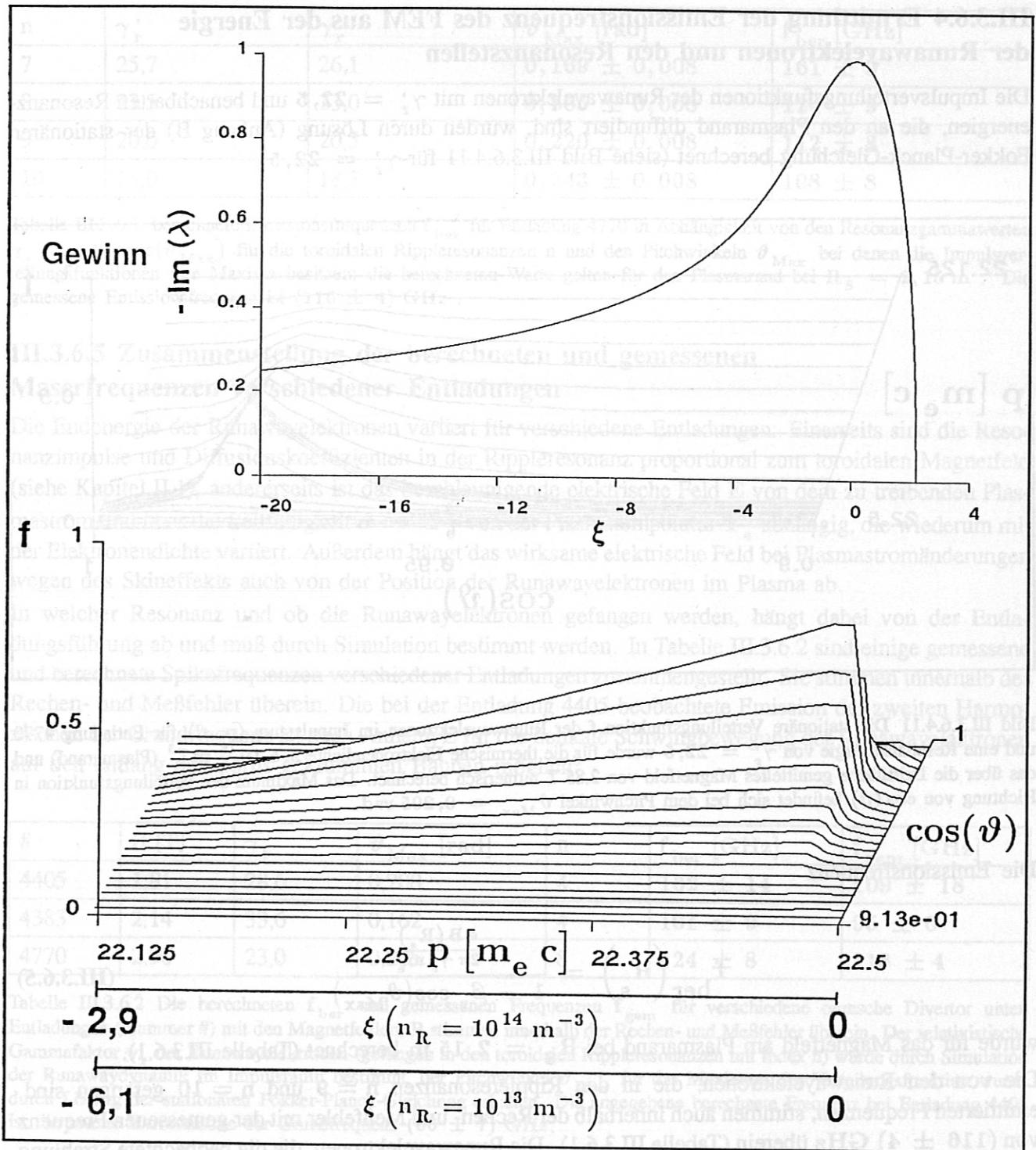


Bild III.3.6.3.10 Verstärkung der spontan emittierten Strahlung: Die stationäre Verteilungsfunktion  $f$  der Runawayelektronen, die in der  $n = 8$  Rippleresonanz gefangen sind, für die Entladung 4770 hat im Impulsraum ( $p, \vartheta$ ) ein Maximum an der Stelle, die dem relativistischen Gammawert  $\gamma_r' = 22,5$  entspricht. Die Ausdehnung der Verteilungsfunktion im dimensionslosen Parameter  $\xi \approx (\gamma_0 - \gamma_r')/(\gamma_r' \rho)$  mit  $\gamma_0$  als jeweiligem Gammafaktor der Elektronen in der Verteilung, hängt über  $\rho$  von der Dichte  $n_R$  der Runawayelektronen ab. Die Verteilungsfunktion muß für die Dichten  $n_R = 10^{13} - 10^{14} \text{ m}^{-3}$  mit der Gewinnkurve (a) aus Bild (III.3.3.5.4) verglichen werden. Diese ist oben dargestellt. Da für die Runawayelektronen der Verteilung  $\xi \leq 0$  gilt, ist der Gewinn für alle Runawayelektronen positiv. Die von den meisten Runawayelektronen bei  $\xi \rightarrow 0$  emittierte spontane Strahlung wird wegen der dortigen maximalen Verstärkung auch am meisten verstärkt.

### III.3.6.4 Ermittlung der Emissionsfrequenz des FEM aus der Energie der Runawayelektronen und den Resonanzstellen

Die Impulsverteilungsfunktionen der Runawayelektronen mit  $\gamma_r' = 22,5$  und benachbarten Resonanzenergien, die an den Plasmarand diffundiert sind, wurden durch Lösung (Anhang B) der stationären Fokker-Planck-Gleichung berechnet (siehe Bild III.3.6.4.11 für  $\gamma_r' = 22,5$ ).

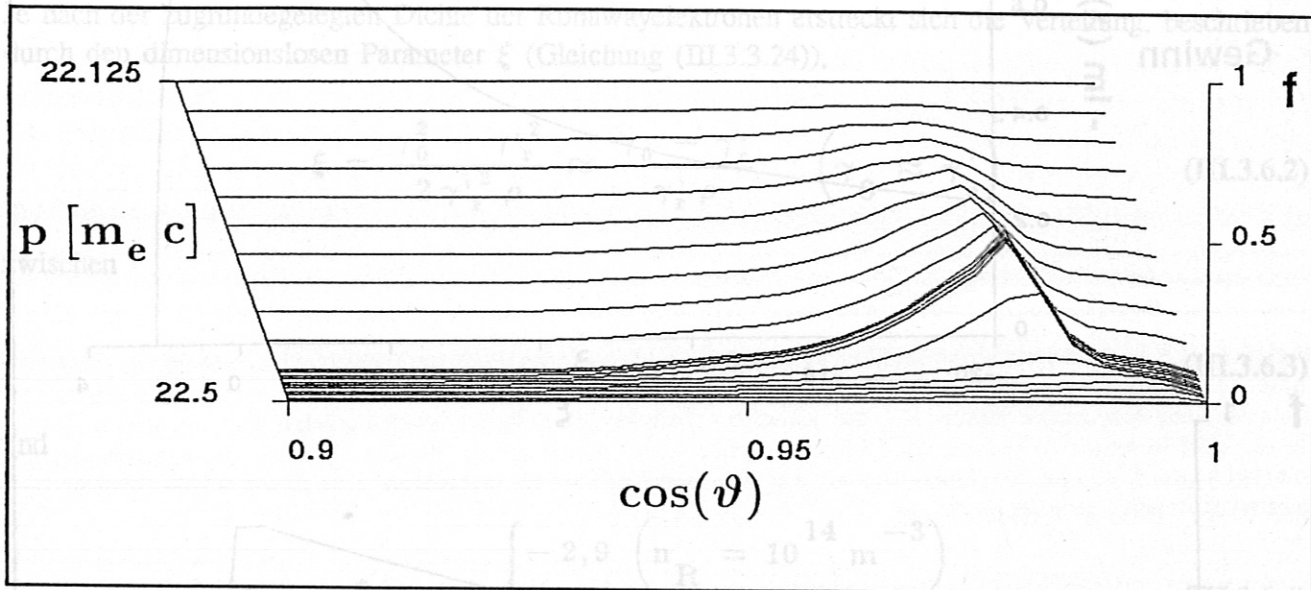


Bild III.3.6.4.11 Die stationäre Verteilungsfunktion  $f$  der Runawayelektronen im Impulsraum  $(p, \vartheta)$  für Entladung 4770 und eine Resonanzenergie von  $\gamma_r' = 22,5$  wurde für die thermische Elektronendichte  $2,5 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$  (Plasmarand) und das über die Driftfläche gemittelte Magnetfeld von 2,85 T numerisch berechnet. Das Maximum der Verteilungsfunktion in Richtung von  $\cos(\vartheta)$  befindet sich bei dem Pitchwinkel  $\vartheta_{\text{Max}} = 0,205 \text{ rad}$ .

#### Die Emissionsfrequenz

$$f_{\text{ber}}(R_s) = \frac{\frac{e B(R_s)}{2\pi \gamma_r m_e}}{1 - \beta_r \cos(\vartheta_{\text{Max}})} \quad (\text{III.3.6.5})$$

wurde für das Magnetfeld am Plasmarand bei  $R_s = 2,15 \text{ m}$  berechnet (Tabelle III.3.6.1).

Die von den Runawayelektronen, die in den Rippleresonanzen  $n = 9$  und  $n = 10$  gefangen sind, emittierten Frequenzen, stimmen auch innerhalb der Rechen- und Meßfehler mit der gemessenen Frequenz von  $(116 \pm 4) \text{ GHz}$  überein (Tabelle III.3.6.1). Die Runawayelektronen, die die beobachtete Strahlung erzeugen, haben also eine Energie zwischen 9,3 und 11,5 MeV.

