

**Untersuchung von Drei-Wellen-Kopplungen
in den Fluktuationen
der ASDEX-Abschälschicht**

M. Weinlich

IPP III / 183

Januar 1992



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN

**Untersuchung von Drei-Wellen-Kopplungen
in den Fluktuationen
der ASDEX-Abschältschicht**
M. Weinlich

IPP III / 183

Januar 1992

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

In this work we discuss the methods of bispectral analysis and their limitations. In order to study some special features, we will apply them to fluctuation data of the scrape-off-layer of the tokamak ASDEX. The fluctuations are monitored by the H_α -diagnostic and by probes.

The evaluation of the bispectrum is a statistical method to measure the phase-coherence between three Fourier components of the measured time series. This coherence can be discussed in terms of two different pictures: First the fluctuations can be regarded as a superposition of many independent waves, which can be identified with the Fourier components. The lowest order nonlinear interaction among them is the coupling of two waves to produce a new wave, either at the sum or at the difference frequency. These three waves have a fixed phase relation caused by the interaction, independent of the different realizations. On the other hand the plasma fluctuations can be regarded as a superposition of many independent plasma events. If most of the events are of the same shape, the Fourier components of any realization will show a strong relationship with each other. This paper interprets the results mostly in terms of the wave picture.

The application of the bispectral analysis to data of the ASDEX scrape-off-layer leads to some interesting results: In every plasma discharge a significant bicoherence up to 30% can be detected, which indicates a large nonlinearity in the plasma behavior. The maximum bicoherence is measured at a position about 2.5 cm outside the separatrix. H-mode discharges can be distinguished from ohmic discharges on the basis of the bispectral analysis. The shape of the predominant plasma events remains the same during different discharge types, but does depend on the plasma parameter studied (n_e or Φ_{fl}). The application of the results to a simple plasma model to calculate the power transfer between Fourier components does not lead to clear results.

Table of Contents

Abstract	i
Table of contents	iii
List of figures	vii
kurzer Abriss	xi
Inhaltsverzeichnis	xiii
Abbildungsverzeichnis	xvii
1 Introduction	1
1.1 Controlled fusion	1
1.2 Magnetic confinement following the tokamak principle	3
1.3 Magnetic confinement following the stellarator principle	4
1.4 The divertor tokamak ASDEX	4
2 The diagnostics for the fluctuation measurement	10
2.1 The H_α -diagnostic	10
2.2 The probes	13
2.3 The raw data from the fluctuation measurement	14
2.4 The statistical analysis of the raw data	18
3 The bispectrum	20
3.1 The definition of the bispectrum	20
3.2 A simple wave coupling model	21
3.3 The bispectrum of a simple noise signal	23
3.4 The bispectrum of a simple test signal	24
3.5 The bicoherence as a normalized bispectrum	24
3.6 The symmetry properties of the bispectrum	27
3.7 Extensions to the definition of the bispectrum	30
4 Numerical calculation of the bispectrum	32
4.1 Some basics of signal analysis	32
4.2 Implementation of the computer code	33
4.3 The signal-to-noise ratio of the bispectrum	34
4.4 A simple example for the calculation of the bispectrum	35

4.5	Artifacts in the calculation of the bispectrum	39
4.6	Influence of the signal-to-noise ratio on the bicoherence	42
4.7	Many coupling waves	44
5	First bispectral analysis of plasma data	47
5.1	Bispectral analysis of a random signal	47
5.2	Study of the nonlinear behavior of the measurement equipment	47
5.3	f-bispectral analysis of a real plasma signal	50
5.4	k-bispectral analysis of a real plasma signal	54
5.5	Other methods to interpret the results of the bispectral analysis	56
6	The triple correlation function	60
6.1	Definition of the triple correlation function	60
6.2	First examples for the triple correlation function	61
7	Analysis of some data from H_{α}-measurements	65
7.1	Study of different discharge phases	65
7.1.1	The bispectrum during the ohmic phase	65
7.1.2	The f-bispectrum during the L-phase	66
7.1.3	The k-bispectrum during the L-phase	67
7.1.4	The f-bispectrum during the H-phase	70
7.1.5	The k-bispectrum during the H-phase	74
7.2	Study of some important parameter changes	75
8	Analysis of some data from probe-measurements	80
8.1	Operational range of the probes	80
8.2	Results from measurements of the ion saturation current	80
8.3	Frequency analysis of a radial scan of ion saturation current	81
8.4	Frequency analysis of a radial scan of the floating potential	82
8.5	Wavenumber analysis of another radial scan of the floating potential	85
8.6	Comparison with the results of the H_{α} -measurement	85
9	Comparison with first results from the stellarator Wendelstein 7-AS	88
10	Estimation of the energy transfer due to nonlinear wave coupling	91
10.1	Calculation of the coupling constant	91

10.2 Comparison with the results of a noise signal	93
10.3 Estimation of the power transfer between distinct modes	94
11 Conclusions	98
Bibliography	101

List of Figures

1	The principle of a Tokamak experiment	3
2	The principle of a Stellarator experiment	5
3	Cross-section of the Divertor-Tokamak ASDEX	7
4	Schematic diagram of the ASDEX scrap-off-layer	9
5	Schematic diagram of the H_α -diagnostic	12
6	Schematic diagram of the probe-diagnostic	15
7	Raw data of the H_α -diagnostic	16
8	Plasma events in the raw data of the H_α -diagnostic	17
9	Region of definition of the bispectrum	28
10	Symmetric points in the bispectrum in non-Cartesian coordinates	29
11	The development of a test signal	36
12	The bicoherence of a test signal	37
13	The bispectrum of a test signal	38
14	The biphase of a test signal	38
15	The streets in the bicoherence	39
16	The streets in the biphase of probe data	40
17	The ELM's as a example of the wall	41
18	The bicoherence of many coupling waves	45
19	The bicoherence of simulated random numbers	48
20	Bicoherence and biphase of a noise measurement	49
21	The k-bicoherence of a noise measurement	49
22	The bicoherence of the ASDEX discharge 30437	50
23	The bicoherence of the ASDEX discharge 30437, rotated by 180°	51
24	The bispectrum of the ASDEX discharge 30437	52
25	The biphase of the ASDEX discharge 30437	52
26	The k-bispectrum of the ASDEX discharge 30437	55
27	The k-bicoherence of the ASDEX discharge 30437	55
28	The k-biphase of the ASDEX discharge 30437	56
29	The k-bicoherence of the ASDEX discharge 30437 as a contour plot	57
30	Influence of the signal shape on the value of the biphase	59
31	Definition and symmetries of the triple correlation function	62
32	The triple correlation of the ASDEX discharge 30437	63

33	The bicoherence during the ohmic phase of the ASDEX discharge 31560	66
34	The bicoherence and biphas during the ohmic phase of the ASDEX discharge 31998	67
35	The bicoherence and biphas during the L-phase of the ASDEX discharge 31998	68
36	The k-bicoherence and triple correlation during the ohmic Phase of the ASDEX discharge 31998	68
37	The k-bicoherence and triple correlation during the L-Phase of the ASDEX discharge 31998	69
38	The bicoherence during the ohmic and the H-phase of the ASDEX discharge 31754	70
39	The bicoherence during the H-Phase of the ASDEX discharge 31745 with high frequency resolution	71
40	The biphas during the H-Phase of the ASDEX discharge 31745	72
41	The triple correlation during the ohmic and the H-Phase of the ASDEX discharge 30717	73
42	The triple correlation during the ohmic and the H-Phase of the ASDEX discharge 30717	73
43	The k-bispectrum during the ohmic and the H-Phase of the ASDEX discharge 30717	74
44	The k-bicoherence during the ohmic and the H-Phase of the ASDEX discharge 30717	75
45	The extension of the coupling zone as a function of the maximum bicoherence	76
46	The biphas in the coupling zone as a function of the maximum bicoherence	78
47	The asymmetry as a function of the skewness	78
48	Skewness and asymmetry as a function of the maximum bicoherence	79
49	Bispectrum and bicoherence of the ion saturation current of the ASDEX discharge 33397	81
50	The bicoherence of the ion saturation current of the ASDEX discharges 32018 and 32020 in the far edge plasma	82
51	The bicoherence of the floating potential of the ASDEX discharges 32018 and 32020 in the far edge plasma	83
52	The bicoherence and biphas of the floating potential of the ASDEX discharges 32018 and 32020 about 2.5 cm outside the separatrix	84
53	The bicoherence of the floating potential of the ASDEX discharges 32018 and 32020 near the separatrix	84

54	The k-bicoherence of the floating potential as a function of radius	86
55	The bispectrum of the Wendelstein discharge 16306	89
56	The bicoherence of the Wendelstein discharge 16306	89
57	The biphase of the Wendelstein discharge 16306	90
58	The triple correlation of the Wendelstein discharge 16306	90
59	The amplitude of the coupling coefficient of the ASDEX discharge 30717 .	92
60	The phase of the coupling coefficient of the ASDEX discharge 30717	93
61	The bispectrum and the bicoherence of another noise signal	94
62	Absolute value and phase of the coupling coefficient of another noise signal	95
63	The power transfer function of the ASDEX discharge 30717	95
64	The power transfer function of a noise signal	96
65	A zoom of the power transfer function of the ASDEX discharge 30717	97

kurzer Abriß

In der vorliegenden Arbeit wird die Methode der Bispektralanalyse auf ihren Anwendungsbereich und ihre Grenzen hin untersucht. Zur Untersuchung spezieller Eigenschaften wird sie auf experimentelle Daten der Fluktuationen der Abschältschicht des Tokamaks ASDEX angewendet, die mit der H_α - und der Sondendiagnostik aufgezeichnet wurden.

Die Bispektralanalyse detektiert als statistische Untersuchungsmethode eine über viele unabhängige Realisationen hinweg feste Phasenbeziehung zwischen drei Fourierkomponenten der zugrundeliegenden Meßreihen der Plasmadaten. Diese feste Phasenbeziehung kann auf zwei unterschiedliche Arten interpretiert werden: Im Wellenbild betrachtet man einzelne Elementarschwingungen des Plasmas, die man mit den Fourierkomponenten gleichsetzt. Die einfachste nichtlineare Wechselwirkung in einem solchen System ist die Kopplung zweier Wellen und die Erzeugung einer Summen- oder Differenzwelle. Diese drei Wellen müssen dann wegen der zugrunde liegenden Wechselwirkung in einer festen, realisationsunabhängigen Phasenbeziehung zueinander stehen, die in der Bispektralanalyse nachgewiesen werden kann. Man kann die Fluktuationen der Abschältschicht des Plasmas aber auch als eine Überlagerung von zufälligen Einzelereignissen betrachten. Haben die diskutierten Einzelereignisse in allen Realisationen eine ähnliche Gestalt, so werden auch die Fourierkomponenten in einer festen Beziehung zueinander stehen. Wegen der einfacheren Interpretation liegt dem größten Teil der Arbeit das erste Bild einer nichtlinearen Wellenkopplung zugrunde.

Die Anwendung der Bispektralanalyse auf die Fluktuationen der Abschältschicht des ASDEX-Plasmas bringt eine Vielzahl von Resultaten: In allen untersuchten Entladungstypen kann eine Bikohärenz von bis zu 30%, die einer deutlichen Nichtlinearität entspricht, nachgewiesen werden. Das Maximum der Bikohärenz kann bei einer radialen Position etwa 2.5 cm außerhalb der Separatrix lokalisiert werden. Die ohmsche Entladungsphase kann anhand der Ergebnisse der Bispektralanalyse in den meisten Fällen gut von der H-Phase unterschieden werden. Die Form der herausragenden Ereignisse in den Fluktuationen ist jedoch von der Entladungsphase unabhängig und allein für die untersuchte Plasmagröße (n_e oder Φ_{fl}) charakteristisch. Die Anwendung der Ergebnisse der Analyse auf Modellrechnungen zur Bestimmung des Leistungstransfers zwischen einzelnen Fourierkomponenten erlaubt in der vorliegenden Form noch keine eindeutigen Aussagen.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	i
Table of contents	iii
List of figures	vii
kurzer Abriß	ix
Inhaltsverzeichnis	xiii
Abbildungsverzeichnis	xvii
1 Einleitung	1
1.1 Die kontrollierte Kernfusion	1
1.2 Der magnetische Einschluß nach dem Tokamak-Prinzip	3
1.3 Der magnetische Einschluß nach dem Stellarator-Prinzip	4
1.4 Der Divertor-Tokamak ASDEX	4
2 Die Diagnostiken zur Fluktuationsmessung	10
2.1 Die H_α -Diagnostik	10
2.2 Die Sonden-Diagnostik	13
2.3 Die Rohsignale der Fluktuationsmessungen	14
2.4 Die statistische Auswertung der Rohsignale	18
3 Das Bispektrum	20
3.1 Definition des Bispektrums	20
3.2 Ein einfaches Kopplungsmodell	21
3.3 Das Bispektrum eines einfachen Rauschsignals	23
3.4 Das Bispektrum eines einfachen Nutzsignals	24
3.5 Die Bikohärenz als normiertes Bispektrum	24
3.6 Die Symmetrieeigenschaften des Bispektrums	27
3.7 Erweiterungen der Bispektrumsdefinition	30
4 Numerische Berechnung des Bispektrums	32
4.1 Grundsätzliches zur Datenanalyse	32
4.2 Implementation der Berechnungen	33
4.3 Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis des Bispektrums	34
4.4 Ein einfaches Beispiel zur Bispektrumsberechnung	35

4.5	Artefakte bei der Bispektrumsberechnung	39
4.6	Einfluß des Signal-zu-Rausch-Verhältnises auf die Bikoärenz	42
4.7	Mehrere koppelnde Moden	44
5	Erste Bispektralanalyse von Plasmadaten	47
5.1	Bispektralanalyse eines Zufallssignals	47
5.2	Untersuchung der nichtlinearen Signalverfälschung durch die Meßelektronik	47
5.3	f-Bispektralanalyse eines echten Plasmasignals	50
5.4	k-Bispektralanalyse eines echten Plasmasignals	54
5.5	Weitere Auswertungsmöglichkeiten der Bispektrumsergebnisse	56
6	Die Dreifach-Korrelationsfunktion	60
6.1	Definition der Dreifach-Korrelationsfunktion	60
6.2	Erste Beispiele für die Dreifach-Korrelationsfunktion	61
7	Auswertung einiger Schüsse mit der H_{α}-Diagnostik	65
7.1	Vergleich der verschiedenen Entladungsphasen	65
7.1.1	Das Bispektrum in der ohmschen Entladungsphase	65
7.1.2	Das f-Bispektrum in der L-Mode	66
7.1.3	Das k-Bispektrum in der L-Mode	67
7.1.4	Das f-Bispektrum in der H-Mode	70
7.1.5	Das k-Bispektrum in der H-Mode	74
7.2	Vergleich einzelner wesentlicher Parameteränderungen	75
8	Auswertung einiger Entladungen mit Langmuir-Sonden	80
8.1	Einsatzbereich der Langmuir-Sonden	80
8.2	Messungen des Ionensättigungsstroms	80
8.3	Frequenzanalyse eines Radialscans des Ionensättigungsstroms	81
8.4	Frequenzanalyse eines Radialscans des Floating Potentials	82
8.5	k-Analyse eines weiteren Radialscans des Floating Potentials	85
8.6	Vergleich mit den Ergebnissen der H_{α} -Diagnostik	85
9	Vergleich mit ersten Messungen am Stellarator Wendelstein 7-AS	88
10	Abschätzungen des Energietransfers durch nichtlineare Kopplung	91
10.1	Bestimmung der Kopplungskonstanten	91

10.2 Vergleich mit den Ergebnissen eines Rauschsignals	93
10.3 Abschätzung des Leistungsflusses zwischen den Moden	94
11 Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick	98
Literaturverzeichnis	101

Abbildungsverzeichnis

1	Der prinzipielle Aufbau eines Tokamak-Experiments	3
2	Der prinzipielle Aufbau eines Stellarator-Experiments	5
3	Schematischer Schnitt durch den Tokamak ASDEX	7
4	Schematische Darstellung der Randschicht des Plasmas in ASDEX	9
5	Schematische Darstellung der H_α -Diagnostik	12
6	Schematische Darstellung der Sondendiagnostik	15
7	Die Rohsignale der H_α -Diagnostik	16
8	Plasmaereignisse in den Rohsignalen der H_α -Diagnostik	17
9	Der Definitionsbereich des Bispektrums	28
10	Die symmetrischen Punkte des Bispektrums in nicht-kartesischen Koordinaten	29
11	Zur Entstehung eines Testsignals	36
12	Die Bikohärenz des Testsignals	37
13	Das Bispektrum des Testsignals	38
14	Die Biphasen des Testsignals	38
15	Die glqq Straßengrqq in der Bikohärenz	39
16	Die glqq Straßengrqq in der Biphasen eines Sondersignals	40
17	ELMs als ein Beispiel für die glqq Mauergrqq	41
18	Die Bikohärenz mehrerer koppelnder Moden	45
19	Die Bikohärenz numerisch generierter Zufallszahlen	48
20	Bikohärenz und Biphasen einer Rauschmessung	49
21	Die k-Bikohärenz einer Rauschmessung	49
22	Die Bikohärenz der ASDEX-Entladung 30437	50
23	Die Bikohärenz der ASDEX-Entladung 30437, um 180° gedreht	51
24	Das Bispektrum der ASDEX-Entladung 30437	52
25	Die Biphasen der ASDEX-Entladung 30437	52
26	Das k-Bispektrum der ASDEX-Entladung 30437	55
27	Die k-Bikohärenz der ASDEX-Entladung 30437	55
28	Die k-Biphasen der ASDEX-Entladung 30437	56
29	Die k-Bikohärenz der ASDEX-Entladung 30437 als Konturenplot	57
30	Einfluß der Signalform auf den Wert der Biphasen	59
31	Definitionsbereich und Symmetrien der Dreifach-Korrelation	62

32	Die Dreifach-Korrelation der ASDEX-Entladung 30437	63
33	Die Bikohärenz der ohmschen Phase der ASDEX-Entladung 31560	66
34	Die Bikohärenz und Biphasen der ohmschen Phase der ASDEX-Entladung 31998	67
35	Die Bikohärenz und Biphasen der L-Phase der ASDEX-Entladung 31998 . .	68
36	Die k-Bikohärenz und die Dreifach-Korrelation der ohmschen Phase der ASDEX-Entladung 31998	68
37	Die k-Bikohärenz und Dreifach-Korrelation der L-Phase der ASDEX-Entladung 31998	69
38	Die Bikohärenz in der ohmschen und in der H-Phase der ASDEX-Entladung 31754	70
39	Die Bikohärenz in der H-Phase der ASDEX-Entladung 31745 bei höherer Frequenzauflösung	71
40	Die Biphasen in der H-Phase der ASDEX-Entladung 31745	72
41	Die Dreifach-Korrelation der ohmschen und der H-Phase der ASDEX- Entladung 30717	73
42	Die Dreifach-Korrelation der ohmschen und der H-Phase der ASDEX- Entladung 30717	73
43	Das k-Bispektrum der ohmschen und der H-Phase der ASDEX-Entladung 30717	74
44	Die k-Bikohärenz der ohmschen und der H-Phase der ASDEX-Entladung 30717	75
45	Breite der Kopplungszone in Abhängigkeit vom Maximum der Bikohärenz	76
46	Die Biphasen in der Kopplungszone in Abhängigkeit vom Maximum der Bikohärenz	78
47	Die asymmetrie in Abhängigkeit von der skewness	78
48	Skewness und asymmetrie in Abhängigkeit vom Maximum der Bikohärenz .	79
49	Das Bispektrum und die Bikohärenz des Ionensättigungsstroms der ASDEX-Entladung 33397	81
50	Die Bikohärenz des Ionensättigungsstroms der ASDEX-Entladungen 32018 und 32020 am äußersten Plasmarand	82
51	Die Bikohärenz des Floating Potentials der ASDEX-Entladungen 32018 und 32020 am äußersten Plasmarand	83
52	Die Bikohärenz und Biphasen des Floating Potentials der ASDEX-Entladungen 32018 und 32020 etwa 2.5 cm außerhalb der Separatrix	84

53	Die Bikohärenz des Floating Potentials der ASDEX-Entladungen 32018 und 32020 bei Annäherung an die Separatrix	84
54	Die k-Bikohärenz des Floating Potentials in radialer Abhängigkeit	86
55	Das Bispektrum der Wendelstein-Entladung 16306	89
56	Die Bikohärenz der Wendelstein-Entladung 16306	89
57	Die Biphasen der Wendelstein-Entladung 16306	90
58	Die Dreifach-Korrelation der Wendelstein-Entladung 16306	90
59	Die Amplitude der Kopplungskoeffizienten der ASDEX-Entladung 30717	92
60	Die Phase der Kopplungskoeffizienten der ASDEX-Entladung 30717	93
61	Das Bispektrum und die Bikohärenz eines weiteren Rauschsignals	94
62	Betrag und Phase der Kopplungskoeffizienten eines Rauschsignals	95
63	Die power transfer function der ASDEX-Entladung 30717	95
64	Die power transfer function eines Rauschsignals	96
65	Ein Ausschnitt aus der power transfer function der ASDEX-Entladung 30717	97

1 Einleitung

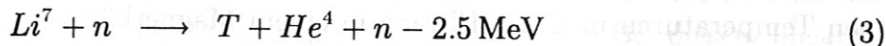
1.1 Die kontrollierte Kernfusion

Neben den regenerativen Energiequellen, die durch Ausnutzung der Sonnenstrahlung, der Windkraft oder der Wasser- und Gezeitenkraft zur Stromerzeugung beitragen, kann auch die kontrollierte Kernfusion zur längerfristigen Sicherung unseres Energiebedarfs ernsthaft diskutiert werden. Die zur Zeit verwendeten Energieträger wie Erdöl, Erdgas, oder das für die Kernspaltung benötigte Uranisotop U^{235} sind bei dem heutigen Energiebedarf nur noch für die nächsten 50 Jahre in ausreichendem Maße vorhanden. Auch die Kohlevorräte sind in spätestens 300 Jahren erschöpft [Wesson1987a]. Die Ausgangsstoffe für die kontrollierte Kernfusion, Deuterium und Lithium, reichen bei dem heute absehbaren Bedarf für etwa 30000 Jahre, bei Einbeziehung der Reserven, die unsere Weltmeere beherbergen, sogar für etwa 30 Millionen Jahre [Wesson1987a]. Deswegen muß man, neben der Untersuchung der Nutzungsmöglichkeiten der anderen aufgezählten regenerativen Energiequellen, mit den Bemühungen der letzten 35 Jahre fortfahren, in der Kernfusion eine kontrollierbare Energiequelle bereitzustellen.

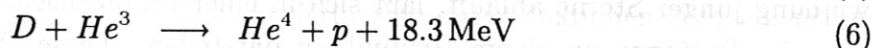
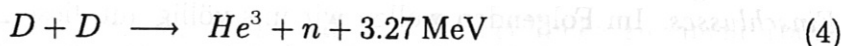
In der Kernfusion verschmelzen ein Deuterium- und ein Tritiumkern zu einem Heliumkern, wobei zusätzlich ein Neutron erzeugt wird. Bei einer einzigen dieser Reaktionen wird eine Energie von 17.6 MeV freigesetzt, die zum Großteil (14.1 MeV) auf das Neutron übertragen wird.



Diese Reaktion wird für den endgültigen Reaktorbetrieb favorisiert, da sie bereits bei verhältnismäßig geringen Temperaturen mit einem großen Wirkungsquerschnitt abläuft und sehr viel Energie freisetzt. Das radioaktive Isotop des Wasserstoffs, Tritium, kommt wegen seiner geringen Halbwertszeit von 12.3 Jahren nicht in nennenswerten Mengen in der Natur vor. Es kann aber in einem Fusionsreaktor aus dem in der Natur reichlich vorhandenen Element Lithium gewonnen werden. Dafür stehen zwei Brutreaktionen zur Verfügung:



Es gibt aber noch weitere stark exotherme Fusionsreaktionen:



Diese Reaktionen haben gegenüber der DT-Reaktion aus Gleichung (1) den Nachteil, daß ihre Wirkungsquerschnitte kleiner sind, und daß die Maxima der Ratenkoeffizienten bei

höheren Temperaturen liegen. Obwohl diese Reaktionen nur selten für den Fusionsreaktor in Betracht gezogen werden, wird in dem jetzigen Entwicklungsstadium der kontrollierten Kernfusion hauptsächlich das Verhalten eines Deuterium-Plasmas untersucht. Der große Vorteil dieser Modell-Experimente liegt in der Tatsache, daß sie kein radioaktives Inventar benötigen und nur wenig Neutronen freigesetzten. Somit kann die Aktivierung in den das Experiment umgebenden Strukturen sehr gering gehalten werden. Die Ergebnisse dieser Experimente lassen sich auf den Betrieb mit einem DT-Gemisch extrapolieren. Am europäischen Fusionsexperiment *JET* (*joint european torus*) wurde Anfang November 1991 in zwei DT-Entladungen gezeigt, daß die theoretischen Erwartungen für eine höhere Fusionsleistung in der DT-Reaktion berechtigt sind.

Ein zukünftiger brennender Reaktor soll aus ökonomischen Gründen die Verlustleistung des Plasmas durch die direkte Energieabgabe der schnellen α -Teilchen (3.5 MeV), die bei den Fusionsprozessen entstehen, ausgleichen. Diese Bedingung wird in dem sogenannten *Zündkriterium* zusammengefaßt. Es besagt, daß das Produkt aus der Dichte n , der Temperatur T , die für Elektronen und Ionen gleich sein soll, und der Energieeinschlußzeit τ_E in einem Fusionsexperiment einen gewissen Mindestwert übersteigen muß, damit die reaktorinterne Leistungsbilanz zu Null aufgeht [Pinkau1989a]:

$$n \cdot T \cdot \tau_E \geq 3 \times 10^{21} \text{ m}^{-3} \text{ keV s} \quad (7)$$

Um diese Bedingung zu erfüllen, werden im wesentlichen zwei prinzipiell verschiedene Wege untersucht. In der *Trägheitsfusion* soll ein Festkörper in der Form einer kleinen Hohlkugel, einem sogenannten Pellet, durch sphärische Implosion auf ein Vielfaches der Festkörperdichte komprimiert werden. Auf Grund der eigenen Trägheit bleibt das entstehende Hochdichteplasma lange genug beisammen, um einen Abbrand des DT-Gemisches zu ermöglichen. Die Plasmadichte liegt bei der Trägheitsfusion bei etwa 10^{31} m^{-3} , die Energieeinschlußzeit ist durch die Trägheit des Plasmas begrenzt und beträgt etwa 0.1 nsec. Der zweite untersuchte Weg führt über geringere Dichte und dafür länger Einschlußzeiten bei in etwa gleicher Temperatur. Ein heißes Plasma von einer Temperatur, die 20 keV^1 entspricht, kann mit geringen Dichten im Bereich von 10^{20} m^{-3} und Einschlußzeiten im Sekundenbereich das Zündkriterium erfüllen. Wegen dieser extremen Temperaturen muß das Plasma in einem Magnetkäfig eingeschlossen werden, da es bei einer Berührung mit einer materiellen Wand sowohl die Wand als auch sich selbst zerstören würde. Man spricht deswegen von einer Fusion mit Hilfe des *magnetischen Einschlusses*. Im Folgenden wollen wir uns völlig auf diese zweite Realisierungsmöglichkeit der kontrollierten Kernfusion beschränken. Der Prozeß, nach dem die Energiegewinnung junger Sterne abläuft, läßt sich in einer Bilanzgleichung als die Verschmelzung von vier Protonen zu einem Heliumkern darstellen. Diese „Fusion“ erfolgt nach dem Bethe-Weizsäcker-Zyklus in einem komplizierten katalytischen Prozeßablauf bei wesent-

¹Die „Temperatur“ $k_B T = 1 \text{ eV}$ entspricht einer Temperatur in SI-Einheiten von $T = 11600 \text{ K}$

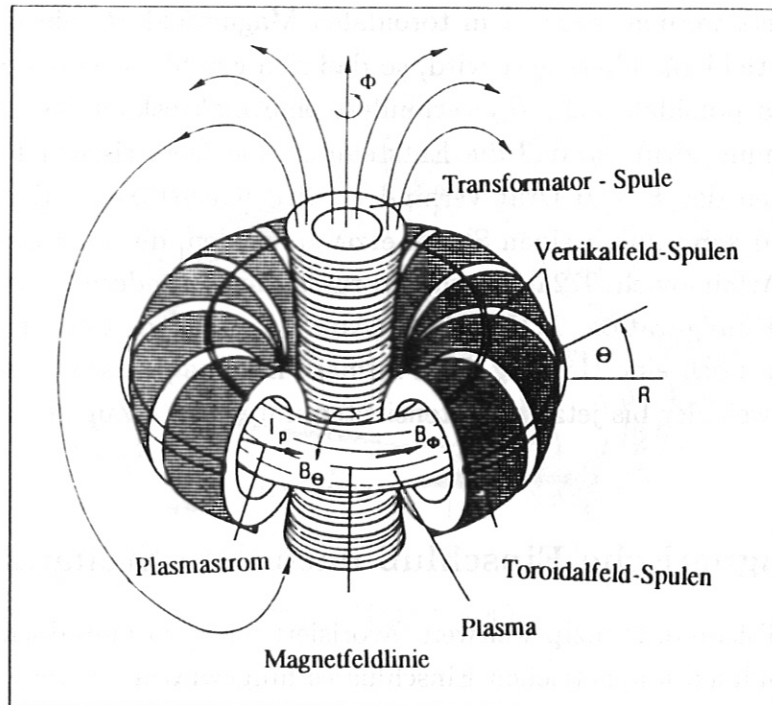


Abbildung 1: DER PRINZIPIELLE AUFBAU EINES TOKAMAK-EXPERIMENTS. Die zentrale Transformatorspule induziert über eine Flußänderung einen Strom im Plasma. Dieser Plasmastrom I_p erzeugt seinerseits ein weiteres Magnetfeld B_θ . Das Poloidalfeld B_θ spannt zusammen mit dem von den Hauptfeldspulen erzeugten toroidalen Feld B_ϕ die in sich geschlossenen magnetischen Flächen auf. Dieser Magnetfeldkonfiguration werden nun noch vertikale Felder überlagert, die für eine stabile radiale Lage des Plasmas benötigt werden.

lich geringerer Temperatur. Da an diesem Vorgang auch β -Zerfälle beteiligt sind, die als Prozesse der schwachen Wechselwirkung mit sehr großen Zeitkonstanten ablaufen, sind sehr lange Einschlußzeiten nötig, so daß diese Möglichkeit technisch nicht realisierbar ist.

1.2 Der magnetische Einschluß nach dem Tokamak-Prinzip

Der magnetische Einschluß heißer Plasmen kann wiederum auf mehrere unterschiedliche Arten erfolgen. Die Magnetfeldlinien können lang und gerade sein. Bei diesem linearen Einschluß müssen durch spezielle Konfigurationen die Verluste an den Endstücken des Magnetkäfigs so gering wie möglich gehalten werden. Um diese Verluste völlig zu eliminieren, kann man das Magnetfeld krümmen, so daß sich die Feldlinien zu einem Torus schließen. Entlang der Feldlinien werden die Verluste durch diese Maßnahme zwar vermieden, aber durch die nun hinzukommende Krümmung der Feldlinien tritt ein neues Problem auf: Die Krümmung führt über eine Teilchendrift zu einer Ladungstrennung und diese bewirkt über die $E \times B$ -Drift einen Teilchenverlust radial nach außen, senkrecht zu den geschlossenen Feldlinien [Chen1984a]. Diese $E \times B$ -Drift kann nun ihrerseits

wieder kompensiert werden, wenn dem toroidalen Magnetfeld B_ϕ ein dazu senkrecht, poloidales Magnetfeld B_θ überlagert wird, so daß sich geschlossene magnetische Flächen ausbilden. Dieses poloidale Feld B_θ verhindert eine makroskopische Ladungstrennung durch die Krümmungsdift, so daß die Entstehung eines elektrischen Feldes und damit auch das Auftreten der $E \times B$ -Drift verhindert wird [Chen1984a]. Das zusätzliche poloidale Magnetfeld kann durch einen Strom erzeugt werden, der im Plasma in toroidaler Richtung fließt [Artsimovich1972a]. Nach den russischen Erfindern dieses Einschlußprinzips heißt diese Konfiguration *TOKAMAK* (Abb. 1). Der im Plasma fließende Strom bewirkt außerdem noch eine Heizung des Plasmas. Der magnetische Einschluß in einem Tokamak ist weltweit der bis jetzt am intensivsten untersuchte Zugang zur kontrollierten Kernfusion.

1.3 Der magnetische Einschluß nach dem Stellarator-Prinzip

Auch wenn das Tokamak-Prinzip weltweit favorisiert wird, so muß doch auf eine zweite Variante des toroidalen magnetischen Einschlusses hingewiesen werden. In den *Stellaratoren* wird das für den Einschluß notwendige poloidale Magnetfeld nicht wie im Tokamak durch einen Strom im Plasma erzeugt, sondern durch eine geeignete Formgebung der Feldspulen von außen vorgegeben (Abb. 2). Die dafür nötigen Felder können entweder durch zusätzliche, helikal um den Torus gewickelte Spulen oder durch nur einen Satz von gekrümmten Hauptfeldspulen erzeugt werden. Letzterer Weg wurde bei der Konstruktion des Fusionsexperimentes Wendelstein 7-AS verfolgt. Der große Vorteil des Stellarators gegenüber dem Tokamak ist, daß er ohne einen Plasmastrom betrieben werden kann. Der Plasmastrom wird meist über die Änderung eines äußeren Feldes induziert. Da aber der Feldhub eines jeden Transformators begrenzt ist, kann ein Tokamak auf diese Art nur gepulst betrieben werden. Der Plasmastrom kann zwar mit beträchtlichem Aufwand auch über von außen eingespeiste Wellen getrieben werden, es bleibt aber immer noch die Gefährdung der ganzen Anlage bestehen, die von einem plötzlichen Stromabriß im Plasma ausgeht. Im Hinblick auf den zukünftigen Reaktorbetrieb ist ein kontinuierlicher Betrieb ohne Plasmastrom, wie ihn der Stellarator prinzipiell erlauben würde, sicher überlegen. Wegen der komplizierten Geometrie der benötigten modularen Spulen ist die Berechnung der Spulenformen und der von ihnen erzeugten Magnetfelder erst mit der Verfügbarkeit ausreichender Computerkapazitäten möglich geworden. Der daraus resultierende Vorsprung in der Tokamakphysik sollte deswegen nicht überbewertet werden.

1.4 Der Divertor-Tokamak ASDEX

Der magnetische Einschluß wurde gewählt, um die Berührung des heißen Plasmas mit der kalten Wand zu verhindern. In der Realität kann jedoch nicht jeglicher Kontakt völlig vermieden werden. Um definierte Bedingungen zu schaffen, wurden *Limiters* in das

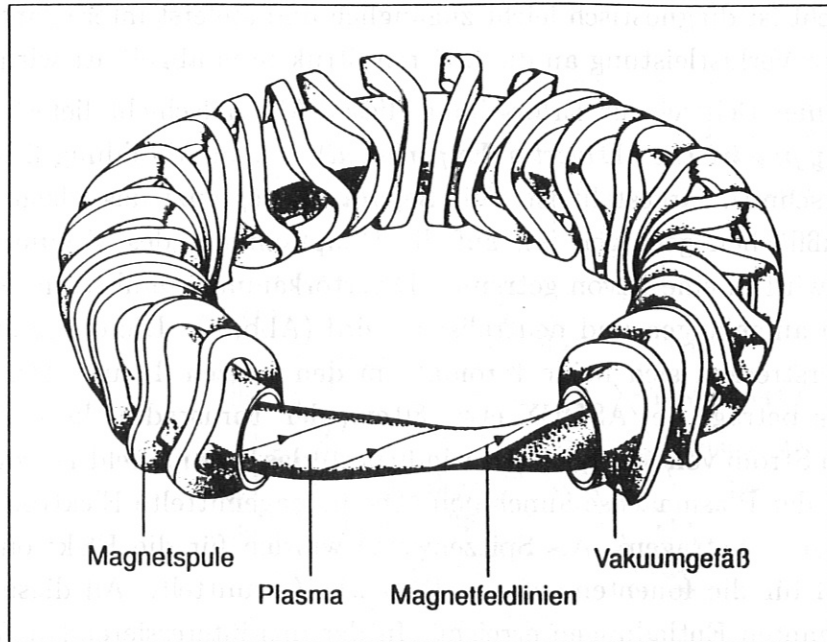


Abbildung 2: DER PRINZIPIELLE AUFBAU EINES STELLARATOR-EXPERIMENTS. *In einem Stellarator werden sowohl das toroidale Magnetfeld B_ϕ als auch das poloidale Feld B_θ von äußeren Spulen erzeugt. Bei einer geeigneten Wahl der Geometrie dieser Feldspulen können, wie in diesem Schema vorgestellt, beide Feldanteile von nur einem Spulensatz erzeugt werden. An dieser Skizze erkennt man noch einen weiteren Unterschied zum Tokamak: Der Plasmaschlauch hat keinen gleichförmigen Querschnitt mehr, sondern weist Gebiete stark unterschiedlicher Krümmung auf, die in sich verdreht sind. Damit ist die toroidale Symmetrie, die das Tokamakplasma charakterisiert, aufgehoben. Dieser Symmetriebruch geht soweit, daß sich sogar die Form des Plasmaquerschnitts beim Umlauf um den Torus ändert.*

Vakuumgefäß, das das Plasma umhüllt, eingebaut. Diese Limiter sind herausragenden Stellen in der das Plasma begrenzenden Wand und definieren so genau die geometrischen Orte des ersten Wandkontakts. Auf diese Art können die geometrischen Bedingungen und die Wandmaterialien genau auf eine möglichst geringe Belastung ausgelegt werden. Die noch verbleibenden Wandkontakte werden durch das *Divertor*-Konzept weiter minimiert. Eine Änderung in der Magnetfeldstruktur erzeugt im äußeren Plasmarand eine Art magnetischer Blase, die das Plasma in einen vom heißen Teil des Hauptplasmas getrennten Raum führt, wo es den ersten Wandkontakt hat. Dieses Konzept bietet zwei Vorteile: Durch den großen räumlichen Abstand können die Verunreinigungen, die beim Auftreffen auf die Prallplatten und die Wand freigesetzt werden, nur schwer in das zentrale Plasma hineingelangen. Zum zweiten wird das Plasma auf dem längeren Weg bis zum ersten Wandkontakt weiter abgekühlt. Die letzte im Hauptraum geschlossene magnetische Fläche heißt *Separatrix*. Alle Teilchen, die außerhalb der Separatrix entlang der Feldlinien um den Torus laufen, gelangen in die Divertorkammer. Die Plasmazone, die zwischen der Separatrix und der Toruswand liegt, ist die sogenannte Abschältschicht.

Diese Randschicht ist diagnostisch leicht zugänglich und äußerst interessant, da durch sie hindurch jegliche Verlustleistung an die äußeren Strukturen abgeführt wird.

Einen wesentlichen Beitrag zur Erforschung dieser Abschältschicht liefert der Tokamak *ASDEX* (*axialsymmetrisches Divertor Experiment*), der in Abbildung 3 in einem schematischen Querschnitt dargestellt ist. Die Separatrix begrenzt das Plasma, das auf geschlossenen Flußflächen gefangen ist, auf die Hauptkammer des Vakuumgefäßes. Die Abschältschicht wird in eine davon getrennte Divertorkammer geführt, in der das Plasma auf Prallplatten aufgefangen und neutralisiert wird (Abb. 4). Die obere und untere Divertorkammer erstrecken sich beide toroidal um den ganzen Torus. Der Durchmesser der Plasmasäule beträgt bei ASDEX etwa 80 cm, der Torusradius beträgt 165 cm. Im Plasma wird ein Strom von 100 bis 500 kA induziert, das Toroidalfeld B_ϕ kann Werte von bis zu 2.8 T auf der Plasmaachse annehmen. Die liniengemittelte Elektronendichte kann bis zu $8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ betragen. Als Spitzenwerte wurden für die Elektronentemperatur $T_e \approx 6 \text{ keV}$ und für die Iontentemperatur $T_i \approx 2 \text{ keV}$ ermittelt. All diese Extremwerte wurden in getrennten Entladungen erreicht. In der uns interessierenden Abschältschicht sind die Parameter wesentlich moderater. Die Temperatur an der Separatrix beträgt etwa 50 eV, die Dichte liegt ungefähr eine Größenordnung unter der liniengemittelten Dichte bei $3 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$. Die Abfallängen für Temperatur und Dichte sind etwa gleich und liegen in der Größenordnung von 1 cm. Eine Plasmaentladung dauert an ASDEX typischerweise 3 sec, innerhalb derer für etwa 2 sec die Plasmaparameter konstant gehalten werden können.

Die Verluste über die Randschicht werden theoretisch in der sogenannten *Neoklassik* berechnet. In Erweiterung der klassischen Rechnung, die nur lokale Prozesse berücksichtigt, werden in der Neoklassik auch Teilchen, die im toroidalgekrümmten Magnetfeld gespiegelt werden, in die Rechnung miteinbezogen. Die erwarteten Verluste durch den neoklassischen Transport liegen jedoch weit unter den gemessenen Werten. Diese Diskrepanz ist in der Fachliteratur unter dem Begriff *anomaler Transport* bekannt.

Die Fluktuationen der Plasmarandschicht können mit mehreren Diagnostiken [Wootton1990a] untersucht werden. Dieser Arbeit liegen die Daten zweier spezieller Randschichtdiagnostiken zu Grunde: der H_α - und der Sondendiagnostik. In den H_α -Messungen wird das Leuchten der Plasmarandschicht im optischen Spektralbereich untersucht, bei den Sondenmessungen versucht man die wesentlichen Punkte der Kennlinie einer Elektrode im Verhältnis zum Plasma aufzunehmen. Aus den Ergebnissen beider Messungen erhält man Daten der Dichtefluktuationen in der Abschältschicht, aus den Sondenmessungen gewinnt man zusätzlich noch Erkenntnisse über das Floating Potential. Aus diesen Messungen läßt sich ein Teilchenfluß experimentell bestimmen, der eventuell den anomalen Transport erklären kann [Wootton1988a, Rudyj1990a, Bessenrodt1990a]. Theoretische Ansätze zur Beschreibung der Verluste gehen meist von Instabilitäten auf einer kleinen Größenskala, den

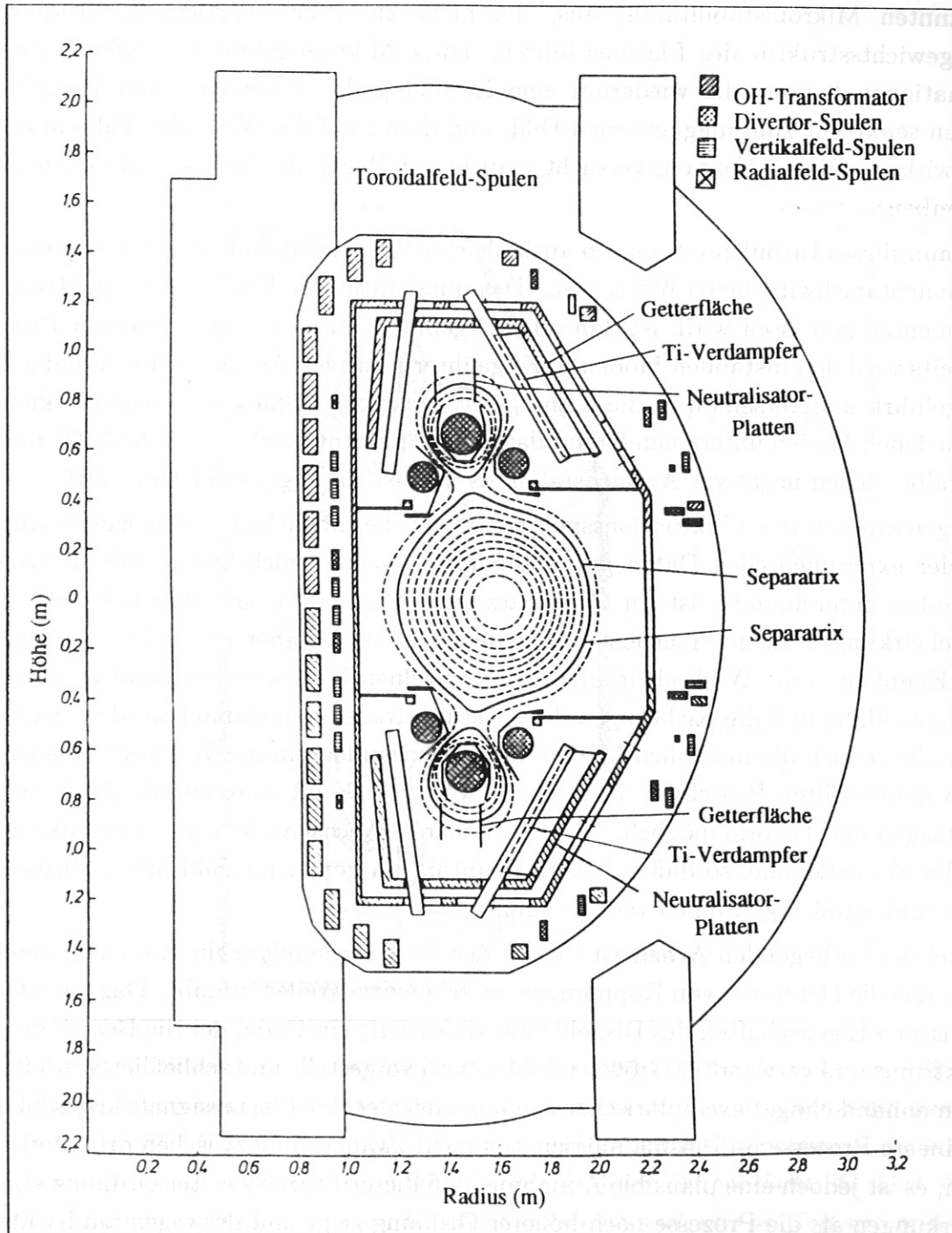


Abbildung 3: SCHEMATISCHER SCHNITT DURCH DEN TOKAMAK ASDEX. Anhand dieses Querschnittes durch das Tokamakexperiment ASDEX läßt sich die Komplexität eines solchen Experimentes erahnen. Die Hauptfeldspulen umgeben die Spulen des OH-Transformators und der Lageregelung, die ihrerseits wiederum das Vakuumgefäß umschließen. Das Plasmagefäß ist in einen Hauptraum sowie in eine obere und eine untere Divertorkammer unterteilt. In der Hauptkammer findet die eigentliche Plasmaentladung statt, während in den Divertorkammern die Spulen zur Erzeugung des Divertorfeldes und die Prallplatten zum Auffangen und zur Neutralisierung des von der Abschältschicht des Plasmas kommenden Teilchenstroms untergebracht sind.

sogenannten Mikroinstabilitäten, aus, die nicht zu einer sofortigen Zerstörung der Gleichgewichtsstruktur des Plasmas führen. Diese Mikroinstabilitäten rufen turbulente Fluktuationen hervor, die wiederum eine Erhöhung des Transports von Energie und Teilchen senkrecht zum magnetischen Feld, und damit auf die Wand des Vakuumgefäßes zu, bewirken. Diesen Vorgang versucht man in der Regel als eine anomale Diffusion zu beschreiben.