Die minimale Frequenzbreite der Spikes ist durch die Wechselwirkungslänge  $L_{\text{WW}}$  bestimmt (siehe Abschnitt III.3.4.3). Nach den Gleichungen (III.3.4.7) und (III.3.4.9) ist deshalb die Wechselwirkungslänge

$$L_{\text{WW}} = N_u \lambda_u > \frac{f_M}{2 \Delta f_{\frac{1}{2}}} \lambda_u \quad (\text{III.3.6.6})$$

Für die Entladung 4770 ist  $L_{\text{WW}} > 3,2 \text{ m}$ . Diese Wechselwirkungslänge kann nur bei Krümmung der Welle um den Torus (Krümmungsradius  $\approx 2,2 \text{ m}$ ) zustandekommen. Die Wellenführung durch einen im Raum gekrümmten Elektronenstrahl ist in einem FEM jedoch möglich (siehe Abschnitt III.3.4.2).



n	$\gamma_r'$	$\gamma_r$	$\vartheta_{Max}$ [rad]	$f_{ber}$ [GHz]
7	25,7	26,1	$0,169 \pm 0,008$	$161 \pm 9$
8	22,5	23,0	$0,205 \pm 0,008$	$124 \pm 9$
9	20,0	20,5	$0,220 \pm 0,008$	$112 \pm 8$
10	18,0	18,5	$0,243 \pm 0,008$	$108 \pm 8$

Tabelle III.3.6.1 berechnete Emissionsfrequenzen  $f_{ber}$  für Entladung 4770 in Abhängigkeit von den Resonanzgammawerten  $\gamma_r = \gamma_r' / \cos(\vartheta_{Max})$  für die toroidalen Rippleresonanzen n und den Pitchwinkeln  $\vartheta_{Max}$  bei denen die Impulsverteilungsfunktionen ihre Maxima besitzen; die berechneten Werte gelten für den Plasmarand bei  $R_s = 2,15$  m. Die gemessene Emissionsfrequenz ist  $(116 \pm 4)$  GHz.

### III.3.6.5 Zusammenstellung der berechneten und gemessenen Maserfrequenzen verschiedener Entladungen

Die Endenergie der Runawayelektronen variiert für verschiedene Entladungen: Einerseits sind die Resonanzimpulse und Diffusionskoeffizienten in der Rippleresonanz proportional zum toroidalen Magnetfeld (siehe Kapitel II.1), andererseits ist das beschleunigende elektrische Feld E von dem zu treibenden Plasmastrom und über die Leitfähigkeit  $\sigma \sim T_e^{3/2}$  von der Plasmatemperatur  $T_e$  abhängig, die wiederum mit der Elektronendichte variiert. Außerdem hängt das wirksame elektrische Feld bei Plasmastromänderungen wegen des Skineffekts auch von der Position der Runawayelektronen im Plasma ab.

In welcher Resonanz und ob die Runawayelektronen gefangen werden, hängt dabei von der Entladungsführung ab und muß durch Simulation bestimmt werden. In Tabelle III.3.6.2 sind einige gemessene und berechnete Spikefrequenzen verschiedener Entladungen zusammengestellt. Sie stimmen innerhalb der Rechen- und Meßfehler überein. Die bei der Entladung 4405 beobachtete Emission der zweiten Harmonischen der Grundfrequenz ist nach Anhang E für die helikale Schwingbewegung der Runawayelektronen auf den entlang des Torus gekrümmten Bahnen möglich<sup>6</sup>.

#	B [T]	$\gamma_r$	$\vartheta_{Max}$ [rad]	n	$f_{ber}$ [GHz]	$f_{gem}$ [GHz]
4405	1,81	28,6	0,200	4	$132 \pm 14$	$109 \pm 18$
4383	2,14	33,6	0,162	4	$101 \pm 9$	$95 \pm 6$
4770	2,90	23,0	0,205	8	$124 \pm 8$	$116 \pm 4$

Tabelle III.3.6.2 Die berechneten  $f_{ber}$  und gemessenen Frequenzen  $f_{gem}$  für verschiedene ohmsche Divertor unten Entladungen (Nummer #) mit den Magnetfeldern B stimmen innerhalb der Rechen- und Meßfehler überein. Der relativistische Gammafaktor  $\gamma_r$  der Runawayelektronen (gefangen in den toroidalen Rippleresonanzen mit Index n) wurde durch Simulation der Runawaydynamik im Impulsraum bestimmt, der Pitchwinkel  $\vartheta_{Max}$  für das Maximum der Verteilungsfunktion wurde durch Lösung der stationären Fokker-Planck-Gleichung erhalten. Die angegebene berechnete Frequenz bei Entladung 4405 ist die zweite Harmonische der Grundfrequenz ( $66 \pm 7$ ) GHz.

### III.3.6.6 Abschätzung der Dichte der Runawayelektronen aus dem Gewinn des FEM

Die mit den beobachteten Linienbreiten nach Gleichung (III.3.5.6) ermittelten Dichten der Runawayelektronen am Plasmarand (Tabelle III.3.6.3) sind kleiner als die aus der Intensität der Bremsstrahlung bestimmte mittlere Dichte von  $3 * 10^{14} \text{ m}^{-3}$  (siehe Kapitel III.1) und bestätigen damit die Annahme eines näherungsweise parabolischen Dichteprofiles der Runawayelektronen.

Der Gewinn der von den resonanten Runawayelektronen gebildeten Verstärkeranordnung, der der Kehrwert des Verlusts (Gleichung (III.3.5.2)) für  $r_{GZ} = 1$  m ist, liegt mit bis zu 140% pro Meter im High-Gain-Bereich der FEMs.

<sup>6</sup> Im Falle einer planaren Schwingbewegung der hochenergetischen Elektronen ist nur die Emission der ungeraden Harmonischen der Grundfrequenz möglich [LaHb6], [Wille]!

#	4405	4383	4770
$2\Delta f_{1/2}$ [GHz]	18	6	4
N	2	1	1
$n_R$ [ $m^{-3}$ ] $\approx$	$7 * 10^{13}$	$6 * 10^{13}$	$2 * 10^{13}$
$L_{WW}$ [m] $\approx$	2,7	3,5	3,2
G [ $\%m^{-1}$ ] $\approx$	140	130	140

Tabelle III.3.6.3 Die aus den gemessenen Linienbreiten  $2\Delta f_{1/2}$  bestimmten Dichten  $n_R$  der Runawayelektronen am Plasmarand zum Überschreiten der Maserschwelle, sowie die dazu nötige Wechselwirkungslänge  $L_{WW}$  und der Gewinn pro Längeneinheit,  $G = \exp(1 m/L_{WW})$  ( $|\text{Im}(\lambda)| = 1$ , B : Magnetfeld am Plasmarand,  $\gamma_r \cdot \vartheta_{\text{Max}}$  aus Tabelle III.3.6.2)

#	B [T]	$\gamma_r$	$\vartheta_{\text{Max}}$ [rad]	n	f [GHz]	$\Delta f_{1/2}$ [GHz]
4405	1,81	28,6	0,200	4	$122 \pm 14$	$109 \pm 18$
4383	2,14	33,6	0,162	4	$101 \pm 9$	$95 \pm 9$
4770	2,90	23,0	0,208	3	$74 \pm 8$	$116 \pm 4$

Die Tabelle III.3.6.3 zeigt die aus den gemessenen Linienbreiten  $2\Delta f_{1/2}$  bestimmten Dichten  $n_R$  der Runawayelektronen am Plasmarand zum Überschreiten der Maserschwelle, sowie die dazu nötige Wechselwirkungslänge  $L_{WW}$  und der Gewinn pro Längeneinheit,  $G = \exp(1 m/L_{WW})$  ( $|\text{Im}(\lambda)| = 1$ , B : Magnetfeld am Plasmarand,  $\gamma_r \cdot \vartheta_{\text{Max}}$  aus Tabelle III.3.6.2). Die Dichten  $n_R$  sind in der Tabelle III.3.6.3 angegeben. Die Wechselwirkungslänge  $L_{WW}$  ist in der Tabelle III.3.6.3 angegeben. Der Gewinn  $G$  ist in der Tabelle III.3.6.3 angegeben. Die Tabelle III.3.6.3 zeigt die aus den gemessenen Linienbreiten  $2\Delta f_{1/2}$  bestimmten Dichten  $n_R$  der Runawayelektronen am Plasmarand zum Überschreiten der Maserschwelle, sowie die dazu nötige Wechselwirkungslänge  $L_{WW}$  und der Gewinn pro Längeneinheit,  $G = \exp(1 m/L_{WW})$  ( $|\text{Im}(\lambda)| = 1$ , B : Magnetfeld am Plasmarand,  $\gamma_r \cdot \vartheta_{\text{Max}}$  aus Tabelle III.3.6.2).



## IV

# Zusammenfassung und Ausblick

Die Dynamik von hochrelativistischen Elektronen im Tokamak ist bestimmt durch die Beschleunigung im elektrischen Feld und durch Abbremsung aufgrund der Emission von Synchrotronstrahlung. Die Synchrotronverluste steigen mit der Erhöhung der Energie der Gyrationbewegung, da dadurch der Krümmungsradius der Elektronenbahn verkleinert wird. Bei genügend hoher Gyrationenergie kompensieren die Synchrotronstrahlungsverluste den Energiegewinn im elektrischen Feld, wodurch die Energie des Runawayelektrons nicht weiter ansteigt. Die periodische Asymmetrie des Magnetfelds, der Ripple, kann die Gyrationenergie zusätzlich erhöhen. Die von Laurent und Rax vorgeschlagene Resonanz zwischen der Gyrationbewegung und einer Harmonischen des radialen Ripplermagnetfelds kann nach deren Theorie nur dann irreversibel Parallel- in Gyrationenergie umwandeln, und damit zu einer Energieblockierung führen, falls der Betrag des Ripples einen bestimmten Wert überschreitet. Die Ripplewerte von ASDEX und ASDEX Upgrade liegen unterhalb dieses kritischen Werts, weshalb nach dem theoretischen Modell von Laurent und Rax hier eine Energieblockierung nicht auftreten kann, was allerdings im Widerspruch zu den experimentell gefundenen kleineren Energien der Runawayelektronen steht. Es wurde deshalb in Erweiterung der Theorie von Laurent und Rax gezeigt, daß es auch bei kleinem magnetischem Ripple bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Synchrotronstrahlungsverluste zu einer sehr effektiven Umwandlung von Parallel- in Gyrationenergie kommt. Die wenigen Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen, die in dieser Arbeit auch mit berücksichtigt wurden, führen zu einer Diffusion der Gyrationimpulse im Impulsraum. Die Umwandlungseffizienz von Parallel- in Senkrechtenergie hängt von der Stärke der Harmonischen des magnetischen Ripples, dem elektrischen Feld und der Gyrationenergie ab und wird mittels Simulation berechnet. Es wurde dazu die relativistische Fokker-Planck-Gleichung von Connor und Hastie, die nur die Beschleunigung im elektrischen Feld und den Effekt der Stöße der Runawayelektronen mit den Plasmateilchen enthält, in wesentlichen Punkten erweitert: Einerseits wird nun für hochrelativistische Runawayelektronen der Energieverlust durch Synchrotronstrahlung berücksichtigt, die für das Erreichen einer maximalen Energie der Runawayelektronen unabdingbar ist. Andererseits wurde für die korrekte Beschreibung der Bewegung der Runawayelektronen im Tokamak ein Term in die Fokker-Planck-Gleichung eingefügt, der die Diffusion der Gyrationimpulse bei den Rippleresonanzen beschreibt. Das Zeitverhalten der Runawayelektronen wird durch Monte-Carlo-Operatoren simuliert, die bis zu den zweiten Momenten äquivalent zu der Fokker-Planck-Gleichung sind. Durch dieses Simulationsverfahren wird dann die Dynamik der Runawayelektronen für verschiedene Orte im Plasma für eine Tokamakentladung simuliert (siehe Bild III.3.6.1.7). Diese Simulationen ergeben, daß in einer ohmschen Entladung, bei der zu Beginn Runawayelektronen erzeugt werden, die Majorität der hochenergetischen Elektronen in der gleichen Harmonischen der Rippleresonanz gefangen wird und damit die gleiche Energie besitzt. Diese entspricht den an ASDEX Upgrade gemessenen Werten zwischen 10 – 20 MeV und liegt damit weit unterhalb der bei einer Großkreisbewegung erreichbaren Energie von 65 MeV.

Ausgehend von den Abschätzungen der Runawayströme in dem Tokamak TEXTOR von ungefähr 50 kA wurde erstmals versucht, durch relativistische Thomsonstreuung die Runawayelektronen im Tokamak ASDEX Upgrade zu diagnostizieren. Es ergab sich allerdings kein statistisch signifikantes Streusignal, da der Runawayelektronenstrom an ASDEX Upgrade nicht bis auf den erforderlichen Wert gesteigert werden konnte: Aus der mit den Detektoren der Thomsonstreuungsapparatur im Vakuumgefäß gemessenen absoluten Intensität der Runawayelektronen-Plasma-Bremsstrahlung wurde als obere Grenze für den in Entladungen erreichten Runawaystrom 10 kA abgeschätzt, was weit unter dem notwendigen Wert für ein gutes Signal-zu-Rausch-Verhältnis liegt. Dies ist in Übereinstimmung mit den nachträglich richtig gestellten Runawayströmen von 5 kA in TEXTOR.

Die Auswertung der an ASDEX aufgenommenen Bremsstrahlungsspektren der Runawayelektronen am Plasmarand zeigte, daß diese von monoenergetischen Runawayelektronen erzeugt werden, deren jeweilige Energie der in dieser Arbeit berechneten Rippleresonanzenergie entspricht.

Eine weitere Bestätigung der durch Computersimulation bestimmten maximal erreichten Energie der Runawayelektronen ist durch die im Tokamak ASDEX Upgrade beobachtete Emission monochromatischer Strahlung möglich (siehe Bild III.3.1.1). Sie ist, wie in dieser Arbeit erstmals gezeigt wurde, eine durch kohärente Verstärkung erzeugte Mikrowellenstrahlung. Dieser "free-electron-maser-Effekt" tritt dann auf, wenn die Elektronen durch Rippleresonanz in ihrer Energie blockiert sind und dadurch eine genügend schmale Energieverteilung besitzen. Der FEM im Tokamak ist genauer gesagt ein "Cyclotron-Auto-Resonance-Maser" (CARM). Seine gemessenen Frequenzen stimmen innerhalb der Fehler mit den berechneten überein. Der Gewinn wurde für den allgemeinen Fall der kollektiven Instabilität berechnet, die zu einem exponentiellem Anwachsen der Maserwellenamplitude führt. Aus der spektralen Breite der emittierten kohärenten Strahlung ergibt sich mit dem berechneten Gewinn eine untere Grenze für die Dichte der Runawayelektronen am Emissionsort. Dieser Wert paßt zu der Vorstellung über die Anzahl und räumliche Verteilung der Runawayelektronen im Plasma von ASDEX Upgrade. Die Messung der verstärkten spontanen Emission kann deshalb zukünftig als Diagnostik für Runawayelektronen im Tokamak verwendet werden. Das dazu notwendige Detektorsystem im Mikrowellenbereich soll dazu genügend breitbandig und zur Bestimmung der Dichte der Runawayelektronen aus der Linienbreite auch eine hinreichend feine Frequenzauflösung besitzen.

Die Energieblockierung der Runawayelektronen durch die Rippleresonanz wurde mit der vorliegenden Arbeit für die Tokamaks ASDEX und ASDEX Upgrade bewiesen. Ein nächster Schritt besteht darin, das entwickelte Bewegungsmodell der Runawayelektronen im Tokamak auf ITER anzuwenden, um damit die Effizienz der Energieblockierung durch Rippleresonanz für die bei Plasmastromabbrüchen erzeugten Runawayelektronen zu bestimmen. Falls bei der dann herrschenden hohen elektrischen Feldstärke die Werte des Ripples für eine Energieblockierung der Runawayelektronen zu klein sind, könnte ein zusätzliches periodisches Störfeld angelegt werden, das die Runawayelektronen bei geringer Energie abbremst, aber wegen seines kleinen Betrags noch nicht das Plasma stört.



# Anhang A Numerische Lösung der zeitunabhängigen relativistischen Fokker-Planck-Gleichung

## A.1 Lösungsgebiet und Randbedingungen

Für die Existenz einer stationären Lösung von (A.1.1),

$$\begin{aligned}
 & \left( e E \mu - k_{\text{St}} \left( 1 + \frac{1}{q^2} \right) - F_{\text{Synch}} \right) \frac{\partial f}{\partial q} \\
 & + \left( e E \frac{1 - \mu^2}{q} + k_{\text{St}} \left( Z_{\text{eff}} + 1 \right) \frac{\sqrt{1 + q^2}}{2 q^3} 2 \mu \right) \frac{\partial f}{\partial \mu} \\
 & - \left( k_{\text{St}} \left( Z_{\text{eff}} + 1 \right) \frac{\sqrt{1 + q^2}}{2 q^3} \left( 1 - \mu^2 \right) \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \\
 & - \left( \frac{2 F_{\text{Synch}}}{q} + \frac{\partial F_{\text{Synch}}}{\partial q} + \frac{2 k_{\text{St}}}{q} \right) f = 0
 \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

ist es notwendig, daß im Ausdruck (II.1.2.11) für den Krümmungsradius  $R = \infty$  gesetzt wird. Andernfalls akkumulieren sich die von kleineren Impulsen kommenden Runawayelektronen bei der Energie, die durch  $R_{\text{Kr}} = R$  bestimmt ist. Dieser Vorgang kann jedoch nur mit der zeitabhängigen Fokker-Planck-Gleichung beschrieben werden. (Die beobachteten Energien der Runawayelektronen werden für  $R_{\text{Kr}} \approx r_G \ll R$  erreicht.)

Die Gleichung (A.1.1) ist eine parabolische Differentialgleichung [Bro], die in einem endlichen Gebiet des  $(q, \mu)$  Raums eindeutig lösbar ist, wenn am Rand des Gebiets Bedingungen an Funktionswerte, oder Ableitungen vorgegeben werden [Jai].

Das Gebiet der Lösung in der  $(q, \mu)$  Ebene wird durch  $q_a \leq q \leq q_e$  und  $\mu_{\text{grenz}}(q) \leq \mu \leq 1$  begrenzt.

### A.1.1 Randbedingung bei $q_a$

Die Grenze  $q_a$  wird so klein gewählt, daß dort die Synchrotronstrahlung noch keinen Einfluß hat und für die Verteilungsfunktion die bekannte analytische Lösung [Fuß], [CoHa]

$$f(q_a, \mu) = \frac{C}{q_a} e^{-\frac{q_a(1-\mu)}{A(Z_{\text{eff}}+1)}} \tag{A.1.2}$$

( $C$  : Normierungskonstante,  $A = \frac{e^3 n_e \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e c^2 E}$ )

verwendet werden kann. Es muß hierbei  $A < 1$  sein, da sonst bei  $q_a$  keine Runawayelektronen stationär existieren können [Fuß], [CoHa].

### A.1.2 Randbedingung bei $q_e$

Bei  $q_e$  wird  $f(\mu, q_e)$  so variiert, daß der Teilchenfluß  $j_R$  durch den Impulsraum,

$$j_R(q) = q^2 \int_{-1}^{+1} d\mu f(q, \mu) \left( \vec{F}_e + \vec{F}_R + \vec{F}_{\text{Synch}} \right) * \vec{e}_q(q, \mu) = \text{const} \tag{A.1.3}$$

unabhängig von  $q$  ist, da im stationären Fall keine Quellen und Senken für die Runawayelektronen im Lösungsgebiet vorhanden sind, und deshalb der bei  $q_a$  einströmende Teilchenstrom das Gebiet bei  $q_e$  auch wieder verlassen muß.