Man kann dieses turbulente Szenario auch als eine Superposition schwach wechselwirkender Elementarschwingungen betrachten. Das quasistationäre Fluktuationsspektrum, das experimentell gemessen wird, ist dann das Ergebnis mehrerer konkurrierender Prozesse: Einerseits wird den instabilen Moden in Folge ihrer positiven Anwachsraten ständig Energie zugeführt, andererseits wird diese Energie wegen der nichtlinearen Wechselwirkung der verschiedenen Moden untereinander auf das ganze Spektrum verteilt und schließlich in den Spektralbereichen negativer Anwachsraten als Verlustleistung wieder abgeführt.

Die Eigenschaften des Fluktuationsspektrums und die möglichen Verlustkanäle sind anhand der experimentellen Daten gut untersucht, über die nichtlineare Wechselwirkung der Moden untereinander ist im Gegensatz dazu noch nicht sehr viel bekannt. Diese Wechselwirkungen zu untersuchen und kennenzulernen ist aber eine sehr wichtige Aufgabe. Kennt man die Wechselwirkungen der einzelnen Moden untereinander, so können die Energieflüsse und die Richtungen des Leistungstransfers bestimmt werden. Eventuell können dann auch die instabilen Moden, deren Vorhandensein die Voraussetzung für den ganzen dargestellten Prozeß ist, identifiziert werden. Damit wäre ein Vergleich mit den Voraussagen der Theorie möglich. Die nichtlinearen Wechselwirkungen beeinflussen aber auch die Verlustkanäle, so daß bei ihrer Kenntnis ein genaueres Bild der Verlustmechanismen und -größen gewonnen werden könnte.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, mit der *Bispektralanalyse* ein Werkzeug bereitzustellen, das die Detektion von Kopplungen zwischen drei Wellen erlaubt. Dazu werden die numerischen Eigenschaften des Bispektrums diskutiert; ein Code, der die Berechnung des Bispektrums und verwandter Größen erlaubt, wird vorgestellt und schließlich wird die Diskussion anhand einiger exemplarischer Auswertungen echter Plasmasignale abgeschlossen. Nichtlineare Prozesse im Plasma müssen sich nicht zwangsläufig zwischen drei Moden abspielen, es ist jedoch eine plausible Annahme, daß dieser Prozeß zweiter Ordnung stärkere Auswirkungen als die Prozesse noch höherer Ordnung zeigt und deswegen am leichtesten zu detektieren ist. Zusätzlich wächst der Rechenaufwand mit der Ordnung der untersuchten Wechselwirkung stark an, so daß an diesem Fall erst die Existenz nichtlinearer Kopplungen nachgewiesen werden soll, bevor man sich Gedanken über die Rechenmethoden für Prozesse höherer Ordnung macht. Für den Fall einer Drei-Wellen-Kopplung existieren bereits Ansätze einer theoretischen Beschreibung der Transportvorgänge, so daß auch erste Abschätzungen von Kopplungskonstanten und Transportkoeffizienten sowie von deren Gültigkeitsbereichen getätigt werden können.

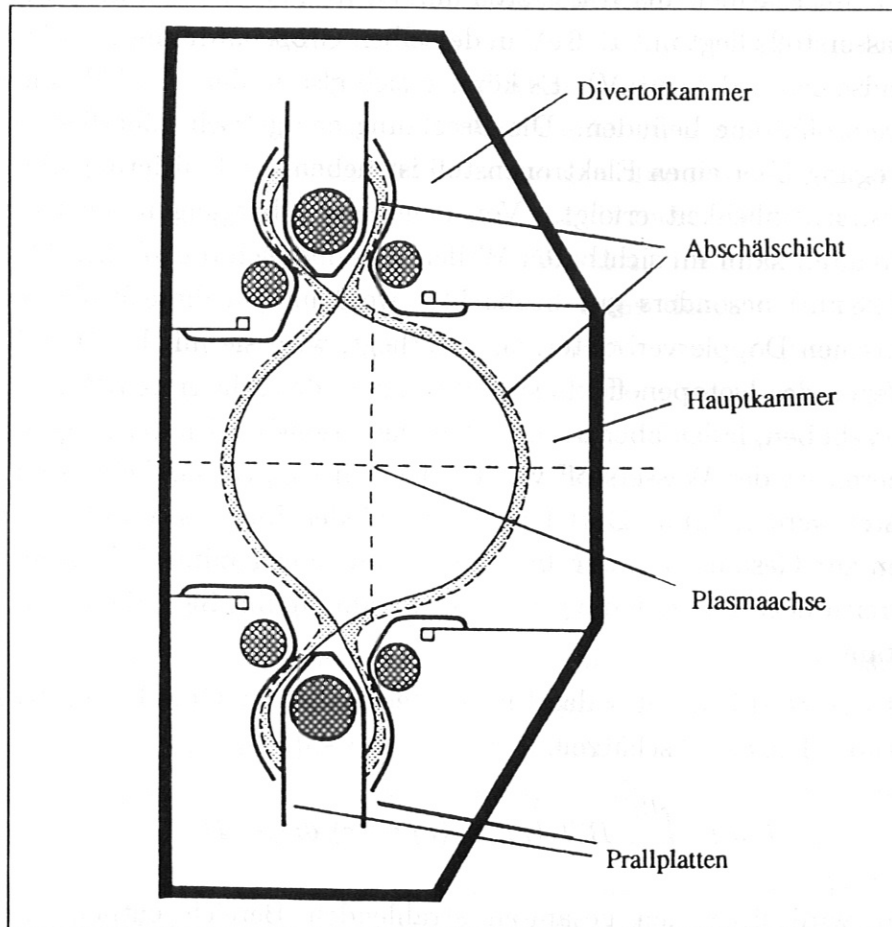


Abbildung 4: SCHEMATISCHE DARSTELLUNG DER RANSCHICHT DES PLASMAS IN ASDEX. Das eigentliche Hauptplasma wird in einem Divertor-Tokamak von der Separatrix, der letzten geschlossenen magnetischen Flußfläche, begrenzt. Alle Teilchen, die sich entlang Feldlinien bewegen, die außerhalb der Separatrix lokalisiert sind, gelangen in den Divertor. In dieser Abschältschicht, die durch die Magnetfeldkonfiguration und nicht durch einen Wandkontakt vorgegeben ist, wird der Transport senkrecht zu den Feldlinien vermutlich von den Fluktuationen der Dichte und des Plasmopotentials bestimmt. Diese Fluktuationen sind Gegenstand der weiteren Ausführungen.

2 Die Diagnostiken zur Fluktuationmessung

2.1 Die H_α -Diagnostik

In der fusionsorientierten Plasmaphysik wird, wie bereits im Abschnitt 1.1 erwähnt, in der Hauptsache mit Plasmen aus Wasserstoff und Deuterium gearbeitet. Die Ionisierungsenergie des Wasserstoffs liegt mit 13.6 eV in derselben Größenordnung wie die Temperatur der Plasmarandschicht ($T_e \approx 50$ eV). Es können sich also in der Abschältschicht durchaus neutrale Wasserstoffatome befinden. Die Besetzung energetisch höherliegender Niveaus durch die Anregung über einen Elektronenstoß ist neben der Ionisierung ein Prozeß, der mit hoher Wahrscheinlichkeit erfolgt. Von den beim Übergang in niedrigere Niveaus emittierten Quanten kann im sichtbaren Wellenlängenbereich die H_α -Strahlung der Balmer Serie (656.28 nm) besonders gut beobachtet werden. Da diese Emissionslinie einer starken thermischen Dopplerverbreiterung unterliegt, wird sie mit breitbandigen Filtern detektiert. Wegen des Isotopeneffekts sind die Linien der schwereren Wasserstoffisotope geringfügig verschoben, fallen aber noch in den Detektionsbereich der Diagnostik. Weiter im Plasmainternen ist der Wasserstoff vollständig ionisiert, so daß keine Linienstrahlung mehr beobachtet werden kann. Dort tragen verschiedene Ionisationsstufen von Verunreinigungsatomen zur Gesamtstrahlung bei, deren Emissionsmaxima jedoch nicht mehr im sichtbaren Bereich liegen, so daß die gemessene Strahlung mit Sicherheit aus der Plasmarandschicht stammt.

Die Intensität des H_α -Lichts, das das Plasma senkrecht zur Oberfläche abstrahlt, kann man mit folgender Formel abschätzen:

$$I = k \int_{R_1}^{R_2} B(T_e(r)) n_0(r) n_e(r) dr + H \quad (8)$$

Die Intensität wird über den gesamten strahlenden Bereich entlang der Sichtlinie integriert. R_1 und R_2 sind die Grenzen der in H_α emittierenden Zone der äußeren Abschältschicht des Plasmas, r ist die radiale Koordinate entlang derer integriert wird. Die Konstante k enthält sämtliche physikalischen Konstanten und Geometriefaktoren. Die wesentliche Plasmagröße, die in diese Gleichung eingeht, ist die Elektronendichte n_e . Sind alle anderen Größen in der Emissionszone in guter Näherung konstant, was noch gezeigt werden muß, so sind die Schwankungen der H_α -Intensität äquivalent zu einer Messung der Fluktuationen in der Elektronendichte. Der Ratenkoeffizient $B(r)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für die Anregung eines neutralen Wasserstoffatoms und die anschließende spontane Emission eines H_α -Quants an. Der Ratenkoeffizient hängt bei kleinen Temperaturen stark von der Elektronentemperatur T_e ab. Bei Temperaturen oberhalb 10 eV stellt sich ein flaches Maximum ein, so daß bei den Randschichttemperaturen von etwa 50 eV die Abhängigkeit von der Temperatur in ein beinahe konstantes Verhalten übergeht. Die Elektronentemperatur T_e steigt

von außen her sehr stark in Richtung Separatrix an, und mit ihr wächst ebenfalls die Elektronendichte n_e , so daß die Gebiete hoher Temperatur eine zusätzliche Gewichtung erfahren. Ebenso wie die Intensität der H_α -Strahlung hängt auch der mit Langmuir-Sonden zu messende Ionensättigungsstrom (Abschnitt 2.2) von der Elektronendichte und -temperatur ab. Obwohl die Temperatur in die Strommessung mit einer anderen Potenz als in die H_α -Messung eingeht, zeigen beide Signale dasselbe charakteristische Verhalten. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, daß die Temperaturabhängigkeit in der Randschicht vernachlässigt werden kann. Der Neutralgasstrom von der Toruswand in das Plasma geht als letzte bestimmende Größe in obige Gleichung ein. Die Neutralgasatome werden durch Rekombination an den Stellen gebildet, an denen die Ausläufer der Plasmarandschicht die Wand berühren. Ist, wie auch bei ASDEX, der Neutralgasfluß von der Wand zu klein, um die H_α -Linie gut detektierbar zu machen, so kann zusätzliches Neutralgas durch ein Gasventil in die Plasmarandschicht geblasen werden. Natürlich werden aber auch Anteile der Strahlung aus dem übrigen Plasma, insbesondere von der inneren Randschicht, deren Wellenlängen im Detektionsbereich liegen, unscharf mit abgebildet. Wegen der Unschärfe tragen sie aber in der Hauptsache zum Gleichanteil der Strahlung, und nicht zu den uns interessierenden Fluktuationen bei. In der additiven Konstanten H werden schließlich alle Hintergrundeffekte, wie der Einfluß von Streulicht und die Emission der inneren Randschicht, zusammengefaßt.

Die Plasmaschicht, in der die nachgewiesene H_α -Strahlung emittiert wird, ist nach experimentellen Messungen etwa 3 cm dick und liegt knapp außerhalb der Separatrix. Nach außen hin ist die Strahlungszone durch den starken Abfall der Elektronendichte und des Ratenkoeffizienten begrenzt, nach innen wird die Grenze durch die abnehmende Neutralgasdichte bestimmt. Im Detail ist die H_α -Messung noch nicht völlig verstanden.

Der Aufbau der H_α -Diagnostik ist relativ einfach, wie man an Abbildung 5 erkennen kann. Der leuchtende äußere Plasmarand wird von einer Linse maßstabsgetreu auf ein Array von 16 Lichtleitern abgebildet. Diese Lichtleiter sind in poloidaler Richtung angeordnet, um die räumliche Strukturen von Ereignissen, die sich hauptsächlich in toroidale Richtung entlang der magnetischen Feldlinien ausbreiten, genauer auflösen zu können. Bei exakter Fokussierung der Optik auf das Emissionsmaximum der Randschicht begrenzt der Durchmesser der Lichtleiter (2 mm) das poloidale Auflösungsvermögen. Auf mehr Details der H_α -Diagnostik wird in [Rudyj1990a] eingegangen.

Um den Einfluß von Streulicht so gering wie möglich zu halten, wird der gesamte Lichtweg gekapselt und die Eintrittsöffnung der Lichtleiter mit einem optischen Filter versehen. Die Signale werden einzeln über Photomultiplier und Endverstärker geleitet und von dem schnellen Datenaufnahmesystem Nic500 [Nicolet] abgetastet. Wegen der großen Speicherkapazität von 2 MB pro Kanal können auch bei einer Abtast-Frequenz von 1 MHz wegen des resultierenden langen Aufnahmezeitfensters von 1 sec Ereignisse untersucht werden,

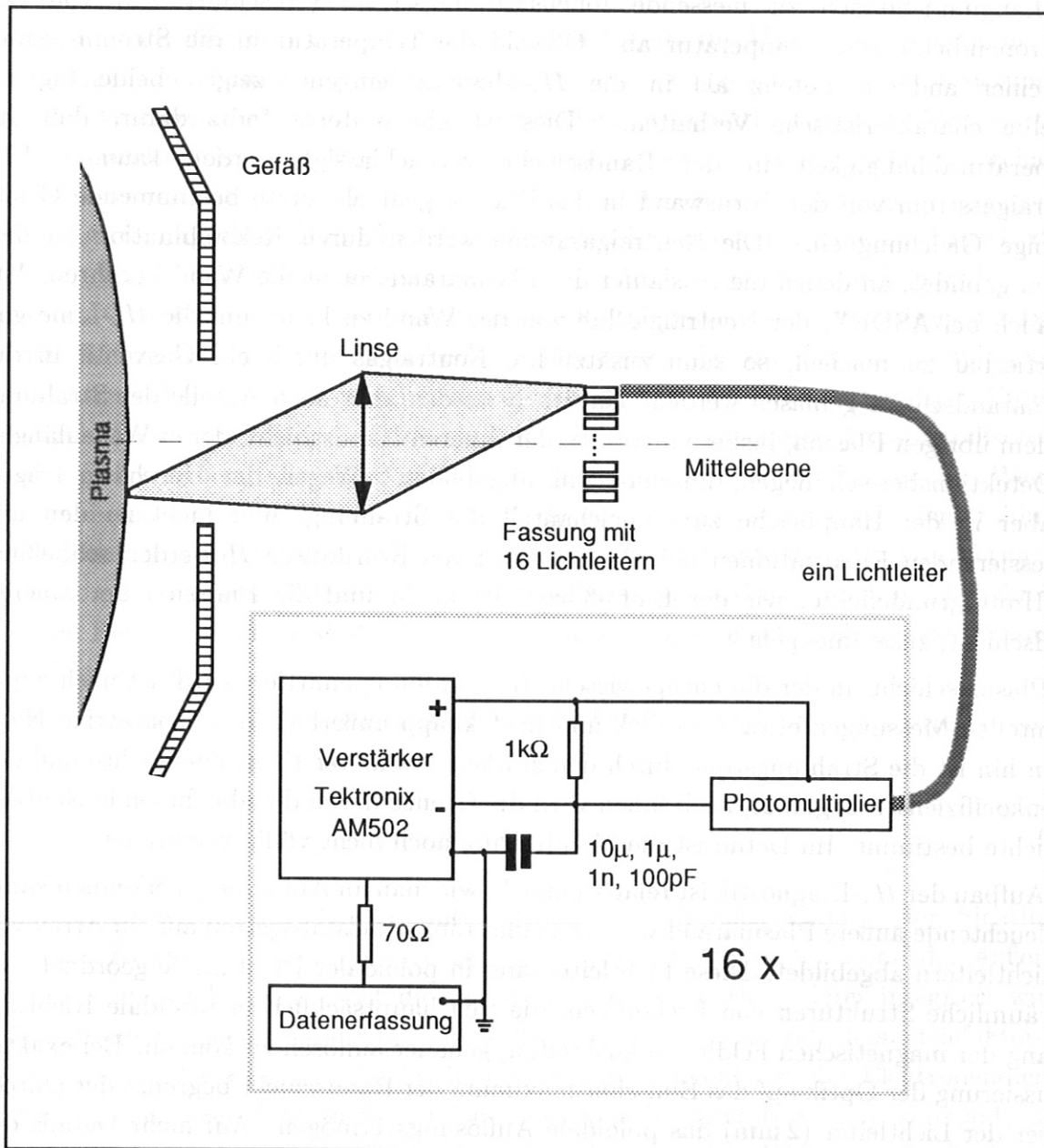


Abbildung 5: SCHEMATISCHE DARSTELLUNG DER H_α -DIAGNOSTIK. Das H_α -Leuchten der Plasmarandschicht wird optisch auf ein Lichtleiterarray aus 16 Elementen abgebildet. Die Signale werden nach Kanälen getrennt an Photomultiplier und Endverstärker weitergegeben und mit 1 MHz in A/D-Wandlern abgetastet.

deren exakter zeitlicher Beginn innerhalb einer Entladung nicht vorausgesagt werden kann. Ein Beispiel für ein solches Phänomen ist die Messung der H-Mode.

2.2 Die Sonden-Diagnostik

Sind die Dichte und die Temperatur in einer Plasmaregion hinreichend gering, um eine Beschädigung der Sonde auf Grund der thermischen Belastung auszuschließen, so können mit Hilfe von Sonden die Dichte n_e , das Floating Potential Φ_{fl} und die Temperatur T_e lokal am Ort der Sondenspitzen gemessen werden. Die Sonden werden oft nach Irving Langmuir, der sie als erster einsetzte [Langmuir1924a, Langmuir1924b, Langmuir1924c, Langmuir1924d, Langmuir1924e], *Langmuirsonden* genannt. Die Sondenspitze, die in das Plasma hineinragt, kann man als eine Elektrode auffassen, die gegenüber einer weiteren großflächigen Gegenelektrode auf einem bestimmten Potential liegt. In der Fusionsforschung werden ganze Segmente des Vakuumgefäßes als Gegenelektrode verwendet, jedoch beschränkt sich die effektive Kontaktfläche mit dem Plasma auf die Flächen auf den Limitern und - falls vorhanden - den Prallplatten des Divertors, auf denen Magnetfeldlinien enden. Ein vollständiges Verständnis der Sondentheorie ist für die Untersuchung der Plasmaffluktionen nicht notwendig. In den Grenzfällen starker Magnetfelder, wie sie in einem Fusionsplasma herrschen, wird die Theorie der Sonden sehr kompliziert und ist bis jetzt noch nicht vollständig gelöst worden [Stangeby1984a, Stangeby1984b, Manos1984a]. An dieser Stelle sollen deswegen nur kurz einige wichtige Abhängigkeiten dargestellt werden.

Wegen der höheren Beweglichkeit der Elektronen im Plasma lädt sich die Sondenspitze gegenüber dem Plasma negativ auf. Dieses Potential wächst solange weiter, bis sich der Elektronen- und der Ionenstrom zur Sonde im Gleichgewicht befinden. Die Potentialdifferenz, die dann zwischen der Sonde und dem als Gegenelektrode geschalteten Vakuumgefäß in einiger Entfernung von der Sonde gemessen werden kann, ist das sogenannte *Floating Potential*. Die Abhängigkeit des Floating Potentials von den Kenngrößen des Plasmas ist wie folgt:

$$\Phi_{fl} = \frac{k_B T_e}{2e} \ln \left(2\pi \frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \right) \quad (9)$$

Der Zusammenhang mit dem Plasmapotential wird in grober Näherung durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\Phi_{fl} \simeq \Phi_{Plasma} - 3 \frac{k_B T_e}{e} \quad (10)$$

Der Vorfaktor 3 ist Gegenstand laufender Untersuchungen und muß eventuell noch korrigiert werden.

Legt man die Sonde gegenüber dem Plasma auf ein ausreichend hohes negatives Potential, so können keine Elektronen mehr zur Spitze gelangen und der gesamte Strom wird von

den Ionen getragen. Da dieser Strom auf eine weitere Steigerung des Potentials sehr unempfindlich reagiert, nennt man ihn den *Ionensättigungsstrom*. Die Stromdichte in Richtung zur Sondenoberfläche ist durch das Bohmkriterium gegeben:

$$j = e n_{SP} c_S \quad (11)$$

In dieser Gleichung ist c_S die Ionenschallgeschwindigkeit und n_{SP} die Dichte in der Grenzschicht zwischen Sonde und Plasma. Für diese beiden Größen gelten folgende Abhängigkeiten:

$$c_S = \sqrt{\frac{k_B(T_e + T_i)}{m_i}} \quad (12)$$

$$n_{SP} \approx \frac{1}{2} n_\infty \quad (13)$$

mit n_∞ = Dichte im Plasma ohne Einfluß der Sonde

Mit der zusätzlichen Annahme, daß in der Randschicht die Elektronentemperatur T_e in etwa gleich der Ionentemperatur T_i ist, ergibt sich folgende Abhängigkeit der Dichte des Ionensättigungsstroms:

$$j = \frac{1}{\sqrt{2}} e n(x, t) \sqrt{\frac{k_B T_e(x, t)}{m_i}} \quad (14)$$

Wenn man die Abhängigkeiten der Temperatur von Ort und Zeit vernachlässigen kann, dann ist der Ionensättigungsstrom nur noch eine Funktion der Dichte, so daß man hier eine zweite unabhängige Methode hat, um die Dichtefluktuationen zu bestimmen. Aus dem Vergleich mit den Ergebnissen der H_α -Messungen folgt, daß zumindest für den Ionensättigungsstrom die Annahme einer konstanten Temperatur gerechtfertigt ist. Um den Gesamtstrom zu berechnen, der durch die Sonde fließt, muß man die Oberfläche senkrecht zu den Magnetfeldlinien, und nicht die geometrische Oberfläche der Sonde, zur Berechnung heranziehen.

Für eine poloidal aufgelöste Messung des Floating Potentials und des Ionensättigungsstroms, verwenden wir ein Array von 16 Langmuirsonden, die auf einem Manipulator montiert sind. Die Bewegungen des Manipulators können für jede Entladung vorprogrammiert werden, womit radial aufgelöste Messungen ermöglicht werden. Jede Sonde kann sowohl für die Messung des Ionensättigungsstroms, als auch für die Messung des Floating Potentials beschaltet werden. Die Schaltungen sind in Abbildung 6 dargestellt. Die Sondenspitzen sind aus Graphit und haben einen Durchmesser von 0.9 mm. Der Abstand zwischen zwei Spitzen beträgt 2 mm. Weitere Hinweise zum Betrieb der Sonden-diagnostik können [Rudyj1990a] entnommen werden.

2.3 Die Rohsignale der Fluktuationmessungen

Betrachtet man das Rohsignal eines einzigen Aufnahmekanals der H_α - oder der Sonden-diagnostik, so erkennt man in dem zeitlichen Verlauf des Signals keinerlei Regelmäßigkeiten.

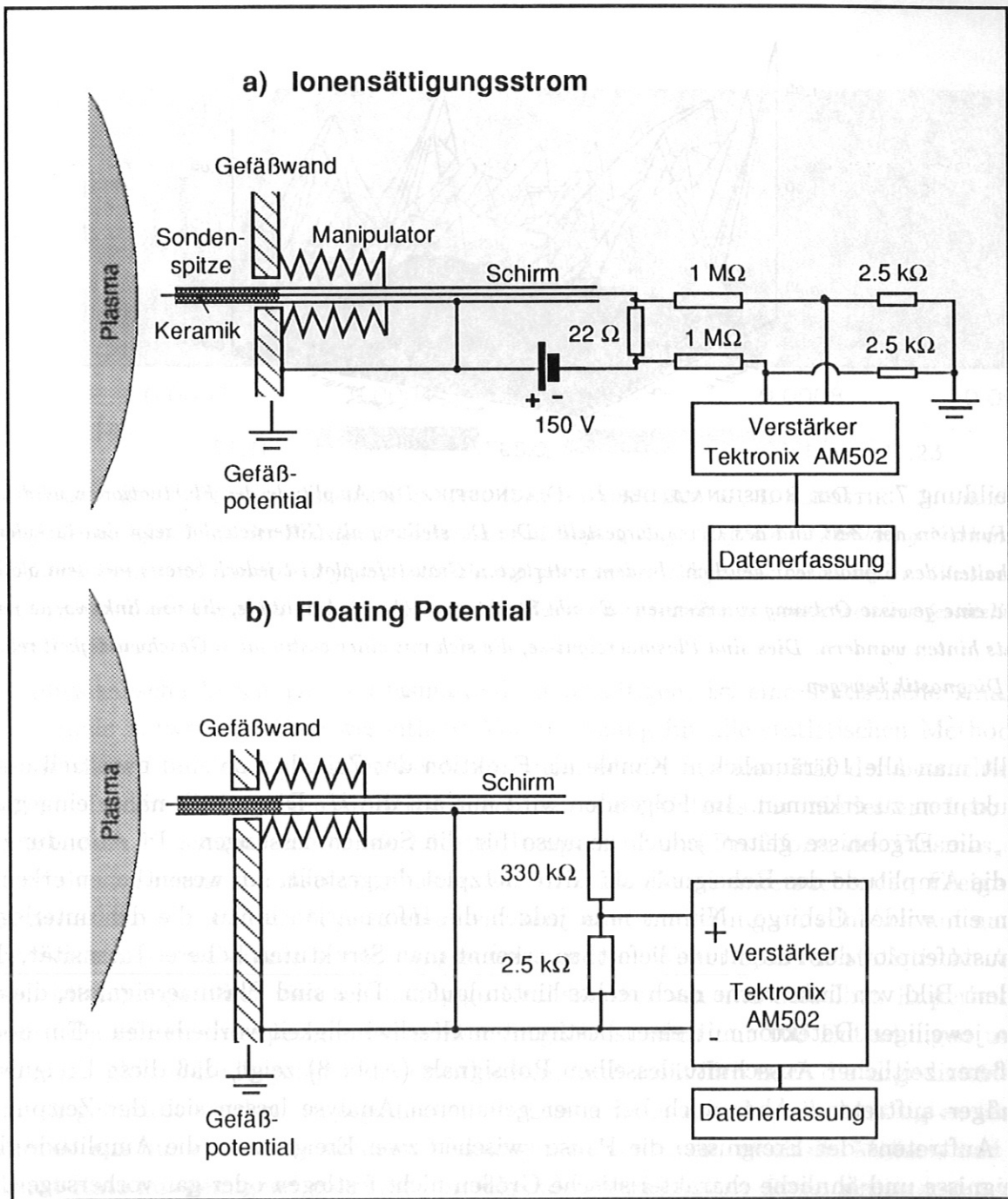


Abbildung 6: SCHEMATISCHE DARSTELLUNG DER SONDENDIAGNOSTIK. Ein Array von 16 äquidistanten Langmuirsonden sitzt auf einem schnell beweglichen Manipulator. Dargestellt ist hier nur jeweils eine Sonde, da die Beschaltung für alle Sonden identisch ist. Für die Messung des Ionensättigungsstroms (Abbildung a) wird die Sonde negativ gegenüber dem Gefäß aufgeladen, für die Messung des Floating Potentials (Abbildung b) sind beide über einen hohen Widerstand verbunden.

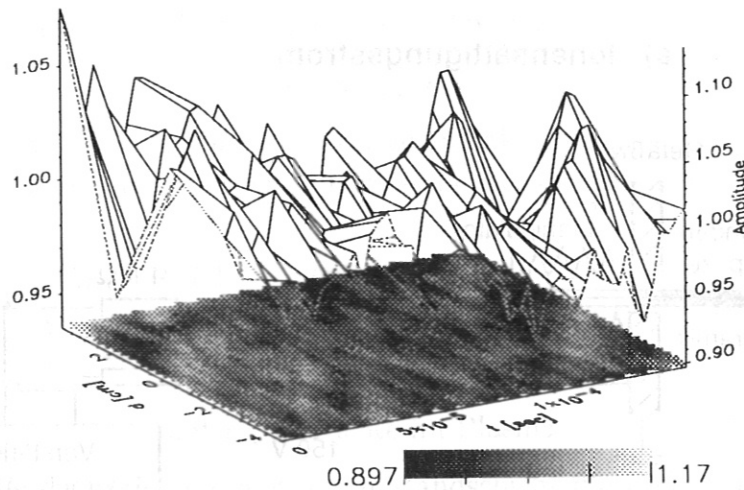


Abbildung 7: DIE ROHSIGNALE DER H_{α} -DIAGNOSTIK. Die Amplitude der Fluktuationen wird hier als Funktion der Zeit und des Ortes dargestellt. Die Darstellung als Gitternetzplot zeigt das turbulente Verhalten des Signals sehr deutlich. In dem unterlegten Graustufenplot ist jedoch bereits mit dem bloßen Auge eine gewisse Ordnung zu erkennen: Es gibt Strukturen höherer Amplitude, die von links vorne nach rechts hinten wandern. Dies sind Plasmaereignisse, die sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit relativ zur Diagnostik bewegen.

Stellt man alle 16 räumlichen Kanäle als Funktion der Zeit dar, so sind eventuell erste Strukturen zu erkennen. Im Folgenden wird nur auf die H_{α} -Diagnostik näher eingegangen, die Ergebnisse gelten jedoch genauso für die Sondenmessungen. In Abbildung 7 ist die Amplitude des Rohsignals als Gitternetzplot dargestellt. Im wesentlichen erkennt man ein wildes Gebirge. Nimmt man jedoch die Information hinzu, die der unterlegte Graustufenplot der Amplitude liefert, so erkennt man Strukturen höherer Intensität, die in dem Bild von links vorne nach rechts hinten laufen. Dies sind Plasmaereignisse, die an dem jeweiligen Detektor mit einer bestimmten Geschwindigkeit vorbeilaufen. Ein noch größerer zeitlicher Ausschnitt desselben Rohsignals (Abb. 8) zeigt, daß diese Ereignisse häufiger auftreten. Aber auch bei einer genaueren Analyse lassen sich der Zeitpunkt des Auftretens der Ereignisse, die Pause zwischen zwei Ereignissen, die Amplitude der Ereignisse und ähnliche charakteristische Größen nicht festlegen oder gar vorhersagen.

Einen Ansatz zur Lösung dieser Fragestellung liefert die Betrachtung des Plasmas als schwach turbulentes Medium. Eine Fourierzerlegung der Meßergebnisse dieses turbulenten Systems läßt folgende Argumentation zu: Im Plasma entstehen und vergehen ständig Elementarschwingungen beliebiger Frequenzen. Überlagern sich diese Wellen mit einer günstigen Phasenlage, so kann ein lokales Maximum der Amplitude entstehen, das aber sehr schnell wieder zerfällt. Durch die überlagerte Plasmageschwindigkeit werden diese Ereignisse an dem ortsfesten Detektor vorbeibewegt. Um dieses phänomenologische Bild

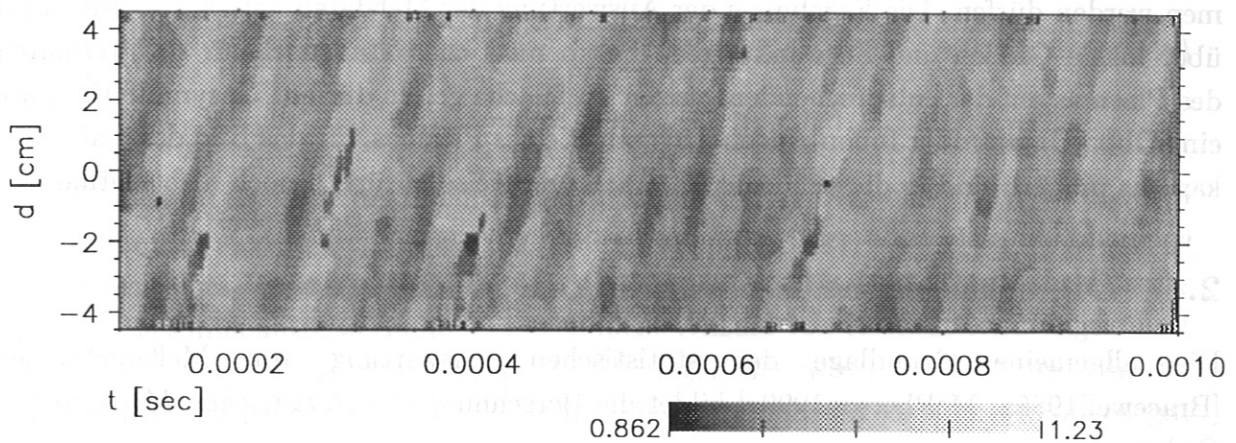


Abbildung 8: PLASMAEREIGNISSE IN DEN ROHSIGNALEN DER H_α -DIAGNOSTIK. *In einem etwas größeren Ausschnitt der Rohsignale sieht man mit bloßem Auge, daß die in Abbildung 7 erkannten Ereignisse immer mit annähernd gleicher Geschwindigkeit an der Diagnostik vorbeiziehen. Weitere allgemeingültige Charakteristika oder Gemeinsamkeiten lassen sich jedoch nicht ohne weiteres feststellen.*

der physikalische Vorgänge im Plasmarand zu bestätigen, ist eine statistische Analyse der Signale notwendig. Eine wesentliche Voraussetzung für alle statistischen Methoden, die auf diese Signale angewendet werden können, ist die Stationarität der betrachteten Signale. In den Entladungen an ASDEX konnten ohne weiteres für mindestens 1 sec alle wesentlichen Plasmaparameter wie Dichte, Temperatur und Profilform des Plasmas, um nur einige zu nennen, konstant gehalten werden. Da die zu untersuchenden Ereignisse auf Zeitskalen von einigen $10 \mu\text{sec}$ ablaufen, kann eine Entladung im Hinblick auf unsere Untersuchungen als quasistationär angesehen werden. Weiter sind für statistische Analysen Mittelungen über viele unabhängige Realisationen ein und desselben Experiments nötig. Da es jedoch experimentell schwer möglich ist auch nur 100 Entladungen unter den exakt gleichen Bedingungen zu verwirklichen, muß zusätzlich noch die Ergodizität der Signale gefordert werden. In ergodischen Prozessen ist es erlaubt, alle benötigten Realisationen aus nur einer oder wenigen Messungen zu gewinnen, wenn die Meßzeit und die Abtast-Rate nur genügend groß sind. Im folgenden wird implizit davon ausgegangen, daß die Stationarität und Ergodizität der Signale in den H_α - und Sondenmessungen während der ausgewählten Zeitfenster immer gegeben ist.

Der ideale Tokamak ist in toroidaler Richtung völlig symmetrisch. Diese Translationsinvarianz wird durch die technische Realisierung und die damit verbundenen unsymmetrischen magnetischen Felder und Einbauten in das Vakuumgefäß gestört. Sie bleibt aber für viele Anwendungen noch in ausreichendem Maß gewahrt. In poloidaler Richtung ist die Ausdehnung der von den verwendeten Diagnostiken erfaßten Bereiche mit 3.2 cm (Sonden)

bzw. 9.6 cm (H_α) sehr klein gegenüber dem Umfang der Plasmasäule von etwa 250 cm ($r_{ASDEX} \approx 40$ cm). In radialer Richtung ändern sich in der Abschältschicht sämtliche Plasmaparameter sehr stark, so daß hier keine Symmetrien oder Invarianzen angenommen werden dürfen. Die Ergebnisse der Auswertung der Meßdaten liefern also Aussagen über lokale Größen und Schwankungen, die aber als charakteristisch für das Verhalten des Plasmas auf der entsprechenden ganzen Flußfläche gelten dürfen. Unsymmetrien, wie eine Oben-Unten- oder Innen-Außen-Asymmetrie des Plasmas, die das Bild des realen Tokamaks prägen, sind in dieser idealen Betrachtungsweise natürlich noch nicht enthalten.

2.4 Die statistische Auswertung der Rohsignale

Die allgemeine Grundlage der statistischen Auswertung von Meßergebnissen [Bracewell1986a, McPherson1990a] bildet die Berechnung der *statistischen Momente* der Ordnung r

$$E(X^r) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} X^r p(X) dX \quad , \quad r = 1, 2, \dots \quad (15)$$

und der *zentralen statistischen Momente* der Ordnung r

$$E((X - \mu(X))^r) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu(X))^r p(X) dX \quad , \quad r = 1, 2, \dots \quad (16)$$

In den obigen Gleichungen bedeutet $E(\dots)$ den Erwartungswert der in Klammern angegebenen Größe und $p(X)$ die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Zufallsgröße X . Das erste statistische Moment $E(X)$ nennt man auch den *Mittelwert* oder *Erwartungswert* von X und bezeichnet es mit $\mu(X)$. Das zweite zentrale statistische Moment $E((X - \mu(X))^2)$ heißt die *Varianz* σ^2 von X . Ihre positive Wurzel $\sigma(X)$ bezeichnet die *Standardabweichung*. Liegen mehrere statistische Variable einer Analyse zu Grunde, so kann man auch die statistischen Momente ihrer Kreuzprodukte berechnen, die im weiteren *gemischte statistische Momente* genannt werden. Ein Beispiel hierfür ist

$$E(X^s Y^t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X^s Y^t p(X) p(Y) dX dY \quad , \quad s, t = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Diese Definition stellt ein gemischtes statistisches Moment der Ordnung $r = s + t$ zweier statistischer Prozesse X und Y dar. Die gemischten Momente werden nicht mehr eindeutig durch die Angabe ihrer Ordnung r beschrieben, es müssen immer beide Parameter s und t angegeben werden. Eine ähnliche Definition erlaubt die Verallgemeinerung der zentralen statistischen Momente auf mehrere Zufallsvariablen. Im Folgenden wird uns besonders das dritte gemischte statistische Moment dreier Zufallsvariablen interessieren. Es ist gegeben durch

$$E(X Y Z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X Y Z p(X) p(Y) p(Z) dX dY dZ \quad (18)$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz sind der Erwartungswert und der Ensemblemittelwert aller statistischen Momente im Grenzfall unendlicher Mittelungen identisch. Für das gemischte statistischen Momente der Gleichung (18) gilt :

$$E(X Y Z) = \langle X Y Z \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_i Y_i Z_i \quad (19)$$

Ensemble $\{ X_i, Y_i, Z_i, i = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \}$

Der Ensemblemittelwert wird durch eckige Klammern $\langle \dots \rangle$ bezeichnet. Er wird durch die Mittelung über viele Repräsentanten eines Ensembles oder über viele unabhängige Realisationen eines Experimentes gebildet. So können alle Momente durch die Berechnung eines Ensemblemittelwerts über eine endliche Anzahl von Realisationen angenähert werden, wobei der relative Fehler durch $1/\sqrt{N}$ angegeben wird, wenn N die Zahl der verwendeten Realisationen ist. Für die praktische Durchführung der Berechnungen gilt für obiges Beispiel

$$E(X Y Z) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_i Y_i Z_i \quad (20)$$

Die Analyse der ersten beiden statistischen und zentralen statistischen Momente sowie der ersten Momente von Kreuzprodukten zweier Variabler liefert bereits eine Vielzahl von Erkenntnissen. Man kann aus den Abfallängen der Korrelationsfunktionen die Korrelationszeiten und -längen der Ereignisse bestimmen, aus dem Verhalten der Kreuzkorrelationsfunktionen bei verschiedenem Abstand zwischen den Kanälen, die der Auswertung zu Grunde liegen, die bevorzugte Ausbreitungsrichtung und -geschwindigkeit der betrachteten Ereignisse berechnen und in den kf-Spektren sogar eine Art Dispersionsrelation messen [Endler1990a, Rudyj1987a, Rudyj1990a, Theimer1990a, Smith1974a, Wootton1990a]. Mit diesen Methoden und Ergebnissen lassen sich jedoch keine Aussagen über die Wechselwirkungen der einzelnen Fourier-Komponenten oder Wellenzüge untereinander treffen. Diese Einschränkung ist äußerst unbefriedigend, da der Ausgangspunkt der Diskussion die Feststellung war, daß die gemessenen Daten eine turbulente Randschicht darstellen und eine Turbulenz immer die Wechselwirkung zwischen sehr vielen, wenn nicht sogar allen Fourier-Komponenten eines Systems voraussetzt. Aussagen über eventuelle nichtlineare Wechselwirkungen ermöglichen die gemischten Momente höherer Ordnung, da sie Mittelungen über mehrere verschiedene Komponenten enthalten und so Aufschluß über deren Kohärenz untereinander geben können.

3 Das Bispektrum

3.1 Definition des Bispektrums

Betrachtet man ein Signal als eine Superposition vieler Elementarwellen oder Moden, so wechselt man zu einer Analyse vorteilhaft mittels der Fouriertransformation von einer Darstellung im Zeitraum zu einer Darstellung im Frequenzraum über.

$$n(t) \rightarrow \text{Fouriertransformation} \rightarrow X(f) \quad (21)$$

Da die Meßreihe, die das Ausgangssignal bildet, reell ist, sind die komplexen Fourierkoeffizienten hermitesch, d.h. es gilt:

$$X(f) = X^*(-f) \quad (22)$$

Die gemischten statistischen Momente höherer Ordnung können über nichtlineare Wechselwirkungen in der Plasmarandschicht Aufschluß geben. Deswegen stellt eine Berechnung dieser Spektren einen empfehlenswerten Weg dar, um den turbulenten Charakter der Abschältschicht des Plasmas näher zu untersuchen. Wir wenden unsere Aufmerksamkeit insbesondere dem einfachsten gemischten statistischen Moment dreier Variabler, dem *Bispektrum*, zu (vergl. Glg. 18).

Eine genaue mathematische Behandlung der Spektren höherer Ordnung und insbesondere des Bispektrums kann man in [Rosenblatt1967a], [Brillinger1967a] und [Subba1983a] finden. Da wir unsere Analyse von vornherein auf das Bispektrum beschränken, ist jedoch ein direkterer Zugang möglich. Wir interessieren uns für die gegenseitige Abhängigkeit dreier Elementarschwingungen im Plasma. Diese Wellenzüge identifizieren wir mit den jeweiligen Fourierkomponenten der Meßreihen. Wir betrachten die drei Wellen als drei Prozesse und berechnen das niedrigste gemischte statistische Moment dreier Variabler, das Bispektrum, als einen Ensemblemittelwert nach Gleichung (19). Wie man leicht zeigen kann, ist der Mittelwert des Produkts dreier beliebiger Fourierkomponenten in der Regel gleich Null. Nur wenn die Phasenlage der drei betrachteten Wellen zueinander durch eine zusätzliche Bedingung festgelegt ist, wird der Mittelwert von Null verschieden sein. Auf diesen Punkt werden wir in späteren Abschnitten (z.B. 3.3) noch genauer zu sprechen kommen. Diese Nebenbedingung entspricht der Forderung, daß sich die beteiligten Frequenzen als Summentriplett darstellen lassen. Dadurch wird gleichzeitig die Zahl der freien Parameter des Bispektrums auf zwei reduziert. Je nach der Wahl der Summenbedingung ergeben sich zwei leicht unterschiedliche Definitionen des Bispektrums.

Definition1 :

$$B(f_1, f_2) \equiv \langle X(f_1)X(f_2)X(f_3) \rangle \quad , \text{ mit } f_1 + f_2 + f_3 = 0 \quad (23)$$

Definition2 :

$$B(f_1, f_2) \equiv \langle X(f_1)X(f_2)X^*(f_3) \rangle \quad , \text{ mit } f_1 + f_2 = f_3 \quad (24)$$

Das Ergebnis ist wegen der Hermitizität (Glg. 22) in beiden Fällen identisch. Im Folgenden wird jedoch immer das Bispektrum in der zweiten Definitionsvarianten benutzt werden, da sie dem Verständnis einer Wellenkopplung eher entspricht.

Aus der Definition des Bispektrums ist auch der physikalische Inhalt der so berechneten Größe sofort verständlich: Koppeln in jeder unabhängigen Realisation dieselben zwei Wellen zu einer dritten Summenwelle, so ist deren relative Phasenbeziehung von Realisation zu Realisation konstant, unabhängig von einer eventuell unterschiedlichen Anfangsphase. Das Bispektrum reagiert genau auf diese Phasendifferenz sensitiv: Sind die drei betrachteten Wellen voneinander unabhängig, so wird auch die relative Phase zufälligen Schwankungen unterliegen und der Ensemblemittelwert des Bispektrums wird unabhängig vom Verhalten der Amplituden der Fourierkoeffizienten gegen Null gehen. Im Gegensatz dazu wird der Mittelwert über viele Realisationen gleicher relativer Phasenlage einen nichtverschwindenden Wert ergeben. Der Betrag des Bispektrums wird in diesem Fall noch von dem Verhalten der Amplituden der koppelnden Wellen mitbestimmt. Das Bispektrum detektiert also eine eventuell vorhandene Phasenkopplung zwischen drei Frequenzanteilen eines vorgegebenen Zeitsignals. Liegt eine Phasenkohärenz vor, so muß der Experimentator entscheiden, ob diese eine Eigenschaft des physikalischen Systems ist, oder ob sie diesem, z.B. durch die Diagnostik, von außen aufgeprägt wurde.