### A.1.3 Randbedingung bei $\mu = 1$

Bei  $\mu = 1$  werden keine Funktionswerte vorgegeben, sondern nur die Ableitungen nach  $\mu$  am Rand durch Ausdrücke berechnet, die von denen im Inneren des Gebiets verwendeten, abweichen.

### A.1.4 Randbedingung bei $\mu_{\text{grenz}}(q)$

Die untere Grenze  $\mu_{\text{grenz}}(q)$  wird dadurch festgelegt, daß der Koeffizient vor  $\partial f / \partial q$  in (A.1.1) zu Null gesetzt und nach  $\mu$  aufgelöst wird:

$$\mu_{\text{grenz}}(q) = \sqrt{1 + \frac{k_{\text{sr}}^2}{4 q^4 A^2} + \frac{1}{q^2} \left(1 + \frac{1}{q^2}\right) k_{\text{sr}} - \frac{k_{\text{sr}}}{2 q^2 A}} \quad (\text{A.1.4})$$

$$k_{\text{sr}} = \frac{8 \pi r_e c^2 \epsilon_0^2}{3 e^2 \ln \Lambda} \frac{B^2}{n_e} = 3,59 * 10^{17} \frac{B [\text{T}]^2}{n_e [\text{m}^{-3}]}$$

Mit der Randbedingung

$$f(q, \mu_{\text{grenz}}(q)) = 0 \quad (\text{A.1.5})$$

erhält man eine numerische Lösung, die (A.1.3) erfüllt.

Erniedrigt man die untere Grenze für  $\mu$ , so ist dies nicht mehr möglich: Die Kräfte (II.1.3.2), (II.1.2.8) und (II.1.3.3)

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{\text{Synch}} + \vec{F}_R \quad (\text{A.1.6})$$

führen bei  $\mu < \mu_{\text{grenz}}(q)$  zu einer Abbremsung der Runawayelektronen, die mit abnehmenden  $\mu$  sogar noch betragsmäßig ansteigt (höhere Synchrotronverluste). Dies führt zu einer Entleerung des Gebiets  $\mu < \mu_{\text{grenz}}(q)$ , so daß diese Pitchwinkel im stationären Fall nur sehr wenig bevölkert sein können.

## A.2 Gitterpunkte

In  $q$ -Richtung werden  $n$  äquidistante Stützstellen,

$$q(j) = q_a + \frac{q_e - q_a}{(n - 1)} (j - 1) \quad (\text{A.2.1})$$

und in  $\mu$ -Richtung  $m$  äquidistante, jedoch von  $q$  abhängige Stützstellen verwendet:

$$\mu(i, j) = 1 - \frac{1 - \mu_{\text{grenz}}(q(j))}{(m - 1)} (i - 1) \quad (\text{A.2.2})$$



### A.3 Annäherung der Differentialquotienten durch endliche Differenzen

Die in (A.1.1) vorkommenden Ableitungen  $\partial f / \partial q$ ,  $\partial f / \partial \mu$  und  $\partial^2 f / \partial \mu^2$  werden durch folgende Differenzen ersetzt, wobei für  $\partial f / \partial q$  zwischen den Stützstellen des  $\mu$ -Gitters interpoliert werden muß. Mit der Abkürzung

$$f(q(j), \mu(i, j)) = f^{i, j} \quad (\text{A.3.1})$$

erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial q}(q(j), \mu(i, j)) = \frac{f(q(j+1), \mu(i, j)) - f(q(j-1), \mu(i, j))}{q(j+1) - q(j-1)} \quad (\text{A.3.2})$$

mit

$$f(q(j+1), \mu(i, j)) \approx f^{i, j+1} \quad (\text{A.3.3})$$

(Der Fehler der Näherung in (A.3.3) wird durch Erhöhung der Zahl der Stützstellen minimiert.)  
und

$$\begin{aligned} f(q(j-1), \mu(i, j)) &= f^{i^*, j-1} \\ &+ \frac{\mu(i, j) - \mu(i^*, j-1)}{\mu(i^*-1, j-1) - \mu(i^*, j-1)} \\ &* (f^{i^*-1, j-1} - f^{i^*, j-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.3.4})$$

wobei  $i^*$  durch

$$\mu(i^*, j-1) < \mu(i, j+1) < \mu(i^*-1, j-1) \quad (\text{A.3.5})$$

bestimmt ist.

Sowie

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(q(j), \mu(i, j)) = \frac{f^{i-1, j} - f^{i+1, j}}{\mu(i-1, j) - \mu(i+1, j)} \quad (\text{A.3.6})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(q(j), \mu(i, j)) &= \\ &\frac{2 f^{i+1, j}}{[\mu(i, j) - \mu(i+1, j)] * [\mu(i-1, j) - \mu(i+1, j)]} \\ &- \frac{2 f^{i, j}}{[\mu(i-1, j) - \mu(i, j)] * [\mu(i, j) - \mu(i+1, j)]} \\ &- \frac{2 f^{i-1, j}}{[\mu(i-1, j) - \mu(i, j)] * [\mu(i-1, j) - \mu(i+1, j)]} \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

Am Rand  $\mu = 1$  des Gebiets wurden

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(q(j), \mu(1, j)) = \frac{f^{1, j} - f^{2, j}}{\mu(1, j) - \mu(2, j)} \quad (\text{A.3.8})$$

und (Rotationssymmetrie der Verteilungsfunktion)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(q(j), \mu(1, j)) = \frac{f^{2, j} - f^{1, j}}{[\mu(1, j) - \mu(2, j)]^2} \quad (\text{A.3.9})$$

verwendet.

## A.4 Lösung der Differentialgleichung

Für die  $(m * n)$  Stützstellen ergeben sich  $(m * n)$  lineare Gleichungen, wobei an den Rändern  $q_a$ ,  $q_e$  für die Funktionswerte bei  $j = 0$  und  $j = n + 1$  die Randwerte eingesetzt werden.

Die  $(m * n)$  linearen Gleichungen werden zu einer  $(m * n) \times (m * n)$  Matrix zusammengefaßt und durch das Gaußsche Eliminationsverfahren gelöst.

Der kleinste numerische Fehler ergibt sich, falls  $n$  ungerade gewählt wird: die Anpassung der Funktionswerte mit ungeraden Indizes  $j$  an die Randwerte ist dann optimal. Allerdings sind die Funktionswerte zu geraden  $j$  sehr ungenau, da sie von der Randbedingung entkoppelt sind.

Die Bedingung (A.1.3) wird von den Funktionen mit ungeraden  $j$  gut erfüllt, währenddessen dies für gerade  $j$  nicht gilt. Es werden deshalb beim Ausdruck der numerischen Lösungen nur die Stützstellen mit ungeraden  $j$  geplottet.

$$\mu_{\text{Grenz}}(q) = \sqrt{1 + \frac{k_{\text{eff}}^2}{4q^2} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{q} \left( \frac{1}{3} \right)} \quad \text{(A.1.4)}$$

Mit der Randbedingung

$$(1 - i, i - 1) u_{\text{Grenz}} + (i, i) u = 0 \quad \text{(A.1.5)}$$

erhält man eine numerische Lösung, die (A.1.3) erfüllt.

Erreicht man die untere Grenze für  $\mu$ , ist dies nicht mehr möglich: Die Kräfte

$$\frac{F_e + F_{\text{Synch}} + F_R((i, i) u, (i) p)}{46} \quad \text{(A.1.6)}$$

führen bei  $\mu < \mu_{\text{Grenz}}(q)$  zu einer Abbremsung der Teilchenelektronen, die mit abnehmendem  $\mu$  sogar noch betragsmäßig ansteigt (höhere Synchrotronverstrahlung). Dies führt zu einer Anhäufung des Gebiets  $\mu < \mu_{\text{Grenz}}(q)$ , welches sich im stationären Fall nur sehr wenig bevölkern kann.

## A.2 Gitterpunkte

In  $q$ -Richtung (wirden  $\pm$  äquidistante Stützstellen) Am Rand  $\mu = 1$  des Gebiets wurden

$$\frac{16}{94} \frac{p(i) u(i) p}{(i) u(i) p} \quad \text{(A.2.1)}$$

und in  $\mu$ -Richtung  $m$  äquidistante, jedoch von  $q$  abhängige Stützstellen verwendend:

$$\frac{16}{94} \frac{p(i) u(i) p}{(i) u(i) p} \quad \text{(A.2.2)}$$



## Anhang B Numerische Lösung der zeitunabhängigen relativistischen Fokker-Planck-Gleichung mit Rippleresonanz

Zur Berechnung der stationären Verteilung wird das gleiche Gitter wie in Anhang A verwendet. Außerdem wird von der Näherung Gebrauch gemacht, daß die Rippleresonanz bei konstantem Impuls  $q_{res}$  eintritt (siehe Abschnitt II.1.3.2.3).

Das Gesamtlösungsgebiet, das sich zwischen  $q_a \leq q \leq q_{res}$  und  $\mu_{Rand}(q) \leq \mu \leq 1$  erstreckt, wird in zwei Teilgebiete zerlegt: im Gebiet I ( $q_a \leq q \leq q_{sch}$ ) erfahren die Runawayelektronen nur Stöße mit den Plasmateilchen; das Gebiet II ( $q_{sch} \leq q \leq q_{res}$ ) enthält das Gebiet der Rippleresonanz, sowie den Übergang in das nur stoßbestimmte Gebiet (siehe Bild B.1).