Für ein rein gaußsches Signal gilt, daß die Form der Verteilungsfunktion lediglich durch zwei Parameter bestimmt wird. Der erste Parameter ist der Mittelwert μ , der zweite die Standardabweichung σ . Setzt man den Mittelwert $\mu = \langle n(t) \rangle$, das erste statistische Moment, gleich Null, so ist die Standardabweichung σ gleich dem zweiten statistischen Moment $\sigma^2 = \langle n^2(t) \rangle$. Es läßt sich sehr leicht zeigen, daß für das dritte zentrale Moment folgende Identität gilt:

$$\sum_{k,l} B(f_k, f_l) = \langle n^3(t) \rangle \quad (25)$$

Alle zentralen Momente ungerader Ordnung einer Gaußverteilung sind identisch Null, so daß das Bispektrum eines Signals mit dem Mittelwert Null auch ein Maß für die Abweichung von einer gaußschen Signalform bietet.

3.2 Ein einfaches Kopplungsmodell

Um die Aussagekraft des Bispektrums zu studieren, wenden wir uns nun einem sehr einfachen Modell einer Drei-Wellen-Kopplung [Kim1979a] zu:

$$X_m = A_{kl} X_k X_l \quad (26)$$

Die zwei Wellen bei f_k und f_l koppeln zu einer dritten Wellen bei der Summenfrequenz $f_m = f_k + f_l$. Die Stärke der Kopplung wird durch den Kopplungskoeffizienten A_{kl} bestimmt. Multipliziert man beide Seiten in obiger Gleichung mit dem Faktor $X_k^* X_l^*$ und

bildet anschließend den Ensemblemittelwert über die erhaltenen Größen, so ergibt sich

$$\langle X_m X_k^* X_l^* \rangle = A_{kl} \langle X_k X_k^* X_l X_l^* \rangle$$

Mit der Definition des Bispektrums ergibt sich folgende einfache Bestimmungsgleichung für den Kopplungskoeffizienten:

$$A_{kl} = \frac{B^*(f_k, f_l)}{\langle |X_k|^2 |X_l|^2 \rangle} \quad (27)$$

Der Kopplungskoeffizient ist durch das komplex konjugierte Bispektrum und den Mittelwert der Quadrate der Fourierkoeffizienten bei f_k und f_l gegeben. Nicht festgelegt ist jedoch die Richtung der Kopplung. Die Ausgangsgleichung (26) kann sowohl als eine Kopplung der zwei Wellen bei f_k und f_l zu einer Summenwelle als auch als Zerfall der Welle bei f_m in zwei Differenzwellen interpretiert werden. Über die Richtung der Kopplung trifft bei diesem einfachen Modell weder das Bispektrum noch das Leistungsspektrum eine Aussage. Damit bleibt natürlich ebenso die wichtige Frage nach der Richtung des Energieflusses ungeklärt.

Für ein etwas realistischeres Modell kann die ursprüngliche Gleichung (26) noch um einen kopplungsunabhängigen Term \tilde{X}_m erweitert werden.

$$X_m = \tilde{X}_m + A_{kl} X_k X_l \quad (28)$$

In diesem Fall beschreibt das Bispektrum wieder wie in Glg. (27) den Kopplungskoeffizienten, und mit der Definition

$$b^2(f_k, f_l) \equiv \frac{|B(f_k, f_l)|^2}{\langle |X_k X_l|^2 \rangle \langle |X_m|^2 \rangle} \quad (29)$$

läßt sich der Anteil der Leistung bei der Frequenzkomponente f_m , der auf die Kopplung der beiden anderen Wellen zurückzuführen ist, wie folgt bestimmen:

$$b^2(f_k, f_l) P(f_m) = |A_{kl}|^2 \langle |X(f_k) X(f_l)|^2 \rangle \quad (30)$$

Die so definierte Größe $b(f_k, f_l)$ heißt Bikohärenz und wird im weiteren noch eine wesentliche Rolle spielen. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß, wie aus Glg. (30) ersichtlich ist, die Bikohärenz ein Maß für die Güte des Kopplungsmodells (26) bzw. (28) ist. Ist $b = 1$, so kommt die ganze Leistung bei der Frequenzkomponente f_m aus dem Kopplungsprozeß und das einfache Modell (26) wird demzufolge eine gute Beschreibung des physikalischen Vorganges liefern. Andererseits deutet eine Bikohärenz von $b < 1$ auf eine Abweichung der zugrundeliegenden physikalischen Prozesse von diesem Modell hin. Da die Leistung aus der Kopplung immer zwischen Null und der vorhandenen Gesamtleistung liegen muß, folgt für die Bikohärenz

$$0 \leq b(f_k, f_l) \leq 1$$

In diesem Sinne kann die Bikohärenz als ein Parameter gedeutet werden, der das Maß der Übereinstimmung des Ausgangsmodells (26) mit der physikalischen Realität beschreibt.

3.3 Das Bispektrum eines einfachen Rauschsignals

Bis jetzt war nur die Rede vom Bispektrum eines wohldefinierten Nutzsignals. Jedoch wird sicherlich auch ein einfaches Rauschsignal im Rahmen unserer nur endlichen Mittelungen einen Beitrag zum Bispektrum liefern. Dieser Beitrag soll nun abgeschätzt werden.

Wir betrachten für diese Untersuchung ein Ensemble von Testsignalen, deren Fouriertransformierte alle durch folgende Amplitudenverteilung charakterisiert sind:

$$X(f_k) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_k (a_k + ib_k) \quad (31)$$

Ein allen Realisationen gemeinsamer konstanter und reeller Skalierungsfaktor A_k ist aus der Klammer herausgezogen. Realteil und Imaginärteil der verbleibenden Amplitude sollen unabhängige gaußsche Zufallsgrößen sein und ebenso wie die Amplitude zu verschiedenen Frequenzen f_k und f_l als voneinander unabhängig betrachtet werden. Im Grenzfall unendlicher Mittelungen gilt unter diesen Annahmen:

$$\begin{aligned} \langle a_k \rangle &= 0 \\ \langle b_k \rangle &= 0 \\ \langle a_k a_l \rangle &= \delta_{kl} \\ \langle b_k b_l \rangle &= \delta_{kl} \\ \langle a_k b_l \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Da wir prinzipiell auf eine endliche Anzahl von Mittelungen beschränkt sind, wird der Ensemblemittelwert durch eine Summe angenähert:

$$\langle (\dots) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M (\dots) \quad (32)$$

Wegen dieser Näherung ist zu erwarten, daß alle eigentlich verschwindenden komplexen Größen mit $1/\sqrt{M}$ gegen Null konvergieren. Setzt man obige Fourieramplituden (Glg. 31) in die Definition des Bispektrums (Glg. 24) ein, so erhält man

$$B(f_k, f_l)_{rms} = \sqrt{\langle |B(f_k, f_l)|^2 \rangle} = \frac{A_k A_l A_m}{\sqrt{M}} \quad (33)$$

Wie erwartet geht dieses Ergebnis im Limes $M \rightarrow \infty$ gegen Null, da in einem reinen Rauschsignal sicher keine quadratischen Kopplungsterme vorkommen. Leider ist dieses Resultat aber leistungsabhängig, d.h. man kann mit Leichtigkeit ein Beispiel konstruieren, in dem eine echte, aber leistungsschwache Kopplung von einem leistungsstarken Rauschsignal überdeckt wird. Erst eine Mittelung über sehr viele Realisationen wird in diesem Fall das eigentliche Nutzsinal detektieren.

3.4 Das Bispektrum eines einfachen Nutzsignals

Um das Bispektrum eines Nutzsignals analytisch zu berechnen, nehmen wir ein Ensemble identischer, sehr einfacher Testsignale an. Die Fourierkomponente bei zwei willkürlich für diese Untersuchung ausgewählten Frequenzen seien in ihrer Amplitude und Phase vorgegeben:

$$X(f_k) = A_k e^{i\varphi_k} \quad (34)$$

$$X(f_l) = A_l e^{i\varphi_l} \quad (35)$$

Die reellen Amplituden A_k und A_l können beliebige, aber von Realisation zu Realisation gleichbleibende Werte annehmen. Die Phasen φ_k und φ_l beider Wellen werden in jeder Realisation durch einen Zufallsprozeß bestimmt. Die Frequenz der dritten zur Berechnung des Bispektrums herangezogenen Welle ist durch die Summenbedingung eindeutig festgelegt, ihre Phase ist durch die Kopplung bis auf eine additive Konstante bestimmt:

$$f_k + f_l = f_m \quad (36)$$

$$\varphi_k + \varphi_l = \varphi_m + \varphi_0 \quad \varphi_0 = \textit{konstant} \quad (37)$$

Die Amplitude A_m ist ebenso wie die Phasenverschiebung φ_0 über alle Realisationen hinweg konstant.

$$X(f_m) = A_m e^{i\varphi_m} = A_m e^{i(\varphi_k + \varphi_l - \varphi_0)} \quad , \quad f_k + f_l = f_m \quad (38)$$

Alle anderen Frequenzkomponenten können sich beliebig verhalten, da sie nicht in diese Betrachtung eingehen. Eine einfache Rechnung ergibt für das Bispektrum eines Ensembles dieser Testsignale:

$$B(f_k, f_l) = A_k A_l A_m e^{i\varphi_0} \quad (39)$$

Der konstante Phasenfaktor φ_0 wird in der Regel der Einfachheit halber für Testauswertungen gleich Null gesetzt, so daß das Ergebnis in diesem Fall rein reell ist. Das Bispektrum dieses koppelnden Testsignals ist ebenso wie das Bispektrum des Rauschsignals leistungsabhängig.

3.5 Die Bikohärenz als normiertes Bispektrum

Da das Bispektrum sowohl eines Nutz- als auch eines Rauschsignals eine deutliche Leistungsabhängigkeit zeigt, liegt es nahe, eine normierte, und damit leistungsunabhängige Größe zu definieren. Sie trifft dann eindeutige Aussagen über die Existenz einer Drei-Wellen-Kopplung im untersuchten Signal. Diese normierte Größe ist die Bikohärenz, die bereits in Abschnitt 3.2 vorläufig definiert wurde. In aller Allgemeinheit existieren beliebig

viele Möglichkeiten, um das Bispektrum auf die Leistungen der einzelnen Frequenzkomponenten zu beziehen. Die folgenden drei bieten sich wegen ihrer Einfachheit besonders an:

$$b_1^2(f_k, f_l) \equiv \frac{|B(f_k, f_l)|^2}{\langle |X_k X_l X_m|^2 \rangle} \quad (40)$$

$$b_2^2(f_k, f_l) \equiv \frac{|B(f_k, f_l)|^2}{\langle |X_k X_l|^2 \rangle \langle |X_m|^2 \rangle} \quad (41)$$

$$b_3^2(f_k, f_l) \equiv \frac{|B(f_k, f_l)|^2}{\langle |X_k|^2 \rangle \langle |X_l|^2 \rangle \langle |X_m|^2 \rangle} \quad (42)$$

Alle drei Normierungsvorschläge sind reell und positiv semidefinit. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Bunjakowski Ungleichung [Bronstein1981a], einer Verallgemeinerung der Cauchy-Schwarz Ungleichung [Bronstein1981a] auf komplexe Zahlen, kann sehr einfach gezeigt werden, daß die ersten zwei Normierungsvarianten des Bispektrums nach oben durch Eins beschränkt sind:

$$0 \leq b_1(f_k, f_l) \leq 1 \quad (43)$$

$$0 \leq b_2(f_k, f_l) \leq 1 \quad (44)$$

Obwohl der in Gleichung (42) getroffene Normierungsvorschlag sehr einfach und kanonisch erscheint, ist b_3 nicht nach oben hin durch Eins beschränkt. Geht man von einer Situation aus, in der die drei betrachteten Koeffizienten alle mit einer Wahrscheinlichkeit α gleich Null sind, oder mit der Gegenwahrscheinlichkeit $\beta = 1 - \alpha$ alle reell und gleich Eins sind, so ergibt sich eine Bikohärenz von $b_3(f_k, f_l) = \beta^2/\beta^3 = 1/(1 - \alpha)$. Setzt man für die Wahrscheinlichkeiten, über die bis jetzt noch nichts ausgesagt wurde, zum Beispiel $\alpha = 0.9$ an, so erhält man $b_3(f_k, f_l) = 10$. Da α beliebig nahe bei Eins gewählt werden kann, ist hiermit gezeigt, daß b_3 nach oben unbeschränkt ist. Dieses konstruierte Beispiel ist nicht sehr realistisch, da es in der Verallgemeinerung bedeutet, daß das Signal in vielen Realisationen konstant Null ist und in nur wenigen von einigen Spitzen überzogen wird. In den meisten Fällen echter Signale wird auch diese Normierung Werte ergeben, die mit den anderen beiden vergleichbar sind. Dennoch erscheint sie wegen der fehlenden festen Obergrenze wenig geeignet für eine Standardauswertung.

Die Größe $b_2(f_k, f_l)$ wird häufig in der Literatur verwendet [Kim1979a, Elgar1985a, Gresillion1988a], da sie in direktem Zusammenhang mit dem einfachen Modell (Glg. 26 und 28) aus dem Abschnitt 3.2 steht. In diesem einfachen Modell gibt $b_2^2(f_k, f_l)$ den Anteil der bikohärenten Leistung bei der Frequenzkomponente f_m an, der auf die Wellen bei f_k und f_l zurückzuführen ist (30). Sobald man jedoch ein etwas komplizierteres Modell der Wellenkopplung aufstellt, gilt diese Gleichung nicht mehr. Ausführliche Tests haben zudem ergeben, daß für echte Plasmasignale b_1 und b_2 sehr ähnliche Werte annehmen. Da also auch die zweite Normierungsvariante durch nichts besonders ausgezeichnet ist, wird im Folgenden der Normierung 1 nach Gleichung (40) der Vorzug

gegeben, da diese den höchsten Grad an Symmetrie aufweist. Dieser Umstand verringert den Rechenaufwand für die Bikohärenz um einen Faktor drei, worauf im folgenden Abschnitt 3.6 näher eingegangen werden wird.

Die Bikohärenz in der ersten Normierungsform ist eine reelle, beschränkte Größe, die Aufschluß über eine eventuell vorhandene Drei-Wellen-Kopplung gibt. Das Ausmaß der Leistung, die bei dieser Kopplung transferiert wird, ist durch das Bispektrum bestimmt. Da das Bispektrum eine komplexe Größe ist, wird es meist in Betrag und Phase zerlegt dargestellt, eine Aufspaltung in Real- und Imaginärteil wird selten angestrebt. Für den Rest der Arbeit gilt daher folgende Namenskonvention: Unter der „Bikohärenz“ wird immer die Bikohärenz in der ersten Normierungsvariante verstanden, unter der „Biphase“ die Phase des komplexen Bispektrums und unter dem „Bispektrum“ der Betrag des komplexen Bispektrums.

$$\begin{aligned} \text{„Bikohärenz“} &\equiv b_1(f_k, f_l) = \sqrt{\frac{|B(f_k, f_l)|^2}{\langle |X_k X_l X_m|^2 \rangle}} \\ \text{„Biphase“ } \varphi_B(f_k, f_l) &\equiv \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(B(f_k, f_l))}{\operatorname{Re}(B(f_k, f_l))}\right) \\ \text{„Bispektrum“} &\equiv |B(f_k, f_l)| \end{aligned}$$

Die Biphase $\varphi_B(f_k, f_l)$ ist auf das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ beschränkt, eventuell auftretende Phasensprünge von 2π werden nicht korrigiert.

Gibt man ein Rauschsignal analog zu Abschnitt 3.3 vor, so verhält sich die Bikohärenz in der neuen Normierung umgekehrt proportional zur Wurzel der Zahl M der Mittelungen.

$$b(f_k, f_l) \sim \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (45)$$

Erst wenn ein Signal deutlich über diesem durch die Statistik der Messung vorgegebenen Niveau liegt, darf auf ein Vorliegen einer Kopplung geschlossen werden. Abschätzungen von [Haubrich1965a] liefern einen Wert von $\sqrt{6/M}$ für das Niveau, ab dem einen Bikohärenz mit 95% Sicherheit nicht mehr auf ein Rauschsignal zurückgeführt werden kann. In anderen Arbeiten [Gresillion1988a] wird das Signifikanzniveau mit $\sqrt{4\sqrt{3}/M}$ angegeben. Eigene numerische Untersuchungen ergaben in Übereinstimmung mit diesen Ergebnissen, daß das Signifikanzniveau umgekehrtproportional zur Zahl der Mittelungen fällt, wobei der Proportionalitätsfaktor etwas kleiner als 3 ist. Andererseits kann eine eventuelle Kopplung nie völlig ausgeschlossen werden, da sowohl die Bikohärenz als auch das Bispektrum nie den Wert Null signifikant annehmen können. Man kann immer nur obere Grenzen für die Stärke der Kopplung angeben.

Ähnliche Abschätzungen für den Gültigkeitsbereich der Biphase sind wesentlich schwerer zu treffen. Eine genaue Abschätzung ist jedoch nicht notwendig, da die Biphase in dem uns interessierenden Gebiet, das durch den Gültigkeitsbereich von Bispektrum und Bikohärenz

vorgegeben wird, immer gut definiert ist. Falls sich die Biphase signifikant über diesen Bereich hinaus erstrecken sollte, muß dies am Einzelfall diskutiert werden.

3.6 Die Symmetrieeigenschaften des Bispektrums

Um die Symmetrieeigenschaften des Bispektrums zu studieren, gehen wir wieder von einer Zeitreihe als Meßgröße aus. Durch die Meßzeit T ist die Frequenzauflösung zu $\delta f = 1/T$ gegeben. Das Abtasttheorem, das den Einfluß der Abtastrate auf die höchste auflösbare Frequenz beschreibt, legt die größte detektierbare Frequenz $f_{Nyquist} = 1/2\delta t$ durch den Abstand δt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Meßpunkten fest. Das komplexe Bispektrum ist deswegen in der f_1 - f_2 -Ebene auf einen sechseckigen Bereich eingeschränkt, der von den folgenden drei Relationen beschrieben wird:

$$\begin{aligned} -f_{Nyq} &\leq f_1 \leq +f_{Nyq} \\ -f_{Nyq} &\leq f_2 \leq +f_{Nyq} \\ -f_{Nyq} &\leq f_1 + f_2 \leq +f_{Nyq} \end{aligned}$$

Das so definierte Gebiet, das in Abbildung 9 dargestellt ist, wird von sechs Geraden begrenzt:

$$\begin{aligned} f_1 &= +f_{Nyq} \\ f_1 &= -f_{Nyq} \\ f_2 &= +f_{Nyq} \\ f_2 &= -f_{Nyq} \\ f_1 + f_2 &= +f_{Nyq} \\ f_1 + f_2 &= -f_{Nyq} \end{aligned} \tag{46}$$

Da das ursprüngliche Zeitsignal reell war, sind die daraus resultierenden Fourierkoeffizienten hermitesch (Glg. 22). Diese Hermitizität überträgt sich auch auf das Bispektrum, so daß gilt:

$$B(f_k, f_l) = B^*(-f_k, -f_l) \tag{47}$$

Die Definition des Bispektrums (Glg. 24) ist zusätzlich invariant gegenüber einer Vertauschung der Variablen X_k, X_l und bis auf einen Vorzeichenwechsel auch gegenüber einer Vertauschung mit X_m , so daß sich zwei weitere Identitäten ergeben:

$$B(f_k, f_l) = B(f_l, f_k) \tag{48}$$

$$B(f_k, f_l) = B^*(-f_k, f_m) \tag{49}$$

Aus diesen grundlegenden Symmetrien lassen sich insgesamt zwölf Symmetrierelationen gewinnen, d.h. es gibt in der Bispektrumsebene innerhalb des zu betrachtenden Sechsecks zwölf gleichberechtigte Punkte, die keine zusätzliche Information beinhalten. Diese

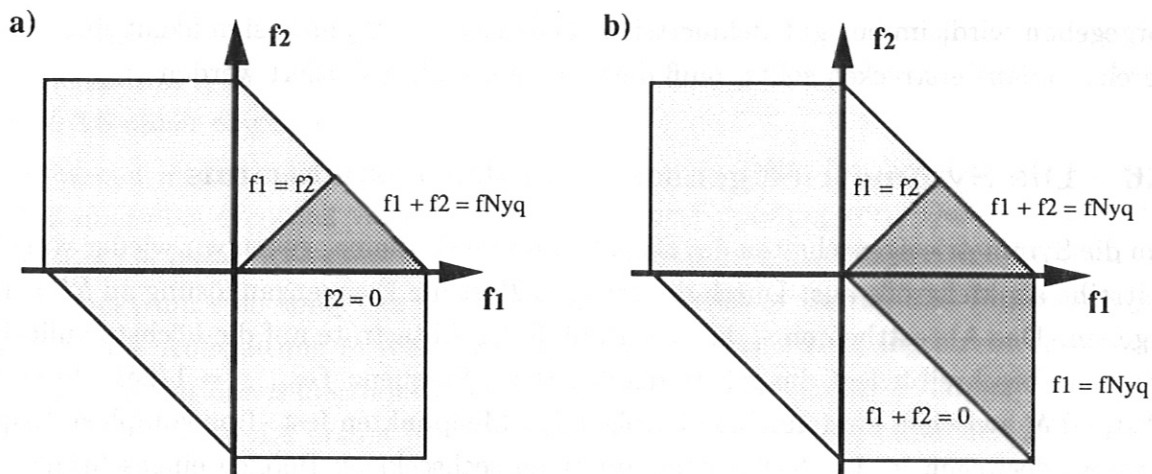


Abbildung 9: DER DEFINITIONSBEREICH DES BISPEKTRUMS. Das Bispektrum ist nach den Gleichungen 46 innerhalb eines Sechsecks definiert, das nach allen Seiten durch die Nyquist-Frequenz begrenzt ist. Dieses Sechseck ist in den Bildern a) und b) hell unterlegt dargestellt. Unter der Berücksichtigung der Symmetrien, die in der Definition des Bispektrums nicht beachtet werden, kann man jedoch das Gebiet, innerhalb dem das Bispektrum berechnet werden muß, ohne Verlust an Information auf das in Abbildung a) dunkel getönte Dreieck einschränken. Die Normierungsvariante b_2 der Bikohärenz oder ein Kreuzbispektrum besitzen nicht mehr die volle Symmetrie des Bispektrums. Die Berechnung muß deswegen in dem in Abbildung b) dunkel hervorgehobenen Gebiet durchgeführt werden, dessen Fläche um eine Faktor drei gegenüber der Fläche des irreduziblen Dreiecks in Abbildung a) größer ist.

Symmetrien sind besonders deutlich zu sehen, wenn man die kartesische Darstellungsform verläßt und alle drei Frequenzachsen in einem Bild aufträgt (Abb. 10). Wendet man die drei grundlegenden Symmetrien auf das begrenzende Sechseck an, so verkleinert sich die zu berechnende Fläche auf ein Dreieck mit einem Zwölftel des ursprünglichen Flächeninhalts, ohne daß Information verloren geht. Die Relationen, die das zu berechnenden Gebiet einschränken, lauten dann :

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_1 \leq f_{Nyq} \\ 0 &\leq f_2 \leq f_1 \\ 0 &\leq f_1 + f_2 \leq f_{Nyq} \end{aligned}$$

Das durch obige Relationen beschriebene Dreieck, das nur noch einen der jeweils zwölf äquivalenten Punkte enthält, wird von folgenden Geraden begrenzt:

$$\begin{aligned} f_2 &= 0 \\ f_2 &= f_1 \\ f_2 &= f_{Nyq} - f_1 \end{aligned} \tag{50}$$

Da der Bikohärenz dieselben Symmetrien wie dem Bispektrum zugrunde liegen, gilt für die Bikohärenz in der symmetrischen Normierung (40) dieselbe Einschränkung auf das

obige Teildreieck. Zur Darstellung in kartesischen Koordinaten sei auf das linke Bild in Abbildung 9 verwiesen.

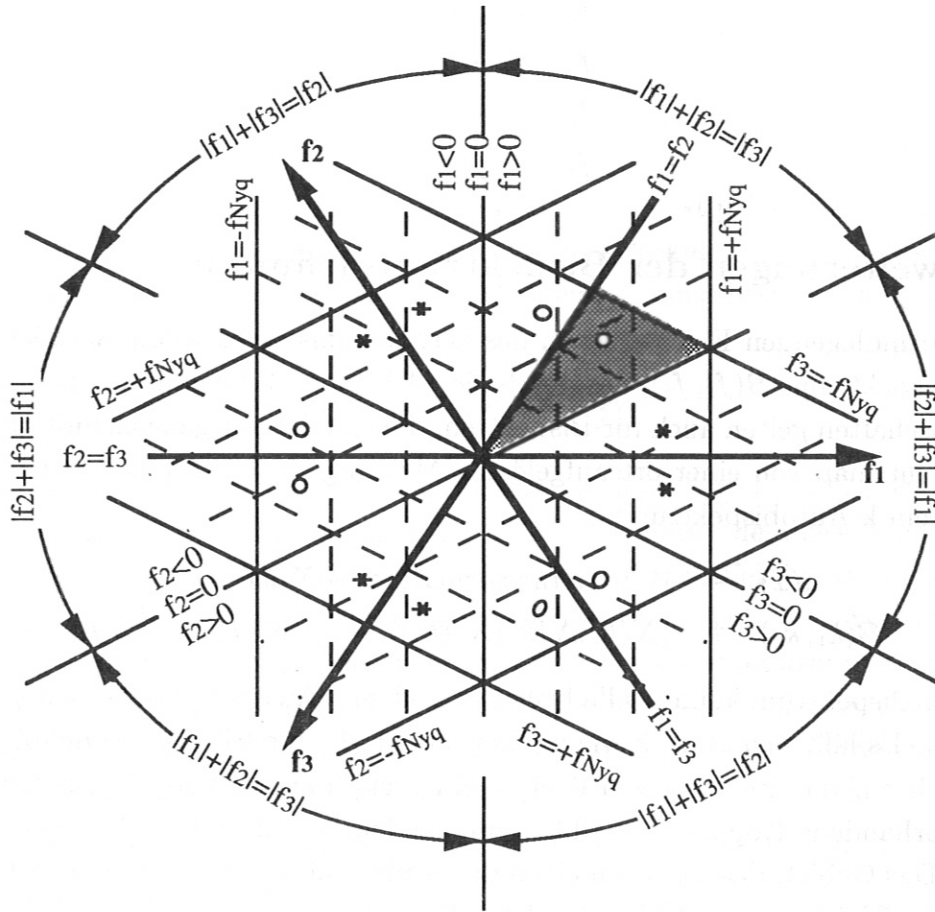


Abbildung 10: DIE SYMMETRISCHEN PUNKTE DES BISPEKTRUMS IN NICHT-KARTESISCHEN KOORDINATEN. Zur Darstellung der vollen Symmetrien des Bispektrums wechselt man am besten in ein nicht kartesischen Koordinatensystem. Da in diesem System alle drei Frequenzkoordinaten gleichberechtigt sind, muß die Bispektrumsdefinition (23) zur Deutung der Symmetrien verwendet werden. Die Punkte kennzeichnen die Stellen, an denen das komplexe Bispektrum die gleichen Werte annimmt, die Sterne stehen für die Symmetrien, die mit dem komplex konjugierten Werte des Bispektrums verbunden sind. Das schattierte Dreieck stellt die „Einheitszelle“ des Bispektrums dar. Es enthält genau jeweils einen der zwölf symmetrischen Punkte. In diesem Dreieck ist die ganze Information des Bispektrums bereits enthalten. Auf den Kreisbögen sind die Richtungen der zugrundeliegenden Kopplungen angegeben. Die gestrichelten Linien sind die Koordinatenlinien in diesem etwas eigenwilligen Koordinatensystem.

Es sind jedoch auch weniger symmetrische Definitionen denkbar. Ein Beispiel ist die Bikohärenz in der zweiten Normierungsvariante (41), die nicht mehr gegenüber einer Vertauschung in der dritten Komponente $X(f_m)$ invariant ist. In allen Definitionen, die in $X(f_m)$ unsymmetrisch sind, gilt die Identität (49) nicht mehr. Dadurch vergrößert sich das zu berechnende Gebiet gegenüber den symmetrischen Definitionen um einen Faktor

drei auf ein Viertel der ursprünglichen Fläche. Dieses Gebiet (Abb. 9 rechts) wird nun von folgenden Geraden begrenzt:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_{Nyq} \\
 f_2 &= +f_1 \\
 f_2 &= -f_1 \\
 f_2 &= f_{Nyq} - f_1
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

3.7 Erweiterungen der Bispektrumsdefinition

Sämtliche grundlegenden Eigenschaften des Bispektrums wurden am Beispiel eines Frequenzautobispektrums $B(f_1, f_2)$, das durch die Gleichung (24) definiert wurde, abgeleitet. Diese Eigenschaften gelten auch für Bispektren, die von der Ausgangsdefinition etwas abweichen. Geht man von einer orts aufgelösten Messung statt von einer Zeitreihe aus, so erhält man ein k-Autobispektrum:

$$\begin{aligned}
 n(x) &\rightarrow \text{Fouriertransformation} \rightarrow X(k) \\
 B(k_1, k_2) &\equiv \langle X(k_1)X(k_2)X^*(k_3) \rangle \quad , \text{ mit } k_1 + k_2 = k_3
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Für dieses k-Bispektrum können alle bisher getroffenen Aussagen völlig analog übernommen werden. Es läßt sich ähnlich wie in Gleichung (40) eine Bikohärenz definieren, deren Wertebereich auf das Intervall von 0 bis 1 eingeschränkt ist, und die ein Maß für eine eventuell vorhandene Kopplung angibt, wenn sie deutlich über dem statistischen Mittelwert liegt. Das Gebiet, das nur noch einen der äquivalenten Punkte enthält, ist wiederum das durch die Gleichungen (50) beschriebene Dreieck.

Mißt man Zeitreihen an zwei verschiedenen Orten, so läßt sich auch ein f-Kreuzbispektrum definieren:

$$\begin{aligned}
 n_1(t) &\rightarrow \text{Fouriertransformation} \rightarrow X(f) \\
 n_2(t) &\rightarrow \text{Fouriertransformation} \rightarrow Y(f) \\
 B_{Cross}(f_1, f_2) &\equiv \langle X(f_1)X(f_2)Y^*(f_3) \rangle \quad , \text{ mit } f_1 + f_2 = f_3
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Dieser Definition liegt gegenüber dem Autobispektrum eine eingeschränkte Symmetrie zugrunde. Das ursprüngliche Sechseck wird wie in Gleichung (51) auf ein Viereck mit einem Viertel des anfänglichen Flächeninhalts reduziert (Abb. 9 rechts). Völlig analog kann man auch ein k-Kreuzbispektrum aus einer orts aufgelösten Messung zu zwei verschiedenen Zeitpunkten gewinnen. Es ist natürlich auch möglich, aus zwei verschiedenen Meßgrößen, die man zeit- oder orts aufgelöst aufgenommen hat, ein Kreuzbispektrum zu definieren.

Liegen die Meßergebnisse mit einer genügend großen zeitlichen und räumlichen Auflösung vor, um eine zweidimensionale Fouriertransformation durchführen zu können, so kann

man auch ein kf-Bispektrum definieren:

$$\begin{aligned}
 n(x, t) &\rightarrow \text{2dim. Fouriertransformation} \rightarrow X(k, f) \\
 B(k_1, k_2, f_1, f_2) &\equiv \langle X(k_1, f_1) X(k_2, f_2) X^*(k_3, f_3) \rangle, & (54) \\
 &\text{mit } k_1 + k_2 = k_3 \\
 &\text{und } f_1 + f_2 = f_3
 \end{aligned}$$

Das kf-Bispektrum enthält sicher die meiste Information, ist jedoch auch am schwierigsten zu interpretieren, da es in einem vierdimensionalen Parameterraum angesiedelt ist. Die Symmetrien dieses Bispektrums sind ebenfalls nicht so einsichtig wie im zweidimensionalen Fall. Die Fourierkoeffizienten sind wieder hermitesch

$$X(k, f) = X^*(-k, -f), \quad (55)$$

aber die Ebenen, innerhalb derer die äquivalenten Punkte liegen, sind keine Schnittebenen in kk - oder ff -Richtung, sondern liegen diagonal. Gegenüber dem zweidimensionalen Fall sind keine weiteren Symmetrien hinzugetreten, so daß der effektive Rechenaufwand wieder bei einem Zwölftel des zugänglichen Parameterraums liegt. Zur Auswertung müssen zweidimensionale Schnittbilder des vierdimensionalen Parameterraums angefertigt werden. Diese Schnittbilder werden meist in Form der kompletten Sechsecke, deren Grenzen weiterhin sinngemäß durch Gleichung (46) gegeben sind, berechnet werden müssen. Dieser Effekt schlägt sich natürlich negativ in sehr großen Rechenzeiten nieder.

Integriert man $B(k_1, k_2, f_1, f_2)$ über k_1 und k_2 so erhält man wieder das bekannte Bispektrum $B(f_1, f_2)$ und vice versa.

$$B(f_1, f_2) = \text{const.} \cdot \iint dk_1 dk_2 B(k_1, k_2, f_1, f_2) \quad (56)$$

$$B(k_1, k_2) = \text{const.} \cdot \iint df_1 df_2 B(k_1, k_2, f_1, f_2) \quad (57)$$

In diesem Sinne kann das f -Bispektrum als ein über alle k gemitteltes kf -Bispektrum interpretiert werden.

Die Gesamtheit dieser verschiedenen Typen von Bispektren liefert sicher ein Maximum an Information. Je nach Problemstellung und Meßwerten ist die eine oder andere Version am informativsten. Sie alle im Detail zu untersuchen würde aber den Rahmen dieser Arbeit verlassen. Im Folgenden werden wir uns auf die Auswertung von f - und k -Autobispektren beschränken und gegebenenfalls in Ausblicken auf die Möglichkeiten der weiteren Varianten hinweisen.

4 Numerische Berechnung des Bispektrums

4.1 Grundsätzliches zur Datenanalyse

Wie bereits in den ersten Kapiteln dargelegt wurde (Abschnitte 1.4, 2.1 und 2.2), werden die Fluktuationsdaten aus zwei verschiedenen Diagnostiken, H_α und Langmuirsonden, gewonnen, die einen ähnlichen Datenfluß bieten. Beide Diagnostiken haben eine maximale räumliche Auflösung von 16 Kanälen und eine sample-Frequenz von bis zu 1 MHz. Je nach Abtastrate ist die Größe der Rohdatensätze durch die Entladungsdauer oder durch die Speicherkapazität der A/D-Wandler (32 MB) begrenzt. Eine solche Datenmenge kann aus rein hardwaretechnischen Gründen nicht auf einmal verarbeitet werden. Andererseits ist auch aus physikalischen Gründen eine Analyse der gesamten Schußdaten auf einmal nicht sinnvoll. Die meisten statistischen Analysemethoden setzen ein stationäres Verhalten voraus, weswegen aus der Fülle der angebotenen Daten nur ein Teil zur Weiterverarbeitung in Frage kommt. Eine Entladung setzt sich aus einer ganzen Reihe unterschiedlicher Phasen zusammen, die sinnvollerweise auch getrennt ausgewertet werden sollten. Aus diesen Gründen ist das vorhandene Programm zur Analyse linearer Korrelationen auf einen Datensatz von maximal 16 Kanälen zu je 32000 Zeitpunkten ausgelegt [Endler1990a, Rudyj1990a, Theimer1990a]. In dieser Konfiguration belegen allein die Ausgangsdaten bereits einen Speicherplatz von über 2 MB. Dies entspricht in etwa auch den Grenzen, innerhalb derer unsere Auswerterechner noch akzeptabel kurze Antwortzeiten haben und noch nicht völlig mit der Verwaltung eines virtuellen Speicherangebots beschäftigt sind. Aus Gründen der Kompatibilität und der Vergleichbarkeit der Ergebnisse wird die Bispektralanalyse mit derselben maximalen Datensatzgröße durchgeführt. Der Ensemblemittelwert, der das Bispektrum und alle verwandten Größen definiert, würde eine Mittelung über viele vergleichbare Realisationen erfordern. Für einen stationären, nicht deterministischen Prozeß ist es jedoch genauso möglich verschiedene Zeitfenster aus einer Entladung für den Mittelungsprozeß heranzuziehen. Diese Zeitfenster müssen allerdings statistisch unabhängig sein, wenn sie nicht eine Verfälschung der Aussagen mit sich bringen sollen. Aus bereits vorhandenen Analysen folgt, daß die Kohärenzzeiten der Fluktuationen an ASDEX maximal 30 bis 70 μsec betragen. Wählt man sein Zeitfenster mit einer Länge von 100 μsec , so kann man in guter Näherung davon ausgehen, daß das Plasma nach diesem Zeitfenster nicht mehr weiß, was vor diesem Zeitfenster geschehen ist, es also sein statistisches Gedächtnis völlig verloren hat. Legt man ein solches Zeitfenster von 100 μsec zu Grunde und nutzt den vorhandenen Speicherplatz von 16×32000 Datenpunkten voll aus, so ergibt sich nach Gleichung (45) für den Mittelwert der Bikohärenz eines Rauschsignals bei der größtmöglichen Anzahl der Realisationen ($M = 5120$)

$$b_{\text{Rausch}} \simeq \frac{1}{\sqrt{M}} = 1.4\% \quad . \quad (58)$$

Die Zahl der maximal möglichen Mittelungen sollte also physikalisch relevante Kopplungen, die mit einer Bikohärenz von mehr als 5% verbunden sind, detektierbar machen. Es wird sich jedoch zeigen, daß nur in wenigen Fällen ausreichend viele Datenpunkte vorhanden sind, so daß nicht immer dieses Signifikanzniveau erreicht werden kann.

Für die nötigen numerischen Rechnungen steht ein Cluster von MikroVax-Rechnern der Firma DigitalEquipment zur Verfügung. Die eigentlichen Berechnungen erfolgen in einem FORTRAN-Programm, die graphische Datenausgabe in IDL-Programmen.

4.2 Implementation der Berechnungen

Da die Meßsignale, die zur Bispektralanalyse herangezogen werden, sowohl aus verschiedenen Plasmaentladungen, wie auch aus verschiedenen räumlichen Kanälen stammen können, unterliegen sie eventuell verschiedenen Verstärkungsfaktoren, durchlaufen unterschiedliche Verstärker und Leitungslängen etc. . Um diese und andere systematische Fehler, wie z.B. ein Laufen der Verstärker, zu eliminieren, müssen die Rohdaten vorbehandelt werden. Die Daten werden als erstes mit einer frei wählbaren Grenzfrequenz von bis zu 5 kHz hochpaßgefiltert, um die niederfrequenten Fluktuationen zu unterdrücken. Damit wird ebenfalls der Mittelwert abgezogen. Die Grenzfrequenz des Filters kann bei einer Änderung der Anforderungen beliebig variiert werden. Anschließend werden die einzelnen Datensätze auf die gleiche Standardabweichung normiert. Wenn allen Daten derselbe physikalische Prozeß zugrunde liegt und sie deswegen alle ein ähnliches Verhalten zeigen, so werden sie durch diesen Prozeß nicht wesentlich verfälscht, sondern in der Hauptsache von individuellen Fehlern befreit. Werden andererseits nichtzusammengehörende Signale in dieser Art behandelt, so kann unter Umständen künstlich eine ursprünglich nichtvorhandene Ähnlichkeit erzeugt werden. Da diese Methoden aber alle aus linearen Operationen bestehen, kann auf keinen Fall eine feste Phasenbeziehung künstlich erzeugt werden. Diese Art der Signalbehandlung ist also für die Bispektralanalyse unkritisch.

Das so vorbehandelte Zeitsignal wird dann in Zeitfenster von 100 bis 800 Punkten Länge unterteilt. Jedes dieser Teilstücke wird durch eine diskrete Fouriertransformation in seine Frequenzkomponenten aufgespalten. Da die Kohärenzzeit kleiner als die Fensterlänge ist, und bei den hohen Frequenzkomponenten die Leistung nahezu Null ist, sind die Probleme mit Aliasing so gering, daß in dem vorliegenden Fall breitbandiger Spektren mit einem Rechteckfenster gearbeitet werden kann [Hessmann1983a]. Aus den so gewonnenen Frequenzkomponenten werden dann alle möglichen Dreifachprodukte sowie deren Beträge gebildet, über die dann letztendlich gemittelt wird. So wird in einem Rechendurchlauf das komplexe Bispektrum und die Bikohärenz berechnet. Ist die Berechnung des Bispektrums numerisch noch relativ stabil, so muß bei der Bikohärenz bereits mit größeren Schwierigkeiten gerechnet werden, da diese eventuell auf eine verschwindende Leistung normiert wird. Zusätzlich können bei extremen Signalen auch noch große Dynamiksprünge in den

Fourierkoeffizienten auftreten, so daß eine Skalierung der Zwischenergebnisse unumgänglich ist. Auch bei der Implementation der Formeln für das Bisppektrum (24) und die Bikohärenz (40) in der Programmiersprache FORTRAN muß man mit größter Vorsicht vorgehen, um gleichzeitig optimale numerische Stabilität und Rechengeschwindigkeit zu erhalten. Für ein volles f-Bisppektrum benötigt eine MikroVax 3100 je nach Auslastung etwa drei bis fünf Minuten, für ein kf-Bisppektrum würde sie bereits mehrere Stunden rechnen. Spektren höherer als dritter Ordnung sind deswegen wohl kaum mehr auf Rechnern herkömmlicher Architektur zu berechnen. Leistungsfähige Parallelrechner könnten bei dieser Problemstellung sehr vorteilhaft eingesetzt werden, da die Berechnung der Mittelwerte vieler Mehrfachprodukte deren Architektur besonders gut angepaßt ist.

4.3 Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis des Bisppektrums

Die Fouriertransformation ist wie folgt implementiert:

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} n(j) e^{-i \frac{2\pi j k}{N}} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (59)$$

In der gewählten Normierung sind die Amplituden breitbandiger Signale und die Amplituden von Rauschsignalen unabhängig von der Fensterlänge N , während die Amplituden einzelner linienförmiger Signale mit \sqrt{N} wachsen. Bei einer festen Anzahl von Realisationen gilt dann für das Bisppektrum in Abhängigkeit von der Fensterlänge:

$$B(\text{linienförmiges Signal}) \propto N^{3/2} \quad (60)$$

$$B(\text{breitbandiges Signal}) \propto \text{const.} \quad (61)$$

Die Abhängigkeit von der Zahl der Realisationen M ist sinngemäß weiter durch die Gleichungen (33) und (39) gegeben.

$$B(\text{Rauschen}) \propto M^{-1/2} \quad (62)$$

$$B(\text{Signal}) \propto \text{const.} \quad (63)$$

Damit sind zwei wesentlich unterschiedliche Fälle im Signal-zu-Rausch-Verhältnis denkbar: Das zu detektierende Nutzsinal kann linienförmig oder breitbandig sein, ein angenommenes weißes Rauschen ist immer breitbandig.

$$\frac{B(\text{linienförmiges Signal})}{B(\text{weißes Rauschen})} \propto N^{3/2} M^{1/2} \quad (64)$$

$$\frac{B(\text{breitbandiges Signal})}{B(\text{weißes Rauschen})} \propto M^{1/2} \quad (65)$$

Das Auflösungsvermögen für ein breitbandiges Signal ist also nicht von der Fensterlänge, sondern nur von der Zahl der Realisationen abhängig. Hingegen geht bei einem linienförmigen Signal die Fensterlänge mit einer höheren Potenz in das Signal-zu-Rausch-Verhältnis ein als die Zahl der Realisationen. Für linienförmige Signale ist also eine

Vergrößerung der Fensterlänge auch auf Kosten der Zahl der maximal möglichen Realisationen sinnvoll. Im Extremfall ist die „Mittelung“ über eine Realisation denkbar. Dies ist auch sinnvoll, da bei der maximalen Fensterlänge die einzelnen Linien am besten aufgelöst werden. Erfüllen drei hochaufgelöste Linien in einem Spektrum die Summenbedingung exakt, so muß es dafür auch einen physikalischen Grund geben, der wiederum in einer Wellenkopplung gesucht werden kann.

In unseren Plasmadaten liegt jedoch eindeutig der Fall eines breitbandigen Spektrums vor. Eine Verbesserung der Empfindlichkeit des Bispektrums ist also nur durch eine Erhöhung der Zahl der Realisationen möglich. Zusätzlich wird die sinnvolle Fensterlänge durch die Korrelationszeit des Plasmasignals festgelegt. Analoge Überlegungen können natürlich auch für die Bikoherenz angestellt werden.