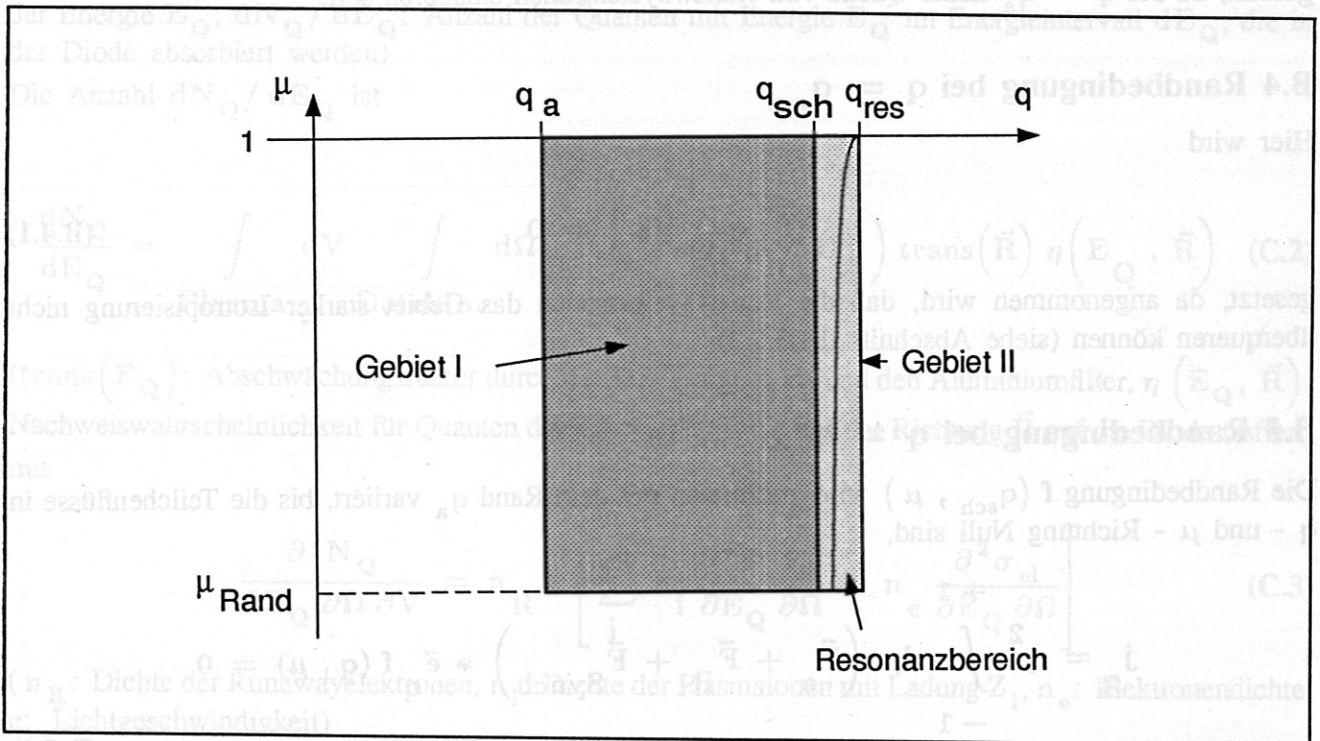


Bild B.1 Das Gesamtlösungsgebiet, das sich zwischen  $q_a \leq q \leq q_{res}$  und  $\mu_{Rand}(q) \leq \mu \leq 1$  erstreckt, wird in zwei Teilgebiete zerlegt: im Gebiet I ( $q_a \leq q \leq q_{sch}$ ) erfahren die Runawayelektronen nur Stöße mit den Plasmateilchen; das Gebiet II ( $q_{sch} \leq q \leq q_{res}$ ) enthält das Gebiet der Rippleresonanz, sowie den Übergang in das nur stoßbestimmte Gebiet

Im Gebiet II sind die Stützstellen wegen der steileren Gradienten der Verteilungsfunktion enger als im Gebiet I.

### B.1 Randbedingung bei $\mu = 1$

Bei  $\mu = 1$  werden keine Funktionswerte vorgegeben, sondern nur die Ableitungen nach  $\mu$  am Rand durch Ausdrücke berechnet, die von denen im Inneren des Gebiets verwendeten, abweichen.

### B.2 Randbedingung bei $\mu = \mu_{Rand}(q)$

Aufgrund der starken Isotropisierung im Resonanzbereich diffundieren Runawayelektronen zu  $\mu$  Werten mit  $\mu < \mu_{grenz}(q)$ , wobei bei  $\mu = \mu_{grenz}(q)$  die in  $q$ -Richtung auf das Runawayelektron wirkenden Kräfte Null sind (siehe Abschnitt A.1.4). Es wird hier meist bei  $\mu_{Rand}(q) \approx 3 \mu_{grenz}(q)$  die Verteilungsfunktion auf Null gesetzt,

$$f(q, \mu_{\text{Rand}}) = 0 \quad (\text{B.2.1})$$

da die Verteilungsfunktion bei  $\mu = \mu_{\text{Rand}}(q)$  schon exponentiell klein ist.

### B.3 Randbedingung bei $q = q_a$

Es wird

$$f(q_a, \mu) = 0 \quad (\text{B.3.1})$$

gesetzt, da bei  $q = q_a$  keine Quelle von Runawayelektronen existieren soll.

### B.4 Randbedingung bei $q = q_{\text{res}}$

Hier wird

$$f(q_{\text{res}}, \mu) = 0 \quad (\text{B.4.1})$$

gesetzt, da angenommen wird, daß die Runawayelektronen das Gebiet starker Isotropisierung nicht überqueren können (siehe Abschnitt II.1.3.2.2).

### B.5 Randbedingung bei $q = q_{\text{sch}}$

Die Randbedingung  $f(q_{\text{sch}}, \mu)$  wird zusammen mit dem Rand  $q_a$  variiert, bis die Teilchenflüsse in  $q$  - und  $\mu$  - Richtung Null sind,

$$j_q = q^2 \int_{-1}^{+1} d\mu \left( \vec{F}_e + \vec{F}_R + \vec{F}_{\text{Synch}} \right) * \vec{e}_q f(q, \mu) = 0 \quad (\text{B.5.1})$$

$$j_\mu = q^2 \int_{-1}^{+1} d\mu \left( \vec{F}_e + \vec{F}_R \right) * \vec{e}_\mu f(q, \mu) = 0$$

( $\vec{F}_e$  : elektrische Kraft,  $\vec{F}_R$  : Reibungskraft,  $\vec{F}_{\text{Synch}}$  : Bremskraft durch Emission von Synchrotronstrahlung (siehe Abschnitt II.1.3.1.1))

da nur dann die Verteilungsfunktion ohne Teilchenquellen und -senken stationär ist.

### B.6 Numerische Berechnung der Verteilungsfunktion

Die Annäherung der Differentialquotienten durch endliche Differenzen, sowie die Lösung der erhaltenen Gleichungssysteme erfolgt so, wie schon in Anhang A beschrieben.



## Anhang C Abschätzung der Dichte der Runawayelektronen aus dem Gleichstromsignal der 50 $\mu\text{m}$ Aluminiumfilter Kanäle

Der Signalstrom  $I_{\text{DC}}$  aufgrund der Runawayelektronen-Plasma-Bremsstrahlung ist

$$I_{\text{DC}} = \int_0^{E_{\text{R}}} dE_{\text{Q}} q(E_{\text{Q}}) \frac{dN_{\text{Q}}}{dE_{\text{Q}}} \quad (\text{C.1})$$

( $E_{\text{R}}$ : Energie der Runawayelektronen,  $q(E_{\text{Q}})$ : erzeugte freie Ladung in der Diode durch Quanten der Energie  $E_{\text{Q}}$ ,  $dN_{\text{Q}}/dE_{\text{Q}}$ : Anzahl der Quanten mit Energie  $E_{\text{Q}}$  im Energieintervall  $dE_{\text{Q}}$ , die in der Diode absorbiert werden)

Die Anzahl  $dN_{\text{Q}}/dE_{\text{Q}}$  ist

$$\frac{dN_{\text{Q}}}{dE_{\text{Q}}} = \int_{\text{Plasma}} dV \int_{\text{Detektor}} d\Omega_{\text{Det}} \frac{\partial^3 N_{\text{Q}}}{\partial E_{\text{Q}} \partial \Omega \partial V}(E_{\text{Q}}) \text{trans}(\vec{R}) \eta(E_{\text{Q}}, \vec{R}) \quad (\text{C.2})$$

( $\text{trans}(E_{\text{Q}})$ ): Abschwächungsfaktor durch das Detektorgehäuse und den Aluminiumfilter,  $\eta(E_{\text{Q}}, \vec{R})$ : Nachweiswahrscheinlichkeit für Quanten der Energie  $E_{\text{Q}}$ , die aus der Richtung  $\vec{R}$  auf die Diode treffen mit

$$\frac{\partial^3 N_{\text{Q}}}{\partial E_{\text{Q}} \partial \Omega \partial V} = n_{\text{R}} c \left[ \sum_i n_i \frac{\partial^2 \sigma(Z_i)}{\partial E_{\text{Q}} \partial \Omega} + n_e \frac{\partial^2 \sigma_{\text{el}}}{\partial E_{\text{Q}} \partial \Omega} \right] \quad (\text{C.3})$$

( $n_{\text{R}}$ : Dichte der Runawayelektronen,  $n_i$ : Dichte der Plasmaionen mit Ladung  $Z_i$ ,  $n_e$ : Elektronendichte,  $c$ : Lichtgeschwindigkeit)