4.4 Ein einfaches Beispiel zur Bispektrumsberechnung

Um Zuverlässigkeit und Funktion der Algorithmen und Programme zu testen, sei hier exemplarisch die Auswertung eines Ensembles von Testfunktionen dargestellt. Als Testsignal wurden zwei Sinusfunktionen und deren Produkt ausgewählt.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + 2 * \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (66) \\ &= \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \omega_1 = 2\pi * 60 \text{ kHz}$$

$$\omega_2 = 2\pi * 230 \text{ kHz}$$

$$\omega_+ = \omega_2 + \omega_1 = 2\pi * 290 \text{ kHz}$$

$$\omega_- = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi * 170 \text{ kHz}$$

$$\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_- = \varphi_2 - \varphi_1$$

Die Phasen wurden für jede Realisation willkürlich gewählt. In diesem Beispiel koppeln also zwei Wellen bei ω_1 und ω_2 zu zwei weiteren Wellen bei der Summen- und der Differenzfrequenz. Eine Fourieranalyse ergibt nur bei den vier beteiligten Frequenzen von Null verschiedene Amplituden. Die Phasendifferenzen ergeben für die Summen- und Differenzwechselwirkung $\varphi_B = 0$. Bei der analytischen Berechnung der Dreifachprodukte sollte auf die Reihenfolge geachtet werden, da in der irreduziblen Darstellung (50) folgende Relation gilt:

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \quad (67)$$

Stellt man diese Signale (Abb. 11) einzeln dar, so ist ihnen die Kopplung deutlich anzusehen, das Summensignal sieht hingegen bereits äußerst verwirrend aus, obwohl eine

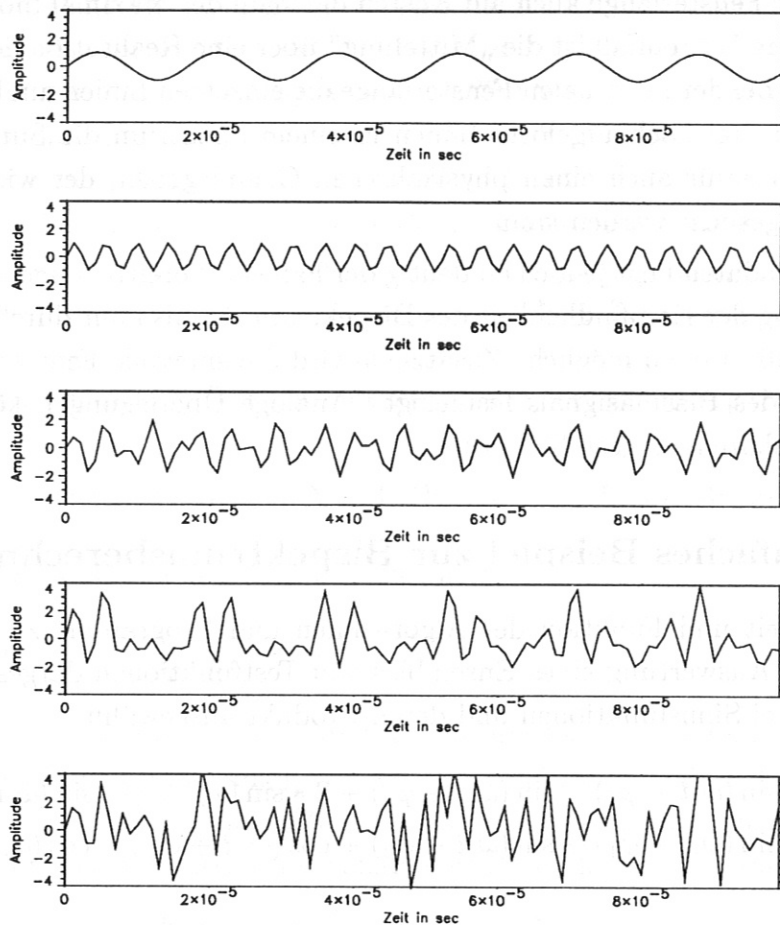


Abbildung 11: ZUR ENTSTEHUNG EINES TESTSIGNALS. Von oben nach unten sind dargestellt die erste und die zweite Ausgangswelle, die Produktwelle, die Überlagerung dieser drei Signale und das Endsignal, dem gegenüber dem vorangegangenen noch etwas weißes Rauschen zugemischt wurde. Die Periodizitäten der ersten drei Bilder sind in dem für die Bispektralanalyse verwandten Signal des letzten Bildes nicht mehr zu erkennen.

Periodizität noch klar erkennbar ist. Aus Gründen, auf die erst im folgenden Abschnitt 4.5 näher eingegangen wird, muß dem so gewonnen Signal noch ein Rauschsignal überlagert werden. Die Amplitude dieses zusätzlichen Rauschens kann die Signalamplitude im Zeitraum um ein Mehrfaches übersteigen, ohne die Auswertung wesentlich zu beeinträchtigen. In diesem Beispiel ist die Rauschamplitude gleich der zweifachen Signalamplitude gewählt worden. Das Ausgangssignal für die Bispektralanalyse weist jetzt keine für das blanke Auge mehr erkennbare Regelmäßigkeit auf.

In der Auswertung treten die eingegebenen Kopplungen jedoch wieder deutlich zu Tage, wie in Abbildung 12 zu sehen ist: Die Bikoherenz hat bei den koppelnden Frequenzpaaren $f_1 + f_2 = f_+$ und $f_1 - f_2 = f_-$ zwei ausgeprägte Maxima. Alle anderen Punkte auf der Frequenzebene zeigen ein Rauschniveau an, das mit dem

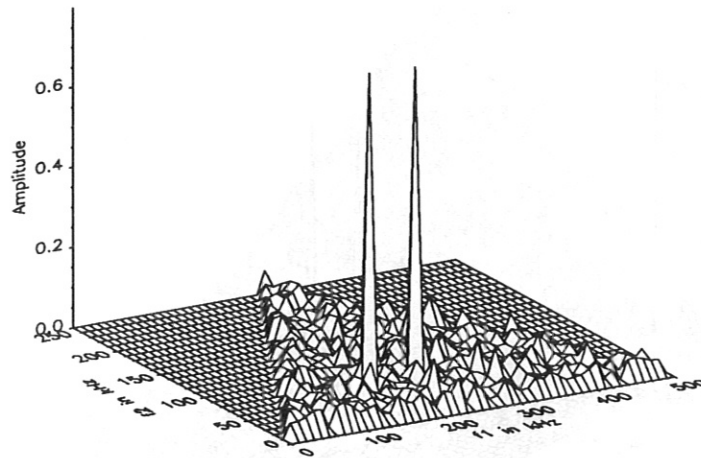


Abbildung 12: DIE BIKOHÄRENZ DES TESTSIGNALS. Die Darstellung ist auf das irreduzible Dreieck eingeschränkt. Der Analyse liegen 1000 Realisation zu je 100 Punkten Länge zu Grunde. Die Mittelung über 1000 Realisationen läßt einen Mittelwert des Rauschens von $1/\sqrt{1000} = 3.15\%$ erwarten. Die Länge des Zeitfensters von 100 Punkten korrespondiert über das Abtasttheorem mit 50 aufgelösten Frequenzkomponenten. Die Kopplung bei den Ausgangsfrequenzen wird durch eine Bikohärenz von fast 80% sehr gut wiedergegeben. Der Rauschhintergrund gruppiert sich wie erwartet um einen Mittelwert von etwa 3%.

Erwarteten von $1/\sqrt{1000}$ Mittelungen $\simeq 3\%$ gut übereinstimmt. Würde man man diese Maxima auf der ganzen Frequenzebene darstellen, so wären jeweils zwölf äquivalente Punkte zu sehen, die alle auf einem Sechseck liegen, das dem verkleinerten Rand des Bispektrumsgebiets entspricht. Im Bispektrum (Abb. 13) läßt sich erkennen, daß die koppelnden Komponenten auch mit einer großen Bileistung koppeln, daß also der kohärente Anteil der Signalamplituden bei den koppelnden Komponenten sehr groß ist. Der Graustufenplot der Biphase (Abb. 14) schließlich zeigt keine erkennbare Struktur. Dies ist auch so zu erwarten, da eine fehlende Kopplung sich in einer willkürlichen Phase niederschlägt. Eine genaue Betrachtung zeigt allerdings, daß die Phase in den zwei koppelnden Punkten genau mit der Vorhersage von $\varphi_B \simeq 0$ übereinstimmt.

An diesem einfachen Beispiel ist also die Funktionalität des eingeschlagenen Weges gut zu sehen. Bei komplexeren Fällen sind sicher noch einige Einschränkungen zu treffen, auf die aber erst an entsprechender Stelle eingegangen wird.

Ein Testsignal zur Bispektrumsberechnung kann man auch erzeugen, indem man zu dem Signalwert das Quadrat des Signales addiert. Dieses einfache Modell einer quadratischen Kopplung wird von der Bispektralanalyse sehr gut nachgewiesen. Nach demselben Schema lassen sich auch eine Vielzahl anderer nichtlinearer Kopplungsmechanismen simulieren. Wendet man auf diese dann die Methode der Bispektralanalyse an, so gelangt man zu einer erstaunlichen Erkenntnis: alle geraden Signalpotenzen können nachgewiesen werden, alle

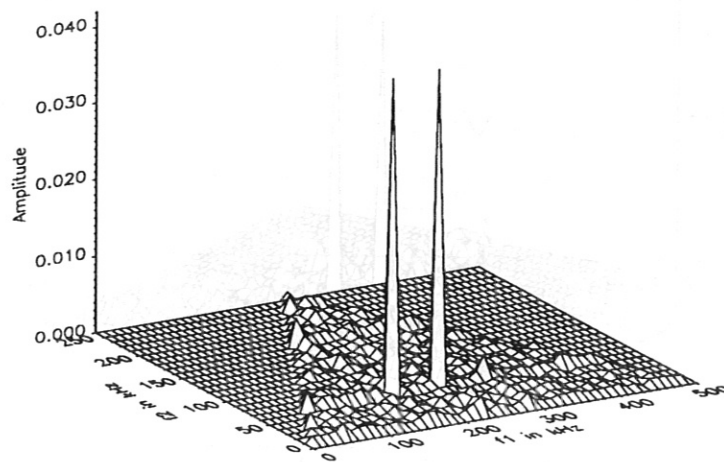


Abbildung 13: DAS BISPEKTRUM DES TESTSIGNALS. Die hohe Amplitude des Bispektrums zeigt, daß die koppelnden Moden einen Großteil der Signalleistung tragen. Auch an den schwach angedeuteten Straßen läßt sich ablesen, daß ein Großteil der Signalleistung auf die jeweilige Kopplung zurückzuführen ist.

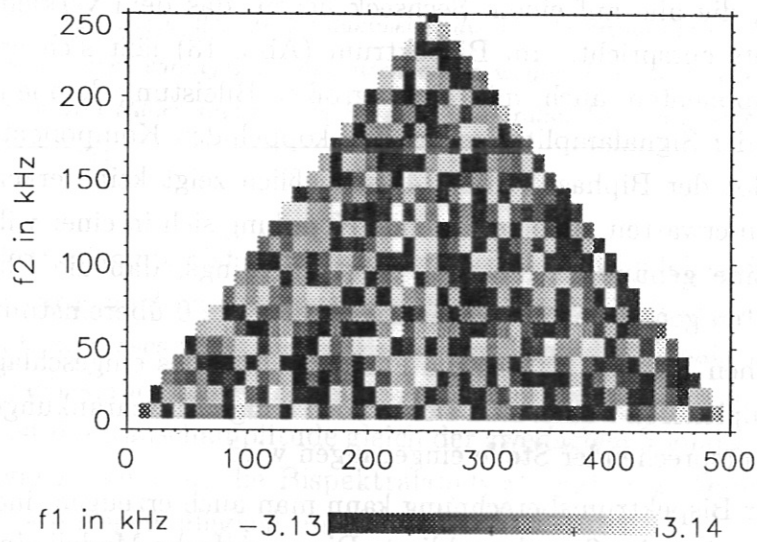


Abbildung 14: DIE BIPHASE DES TESTSIGNALS. Das Phasenbild erinnert an ein salt-and-pepper Rauschen. In den zwei koppelnden Punkten stimmt die Biphasen jedoch genau mit den Vorhersagen überein.

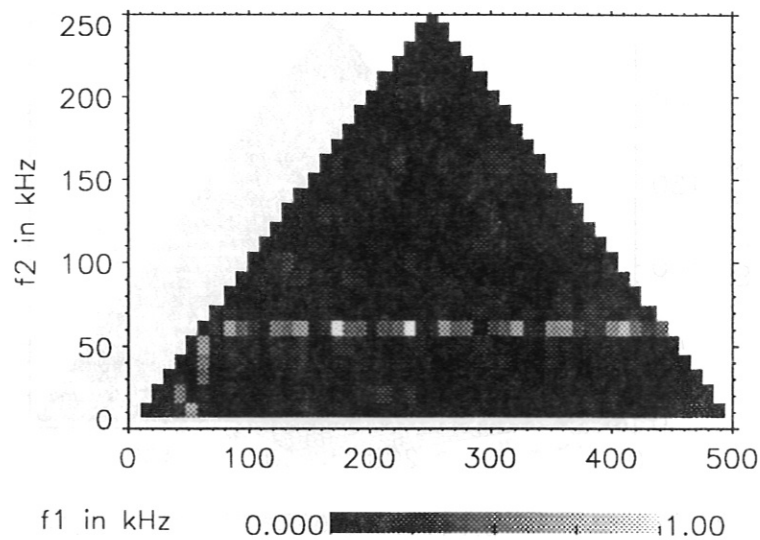


Abbildung 15: DIE „STRASSEN“ IN DER BIKOHÄRENZ. Die Bikohärenz eines leicht veränderten Testsignals zeigt ein Artefakt, das bei Testsignalen leicht auftritt, die sogenannten Straßen. Sie sind auf eine Überbewertung der Nebenmaxima auf Grund eines zu geringen Rauschlevels des Signals zurückzuführen. Hier sieht man an derselben Testfunktion wie im vorangegangenen Abschnitt, daß eine Verringerung des additiven Rauschen um einen Faktor 10 bereits zu Überschwingern der Nebenmaxima führt.

ungeraden Potenzen erzeugen ein Ergebnis, das sehr stark an ein Rauschsignal erinnert. Erzeugt man zwei Testsignale gleicher Amplitude und Kopplungsstärke, wobei dem einem eine Drei-Wellen-Kopplung und dem anderen eine Fünf-Wellen-Kopplung zugrunde liegt, so werden beide Nichtlinearitäten nachgewiesen. Die Kopplung des Wellentriplets leistet jedoch einen weitaus größeren Beitrag zum Bispektrum und zur Bikohärenz.

4.5 Artefakte bei der Bispektrumsberechnung

Bei der Berechnung von Testsignalen treten zwei Artefakte besonders deutlich zu Tage. Wir nennen sie die *Straßen* und die *Mauer*. Die Straßen sind parallele Strukturen, die besonders bei hohen Frequenzen auftauchen. Sie sind wie folgt zu erklären: Ein Nutzsignal ohne einen Rauschanteil wird, wie alle Testsignale, bei der Fouriertransformation mit der Fouriertransformierten des in den Rechnungen verwendeten Rechteckfensters gefaltet. Diese Faltung bewirkt, daß im Frequenzraum jedes echte Maximum von einer Reihe von Nebenmaxima umgeben wird. Diese künstlich erzeugten Nebenmaxima erben von ihren Hauptmaxima auch die feste Phasenbeziehung untereinander. Dank dieser Phasenbeziehung werden sie dann in der Bispektralanalyse als bikohärente Wellen detektiert, obwohl sie im Ausgangssignal nicht vorhanden waren (Abb. 15). Da diese Phasenkohärenz der unvermeidlichen aber leistungsschwachen Nebenmaxima von einem überlagerten Rauschsignal überdeckt werden kann, kann das Artefakt der Straßen durch die Addition von

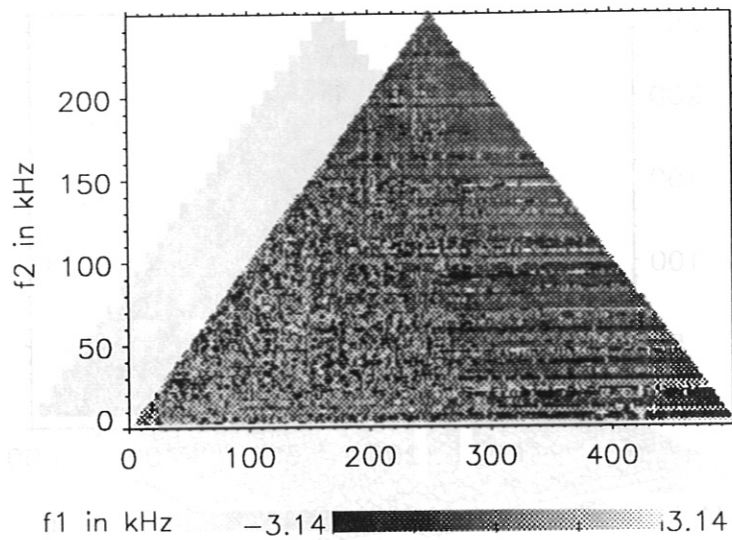


Abbildung 16: DIE „STRASSEN“ IN DER BIPHASE EINES SONDENSIGNALS. In echten Plasmasignalen auftretende Straßen deuten auf eine verschwindende Plasmaleistung bei den entsprechenden Frequenzen hin, so daß die Kohärenz der Nebenmaxima gemessen wird. Deutlich sind in diesem Phasen-Plot der Sondensignale der ASDEX-Entladung 33409 die Straßen bei Frequenzen oberhalb von 300 kHz sichtbar.

weißem Rauschen auf das Testsignal umgangen werden. Treten die Straßen in echten Plasmasignalen auf, so weisen sie meist auf eine verschwindende Leistung bei den betroffenen Frequenzen hin, die den Effekt der Kohärenz der Nebenmaxima untereinander erlauben. Eine echte Kopplung wird selten durch ein diesem Artefakt ähnlichem Signal angedeutet (Abb. 16).

Das zweite Artefakt, die Mauer, kann bei Testsignalen ebenfalls durch ein zusätzliches additives Rauschen unterdrückt werden. Die Mauer tritt meist dann auf, wenn in den betrachteten Zeitfenstern jeweils ein herausragendes Einzelereignis auftritt. Ein einziges Signal pro Zeitfenster wird durch ein lineares Phasenspektrum sehr gut beschrieben. Wenn man diesem dann etwas Rauschen überlagert, bleibt zwischen eng benachbarten Frequenzen die lineare Beziehung noch gut erhalten, auch wenn sie über größere Frequenzabstände hin allmählich verschwindet. Diese annähernd lineare Beziehung führt zu einer Kohärenz mit den niedrigsten Frequenzkomponenten, deren Absolutphase diese Linearität noch sehr gut widerspiegelt. Daraus erklärt sich eine große Kohärenz aller Frequenzen mit den kleinsten vorhandenen Frequenzen. Umgekehrt kann man das Auftreten einer Mauer als Indikator für Einzelereignisse im Plasmasignal benutzen. Ein besonders auffälliges Signal dieser Art liefern die sogenannten *ELMs*, die *edge localized modes*, eine Instabilität der Plasmarandschicht, die sich in einzelnen Ereignissen hoher Amplitude manifestiert. Die ELMs werden bevorzugt im H_α -Licht in der Divertorkammer gemessen, sie sind aber auch in unserer H_α -Diagnostik im Hauptraum etwas schwächer erkennbar. Wählt man nun das Zeitfenster geringfügig größer als den zeitlichen Abstand zwischen den ELMs,

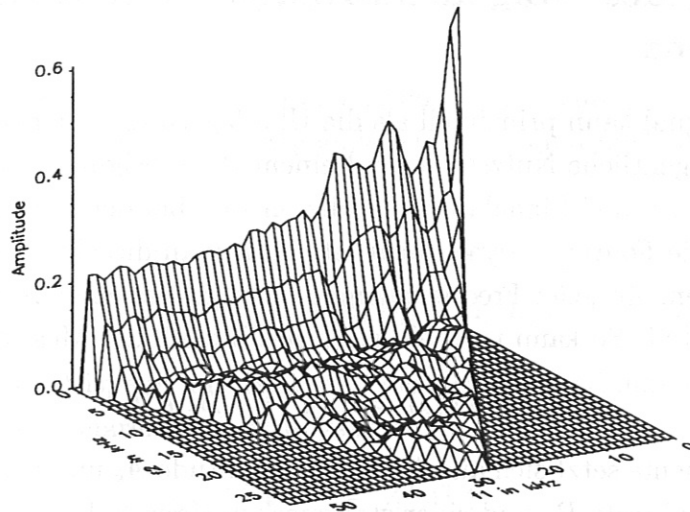


Abbildung 17: ELMS ALS EIN BEISPIEL FÜR DIE „MAUER“. *Echte Einzelereignisse wie die ELMS, hier aus Daten aus der H_{α} -Strahlung in der Divertorkammer aus Schuß 32727 gewonnen, sind in der Bikohärenz deutlich an der von ihnen hervorgerufenen Kopplungsmauer bei kleinen Frequenzkomponenten zu erkennen. Damit der Rest des Bildes nicht von der Mauer verdeckt wird, ist hier das irreduzible Dreieck um 180° gedreht wiedergegeben.*

der bei etwa 1 msec liegt, so sieht man in der Bikohärenz deutlich die erwartete Mauer (Abb. 17). Auch in der Biphasen wird die Kopplung durch eine konstante Phasendifferenz von ungefähr Null bestätigt. Dieser Wert der Biphasen weist auf eine symmetrische Form der Instabilität hin, worauf in Abschnitt (5.5) noch genauer eingegangen wird.

Die wesentliche Voraussetzung für das Auftreten der Mauer war, daß etwa ein Einzelereignis pro untersuchtem Zeitfenster auftritt. Verlängert man nun das Zeitfenster oder verringert man analog die zeitliche Auflösung der Messung, so daß viele dieser Ereignisse in einem Fenster liegen, so verschwindet die Mauer wieder. Die Bispektralanalyse detektiert dann die Kopplung der Ereignisse untereinander und nicht mehr die Kopplung der Fourierkomponenten innerhalb eines herausragenden Signals. Vergrößert man hingegen die zeitliche Auflösung, so daß nur noch Bruchteile eines Einzelereignisses in einem Zeitfenster liegen, so verläßt man das Gebiet der stationären Analyse. Das untersuchte Signal wird in jedem Fenster eine starke Steigung aufweisen, die allerdings durch die Signalvorbehandlung (Abschnitt 4.2) weitgehend eliminiert werden wird. Die Mauer wird also auch in diesem Fall zurücktreten und die Bispektralanalyse wird versuchen eine Signalkopplung innerhalb der Flanken der Einzelereignisse zu detektieren.

Obwohl beide Artefakte an Testsignalen entdeckt wurden und dort auch besonders leicht zu deuten sind, treten sie doch auch unter gewissen Umständen in den echten Plasmadaten auf. Dort kann jedoch, wie gezeigt wurde, die Deutung direkt übernommen werden. Weitere Artefakte konnten trotz intensiven Studiums nicht gefunden werden.

4.6 Einfluß des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses auf die Bikohärenz

Jedes gemessene Signal kann prinzipiell als die Überlagerung zweier Signalanteile angesehen werden: dem eigentlichen Nutzsinal und einem Rauschsignal, dessen Herkunft völlig unbestimmt ist. Diese zwei Signalanteile addieren sich bei der Messung zu dem jeweiligen Meßwert. Da die Fourieranalyse linear ist, kann man dieselbe Unterteilung auch im Frequenzraum treffen. Zu jeder Frequenzkomponente gibt es einen Signalanteil und einen additiven Rauschanteil. So kann man ein einfaches Modell der Messung konstruieren:

$$X_k = X(f_k) = A_k e^{i\Theta_k} + B_k e^{i\varrho_k} \quad (68)$$

Jede Fourierkomponente setzt sich aus der Signalamplitude A_k und der Signalphase Θ_k sowie einer Rauschamplitude B_k und einer statistischen Rauschphase ϱ_k zusammen. Sowohl die Signal- als auch die Rauschamplitude sollen in diesem einfachen Modell unabhängig von den Realisationen sein. Die Rauschphase wie auch die Anfangsphase des Signals unterliegen einem Zufallsprozeß, so daß die Mittelung im betrachteten Grenzfall unendlich vieler Realisationen zu einem Wert von Null führt. In diesem Modell wollen wir nun den Erwartungswert des Bispektrums, und daraus den Erwartungswert der Bikohärenz berechnen. Eine einfache Rechnung ergibt für das Bispektrum

$$\langle X_k X_l X_m^* \rangle = A_k A_l A_m \langle e^{i(\Theta_k + \Theta_l - \Theta_m)} \rangle \quad (69)$$

Die Signalphase Θ_k ist, ebenso wie Θ_l und Θ_m , von den gewählten Realisationen abhängig und deswegen auch statistisch verteilt. Verschiebt man den Anfangszeitpunkt eines Fensters um τ , so mißt man eine veränderte Signalphase $\tilde{\Theta}_k = \Theta_k + 2\pi f_k \tau$. Wenn die drei betrachteten Wellen miteinander koppeln und damit die Summenbeziehung $f_k + f_l = f_m$ erfüllen, heben sich diese Verschiebungen gegenseitig auf, so daß die Differenzphase Θ_0 der Wellen eine von der gewählten Realisation unabhängige Konstante ist:

$$\tilde{\Theta}_k + \tilde{\Theta}_l - \tilde{\Theta}_m = \Theta_k + \Theta_l - \Theta_m = \Theta_0 \quad (70)$$

Damit folgt für die Mittelwertbildung

$$\langle X_k X_l X_m^* \rangle = A_k A_l A_m e^{i\Theta_0} \quad (71)$$

Die Konstante Θ_0 hängt in diesem Falle nur noch von der zugrundeliegenden Physik und nicht mehr von dem gewählten Meßverfahren ab. Der komplexe Wert des Bispektrums koppelnder Wellen hängt explizit von der Phasenlage der Signale zueinander ab, da sich für die Signalphasen keine feste Beziehung ableiten läßt. In dem Grenzfall unendlicher Mittelung ist das Bispektrum von der Rauschamplitude völlig unabhängig.

Sind die betrachteten Wellen unabhängig, so gilt dies insbesondere auch für ihre Phasenlagen, so daß der Mittelwert der Exponentialfunktion auf der rechten Seite der Gleichung (69) gleich Null ist und damit auch das Bispektrum an dieser Stelle den Wert

Null annimmt. In diesem Falle nicht-koppelnder Wellen ist die Bikohärenz trivialerweise ebenfalls gleich Null.

Um eine Abschätzung für die Bikohärenz zu erhalten, berechnen wir als nächstes den Erwartungswert der Normierung. Das Ergebnis hängt diesmal auch von der Rauschamplitude ab:

$$\langle |X_k X_l X_m^*|^2 \rangle = A_k^2 A_l^2 A_m^2 + A_k^2 A_l^2 B_m^2 + A_k^2 A_m^2 B_l^2 + A_l^2 A_m^2 B_k^2 + A_k^2 B_l^2 B_m^2 + A_l^2 B_k^2 B_m^2 + A_m^2 B_k^2 B_l^2 + B_k^2 B_l^2 B_m^2 \quad (72)$$

Das Betragsquadrat des Bisppektrums ist reell, von der Phasendifferenz unabhängig und gleich dem Produkt der kohärenten Leistungsanteile:

$$|\langle X_k X_l X_m^* \rangle|^2 = A_k^2 A_l^2 A_m^2 \quad (73)$$

Um ein Gefühl für das Verhalten der Bikohärenz zu bekommen, kann man sie durch den Quotienten der beiden obigen Gleichungen annähern:

$$b^2(k, l) \simeq \left[1 + \frac{B_k^2}{A_k^2} + \frac{B_l^2}{A_l^2} + \frac{B_m^2}{A_m^2} + \frac{B_k^2 B_l^2}{A_k^2 A_l^2} + \frac{B_k^2 B_m^2}{A_k^2 A_m^2} + \frac{B_l^2 B_m^2}{A_l^2 A_m^2} + \frac{B_k^2 B_l^2 B_m^2}{A_k^2 A_l^2 A_m^2} \right]^{-1} \quad (74)$$

Dieser Gleichung sieht man sofort an, daß die Bikohärenz nach oben durch Eins begrenzt ist, und mit steigendem Rauschanteil stetig abnimmt und gegen Null geht. Als Beispiel gehen wir von einem weißen Rauschen mit $B_k = B_l = B_m = B$ aus. Die Signalamplituden verhalten sich wie $A_k = A_l = B$, $A_m = 0.2 * B$. Mit obiger Abschätzung erhält man eine Bikohärenz von $b(k, l) \simeq \sqrt{1/104} \simeq 10\%$. Dieser geringe Wert wird hauptsächlich von der dritten Komponente bestimmt, deren Signalamplitude kleiner als die Rauschamplitude ist. Eine nennenswerte Bikohärenz kann nach dieser Abschätzung also nur in solchen Gebieten erwartet werden, in denen die Fourieramplituden aller beteiligten Frequenzen von der Größenordnung der vermuteten Rauschamplituden sind.

Für eine mehr qualitative Aussage nehmen wir an, daß das Signal-zu-Rausch-Verhältnis aller drei koppelnder Wellen gleich dem der schwächsten Welle ist.

$$A^2/B^2 \equiv 1/\gamma \quad (75)$$

Im Abschnitt 3.5 wurde gezeigt, daß das gemittelte Rauschniveau der Bikohärenz etwa bei $1/\sqrt{M}$ liegt. Eine eindeutig identifizierbare Bikohärenz muß um einen Faktor α über diesem Niveau liegen. Damit ergibt sich aus Gleichung (74) folgende Bestimmungsgleichung für die Untergrenze der nachweisbaren Kopplung:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{M}} \leq \sqrt{\frac{1}{1 + 3\gamma + 3\gamma^2 + \gamma^3}} \quad (76)$$

Diese Gleichung hat genau eine reelle Lösung in γ . Zusammen mit Gleichung (75) ergibt sich als Untergrenze für das Signal-zu-Rausch-Verhältnis folgende Beziehung:

$$A/B \geq \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{M}{\alpha^2}} - 1}} \quad (77)$$

Realistische Werte für die Anzahl der Realisationen ($M = 1000$) und den Faktor α ($\alpha = 3$) ergeben ein im Frequenzraum gerade noch auflösbares Signal-zu-Rausch-Verhältnis von

$$A/B \geq 0.5 \quad (78)$$

Da dieses Ergebnis nur noch sehr schwach mit der Anzahl der Realisationen variiert, verbessert eine Erhöhung der Mittelungszahl im Wesentlichen die Genauigkeit der Darstellung und nicht die Grenzen der Auflösung. Realistisch gesehen können noch Fälle betrachtet werden, in denen Signal- und Rauschanteil in etwa gleich groß sind. Diese Einschränkung ist für breitbandige Signale erträglich, nicht jedoch für linienförmige Signale. Einzelne Signalpeaks können durch eine Erhöhung der Stützstellenzahl, soweit möglich, wesentlich effektiver detektiert werden. Diese dann deutlich vorhandenen Signale sollten besser mit anderen Methoden auf eine Kopplung hin untersucht werden, da der Rechenaufwand für ein Bispektrum über ein Signalfenster von beispielsweise 10000 Punkte nicht mehr vertreten werden kann. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Abschätzungen dieses Abschnitts im Frequenzraum erfolgten. Auch wenn bei einer festen Frequenzkomponente ein Signal zu Rausch - Verhältnis von etwa 1:1 gefordert wird, so kann insgesamt die Amplitude eines breitbandigen Rauschsignals im Zeitraum die Signalamplitude um ein Vielfaches übersteigen.

4.7 Mehrere koppelnde Moden

Auch wenn, wie sich bis jetzt herausgestellt hat, Linienspektren für die Bispektralanalyse mehr oder weniger uninteressant sind, kann man doch aus ihrem Studium wesentliche Erkenntnisse gewinnen. Zum Beispiel können mehrere koppelnde Wellenpaare dieselbe Summen- oder Differenzfrequenz haben, oder eine Mode an mehreren Kopplungen beteiligt sein. Dieses Szenario kann den zu erwartenden Maximalwert der Bikohärenz ganz entscheidend beeinflussen.

Ausgehend von einem sehr einfachen Modell, das wie in Abschnitt 3.4 die Rauschanteile der Signale nicht berücksichtigt, gelangt man zu dem Ergebnis, daß die Bikohärenz Werte zwischen $1/\sqrt{Z}$ und 1 annehmen kann. Z ist die Anzahl der Wellenpaare, die zu derselben Summenfrequenz koppeln. Den Wert 1 nimmt die Bikohärenz an, wenn alle koppelnden Wellenpaare in jeder Realisation eine konstante Phasenlage relativ zueinander einnehmen. Dieses Verhalten findet sich auch in Plasmaereignissen wieder, die in allen Realisationen dieselbe Gestalt annehmen. Den minimalen Wert ergibt die Bikohärenz für den Fall, daß

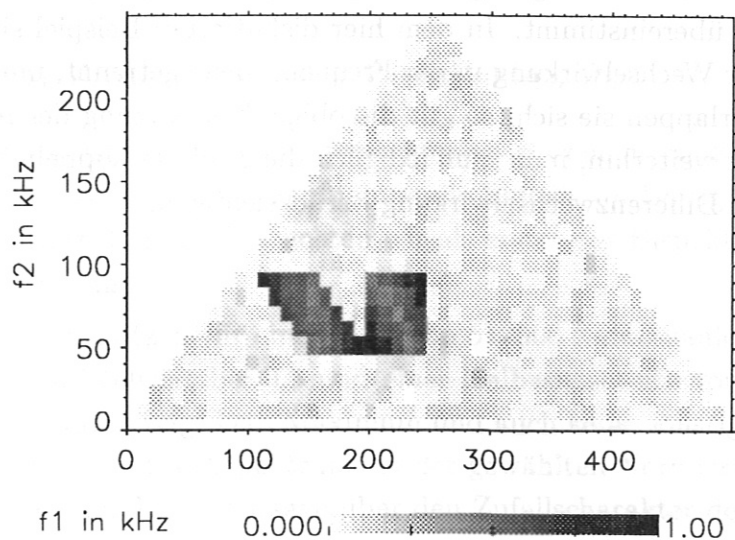


Abbildung 18: DIE BIKOHÄRENZ MEHRERER KOPPELNDER MODEN. Das Testsignal enthält fünf Wellen mit Frequenzen von 200, 210, 220, 230 und 240 kHz die mit fünf weiteren Wellen bei den Frequenzen von 50, 60, 70, 80 und 90 kHz in beliebiger Mischung wechselwirken. Die Summenfrequenzen liegen demzufolge zwischen 250 und 330 kHz, die Differenzfrequenzen zwischen 110 und 190 kHz. Die Phasen der koppelnden Moden werden in jeder Realisation zufällig bestimmt. Das Viereck rechts im Bild entspricht der Summenwechselwirkung, die links anstoßende Raute der Differenzkopplung. Die Ecken in denen nur jeweils ein koppelndes Wellenpaar existiert, haben Werte sehr nahe bei Eins. Zur Mitte hin nimmt die Zahl der Kopplungen zu und dementsprechend die Bikoherenz mit der Wurzel der koppelnden Paare ab.

die Phasen aller koppelnden Wellen statistisch unabhängig voneinander sind. Während die Bikoherenz nur eine Aussage über die Phasenlage der beteiligten Wellen macht, kann man dem Bisppektrum natürlich auch noch Informationen über die Leistungen bei der jeweiligen Summenfrequenz entnehmen. Ein sehr schönes, künstlich erzeugtes Beispiel ist in Abbildung 18 zu sehen. Fünf Wellen mit Frequenzen von 200, 210, 220, 230 und 240 kHz können mit fünf weiteren Wellen bei den Frequenzen von 50, 60, 70, 80 und 90 kHz in beliebiger Mischung wechselwirken. Die Summenfrequenzen liegen demzufolge zwischen 250 und 330 kHz, die Differenzfrequenzen zwischen 110 und 190 kHz. In diesem Beispiel sind also die vier verschiedenen beteiligten Frequenzgebiete der beiden Ausgangswellen, der Summen- und Differenzwellen deutlich getrennt, was die Zuordnung der einzelnen Effekte wesentlich erleichtert. Die Phasen der koppelnden Moden werden in jeder Realisation durch einen Zufallsprozeß neu festgelegt. Man erkennt ganz deutlich die beiden Gebiete der Summen- und der Differenzwechselwirkung. In jedem dieser Gebiete nimmt die Bikoherenz an den Ecken, die nur noch der Kopplung eines Wellenpaares entsprechen, den Wert Eins an, um zur Mitte hin, mit steigender Zahl der koppelnden Moden abzufallen. Eine genauere Untersuchung der Zahlenwerte zeigt, daß der Abfall gut mit dem

für unabhängige Wellen vorhergesagten Abfall umgekehrt proportional zur Wurzel der koppelnden Paare übereinstimmt. In dem hier diskutierten Beispiel sind Summen- und Differenzgebiet der Wechselwirkung in der Frequenzebene getrennt, um die Diskussion zu vereinfachen. Überlappen sie sich, so gilt die obige Abschätzung der maximal zu erwartenden Bikoherenz weiterhin, man muß lediglich die Zahl der koppelnden Moden aus der Summen- und der Differenzwechselwirkung berücksichtigen.



5 Erste Bispektralanalyse von Plasmadaten

5.1 Bispektralanalyse eines Zufallssignals

Bevor wir uns der Auswertung von Plasmasignalen zuwenden, muß noch überprüft werden, in welchem Ausmaß die Datenaufnahme die Signale im Bezug auf eine nichtlineare Kopplung hin verfälscht. Dazu betrachten wir als erstes das Bispektrum eines numerisch erzeugten Rauschsignals.

Als Ausgangsdaten benutzen wir einen Satz von 512000 Zufallszahlen, die eine Gaußverteilung mit einem Mittelwert bei 0.0 und einer Halbwertsbreite von 1.0 annähern. Das Bispektrum dieser Daten zeigt kein Maximum und auch keine sonstigen auffälligen Merkmale. Da die Amplitude des Bispektrums in der gewählten Normierung eine willkürliche Größe ist, kann sie auch keine Aussage über den Zufallscharakter der zugrundeliegenden Daten machen.

Die Bikohärenz (Abb. 19) weist deutlich die erwarteten Eigenschaften einer Zufallsverteilung auf: Sie hat kein ausgeprägtes Maximum und ihr Mittelwert von 1.8% stimmt gut mit der Abschätzung $\bar{b} \simeq 1/\sqrt{M} = 1.4\%$ bei 5016 Mittelungen überein. Das Maximum von 4.96% bestätigt die Erwartung aus Abschnitt 3.5, daß erst Werte, die etwa um einen Faktor 3 über dem statistischen Hintergrund liegen, eine signifikante Aussage treffen.

In der Biphase ist ebenfalls außer Rauschen keine Struktur mit dem bloßen Auge zu erkennen. Es sind alle Werte zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gleichmäßig vertreten, der Mittelwert liegt mit 5.9×10^{-3} sehr nahe bei Null.

Verringert man die Anzahl der Realisationen auf 150, so ändert sich nichts Wesentliches an dem oben gewonnenen Bild einer Zufallsverteilung. Lediglich der Mittelwert der Bikohärenz steigt entsprechend der geringeren Zahl der Mittelungen auf einen Wert von 7% an. Die Form der Bikohärenz bleibt aber davon unberührt. Ein numerisch erzeugtes Zufallssignal zeigt also genau die Eigenschaften, die wir für ein Rauschsignal in den vorangegangenen Abschnitten diskutiert haben.

5.2 Untersuchung der nichtlinearen Signalverfälschung durch die Meßelektronik

Der eigentliche Hintergrund der auszuwertenden Daten kann jedoch wesentlich von der Charakteristik der verwendeten Verstärker, A/D-Wandler und Leitungen abhängen, da diese auch über nichtlineare Baugruppen verfügen können. Um die unvermeidlichen Nebeneffekte dieser Teile zu bestimmen, wurde statt des Plasmas ein Leuchtdiodenarray auf die Optik der H_α -Diagnostik abgebildet. Die Dioden emittierten im Idealfall inkohärente Wellenzüge, so daß das detektierte Signal in der Hauptsache die Nichtlinearitäten der übertragenden und verstärkenden Elemente der Diagnostik widerspiegelt. Bei

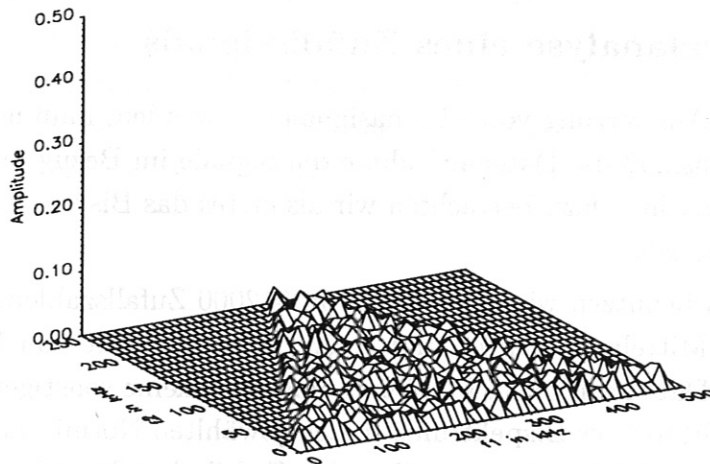


Abbildung 19: DIE BIKOHÄRENZ NUMERISCH GENERIERTER ZUFALLSZAHLEN. Die Zufallszahlen, aus denen das dargestellte Testsignal gewonnen wurde, sind gaußverteilt mit einem Mittelwert von Null und einer Halbwertsbreite von Eins. Die Bikohärenz spiegelt den Zufallscharakter der zugrundeliegenden Werte durch die Gleichbesetzung aller zulässigen Frequenzkoordinaten wieder. Der Mittelwert von 1.8% entspricht der Abschätzung über die Anzahl der Mittelungen.

einer Auswertung über die programmtechnisch maximal mögliche Anzahl von 5016 Mittelungen zeigt sich, daß sowohl Bispektrum, als auch Bikohärenz (Abb. 20 links) und Biphasen (Abb. 20 rechts) nahezu dem Verhalten eines idealen Rauschsignals entsprechen. Der Mittelwert der Bikohärenz von 1.8% stimmt gut mit dem aus 5016 Mittelungen abgeschätzten Hintergrundniveau von 1.4% überein. Das Bispektrum zeigt keinerlei erkennbare Struktur. Der Mittelwert der Biphasen liegt mit -0.02 sehr nahe bei Null, was bei einer Mittelung über unabhängige Größen auch zu erwarten ist.

Für die Auswertung des k -Bispektrums ergibt sich dasselbe Bild. Exemplarisch sei hier nur die k -Bikohärenz gezeigt (Abb. 21). Man erkennt, daß auch hier das Signal über alle Komponenten gleichmäßig verteilt ist. Wegen der wesentlich geringeren räumlichen Auflösung scheint jedoch der Informationsgehalt gegenüber der Frequenzanalyse sehr klein zu sein. Im Rahmen dieser Einschränkung zeigt das k -Bispektrum ebenfalls nur eine zufällige Variation.

Zusammenfassend kann man also feststellen, daß die verwendeten Bauteile für die Datenerfassung, -weiterleitung und -weiterverarbeitung in sehr guter Näherung ohne nicht-lineare Signalverzerrungen arbeiten. Sämtliche noch nachzuweisende Effekte stammen demzufolge von den Plasmadaten selbst und stellen keine Artefakte dar.

Da für die Sondenmessungen dieselben Verstärker und Wandler wie für die H_α -Messungen verwendet werden, erübrigt sich ein Test dieser Bauteile.

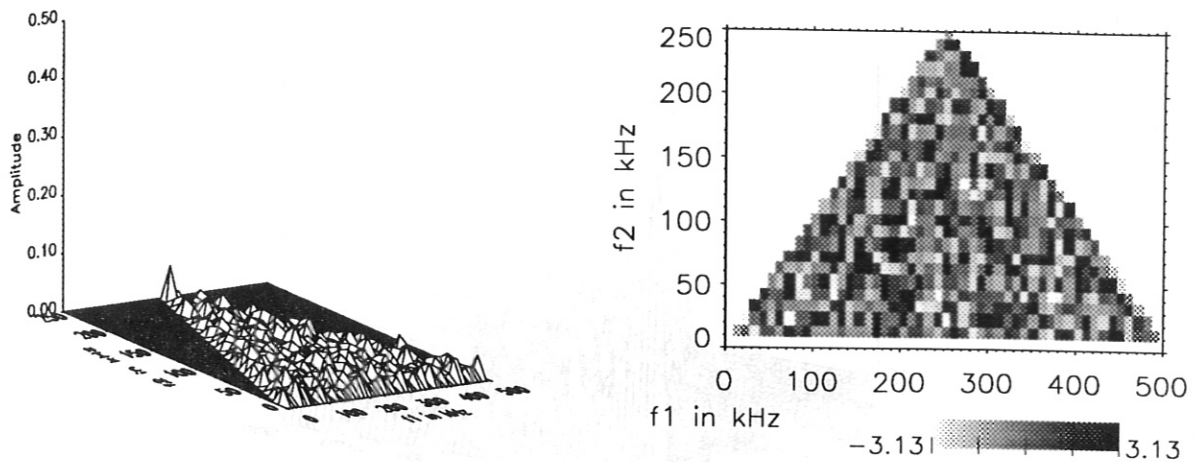


Abbildung 20: BIKOHÄRENZ UND BIPHASE EINER RAUSCHMESSUNG. Das Signal wurde durch die Abbildung eines Leuchtdiodenarrays auf die H_{α} -Diagnostik gewonnen. Die Bikohärenz in der linken Bildhälfte entspricht in ihren charakteristischen Eigenschaften der Bikohärenz, die im vorangegangenen Abschnitt aus reinen Zufallszahlen gewonnen wurde (Abb. 19). Der Auswertung liegt eine Mittelung über 5016 Realisationen zugrunde, was zur Abschätzung eines Hintergrundniveaus von 1.4% führt. Der Mittelwert der errechneten Bikohärenz von 1.8% stimmt mit dieser Erwartung überein, das Maximum von 6% überschreitet in der Dreiecksspitze die Nachweisgrenze von etwa 5%, alle anderen Werte bleiben jedoch darunter. Auch die Biphasen des Testsignals (rechte Bildhälfte) zeigt im wesentlichen die erwarteten Zufallscharakteristika. Der Mittelwert der Biphasen über die gesamte Frequenzebene liegt mit -0.02 sehr nahe bei Null, was die Annahme einer Mittelung über unabhängige Größen bestätigt.