Der Wirkungsquerschnitt  $\partial^2 \sigma_{\text{el}}/(\partial E_{\text{Q}} * \partial \Omega)$  für Bremsstrahlung relativistischer Elektronen, die mit ruhenden Elektronen stoßen, ist gleich dem Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlung der Runawayelektronen bei Stößen mit ruhenden Ionen  $\partial^2 \sigma(Z_i)/(\partial E_{\text{Q}} * \partial \Omega)$  für  $Z_i = 1$  [KoMo]. Da die von hochrelativistischen Teilchen emittierte Strahlung in Richtung der momentanen Geschwindigkeit in einen Raumwinkel der Winkelbreite  $1/\gamma$  rad emittiert wird, kann der Term  $\partial^2 \sigma(Z_i)/(\partial E_{\text{Q}} * \partial \Omega)$  für hochrelativistische Runawayelektronen mit einem Pitchwinkel  $\alpha$  nach

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial E_{\text{Q}} \partial \Omega} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi \sin(\alpha)/\gamma} \frac{d\sigma}{dE_{\text{Q}}} & \text{falls } |\angle(\vec{R}, \vec{v}_{\text{GZ}}) - \alpha| < \frac{2}{\gamma} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

( $\vec{v}_{\text{GZ}}$ : Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums der Runawayelektronen (siehe Kapitel II.1)) berechnet werden, mit (Formel (3BSa), [KoMo])

$$\frac{d\sigma(Z_i)}{dE_{\text{Q}}} = \frac{4 Z_i^2 r_e^2}{137} \frac{1}{E_{\text{Q}}} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{E}{E_{\text{R}}} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E}{E_{\text{R}}} \right] \ln \left( 183 Z^{-1/3} \right) + \frac{1}{9} \frac{E}{E_{\text{R}}} \right\} \quad (\text{C.5})$$

$$(E = E_R - E_Q)$$

Für die Berechnung der Nachweiswahrscheinlichkeit  $\eta(E_Q, \vec{R})$  wird angenommen, daß die nicht durch die Diode hindurchtretende Strahlung in ihr absorbiert wird.

$$\eta(E_Q, \vec{R}) = 1 - e^{-\mu_{Si}(E_Q) d / \cos(\zeta)} \quad (C.6)$$

( $\mu_{Si}(E_Q)$ ): linearer Abschwächungskoeffizient für Silizium [Siegb], d: Dicke der Verarmungszone der Siemensdiode,  $\zeta$ : Winkel zwischen Bewegungsrichtung  $\vec{R}$  der auftreffenden Strahlung und Lot auf die strahlungsempfindliche Fläche)

In den verwendeten Röntgendiode können maximal Elektronen einer Energie von 100 keV abgebremst werden (siehe Kapitel III.1). Elektronen mit einer höheren Energie fliegen durch die Diode hindurch [Ort]. Für die erzeugte freie Ladung pro Quant wird deshalb

$$q(E_Q) = \begin{cases} \frac{E_Q}{3,62 \text{ eV}} e, & \text{falls } E_Q < 100 \text{ keV} \\ 100 \text{ keV} / 3,62 \text{ eV} e, & \text{falls } E_Q \geq 100 \text{ keV} \end{cases} \quad (C.7)$$

gesetzt.

Der Signalstrom  $I_{DC}$  (Gleichung (C.1)) kann dann faktorisiert werden in

$$I_{DC} = e \bar{n}_R \bar{n}_e c I(\alpha, \gamma) \quad (C.8)$$

mit

$$I(\alpha, \gamma) = \int_0^{E_R} dE_Q \frac{q(E_Q)}{e} \int_{\text{Plasma}} dV \int_{\text{Detektor}} d\Omega \frac{n_R}{\bar{n}_R} \frac{n_e}{\bar{n}_e} \left[ \frac{\partial^2 \sigma(Z_{\text{eff}})}{\partial E_Q \partial \Omega} + \frac{\partial^2 \sigma(Z=1)}{\partial E_Q \partial \Omega} \right] \text{trans}(\vec{R}) \eta(E_Q, \vec{R}) \quad (C.9)$$

mit

$$Z_{\text{eff}} = \left( \sum_i n_i Z_i^2 \right) / n_e \quad (C.10)$$

als effektiver Ionenladungszahl (siehe Kapitel II.1).



## Anhang D Ausschluß anderer Mechanismen zur Erklärung der beobachteten fluktuierenden Emission

Da die bei Entladung 4770 beobachtete fluktuierende Emission bei  $(116 \pm 4)$  GHz nur bei Vorhandensein von Runawayelektronen auftritt, muß die Emission durch Instabilitäten des Runawayelektronenstrahls zustandekommen. Die aus der Literatur bekannten Strahlinstabilitäten werden im folgenden auf ihre Anwendbarkeit bei dieser Instabilität geprüft.

Die Weibelinstabilität [Weib], bei der transversale elektromagnetische Wellen erzeugt werden, ist auf diese Instabilität nicht anwendbar, da hierfür  $v_g \gg v_{GZ}$  ( $v_g$ : Gyrationengeschwindigkeit,  $v_{GZ}$ : Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums) notwendig ist. Dies ist jedoch für die Runawayelektronen nicht zutreffend (siehe Abschnitt III.3.2).

Die als  $\omega_{pe}$  Fluktuationen [HutKis], [HutGu] bekannte spektral enge Emission um die Plasmafrequenz ähnelt im Zeitverhalten stark der hier beobachteten Emission. Die Elektronenplasmafrequenzen bei Entladung 4770 liegen allerdings unterhalb 60 GHz (für die Achsendichte  $n_{e0} \approx 4,5 * 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ), weshalb es sich bei der beobachteten Emission nicht um  $\omega_{pe}$  Fluktuationen handeln kann.

Die außerdem in Frage kommenden Instabilitäten

- Buneman-Budger-Instabilität [Nez], [Bun] (elektrostatische Wechselwirkung zwischen Plasmaionen und Runawayelektronen)
- Zweistrom-, Strahlinstabilität [Nez], [Cap1] (elektrostatische Wechselwirkung zwischen thermischen Elektronen und Runawayelektronen)
- Parail-Pogutse-Instabilität [ParPog] (Erhöhung der Senkrechterenergie der Runawayelektronen bei Emission von Wellen)

lassen sich auf drei Elementarprozesse der Wechselwirkung zwischen Wellen und Runawayelektronen zurückführen [Nez], die sich als Energiebilanz für das emittierte Quant schreiben lassen:

$$\omega = \vec{k} * \vec{v}_{GZ} + N \omega_{ce} \quad (\text{D.11})$$

( $\omega$ ,  $\vec{k}$ : Kreisfrequenz und Wellenvektor der emittierten Welle,  $\vec{v}_{GZ}$ : Geschwindigkeit des Gyrationenzentrums der Runawayelektronen,  $\omega_{ce}$ : Gyrationkreisfrequenz der Runawayelektronen, N: ganze Zahl)

Die Runawayelektronen emittieren als hochrelativistische Teilchen Quanten näherungsweise nur in Richtung ihrer Geschwindigkeit. Es gilt deshalb

$$\vec{k} * \vec{v}_{GZ} = k \cos(\alpha) v_{GZ} \quad (\text{D.12})$$

mit  $\alpha$  als Pitchwinkel der Runawayelektronen.

Beim Cherenkov-Effekt ( $N = 0$  in Gleichung (D.11)) stammt die Energie der emittierten Welle nur aus der Parallelenergie der Runawayelektronen. Die für das Auftreten des Cherenkov-Effekts notwendige Bedingung

$$\cos(\alpha) n(\omega, \alpha) \frac{v_{GZ}}{c} = 1 \quad (\text{D.13})$$

ist jedoch nicht erfüllt, da der Brechungsindex  $n(\omega, \alpha) < 1$  (siehe Bild III.3.6.2.8) im Plasma ist.

Durch anormalen Dopplereffekt ( $N < 0$  in Gleichung (D.11)) wird die Welle unter Erniedrigung der Parallel- und Erhöhung der Senkrechterenergie emittiert. Der für das Auftreten dieses Prozesses notwendige Brechungsindex

$$n(\omega, \alpha) = \frac{1}{- |N| \frac{\omega_{ce}}{ck} + \frac{v_{GZ}}{c} \cos(\alpha)} > \frac{c}{v_{GZ} \cos(\alpha)} > 1 \quad (D.14)$$

ist jedoch wegen  $n(\omega, \alpha) < 1$  (siehe Bild III.3.6.2.8) nicht gegeben. Es entfällt damit die Parail-Pogutse Instabilität, bei der durch anormalen Dopplereffekt Parallel- in Senkrechterenergie umgewandelt wird.

Beim normalen Dopplereffekt ( $N > 0$  in Gleichung (D.11)) wird die Welle unter Verringerung von Parallel- und Senkrechterenergie emittiert. Die hierzu notwendige Bedingung für den Brechungsindex

$$n(\omega, \alpha) = \frac{1}{|N| \frac{\omega_{ce}}{ck} + \frac{v_{GZ}}{c} \cos(\alpha)} \quad (D.15)$$

kann mit  $n(\omega, \alpha) < 1$  erfüllt werden. Die emittierte Frequenz folgt aus (D.11) zu

$$\omega = \frac{|N| \omega_{ce}}{1 - n(\omega, \alpha) \frac{v_{GZ}}{c} \cos(\alpha)} \quad (D.16)$$

(zu vergleichen mit Gleichung (III.3.4.3)).

Die Schwellenwerte  $[N_{ez}]$  für die Runawayelektronendichten  $n_R$ , oberhalb deren die Instabilitäten einsetzen, sind für die Buneman-Instabilität

$$n_R > \frac{4 \pi^2 \epsilon_0 m_e \gamma f^2}{e^2} \quad (D.17)$$

und für die Strahlinstabilität

$$n_R > \frac{4 \pi^2 \epsilon_0 m_e \gamma}{e^2} \left( f^{\frac{2}{3}} - f \frac{2}{p_e} \right)^3 \quad (D.18)$$

( $f$ : Frequenz der emittierten Strahlung,  $f_{pe}$ : Plasmafrequenz,  $\epsilon_0$ : Dielektrizitätskonstante,  $m_e$ : Elektronenruhemasse,  $\gamma$ : relativistischer Gammafaktor der Runawayelektronen,  $e$ : Elementarladung).

Die demnach notwendigen Dichten (Tabelle D.1) werden mit den für ASDEX Upgrade typischen Dichten

	Buneman-Instabilität	Strahlinstabilität
$n_R [m^{-3}] >$	$3,9 \cdot 10^{21}$	$1,7 \cdot 10^{20}$

Tabelle D.1 Schwellenwerte der Runawayelektronendichte für Entladung 4770, oberhalb der die Buneman- und Strahlinstabilität auftritt (berechnet nach (D.17), (D.18) für  $f = 116$  GHz,  $\gamma = 23$  (siehe Abschnitt III.3.6.1) und für die maximale Plasmafrequenz  $f_{pe} = 60$  GHz bei der Achsendichte  $n_{e0} \approx 4,5 \cdot 10^{19} m^{-3}$ ).

von  $n_R \approx 10^{14} m^{-3}$  (siehe Kapitel III.1) nicht erreicht. Die Buneman- und die Strahlinstabilität können deshalb nicht auftreten.

Ein Instabilitätsmechanismus, bei dem eine Welle mit der Frequenz nach Gleichung (D.16) erzeugt wird, ist nur der free-electron-maser.



## Anhang E Emission von höheren Harmonischen im helikalen Undulator

Die Runawayelektronen vollführen keine reine Gyrationbewegung nach (III.3.3.4) entlang der Geschwindigkeit des Gyrationzentrums  $\vec{v}_{GZ}$  (siehe Kapitel II.1), sondern die allgemeine Abhängigkeit ihrer Senkrechtgeschwindigkeit (hier unter Vernachlässigung der Änderung der Gyrationfrequenz  $\omega_{ce}$  mit der Zeit)

$$\begin{aligned} v_{jt}(t) &= v_{jg} \cos(\omega_{ce} t) + v_{jt dr} \\ v_{js}(t) &= v_{jg} \sin(\omega_{ce} t) + v_{js dr} \end{aligned} \quad (E.1)$$

beinhaltet Driftgeschwindigkeiten  $v_{js dr}$ ,  $v_{jt dr}$ , wie z. B. die Bewegung entlang des gekrümmten Torus.

Setzt man  $v_{jt}$ ,  $v_{js}$  nach (E.1) in den Ausdruck (III.3.3.14) ein, so ergibt sich mit  $v_{jt}/v_{GZ}$ ,  $v_{js}/v_{GZ} \ll 1$ ,  $v_{jt, s dr} \ll v_{jg}$  für die Driftgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_{j GZ} &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_j^2}} c * \\ &\left[ 1 - \frac{v_{jg}^2}{2c^2} - \frac{v_{jt dr} v_{jg} \cos(\omega_{ce} t)}{c^2} - \frac{v_{js dr} v_{jg} \sin(\omega_{ce} t)}{c^2} \right] \end{aligned} \quad (E.2)$$

Die Ortskoordinate ergibt sich durch Zeitintegration von (E.2) zu

$$\begin{aligned} r_{j GZ}(t) &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_j^2}} c \left( 1 - \frac{v_{jg}^2}{2c^2} \right) t - \frac{v_{j dr} v_{jg} \sin(\omega_{ce} t + \psi_{dr})}{c^2 \omega_{ce}} \\ &=: \bar{r}_{j GZ}(t) + \frac{v_{j dr} v_{jg} \sin(\omega_{ce} t + \psi_{dr})}{c^2 \omega_{ce}} \end{aligned} \quad (E.3)$$

wobei  $v_{jt dr}$ ,  $v_{js dr}$  zu  $v_{j dr}$  und der Phase  $\psi_{dr}$  zusammengefaßt wurden.

Ist  $v_{j dr}$  von Null verschieden, so führt dies zur Abstrahlung von Wellen bei Harmonischen der Grundwelle: Setzt man  $r_{j GZ}(t)$  in die Phase  $\theta_j = (k_M + k_u) r_{j GZ} + \psi_M$ , und diese in den Ausdruck (III.3.3.17) für  $\dot{\gamma}_j$  ein, folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_j &= - \frac{e E_M v_{jg}}{m_e c^2} \sin \left[ \left( k_M + k_u \right) r_{j GZ} - \omega_M t + \psi_M \right] \\ &= \frac{e E_M v_{jg}}{m_e c^2} \operatorname{Re} \left\{ i e^{i \left[ \left( k_M + k_u \right) r_{j GZ} - \omega_M t + \psi_M \right]} \right\} \\ &= \frac{e E_M v_{jg}}{m_e c^2} \operatorname{Re} \left\{ i e^{i \left( k_M + k_u \right) \frac{v_{j dr} v_{jg}}{c^2 \omega_{ce}} \sin(\omega_{ce} t + \psi_{dr})} \right. \\ &\quad \left. e^{i \left[ \left( k_M + k_u \right) \bar{r}_{j GZ} - \omega_M t + \psi_M \right]} \right\} \end{aligned} \quad (E.4)$$

Mit der Entwicklung [LaHb6]

$$e^{i x \sin(\varphi)} = \sum_{N=-\infty}^{\infty} J_N(x) e^{i N \varphi} \quad (\text{E.5})$$

mit  $J_N(x)$  als Besselfunktion N-ter Ordnung folgt:

$$\dot{\gamma}_j = \frac{e E_M v_{jg}}{m_e c^2} \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{N=-\infty}^{\infty} J_N \left[ \left( k_M + k_u \right) \frac{v_j dr v_{jg}}{c^2 \omega_{ce}} \right] e^{i N (\omega_{ce} t + \psi_{dr})} e^{i \left[ (k_M + k_u) \bar{r}_j GZ - \omega_M t + \psi_M \right]} \right\} \quad (\text{E.6})$$

$$= \frac{e E_M v_{jg}}{m_e c^2} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \left\{ J_N \left[ \left( k_M + k_u \right) \frac{v_j dr v_{jg}}{c^2 \omega_{ce}} \right] \operatorname{Re} \left[ i e^{i \left[ (k_M + (N+1) k_u) \bar{r}_j GZ - \omega_M t + \psi_M + N \psi_{dr} \right]} \right] \right\} \quad (\text{E.6})$$

$$= - \frac{e E_M v_{jg}}{m_e c^2} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \left\{ J_N \left[ \left( k_M + k_u \right) \frac{v_j dr v_{jg}}{c^2 \omega_{ce}} \right] \sin \left( \theta_{jN} + \psi_M + N \psi_{dr} \right) \right\} \quad (\text{E.6})$$

mit

$$\theta_{jN} = \left[ k_M + (N+1) k_u \right] \bar{r}_j GZ - \omega_{MN} t \quad (\text{E.7})$$

Irreversibler Energieübertrag zwischen Welle und Teilchen ist nur möglich für

$$\dot{\theta}_{jN} = \left[ k_M + (N+1) k_u \right] c \beta_r \cos(\alpha) - \omega_{MN} = 0, \quad N \geq 0 \quad (\text{E.8})$$

woraus die Emissionsfrequenz zu

$$\omega_{MN} = \frac{(N+1) \omega_{ce}}{1 - n \beta_r \cos(\alpha)}, \quad N \geq 0 \quad (\text{E.9})$$

folgt ( $n$  : Brechungsindex).

Die Intensitäten der einzelnen Harmonischen werden durch die Werte der Besselfunktionen bestimmt.



## Anhang F Brechungsindex eines kalten Plasmas

Der Brechungsindex  $n$  eines kalten Plasmas ist [Cap2], [Stix]

$$n^2 = \frac{R L \sin^2(\alpha) + P S [1 + \cos^2(\alpha)]}{2 [S \sin^2(\alpha) + P \cos^2(\alpha)]} \pm \frac{\sqrt{(R L - P S)^2 \sin^4(\alpha) + 4 P^2 D^2 \cos^2(\alpha)}}{2 [S \sin^2(\alpha) + P \cos^2(\alpha)]} \quad (\text{F.1})$$

mit

$$R = 1 - \sum_s \frac{\omega_{P_s}^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega}{\omega + \omega_{c_s}} \right)$$

$$L = 1 - \sum_s \frac{\omega_{P_s}^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega}{\omega - \omega_{c_s}} \right) \quad (\text{F.2})$$

$$S = \frac{1}{2} (R + L)$$

$$D = \frac{1}{2} (R - L)$$

$$P = 1 - \sum_s \frac{\omega_{P_s}^2}{\omega^2}$$

und den Plasma- und Gyrationfrequenzen der Teilchensorte  $s$

$$\omega_{P_s} = \sqrt{\frac{e_s^2 n_s}{\epsilon_0 m_s}}$$

$$\omega_{c_s} = \frac{e_s B}{m_s} \quad (\text{F.3})$$

( $e_s$ : Ladung,  $n_s$ : Teilchendichte,  $m_s$ : Masse des Teilchens  $s$ ,  $\epsilon_0$ : Dielektrizitätskonstante,  $B$ : Magnetfeld,  $\alpha$ : Winkel zwischen Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle und Magnetfeldrichtung)  
Das + Zeichen in Gleichung (F.1) gilt für rechts- und das - Zeichen für linkszirkularpolarisierte elektromagnetische Wellen.