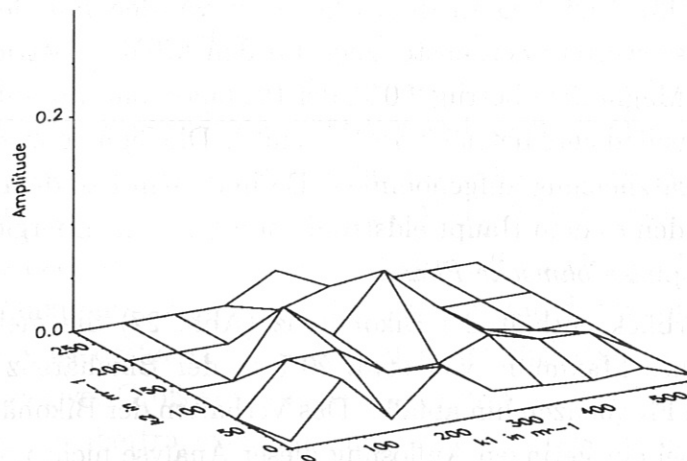


Abbildung 21: DIE k -BIKOHÄRENZ EINER RAUSCHMESSUNG. Trotz der gegenüber dem Frequenzbisppektrum drastisch verringerten Stützstellenanzahl ist das Zufallsverhalten auch in der k -Bikohärenz noch deutlich zu erkennen. Die 640 Realisationen, die der Auswertung zugrundeliegen, lassen auf ein Hintergrundniveau von 4% schließen, der Mittelwert der k -Bikohärenz liegt mit 3.3% sogar noch darunter.

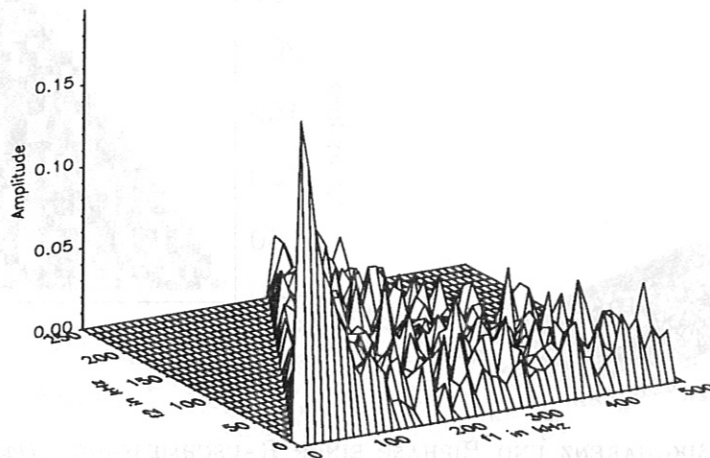


Abbildung 22: DIE BIKOHÄRENZ DER ASDEX-ENTLADUNG 30437. Die Bikohärenz der Fluktuationen des Plasmalichts wurde mit der H_{α} -Diagnostik aufgenommen. Das Maximum bei den kleinen Frequenzkomponenten weist auf einen starken Kopplungsmechanismus hin. Die Daten stammen aus der ohmschen Phase der ASDEX-Entladung 30437, die Plasmaparameter entsprechen den üblichen Betriebsbedingungen des Experiments.

5.3 f-Bispektralanalyse eines echten Plasmasignals

Da die offensichtlichen Fehlerquellen ausgeschlossen sind, können wir uns an die Analyse echter Daten wagen. Für eine exemplarische Auswertung benutzen wir die Daten der ASDEX-Entladung 30437. Die Daten dieses Schusses wurden mit der H_{α} -Diagnostik aufgenommen. Das ausgewertete Zeitfenster zeigt für den ASDEX-Betrieb normale Parameter. Das toroidale Magnetfeld betrug 2.0 T, der Plasmastrom war auf 420 kA geregelt, die liniengemittelte Plasmadichte betrug $3.5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Die Signale wurden in einer Entladungsphase ohne Zusatzheizung aufgenommen. Da in diesem Fall dem Plasma lediglich über den Widerstand, den es dem Hauptfeldstrom entgegengesetzt, Energie zugeführt wird, heißt diese Entladungsphase *ohmsche Phase*.

Für einen ersten Überblick enthält die Bikohärenz (Abb. 22) die meiste Information. Man sieht ein deutliches Maximum von etwa 20% in der Bikohärenz bei 10 kHz, das relativ steil zu höheren Frequenzen hin abfällt. Das Verhalten der Bikohärenz zu kleineren Frequenzen hin kann bei der geringen Auflösung dieser Analyse nicht untersucht werden. Eine Auswertung mit einer um einen Faktor 8 höheren Auflösung ist in Abschnitt 7.1.4 zu sehen. Die Breite des Maximums schätzt man anhand dieses Bildes auf knapp 80 kHz ab, die Halbwertsbreite der Bikohärenz liegt bei etwa 40 kHz. Betrachtet man den Plot um 180° gedreht (Abb. 23), so sieht man den steilen Abfall nach allen Seiten, und damit die deutliche Lokalisierung des Maximums, noch wesentlich klarer. Im Gegensatz zu den

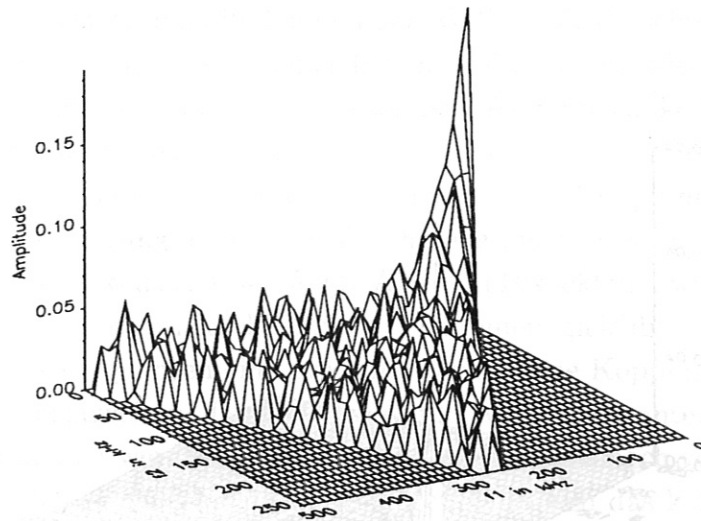


Abbildung 23: DIE BIKOHÄRENZ DER ASDEX-ENTLADUNG 30437, UM 180° GEDREHT. Die Bikoherenz des ASDEX-Schusses 30437 wurde in diesem Bild gegenüber dem vorangegangenen Plot in Abbildung 22 um 180° gedreht. Man sieht in dieser Darstellung den gleichmäßigen Abfall des Bikoherenzmaximums nach allen Seiten besonders deutlich.

bis jetzt diskutierten Rauschdaten, weisen die Plasmadaten deutlich auf eine nichtlineare Wellenkopplung hin. Die Lage des Maximums bei der relativ geringen Frequenz von 10 kHz erinnert sehr an die Ergebnisse der linearen Analyse. Aus ihr geht hervor, daß fast die gesamte Fluktuationsleistung bei Frequenzen unterhalb 100 kHz lokalisiert ist und meist zwischen 5 und 10 kHz ein Maximum annimmt. Auch der streng monotone Abfall ist bereits aus der linearen Analyse her vertraut. Fast die ganze Frequenzebene wird in Abbildung 23 vom Hintergrund dominiert. Der Mittelwert dieses Hintergrundrauschens von knapp 2% stimmt wieder gut mit dem statistischen Rauschen überein, das bei einer Mittelung über die hier verwendeten 4000 Realisationen zu erwarten wäre. Somit ist eine Auswertung einfach: wo ein Peak sich deutlich über den Hintergrund der restlichen Frequenzebene erstreckt, liegt eine nichtlineare Wechselwirkungszone des Plasmas.

Betrachtet man als nächstes das Bispektrum (Abb. 24) zu diesem Zeitfenster, so erkennt man, daß sich das Maximum und der Abfall des Maximums der Bikoherenz in dem Verhalten des Bispektrums wiederfindet. Innerhalb der identifizierten Kopplungszone fällt das Bispektrum um fast zwei Größenordnungen ab. Somit ist das Maximum der Kopplung und das Maximum der übertragenen Leistung identisch. Das in der restlichen Frequenzebene verschwindende Bispektrum entspricht dem Rauschhintergrund in der Bikoherenz.

Wenden wir uns nun der Biphase zu. Besonders auffällig an Abbildung 25 ist, daß das Gebiet, in dem die Kopplung durch eine hohe Bikoherenz nachgewiesen wurde, durch seine einheitliche Einfärbung hervorsteht, und daß es sich deutlich über die Grenze von 80 kHz, die aus der Bikoherenz abgeleitet wurde, hinaus erstreckt. Die gleichmäßige Einfärbung

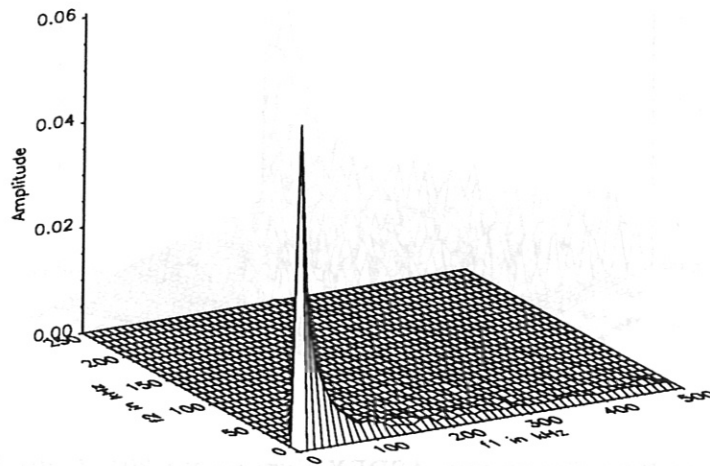


Abbildung 24: DAS BISPEKTRUM DER ASDEX-ENTLADUNG 30437. Das Maximum und die Abfalllänge stimmen mit den Ergebnissen der Bikohärenz überein.

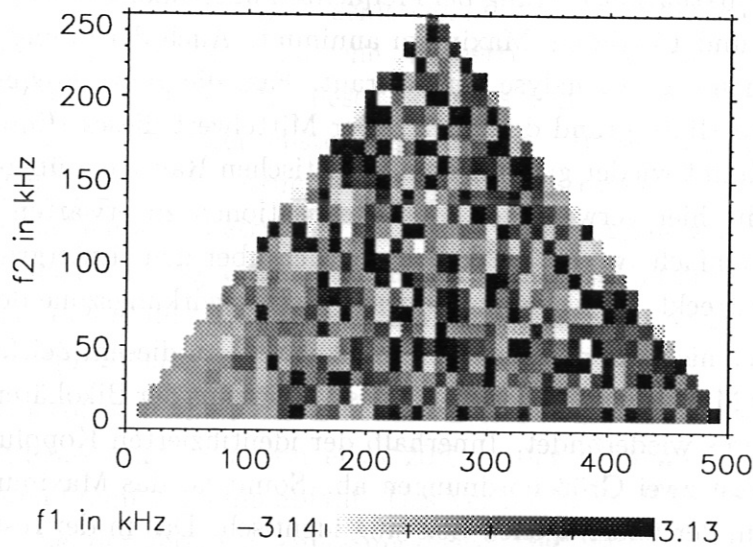


Abbildung 25: DIE BIPHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 30437. Das Kopplungsgebiet zeichnet sich durch eine für alle Frequenzkomponenten konstante relative Phasenlage aus. Diese konstante Phasenlage von etwa $-\pi/3$ ergibt im Phasen-Plot ein einheitlich gefärbtes Eck.

der Kopplungsregion zeigt, daß alle koppelnden Wellen mit derselben mittleren Biphasenlage von $-\pi/3$ zueinander in Wechselwirkung treten. Dies deutet wiederum auf einen einheitlichen Kopplungsmechanismus hin. Besondere Aufmerksamkeit verdient in diesem Zusammenhang die Breite der Kopplungszone. Ausgehend von der Annahme, daß die gleiche Phasenlage ein Indiz für das Vorhandensein eines Kopplungsmechanismus ist, gelangt man zu der Folgerung, daß in der Bikohärenz nicht die volle Breite der Kopplung detektiert wurde. Dies erklärt sich wie folgt: Aus dem Bispektrum wissen wir, daß die Leistung zu hohen Frequenzen hin stark abnimmt. Bei einem gleichbleibenden Rauschniveau ist mit zunehmenden Frequenzen eine eventuell vorhandene Kopplung in diesem Fall nur noch sehr schwer nachzuweisen. Da die kohärenten Amplitudenanteile gegenüber den inkohärenten immer kleiner werden, verschwindet das eventuell noch vorhandene Signal der Bikohärenz im Rauschen. Bei der Phase hingegen kann sich das kohärente Signal etwas stärker gegenüber dem inkohärenten behaupten. Die inkohärenten Phasen haben die Tendenz, sich zu Null wegzumitteln, die kohärenten Biphasen nehmen jedoch in diesem Fall einen einheitlichen Wert, der deutlich von Null verschieden ist, an. Daraus ergibt sich eine neue Fragestellung, die nicht so leicht zu beantworten ist. Es muß noch geklärt werden, ob das Verschwinden der konstanten Phasenlage und die Abnahme der Bikohärenz bei hohen Frequenzen lediglich auf einer zu geringen kohärenten Signalleistung beruhen oder aber auf eine verschwindende Kopplung zurückzuführen sind.

Das Maximum der Bikohärenz liegt bei 10 kHz, obwohl diese Frequenz mit an den meisten Kopplungen beteiligt ist. Ein weiteres Ergebnis der folgenden Abschnitte ist, daß mit zunehmender Breite der Kopplungszone auch das Maximum der Bikohärenz wächst. Somit ist der in Abschnitt 4.7 diskutierte Fall der Kopplung vollständig unabhängiger Wellen ausgeschlossen. Aber auch der entgegengesetzte Extremfall einer Bikohärenz von $b = 100\%$ liegt hier nicht vor. Das Rauschniveau ist bei dieser Entladung mit 2% im Verhältnis zum Maximum der Bikohärenz von 20% verschwindend gering. Zusammen ergeben diese Informationen folgendes Bild des Kopplungsmechanismus: Im Maximum der Kopplungszone ist etwa ein Fünftel der Leistung pro Frequenzintervall auf eine Kopplung mit anderen Moden zurückzuführen, die restliche Leistung stammt aus der davon unabhängigen Eigenentwicklung der Mode. Da, wie bereits im Abschnitt 3.2 betont wurde, grundsätzlich keine Aussage über die Richtung des Energieflusses getroffen werden kann, ist auch folgende Interpretation der obigen Daten möglich: Pro Zeit- und Frequenzintervall geht ein Fünftel der gespeicherten Leistung einer Mode durch Zerfall in andere Moden verloren. Der Ursprung der Ausgangsleistung ist in beiden Fällen nicht durch die Bispektralanalyse erfassbar.

5.4 k-Bispektralanalyse eines echten Plasmasignals

Die Frequenzanalyse des Bispektrums zeigt soweit ermutigende Ergebnisse. Wenden wir uns also nun der k-Bispektralanalyse zu. Ein wesentlicher Nachteil der k-Auswertung ist bereits aus dem Abschnitt 5.2 bekannt: Da uns nur 16 räumliche Stützstellen zur Verfügung stehen, ist die Auflösung und eventuell damit auch der Informationsgehalt gegenüber der Frequenzmessung deutlich reduziert. Nach dem Nyquist-Theorem erhält man in der k-Ebenen nur ein irreduzibles Dreieck von 9 mal 5 Punkten, wohingegen die f-Analyse eine Auflösung von 50 mal 25 Punkten aufweist. Wegen dieser geringen Auflösung ist zum Beispiel die Ähnlichkeit benachbarter Punkte weniger aufschlußreich als im Falle der Frequenzanalyse, was die Auswertung etwas schwieriger gestaltet.

Doch nun zu den Daten, die wieder aus derselben ohmschen Entladungsphase des ASDEX-Schusses 30437 stammen wie im vorangegangenen Abschnitt 5.3. Das Bispektrum (Abb. 26) zeigt wie erwartet einen Abfall hin zu den großen k-Werten, der jedoch mit einem Faktor 5 sehr klein ausfällt. Die Bikohärenz, die in Abbildung 27 wieder um 180° gedreht dargestellt ist, zeigt bereits deutlich das Problem der k-Auswertung: Sie hat bei kleinen k-Werten mehrere Maxima und fällt ebenfalls zu den hohen Werten hin ab. Die Maxima erscheinen jedoch weder besonders ausgeprägt, noch kann im Gegensatz zur Frequenzanalyse ein eindeutiges Hintergrundniveau festgelegt werden. Der Analyse liegen 500 Mittelungen zu Grunde, was einem statistischen Hintergrund von 5% entspricht. Diese geringe Anzahl der Realisationen, die man aus den Daten einer Entladung gewinnen kann, ist in der Kohärenzzeit der gemessenen Signale begründet. Zieht man zur Mittelung Messungen mit zu geringem zeitlichen Abstand heran (z.B. $10 \mu\text{sec}$), so zeigen diese eine eindeutige Abhängigkeit voneinander. Damit ist jedoch die Voraussetzung der Bispektralanalyse, die Mittelung über unabhängige Realisationen, schwer verletzt. Zieht man zu einer Auswertung trotzdem solche Punkte hinzu, so stellt man fest, daß durch die zusätzlichen Mittelungen weder das Rauschniveau gesenkt, noch das Maximum deutlicher hervorgehoben werden kann. Der Wert der Maxima beträgt in der vorliegenden Auswertung etwa 14%, damit liegen sie gerade an der Nachweisgrenze. Die Ergebnisse der k-Analyse sind also mit einer gewissen Vorsicht zu genießen. Dieses Urteil wird von dem Plot der Biphasen (Abb. 28), noch bestätigt: Hier scheinen alle Komponenten miteinander in einer annähernd gleichen Phasenbeziehung zu stehen. Zum einen ist dieser optische Eindruck sicher in der geringen Anzahl der vorhandenen Punkte begründet, zum anderen kann man das Ergebnis aber auch auf die nicht ausreichende räumliche Auflösung zurückführen. Die Biphasen bei der geringsten aufgelösten Komponente, der ($k=0$) - Komponente, muß überall in etwa gleich Null sein, da auf der k_1 -Achse auch der Imaginärteil des Bispektrums verschwindet. Um aus den Bikohärenzdaten die wichtigsten Informationen über die Lage und die Größe der relativen Maxima bei gegebener Vorsicht gewinnen zu können, betrachten wir die Ergebnisse am besten in einer Konturendarstellung. So ist in Abbildung 29 klarer

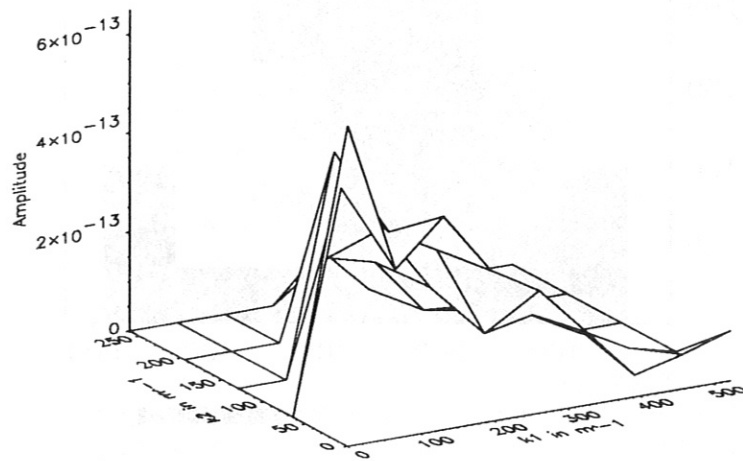


Abbildung 26: DAS K-BISPEKTRUM DER ASDEX-ENTLADUNG 30437. Das Verhalten erinnert an das f -Bispektrum: Das Maximum liegt bei den kleinsten aufgelösten Komponenten und fällt zu den höheren k -Werten hin ab.

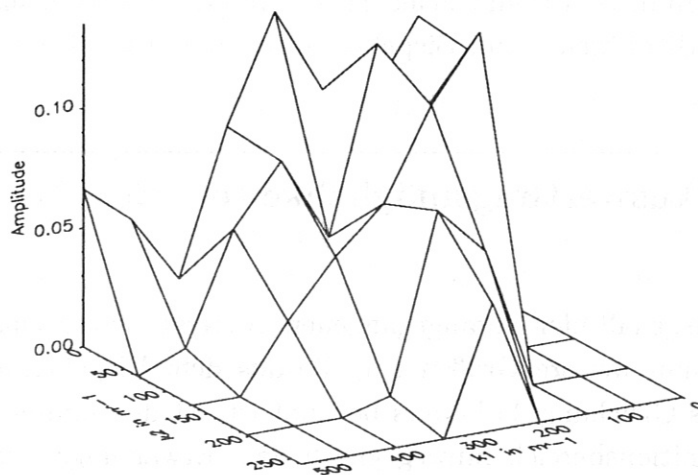


Abbildung 27: DIE K-BIKOHÄRENZ DER ASDEX-ENTLADUNG 30437. Das Maximum, der hier wieder um 180° gedreht dargestellten k -Bikohärenz, liegt bei kleinen k -Werten, ein Rauschniveau wie in der f -Bikohärenz kann nicht aufgelöst werden.

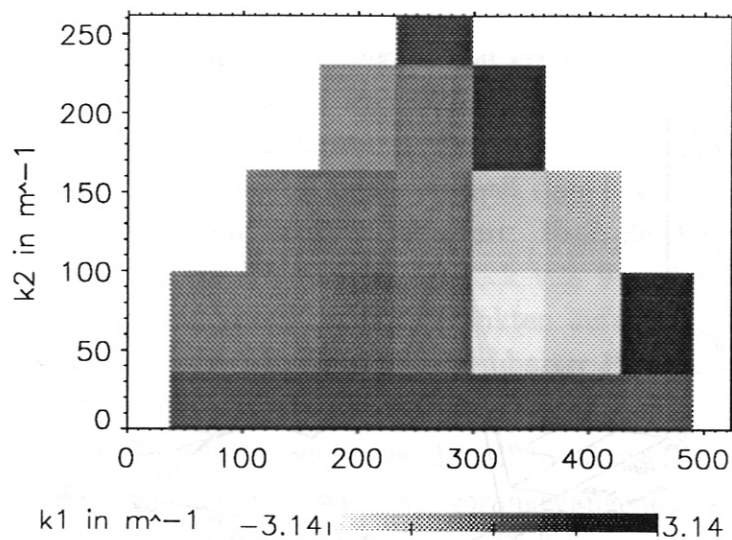


Abbildung 28: DIE K-BIPHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 30437. Hier liegt scheinbar eine gleichmäßige Einfärbung vor. Dies kann aber auch auf die zu geringe Anzahl der darzustellenden Punkte zurückzuführen sein und muß nicht unbedingt auf eine Kopplung im k -Raum hinweisen. Entlang der k_1 -Achse muß die Biphase den konstanten Wert Null annehmen, da hier das Bispektrum rein reell ist.

als in den vorangegangenen Abbildungen zu sehen, daß das absolute Maximum der Bikohärenz nicht bei den kleinsten aufgelösten k -Komponenten liegt, wo das Maximum des k -Bispektrums zu finden ist. Die bei unterschiedlichen Plasmaparametern eventuell verschiedene Lagen dieser Bikohärenz-Maxima ist eines der Hauptergebnisse der k -Bispektralanalyse. In diesem Punkt liefert sie ein von der Frequenzauswertung, bei der immer die Lage von Bikohärenz- und Bispektrumsmaximum identisch ist, verschiedenes Bild der Kopplung.

5.5 Weitere Auswertungsmöglichkeiten der Bispektrumsergebnisse

Um den Informationsgehalt der vorangegangenen Analyse besser charakterisieren zu können, führen wir nun weitere Größen ein, die aus dem Bispektrum berechnet werden können. Wie aus Gleichung 25 bereits bekannt ist, ist die Summe des Bispektrums über den ganze Definitionsbereich hinweg gleich dem Erwartungswert der dritten Potenz des Signals. Diese Größe, normiert auf die Signalleistung, heißt in der Fachliteratur [Elgar1985a] *skewness* und ist ein Maß für die Unsymmetrie zwischen den nach oben und nach unten gerichteten Signalanteilen. Wegen der Symmetrien in der Definition des Bispektrums heben sich die Imaginärteile genau auf, so daß das Ergebnis wie gefordert rein reell ist. Man kann die skewness deswegen auch als die Summe der Realteile des Bispektrums betrachten. Diese Summe bildet man der Einfachheit wegen nur in dem ir-

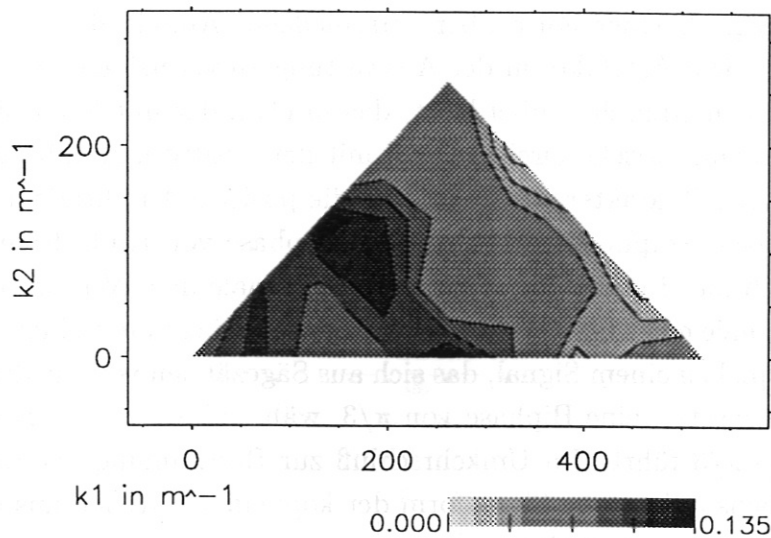


Abbildung 29: DIE K-BIKOHÄRENZ DER ASDEX-ENTLADUNG 30437 ALS KONTURENLOT. Die Darstellung als gefüllte Konturlinien enthüllt, daß das absolute Maximum nicht bei den kleinsten vorkommenden k -Werten liegt und somit nicht mit dem Maximum des k -Bispektrums zusammenfällt.

reduziblen Dreieck und berücksichtigt den Einfluß der restlichen Flächen durch geeignete Multiplikation. Somit ergibt sich folgende Definition:

$$skewness \equiv \left[12 \sum_{k_{Nyq} \geq k > l > 0} Re(B(f_k, f_l)) + 6 \sum_{k_{Nyq} \geq k = l > 0} Re(B(f_k, f_l)) + 6 \sum_{k_{Nyq} \geq k > l = 0} Re(B(f_k, f_l)) + Re(B(f_k, f_l)_{k=l=0}) \right] / E(n^2(t))^{3/2} \quad (79)$$

Mit k_{Nyq} ist in obiger Gleichung der Index der größten noch detektierbaren Frequenzkomponente f_{Nyq} bezeichnet. Ersetzt man in der obigen Definition den Realteil des Bispektrums durch den Imaginärteil, so erhält man die Definition der *asymmetry* [Elgar1985a], die ebenfalls ein Maß für das Abweichen von einer symmetrischen Signalform darstellt. Da man die *asymmetry* nur auf dem irreduziblen Dreieck berechnet, ist ihr Wert von Null verschieden; würde man sie auf der ganzen Bispektrumsebene berechnen, müßte sie wegen der Hermitizität des Bispektrums exakt den Wert Null annehmen.

$$asymmetry \equiv \left[12 \sum_{k_{Nyq} \geq k > l > 0} Im(B(f_k, f_l)) + 6 \sum_{k_{Nyq} \geq k = l > 0} Im(B(f_k, f_l)) \right] / E(n^2(t))^{3/2} \quad (80)$$

Auf den Koordinatenachsen ist das Bispektrum immer rein reell, so daß diese Anteile bei der Summe über die Realteile im irreduziblen Dreieck von vornherein weggelassen werden dürfen.

Besonders aussagekräftig ist die Biphase in der Kopplungszone. Um den Einfluß der Si-

gnalform auf den Wert der Biphasen in der Kopplungszone zu überprüfen, wurden, wie in Abbildung 30, Signale einer Form aber verschiedener Amplitude und Länge zufällig aneinander gehängt. Um Artefakte in der Auswertung zu vermeiden, wurden diese Testsignale noch mit einem Rauschen überdeckt, das in etwa der mittleren Signalamplitude gleichkommt. Das symmetrische Dreieckssignal mit der positiven Amplitude erzeugt eine Biphasen von Null. Das Charakteristische ist hier die positive Amplitude; auch ein Rechtecksignal mit positiver Amplitude führt zu einer Biphasen von Null. Eine negative Amplitude bewirkt, daß die Biphasen für symmetrische Signale den Wert π annimmt. Auch unsymmetrische Signale einer bestimmten Form korrespondieren mit einer festen Biphasen. So gehört zum Beispiel zu einem Signal, das sich aus Sägezähnen verschiedener Amplitude und Länge zusammensetzt, eine Biphasen von $\pi/3$, während ein invertierter Sägezahn zu einer Biphasen von $-\pi/3$ führt. Im Umkehrschluß zur Bestimmung der Biphasen aus der Signalform kann ebenso die grobe Signalform der koppelnden Wellen aus der Biphasen in der Kopplungszone bestimmt werden.

Die wesentlichen Aussagen der Bispektralanalyse der Plasmadaten lassen sich in einigen wenigen Größen zusammenfassen: Die Höhe des Maximums der Bikohärenz beschreibt den Grad der Kopplung. Die Breite der Kopplungszone, die aus der Bikohärenz oder der Biphasen bestimmt werden kann, beschreibt die Ausdehnung der Kopplung in der $f_1 f_2$ - oder $k_1 k_2$ -Ebene. Die grobe Signalform kann aus dem Wert der Biphasen in der Kopplungszone gewonnen werden und die skewness legt die Vorzugsrichtung und die Abweichung vom gaußschen Verhalten fest. Mit diesen Werten lassen sich die Ergebnisse verschiedener Analysen sehr gut vergleichen. Für eine weitergehende Auswertung der einzelnen Schußdaten muß man auf die vollständige Bispektrumsdarstellung zurückgreifen.

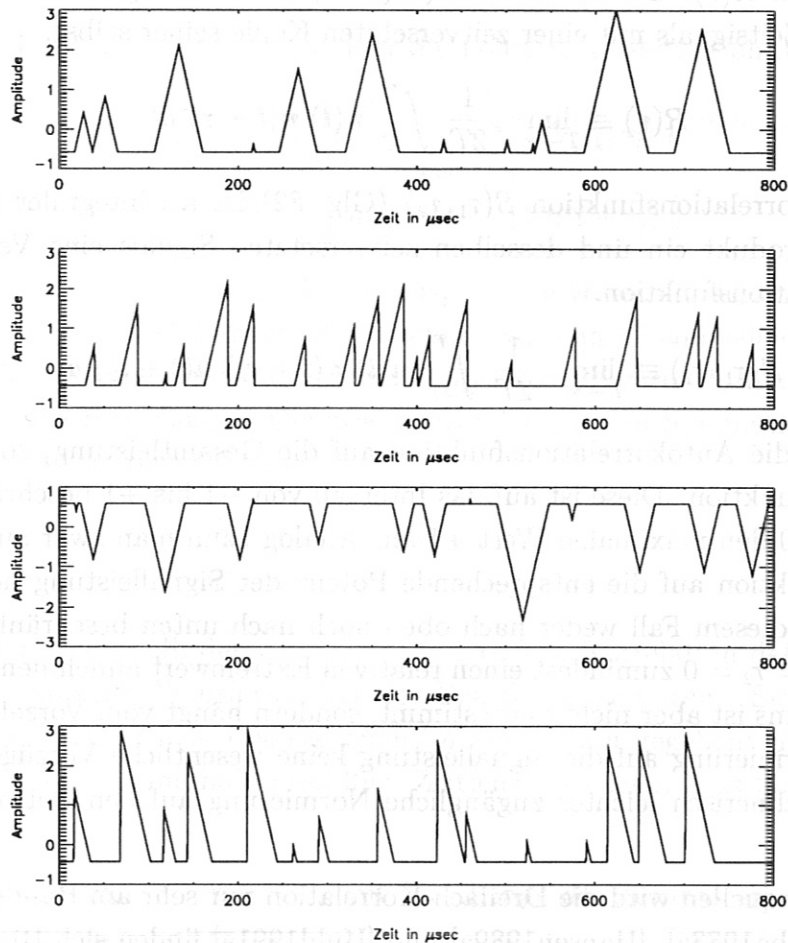


Abbildung 30: EINFLUSS DER SIGNALFORM AUF DEN WERT DER BIPHASE. Anhand von Testsignalen kann der Einfluß der Signalform auf den Wert der Biphase studiert werden. Von oben nach unten ergeben die hier dargestellten Testsignale, wenn man sie mit etwas Rauschen überlagert, folgende Biphasen: Das symmetrische Signal mit der positiven Amplitude korrespondiert mit einer Biphase von Null. Die Sägezähne in der zweiten Reihe gehört zu einer Biphase von $\pi/3$ und das symmetrische Signal mit den negativen Amplituden zu einer Biphase von π . Die invertierten Sägezähne in der letzten Reihe erzeugen eine Biphase von $-\pi/3$.

6 Die Dreifach-Korrelationsfunktion

6.1 Definition der Dreifach-Korrelationsfunktion

Eine in der linearen Analyse von Fluktuationsdaten oft benutzte Größe ist die Autokorrelationsfunktion $R(\tau)$. Sie ist definiert (Glg. 81) als der integrale Mittelwert über das Produkt eines Zeitsignals mit einer zeitversetzten Kopie seiner selbst.

$$R(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t) n(t + \tau) dt \quad (81)$$

Die Dreifach-Korrelationsfunktion $S(\tau_1, \tau_2)$ (Glg. 82) ist als integraler Mittelwert über das Dreifach-Produkt ein und desselben zeitversetzten Signals eine Verallgemeinerung der Autokorrelationsfunktion.

$$S(\tau_1, \tau_2) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t) n(t + \tau_1) n(t + \tau_2) dt \quad (82)$$

Normiert man die Autokorrelationsfunktion auf die Gesamtleistung, so erhält man die Autokovarianzfunktion. Diese ist auf das Intervall von -1 bis $+1$ beschränkt und nimmt immer für $\tau = 0$ den maximalen Wert $+1$ an. Analog kann man zwar auch die Dreifach-Korrelationsfunktion auf die entsprechende Potenz der Signalleistung normieren, sie ist jedoch auch in diesem Fall weder nach oben noch nach unten beschränkt. In der Regel wird sie bei $\tau_1 = \tau_2 = 0$ zumindest einen relativen Extremwert annehmen, das Vorzeichen dieses Extremums ist aber nicht vorbestimmt, sondern hängt vom Vorzeichen des Signals ab. Da die Normierung auf die Signalleistung keine wesentliche Vorzüge bietet, wählen wir hier die rechnerisch leichter zugängliche Normierung auf den Betrag des absoluten Extremums.

In den Literaturquellen wird die Dreifach-Korrelation nur sehr am Rande behandelt. Lediglich bei [Subba1983a], [Hansen1989a] und [Huld1991a] finden sich Hinweise.

Die Interpretation der Dreifach-Korrelation liegt nun auf der Hand: Sie ist ein Maß für den Grad der Verwandtschaft zwischen dem Signal zu einem beliebigen Zeitpunkt und den um τ_1 bzw. τ_2 zeitlich versetzten Signalen. Folgen z.B. meistens einem Maximum zwei weitere Maxima in immer gleichen Abständen, so ist eine große positive Dreifach-Korrelation zu erwarten, folgen ihm hingegen ein Maximum und ein Minimum, so ist mit einer großen negativen Dreifach-Korrelation zu rechnen. Sind schließlich die Extremwerte zufällig im Signal verteilt und völlig unabhängig von ihren Vorgängern und Nachfolgern, so wird auch die Dreifach-Korrelation einen Wert nahe Null annehmen. Wie bei allen anderen statistischen Größen ist hier der Wert exakt Null nur im Idealfall unendlicher Mittelungszeiten zu erwarten.

Ähnlich wie das Leistungsdichtespektrum und die Korrelationsfunktion der linearen Analyse über das Wiener-Khintchine-Theorem [Priestley1989a] mittels einer

Fouriertransformation ineinander umgewandelt werden können, sind das Bispektrum und die Dreifach-Korrelationsfunktion eine äquivalente Darstellung derselben Information. Zwischen ihnen besteht im kontinuierlichen Fall folgende Verbindung:

$$B(f_1, f_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau_1, \tau_2) e^{-i2\pi f_1 \tau_1} e^{-i2\pi f_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \quad (83)$$

Im diskreten Fall gilt die Umwandlung über die Fouriertransformation immer noch:

$$B(f_k, f_l) = \left(\frac{1}{N}\right)^{3/2} \sum_{\bar{k}=0}^{N-1} \sum_{\bar{l}=0}^{N-1} S(\tau_{\bar{k}}, \tau_{\bar{l}}) e^{-\frac{i2\pi k \bar{k}}{N}} e^{-\frac{i2\pi l \bar{l}}{N}} \quad (84)$$

$$\text{wobei} \quad S(\tau_{\bar{k}}, \tau_{\bar{l}}) = E \left[n(t) n(t + \tau_{\bar{k}}) n(t + \tau_{\bar{l}}) \right] \quad (85)$$

Da die Dreifach-Korrelation so eng mit dem Bispektrum verwandt ist, sind auch die Symmetrien der jeweiligen Darstellungen übertragbar. Aus den 12 äquivalenten Punkten des hermiteschen Bispektrums werden durch die doppelte Fouriertransformation 6 identische Punkte der Dreifach-Korrelation. Die zwei zugrundeliegenden Symmetrierelationen lauten, wie man leicht nachrechnen kann:

$$S(\tau_1, \tau_2) = S(\tau_2, \tau_1) \quad (86)$$

$$S(\tau_1, \tau_2) = S(-\tau_1, \tau_2 - \tau_1) \quad (87)$$

Auch die Grenzen, innerhalb derer die diskrete Dreifach-Korrelation definiert ist, erhält man durch eine einfache Transformation der Bispektrumsgrenzen. Sie sind durch die Mittelungen über verschiedene Realisationen im Zeitbereich gegeben: alle drei betrachteten Ereignisse müssen innerhalb desselben Zeitfensters liegen. Das führt zu folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} |\tau_1| &\leq T & , & \text{ mit } T = \text{Länge des Zeitfensters} \\ |\tau_2| &\leq T \\ |\tau_1 - \tau_2| &\leq T \end{aligned} \quad (88)$$

Der so definierte Ausschnitt aus der $\tau_1\tau_2$ -Ebene hat wiederum die Form eines Sechsecks. Die Symmetrierelationen (Glg. 87 und 88) erlauben es, die Fläche, auf der die Dreifach-Korrelation berechnet werden muß, auf ein Dreieck einzuschränken, das die Elementarzelle der Dreifach-Korrelation darstellt. In der folgenden Abbildung 31 sind die symmetrischen Punkte, die Grenzen der einzelnen symmetrischen Zellen und die Grenzen des Definitionsbereiches zusammengestellt.

6.2 Erste Beispiele für die Dreifach-Korrelationsfunktion

Da das Bispektrum und die Dreifach-Korrelationsfunktion über die Fouriertransformation miteinander verknüpft sind, enthalten alle zwei Darstellungsweisen der Meßdaten genau

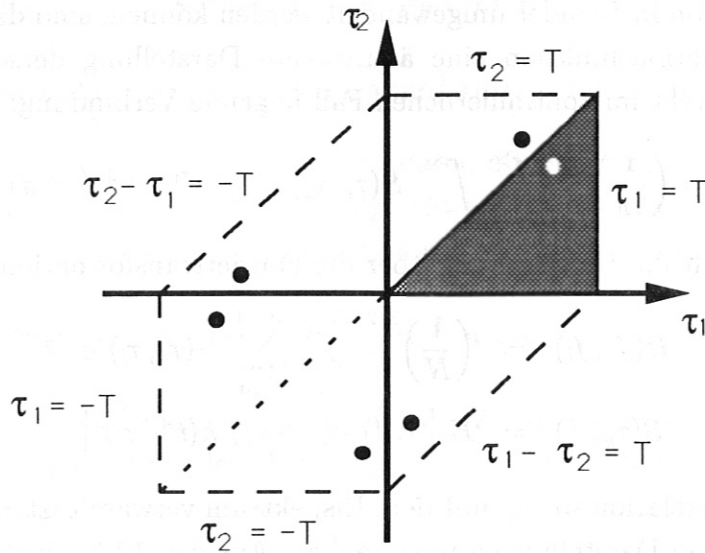


Abbildung 31: DEFINITIONSBEREICH UND SYMMETRIEN DER DREIFACH-KORRELATION. Abgebildet ist der Ausschnitt aus der $\tau_1\tau_2$ -Ebene, in dem die Dreifach-Korrelationsfunktion definiert ist. Die Punkte stellen einen Satz von 6 äquivalenten Werten dar; jeder Punkt liegt in einem der 6 Dreiecke, die durch eine geeignete Transformation ineinander übergeführt werden können. Grau hervorgehoben ist das Dreieck im ersten Quadranten, das im folgenden Text als das irreduzibles Dreieck der Dreifach-Korrelation bezeichnet wird.

die gleiche Information. Dem hier nicht wiedergegebenen Plot der Dreifach-Korrelation der Zufallszahlen sieht man den Zufallscharakter der zugrundeliegenden Daten sofort an, da in ihm keinerlei Ordnung zu finden ist. Das Rauschverhalten des Signals spiegelt sich also im Fehlen einer identifizierbaren Struktur wieder.

Betrachten wir als nächstes in Abbildung 32 die Dreifach-Korrelation der bereits in Abschnitt 5.3 diskutierten ohmschen Phase der ASDEX-Entladung 30437. In der Dreifach-Korrelation sind die beiden Achsen und die Diagonale $\tau_1 = \tau_2$ im ersten und dritten Quadranten besonders ausgezeichnet. Sie enthalten jeweils zwei Werte zu demselben Zeitpunkt. Die Abfalllängen von etwa $40 \mu\text{sec}$ in Richtung der positiven Achsen τ_1 und τ_2 , sowie der negativen Diagonalen $\tau_1 = \tau_2$ entsprechen in etwa der Kohärenzzeit, die bereits aus der linearen Analyse bekannt ist. Die Untersuchungen geben jedoch keinen Hinweis darauf, ob hinter dieser Ähnlichkeit der linearen und quadratischen Analyse mehr als nur ein Zufall steckt. In den entgegengesetzten Richtungen fallen die Amplituden der Dreifach-Korrelation sehr schnell ab, um nach einem Nulldurchgang ein absolutes Minimum anzunehmen. Dieses Verhalten erklärt sich aus dem in dem zugrundeliegenden Signal abwechselnden Auftreten relativer Maxima und Minima. Die Tatsache, daß das zentrale Extremum ein Maximum ist, erklärt sich aus der Biphasen von $-\pi/3$ im Kopplungsgebiet, die nach Abbildung 30 mit einem Signalmaximum verbunden ist. Bewegt man sich außerhalb der bis jetzt betrachteten Geraden, so gelangt man in Gebiete, in denen alle

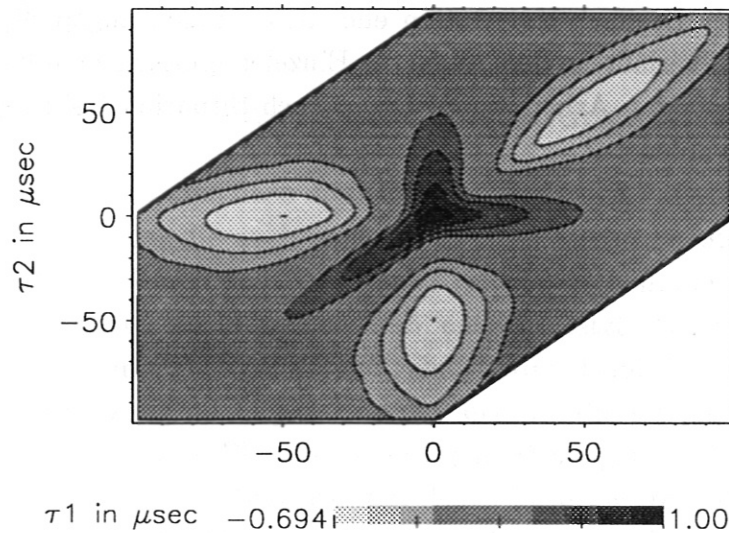


Abbildung 32: DIE DREIFACH-KORRELATION DER ASDEX-ENTLADUNG 30437. Die Daten stammen aus der ohmschen Entladungsphase des ASDEX-Schusses 30437, der bereits in Abschnitt 5.3 für eine erste Auswertung in der Bispektralanalyse herangezogen wurde. Die deutlich erkennbaren Strukturen spiegeln die Form des Bispektrums (Abb. 24) wieder.

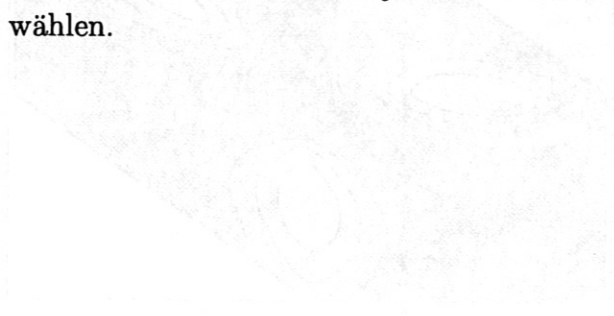
drei betrachteten Zeitpunkte, die zur Produktbildung herangezogen werden, voneinander verschieden sind. Die Dreifach-Korrelationsfunktion nimmt hier Werte von etwa Null an, was einer verschwindenden Kopplung und damit auch einer verschwindenden Kohärenz entspricht.

Die Darstellung der Dreifach-Korrelation im irreduziblen Dreieck enthält dieselbe Information wie eine Darstellung in der vollen $\tau_1\tau_2$ -Ebene. Dennoch ist die gerade geführte Diskussion nur schwer nachvollziehbar, da die sonst offensichtlichen Symmetrien fehlen. Deswegen werden im Folgenden weiterhin die vollständigen Bilder gezeigt, auch wenn sie redundante Informationen enthalten.

Obwohl die Definition und Diskussion der Dreifach-Korrelation bis jetzt völlig im Frequenz- bzw. Zeitraum geführt wurden, gilt natürlich alles Gesagte ebenso für eine k -Analyse. Auf Grund der wesentlich geringeren räumlichen Auflösung sind hier aber die Bilder wie beim k -Bispektrum wesentlich unschärfer und mit weniger zugänglicher Information versehen. Eine Analyse ist jedoch grundsätzlich möglich und, wie sich später zeigen wird, in einigen Fällen sogar erfolgreicher als die Frequenzanalyse.

Welche der beiden äquivalenten Darstellungen, die Dreifach-Korrelation oder das Bispektrum, für die Analyse bevorzugt wird, hängt von der persönlichen Einstellung und dem der Auswertung zu Grunde liegenden Modell ab. Will man die Kopplung einzelner Wellen untereinander untersuchen, so bietet sich das Bispektrum an, da es im Frequenz- bzw. im k -Raum berechnet wird, und so den Wellencharakter der Analyse betont. Interessiert

man sich andererseits für die Abhängigkeiten des Auftretens von Einzelereignissen, so ist die Terminologie der Dreifach-Korrelation eher dem Modell angepaßt, da sie den Zeit- oder Ortsraum nicht verläßt, in dem allein die Einzelereignisse genau lokalisiert sind. Für den Rest der vorliegenden Arbeit werde ich je nach Situation frei zwischen den beiden Darstellungsarten wählen.



7 Auswertung einiger Schüsse mit der H_{α} -Diagnostik

7.1 Vergleich der verschiedenen Entladungsphasen

Einer Plasmaentladung kann man nach ihren charakteristischen Parametern verschiedenen Entladungsphasen zuordnen, die auch nacheinander im selben Schuß auftreten können. Ein Tokamakplasma kann durch den Widerstand geheizt werden, den es dem Strom, den man für den Einschluß im Plasma treiben muß, entgegengesetzt. Da das Plasma in dieser Entladungsphase vom ohmschen Widerstand geheizt wird, heißt diese Phase die *ohmsche Phase*. Die ohmsche Heizung reicht jedoch nicht aus, um die für die kontrollierte Kernfusion nötigen Temperaturen im Plasma zu erzeugen. Deswegen muß man auf Zusatzheizungen zurückgreifen. Eine der Möglichkeiten dem Plasma weitere Energie zuzuführen, ist, mit hoher Energie neutrale Atome in das Plasmaminnere zu schießen. Zunächst steigen mit wachsender Leistung, die dem Plasma durch die Neutralteilchenheizung zugeführt wird, die Verluste überproportional an. Dadurch verringert sich die Energieeinschlußzeit, die als der Quotient aus dem Energieinhalt des Plasmas und der im Plasma deponierten Heizleistung definiert ist. Wegen dieser schlechten Einschlußeigenschaften heißt diese Entladungsphase *L-Mode (low confinement)*. Bei einer weiteren Steigerung der zugeführten Heizleistung kann das Plasma wieder in ein Gebiet mit wesentlich verbessertem Einschluß gelangen. Dieses Regime heißt *H-Phase (high confinement)*. Dies sind die drei wichtigsten Betriebsarten des Fusionsexperimentes ASDEX. Da in allen drei Regimen einige Plasmaparameter charakteristische Variationen zeigen, und der Teilchen- und Energiefluß in ihnen verschieden ist, ist es sehr interessant, ob sich in den für die Wellenkopplung charakteristischen Größen ebenfalls die Unterschiede in den einzelnen Entladungsphasen nachvollziehen lassen können. Insbesondere der verschlechterte Einschluß in der L-Phase kann sich wegen einer Erhöhung der turbulenten Verluste in den Kopplungen der Fluktuationen bemerkbar machen.

7.1.1 Das Bisppektrum in der ohmschen Entladungsphase

Die ersten Auswertungen in Abschnitt 5.3 wurden bereits an einem ohmschen Beispiel durchgeführt. Die Ergebnisse sind durchwegs charakteristisch für diese Phase und müssen deswegen hier nur noch einmal kurz zusammengefaßt werden. Die Bikohärenz hat bei kleinen Frequenzen ein deutliches Maximum von bis zu 20% und zeigt im Großteil der $f_1 f_2$ -Ebene bei hohen Frequenzen ein reines Rauschverhalten. Aus der Biphasen läßt sich die Breite der Kopplungszone auf etwa 50 bis 100 kHz bestimmen. Als ein weiteres Beispiel sei hier die Bikohärenz des ASDEX-Schusses 31560 wiedergegeben (Abb. 33), die alle charakteristischen Eigenschaften zeigt.

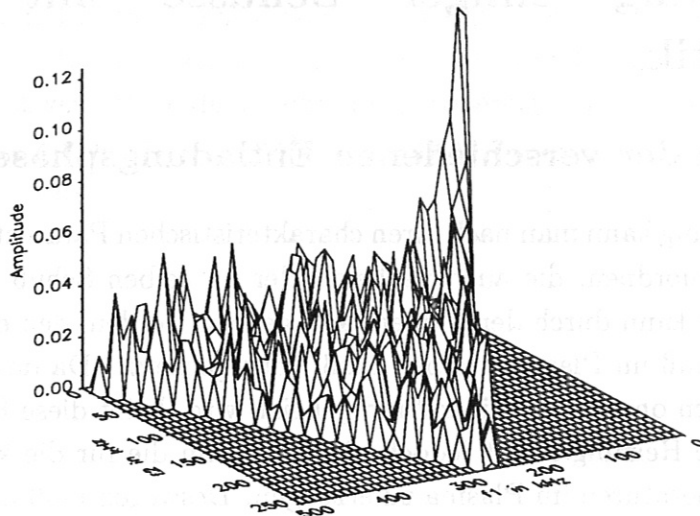


Abbildung 33: DIE BIKOHÄRENZ DER OHMSCHEN PHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 31560. Dieser Plot ist typisch für die Bikohärenz einer ohmschen Entladungsphase. Der besseren Übersicht wegen ist auch in dieser Abbildung die Darstellung um 180° gedreht worden, so daß der Ursprung in der rechten oberen Ecke liegt.

Die Auswertung der Ergebnisse der k-Bispektrumsanalyse gestaltet sich sehr schwierig: das Bispektrum fällt nicht eindeutig auf Null ab, die Bikohärenz zeigt ein Verhalten, das in der Hauptsache vom Rauschhintergrund dominiert ist, und keine eindeutigen Aussagen zuläßt, und auch die Dreifach-Korrelationsfunktion erlaubt keine eindeutige Interpretation.

7.1.2 Das f-Bispektrum in der L-Mode

Der Übergang von der ohmschen zur L-Phase soll am Beispiel des ASDEX-Schusses 31998 dargestellt werden. Um die Unterschiede in der f-Bispektralanalyse erkennen zu können, seien nocheinmal die Ergebnisse der Auswertung der ohmschen Phase präsentiert. Die Bikohärenz (Abb. 34 links) hat ein Maximum von etwa 13%, das Rauschverhalten der Bikohärenz bei mittleren und hohen Frequenzen ist deutlich zu erkennen. Die Breite der Kopplungszone bestimmt man anhand von Abbildung 34 (rechts) zu 120 kHz, was etwas über der normalen Breite in der ohmschen Phase liegt.

Nach dem Übergang in die L-Phase ist fast keine Änderung in der Frequenzanalyse feststellbar: Die Bispektren gleichen sich völlig, und auch die leistungskorrigierte Bikohärenz (Abb. 35 links) ist von dem Ergebnis der ohmschen Phase fast nicht zu unterscheiden. Zwar ist das Maximum mit 15% ebenso wie die Halbwertsbreite der Bikohärenz mit 50 kHz etwas höher ausgefallen, aber dies reicht für eine signifikante Unterscheidung der beiden Entladungsphasen nicht aus. Die Abfallängen und der vom Rauschen dominierte Bereich

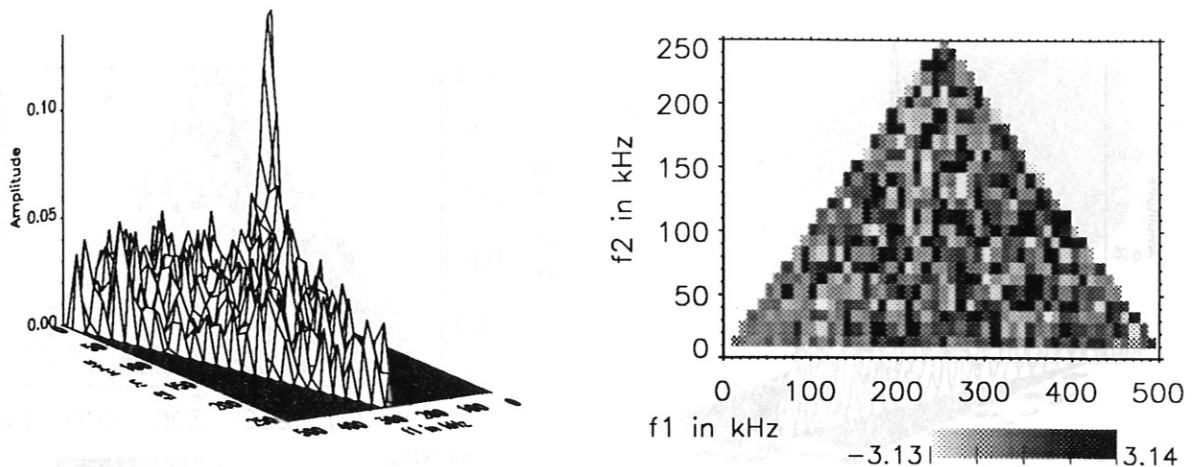


Abbildung 34: DIE BIKOHÄRENZ UND BIPHASE DER OHMSCHEN PHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 31998. Das Maximum der Bikoherenz (linke Abbildung) liegt bei 13% und fällt steil zu höheren Frequenzen hin ab, wo die Bikoherenz dann von statistischem Rauschen gekennzeichnet ist. Die Halbwertsbreite der Bikoherenz liegt bei 40 kHz. Die Breite der Kopplungszone, die sich aus der Biphasen (rechte Abbildung) ergibt, liegt mit 120 kHz geringfügig über dem sonst für die ohmsche Phase beobachteten Wert, während der Wert der Biphasen in der Kopplungszone wieder bei dem erwarteten Wert von $-\pi/3$ liegt. Das Verhalten von Biphasen und Bikoherenz stimmt mit den Erwartungen für die ohmsche Phase überein

der Bikoherenz sind in beiden Fällen so gut wie identisch. Auch die Biphasen (Abb. 35 rechts) zeigt nur eine geringfügige Änderung im Kopplungsverhalten an: Die Breite der Kopplungszone ist mit 140 kHz wieder etwas breiter als im ohmschen Fall, aber der Wert der Biphasen im Wechselwirkungsgebiet liegt wiederum wie im vorangehenden Bild bei etwa $-\pi/3$. Auch die Dreifach-Korrelationsfunktion zeigt, daß im Zeitbereich die Unterscheidung der beiden Moden nur sehr schwer möglich ist. Um genauere Aussagen treffen zu können, wäre eine statistische Analyse der Ergebnisse vieler Auswertungen nötig.

7.1.3 Das k-Bispektrum in der L-Mode

Ein Ergebnis der Frequenzanalyse war, daß die ohmsche Phase und die L-Phase eines Schusses beinahe dasselbe Kopplungsverhalten zeigen. Dieses Bild wird nun von der k-Analyse etwas revidiert. Die Bikoherenz im k-Raum der ohmschen Entladungsphase (Abb. 36 links) zeigt ein fast völlig von statistischem Rauschen dominiertes Verhalten. Der Mittelwert der Bikoherenz stimmt mit der Abschätzung des statistischen Hintergrundes von knapp 5% bei der zugrunde liegenden Anzahl von 500 Mittelungen gut überein, und das Maximum der Bikoherenz ist mit 12% ebenfalls nicht deutlich vom Rauschen zu trennen. Die Dreifach-Korrelation (Abb. 36 rechts) im Ortsraum bestätigt die Aussagen der Bispektralanalyse: Das zentrale Maximum ist sehr schmal, seine Abfalllänge kann nicht mehr bestimmt werden, da bereits die nähere Umgebung des Maximums ein zufälliges

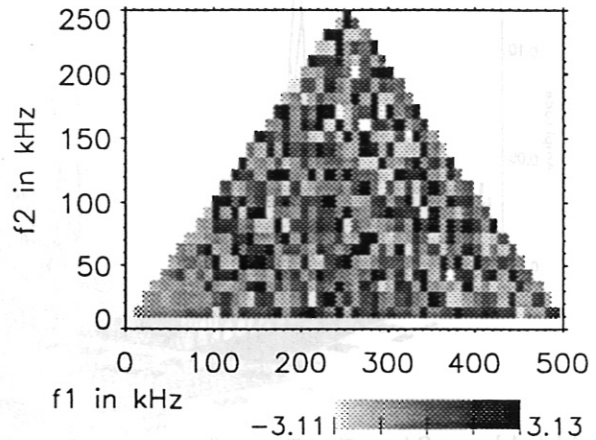
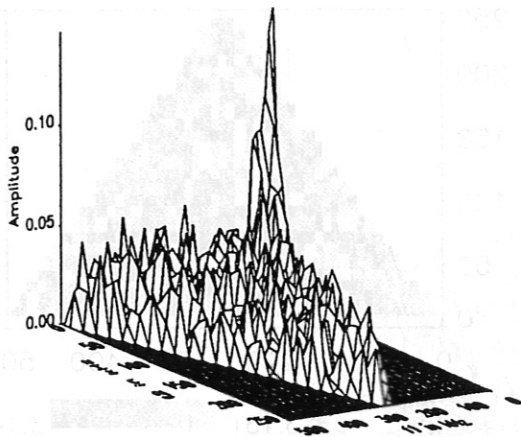


Abbildung 35: DIE BIKOHÄRENZ UND BIPHASE DER L-PHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 31998. Die Form der Bikoherenz ist im linken Bild weitgehend mit den Ergebnissen der ohmschen Phase identisch. Lediglich das Maximum der Bikoherenz ist mit 15% etwas höher ausgefallen. Dies reicht für eine eindeutige Unterscheidung der beiden Phasen jedoch nicht aus. Die Breite der Wechselwirkungszone läßt sich aus der Biphase in der rechten Abbildung zu 140 kHz bestimmen. Damit liegt sie geringfügig über dem Wert, der für die ohmsche Phase gewonnen wurde. Der Unterschied ist jedoch ebenfalls nicht signifikant.

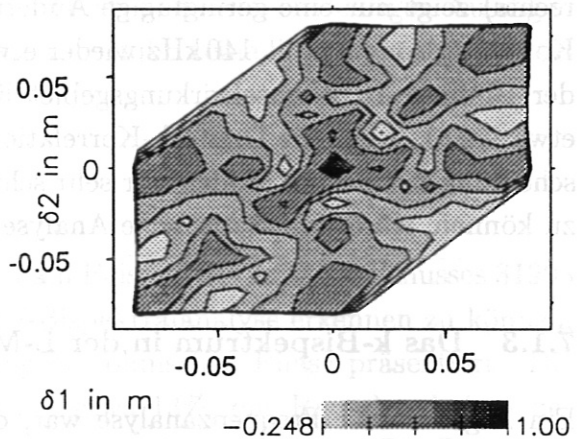
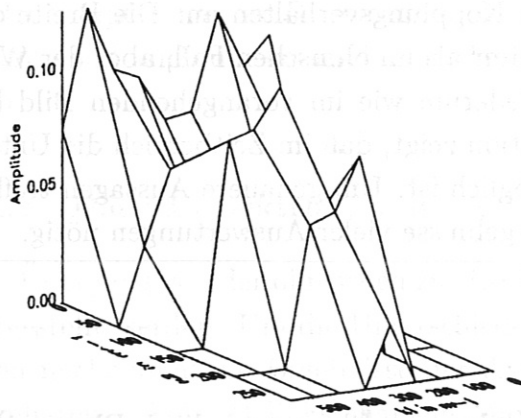


Abbildung 36: DIE k -BIKOHÄRENZ UND DIE DREIFACH-KORRELATION DER OHMSCHEN PHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 31998. Die k -Bikoherenz in der linken Abbildung scheint fast vollständig von statistischem Rauschen dominiert zu sein. Der Mittelwert stimmt gut mit der Abschätzung über die Zahl der Mittelungen überein und das Maximum liegt genau an der Nachweisgrenze. Auch in der Darstellung als Dreifach-Korrelationsfunktion in der rechten Abbildung scheint die Entladung von inkohärentem Rauschen dominiert zu sein. Lediglich ein sehr schmales Maximum erhebt sich über den zufälligen Hintergrund, aber bereits dessen Flanken gehen ebenso wie die zu erwartenden Nebenminima im Rauschen unter.

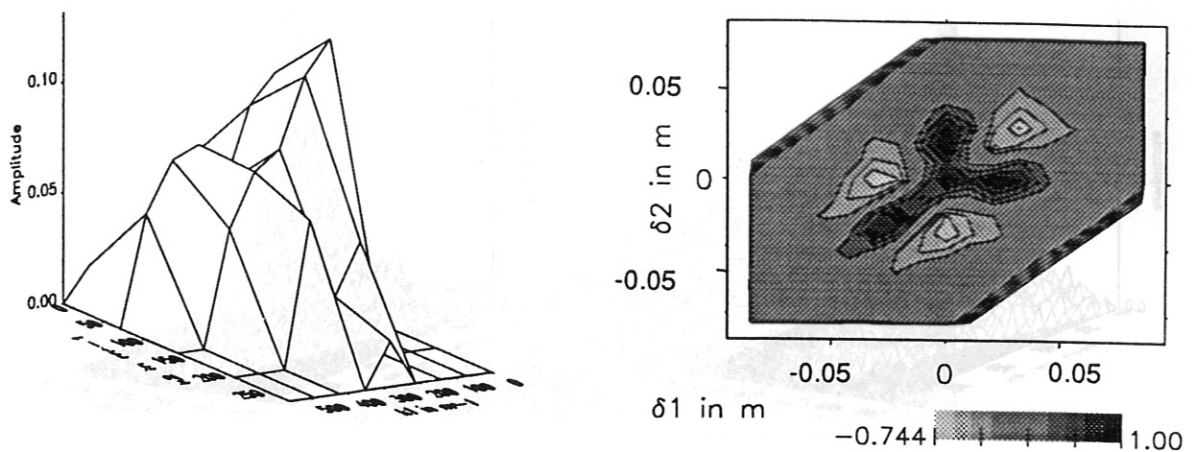


Abbildung 37: DIE k -BIKOHÄRENZ UND DREIFACH-KORRELATION DER L-PHASE DER AS-DEX-ENTLADUNG 31998. Das Entstehen einer Ordnungsstruktur ist gegenüber der ohmschen Phase (Abb. 36) deutlich zu sehen. Der Unterschied in der Bikohärenz (linke Abbildung) ist signifikant, auch wenn das Maximum mit 13% nur geringfügig größer ist als in der ohmschen Phase. Im Vergleich zu Abbildung 36 ist in der Dreifach-Korrelation klar zu erkennen, daß die Signalstruktur gegenüber dem Rauschanteil deutlich gestiegen ist. Dies kann auf eine verstärkte Kopplung im untersuchten k -Bereich zurückgeführt werden.

Verhalten zeigt. Dieses Rauschen, das sich fast über die ganze $\delta_1 \delta_2$ -Ebene erstreckt, überdeckt die Nebenminima so effektiv, daß sie nicht mehr lokalisiert werden können. Die k -Bikohärenz der L-Phase (Abb. 37 links) zeigt einen drastischen Wechsel im Verhalten der Entladung an: Das Maximum der Bikohärenz fällt mit 13% zwar nur unwesentlich größer aus als in der ohmschen Phase, dafür ist wieder ein eindeutiger Abfall zu großen k -Werten hin zu sehen. Auch in dem hier nicht dargestellten Bisppektrum ist dieses Entstehen einer gewissen Ordnungsstruktur klar zu erkennen. Am deutlichsten sieht man den Unterschied zur ohmschen Phase jedoch in der Dreifach-Korrelation (Abb. 37 rechts): Das zentrale Maximum ist gut definiert, seine Abfalllänge zu größeren Abständen hin sind klar zu erkennen und auch die Nebenminima sind wieder eindeutig zu identifizieren. Allgemein fällt auf, daß das Rauschen gegenüber dem Signal stark zurückgegangen ist, und daß die Struktur der Dreifach-Korrelation den aus der Zeitanalyse her bekannten Formen sehr stark ähnelt. Von daher können auch sämtliche Interpretationen aus der Zeitanalyse analog übernommen werden. Obwohl die k -Analyse wegen der gegenüber der Frequenzanalyse wesentlich geringeren Auflösung in der Regel auch unklarere Aussagen liefert, so ist doch in diesem Fall nur in der k -Auswertung der Übergang von der ohmschen zu L-Phase deutlich zu sehen.

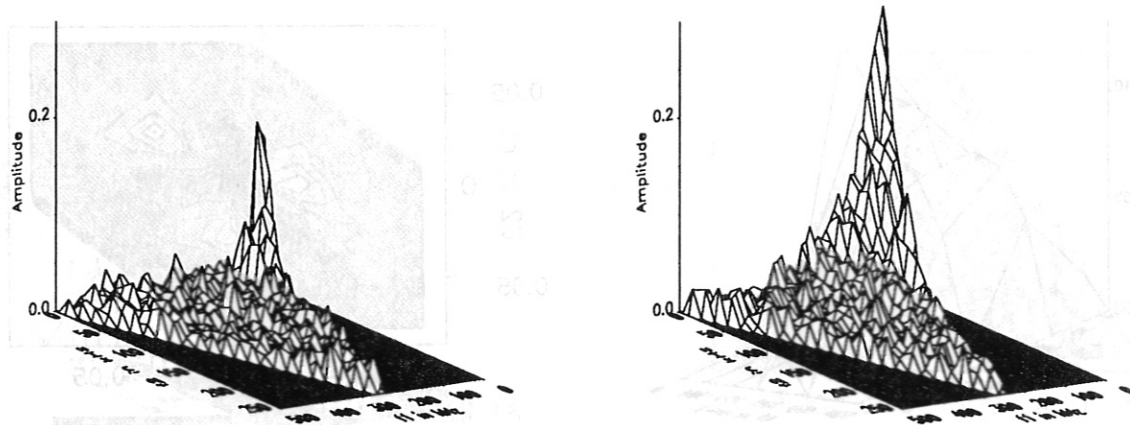


Abbildung 38: DIE BIKOHÄRENZ IN DER OHMSCHEN UND IN DER H-PHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 31754. Ein Vergleich der Bikohärenz in der ohmschen Phase (linke Abbildung) und in der H-Mode (rechte Abbildung) zeigt einen gravierenden Unterschied zwischen den beiden Phasen derselben Entladung. Das Maximum von 30% dominiert in der H-Phase den Plot, im Gegensatz zu den Analysen der ohmschen und der L-Phase, die noch vom Rauschen dominiert werden. Auch der Wert des Maximums hat sich deutlich gesteigert.

7.1.4 Das f-Bispektrum in der H-Mode

In der H-Phase sind die größten Unterschiede zur ohmschen Phase zu finden. Ein besonders gutes Beispiel liefert die ASDEX-Entladung 31754. Zum Vergleich ist auch hier wieder erst die Bikohärenz aus einer ohmschen Phase vor Beginn der Neutralteilcheninjektion in derselben Entladung in Abbildung 38 (links) zu sehen. Mit einem Maximum bei 17% ist die Bikohärenz bereits in der ohmschen Phase sehr groß, die Breite der Kopplungszone von etwa 100 kHz ist jedoch durchaus normal für diese Entladungsphase.

Nach dem Einschalten der Zusatzheizung und einer kurzen L-Phase ging die Entladung in eine relativ lange stabile H-Phase über. Aus dieser wurden insgesamt zu 3 verschiedenen Zeitpunkten Bispektren bestimmt. Sie lieferten alle die gleichen Ergebnisse, so daß hier nur eine Analyse vorgestellt werden muß. Der Plot der Bikohärenz (Abb. 38 rechts) enthüllt eine weitgehende Abweichung von den früher gewonnen Bildern. Das Maximum liegt bei 30% und ist damit um einen Faktor 2 größer als alle bisher gewonnenen Werte. Auch die Breite der Kopplungszone hat sich deutlich vergrößert: waren alle bisherigen Bikohärenz-Plots von dem Rauschhintergrund bei mittleren und hohen Frequenzen dominiert, so wird hier die Bikohärenz von dem Kopplungsmaximum beherrscht. Da die Kohärenz in dieser Entladungsphase so groß ist, kann die Auswertung auf ein Zeitfenster von 800 Punkten ausgedehnt werden. Ein Ausschnitt der Bikohärenz mit einer Auflösung von 1.25 kHz ist in Abbildung 39 dargestellt. Der Auswertung liegen wegen des wesentlich längeren Zeitfensters nur noch 500 Mittelungen zu Grunde. Der statistische

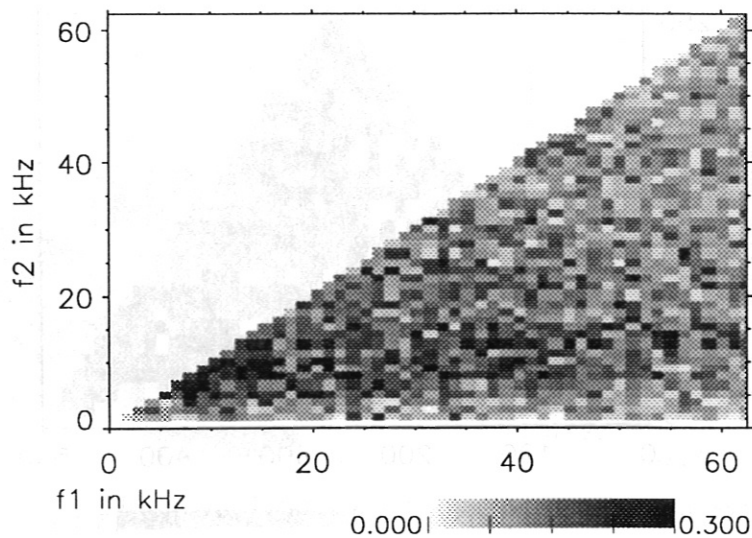


Abbildung 39: DIE BIKOHÄRENZ IN DER H-PHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 31745 BEI HÖHERER FREQUENZAUFÖSUNG. Ein Ausschnitt aus der Bikoherenz, die mit einer verbesserten Frequenzauföslung von 1.25 kHz berechnet wurde, zeigt, daß das Maximum der Bikoherenz kein Randeffect ist, sondern immer bei etwa 10 kHz liegt. Die Breite des Maximums kann wegen des kleinen gewählten Ausschnitts und des hohen Hintergrundniveaus nur schlecht abgeschätzt werden.

Hintergrund liegt bei 4.5%, die Nachweisgrenze der Bikoherenz bei knapp 12%. Das Maximum der Bikoherenz beträgt auch bei dieser hohen Auflösung wieder knapp 30 Frequenzen hin wieder ab. Dieser Abfall zu noch kleineren Frequenzkomponenten hin konnte in den bisherigen Analysen wegen der mangelnden Auflösung nicht nachgewiesen werden. Eine Auswertung bei dieser hohen Auflösung, wie hier demonstriert, kann nicht immer erfolgreich durchgeführt werden. Zum einen ist das statistische Hintergrundniveau sehr hoch, zu anderen können die untersuchten Wellenzüge mit steigender Fensterlänge schlechter definiert sein.

Betrachtet man die Biphasen, so wird der Eindruck der übermächtigen Kopplung bestätigt (Abb. 40). Die einfarbige Zone der Wechselwirkung in gleicher Biphasen hat eine Breite von etwa 250 kHz, was der Hälfte des untersuchten Frequenzgebiets entspricht. Die Gleichphasigkeit deutet wiederum auf einen einheitlichen Kopplungsmechanismus hin. Aus der Form der Bikoherenz, der Lage des Maximums und der Breite der Kopplungszone folgt wiederum (vergl. Absch. 5.3), daß das erreichbare Maximum der Bikoherenz nicht durch die Zahl der koppelnden Moden, sondern nur durch die prinzipielle Begrenzung der Bikoherenz auf das Intervall von 0 bis 1 gegeben ist. Somit ist also speziell in diesem untersuchten Fall folgendes Bild gegeben: Die niederfrequente Hälfte des zugänglichen Spektralbereichs nimmt komplett an einem Kopplungszenario teil, das durch eine mittlere Bikoherenz bei allen beteiligten Moden von etwa $-\pi/3$ gekennzeichnet ist. Im Maximum der Kopplungszone ist knapp 1/3 der Leistung pro Frequenzintervall auf den

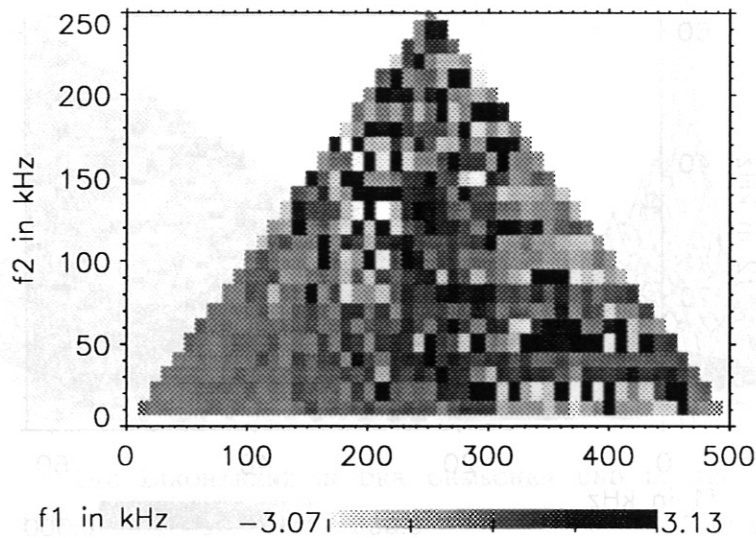


Abbildung 40: DIE BIPHASE IN DER H-PHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 31745. Die Breite der Kopplungszone von 250 kHz übersteigt deutlich alle bisher gewonnenen Ergebnisse. Der Wert der Biphasse von etwa $-\pi/3$ stimmt immer noch mit den Ergebnissen aus ohmscher und L-Phase überein.

Wechselwirkungsmechanismus zurückzuführen. Die Breite der Kopplungszone zeigt, daß auch Frequenzen, die wegen ihrer verschwindenden Leistung in allen anderen Fällen nicht mehr beachtet werden, noch an demselben Wechselwirkungsprozeß und Energieaustausch teilnehmen wie die leistungstragenden Moden.

Dieselben Unterschiede können auch bei der Betrachtung der Signale im Zeitraum, und damit aus der Berechnung der Dreifach-Korrelationsfunktion, gewonnen werden. Die Dreifach-Korrelation der ohmschen Phase der ASDEX-Entladung 30717 zeigt in Abbildung 41 (links) einen sehr steilen Abfall in Richtung voneinander verschiedener τ_1 - und τ_2 -Werte. Dieser schnelle Abfall der Korrelation korrespondiert mit einer schwachen Kopplung. In der H-Phase hingegen ist das zentrale Maximum wesentlich kompakter und fällt etwas gleichmäßiger nach allen Richtungen hin ab (Abb. 41 rechts). In dieser Darstellung scheint es, als ob die Abfallängen in den Richtungen, die zwei gleichen zeitlichen Versetzungen entsprechen, wesentlich geringer sind, als im ohmschen Fall. Dies ist aber ein Trugschluß, da in der H-Mode lediglich das Maximum stärker ausgeprägt ist und deswegen die Konturlinien etwas enger um das Maximum herum gezogen werden. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes sind in Abbildung 42 die Dreifach-Korrelationsfunktionen für beide Fälle als Gitternetzplots dargestellt. Den Bildern ist zum besseren Vergleich mit den vorangegangenen Darstellungen noch ein Graustufenplot der Daten unterlegt. Man erkennt sofort, daß die Extrema in der H-Mode wesentlich stärker ausgeprägt sind, und daß das Signal in der ohmschen Phase stark „tailliert“ erscheint. Somit können die Ergebnisse der Bispektrumsanalyse auch in der Dreifach-Korrelation wieder gefunden werden.

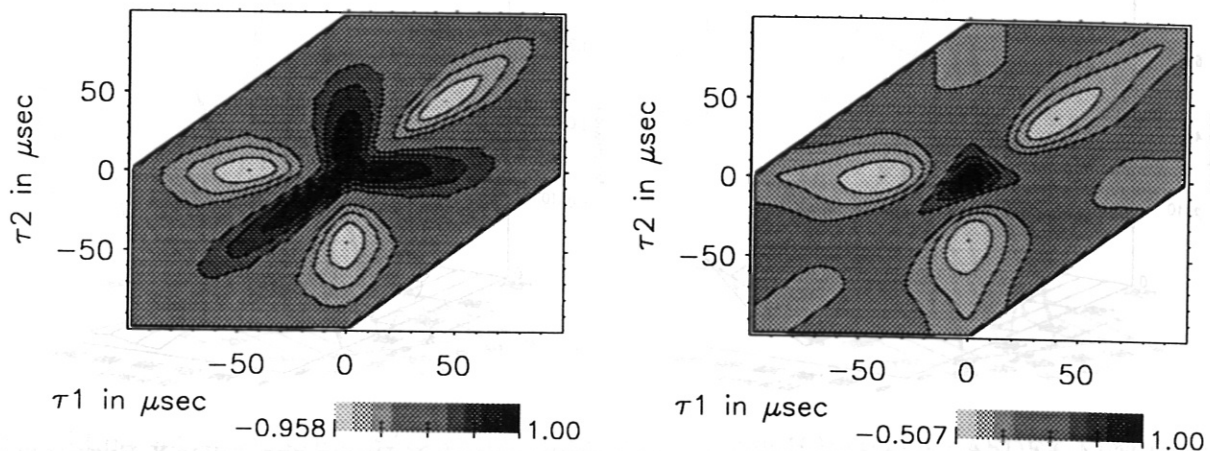


Abbildung 41: DIE DREIFACH-KORRELATION DER OHMSCHEN UND DER H-PHASE DER AS-DEX-ENTLADUNG 30717. Das Signal erscheint in der ohmschen Phase (linke Abbildung) stark „tailliert“ was auf eine geringe Kopplungsstärke hinweist. In der H-Mode erscheint das Signal wesentlich kompakter, die Abfallängen scheinen nach allen Seiten etwa gleich zu sein.

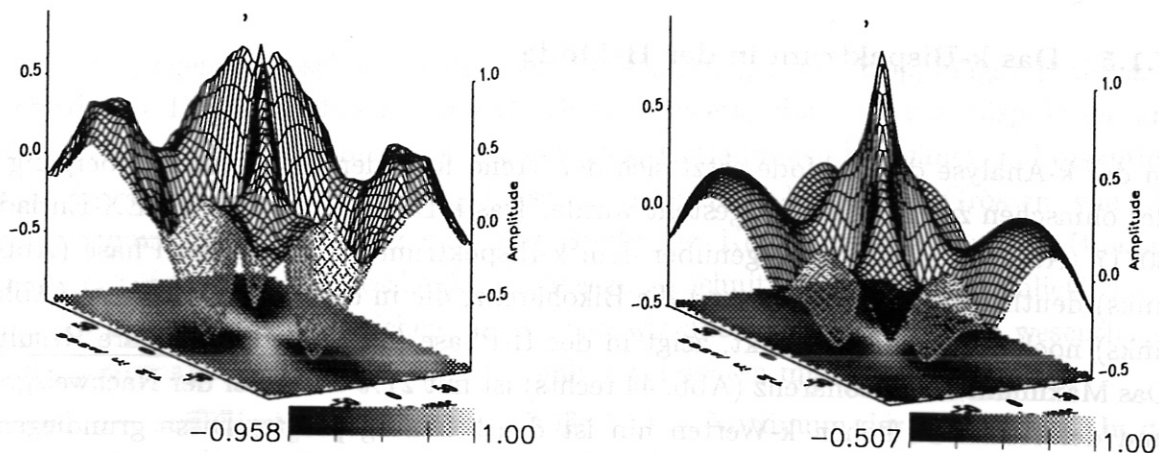


Abbildung 42: DIE DREIFACH-KORRELATION DER OHMSCHEN UND DER H-PHASE DER AS-DEX-ENTLADUNG 30717. Die Dreifach-Korrelationen aus Abbildung 41 sind hier in einer anderen Darstellungsart noch einmal wiedergegeben. Der Gitternetzplot der Dreifach-Korrelation der ohmschen Phase in der linken Abbildung zeigt, daß die Extrema nicht voll ausgebildet sind und daß der Abfall in Richtung der Minima sehr steil ist. Das Maximum ist dagegen in der H-Phase (rechte Abbildung) stark ausgeprägt, der Abfall in Richtung der Minima ist nicht mehr so steil wie in der ohmschen Phase. Die untergelegte Graustufenplots erklären das Verhalten der Konturlinien in Abbildung 41: Da das zentrale Maximum der H-Phase deutlich ausgeprägt ist, wird von den Konturlinien nur das Maximum erfaßt, während in der Darstellung der Ergebnisse der ohmschen Phase bei denselben relativen Konturlinienniveaus auch die Ausläufer noch miterfaßt werden.

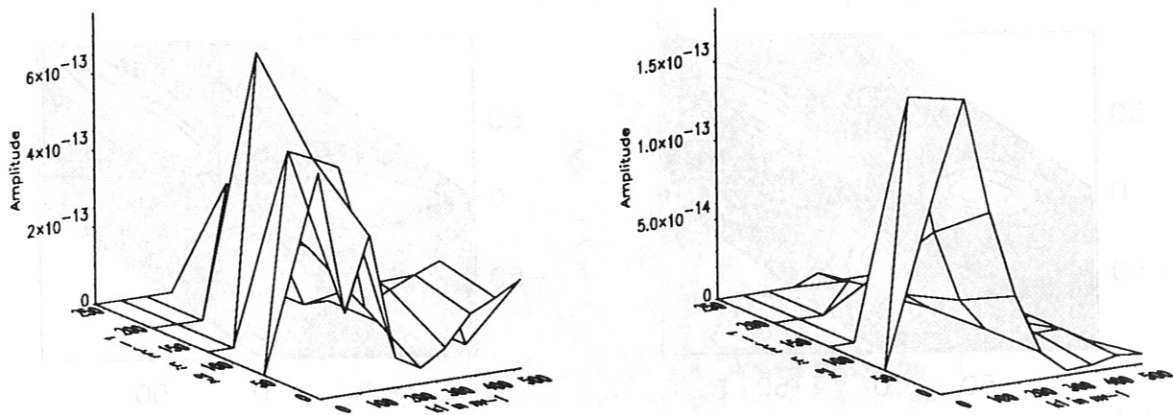


Abbildung 43: DAS k -BISPEKTRUM DER OHMSCHEN UND DER H-PHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 30717. Man sieht dem linken k -Bipektrum, das in der ohmschen Entladungsphase gewonnen wurde, an, daß es von statistischem Rauschen dominiert wird. Im Gegensatz dazu erscheint das k -Bispektrum der H-Phase (rechte Abbildung) wesentlich glatter und besser im k -Raum lokalisiert. Dies ist ein klares Indiz dafür, daß der Einfluß des Rauschens einer stärker werdenden Kopplung gewichen ist.

7.1.5 Das k -Bispektrum in der H-Mode

In der k -Analyse der H-Mode setzt sich der Trend fort, der bereits beim Übergang von der ohmschen zur L-Phase festgestellt wurde. Das k -Bispektrum der ASDEX-Entladung 30717 (Abb. 43 rechts) ist gegenüber dem k -Bispektrum der ohmschen Phase (Abb. 43 links) deutlich besser definiert und die Bikohärenz, die in der ohmschen Phase (Abb. 44 links) noch völlig zufällig wirkt, zeigt in der H-Phase (Abb. 44 rechts) klare Resultate. Das Maximum der Bikohärenz (Abb. 44 rechts) ist mit 21% weit über der Nachweisgrenze und der Abfall zu hohen k -Werten hin ist deutlich ausgeprägt. Diese grundlegenden Unterschiede in Bispektrum und Bikohärenz finden sich natürlich auch in der Dreifach-Korrelation wieder. Da diese Korrespondenz aber bereits aus der L-Phase bekannt ist, braucht hier nicht mehr darauf eingegangen zu werden.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß in den hier gezeigten Beispielen der Übergang von der ohmschen zur L-Phase in der Frequenzanalyse fast nicht zu detektieren ist, dafür aber in der k -Auswertung deutlich zu erkennen ist. Der weitere Wechsel von der ohmschen oder der L-Phase in die H-Phase ist hingegen besonders stark in der Frequenzanalyse zu finden, während die k -Analyse nur eine weitere Verstärkung des Trends beim Übergang von der ohmschen zu L-Phase liefert. Je nach Plasmasituation ändern sich also die Kopplungsparameter in Frequenz- und k -Raum getrennt, weswegen nach Möglichkeit immer beide Analysen durchzuführen sind.

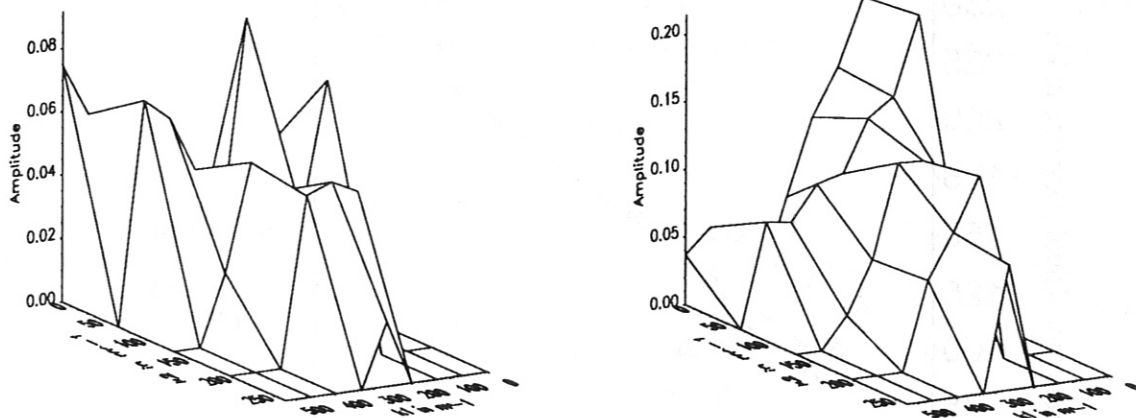


Abbildung 44: DIE K-BIKOHÄRENZ DER OHMSCHEN UND DER H-PHASE DER ASDEX-ENTLADUNG 30717. Das Maximum der k -Bikohärenz liegt in der ohmschen Entladungsphase (linke Abbildung) mit 9% unter der Nachweisgrenze, die sich aus der Abschätzung der statistischen Signifikanz anhand der Anzahl der Mittelungen zu etwa 11% berechnet. Im Gegensatz dazu liegt das Maximum in der H-Phase mit 21% deutlich über der statistischen Nachweisgrenze

7.2 Vergleich einzelner wesentlicher Parameteränderungen

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die Änderungen des Kopplungsverhaltens in verschiedenen Einschlußphasen dadurch charakterisiert, daß wir die Bispektren und Dreifach-Korrelationsfunktionen zu verschiedenen Entladungen berechnet und diskutiert haben. Bei der Auswertung der Ergebnisse wurde einigen bestimmte Größen, wie z.B. dem Maximum der Bikohärenz oder der Breite der Kopplungszone aus der Biphasen, besondere Aufmerksamkeit geschenkt. In diesem Abschnitt wollen wir ausschließlich das Verhalten dieser Werte vergleichen, auch wenn wir dabei bereits auf einen wesentlichen Teil der Informationsfülle der Bispektralanalyse verzichten müssen.

Die wohl am auffälligsten variierenden Größe ist das Maximum der Bikohärenz. In der ohmschen und L-Phase liegt es zwischen 10% und 20%, in der H-Phase kann es bis auf etwa 30% anwachsen. Besonders in der H-Phase ist aufgefallen, daß mit der steigenden Bikohärenz auch eine Verbreiterung der Kopplungszone verbunden war. Untersucht man diesen Zusammenhang genauer und trägt die Breite der Kopplungszone über dem Maximum der Bikohärenz auf (Abb. 45), so tritt ein bemerkenswertes Ergebnis zu Tage: Die Breite der Kopplungszone scheint unabhängig von der Entladungsphase eine lineare Funktion des Maximums der Bikohärenz zu sein. Das heißt, daß ein höheres Maximum immer mit einer breiteren Kopplungszone verbunden ist und vice versa. Diese beiden Größen sind also keineswegs unabhängige Parameter, sondern direkt voneinander abhängig. Dies führt zu einer Frage von grundlegender Bedeutung: Ist die Breite der Kopplungszone mit der Methode der Bispektralanalyse überhaupt bestimmbar? Ein Weg zur Überprüfung

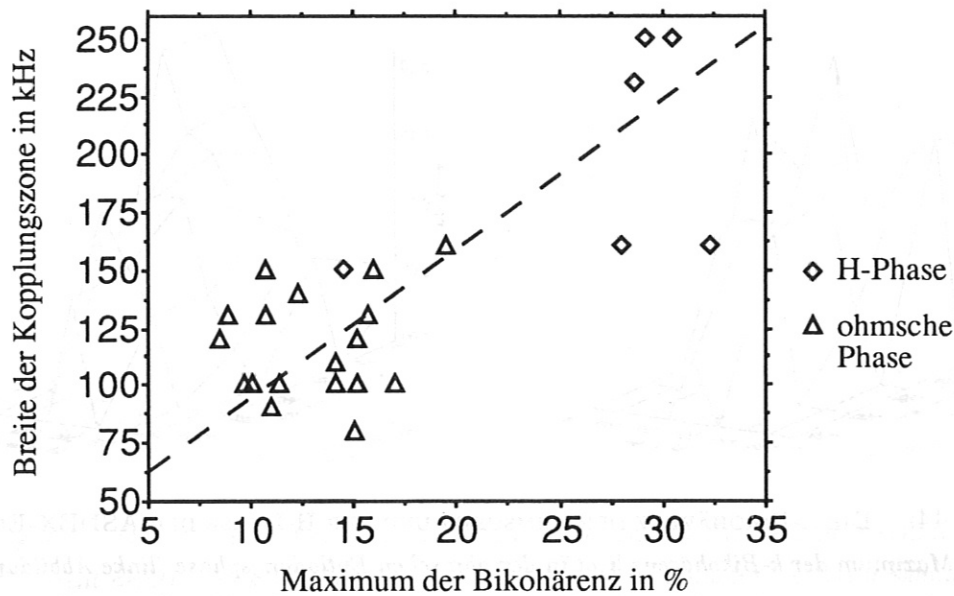


Abbildung 45: BREITE DER KOPPLUNGSZONE IN ABHÄNGIGKEIT VOM MAXIMUM DER BIKOHÄRENZ. Die Breite der Kopplungszone scheint mit wachsendem Maximum linear zu wachsen. Dies führt zu dem Schluß, daß die Breite der Kopplungszone, die aus der Biphasen bestimmt wird, nicht durch die physikalische Breite des Wechselwirkungsmechanismus, sondern durch das Verhältnis von Rauschleistung zu Signalleistung gegeben ist. Die gemessene Breite der Kopplungszone stellte also nur eine Untergrenze für die Zahl der Frequenzen dar, die an der Wechselwirkung teilnehmen.

der Ergebnisse wäre, die Breite der Kopplungszone, die man aus dem Gebiet gleicher Biphasen gewinnt, mit der Halbwertsbreite der Bikohärenz zu vergleichen. Diese Methode liefert leider keine genauen Ergebnisse, da die Halbwertsbreite der Bikohärenz wegen der zu geringen Auflösung in jeder Entladungsphase einen nahezu konstanten Wert annimmt. Zur Klärung dieser Frage greifen wir auf eine numerische Simulation zurück. Das Spektrum eines echten Plasmasignals wird mit einer für alle Frequenzkomponenten gleichen konstanten Phase versehen. Diese gleiche Phase wird in der Bispektralanalyse als Kopplung interpretiert und ergibt eine Bikohärenz von fast 100% auf der ganzen Frequenzebene. In einem nächsten Schritt wird diesem Signal etwas Rauschen überlagert. Die Bispektralanalyse ergibt nun ein Bild, das dem echten Plasmasignal sehr stark ähnelt: Die leistungsstarken Frequenzkomponenten werden von dem Rauschen nur wenig beeinflusst und ergeben eine weiterhin sehr große Bikohärenz, während die Bikohärenz zu den leistungsschwachen Komponenten hin stark abfällt. Bei einer geeigneten Wahl der Amplitude des additiven Rauschens läßt sich so die Breite der Kopplung sehr genau dem Ergebnis der echten Analyse anpassen. Das Maximum der Bikohärenz ließe sich nun noch durch den Grad der Kopplung im Ausgangssignal beeinflussen und so den echten Gegebenheiten genauer anpassen. Aus dem numerischen Experiment gewinnen wir zwei wichtige Erkenntnisse: Zum einen ist das Maximum der Bikohärenz eine Größe, die das

Plasmaverhalten genau wiedergibt. Bei dem vorhandenen Rauschpegel kann der Wert von maximal 30% nicht auf eine ungenügende Mittelung zurückgeführt werden, sondern weist auf eine nicht vollständige Kopplung der Wellen im Plasma hin. Zum zweiten ist die Breite der Kopplungszone, die wir aus der Biphasen bestimmen, ein Wert, der mit etwas Vorsicht zu interpretieren ist. Die gleichphasige Zone in der Biphasen bestimmt nur die untere Grenze für die Breite der Kopplungszone. Die Kopplung bei noch höheren Frequenzkomponenten wird eventuell nur wegen der gegenüber dem Rauschen des Plasmas zu geringen Signalamplitude nicht mehr detektiert. Dieses Problem könnte man durch eine Vergrößerung der Zahl der Mittelungen umgehen. Da jedoch die Zahl der Mittelungen quadratisch mit dem mittleren Abfall des Hintergrundniveaus anwächst, ist dieser Weg aus Gründen der beschränkten Rechenzeit und der limitierten Anzahl der zu Verfügung stehenden Meßpunkte nicht gangbar. Alternativ könnte man über mehrere Punkte in der komplexen Bisppektrumsebene mitteln, was wegen der ohnehin schon beschränkten Auflösung aber auch nur einen marginalen Erfolg zeigt.

Der zweite globale Parameter, der untersucht werden muß, ist die Biphasen. Trägt man die mittlere Biphasen in der Kopplungszone über dem Maximum der Bikohärenz auf (Abb. 46), so erkennt man, daß diese immer einen konstanten Wert von etwa -0.98 oder $-\pi/3$ annimmt. Dieser Wert der Biphasen weist auf ein Signal hin, das von Ereignissen gebildet wird, die durch einen steilen Anstieg und einen flachen Abfall charakterisiert werden können (vergl. Abb. 30). Es koppeln also unabhängig von der Entladungsphase und der Stärke der Kopplung alle Wellen immer mit derselben mittleren Biphasen zueinander, was dafür spricht, daß auch der zugrunde liegende Kopplungsmechanismus in allen Fällen derselbe ist.

Die Interpretation der nächsten globalen Parameter, der skewness und der asymmetry, ist wesentlich unklarer. Skewness und asymmetry sind eng miteinander verwandt, da sie im wesentlichen aus den Summen über die Realteile bzw. Imaginärteile im irreduziblen Dreieck des Bisppektrums berechnet werden. Stellt man asymmetry in Abhängigkeit von skewness dar (Abb. 47), so liegen alle Werte in sehr guter Näherung auf einer Geraden, was als Ergebnis der konstanten Biphasen auch nicht anders zu erwarten war. Trägt man diese beiden Größen nun aber als Funktion der Breite des Maximums der Bikohärenz auf, so zeigen sie ein unterschiedliches Verhalten: die asymmetry (Abb. 48 rechts) scheint unabhängig von der Entladungsphase mit steigendem Maximum zu fallen, während die skewness (Abb. 48 links) in der ohmschen Phase einen konstanten Wert von 1.6 und in der H-Phase einen konstanten Wert von etwa 4.5 annimmt. In beiden Fällen ist aber sowohl das Vorzeichen als auch die Größenordnung der skewness identisch, so daß die geringfügigen Unterschiede keinen allzugroßen Einfluß auf Signalform und -verhalten haben dürften. Welche der unterschiedlichen Interpretationen des Verhaltens von skewness und asymmetry nun den Plasmadaten eher gerecht wird, ist anhand der geringen Zahl der ausgewerteten Daten nicht festzustellen.

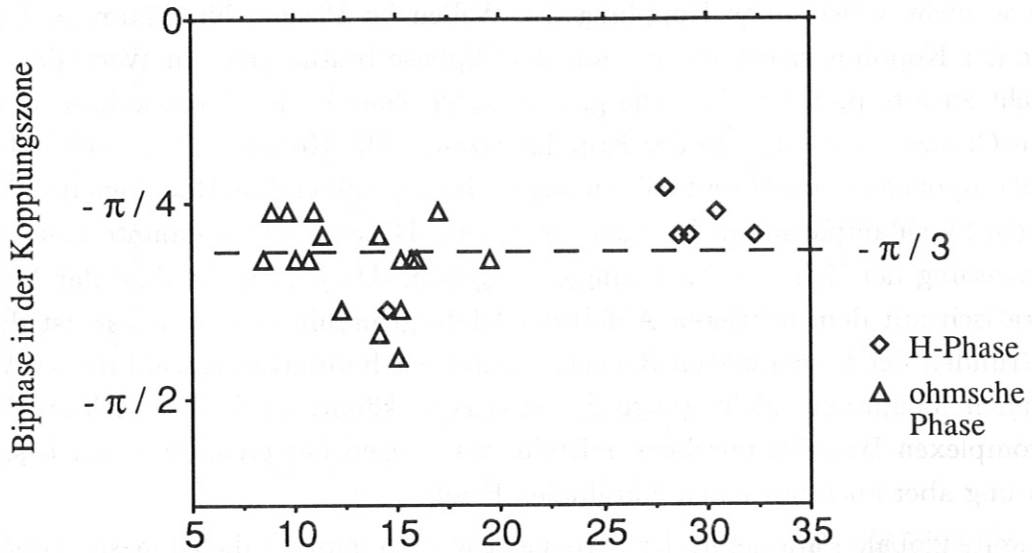


Abbildung 46: DIE BIPHASE IN DER KOPPLUNGSZONE IN ABHÄNGIGKEIT VOM MAXIMUM DER BIKOHÄRENZ. Die relative Phasenverschiebung zwischen den drei koppelnden Wellen in der Wechselwirkungszone ist unabhängig von der Art der Entladung und der Höhe des Maximums der Bikohärenz und beträgt etwa $-\pi/3$. Der zugrunde liegende Wechselwirkungsmechanismus ist also in allen Fällen der gleiche.

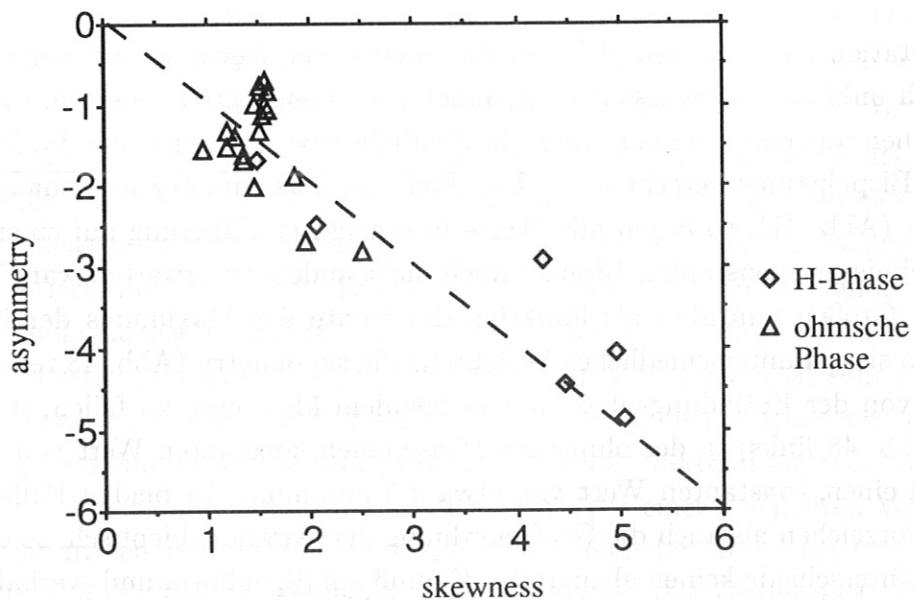


Abbildung 47: DIE ASYMMETRY IN ABHÄNGIGKEIT VON DER SKEWNESS. Entsprechend der für alle Phasen konstanten Biphase liegen die Punkte in guter Näherung auf einer Geraden.

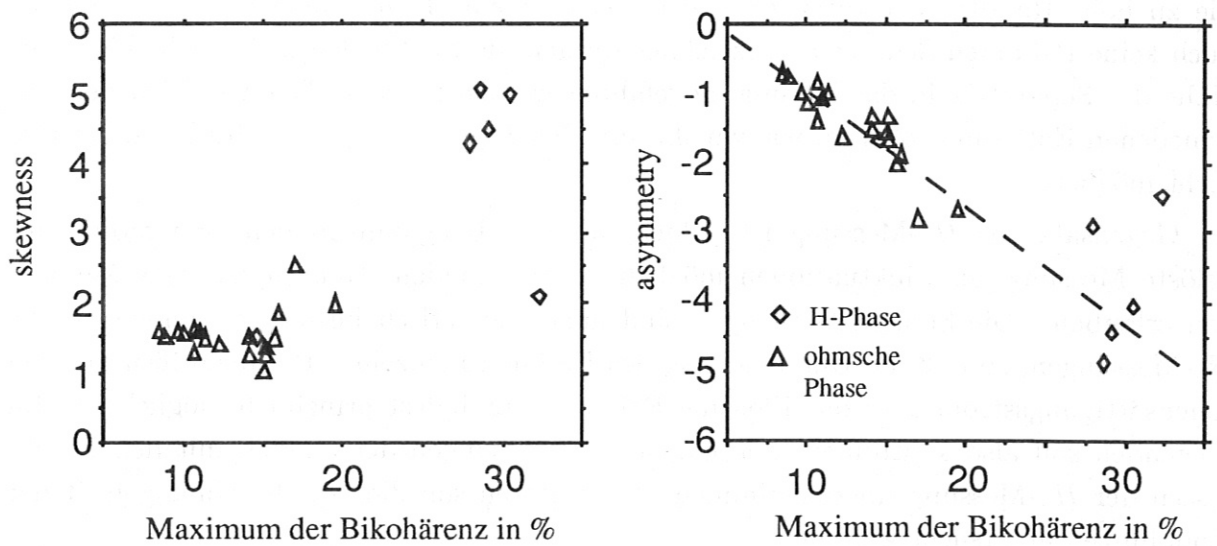


Abbildung 48: SKEWNESS UND ASYMMETRY IN ABHÄNGIGKEIT VOM MAXIMUM DER BIKOHÄRENZ. *Es ist nicht klar ersichtlich, ob die skewness in Abhängigkeit von der Entladungsphase zwei verschiedenen diskrete Werte annimmt, oder ob sie unabhängig von der Entladungsphase linear mit dem Maximum der Bikohärenz wächst. Die asymmetry fällt hingegen linear mit dem Maximum der Bikohärenz, unabhängig von der Entladungsphase.*

8 Auswertung einiger Entladungen mit Langmuir-Sonden

8.1 Einsatzbereich der Langmuir-Sonden

Da die Sonden physikalischen Kontakt mit dem Plasma haben, gibt es nur einen begrenzten Operationsbereich, innerhalb dessen die Sonden sinnvoll eingesetzt werden können. Zum einen dürfen sie nicht zu weit ins Plasma hineingefahren werden, da sie dort schmelzen würden. Ihr Einsatzgebiet ist deswegen auf die Untersuchung der Abschälsschicht eingeschränkt. Zum anderen können die Sonden nicht in Entladungen eingesetzt werden, die zu hohe Randtemperaturen erzeugen. Aus diesem Grund können mit den Sonden auch keine H-Moden Schüsse aufgezeichnet werden, da die Sonden nicht mehr bis in die Nähe der Separatrix in das Plasma eingefahren werden können. Ein Vergleich der verschiedenen Entladungsphasen, wie wir ihn mit den H_α -Messungen durchführten, ist also nicht möglich.

Im Gegensatz zur H_α -Messung ist jedoch mit den Langmuir-Sonden eine radial aufgelöste Messung der Fluktuationen möglich, da die Sonden streng lokalisierte Messungen erlauben. Die Sonden-Messungen sind auch theoretisch besser verstanden als die H_α -Messungen, so daß die Untersuchung des Einflusses einzelner Plasmagrößen auf den Ionensättigungsstrom oder das Floating Potential zumindest prinzipiell möglich ist. Im Folgenden soll also kontrolliert werden, ob die Messungen der Sonden mit den Ergebnissen der H_α -Messung übereinstimmen. Desweiteren soll die radiale Abhängigkeit der Kopplungen untersucht werden.

8.2 Messungen des Ionensättigungsstroms

Als erstes wollen wir unsere Aufmerksamkeit dem Ionensättigungsstrom zuwenden, da dieser genauso wie die Intensität des H_α -Lichts proportional zur Elektronendichte ist. Bereits am ersten Plot, der Darstellung des Bispektrums der ASDEX-Entladung 33397 (Abb. 49 links), erkennt man, daß die Auswertung der Ergebnisse sich wesentlich schwieriger gestaltet als bei den vorangegangenen Messungen. Ein Grund hierfür ist, daß die meisten Daten der Sondendiagnostik nur über ein Zeitfenster von 20 msec pro Entladung vorliegen. Zusätzlich ist oft ein Teil der 16 Kanäle für die Messung des Ionensättigungsstroms und der verbliebene Teil zur Messung des Floating Potentials beschalten, so daß nicht für jede Analyse alle Kanäle herangezogen werden können. Deswegen stehen nicht genügend Daten zur Verfügung, um auf eine Mittelungszahl zu kommen, die der Auswertung der H_α -Daten entspräche. Zum anderen ist das Spektrum wesentlich breiter als wir es bis jetzt gewohnt waren. Der Plot der Bikohärenz (Abb. 49 rechts) zeigt, daß diese Verbreiterung auf einen wesentlich höheren Rauschanteil zurückgeführt werden kann. Der

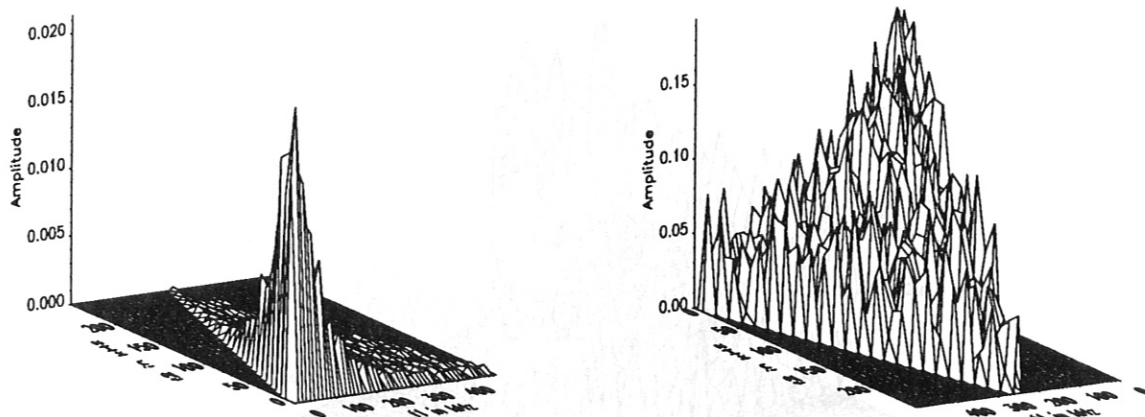


Abbildung 49: DAS BISPEKTRUM UND DIE BIKOHÄRENZ DES IONENSÄTTIGUNGSSTROMS DER ASDEX-ENTLADUNG 33397. Das Bispektrum (linke Abbildung) ist ungewöhnlich breit, was auf ein sehr hohes Rauschniveau zurückzuführen ist. Das Hintergrundniveau der Bikohärenz (rechte Abbildung) liegt mit 5% deutlich über dem rein statistisch bedingten Rauschniveau von 2.5%. Die Form der Bikohärenz und der Abfall zu hohen Frequenzen hin entsprechen aber in etwa den Ergebnissen der H_α -Messungen, wenn man den wesentlich höheren Rauschanteil des Signals beachtet. Die lineare Extrapolation des Abfalls des Maximums ergibt eine Halbwertsbreite der Bikohärenz von 180 kHz. Die Messungen erfolgten 1.5 cm außerhalb der Separatrix.

Mittelwert des Hintergrundes liegt bei etwa 5%, und damit um einen Faktor zwei über dem Wert, den man aus der Abschätzung des statistischen Rauschens bei den zugrundeliegenden 1600 Mittelungen erwarten würde. Das Maximum der Bikohärenz von 19% liegt jedoch signifikant auch über dem erhöhten Rauschniveau. Die Lage des Maximums bei kleinen Frequenzkomponenten, sowie der Abfall zu hohen Frequenzen hin entsprechen dem Bild, das man aus der Analyse der H_α -Daten gewonnen hat, wenn man das zusätzliche Rauschen des Signals berücksichtigt. Die Biphase in der Kopplungszone beträgt wieder etwa $-\pi/3$. Die Bispektralanalyse des Ionensättigungsstroms zeigt also in ihren groben Zügen dasselbe Verhalten wie die Analyse der H_α -Messung. Beide Diagnostiken messen praktisch dasselbe Kopplungsschema für die Fluktuationen der Elektronendichte, mit dem einzigen Unterschied, daß das Signalrauschen der Sondenmessung wesentlich stärker ist.

8.3 Frequenzanalyse eines Radialscans des Ionensättigungsstroms

Während einiger ASDEX-Schüsse wurden die Sonden schnell in das Plasma hinein und wieder herausgefahren. Auf diese Art können radiale Bilder einer Entladung gewonnen werden. Nachteilig wirkt sich jedoch aus, daß nur wenige Punkte innerhalb eines bestimmten Radius-Intervalles zur Mittelung zur Verfügung stehen. Deswegen wird im Folgenden

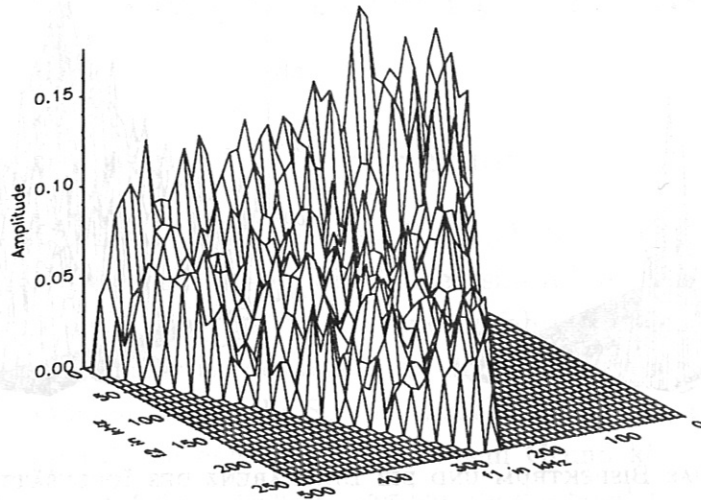


Abbildung 50: DIE BIKOHÄRENZ DES IONENSÄTTIGUNGSSTROMS DER ASDEX-ENTLADUNGEN 32018 UND 32020 AM ÄUSSERSTEN PLASMARAND. *Eine Mauer, die auf Einzelereignisse in den untersuchten Zeitfenstern hinweist, und Rauschen im Rest der Frequenzebene dominieren den Plot. Es sind keinerlei Anzeichen für ein Kopplungsmaximum mit endlicher Abfalllänge, wie bis jetzt diskutiert, zu entdecken. Die Messung erfolgte etwa 5 cm außerhalb der Separatrix.*

über die Meßdaten zweier Entladungen (ASDEX-Schüsse 32020 und 32018) gemittelt, die mit denselben Plasmaparametern erfolgten. Am physikalischen Plasmarand (Abb. 50) zeigt die Bikohärenz eine deutliche Mauer, was nach dem Abschnitt 4.5 auf ein bevorzugtes Auftreten von Einzelereignissen in den untersuchten Zeitfenstern hinweist. Der Rest der Bisppektrumsebene wird völlig vom Rauschen dominiert. Bewegt man die Sonde weiter nach innen so wächst zunächst die Amplitude der Mauer von 17% auf etwa 23% um bei der Annäherung an die Separatrix wieder bis auf 13% zu fallen. Die übrigen Größen der Bisppektralanalyse zeigen bis auf verschieden stark ausgeprägt Rauschanteile keine weiteren Unterschiede auf. Weitere Ergebnisse liefert die Analyse leider nicht, da die Signale zu schlecht definiert sind.

8.4 Frequenzanalyse eines Radialscans des Floating Potentials

Bei dem Radialscan aus Abschnitt 8.3 war die Hälfte der Spitzen für die Messung des Floating Potentials beschaltet. Im Gegensatz zur Messung des Ionensättigungsstroms sind hier die Signale gut definiert. Allgemein scheint für die Sondendaten zu gelten, daß die Messungen des Floating Potentials für die Bisppektralanalyse besser geeignet sind und deutlichere Ergebnisse liefern. Am äußersten Rand des Plasmas zeigt die Bikohärenz (Abb. 51) ein völlig statistisches Verhalten. Der Mittelwert von 2% stimmt gut mit der Abschätzung des Rauschhintergrunds bei 3600 Mittelungen zu 1.6% überein, es sind

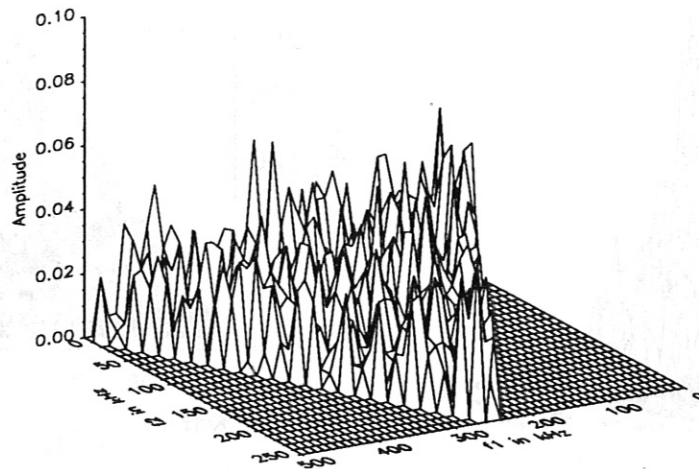


Abbildung 51: DIE BIKOHÄRENZ DES FLOATING POTENTIALES DER ASDEX-ENTLADUNGEN 32018 UND 32020 AM ÄUSSERSTEN PLASMARAND. *Das Bild zeigt, daß keinerlei Wellenkopplung mehr nachgewiesen werden kann und daß das Signal völlig vom Rauschen dominiert wird. Die Messung erfolgte etwa 5 cm außerhalb der Separatrix.*

keine ausgeprägten Maxima zu sehen, und auch kein Ansatz einer Mauerbildung. Am hier nicht abgebildeten Bisppektrum kann man erkennen, daß der Anteil der koppelnden Leistung sehr gering ist, und die Biphase gibt das Bild eines salt-and-pepper-Rauschens wieder, was ebenfalls für eine verschwindende Kopplung im untersuchten Frequenzbereich spricht.

Fährt man die Sonde weiter ins Plasma hinein, kann man wieder eine Kopplung im bekannten Gebiet kleiner Frequenzen nachweisen: Das Maximum der Bikohärenz (Abb. 52 links) wächst bis auf 10% und die Abfallängen entsprechen nach allen Richtungen den Werten, die aus den bisherigen Analysen erwartet werden können. Auch die Biphase (Abb. 52 rechts) weist eine Kopplungszone mit einer Breite von 170 kHz aus. Im Gegensatz zu allen bis jetzt untersuchten Fällen beträgt die Biphase im Maximum $+2.5$, was etwa $\frac{4}{5}\pi$ entspricht.

Bewegen sich die Sonden über diese Zone hinaus auf die Separatrix zu und überqueren diese sogar etwas, so nimmt die Bikohärenz (Abb. 53) wieder deutlich ab und zeigt ein vom Rauschen geprägtes Verhalten. Auch die Biphase zeigt wieder das typische Rauschverhalten. Da dieses Bild bereits zur Genüge bekannt ist, wird es hier nicht nocheinmal wiedergegeben. Die Entwicklung der Kopplungsstärke, die in der Bikohärenz wiedergegeben wird, legt die Vermutung nahe, daß die beobachtete Kopplung nicht aus dem Plasma selbst kommt, sondern eventuell durch eine Wechselwirkung mit Einbauten des Plasmagefäßes hervorgerufen wird.

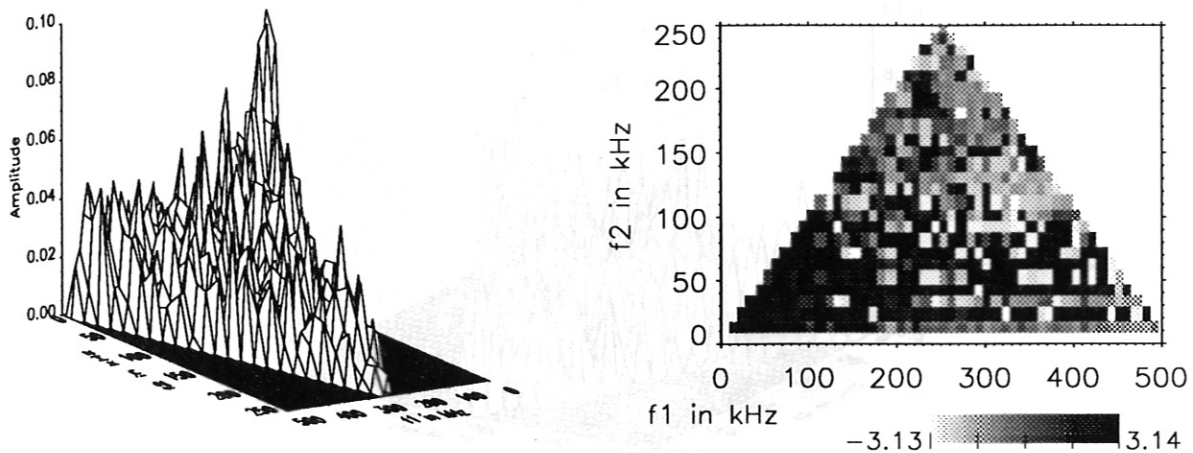


Abbildung 52: DIE BIKOHÄRENZ UND BIPHASE DES FLOATING POTENTIALS DER ASDEX-ENTLADUNGEN 32018 UND 32020 ETWA 2.5 cm AUSSERHALB DER SEPARATRIX. *Deutlich ist in der Bikohärenz (linke Abbildung) ein Kopplungsmaximum zu sehen. Die Kopplungszone kann auch in der Biphase klar erkannt werden. Im Unterschied zu den Auswertungen der H_{α} - und Ionensättigungsstrommessungen beträgt die Biphase in der Wechselwirkungszone etwa $+\frac{4}{5}\pi$.*

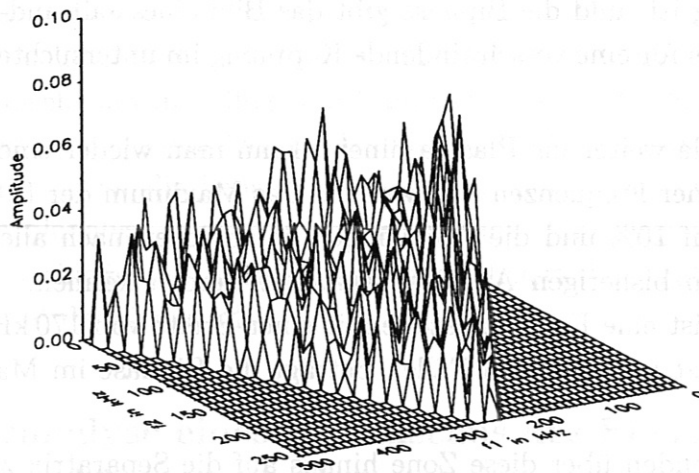


Abbildung 53: DIE BIKOHÄRENZ DES FLOATING POTENTIALS DER ASDEX-ENTLADUNGEN 32018 UND 32020 BEI ANNÄHERUNG AN DIE SEPARATRIX. *Die Kopplungsstärke scheint an der Separatrix wieder stark zurückzugehen. Diese Beobachtung führt zu der Vermutung, daß die beobachteten Kopplungen eventuell auf eine Wechselwirkung mit Einbauten in der Gefäßwand zurückzuführen sind und nicht vom Plasma selbst ausgehen.*

Eine k-Analyse der Daten kann leider nicht durchgeführt werden, da nur ein Teil der Sondenspitzen für die Messung des Floating Potentials beschaltet waren, und diese Spitzen keine äquidistanten Abstände aufweisen.

8.5 k-Analyse eines weiteren Radialscans des Floating Potentials

Für die k-Analyse betrachten wir eine andere Entladungsserie bei etwas anderen Plasmaparametern als im vorangegangenen Beispiel: Die Dichte ist um 1/3 niedriger, das Hauptfeld und der Plasmastrom sind um etwa 1/6 geringer als bei den in Abschnitt 8.4 diskutierten Schüssen. Das Verhalten der Frequenzbikohärenz entspricht in etwa den im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Ergebnissen: im äußeren Randbereich ist das Signal rein statistisch, was eventuell auch auf die zu geringe Plasmaleistung zurückgeführt werden kann. Fährt die Sonde weiter ins Plasma hinein, so wächst die Bikohärenz an um beim Überschreiten der Separatrix wieder abzufallen.

Betrachtet man nun die zugehörigen k-Bikohärenzen, so muß man feststellen, daß die Signale ebenfalls sehr schlecht definiert sind. Der Auswertung liegen 400 Realisationen zu Grunde. Somit liegt das statistische Hintergrundniveau bei 5% und die Nachweisgrenze, oberhalb derer die Signale sicher nicht mehr der reinen Statistik unterworfen sind, liegt bei 12%. Nur das äußerste Signal (Abb. 54 oben links), das in der Nähe der bereits in Abschnitt 8.4 detektierten radialen Zone maximaler Frequenzbikohärenz aufgenommen wurde, liegt mit einem Maximum der k-Bikohärenz von 16% sicher oberhalb dieser Grenze. Alle anderen Signale, die mehr in Richtung der Separatrix (Abb. 54 oben rechts und untere Reihe) aufgenommen worden sind, liegen mit ihren Maxima von 12% bis 13% bereits in einem sehr kritischen Gebiet. Desweiteren werden die Maxima immer breiter und verlagern sich in Richtung größerer k-Werte. Die Biphasen ergibt in allen Fällen einen relative Phasenlage von etwa $\frac{3}{5}\pi$. Eine weitere Auswertung der k-Bispektren ist wegen der relativ schlecht definierten Signale leider nicht möglich.

8.6 Vergleich mit den Ergebnissen der H_α -Diagnostik

Die radial aufgelöste Messung der Fluktuationen mittels der Langmuirsonden hat zwei auffällige Ergebnisse gezeigt. Die Dichtefluktuationen werden von der Sonde wie von der H_α -Diagnostik mit gleichen Charakteristika detektiert. Insbesondere wird in beiden Fällen der Wert der Biphasen in der Kopplungszone mit etwa $-\pi/3$ angegeben. Die Potentialfluktuationen zeigen in der Bikohärenz ein Verhalten, das den Dichtefluktuationen sehr stark ähnelt, unterscheiden sich jedoch mit einer Biphasen von $+\frac{4}{5}\pi$ deutlich von den Dichtemessungen. Die Phasendifferenz zwischen Dichte- und Potentialfluktuationen in der relativen Phasenlage der koppelnden Moden kann im Rahmen der Rechengenauigkeit

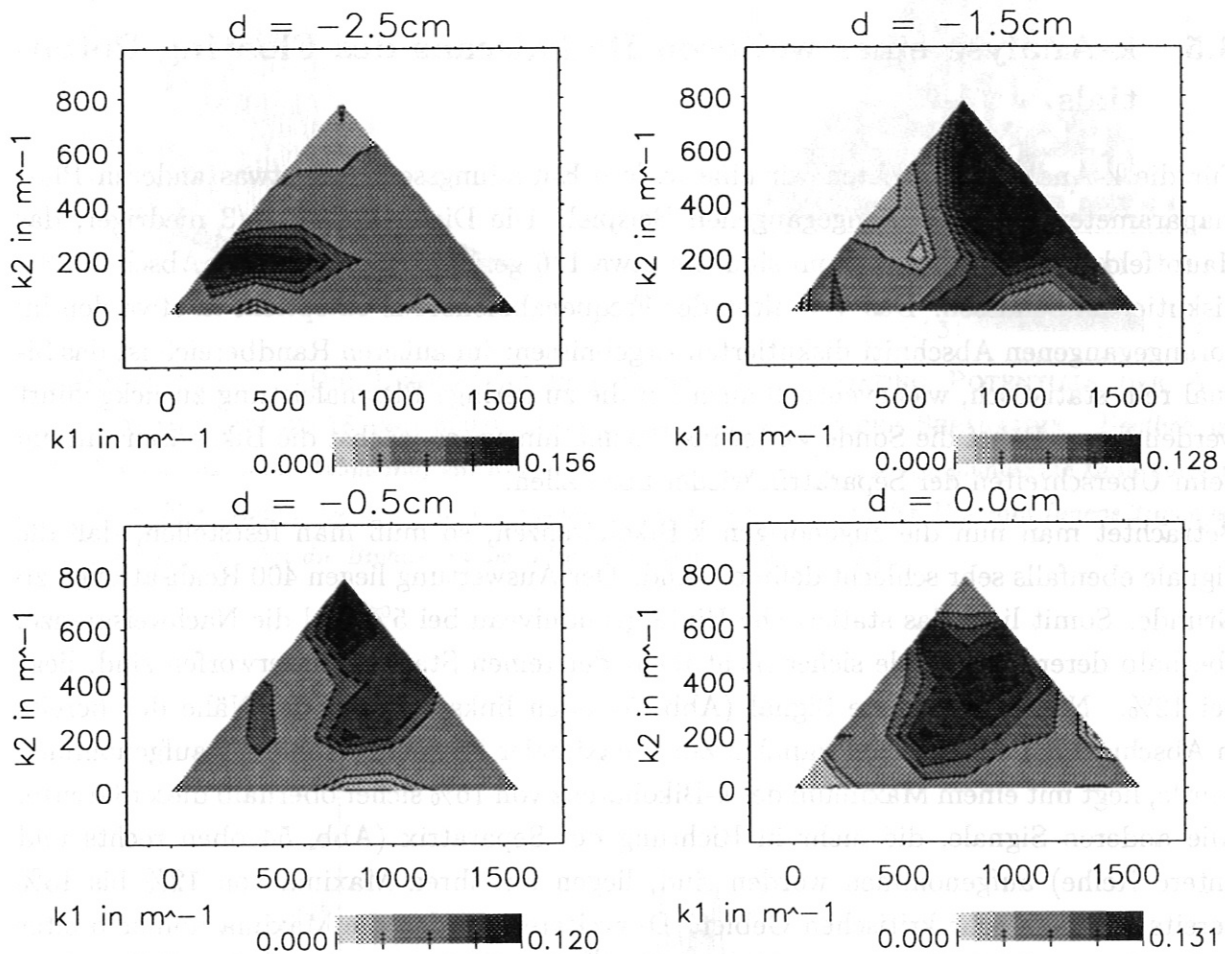


Abbildung 54: DIE K-BIKOHÄRENZ DES FLOATING POTENTIALS IN RADIALER ABHÄNGIGKEIT. Die Abbildungen geben von links oben nach rechts unten eine Annäherung der Sondenspitze an die Separatrix wieder. Der Plot links oben entspricht der Position, die am weitesten von der Separatrix entfernt ist. Die Position $d = 0.0$ cm entspricht der Messung am Ort der wahren Separatrix. Das Maximum der Bikohärenz der ersten Position, die 2.5 cm außerhalb der Separatrix aufgenommen wurde, liegt deutlich über der Nachweisgrenze von 12%. Die Lage des Maximums bei kleinen k -Werten entspricht den Erwartungen, die man aus der Kenntnis der Dichtefluktuationen hegt. Bei einer weiteren Annäherung an die Separatrix fällt das Maximum der Bikohärenz in die Nähe der Nachweisgrenze. Die Lage des Maximums bei hohen k -Werten ist nicht mehr glaubhaft, ebenso wie die Halbwertsbreite. Die Bilder, die mit Messungen 0.0 cm bis 1.5 cm außerhalb der Separatrix korrespondieren, sind eher für Rauschmessungen charakteristisch.

mit etwa $\delta\phi_B \simeq \pi$ angegeben werden.

An der radialen Position der wahren Separatrix kann keine Drei-Wellen-Kopplung nachgewiesen werden. Bewegt man sich von der Separatrix weg in die Abschältschicht hinein, so kann eine zunächst wachsende nichtlineare Wechselwirkung in den Plasmafluktuationen nachgewiesen werden. Etwa 2.5 cm außerhalb der Separatrix ist die Kopplung am stärksten ausgeprägt. In der ohmschen Entladungsphase, die mit Hilfe der Sonden radial aufgelöst untersucht werden konnte, liegt an dieser Position das Maximum der Bikoherenz bei knapp 20%. Weiter nach außen hin, auf den echten Rand des Plasmas zu, nimmt die Kopplungsstärke wieder stark ab. Die Ursache für das radial streng lokalisierbare Auftreten der Drei-Wellen-Kopplung konnte nicht geklärt werden. Es konnte ebenfalls nicht ausgeschlossen werden, daß die nachgewiesenen Kopplungen auf Wechselwirkungen mit Gefäßeinbauten zurückzuführen sind. Dies steht nicht im Widerspruch zu den Ergebnissen der H_α -Messung, da auch der Hauptanteil des H_α -Lichts aus dem Gebiet außerhalb der Separatrix stammt.

Die Messungen mit den Langmuirsonden ergeben leider keine so deutlichen Ergebnisse wie die der H_α -Emission. Dies kann aber nur zum Teil auf die Tatsache zurückgeführt werden, daß aus technischen Gründen innerhalb eines Sonden-Schusses weniger Datenpunkte als in den H_α -Messungen aufgenommen werden können.

9 Vergleich mit ersten Messungen am Stellarator Wendelstein 7-AS

Die H_α -Diagnostik, mit der am Tokamak ASDEX die Messungen durchgeführt wurden, ist mittlerweile an dem Stellarator Wendelstein 7-AS installiert worden. Zur Messung wird ein Zusatzgaspuls benötigt, der leider aus technischen Gründen zur Zeit nicht gegeben werden kann. Deswegen liegen zur Auswertung nur die Daten aus einer einzigen Entladung mit einer Länge von 10 msec vor. Wegen der daraus resultierenden geringen Anzahl der Mittelungen und der fehlenden Möglichkeit, die Ergebnisse an weiteren Schüssen zu verifizieren, ist diese Auswertung nur als vorläufiger Versuch zu bewerten, dessen Ergebnisse noch mit großen Unsicherheiten behaftet sind.

Am Plot des Bispektrums (Abb. 55) erkennt man, daß auch hier das Maximum bei kleinen Frequenzen liegt und sehr steil zu den höheren Frequenzen hin abfällt. Im sehr deutlich sichtbaren Rauschniveau spiegelt sich die nur geringe Mittelungsanzahl wieder. Der Plot der Bikohärenz (Abb. 56) zeigt ein Maximum bei kleinen Frequenzen, das mit 11% über der Nachweisgrenze von 7% liegt, die sich aus den 1600 Mittelungen ergibt. Der Großteil der $f_1 f_2$ -Ebene wird von einem Rauschniveau beherrscht, dessen Mittelwert mit der Abschätzung über die Zahl der Realisationen von 2.5% gut übereinstimmt. Auch die Biphasen (Abb. 57) gibt die Dominanz des Rauschens wieder, nur eine kleine Kopplungszone von 60 kHz Breite ist zu entdecken. Nach den Ergebnissen der vorangegangenen Abschnitte ist dies jedoch in der geringen Bikohärenz begründet. Die wahre Kopplungszone kann durchaus wesentlich breiter sein. Dennoch liefert die Biphasen ein weiteres wesentliches Ergebnis. Der Wert der Biphasen in der Kopplungszone beträgt in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Auswertungen der ASDEX-Daten wieder etwa $-\pi/3$. Auch die Dreifach-Korrelation (Abb. 58) zeigt ein Bild, das den bekannten Ergebnissen entspricht, auch wenn es stark verrauscht ist.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die nichtlinearen Kopplungsmechanismen der Dichtefluktuationen am Stellarator Wendelstein 7-AS und am Tokamak ASDEX zumindest in dieser ersten Auswertung einander ähnlich sind. Trotz des verschiedenen Einschlußkonzepts und der unterschiedlichen geometrischen Dimensionen beider Experimente, zeigen sie ein ähnliches Verhalten in der Bikohärenz und nehmen denselben Wert für die Biphasen, die relative Phasenlage der koppelnden Moden, an. Um diese Entsprechungen besser zu begründen, wäre noch eine Vielzahl weiterer Untersuchungen nötig.

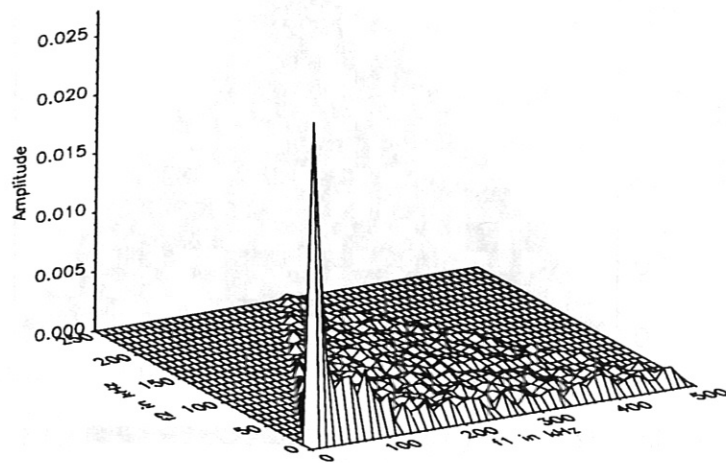


Abbildung 55: DAS BISPEKTRUM DER WENDELSTEIN-ENTLADUNG 16306. *Das Maximum und die Abfallängen des Bispektrums stimmen gut mit den Messungen am Tokamak ASDEX überein. Das im Vergleich zu hohe Hintergrundniveau liegt in der zu geringen Mittelungsanzahl begründet.*

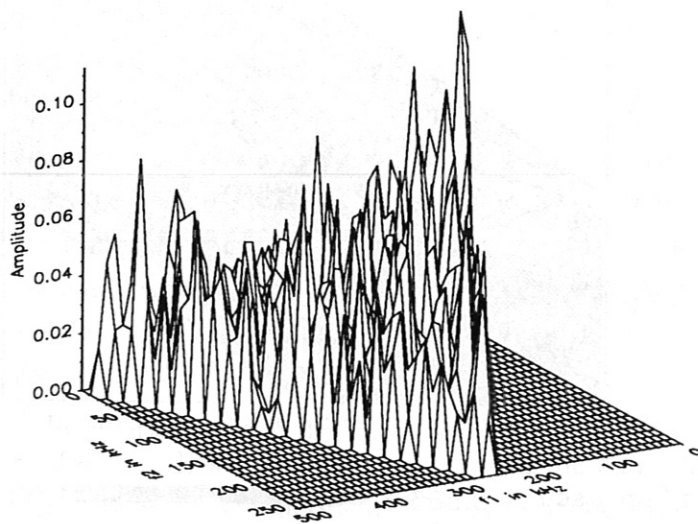


Abbildung 56: DIE BIKOHÄRENZ DER WENDELSTEIN-ENTLADUNG 16306. *Das Maximum der Bikoherenz liegt zwar oberhalb der Nachweisgrenze von 7% ist aber von starkem Rauschen umgeben.*

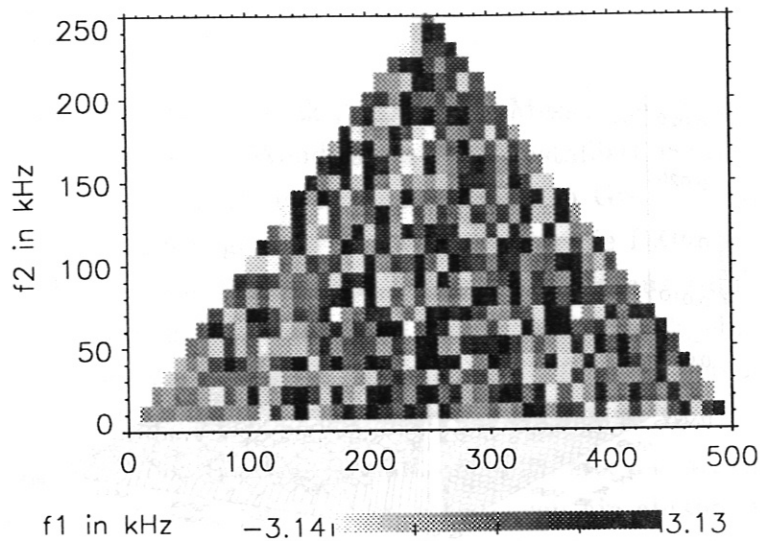


Abbildung 57: DIE BIPHASE DER WENDELSTEIN-ENTLADUNG 16306. Die Kopplungszone fällt mit einer Breite von 60kHz sehr schmal aus, das im ganzen restlichen Plot vorherrschende salt-and-pepper-Rauschen gibt die zu geringe Mittelungsanzahl wieder. Die Biphase in der Kopplungszone stimmt mit $-\pi/3$ mit den Resultaten überein, die mit der H_α -Diagnostik am Tokamak ASDEX gewonnen wurden.

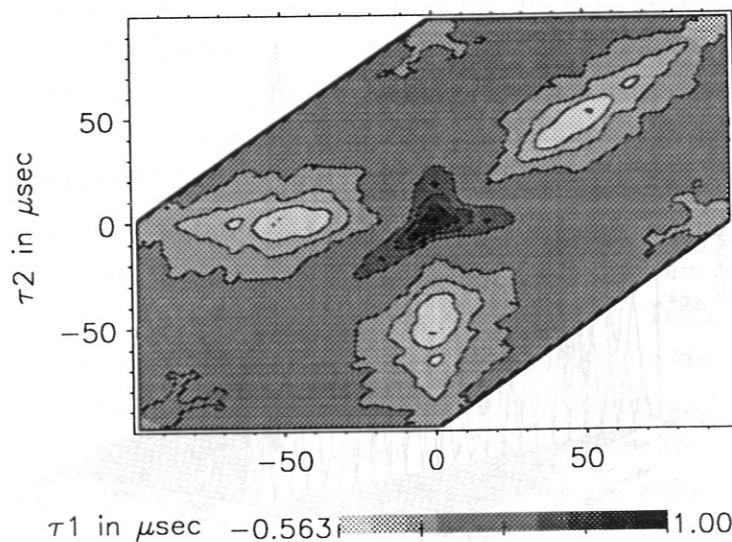


Abbildung 58: DIE DREIFACH-KORRELATION DER WENDELSTEIN-ENTLADUNG 16306. Auch in dieser Darstellung der Daten sieht man sowohl die Ähnlichkeit mit den Ergebnissen der ASDEX-Entladungen, als auch den starken Rauschanteil infolge der geringen Anzahl der zu Verfügung stehenden Datenpunkte.

10 Abschätzungen des Energietransfers durch nichtlineare Kopplung

10.1 Bestimmung der Kopplungskonstanten

In Abschnitt 3.2 wurde ein einfaches Modell vorgestellt, das über eine 3 Wellenkopplung Wechselwirkungen der einzelnen Elementarschwingungen im Plasma untereinander einführte. Zwei Wellen sind über eine Kopplungskonstante A_{kl} miteinander verknüpft (Glg. 26) und stehen in Wechselwirkung mit einer dritten Welle. Der Anteil der Leistung der dritten Welle, der auf die Kopplung zurückgeführt werden kann, ist durch das Quadrat der Bikohärenz gegeben (Glg. 30).

Die Kopplungskonstanten bei den beteiligten Frequenzen können nach Gleichung (27) leicht aus dem Bispektrum gewonnen werden.

$$A_{kl} = \frac{B^*(f_k, f_l)}{\langle |X_k|^2 |X_l|^2 \rangle}$$

Zur Berechnung der Kopplungskonstanten benutzen wir die Daten aus der H-Phase der ASDEX-Entladung 30717, deren Bispektrum in Abschnitt 7.1.4 und 7.1.5 bereits diskutiert wurde. Die Bikohärenz zeigt ein Maximum von 28% mit einer Breite der Kopplungszone von 160 kHz. Da die Definition der Kopplungskonstante nicht mehr symmetrisch in der dritten Komponente X_m ist, muß die Berechnung der Konstante auf dem erweiterten Viereck (Glg. 51) und nicht mehr in dem irreduziblen Dreieck (Glg. 50) durchgeführt werden. Der Betrag der komplexen Kopplungskonstante ist in Abbildung 59 dargestellt. Besonders auffällig ist die extrem hohe Amplitude in der Nähe von $f_1 \simeq -f_2$. Dieses Gebiet entspricht einer Differenzwechselwirkung mit der Frequenz $f_3 = f_1 + f_2 \simeq 0$. Da in allen Signalen der Mittelwert abgezogen wird, sollte diese Fourierkomponente identisch Null sein. Bei großen Frequenzkomponenten ist zusätzlich der Betrag des Bispektrums sehr klein. Wegen der daraus resultierenden Division zweier sehr kleiner Zahlen sind gerade diese Gebiete hoher Amplitude numerisch sehr schlecht definiert. Bei genauere Betrachtung der aus der Bikohärenz bekannten Wechselwirkungszone, bei Frequenzen zwischen 0 und 160 kHz, ist zu erkennen, daß sich die Kopplungsparameter analog zu Bispektrum und Bikohärenz verhalten. Bei den kleinsten Frequenzen ist die Kopplungskonstante am größten, und zu den höheren Frequenzen hin fällt sie gleichmäßig nach allen Richtungen ab. Jenseits dieser Kopplungszone wird die Kopplungskonstante ebenso wie die Bikohärenz vom Rauschen beherrscht. Die Amplitude nimmt Werte an, die das Maximum in der Kopplungszone erreichen und sogar übertreffen. Dieses Verhalten ist in der verschwindenden Leistung bei diesen hohen Frequenzen begründet, die in Gleichung (27) im Nenner eingehen, und so die Kopplungskonstanten sehr stark beeinflussen können. Man darf also keinesfalls einfach die hohen Amplituden der Kopplungskonstante mit einem tatsächlichen Auftreten einer starken Kopplung gleichsetzen, sondern muß erst

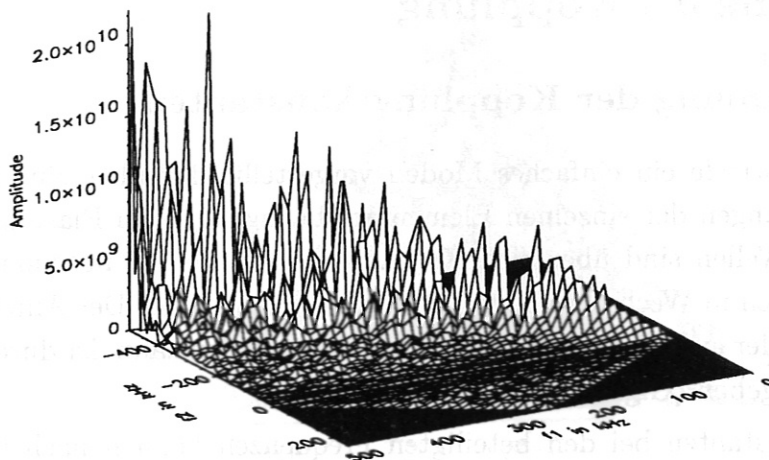


Abbildung 59: DIE AMPLITUDE DER KOPPLUNGSKOEFFIZIENTEN DER ASDEX-ENTLADUNG 30717. Die Kopplungsamplitude, die aus H_α -Messungen in der H-Phase der ASDEX-Entladung 30717 gewonnen wurde, ist hier um 180° gedreht wiedergegeben. Besonders auffällig ist die hohe Amplitude bei $f_1 \simeq -f_2$, die jedoch aus einer numerisch instabilen Rechnung stammt. In der Kopplungszone, die anhand von Bihärenz und Biphasie auf das Gebiet zwischen 0 und 160 kHz bestimmt wurde, fällt die Kopplungskonstante gleichmäßig mit steigender Frequenz ab. Der Rest der Bisppektrumsebene, der vom Rauschen dominiert wird, zeigt in dieser Darstellung ebenfalls hohe Kopplungskoeffizienten. Diese sind auf die Normierung mit verschwindender Leistung zurückzuführen.

hinterfragen, ob die Kopplung in den betreffenden Gebieten gegeben ist. In der Phase der komplexen Kopplungskonstanten (Abb. 60) spiegelt sich ebenfalls dieses widersprüchliche Verhalten wieder. In der ursprünglichen Kopplungszone ist die Phase der Kopplungskonstanten konstant, in dem übrigen Gebiet zeigt sie ein Rauschverhalten, unbeeinflusst von der Größe der Amplitude. Die konstante Phase ist gleich der konstanten Biphasie bzw. ihrem konjugiert komplexen Wert, da in Gleichung (27) außer dem Bisppektrum nur noch reelle Größen eingehen.

Die Darstellung der Kopplungsmechanismen durch Gleichung (26) ist sicher wesentlich zu einfach um der Wirklichkeit nahe zu kommen. Es stehen ja nicht nur 3 Wellen miteinander in Verbindung und es wird nicht die ganze Leistung einer Mode nur von einer Kopplung bestimmt, sondern wir haben im Plasma den Fall einer kontinuierlichen Frequenzverteilung, wobei praktisch jede Mode mit jeder anderen wechselwirken kann. Durch die Breite der Kopplungszone wird eine Untergrenze für die Ausdehnung dieses Kopplungsgebietes angegeben, eine Obergrenze ist eventuell nur durch den Leistungsabfall bestimmt. Modelle, die dieses komplexe Szenario beschreiben wollen, fallen deswegen wesentlich komplizierter aus. Ihnen allen ist gemeinsam, daß sie eine Zeitabhängigkeit beinhalten und über alle vorkommenden Frequenzen summieren [Kim1980a, Ritz1986a]. Damit wird die

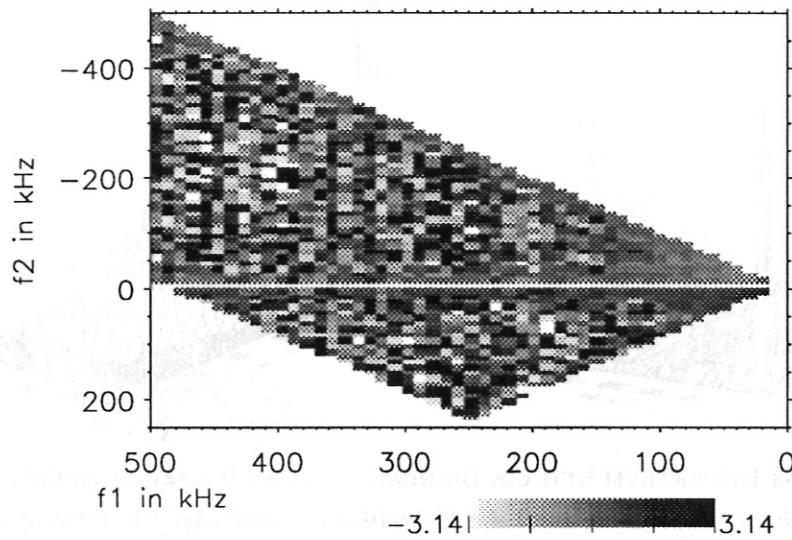


Abbildung 60: DIE PHASE DER KOPPLUNGSKOEFFIZIENTEN DER ASDEX-ENTLADUNG 30717. Da in der Berechnung der Kopplungskoeffizienten (Glg. 27) das komplex konjugierte Bisppektrum die einzige komplexe Größe ist, entspricht der Phasen-Plot dem Plot der Biphasen. Die Phase der Kopplungskonstanten gibt deswegen auch die Wechselwirkungszone richtig wieder.

Berechnung naturgemäß schwieriger. Für die Bisppektralanalyse bedeutet dies, daß Kreuzbisppektrale berechnet werden müssen, am besten sogar kf-Kreuzbisppektrale. Da dies nicht mehr im Rahmen dieser Diplomarbeit durchgeführt werden konnte, werden hier nur die Ansätze und die zu erwartenden Ergebnisse diskutiert.

10.2 Vergleich mit den Ergebnissen eines Rauschsignals

Die Berechnung der Kopplungskonstanten ist, wie die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnittes zeigen, numerisch nicht sehr stabil. Um einen Eindruck von der Güte der Analyse zu bekommen, wird sie nun mit einem Rauschsignal wiederholt. Da das Testsignal in seinen charakteristischen Eigenschaften so weit wie möglich dem echten Plasmasignal entsprechen soll, wird als Ausgangssignal das echte Plasmasignal, das aus der H-Phase der ASDEX-Entladung 30717 gewonnen wurde, verwendet. Dieses Signal, das im vorangegangenen Abschnitt diskutiert wurde, wird fouriertransformiert. Jede Komponente wird nun mit einer zufälligen Phase multipliziert und anschließend wieder zurück transformiert. Auf diese Art erhalten wir ein Signal, das im Spektrum identisch mit dem Ausgangssignal ist, aber keinerlei nichtlineare Kopplung mehr enthält. Dies wird durch die Bisppektralanalyse bestätigt: Das Bisppektrum (Abb. 61 links) zeigt ein deutliches Maximum bei den kleinen, leistungsstarken Frequenzen, wie es aus der Analyse echter Daten bekannt ist, die Bikoherenz ist jedoch eher für ein Rauschsignal charakteristisch. Sie besitzt kein eindeutiges Maximum und ihre Werte liegen überall unter der Nachweisgrenze von knapp

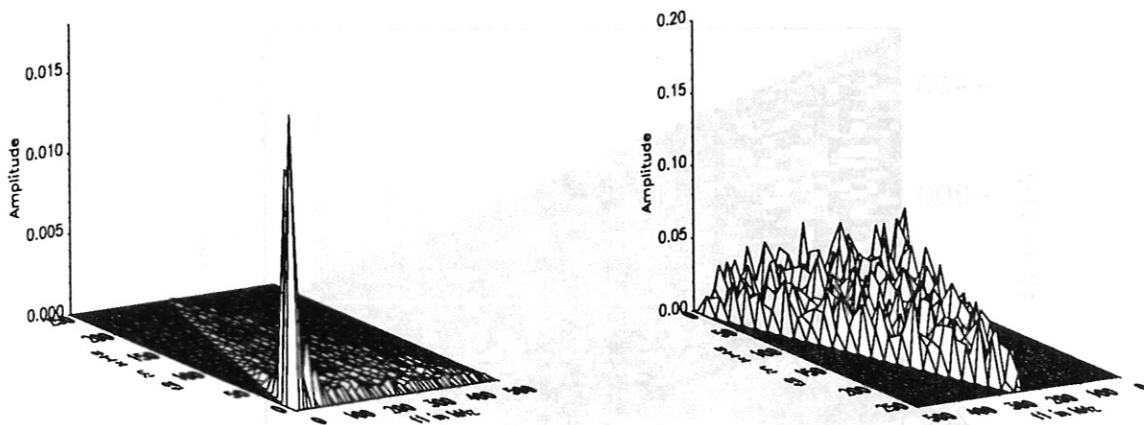


Abbildung 61: DAS BISPEKTRUM UND DIE BIKOHÄRENZ EINES WEITEREN RAUSCHSIGNALS. Das Testsignal wurde aus echten Plasmadaten durch die Multiplikation sämtlicher Fourierkomponenten mit einer zufälligen Phase gewonnen. Das Bild des Bispektrums (links) entspricht den bekannten Bildern echter Signale, während in der Bikohärenz (rechte Abbildung) keine herausragende Kopplung mehr nachgewiesen werden kann.

6%. Berechnet man nun analog zu Abschnitt 10.1 die Kopplungskoeffizienten (Abb. 62 links), so ergibt sich ein erstaunliches Bild: Die Amplitude der Kopplungskonstanten stimmen bis auf einen Faktor zwei auf der ganzen Frequenzebene mit den Werten überein, die aus dem echten Plasmasignal (Abb. 59) gewonnen wurden. Die Tatsache, daß in diesem Signal keine Kopplung erfolgt, wird nur durch die Phase der Kopplungskoeffizienten (Abb. 62 rechts) wiedergegeben. Sie zeigt das hinlänglich bekannte Rauschverhalten. Die Kopplungskonstante ist also wie das Bispektrum, das ebenfalls von der Amplitude der Rauschkomponenten abhängt, keine gute Größe, um eine eventuell vorhandene Kopplung zu charakterisieren. Diese Eigenschaft der Kopplungskoeffizienten hängt auch nicht von dem verwendeten Modell ab. Auch ein wesentlich ausgefeilteres Modell [Ritz1986a] liefert keine wesentlich besseren Ergebnisse.

10.3 Abschätzung des Leistungsflusses zwischen den Moden

In [Ritz1988b, Ritz1989b, Kim1980a] wird der Vorschlag gemacht, den Leistungsfluß zwischen einzelnen Frequenzkomponenten durch die *power transfer function* $T(f_1, f_2)$ zu beschreiben. Die power transfer function ist in diesem Modell der Realteil des Produkts aus Kopplungskoeffizient und Bispektrum. Durch die Leistungsgewichtung, die implizit in einer Multiplikation mit dem Bispektrum liegt, verschwinden die unglaublichen Extrema der Kopplungskoeffizienten wieder (Abb. 63). Das in Abbildung 59 behandelte echte Plasmasignal zeigt nur bei den kleinsten Frequenzkomponenten (Abb. 63) eine nicht-verschwindende power transfer function. Fast auf der ganzen Frequenzebene nimmt sie

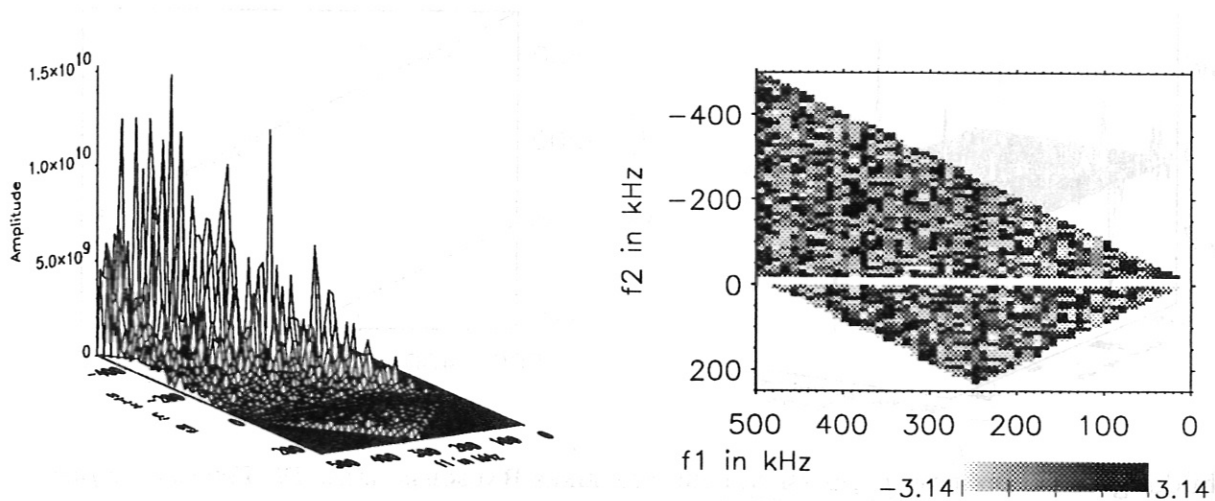


Abbildung 62: BETRAG UND PHASE DER KOPPLUNGSKOEFFIZIENTEN EINES RAUSCHSIGNALS. Beide Plots sind wieder um 180° gedreht dargestellt. Das verwendete Testsignal hat das Spektrum eines echten Plasmasignals und eine zufällige Phasenbeziehung. Obwohl es keine nichtlineare Kopplung enthält, ähnelt der Plot des Betrags der Kopplungskonstanten (linke Abbildung) dem Plot des echten Plasmasignals (Abb. 59) verblüffend. Erst die Phase der Kopplungskoeffizienten (rechte Abbildung) enthüllt den Zufallscharakter der Ausgangsdaten.

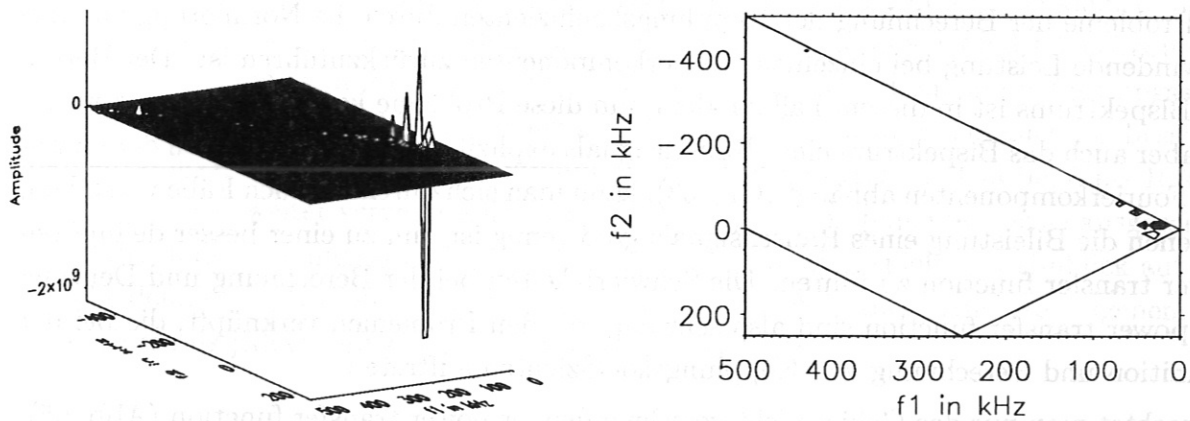


Abbildung 63: DIE POWER TRANSFER FUNCTION DER ASDEX-ENTLADUNG 30717. Der Rechnung liegen H_α -Messungen in der H-Phase der ASDEX-Entladung 30717 zugrunde. Beide Plots sind wieder um 180° gedreht dargestellt. In dem Gitternetzplot ist zu erkennen, daß die power transfer function in nur wenigen Punkten nicht verschwindende Werte annimmt. Die Konturendarstellung lokalisiert diese Extrema bei den kleinsten aufgelösten Frequenzen.

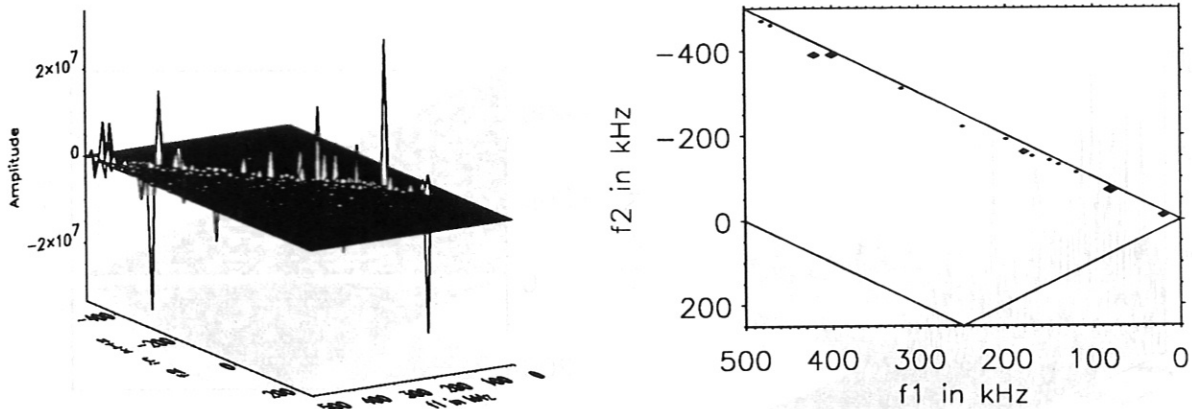


Abbildung 64: DIE POWER TRANSFER FUNCTION EINES RAUSCHSIGNALS. Die Extrema der power transfer function des Rauschsignals, das im Spektrum einem echten Plasmasignal entspricht, liegen alle auf der Diagonalen mit $f_1 = -f_2$. Dies ist auf die schlecht bestimmten Kopplungskoeffizienten in eben diesem Bereich zurückzuführen.

Werte sehr nahe bei Null an. Dies ist auch zu erwarten, da das Bispektrum ebenfalls fast auf der gesamten Frequenzebene verschwindende Werte annimmt. Wo aber bereits die Leistung sehr klein ist, kann auch nur eine sehr geringe Leistung zwischen den einzelnen Moden ausgetauscht werden.

Zum Vergleich wurde die power transfer function des Rauschsignals aus Abschnitt 10.2 berechnet. Sie zeigt nur große Werte auf der Diagonalen $f_1 \simeq -f_2$ (Abb. 64), was auf die Probleme der Berechnung der Kopplungskoeffizienten durch die Normierung auf verschwindende Leistung bei einzelnen Fourierkomponenten zurückzuführen ist. Der Betrag des Bispektrums ist in diesem Fall zu klein, um diese Probleme kompensieren zu können. Da aber auch das Bispektrum eines Rauschsignals explizit von den Amplituden der einzelnen Fourierkomponenten abhängt (Glg. 33), kann man sich durchaus auch Fälle vorstellen, in denen die Bileistung eines Rauschsignals groß genug ist, um zu einer besser definierten power transfer function zu führen. Die Schwierigkeiten bei der Berechnung und Deutung der power transfer function sind also sehr eng mit den Problemen verknüpft, die bei der Definition und Berechnung von Kopplungskoeffizienten auftreten.

Betrachtet man nur das Gebiet nicht verschwindender power transfer function (Abb. 65), so erkennt man, daß nur in zwei Punkt ein negativer Leistungsübertrag detektiert wird, in allen anderen Punkten ist er positiv. Die Bilanz geht jedoch in etwa zu Null auf. Ein positiver Leistungstransferkoeffizient bedeutet, daß der Leistungsfluß von den beiden Wellen der Frequenz f_1 und f_2 zu der Summenwelle der Frequenz $f_3 = f_1 + f_2$ hin erfolgt. Ein negativer Koeffizient weist auf einen Leistungsfluß in umgekehrter Richtung hin [Ritz1989b]. Die beiden negativen Leistungstransferkoeffizienten bei den Frequenztripletts $(-10, 20, 10 \text{ kHz})$ und $(-10, 30, 20 \text{ kHz})$ sind gleichzeitig die betragsmäßig größten Ko-

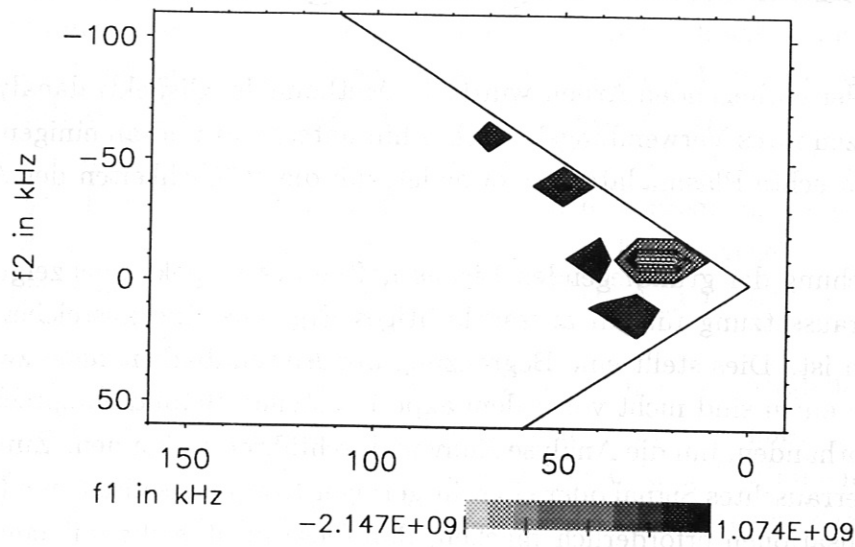


Abbildung 65: EIN AUSSCHNITT AUS DER POWER TRANSFER FUNCTION DER ASDEX-ENTLADUNG 30717. Die Extrema der power transfer function des echten Plasmasignals sind nochmal in einer Ausschnittvergrößerung dargestellt. Nur bei zwei Frequenztriplett nimmt sie einen negativen Wert an (hell gefärbt), was bedeutet, daß die dritte Frequenz f_3 die anderen beiden mit Energie speist. Insgesamt ergibt sich das Bild, daß die niedrigste aufgelöste Frequenzkomponente ihre erste und zweite Harmonische speist, ihrerseits aber von allen höherfrequenten Moden Energie zugeführt bekommt.

effizienten. Sie stehen für einen Leistungsfluß von der Elementarschwingung bei 10 kHz zu ihrer ersten und zweiten Harmonischen. Alle weiteren Extrema der power transfer function sind positive Maxima. Auch bei diesen Kopplungen ist immer die kleinste noch aufgelöste Mode bei 10 kHz beteiligt. Sie speist also in demselben Maß höherfrequente Moden, wie sie auch von ihnen mit Energie versorgt wird. Ein dominanter Leistungsaustausch zwischen Moden größerer Frequenzen wird nicht beobachtet. Da auch bei besserer Frequenzauflösung das Leistungsmaximum in allen Entladungen in etwa bei 8 bis 10 kHz liegt, ist es nicht weiter verwunderlich, daß diese Frequenzkomponente eine so ausgezeichnete Rolle in der leistungsgewichteten power transfer function spielt. Im Hinblick auf die schlecht definierten Kopplungskoeffizienten, die wesentlich in diese Analyse eingehen, ist dieses Ergebnis jedoch mit einigen Unsicherheiten behaftet.

11 Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die Methode der Bispektralanalyse dargestellt, auf die Grenzen ihres Verwendungsbereiches hin untersucht und an einigen ausgewählten Beispielen auf echte Plasmadaten angewendet, um die Möglichkeiten der Analyse aufzuzeigen.

Die Untersuchung der grundlegenden Eigenschaften des Bispektrums zeigt, daß eine wesentliche Voraussetzung für ein aussagekräftiges Ergebnis eine ausreichende Anzahl an Realisationen ist. Dies stellt eine Begrenzung der Anwendbarkeit nach zwei Richtungen hin dar: zum einen sind nicht von jedem experimentellen Befund entsprechend viele Datenpunkte vorhanden, um die Analyse sinnvoll durchführen zu können. Zum zweiten kann ein stärker verrauschtes Signal oder ein sehr geringer Kopplungsanteil eine Mittelung über so viele Realisationen erforderlich machen, daß diese nicht mehr mit einem begrenzten Zeitaufwand auf einem herkömmlichen Rechner verarbeitet werden können. Die Hardwarebegrenzungen liegen vor allem im Speicherplatz, was auf Kosten der Rechenzeit durch das Auslagern von Daten aus dem Hauptspeicher auf Massenspeicher umgangen werden kann. Der Einsatz von Parallelrechner zur Verringerung der Rechenzeit kann in Betracht gezogen werden, da das Problem vieler Mittelungen bei einer begrenzten Parameteranzahl der Architektur dieses Rechnertyps entspricht.

Die Bispektralanalyse zeigt bei Signalen mit linienförmigen Spektren besonders gute Ergebnisse. Sie ist jedoch in Falle reiner Linienspektren nicht zu empfehlen, da alle Informationen mit wesentlich besserer Auflösung und geringerem Zeitaufwand aus den normalen Spektren gewonnen werden können. Sind die Spektren etwas breitbandiger, dann ist die Berechnung der Bispektren und der verwandten Größen sinnvoll. Extrem breitbandige Signale sind für die Bispektralanalyse wieder weniger geeignet, da sie wegen ihres meist sehr schlechten Signal-zu-Rausch-Verhältnisses eine Mittelung über sehr viele Realisationen verlangen. Wie bereits dargestellt sind jedoch den Realisationen sowohl von Seiten der Messung als auch von Seiten der Rechnerkapazität Grenzen gesetzt.

Die Untersuchung der Fluktuationen der Abschältschicht des Plasmas im H_α -Licht, sowie im Ionensättigungsstrom und im Floating Potential der Langmuir-Sonden demonstriert deutlich die Mächtigkeit des entwickelten Diagnoseverfahrens. In allen Signalen konnte unter allen Entladungsbedingungen eine nichtlineare Wechselwirkung nachgewiesen werden. In verschiedenen Entladungsphasen unterscheiden sich die detektierten Wechselwirkungen vor allem in der Höhe der nachgewiesenen Kopplungen. Die Biphasen ist für eine gemessene Plasmagröße jedoch in allen untersuchten Fällen konstant geblieben. Dieses Ergebnis läßt auf eine unter allen untersuchten Bedingungen gleichbleibende Signalform schließen. Da die Signalform unter den hier getroffenen Annahmen durch die Überlagerung einzelner Wellen erklärt werden kann, führt dies zusammen mit dem Nachweis, daß die Wellen untereinander in Wechselwirkung stehen, zu der Vermutung, daß die zugrunde

liegende Wechselwirkung in allen untersuchten Fällen dieselbe Gestalt haben muß. Die Breite der Kopplungszone ist durch die Resultate der Bispektralanalyse nicht genau festgelegt. Die Zone konstanter Biphasen wächst linear mit dem Maximum der Bikohärenz und auch die Halbwertsbreite der Bikohärenz zeigt in etwas geringerem Maße ein ähnliches Verhalten. Die Nachweisgrenze der Kopplung ist also durch das Rauschniveau des Signals festgelegt. Die Kopplung kann sich jedoch auch in Frequenzbereiche erstrecken, deren Amplitude vom Rauschen bestimmt ist. Insgesamt konnte gezeigt werden, daß die Bispektralanalyse eindeutige Ergebnisse liefert, wenn man sie auf Daten der turbulenten ASDEX-Abschältschicht anwendet.

Versucht man die Ergebnisse der Bispektralanalyse auf vorhandene Modelle anzuwenden, so muß man leider erkennen, daß die Ergebnisse nicht eindeutig sind. Ein Testsignal, dessen Fourieramplituden mit einem echten Plasmasignal übereinstimmen ohne jedoch nichtlineare Kopplungsterme zu enthalten, zeigt ähnliche Resultate wie das echte Signal. Dieser Befund stellt jedoch keineswegs die Methode der Bispektralanalyse in Frage, er zeigt nur auf, daß das verwendete Modell der power transfer function nicht sensitiv genug auf die nichtlineare Wechselwirkung reagiert. Eine geeignete Theorie sollte durchaus in der Lage sein, aus den gewonnenen Kopplungscharakteristika eindeutig den Energiefluß oder ähnliche Größen zu berechnen.

Der Einsatzbereich des „Diagnostikwerkzeugs“ ist nicht auf die Untersuchung von Randschichtfluktuationen beschränkt. Ansatzweise wurde die Bispektralanalyse bereits auf Daten der Pelletinjektion an Wendelstein 7-AS angewendet. Sie kann sinnvoll zur Detektion von Wellenkopplungen eingesetzt werden, wenn die Signale in ausreichender Datensatzlänge und mit geeignetem Signal-zu-Rausch-Verhältnis vorliegen.

Zur Vervollständigung der Analysemethoden müßten noch das Kreuzbispektrum und das kf-Bispektrum in den vorhandenen Code implementiert werden. Das Kreuzbispektrum ist besonders in Hinblick auf einen Vergleich mit Vorhersagen der Theorie wichtig, da es die zeitliche oder räumliche Entwicklung eines Signales berücksichtigen kann. Auch die Berechnung der Kreuzbispektren zwischen zwei verschiedenen Signalen kann sehr wichtig sein, da die verschiedenen Plasmaparameter auch untereinander in Wechselwirkung stehen können. Das Frequenzbispektrum stellt eine Integration des kf-Bispektrums über die k-Ebene dar und umgekehrt (Gln. 56 und 57), was einer Mittelung und damit einem Verlust an zugänglicher Information gleichkommt. Diese Information kann jedoch sehr wichtig sein, wie das unterschiedliche Verhalten der f- und k-Bikohärenz beim Übergang von ohmscher zu L-Phase bzw. H-Phase zeigt (Kapitel 7).

Literaturverzeichnis

- [Artsimovich1972a] Lew A. Artsimovich, "Tokamak Devices", *Nuclear Fusion*, **12**, 2, (1972), pp. 215–252.
- [Bessenrodt1990a] M. Bessenrodt-Weberpals, A. Carlson, G. Haas, H.D. Murmann, J. Neuhauser, N. Tsois, H. Verbeek, and the ASDEX-Team, "Characterizing the Edge Plasma of Different Ohmic Confinement Regimes in ASDEX", *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **32**, 1, (1990), pp. 21–31.
- [Bracewell1986a] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, (1986).
- [Brillinger1967a] D. R. Brillinger and M. Rosenblatt, "Asymptotic Theory of Estimates of k-Th Order Spectra", in B. Harris, editor, *Spectral Analysis of Time Series*, (John Wiley & Sons, 1967), pp. 189–232.
- [Bronstein1981a] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, (1981).
- [Chen1984a] Francis F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press, (1984).
- [Elgar1985a] S. Elgar and R. T. Guza, "Observation of shoaling surface gravity waves", *Journal of Fluid Mechanics*, **161**, (1985), pp. 425–448.
- [Endler1990a] M. Endler. Private Mitteilungen, 1990. Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 8046 Garching.
- [Gresillion1988a] D. Grésillion and M. S. Mohamed-Benkadda, "Direct mode-mode coupling observation in the fluctuations of nonstationary transparent fluid", *Physics of Fluids*, **31**, (1988), pp. 1904–1909.
- [Hansen1989a] O. Kofœd-Hansen, H. L. Pécseli, and J. Trulsen, "Coherent structures in numerical simulated plasma turbulence", *Physica Scripta*, **40**, (1989), pp. 280–294.
- [Haubrich1965a] R. A. Haubrich, "Earth noise, 5 to 5000 millicycles per second", *Journal of Geophysical Research*, **70**, (1965), pp. 1415–1426.
- [Hesselmann1983a] Norbert Hesselmann, *Digitale Signalverarbeitung*, Vogel-Buchverlag, (1983).

- [Huld1991a] T. Huld, A. H. Nielsen, H. L. Pécseli, and J. Juul Rasmussen, "Coherent structures in two-dimensional plasma turbulence", *Physics of Fluids (B)*, **3**, (1991), pp. 1609–1625.
- [Kim1979a] Y. C. Kim and E. J. Powers, "Digital bispectral analysis and its applications to nonlinear wave interactions", *IEEE Transactions on Plasma Science*, **7**, (1979), pp. 120–131.
- [Kim1980a] Y. C. Kim, J. M. Beal, E. J. Powers, and R. W. Miksad, "Bispectrum and nonlinear wave coupling", *Physics of Fluids*, **23**, (1980).
- [Langmuir1924a] Irving Langmuir and Harold Mott-Smith, "Studies of Electric Discharges in Gases at Low Pressures, Part I", *General Electric Review*, **17**, 8, (1924), pp. 449–455.
- [Langmuir1924b] Irving Langmuir and Harold Mott-Smith, "Studies of Electric Discharges in Gases at Low Pressures, Part II", *General Electric Review*, **17**, 8, (1924), pp. 538–548.
- [Langmuir1924c] Irving Langmuir and Harold Mott-Smith, "Studies of Electric Discharges in Gases at Low Pressures, Part III", *General Electric Review*, **17**, 9, (1924), pp. 616–623.
- [Langmuir1924d] Irving Langmuir and Harold Mott-Smith, "Studies of Electric Discharges in Gases at Low Pressures, Part IV", *General Electric Review*, **17**, 11, (1924), pp. 762–771.
- [Langmuir1924e] Irving Langmuir and Harold Mott-Smith, "Studies of Electric Discharges in Gases at Low Pressures, Part V", *General Electric Review*, **17**, 12, (1924), pp. 810–820.
- [Manos1984a] D.M. Manos and G.M. McCracken, "Probes for Plasma Edge Diagnostics in Magnetic Confinement Fusion Devices", in D.E. Post and R. Behrisch, editors, *Physics of Plasma-Wall Interactions in Controlled Fusion*, (Plenum Press, 1984), Vol. 131 of *NATO ASI series, Series B, Physics*, p. 135.
- [McPherson1990a] G. McPherson, *Statistics in Scientific Investigation*, Springer-Verlag New York Inc., (1990).
- [Nicolet] Nicolet Instrument Corporation. *System 500, Data Acquisition System*, 1988.

- [Pinkau1989a] K. Pinkau, U. Schumacher, and G.H. Wolf, "Fortschritte der Fusionsforschung mit magnetischem Einschluß", *Physikalische Blätter*, **45**, 2, (1989), pp. 41-47.
- [Priestley1989a] M. B. Priestley, *Spectral analysis and time series*, Academic Press, (1989).
- [Ritz1986a] Ch. P. Ritz and E. J. Powers, "Estimation of nonlinear transfer functions for fully developed turbulence", *Physika D*, **20**, (1986), pp. 320-334.
- [Ritz1988b] Ch. P. Ritz, E. J. Powers, R. W. Miksad, and R. S. Solis, "Nonlinear spectral dynamics of a transitioning flow", *Physics of Fluids*, **31**, (1988), pp. 3577-3588.
- [Ritz1989b] Ch. P. Ritz, E. J. Powers, and R. D. Bengston, "Experimental measurement of three-wave coupling and energy cascading", *Physics of Fluids (B)*, **1**, (1989), pp. 153-163.
- [Rosenblatt1967a] M. Rosenblatt, "Computation and Interpretation of k-th Order Spectra", in B. Harris, editor, *Spectral Analysis of Time Series*, (John Wiley & Sons, 1967), pp. 189-232.
- [Rudyj1987a] A. Rudyj, "Untersuchung der Randschichtfluktuationen am Divertor-Tokamak ASDEX", Report No. IPP III/117, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 1987. Diplomarbeit.
- [Rudyj1990a] A. Rudyj. *Untersuchung transportrelevanter Fluktuationen in der Randschicht von ASDEX*. PhD thesis, Technische Universität München, 1990. Laborbericht IPP III/160, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 8046 Garching.
- [Smith1974a] D.E. Smith, E.J. Powers, and G.S. Caldwell, "Fast-Fourier-Transform Spectral-Analysis Techniques as a Plasma Fluctuation Diagnostic Tool", *IEEE Transactions on Plasma Science*, **2**, 12, (1974), pp. 261-272.
- [Stangeby1984a] Peter C. Stangeby, "The Plasma Sheath", in D.E. Post and R. Behrisch, editors, *Physics of Plasma-Wall Interactions in Controlled Fusion*, (Plenum Press, 1984), Vol. 131 of *NATO ASI series, Series B, Physics*, pp. 41-97.
- [Stangeby1984b] P.C. Stangeby, "Plasma Sheath Transmission Factors for Tokamak Edge Plasmas", *Physics of Fluids*, **27**, 3, (1984), pp. 682-690.

- [Subba1983a] T. Subba Rao, "The Bispectral Analysis of Nonlinear Stationary Time Series with Reference to Bilinear Time-Series Models", in B. R. Brillinger and P. R. Krishnaiah, editors, *Time Series in the Frequency Domain*, (North Holland, 1983), pp. 293-319.
- [Theimer1990a] G. Theimer, "Methoden zur Untersuchung der räumlichen Struktur von Dichtefluktuationen in der Randschicht von Fusionsexperimenten, demonstriert am Divertor-Tokamak ASDEX", Report No. IPP III/169, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 1990. Diplomarbeit.
- [Wesson1987a] John Wesson, *Tokamaks*, Clarendon Press, (1987).
- [Wootton1988a] A.J. Wootton, M.E. Austin, R.D. Bengtson, J.A. Boedo, R.V. Bravenec, D.L. Brower, J.Y. Chen, G. Cima, P.H. Diamond, R.D. Durst, P.H. Edmonds, S.P. Fan, M.S. Foster, J.C. Forster, R. Gandy, K.W. Gentle, R.L. Hickok, Y.X. Hey, S.K. Kim, Y.J. Kim, H. Lin, N.C. Luhmann, S.C. McCool, W.H. Miner, A. Ouroua, D.M. Patterson, W.A. Peebles, P.E. Phillips, B. Richards, Ch.P. Ritz, T.L. Rhodes, D.W. Ross, W.L. Rowan, P.M. Schoch, D. Sing, E.J. Synakowski, P.W. Terry, K.W. Wenzel, J.C. Wiley, X.Z. Yang, X.H. Yu, Z. Zhang, and S.B. Zheng, "Fluctuations and Anomalous Transport (in Tokamaks, Particularity TEXT)", *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **30**, 11, (1988), pp. 1479-1491.
- [Wootton1990a] A.J. Wootton, B. A. Carreras, H. Matsumoto, K. McGuire, W. A. Peebles, Ch. P. Ritz, P. W. Terry, and S. J. Zweben, "Fluctuations and anomalous transport in tokamaks", *Physics of Fluids (B)*, **2**, 12, (1990), pp. 2879-2903.