## Verwendete Literatur

- [Bek]: G. Bekefi et al., Appl. Phys. Lett. 54 (14), 1302 - 1304 (1989)
- [BePa]: N. T. Besedin, I. M. Pankratov, Nuclear Fusion 26 (6), 807 f (1986)
- [BeSa]: R. Becker, F. Sauter: "Theorie der Elektrizität 1", B. G. Teubner Verlag Stuttgart, 21. Auflage, 1973
- [Booz]: A. H. Boozer, G. Kuo-Petravic, Phys. Fluids 24 (5), 851 - 859 (May 1981)
- [Bro]: I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: "Taschenbuch der Mathematik", 22. Auflage, Verlag Harri Deutsch Thun und Frankfurt/ Main, 1985
- [Bun]: O. Buneman, Physical Review Letters 1, 8 - 9 (1958); O. Buneman, Physics Review 115 (3), 503 - 517 (1959)
- [Cap1]: F. Cap: "Einführung in die Plasmaphysik I", Akademie Verlag Berlin, Pergamon Press Oxford, Vieweg + Sohn, Braunschweig, 1970
- [Cap2]: F. Cap: "Einführung in die Plasmaphysik II", Akademie Verlag Berlin, Pergamon Press Oxford, Vieweg + Sohn, Braunschweig, 1972
- [CEK]: D. J. Campbell, A. Eberhagen, S. E. Kissel, Nuclear Fusion 24 (3), 297 - 304 (1984)
- [CoHa]: J. W. Connor, R. J. Hastie, Nuclear Fusion 15, 415 - 424 (1975)
- [Dre1]: H. Dreicer, Physical Review 115 (2), 238 - 249 (1959)
- [Dre2]: H. Dreicer, Physical Review 117 (2), 329 - 342 (1960)
- [Fin]: K. H. Finken, et al. , Nuclear Fusion 30 (5), 859 - 870 (1989)
- [For]: O. Forster: "Analysis 1", Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig/ Wiesbaden, 1985
- [Fuß]: G. Fussmann, Nuclear Fusion 19 (3), 327 - 334 (1979)
- [Fußp]: G. Fußmann, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Außenstelle Berlin, private Mitteilung
- [Gol]: H. Goldstein: "Klassische Mechanik", Aula- Verlag, Wiesbaden, 8. Auflage, 1985
- [HutGan]: Hutchinson, Gandy, Physics of Fluids 28 (4), 1090 - 1096 (1985)
- [HutKis]: Hutchinson, Kissel, Physics of Fluids 26 (1), 310 - 313 (1983)
- [JaF]: R. Jaspers, K. H. Finken, et al., 19th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Innsbruck, Volume 16C, Part I, 155 ff (1992)
- [Jai]: M. K. Jain: "Numerical Solution of Differential Equations", second edition, Wiley Eastern Limited, New Dehli, Bangalore, Bombay, Calcutta, 1984
- [JaRo]: J. M. Jauch, F. Rohrlich: "The Theory of Photons and Electrons", Addison-Wesley Reading, Mass. 1955
- [Jarv]: O. N. Jarvis, G. Sadler, J. L. Thompson, Nuclear Fusion 28 (11), 1981 - 1993 (1988)
- [Jas]: R. Jaspers et al., Nuclear Fusion 33 (12), 1775 - 1785 (1993)
- [Joy]: P. Joyer, G. Martin, Proc. 17th EPS Conf. on Controlled Fusion and Plasma Heating June 25 - 29, Amsterdam / Netherlands, volume I, 303 - 306 (1990)
- [KDWF]: O. J. Kwon, P. H. Diamond, F. Wagner, G. Fussmann, Nuclear Fusion 28 (11), 1931 - 1943 (1988)
- [KiLo]: I. Kießling, M. Lowes: "Programmierung mit FORTRAN 77", B. G. Teubner Verlag Stuttgart, 1987
- [Klim]: Yu. L. Klimontovich: "The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma", Pergamon Press Oxford, London, Edinburgh, New York, Toronto, Sydney, Paris, Braunschweig, first English edition, 1967
- [KoMo]: H. W. Koch, J. W. Motz, Reviews of Modern Physics 31 (4), 920 - 955 (1959)
- [Kn]: H. Knoepfel: "Hard X-Ray Diagnostic For Fusion Experiment" in "Course on Plasma Diagnostics and Data Acquisition Systems", Varenna 1975, Bologna: Editrice Compositori (1975), Seiten 430- 452



- [Ku]: B. Kurzan: "Untersuchung der Plasmabremsstrahlung im nahen Infrarot zur Bestimmung der effektiven Ionenladungszahl und der Regelung der Elektronendichte an Tokamaks", Laborbericht IPP III / 177
- [KuKo]: A. B. Kukushkin, V. J. Kogan, Soviet Journal of Plasma Physics 7 (6), 669 - 672 (Nov. - Dec. 1981)
- [KSp]: H. Knoepfel, D. A. Spong, Nuclear Fusion 19 (6), 785- 829 (1979)
- [LaHb6]: W. B. Colson, C. Pellegrini, A. Renieri: "Laser Handbook Vol. 6", Elsevier Science Publishers B. V., 1990
- [LauR]: L. Laurent, J. M. Rax, Europhysics Letters 11 (3), 219 - 224 (1990); L. Laurent, J. M. Rax: "Runaway-Ripple Interaction in Tokamaks", Report EUR-CEA-FC-1374, Departement de Recherches sur la Fusion Controlee C.E.N. / Cadarache (1989)
- [Mad]: E. Madelung: "Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers", Springer Verlag Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1964
- [Mar]: P. Martin, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching, private Überlassung des berechneten toroidalen Magnetfelds von ASDEX Upgrade
- [MaSch]: E. A. J. Marcatili, R. A. Schmelzer, The Bell System Technical Journal, 1783 - 1809, (July 1964)
- [Mur]: H. Murmann, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching, private Mitteilung
- [Nez]: M. V. Nezlin: "Physics of Intense Beams in Plasmas", Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1993
- [Nor]: T. G. Northrop: "Adiabatic Motion of Charged Particles", Interscience Publishers, 1963
- [Ogu]: K. Ogura et al., Nuclear Fusion 31 (6), 1015 - 1033 (1991)
- [Ort]: "Instruments for Research and Industry", (1976), Katalog der Firma Ortec
- [ParPog]: V. V. Parail, O. P. Pogutse, Nuclear Fusion 18 (3), 303 - 314 (1978)
- [Pau]: R. Paul: "Optoelektronische Halbleiterbauelemente", B. G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1985
- [Qua]: Datenblatt der Firma Quantrad-Corporation
- [Rae]: J. Raeder et al.: "Kontrollierte Kernfusion", B. G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1981
- [RiCo]: S. K. Ride, W. B. Colson, Appl. Phys. 20, 41 - 50 (1979)
- [Risk]: H. Risken: "The Fokker-Planck-Equation", Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1989
- [Rott]: K. Rottmann: "Mathematische Formelsammlung", Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/ Zürich, 3. Auflage, 1984
- [Rus]: A. J. Russo, Nuclear Fusion 31 (1), 117 - 126 (1991)
- [Sal]: N. A. Salmon, A. Eberhagen, 19th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Innsbruck, Volume 16C, Part II, 1107 - 1110 (1992)
- [Sch]: E. T. Scharlemann, A. M. Sessler, J. S. Wurtele, Physical Review Letters 54 (17), 1925 - 1928 (1985)
- [Schw]: J. Schwinger, Physical Review 75 (12), 1912 - 1925 (1949)
- [Sie]: Datenblatt der Firma Siemens
- [Sieg]: K. Siegbahn: "Alpha-, Beta- and Gamma- Ray Spectroscopy, Vol. I, North Holland Publishing Company, Amsterdam- London, 1974, 4th edition
- [Spo]: D. A. Spong: "Equilibrium Confinement and Stability of Runaway Electrons in Tokamaks", Doktorarbeit, University of Michigan, 1976
- [Stix]: T. H. Stix: "Waves in Plasmas", American Institute of Physics, New York, 1992
- [TFR]: T.F.R. Group, Physical Letters 60 A, 219 - 222 (1977)
- [WaPe]: G. Ward, R. E. Pechacek, The Physics of Fluids 15 (12), 2202 - 2210 (1972)
- [Weib]: E. S. Weibel, Physical Review Letters 2 (3), 83 - 84 (1959)
- [Wess]: J. Wesson: "Tokamaks", Clarendon Press, Oxford 1987

- [Wille]: K. Wille: " Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen", B. G. Teubner Verlag Stuttgart, 1992
- [ZaKi]: K. E. Zayed, A. B. Kitzenko, Plasma Physics 10, 147- 160 (1968)
- [ZFG]: H. P. Zehrfeld, G. Fussmann, B. J. Green, Plasma Physics 23 (5), 473 - 489 (1981)



## Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. U. Schumacher für die Vergabe des interessanten Themas und Herrn Prof. Dr. K. Pinkau für die Möglichkeit, diese Arbeit am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik durchführen zu können.

Ich danke Herrn Prof. Dr. M. Kaufmann, der es mir ermöglichte, diese Arbeit am Tokamak ASDEX Upgrade auszuführen.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem fachlichen Betreuer Herrn Dr. K. - H. Steuer.

Für die vielen durchgeführten Plasmaentladungen mit Runawayelektronen danke ich dem ASDEX Upgrade Team.

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. G. Fußmann für die sehr anregenden Diskussionen über die kinetische Theorie der Runawayelektronen und die freundliche Überlassung der Runawayelektronen-Bremsstrahlungsspektren von ASDEX.

Für die Diskussionen über die Diffusion der Gyrationimpulse in der Rippleresonanz danke ich Herrn Prof. Dr. K. Lackner sowie Herrn Dr. C. Hoffmann.

Für Rat und Tat bei der relativistischen Thomsonstreuung danke ich Herrn Dr. H. Murmann und Herrn Dr. H. Salzmann, sowie Herrn Schramm und seiner Werkstatt für den elektronischen Aufbau.

Herrn Dr. W. Suttrop danke ich für die Unterstützung durch seine ECE-Diagnostik, wodurch das Auffinden der Maserstrahlung erst möglich wurde.

Für die vielen Diskussionen, die schließlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, danke ich Herrn Dr. H. Röhr sowie meinem Betreuer Herrn Dr. K. - H. Steuer.

Für die klärenden Diskussionen über den free-electron-maser danke ich den Herrn Dr. K. Witte vom Max-Planck-Institut für Quantenoptik sowie Herrn Dr. G. Spindler von der Deutschen Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt.