

**Gleichgewicht und Stabilität
toroidal eingeschlossener Plasmen
mit Massenströmung und anisotropem Druck
- Dissertation -**

J. Geiger

IPP 5/49
Dezember 1992

Betreuer:
Dr. H.P. Zehrfeld



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

2.5 Numerische Rechnungen 59

GARCHING BEI MÜNCHEN

2.5.1 Charakter 59

2.5.2 Test und Forderung 61

2.5.3 Lokale Störungen bei isotropem Druck 64

2.6 Lokale Massenströmung bei isotropem Druck 65

2.6.1 Lokale Störung bei anisotropem Druck 70

3 Stabilität von Plasmen mit anisotropem Druck und Massenströmung 73

3.1 Der Lagrange Formalismus 73

3.2 Die Linearisierung des Variationsprinzips 74

3.3 Die Energieerhaltung 75

3.4 Verbindung zum Hamilton Formalismus 79

3.5 Das Stabilitätsproblem 80

Gleichgewicht und Stabilität toroidal eingeschlossener Plasmen mit Massenströmung und anisotropem Druck

3.5.1 80

3.5.2 Die Stabilitätsgleichung - Dissertation - 83

3.6 Die Eulerische Darstellung der Stabilitätsgleichung 85

3.7 Ein zweifaches Stabilitätskriterium 87

J. Geiger

3.7.1 Vergleich der Stabilitätskriterien mit dem Flussermodell 88

3.8 Gleichgewicht und Störungen in der Ballooning Gleichung 89

3.8.1 Der Ballooning Satz 90

IPP 5/49

Dezember 1992

Betreuer:

Dr. H.P. Zehrfeld

3.8.2 Die Ballooning Gleichungen bei Anisotropem Druck 92

3.8.3 Die Ballooning Gleichungen für verschiedene Geschwindigkeiten 93

A Zur Darstellung von axialsymmetrischen Vektorfeldern 95

A.1 Allgemeine axialsymmetrische Vektorfelder 95

A.2 Divergenzfreie axialsymmetrische Vektorfelder 96

A.3 Spezielle Vektorfelder 97

B Charakterisierende Integrale für axialsymmetrische Gleichgewichte mit
Massenströmung und anisotropem Druck 99

C Tensordarstellung von zeitabhängigen Transformationen 106

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über
die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

2.5	Numerische Rechnungen	59
2.5.1	Charakterisierung von Gleichgewichten	59
2.5.2	Tests und Validierung	61
2.5.3	Toroidale Strömungen bei isotropem Druck	64
2.6	Poloidale Massenströmung bei isotropem Druck	66
2.6.1	Poloidale Strömung und anisotroper Druck	70
3	Stabilität von Plasmen mit anisotropem Druck und Massenströmung	73
3.1	Der Lagrange-Formalismus	73
3.2	Die Durchführung der Variation	74
3.3	Die Energieerhaltung	78
3.4	Verbindung zum Hamilton-Formalismus	79
3.5	Die Stabilitätsgleichung	80
3.5.1	Die Stabilitätsgleichung und die zweite Variation	80
3.5.2	Die Stabilitätsgleichung und die Bewegungsgleichung	83
3.6	Die Eulersche Darstellung der Stabilitätsgleichung	85
3.7	Ein notwendiges Stabilitätskriterium	87
3.7.1	Vergleich der Stabilität unterschiedlicher Plasmamodelle	88
3.8	Stark lokalisierte Störungen: Die Ballooning-Gleichungen	89
3.8.1	Der Eikonalansatz	90
3.8.2	Die Ballooning-Gleichungen in Axialsymmetrie für rein toroidale Geschwindigkeiten	92
3.8.3	Die Ballooning-Gleichungen für rein parallele Geschwindigkeiten	93
A	Zur Darstellung von axialsymmetrischen Vektorfeldern	95
A.1	Allgemeine axialsymmetrische Vektorfelder	95
A.2	Divergenzfreie axialsymmetrische Vektorfelder	96
A.3	Spezielle Vektorfelder	97
B	Charakterisierende Integrale für axialsymmetrische Gleichgewichte mit Massenströmung und anisotropem Druck	99
C	Tensordarstellung von zeitabhängigen Transformationen	106

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
0.1 Energiegewinnung und Kernverschmelzung	4
0.2 Fusionskonzepte	5
0.3 Der magnetische Einschluß	5
0.4 Plasmaheizung	6
0.5 Gleichgewicht und Stabilität	7
0.6 Thema der Arbeit	9
1 Die Flüssigkeitsbeschreibung des Guiding-Center-Plasmas	11
1.1 Das Modell des Guiding-Center-Plasmas	11
1.2 Die Guiding-Center-Flüssigkeit	19
1.2.1 Arbeit und Wärme bei Bewegungen der Guiding-Center-Flüssigkeit	20
2 Axialsymmetrische Gleichgewichte mit Massenströmung und anisotropem Druck	27
2.1 Die Gleichgewichtsgleichungen	28
2.2 Zur Lösbarkeit des axialsymmetrischen Gleichgewichtsproblems	40
2.3 Das Gleichgewichtsproblem und die Flächengrößen	44
2.3.1 Die Lösbarkeit der algebraischen Gleichungen	44
2.3.2 Die Gleichung für die Massendichte	46
2.3.3 Die Festlegung der Flächengrößen	47
2.3.4 Referenzlinie und Randbedingungen	50
2.4 Die numerische Lösung des Gleichgewichtsproblems	52
2.4.1 Die Toroidalstromdichte und der poloidale magnetische Fluß	52
2.4.2 Die quasilineare partielle Differentialgleichung	54
2.4.3 Die Rolle des Toroidalstromes	56
2.4.4 Die Kontinuitätsmethode	57
2.4.5 Die Eingabeparameter	57

INHALTSVERZEICHNIS

C.1	Übersicht zur Tensoranalysis	106
C.2	Nabla-Operator und Tensoranalysis	108
C.3	Zeitabhängige Transformationen	110
C.3.1	Wie bewegt sich das Koordinatensystem?	111
C.3.2	Die zeitliche Änderung der Metrik	112
C.3.3	Wie ändern sich Vektorfelder?	113
C.3.4	Massen- und Flußerhaltung in der idealen MHD	114
	Literaturverzeichnis	115
U	Danksagung	118

Bei der Verschmelzung zweier Atomkerne entstehen im Verhältnis zu den beteiligten Teilchenmassen gewaltige Energien. So erzeugt die Verschmelzung eines Deuterium- und eines Tritiumkerns, des schweren Isotops des Wasserstoffs, in einen Heliumkern und ein Neutron die Energie von 17,6 MeV. Aus einem Gramm dieses Brennstoffes könnte so die Energie von 100 kWh gewonnen werden. Ihren Ursprung hat diese Energie in der Masse der Kerne. Aus welchem den Abgang herren und den erzeugten Teilchen und ihr Wert ist durch die Einheitsformel $E = mc^2$ gegeben.

Um die Verschmelzung zweier Kerne möglich zu machen, ist jedoch eine beträchtliche Aktivierungsenergie in Form kinetischer Energie erforderlich, denn die elektrostatische Abstoßung der positiv geladenen Kerne muß bei einem Stoß der Reaktionspartner bis auf die Reichweite der Kernkräfte überwunden werden. Aus Grund des quantenmechanischen Tunneleffektes muß die Aktivierungsenergie allerdings nicht ganz so groß sein wie der Potentialwall, der sich durch Überlagerung der elektrostatischen Kräfte und der Kernkräfte ergibt. Die quantenmechanisch berechnete Fusionswahrscheinlichkeit für die Deuterium-Tritium-Reaktion hat bei einer Energie von etwa 100 keV ein Maximum von ungefähr $5 \cdot 10^{-27}$ s). Dies entspricht etwa der Wahrscheinlichkeit, auf der Erdoberfläche ($\approx 5 \cdot 10^{16}$ m²) in die Fläche eines Quadrates mit der Kantenlänge von 500 m zu treffen. Andere mögliche Fusionsreaktionen, wie z.B. die Verschmelzung von zwei Deuteriumkernen, haben bei dieser Energie eine noch geringere Fusionswahrscheinlichkeit und erreichen ihr Maximum bei viel höheren Energien. Deshalb gilt zur Zeit die Deuterium-Tritium Verschmelzung als aussichtsreichste Reaktion für die Fusion.

Die Größe der Fusionswahrscheinlichkeit, sowie die Tatsache, daß die Anzahl der elastischen Coulombstöße, die nicht zu einer Fusion führen, bei allen Energien wesentlich

Was heißt und zu welchem Ende studiert man *Kernfusion*?

Mit dieser Variation des Titels der akademischen Antrittsrede Friedrich von Schillers, der bei seiner Frage die Universalgeschichte meinte, widmet man sich einer sehr aktuellen Fragestellung. Wir lassen ihre politische Dimension hier beiseite und beschränken uns auf die Aspekte, die für das Thema relevant sind, das uns in der vorliegenden Arbeit gestellt ist.

0.1 Energiegewinnung und Kernverschmelzung

Bei der Verschmelzung leichter Atomkerne entstehen im Verhältnis zu den beteiligten Teilchenmassen gewaltige Energien. So erzeugt die Verschmelzung eines Deuterium- und eines Tritiumkernes, der schweren Isotope des Wasserstoffs, in einen Heliumkern und ein Neutron die Energie von 17.6 MeV. Aus einem Gramm dieses Brennstoffes könnte so die Energie von 100 MWh freigesetzt werden. Ihren Ursprung hat diese Energie in der Massendifferenz Δm zwischen den Ausgangskernen und den erzeugten Teilchen und ihr Wert ist durch die Einsteinsche Formel $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ gegeben.

Um die Verschmelzung zweier Kerne einleiten zu können, ist jedoch eine beträchtliche Aktivierungsenergie in Form kinetischer Energie erforderlich, denn die elektrostatische Abstoßung der positiv geladenen Kerne muß bei einem Stoß der Reaktionspartner bis auf die Reichweite der Kernkräfte überwunden werden. Auf Grund des quantenmechanischen Tunneleffektes muß die Aktivierungsenergie allerdings nicht ganz so groß sein wie der Potentialwall, der sich durch Überlagerung der elektrostatischen Kräfte und der Kernkräfte ergibt. Die quantenmechanisch berechnete Fusionswahrscheinlichkeit für die Deuterium-Tritium-Reaktion hat bei einer Energie von etwa 100 keV ein Maximum von ungefähr $5 \cdot 10^{-28}$ [1]. Dies entspricht etwa der Wahrscheinlichkeit, auf der Erdoberfläche ($\approx 5 \cdot 10^{14} \text{m}^2$) in die Fläche eines Quadrates mit der Kantenlänge von 500 nm zu treffen. Andere mögliche Fusionsreaktionen, wie z.B. die Verschmelzung von zwei Deuteriumkernen, haben bei dieser Energie eine noch geringere Fusionswahrscheinlichkeit und erreichen ihr Maximum bei viel höheren Energien. Deshalb gilt zur Zeit die Deuterium-Tritium-Verschmelzung als aussichtsreichste Reaktion für die Fusion.

Die Größe der Fusionswahrscheinlichkeit, sowie die Tatsache, daß die Anzahl der elastischen Coulombstöße, die nicht zu einer Fusion führen, bei allen Energien wesentlich

größer ist als die Anzahl der Fusionsstöße, schließt eine wirtschaftliche Ausnutzung der Fusionsenergie über Teilchenbeschleunigeranlagen grundsätzlich aus. Um Fusionsversuche zu starten, müssen die Fusionspartner in genügender Anzahl über einen gewissen Zeitraum τ_E bei entsprechend hohen Temperaturen (über 100 Millionen Grad) in einem Reaktionsvolumen eingeschlossen werden. Auf Grund der für die Fusion notwendigen hohen Temperatur muß außerdem ein direkter Kontakt der Reaktionspartner mit der einschließenden Wand vermieden werden [2].

0.2 Fusionskonzepte

Zur Zeit werden experimentell im wesentlichen zwei Wege beschritten, um die oben genannten Bedingungen zu erfüllen. Die "Trägheitsfusion" versucht durch Laser- oder Teilchenstrahlen die Oberfläche eines gefrorenen Brennstoffkügelchens möglichst schnell und gleichmäßig aufzuheizen. Durch den Rückstoß des von der Oberfläche abdampfenden Materials wird der Brennstoff für kurze Zeit stark komprimiert. Dadurch erreicht er sehr hohe Dichten (mehrere Größenordnungen der Festkörperdichte) und Temperaturen. Die Fusionsprozesse müssen dabei in der kurzen Zeit ablaufen, in der das Brennstoffkügelchen auf Grund seiner Trägheit zusammenbleibt.

Auf dem anderen Wege verfolgt man den sogenannten magnetischen Einschluß. Gasförmige Materie formiert sich bei hinreichend hohen Temperaturen als vollständig ionisiertes Plasma und ist damit der Wirkung innerer und von außen angelegter elektromagnetischer Felder ausgesetzt. Insbesondere sind starke magnetische Felder geeignet, ein Plasma so einzuschließen, daß auf seiner gesamten Oberfläche materieller Kontakt mit den Gefäßwänden weitgehend vermieden wird. Mit den Verhältnissen in solchen Plasmen beschäftigt sich diese Arbeit.

0.3 Der magnetische Einschluß

Die Forschung auf diesem Gebiet konzentriert sich heute im wesentlichen auf den Einschluß des Plasmas in toroidal geschlossenen Magnetfeldkonfigurationen, da es in ihnen besonders gut gelingt, eine gute thermische Isolierung zu erreichen.

Hierbei haben sich zwei Konzepte als besonders erfolgreich erwiesen: der "Tokamak" und der "Stellarator". In beiden spannen helikal umlaufende Magnetfeldlinien magnetische Flächen auf. Der Stellarator erzeugt das Magnetfeld allein über Ströme in äußeren Spulen, die dazu besonders geformt sein müssen. Beim Tokamak, einer axialsymmetrischen

trischen toroidalen Konfiguration, wird außer den Magnetfeldspulen für das toroidale (Haupt-) Magnetfeld ein starker, vom Plasma getragener Toroidalstrom benötigt, damit sich die Feldlinien verschrauben. Der Toroidalstrom wird über einen Transformator durch Induktion im Plasma erzeugt, das dabei die Rolle der Sekundärwicklung übernimmt. Gleichzeitig dient der Strom durch den zwar geringen aber doch wirksamen elektrischen Widerstand η des Plasmas in der Form Joulescher Wärme zur effektiven Heizung.

0.4 Plasmaheizung

Durch diese Ohmsche Heizung konnten im Tokamak schon sehr früh Plasmen mit hohen Dichten und Temperaturen erzeugt werden. Da der Plasmawiderstand mit zunehmender Temperatur abnimmt ($\eta \sim T^{-3/2}$), wird dieser Heizmechanismus mit steigenden Temperaturen immer ineffektiver. Um die in einem Fusionsreaktor angestrebten Temperaturen erreichen zu können, ist es daher notwendig die Ohmsche Heizung zu ergänzen bzw. zu ersetzen.

Als erfolgreiche Verfahren haben sich dabei die Neutralteilcheninjektion (NBI) und die Ionenzyklotronresonanzheizung (ICRH) herausgestellt. Beide sind in der Lage, mehrere MW Heizleistung zur Verfügung zu stellen, um die Iontemperatur T_i im Plasma zu erhöhen. Wir wollen hier wegen des unmittelbaren Bezugs zum Thema der Arbeit kurz auf ihre Funktionsprinzipien eingehen. Eine genauere Beschreibung findet sich für die NBI bei Speth [3] bzw. für die ICRH in [4].

Die Notwendigkeit, dem Plasma durch neutrale Teilchen Energie zuführen zu müssen, ergibt sich aus dem Umstand, daß geladene Teilchen auf Grund der starken Magnetfelder nicht in das Plasma eindringen können. Der Neutralteilchenstrahl wird aus einem energiereichen Ionenstrahl hergestellt, der vor dem Einschub in einer Ladungsaustauschkammer neutralisiert wird. Die neutralen Teilchen können dann in das von den Magnetfeldern eingeschlossene Plasma eindringen. Hier werden sie durch Stöße ionisiert und verbleiben dort mit ihrer Energie, die sie mit der Zeit an andere Ionen abgeben und so das Plasma heizen. Je nach Einschubwinkel zum Magnetfeld verteilt sich die kinetische Energie des Neutralteilchens bei der Ionisation auf die schnelle Gyrationbewegung des entstandenen Ions um eine Magnetfeldlinie und auf seine Bewegung entlang dieser Feldlinie.

Diese unterschiedliche Aufteilung findet ihre makroskopische Entsprechung darin, daß je

nach Einschubwinkel der durch die NBI erzeugte Plasmaanteil einen *anisotropen Drucktensor* aufweist, der durch Coulombstöße mit der Zeit abgebaut wird. Als weiterer Effekt der NBI ist außerdem der Impulsübertrag zu berücksichtigen, der das ruhende Plasma in Bewegung versetzt, und zum Teil beträchtliche *Massenströmungen* verursacht [5].

Die ICRH heizt die Plasma-Ionen über eingestrahlte elektromagnetische Felder, deren Frequenz bei der Gyrationfrequenz der Ionen (oder einem Vielfachen davon) liegt. In einer Resonanzzone koppelt das elektromagnetische Feld mit der Gyrationbewegung der Ionen und beschleunigt sie. Auch auf diese Weise wird somit die Entstehung eines anisotropen Drucktensors gefördert. Wie bei der NBI geben die geheizten Ionen ihre Energie über Stöße mit der Zeit wieder an das Plasma ab.

0.5 Gleichgewicht und Stabilität

Die Bewegung des Plasmas im Magnetfeld wird durch das lokale dynamische Gleichgewicht aller mechanischen und elektromagnetischen Kräfte bestimmt.

In erster Linie und im einfachsten Bilde sind wir an einem *statischen* Gleichgewichtszustand interessiert. Dabei sollte im Zentrum des Plasmas ein zeitunabhängiger, hoher maximaler Wert isotropen Druckes vorhanden sein, der dadurch aufrechterhalten bleibt, daß der zu einem nach außen abfallenden Druck gehörende Druckgradient von elektromagnetischen Kräften bilanziert wird.

In der Anfangszeit der Erforschung des magnetischen Einschlusses waren im Rahmen der Magnetohydrodynamik fast ausschließlich nur solche statischen Gleichgewichte Gegenstand theoretischer Betrachtung. Man war auf der Suche nach dem einfachsten Konzept, das zum Erfolg führt.

Inzwischen hat sich herausgestellt, daß wir auf dem Wege zur Kernfusion ohne Neutralteilcheneinschub und Methoden der Zusatzheizung nicht zum Ziele kommen werden.

Damit ergab sich die Notwendigkeit, den Gleichgewichtsbegriff weiter zu fassen, indem realistischer Weise anstelle von statischen Lösungen *stationäre* Lösungen der magnetohydrodynamischen Gleichungen mit möglicherweise anisotropem Druck in Betracht gezogen werden.

Gleichgewichte, die durch Lösen des Gleichgewichtsproblem berechnet werden, sollten, um über einige Zeit bestehen zu können, gegen kleine Störungen unempfindlich, d.h. stabil sein. Die mathematische Theorie, die sich damit beschäftigt ist die sogenannte lineare Stabilitätsanalyse. Die Auswirkungen von Instabilitäten können vielfältig sein.

Sie müssen nicht immer – wie bei den im Tokamak gefürchteten Disruptionen, mit denen ein plötzliches Abreißen des in toroidaler Richtung fließenden Plasmastromes bezeichnet wird – zu einer Zerstörung des Plasmas führen. Aber sie verschlechtern im allgemeinen den Einschluß und können so verhindern, daß die für die Fusion notwendigen Temperaturen und Dichten erreicht werden.

Zur Behandlung der Fragen von Gleichgewicht und Stabilität wurden bisher sehr erfolgreich die Gleichungen der bereits erwähnten Magnetohydrodynamik (MHD) angewandt. Bei den Temperaturen, die in heutigen Plasmen erreicht werden, und um so mehr bei den Temperaturen, die für die Fusionsplasmen angestrebt werden, nimmt die Häufigkeit von Stößen zwischen den Plasmateilchen ab. So beträgt die Stoßzeit von Protonen in einem Plasma mit einer Dichte von 10^{20}m^{-3} und einer Temperatur von 3 keV etwa 2 ms und wird für höhere Temperaturen noch größer. In dieser Zeit kann ein Ion mit der entsprechenden thermischen Geschwindigkeit eine freie Weglänge von ca 1 km zurücklegen [1]. Damit ist eine der Grundannahmen für die Gültigkeit der MHD verletzt, nämlich die Annahme, daß die Stoßzeit kurz gegenüber betrachteten zeitlichen Änderungen sei. Diese Aussage ist allerdings auf die Bewegung der Plasmateilchen parallel zu Magnetfeldlinien beschränkt. In der Bewegung senkrecht dazu übernimmt die schnelle Gyrationbewegung in einer gewissen Weise die Rolle der Stöße und läßt eine Flüssigkeitsbeschreibung zu.

Für die Modifikationen der MHD-Gleichungen, die zu einer Beschreibung der Auswirkungen großer freier Weglängen notwendig sind, gibt es verschiedene Ansätze. Ein theoretisch vielbenutzter Ansatz ist die sogenannte neoklassische Theorie, die jedoch Massenströmungen und Druckanisotropie als klein ansieht und im Gleichgewichtsproblem vernachlässigt [6]. Für NBI- oder ICRH- geheizte Plasmen können sich die Massenströmungen und der anisotrope Druck im Gleichgewicht aber durchaus bemerkbar machen. Zur Betrachtung solcher Plasmen bietet sich die von Grad [7] eingeführte Theorie des Guiding-Center-Plasmas (GCP) an. Dort können Massenströmung und Druckanisotropie von führender Ordnung sein. Die GCP-Theorie kann am einfachsten so beschrieben werden, daß sie anstatt der exakten Teilchenbahnen die Bewegung der Gyrationzentren der Plasmateilchen betrachtet. Das so entstehende Gleichungssystem enthält dann senkrecht zu Magnetfeldlinien Gleichungen mit Flüssigkeitscharakter und parallel zu Magnetfeldlinien kinetische Gleichungen und berücksichtigt so die oben erwähnten großen freien Weglängen.

0.6 Thema der Arbeit

Unabdingbare Voraussetzung einer jeden Stabilitätsanalyse des Plasmas ist die Bestimmung des Gleichgewichtszustandes, dessen Stabilität untersucht werden soll. Diese Bestimmung stellt sich im Falle stationären Gleichgewichts als besonders schwierig heraus, weil die zentrale partielle Differentialgleichung toroidal-axialsymmetrischer Plasmagleichgewichte (im Falle der einfachen Magnetohydrostatik die lineare Gleichung von Grad, Shafranov, Lüst und Schlüter) nicht mehr linear, sondern – in der mathematischen Nomenklatur – quasilinear ist. Dies ist eine große Erschwernis, weil dabei die Koeffizienten der (linear auftretenden) zweiten Ableitungen nichtlineare Funktionen der gesuchten Lösung und deren Ableitungen sind.

Im ersten Teil der Arbeit geben wir eine detaillierte Herleitung eines reduzierten GCP-Modells wieder, das eine durch NBI oder ICRH verursachte Druckanisotropie zu beschreiben vermag. Außerdem haben wir das allgemeine Gleichgewichtsproblem in der in [8] beschriebenen, für MHD und GCP einheitlichen Formulierung analysiert, wobei wir bisher nicht erkannte Einschränkungen für die durch das GCP beschreibbaren Parameterbereiche gefunden haben.

Der zweite Teil der Arbeit löst das Gleichgewichtsproblem in toroidaler axialsymmetrischer Geometrie in numerischer Form und analysiert die Ergebnisse. Dazu wurde als Teil dieser Arbeit das Programm DIVAFlow entwickelt und getestet. Das Programm erlaubt zum ersten Mal die numerische Berechnung von Gleichgewichten mit Massenströmung und anisotropem Druck und ermöglicht so den gemeinsamen Einfluß der Phänomene auf Gleichgewichte in einer realistischen Magnetfeldkonfiguration zu betrachten. Nach einer Idee von Zehrfeld [9] konnten wir die mit dem Gleichgewichtsproblem verbundene quasilineare partielle Differentialgleichung (siehe auch obige Bemerkungen) in einer Weise formulieren, die es erlaubt schnelle Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungen zu benutzen und damit die numerische Rechnung zu beschleunigen.

Im dritten Teil der Arbeit untersuchen wir die lineare Stabilität des GCP in seiner Einflüssigkeitsformulierung. Bisherige Arbeiten haben entweder Massenströmung und Druckanisotropie getrennt betrachtet [10, 11], oder nur für den Fall der einfacheren zylindrischen Geometrie. Erst in jüngster Zeit wurde für ein spezielles Modell die gemeinsame Wirkung beider Effekte auch für toroidale Geometrie betrachtet [12].

Wir erweitern die bisherigen Arbeiten dadurch, daß wir allgemeinere Abhängigkeiten des anisotropen Drucks zulassen. Die resultierenden Stabilitätsgleichungen verbinden und

verallgemeinern dabei die vorhandenen Ansätze. Wir erhalten für die lineare Stabilität eine notwendige Bedingung, in der die Vergleichstheoreme von Kruskal und Oberman [13] für statische Plasmen mit anisotropem Druck durch Einbeziehung von Massenströmungen erweitert werden. Schließlich betrachten wir als eine wichtige Klasse von Störungen die Ballooning-Moden und erhalten die auf allgemeine Druckanisotropie erweiterten Ballooninggleichungen mit Massenströmung.

Die Theorie des Guiding-Center-Plasmas (GCP) von H. Grad [1] und J. M. Greene [2] ist ein Modell für Plasmen mit Massenströmung. Das Modell ist ein Modell für Plasmen mit Massenströmung. Es besteht aus einer Reihe von Gleichungen, die die Bewegung der Teilchen im Magnetfeld beschreiben. Die Gleichungen sind in zwei Ebenen unterteilt: die Ebene der Teilchenbewegung und die Ebene der Massenströmung. Die Gleichungen sind in zwei Ebenen unterteilt: die Ebene der Teilchenbewegung und die Ebene der Massenströmung. Die Gleichungen sind in zwei Ebenen unterteilt: die Ebene der Teilchenbewegung und die Ebene der Massenströmung.

1.1 Das Modell des Guiding-Center-Plasmas

Das Modell des Guiding-Center-Plasmas (GCP) ist ein Modell für Plasmen mit Massenströmung. Es besteht aus einer Reihe von Gleichungen, die die Bewegung der Teilchen im Magnetfeld beschreiben. Die Gleichungen sind in zwei Ebenen unterteilt: die Ebene der Teilchenbewegung und die Ebene der Massenströmung. Die Gleichungen sind in zwei Ebenen unterteilt: die Ebene der Teilchenbewegung und die Ebene der Massenströmung.

Kapitel 1

Die Flüssigkeitsbeschreibung des Guiding-Center-Plasmas

Die Theorie des Guiding-Center-Plasmas (GCP) von H. Grad [7] führt auf Einflüssigkeitsmodelle für Plasmen mit Massenströmung. Das halbmikroskopische Modell des GCP entsteht aus einer formalen Entwicklung der Vlasovgleichung und der Maxwellgleichungen nach der reziproken Ladung $1/e$ [14], die Ausdruck für eine Entwicklung bezüglich zweier Kleinheitsparameter ist, die bei großen Magnetfeldstärken existieren. Der Begriff "halbmikroskopisch" ist darauf zurückzuführen, daß die Entwicklung in niedrigster Ordnung auf Gleichungen führt, die entlang den Magnetfeldlinien von kinetischer Natur sind, senkrecht zu den Feldlinien aber Flüssigkeitscharakter besitzen. Auf Grund der in führender Ordnung geltenden Erhaltungsgrößen für die Teilchenbewegung ergibt sich ein anisotroper Drucktensor von der Art, wie er von Chew, Goldberger und Low (CGL) [15] betrachtet wurde. Iacono *et al.* [8] haben gezeigt, daß sich die auf dem GCP beruhenden Einflüssigkeitsmodelle in einheitlicher Form mit allgemeinen Zustandsgleichungen für die Druckkomponenten beschreiben lassen.

Wir geben in diesem Kapitel eine Herleitung des GCP-Modells und der daraus folgenden Einflüssigkeitsgleichungen. Diese bilden die Grundlage für die Berechnung von axial-symmetrischen Gleichgewichten und für die Betrachtung der Stabilität von Plasmen mit Strömung und anisotropem Druck.

1.1 Das Modell des Guiding-Center-Plasmas

Die Gleichungen des GCP können aus einer Entwicklung der Vlasovgleichung, dem stoßfreien Limes der Boltzmann-Gleichung, gewonnen werden [7, 14]. Wir folgen hier im wesentlichen der von Kulsrud in [14] gegebenen Herleitung und gehen von der Vlasovgleichung

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f_\nu + \frac{q_\nu}{m_\nu} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f_\nu = 0 \quad (1.1)$$

aus, wobei $f_\nu(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ die Verteilungsfunktion der Teilchensorte ν ist, deren Teilchen die Masse m_ν und die Ladung q_ν haben. Somit gibt $f_\nu(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})d^3x d^3u$ die Zahl der Teilchen der Sorte ν an, die sich im Phasenraumvolumen $d^3x d^3u$ am Ort \mathbf{x} mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} zur Zeit t aufhalten. \mathbf{E} und \mathbf{B} sind das elektrische und magnetische Feld, wie sie von den Verteilungsfunktionen f_ν und den Ladungen q_ν erzeugt werden:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_\nu q_\nu \int f_\nu d^3u \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sum_\nu q_\nu \int \mathbf{u} f_\nu d^3u + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \end{aligned} \quad (1.2)$$

Für große Magnetfeldstärken läßt sich die Anzahl der unabhängigen Variablen von ursprünglich sieben auf fünf reduzieren.

Die Bewegung geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern

Für das Verständnis der Entwicklung und der Bedeutung des in der Literatur [7, 14, 16] üblicherweise verwendeten formalen Entwicklungsparameters $1/e$, bzw. auch m_ν/q_ν , ist eine Betrachtung der Bewegung geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern nützlich. Die Einzelteilchenbewegung wird durch

$$(0.1) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{q_\nu}{m_\nu} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.3)$$

beschrieben. Der Einfachheit halber seien \mathbf{E} und \mathbf{B} homogen und zeitunabhängig. Die Art wie das Magnetfeld in (1.3) eingeht, legt es nahe die Bewegungsgleichung parallel zu \mathbf{B} und senkrecht dazu getrennt zu betrachten. Parallel zu \mathbf{B} ergibt sich, falls $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$ gilt, eine entlang der Magnetfeldlinie beschleunigte Bewegung:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = \frac{q_\nu}{m_\nu} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) t + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B} \quad . \quad (1.4)$$

Für die Bewegung senkrecht zu \mathbf{B} betrachten wir zuerst den Fall, daß die Komponente \mathbf{E}_\perp von \mathbf{E} senkrecht zu \mathbf{B} verschwindet:

$$\frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} = \frac{q_\nu}{m_\nu} \mathbf{B} \mathbf{u}_\perp \times \mathbf{b} \quad . \quad (1.5)$$

Daraus ergibt sich eine kreisförmige Bewegung in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld mit der Kreisfrequenz $\Omega_\nu = |q_\nu B / m_\nu|$ (Abb. 1.1). Den Gyrationradius r_g^ν der Kreisbahn erhält man entweder aus der Bahngeschwindigkeit u_\perp und der Kreisfrequenz Ω_ν , als $r_g^\nu = u_\perp / \Omega_\nu = m_\nu u_\perp / |q_\nu B|$ oder über die Gleichsetzung der Zentrifugalkraft auf der

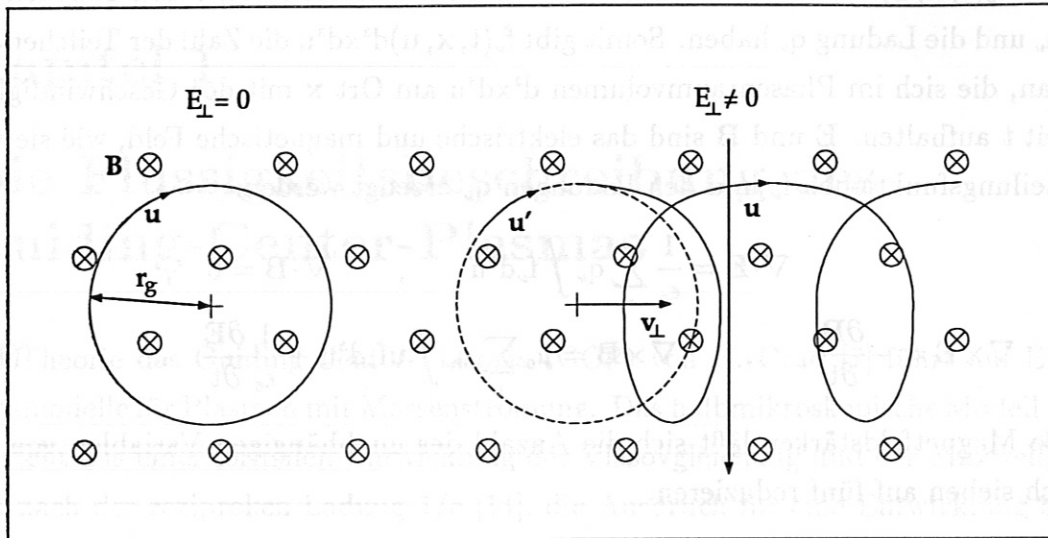


Abbildung 1.1: Skizze für die Teilchenbewegung in einem homogenen Magnetfeld, das in die Zeichenebene weist, und die Veränderung der Teilchenbahn zu einer Zykloide durch ein homogenes elektrisches Feld senkrecht zu \mathbf{B} .

Kreisbahn mit der Lorentzkraft durch das Magnetfeld. Ist \mathbf{E}_\perp von Null verschieden, so erhalten wir mit

$$\mathbf{u}'_\perp := \mathbf{u}_\perp - \mathbf{v}_\perp \quad , \quad \mathbf{v}_\perp := \frac{\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1.6)$$

für die Zeitentwicklung der neuen Geschwindigkeit \mathbf{u}'_\perp wieder Gleichung (1.5). In einem mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_\perp bewegten Koordinatensystem werden also wieder Kreisbewegungen ausgeführt. Im ruhenden Koordinatensystem ist die Teilchenbahn eine Zykloide (Abb. 1.1). Da diese Bahn durch die Bewegung des Gyrationmittelpunktes entsteht, d.h. die Bewegung des Mittelpunktes die Gyration führt, spricht man in diesem Zusammenhang von dem Führungszentrum (Guiding-Center) der Bewegung. Ist der Gyrationradius klein, d.h. die Gyrationfrequenz groß, dann wird die Teilchenbewegung im wesentlichen schon durch die Bewegung seines Guiding-Centers wiedergegeben.

Die Entwicklung der Vlasovgleichung

Zur Entwicklung der Gleichungen (1.1) und (1.2) bieten sich bei großen Magnetfeldstärken die Umlaufzeiten der Teilchen $1/\Omega_\nu$ und die Gyrationradien als kleine Größen an. Die entsprechenden Entwicklungsparameter sind dann $\lambda_T := \Omega_\nu T_s \ll 1$, wobei T_s die Zeitskala angibt, auf der Zeitänderungen betrachtet werden, und $\lambda_L := r_g^2/L \ll 1$ mit einer

für das System relevanten Skalenlänge L , z.B. $L = |\nabla B|/B$. Da in beiden Kleinheitsparametern die reziproke Ladung $1/e$ auftritt, kann $1/e$ formal als Entwicklungsparameter benutzt werden [16], wenn λ_T und λ_L die gleiche Größenordnung haben. Es sollte jedoch nicht vergessen werden, daß die formale Kleinheit von $1/e$ durch die Stärke des Magnetfeldes bedingt ist, und angenommen wird, daß λ_T und λ_L für alle Teilchensorten klein sind.

In diesem Sinne entwickeln wir die in den Gleichungen (1.1) und (1.2) auftretenden Größen f , \mathbf{E} und \mathbf{B} : $f = f_0 + f_1 + \dots$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \dots$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \dots$. Der Index gibt hier die Größenordnung bezüglich $1/e$ an. Bei der Verteilungsfunktion haben wir den Index für die Teilchensorte unterdrückt. Die elektromagnetischen Felder müssen für eine konsistente Berechnung ebenfalls entwickelt werden, da in den Maxwellgleichungen die Verteilungsfunktion der Teilchensorten vorkommen. Wir benutzen den von Kulsrud in [14] gemachten Vorschlag zur Vereinfachung der Entwicklung und setzen $\mathbf{B}_1 \equiv 0$. Die Bedeutung dieser Annahme ergibt sich weiter unten bei der Entwicklung der Maxwellgleichungen. Für die Vlasovgleichung erhalten wir dann in nullter Ordnung

$$(\mathbf{E}_0 + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f_0 = 0 \quad , \quad (1.7)$$

und in erster Ordnung

$$\frac{q}{m} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f_1 = -\frac{\partial f_0}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla f_0 - \frac{q}{m} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{u}} f_0 \quad . \quad (1.8)$$

Bevor wir die Maxwellgleichungen nach $1/e$ entwickeln, betrachten wir die Folgerungen, die sich aus den Gleichungen (1.7) und (1.8) ergeben. Für das weitere lassen wir den Index 0 bei \mathbf{B}_0 weg, da höhere Ordnungen des Magnetfeldes nicht mehr betrachtet werden.

Die Gleichung nullter Ordnung legt die Einführung einer Geschwindigkeit \mathbf{v}_{\perp} nahe, die sowohl senkrecht zu \mathbf{E}_0 als auch zu \mathbf{B} ist, mit

$$\mathbf{u}' := \mathbf{u} - \mathbf{v}_{\perp} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_{\perp} := \frac{\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}}{B^2} \quad , \quad (1.9)$$

wobei wir die neue Geschwindigkeitsvariable \mathbf{u}' eingeführt haben. Aus der Definition von \mathbf{v}_{\perp} folgt, daß diese Geschwindigkeit allen geladenen Teilchensorten gemeinsam ist. Die Einführung von Zylinderkoordinaten im Geschwindigkeitsraum,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= u'_{\parallel} \mathbf{b} + u'_{\perp} (\mathbf{e}_1 \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \phi) \quad , \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B} \quad , \\ \nabla_{\mathbf{u}} &= \nabla_{\mathbf{u}'} = \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial u'_{\parallel}} + u'_{\perp} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{u}'}{2a} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad , \quad a := \frac{u'_{\perp}{}^2}{2} \quad , \end{aligned} \quad (1.10)$$

wobei die Symmetrieachse durch die Richtung des Magnetfeldes bestimmt ist, ergibt für die Gleichung nullter Ordnung

$$\frac{q}{m} \mathbf{u}' \times \mathbf{B} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 + E_{0,\parallel} \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{u}'} f_0 = -\Omega \frac{\partial f_0}{\partial \phi} + E_{0,\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial u'_{\parallel}} = 0 \quad , \quad \Omega := \frac{qB}{m} \quad . \quad (1.11)$$

Hieraus lassen sich zwei Resultate ableiten. Als erstes kann gezeigt werden, daß das parallele elektrische Feld $E_{0,\parallel}$ verschwinden muß. Wäre $E_{0,\parallel} \neq 0$, so folgte aus (1.11), daß f_0 im Geschwindigkeitsraum auf Spiralen konstant wäre, die sich mit einer Ganghöhe $\Delta u'_{\perp} = 2\pi |E_{0,\parallel} / \Omega|$ um die u'_{\parallel} -Achse winden. Verteilungsfunktionen, die für $u'_{\parallel} \rightarrow \infty$ verschwinden, können deshalb nur für $E_{0,\parallel} \equiv 0$ existieren. Daraus ergibt sich zweitens, daß die Verteilungsfunktion in führender Ordnung nicht von der Gyrationphase ϕ abhängt, d.h. $f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \tilde{f}_0(t, \mathbf{x}, u'_{\parallel}, a)$.

Schreiben wir die Gleichung erster Ordnung (1.8) in den neuen Geschwindigkeitsvariablen, so erhalten wir:

$$\Omega \frac{\partial f_1}{\partial \phi} = \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{f}_0 + \left(\frac{q}{m} \mathbf{E}_1 - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \left(\mathbf{b} \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial u'_{\parallel}} + u'_{\perp} \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial a} \right) \quad . \quad (1.12)$$

Dabei wurde benutzt, daß durch die Kopplung der zylindrischen Geschwindigkeitskoordinaten an die Magnetfeldrichtung, für \mathbf{u} der Abhängigkeitscharakter $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}, u'_{\parallel}, a, \phi)$ gilt, so daß

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = u'_{\parallel} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + u'_{\perp} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial t} \cos \phi + \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial t} \sin \phi \right) + \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}}{\partial t} \quad (1.13)$$

und

$$\nabla \mathbf{u} = u'_{\parallel} \nabla \mathbf{b} + u'_{\perp} \nabla (\mathbf{e}_1 \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \phi) + \nabla \mathbf{v}_{\perp} \quad (1.14)$$

gilt.

In Gleichung (1.12) tritt die Verteilungsfunktion erster Ordnung auf, die vom Gyrationwinkel ϕ abhängt. Damit f_1 im Geschwindigkeitsraum eindeutig ist, muß f_1 in ϕ periodisch sein. Dies bedeutet, daß die rechte Seite von (1.12) ebenfalls periodisch in ϕ sein muß. Die Anteile der Gleichung, die unabhängig von ϕ sind, müssen sich also wegheben. Durch Integration der Gleichung über eine volle Periode von ϕ erhalten wir die Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial t} + (u'_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}) \cdot \nabla \tilde{f}_0 + \left(\frac{q}{m} E_{1,\parallel} - \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}}{\partial t} + (u'_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}) \cdot \nabla \mathbf{v}_{\perp} \right) \cdot \mathbf{b} \right) \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial u'_{\parallel}} \\ + a \nabla \cdot \mathbf{b} \left(\frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial u'_{\parallel}} - u'_{\parallel} \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial a} \right) - a (\nabla \cdot \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_{\perp}) \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial a} = 0 \quad . \quad (1.15) \end{aligned}$$

Vom elektrischen Feld in erster Ordnung taucht nur noch $E_{1,\parallel}$ auf. Der Anteil senkrecht zu \mathbf{B} , d.h. $E_{1,\perp}$ ist durch die Mittelung im Geschwindigkeitsraum verschwunden.

Bevor wir (1.15) weiter vereinfachen können, betrachten wir die Entwicklung der Maxwellgleichungen nach $1/e$. In niedrigster Ordnung erhalten wir:

$$0 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\nu} q_{\nu} \int f_{0\nu} d^3u \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad 0 = \mu_0 \sum_{\nu} q_{\nu} \int (\mathbf{u}' + \mathbf{v}_{\perp}) f_{0\nu} d^3u' \quad . \quad (1.17)$$

Für die Verteilungsfunktion f_0 ergeben sich daraus zwei Bedingungen. Die erste, aus $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ folgende, beschreibt die Ladungsneutralität, und die zweite, aus dem Ampèreschen Gesetz entstehende, führt zu einer verschwindenden Nettostromdichte. Da die Geschwindigkeit \mathbf{v}_{\perp} für alle Teilchensorten gleich ist und wegen des Abhängigkeitscharakters von f_0 ein Strom senkrecht zu \mathbf{B} ausgeschlossen ist, fließt parallel zu magnetischen Feldlinien kein Strom in führender Ordnung. In einem Zweikomponentenplasma wird dies erfüllt, wenn Ionen und Elektronen die gleiche Flüssigkeitgeschwindigkeit parallel zu \mathbf{B} besitzen. Die Quellen des elektrischen Feldes \mathbf{E}_0 und die Wirbel der magnetischen Induktion \mathbf{B} , d.h. die Stromdichte, werden von der Verteilungsfunktion in erster Ordnung erzeugt. An diesem Punkt wird deutlich, daß die Annahme $\mathbf{B}_1 \equiv 0$ gleichbedeutend ist mit einer Vernachlässigung der Stromdichte, die durch die Verteilungsfunktionen f_2 in zweiter Ordnung erzeugt wird. Vakuumfeldanteile von \mathbf{B}_1 können immer in der führenden Ordnung \mathbf{B} des Magnetfeldes berücksichtigt werden.

Obwohl die Stromdichte \mathbf{j} in niedrigster Ordnung von der Verteilungsfunktion in erster Ordnung erzeugt wird, wird deren Kenntnis zur Berechnung von \mathbf{j} nicht benötigt. Vielmehr läßt sich aus Gleichung (1.8) durch Multiplikation mit der Teilchengeschwindigkeit \mathbf{u} und durch Bildung der Einflüssigkeitsmomente die Stromdichte senkrecht zu \mathbf{B} bestimmen:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{b}\mathbf{b}) \cdot \left(\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla \cdot \mathbf{p} \right) \quad , \quad (1.18)$$

$$\mathbf{p} = p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}\mathbf{b} \quad .$$

Dabei ist \mathbf{v} die Flüssigkeitgeschwindigkeit, ρ die Gesamtmasendichte und \mathbf{p} der Gesamtdrucktensoren. Diese Größen ergeben sich aus den Geschwindigkeitsmomenten der Verteilungsfunktion nullter Ordnung

$$\left\{ \rho, \rho \mathbf{v}_{\parallel}, p_{\parallel}, p_{\perp} \right\} = \sum_{\nu} m_{\nu} \int \left\{ 1, u'_{\parallel}, (u'_{\parallel} - v_{\parallel})^2, \frac{1}{2} u'_{\perp}{}^2 \right\} f_{0\nu} d^3u' \quad . \quad (1.19)$$

Die Stromdichte parallel zu \mathbf{B} folgt aus dem Ampèreschen Gesetz in erster Ordnung

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \quad (1.20)$$

Brechen wir an diesem Punkt die Entwicklung ab, so erhalten wir ein geschlossenes System von Gleichungen:

$$(\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad , \quad (1.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (1.22)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = (1 - \mathbf{b}\mathbf{b}) \cdot \left(\sum_{\nu} \rho_{\nu} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla \cdot \left(\sum_{\nu} \mathbf{p}_{\nu} \right) \right) \quad , \quad (1.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \quad , \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial t} + (\mathbf{u}'_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}) \cdot \nabla \tilde{f}_0 + \left(\frac{q}{m} \mathbf{E}_{1,\parallel} + a \nabla \cdot \mathbf{b} - \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}}{\partial t} + (\mathbf{u}'_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}) \cdot \nabla \mathbf{v}_{\perp} \right) \cdot \mathbf{b} \right) \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial \mathbf{u}'_{\parallel}} - \\ - a (\mathbf{u}'_{\parallel} \nabla \cdot \mathbf{b} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{b}\mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}_{\perp}) \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial a} = 0 \quad , \quad (1.25) \end{aligned}$$

$$0 = \sum_{\nu} q_{\nu} \int f_{0\nu} d^3 u' \quad , \quad 0 = \sum_{\nu} q_{\nu} \int \mathbf{u}'_{\parallel} f_{0\nu} d^3 u' \quad . \quad (1.26)$$

Das GCP-Modell, das auf diesen Gleichungen beruht, wird auch halbmikroskopisch genannt, da die Dynamik der Bewegung senkrecht zu \mathbf{B} durch Flüssigkeitsgleichungen bestimmt wird, parallel zu \mathbf{B} hingegen durch kinetische Gleichungen. Die einzige noch auftretende Größe erster Ordnung ($\mathbf{E}_{1,\parallel}$) wird durch die Neutralitätsbedingung festgelegt. Eine einfachere Form der kinetischen Gleichung (1.25), die gleichzeitig zu einer anschaulichen Deutung des Modells verhilft, kann durch die besondere Art der Geschwindigkeit \mathbf{v}_{\perp} gewonnen werden. Aus (1.21) und (1.22) folgt, daß für \mathbf{v}_{\perp}

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\perp} = -\mathbf{v}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa} - \frac{\partial}{\partial t} \ln B - \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla \ln B \quad , \quad (1.27)$$

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\perp}) = -\mathbf{v}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa} \quad (1.28)$$

und

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla \mathbf{v}_\perp) = -\mathbf{b} \cdot \nabla \frac{v_\perp^2}{2} - \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial t} \quad (1.29)$$

gilt, wobei $\boldsymbol{\kappa} := \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ der Krümmungsvektor der magnetischen Feldlinien ist. Mit diesen Gleichungen kann gezeigt werden, daß die kinetische Gleichung in die Form

$$\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial t} + (\mathbf{u}'_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{v}_\perp) \cdot \nabla \hat{f}_0 + \left(\frac{q}{m} E_{1,\parallel} + \mathbf{b} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v_\perp^2 - \mu B \right) + u'_\parallel \mathbf{v}_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial u'_\parallel} = 0 \quad (1.30)$$

umgeschrieben werden kann, wobei $\mu := a/B$ und $\hat{f}_0 = \hat{f}_0(u'_\parallel, \mu, \mathbf{x}, t) := \tilde{f}_0(u'_\parallel, \mu B, \mathbf{x}, t)$ ist. Die als Konstante der Bewegung neu eingeführte Geschwindigkeitsvariable μ ist entsprechend der Beziehung $\mu = u_\perp^2/(2B)$ das magnetische Moment pro Teilchenmasse. Für das Volumenelement im Geschwindigkeitsraum gilt $d^3 u' = 2\pi B d\mu du'_\parallel$.

Interpretieren wir Gleichung (1.30) als Liouvillegleichung, d.h. im Sinne des totalen Differentials einer Teilchendichte in einem Phasenraum mit den Variablen $(\mathbf{x}, u'_\parallel, \mu)$

$$\frac{d\hat{f}_0}{dt} = \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla \hat{f}_0 + \frac{du'_\parallel}{dt} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial u'_\parallel} = 0 \quad , \quad (1.31)$$

wobei μ konstant gehalten wird, so werden die durch die Entwicklung nach $1/e$ gemachten Näherungen deutlicher. Die "Teilchen", die durch (1.31) beschrieben werden, haben die Geschwindigkeit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = u'_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{v}_\perp \quad , \quad (1.32)$$

und auf sie wirkt die Beschleunigung in Richtung des Magnetfeldes

$$\frac{du'_\parallel}{dt} = \frac{q}{m} E_{1,\parallel} + \mathbf{b} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v_\perp^2 - \mu B \right) + u'_\parallel \mathbf{v}_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa} \quad . \quad (1.33)$$

Gleichung (1.32) zeigt, daß von der Teilchenbewegung in einem elektrischen und magnetischen Feld nur die Bewegung des Guiding-Centers übrig geblieben ist, woraus sich der Name des Modells ableitet. Die Gyrationbewegung der Plasmateilchen geht über das magnetische Moment μ nur noch als Parameter in die Gleichungen ein.

Anschaulich kann man sich die Entstehung dieses Bildes so vorstellen, daß die Gyrationbewegung eines Plasmateilchens zum Zeitpunkt t auf seinen Guiding-Center-Ort zusammengezogen wurde. Dabei wurde der durch die Gyrationbewegung um diesen Ort eingeschlossene magnetische Fluß $\Psi = \pi r_g^2 B \propto \mu$ dem Guiding-Center angeheftet. Das so entstandene Quasiteilchen besitzt also ein konstantes magnetisches Moment und führt die Bewegung des Guiding-Centers mit dessen Geschwindigkeit $u'_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{v}_\perp$ aus.

1.2 Die Guiding-Center-Flüssigkeit

Das GCP-Modell ist trotz der getroffenen Vereinfachungen immer noch sehr kompliziert, so daß es für Gleichgewichts- und Stabilitätsuntersuchungen nur für Plasmen in Zylindergeometrie herangezogen wurde. In axialsymmetrisch-toroidaler Geometrie wurden bisher nur die theoretischen Konsequenzen für Gleichgewichte betrachtet, die sich aus dem Gegensatz des Modells der Magneto hydrodynamik (MHD) mit isotropen Drucktensor zum CGL-Modell mit anisotropen Drucktensor ergeben. Dies liegt nicht nur an der Komplexität der Gleichungen, sondern auch an der Freiheit, die die Verteilungsfunktion f_0 (von nun ab verzichten wir, soweit keine Mißverständnisse daraus entstehen, auf die Indizes 0 und 1) immer noch in sich birgt. Wir betrachten daher die Flüssigkeitgleichungen, die sich aus den kinetischen Gleichungen ergeben.

Wir gehen dazu in Gleichung (1.15) mit $u'_\parallel = \bar{u}_\parallel + v_\parallel$ zu einer Verteilungsfunktion $\bar{f}(\bar{u}_\parallel, u_\perp, \mathbf{x}, t)$ über, die sich mit der Flüssigkeitgeschwindigkeit parallel zu den Magnetfeldlinien bewegt, d.h. $2\pi \int \bar{u}_\parallel \bar{f} d\bar{u}_\parallel da \equiv 0$. Gleichung (1.15) geht dann in

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + (\bar{u}_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{v}) \cdot \nabla \bar{f} + \left(\frac{q}{m} E_\parallel - \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\bar{u}_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{b} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}_\parallel} \\ + a \nabla \cdot \mathbf{b} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}_\parallel} - \bar{u}_\parallel \frac{\partial \bar{f}}{\partial a} \right) - a (\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{v}) \frac{\partial \bar{f}}{\partial a} = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

über. Multiplikation mit $(m, m\bar{u}_\parallel, m\bar{u}_\parallel^2, ma)$, Integration über den Geschwindigkeitsraum und Summation über die Teilchensorten ergibt die ersten vier Momentengleichungen für die Einflüssigkeitsbeschreibung des GCP:

$$d_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (1.35)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \rho d_t \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{p} \quad , \quad (1.36)$$

$$d_t p_\parallel + p_\parallel (\nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v})) = -\mathbf{b} \cdot \nabla q_{\parallel,\parallel} + (q_{\parallel,\parallel} - 2q_{\perp,\parallel}) \mathbf{b} \cdot \nabla \ln B \quad (1.37)$$

und

$$d_t p_\perp + p_\perp (2\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v})) = -\mathbf{b} \cdot \nabla q_{\perp,\parallel} + 2q_{\perp,\parallel} \mathbf{b} \cdot \nabla \ln B \quad , \quad (1.38)$$

wobei $d_t := \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ gesetzt wurde. Außerdem haben wir verwendet, daß die Kräftebilanzen parallel und senkrecht zu den Magnetfeldlinien zu einer vektoriellen Gleichung zusammengefaßt werden können. ρ ist die Gesamtmassendichte, p_\parallel und p_\perp sind die

Komponenten des Gesamtdrucktensors p und $q_{\parallel,\parallel}$ und $q_{\perp,\parallel}$ sind Gesamtströme paralleler Wärme bzw. von Gyrationenergie entlang Magnetfeldlinien, die durch

$$q_{\parallel,\parallel} = 2\pi \sum_{\nu} m_{\nu} \int \bar{u}_{\parallel}^3 \bar{f} d\bar{u}_{\parallel} da, \quad (1.39)$$

$$q_{\perp,\parallel} = 2\pi \sum_{\nu} m_{\nu} \int \bar{u}_{\parallel} a \bar{f} d\bar{u}_{\parallel} da \quad (1.40)$$

definiert werden.

(1.35) bis (1.38) stellen ein System von Einflüssigkeitsgleichungen dar, das sich ergibt, weil die Teilchensorten eine gemeinsame Massengeschwindigkeit in nullter Ordnung besitzen. Die Geschwindigkeiten der Teilchensorten, die zu elektrischen Strömen führen, sind bei dieser Entwicklung von erster Ordnung. Um das Gleichungssystem traktabel zu halten, brechen wir die Reihe der Momentengleichungen nach den Gleichungen für die beiden Druck-Komponenten ab. Damit das Gleichungssystem geschlossen werden kann, müssen wir versuchen die Wärmeströme durch Momente niedriger Ordnung auszudrücken.

1.2.1 Arbeit und Wärme bei Bewegungen der Guiding-Center-Flüssigkeit

Um zu sehen, in welcher Form sich die nichtdissipativen Wärmeströme auf die Änderung der Druckkomponenten auswirken, betrachten wir die Gleichung der Gesamtenergie, die durch Addition von (1.37) und (1.38) im Verhältnis 1:2 entsteht. Mit der Kontinuitätsgleichung, den Gleichungen (1.27 - 1.29) und der Definition des Gesamtwärmestroms entlang den magnetischen Feldlinien

$$\mathbf{q}_{\parallel} =: \left(\frac{2}{3} q_{\perp,\parallel} + \frac{1}{3} q_{\parallel,\parallel} \right) \mathbf{b} \quad (1.41)$$

führt dies auf

$$\rho d_t \left(\frac{p_{\parallel}}{2\rho} + \frac{p_{\perp}}{\rho} \right) + \frac{3}{2} \nabla \cdot \mathbf{q}_{\parallel} = \frac{p_{\parallel}}{\rho} d_t \rho - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B} d_t B. \quad (1.42)$$

Auf der linken Seite der Gleichung erkennen wir in dem Term $(\frac{1}{2}p_{\parallel} + p_{\perp})/\rho$ eine Darstellung der inneren Energie U pro Masseneinheit. Bei isotropem Druck ($p_{\parallel} \equiv p_{\perp} \equiv p$) kann das ideale Gas als Modell dienen, und die Divergenz des Wärmestromes kann mit der Änderung der Entropie $d_t S$ verknüpft werden. Verschwindet sie, dann ist $d_t S = 0$. Auf der linken Seite steht in diesem Fall nur die Änderung von U in der Darstellung $3p/(2\rho)$. Damit geht (1.42) in die isentrope Zustandsgleichung des idealen Gases über:

$$d_t \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right) = 0, \quad \gamma = \frac{5}{3}. \quad (1.43)$$

Fließt ein Wärmestrom, so daß er die durch das ideale Gasgesetz erklärte Temperatur $T = mp/(k\rho)$ entlang der Bewegung konstant hält, erhalten wir auf der linken Seite von (1.42) die Änderung der freien Energie pro Masseneinheit $d_t F = d_t(U - TS)$. Die Annahme einer konstanten Temperatur kann mit der isothermen Zustandsgleichung

$$d_t\left(\frac{P}{\rho}\right) = 0 \quad (1.44)$$

ausgedrückt werden.

Bei anisotropem Druck ist die Situation schwieriger. Eine Größe wie die Entropie muß aus der kinetischen Beschreibung gewonnen werden, z.B. aus dem Integral $k \int f_0 \ln(f_0) d^3u$ bei Kenntnis der Verteilungsfunktion. Als thermodynamisch konjugierte Variable könnte daraus eine Temperatur abgeleitet werden.

Wir hingegen wollen bei der Flüssigkeitsbeschreibung bleiben. Wir begnügen uns deshalb mit einer thermodynamisch unvollständigen Beschreibung und betrachten $-3/(2\rho)\nabla \cdot \mathbf{q}_{\parallel}$ als Änderung der Wärme δQ . Somit steht auf der linken Seite von (1.42) die Differenz der Änderung der inneren Energie des Plasmas und der Änderung seiner Wärme. Dies entspricht der Volumenarbeit

$$\delta A = d_t U - \delta Q = \frac{P_{\parallel}}{\rho^2} d_t \rho - \frac{P_{\parallel} - P_{\perp}}{\rho B} d_t B, \quad (1.45)$$

die während der Bewegung am Plasma geleistet wird. Wir erhalten dieselbe Gleichung, wenn wir in Analogie zur Mechanik der deformierbaren Körper die Änderung der Arbeit δA als

$$\delta A = -\mathbf{p} : \nabla \mathbf{v} \quad (1.46)$$

interpretieren. Dabei übernimmt der negative Drucktensor die Rolle des Spannungstensors und $\nabla \mathbf{v}$ die der differentiellen Verformung. Gleichung (1.46) ist die Verallgemeinerung der Darstellung für die mechanische Arbeit $\delta A = -pdV$ bei isotropem Druck. Volumenänderungen, die die Teilchenzahl und den magnetischen Fluß erhalten, können unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung (1.35), des Induktionsgesetzes (1.22) und des Ohmschen Gesetzes (1.21) entsprechend ihrer Bedeutung aufgeteilt werden als

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{b} \mathbf{b} \nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{1} - \mathbf{b} \mathbf{b}) \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v} \quad (1.47)$$

mit

$$\nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{v} := \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}) = d_t \ln \frac{B}{\rho} \quad (1.48)$$

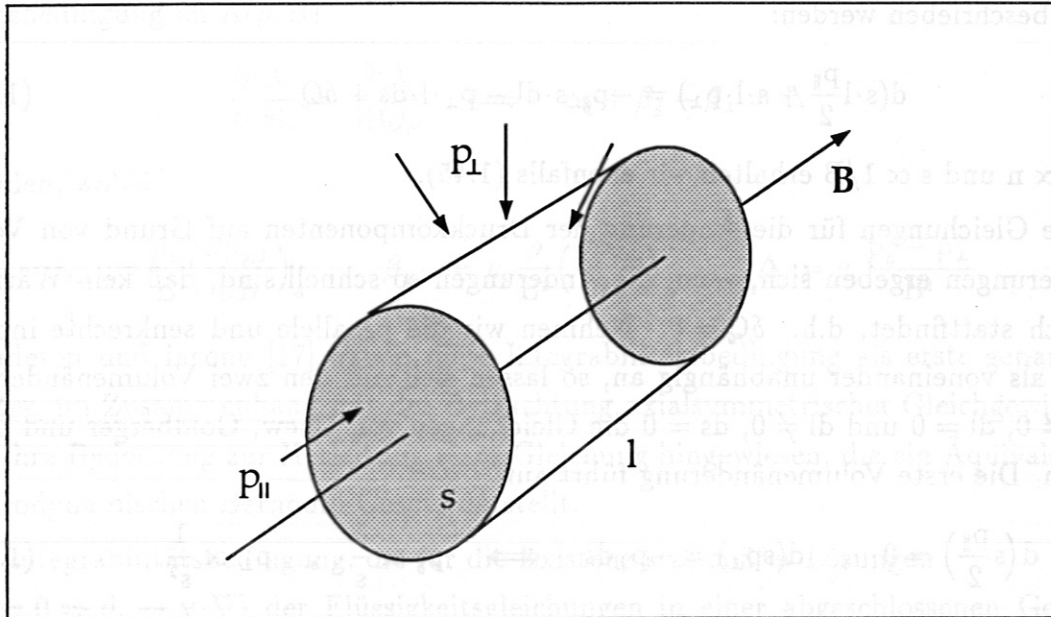


Abbildung 1.2: Zylinderförmiges Plasmavolumen der Länge l und mit Querschnittsfläche s entlang einer magnetischen Feldlinie.

und

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v} := \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{v} = -d_{\perp} \ln B \quad . \quad (1.49)$$

Zusammen mit der Definition von p folgt die Äquivalenz von (1.45) und (1.46).

Ein anschaulicher Weg, der zu (1.45) führt, kann über die Betrachtung eines kleinen zylindrischen Plasmavolumens der Länge l und der Querschnittsfläche s entlang des Magnetfeldes besprochen werden (Abb. 1.2). Der magnetische Fluß, der das Plasmavolumen durchdringt, ist durch $\Psi = s \cdot B$ gegeben, und die Teilchenzahl N im Plasmavolumen ergibt sich mit der Teilchendichte n zu $N = n \cdot s \cdot l$. Die Erhaltung des magnetischen Flusses Ψ und der Teilchenzahl N bei der Bewegung des Volumens bedingt, daß sich dessen Abmessungen auf Grund einer Variation der Magnetfeldstärke und der Teilchendichte gemäß

$$B \propto \frac{1}{s} \quad , \quad n \propto \frac{1}{s \cdot l} \quad \iff \quad s \propto \frac{1}{B} \quad , \quad l \propto \frac{B}{n} \quad (1.50)$$

ändern. Ein Vergleich mit (1.48) und (1.49) zeigt die Verknüpfung der Ausdrücke für die parallele und senkrechte Volumenänderung mit der Erhaltung des magnetischen Flusses und der Teilchenzahl. Die Änderung der inneren Energie $s \cdot l \left(\frac{1}{2} p_{\parallel} + p_{\perp} \right)$ kann nun durch

die mechanische Arbeit bei der Änderung des Volumens $s \cdot l$ und die dabei ausgetauschte Wärme beschrieben werden:

$$d\left(s \cdot l \frac{p_{\parallel}}{2} + s \cdot l \cdot p_{\perp}\right) = -p_{\parallel} \cdot s \cdot dl - p_{\perp} \cdot l \cdot ds + \delta Q \quad (1.51)$$

Mit $s \cdot l \propto n$ und $s \propto 1/B$ erhalten wir ebenfalls (1.45).

Spezielle Gleichungen für die Änderung der Druckkomponenten auf Grund von Volumenänderungen ergeben sich, wenn die Änderungen so schnell sind, daß kein Wärmeaustausch stattfindet, d.h. $\delta Q = 0$. Nehmen wir die parallele und senkrechte innere Energie als voneinander unabhängig an, so lassen sich mit den zwei Volumenänderungen $ds \neq 0$, $dl = 0$ und $dl \neq 0$, $ds = 0$ die Gleichungen von Chew, Goldberger und Low herleiten. Die erste Volumenänderung führt auf

$$d\left(s \frac{p_{\parallel}}{2}\right) = 0, \quad d(sp_{\perp}) = -p_{\perp} ds \iff p_{\parallel} \propto \frac{1}{s}, \quad p_{\perp} \propto \frac{1}{s^2} \quad (1.52)$$

und die zweite ergibt

$$d\left(l \frac{p_{\parallel}}{2}\right) = -p_{\parallel} dl, \quad d(lp_{\perp}) = 0 \iff p_{\parallel} \propto \frac{1}{l^3}, \quad p_{\perp} \propto \frac{1}{l} \quad (1.53)$$

Kombinieren wir die Proportionalitäten und drücken wir s und l durch B und n , bzw. ρ , aus, dann erhalten wir:

$$p_{\parallel} \propto \frac{1}{sl^3} \propto \frac{B^2}{\rho^3}, \quad p_{\perp} \propto \frac{1}{s^2 l} \propto B\rho \quad (1.54)$$

In der differentiellen Form lauten sie

$$d_t\left(\frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3}\right) = 0, \quad d_t\left(\frac{p_{\perp}}{\rho B}\right) = 0 \quad (1.55)$$

und können durch Vernachlässigung der Wärmeströme auch aus den Gleichungen (1.37) und (1.38) gewonnen werden.

Verlangen wir für den allgemeinen Fall, daß die an einem Plasmavolumen geleistete Arbeit reversibel aufgenommen oder abgegeben wird, dann läßt sie sich als totales Differential

$$d_t A = \frac{p_{\parallel}}{\rho^2} d_t \rho - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho B} d_t B \quad (1.56)$$

darstellen mit den partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \rho}\right)_B = \frac{p_{\parallel}}{\rho^2}, \quad \left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_\rho = -\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho B} \quad (1.57)$$

Die Druckkomponenten sind also Funktionen von ρ und B und müssen die Integrabilitätsbedingung an $A(\rho, B)$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \rho \partial B} = \frac{\partial^2 A}{\partial B \partial \rho} \iff \alpha_{\parallel} + \beta_{\parallel} - \beta_{\perp} = \Delta \quad (1.58)$$

erfüllen, wobei

$$\alpha_{\parallel, \perp} := \frac{\mu_0}{B} \left(\frac{\partial p_{\parallel, \perp}}{\partial B} \right)_{\rho}, \quad \beta_{\parallel, \perp} := \mu_0 \frac{\rho}{B^2} \left(\frac{\partial p_{\parallel, \perp}}{\partial \rho} \right)_{B}, \quad \Delta := \mu_0 \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2}. \quad (1.59)$$

Bondeson und Iacono [17] haben diese Integrabilitätsbedingung als erste genannt und später, im Zusammenhang mit der Betrachtung axialsymmetrischer Gleichgewichte [8], auf ihre Bedeutung zur Herleitung einer Gleichung hingewiesen, die ein Äquivalent zum hydrodynamischen Bernoulli-Gesetz darstellt.

Die Integrabilitätsbedingung, die für die Existenz stationärer Lösungen ($\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow d_t \rightarrow v \cdot \nabla$) der Flüssigkeitsgleichungen in einer abgeschlossenen Geometrie notwendig ist, gilt für $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ zwar auf jeder Zeitskala, allerdings können die partiellen Differentiale $\alpha_{\parallel, \perp}$ und $\beta_{\parallel, \perp}$ von der Zeitskala, auf der die Energiegleichung betrachtet wird, abhängen. So kann bei der Betrachtung von Instabilitäten die lokale Abhängigkeit der Druckkomponenten $p_{\parallel, \perp}$ von ρ und B eine andere sein, als die, die für das Gleichgewicht gilt. Ein Beispiel dafür ist ein Modell von Hain, Lüst und Schlüter [18], auf das wir bei den Stabilitätsbetrachtungen noch einmal zurückgreifen werden (siehe S. 84). Es nimmt an, daß die Stoßzeit der Plasmateilchen klein ist gegenüber der Zeitskala, auf der sich das Gleichgewicht einstellt und nimmt deshalb für das Gleichgewicht einen isotropen Druck an. Wächst die Instabilität auf einer schnelleren Zeitskala als der Stoßzeit an, dann verläuft die Entwicklung des Druckes von einem isotropen Druck ausgehend anisotrop. Durch die Integrabilitätsbedingung wird die Abhängigkeit der Druckkomponenten noch nicht festgelegt. Um einfache Abhängigkeiten konstruieren zu können, kann man für die Druckkomponenten einen Ansatz in ρ und B von der Form

$$p_{\parallel}(\rho, B) = \sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu} \rho^{\nu} B^{\mu} \quad \text{und} \quad p_{\perp}(\rho, B) = \sum_{\nu, \mu} b_{\nu\mu} \rho^{\nu} B^{\mu}, \quad (1.60)$$

machen und in die Integrabilitätsbedingung einsetzen. Wir lassen bei den Summationen auch gebrochene Exponenten zu. Unter der Annahme, daß ρ und B in dieser Darstellung unabhängig sind, erhält man für die Koeffizienten die Konsistenzbedingung

$$\mu a_{\nu\mu} + (\nu - 1)(a_{\nu\mu} - b_{\nu\mu}) = 0 \iff (\mu + \nu - 1)a_{\nu\mu} = (\nu - 1)b_{\nu\mu}. \quad (1.61)$$

In dieser Bedingung sind für isotropen Druck die isotherme bzw. isentrope Zustandsgleichung mit

$$a_{\nu\mu} = b_{\nu\mu} = 0 \quad , \quad \nu \neq \gamma \quad , \quad \mu \neq 0 \quad , \quad a_{\gamma,0} = b_{\gamma,0} \quad , \quad \gamma = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{5}{3} \quad (1.62)$$

und die CGL-Gleichung für anisotropen Druck mit

$$a_{\nu\mu} = 0 \quad , \quad \nu \neq 3 \quad , \quad \mu \neq -2 \quad \text{und} \quad b_{\nu\mu} = 0 \quad , \quad \nu \neq 1 \quad , \quad \mu \neq 1 \quad (1.63)$$

als Spezialfälle enthalten. Die Konsistenzbedingung erlaubt eine einfache Verallgemeinerung der CGL-Gleichungen auf

$$p_{\parallel} \propto \rho \left(\frac{\rho}{B} \right)^{\gamma_{\parallel}} \quad , \quad p_{\perp} \propto \rho B^{\gamma_{\perp}} \quad . \quad (1.64)$$

Für $\gamma_{\parallel} = 2$ und $\gamma_{\perp} = 1$ erhalten wir die ursprünglichen CGL-Gleichungen, während für $\gamma_{\parallel} = \gamma_{\perp} = 0$ zwei unabhängige isotherme Zustandsgleichungen entstehen. In der heuristischen Herleitung der CGL-Gleichungen lassen sich die beiden Parameter γ_{\parallel} und γ_{\perp} durch spezielle Wärmeströme einführen, die zu einem Wärmeaustausch von der Form

$$\delta Q = (1 - \gamma_{\perp}) p_{\perp} ds + \left(1 - \frac{\gamma_{\parallel}}{2} \right) p_{\parallel} s dl \quad (1.65)$$

führen. Dieser berücksichtigt die angenommene Unabhängigkeit der parallelen und senkrechten Wärmebewegung. Aus der Bedeutung der Parameter γ_{\parallel} und γ_{\perp} in (1.65) muß für sie die Beschränkung $0 \leq \gamma_{\parallel} \leq 2$ und $0 \leq \gamma_{\perp} \leq 1$ gelten. So verschwindet der Wärmeaustausch für $\gamma_{\parallel} = 2$ und $\gamma_{\perp} = 1$, bzw. für $\gamma_{\parallel} = 0$ und $\gamma_{\perp} = 0$ entspricht er gerade der am Plasma geleisteten Arbeit.

Durch Kombination spezieller Lösungen der Konsistenzbedingung lassen sich weitere Zustandsgleichungen erzeugen. Wollen wir ein Plasma beschreiben, das durch Neutralteilchen geheizt wurde, so bietet sich an, das Plasma bezüglich der Energie in zwei Teile aufzuteilen: in das Hintergrundplasma, in das die Neutralteilchen als zweiter Teil in Form von hochenergetischen Teilchen eingeschossen werden. Für das Hintergrundplasma (HP) kann ein isotroper Druck angenommen werden, während die eingeschossenen, heißen Neutralteilchen (NBI), die im Plasma ionisiert werden, je nach Einschußrichtung zum Magnetfeld einen anisotropen Druck aufbauen werden. Für die Beschreibung dieser Anisotropie eignen sich die CGL-Gleichungen, wenn wir die Wärmeströme ganz vernachlässigen, oder, um in gewissem Umfang Wärmeströme berücksichtigen zu können, die modifizierten CGL-Gleichungen. Die Druckkomponenten des Gesamtplasmas sind dann

$$p_{\parallel} = p + p_{\parallel, \text{NBI}} \quad , \quad p_{\perp} = p + p_{\perp, \text{NBI}} \quad , \quad (1.66)$$

wobei

$$p_{\parallel, \text{NBI}} = c_{\parallel} \rho_{\text{NBI}} \left(\frac{\rho_{\text{NBI}}}{B} \right)^{\gamma_{\parallel}} \quad , \quad p_{\perp, \text{NBI}} = c_{\perp} \rho_{\text{NBI}} B^{\gamma_{\perp}} \quad , \quad p = c \rho_{\text{HP}}^{\gamma} \quad (1.67)$$

gelte mit den Konstanten c_{\parallel} , c_{\perp} und c . Da die Zustandsgleichungen von der Gesamtdichte $\rho = \rho_{\text{HP}} + \rho_{\text{NBI}}$ abhängen müssen, darf das Verhältnis $\rho_{\text{HP}}/\rho_{\text{NBI}}$ nicht von ρ oder B abhängen. Wir können also mit geänderten Konstanten c_{\parallel} , c_{\perp} und c

$$p_{\parallel}(\rho, B) = c \rho^{\gamma} + c_{\parallel} \rho \left(\frac{\rho}{B} \right)^{\gamma_{\parallel}} \quad , \quad p_{\perp}(\rho, B) = c \rho^{\gamma} + c_{\perp} \rho B^{\gamma_{\perp}} \quad (1.68)$$

schreiben. Die Abhängigkeit der Druckkomponenten $p_{\parallel, \perp}$ von ρ und B gilt auf Grund der Herleitung nur entlang der Flüssigkeitsbewegung.

Der Vollständigkeit halber fassen wir die Einflüssigkeitsgleichungen für das GCP nochmals zusammen. Deren elektromagnetischer Anteil besteht aus dem Ohmschen Gesetz und dem Induktionsgesetz, sowie der Divergenzfreiheit von \mathbf{B} und dem Ampèreschen Gesetz:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad (1.69)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \quad (1.70)$$

Der Flüssigkeitsanteil ist durch die Kontinuitätsgleichung, die Kräftebilanz und die Gleichungen für die Druckkomponenten gegeben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (1.71)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{p} = 0 \quad , \quad (1.72)$$

$$d_{\parallel} p_{\parallel} = \frac{B}{\mu_0} \alpha_{\parallel} d_{\parallel} B + \frac{B^2}{\mu_0 \rho} \beta_{\parallel} d_{\parallel} \rho \quad (1.73)$$

und

$$d_{\perp} p_{\perp} = \frac{B}{\mu_0} \alpha_{\perp} d_{\perp} B + \frac{B^2}{\mu_0 \rho} \beta_{\perp} d_{\perp} \rho \quad . \quad (1.74)$$

Dabei nehmen wir für die Differentiale von $p_{\parallel, \perp}$ an, daß sie die Integrabilitätsbedingung

$$\alpha_{\parallel} + \beta_{\parallel} - \beta_{\perp} = \Delta \quad (1.75)$$

erfüllen.

Kapitel 2

Axialsymmetrische Gleichgewichte mit Massenströmung und anisotropem Druck

Bei axialer Symmetrie kann das Gleichgewichtsproblem mit Massenströmung auf die Lösung einer quasilinearen Differentialgleichung reduziert werden [19]. Diese ist bei isotropem Druck mit fünf algebraischen Gleichungen verbunden, die Ausdruck von Erhaltungssätzen sind [20]. Für das GCP haben Dobrott & Greene Ähnliches gezeigt [21]. Iacono *et al.* [8] haben die formale Äquivalenz der halbkinetischen Beschreibung und der Flüssigkeitsbeschreibung des GCP aufgezeigt und zu einem Vergleich von kinetischer und makroskopischer Gleichgewichtstheorie für das GCP genutzt. Die quasilineare Differentialgleichung ist in der Flüssigkeitsbeschreibung mit vier algebraischen Gleichungen sowie zwei Zustandsgleichungen für die Druckkomponenten der Form $p_{\parallel,\perp}(\rho, B)$ gekoppelt. Der Fall isotropen Drucks ist als Spezialfall in dieser Beschreibung enthalten. Die Zustandsgleichungen müssen eine Integrabilitätsbedingung erfüllen, die in Beziehung mit der lokalen Energieerhaltung für die betrachtete Plasmaströmung steht.

Eine numerische Berechnung axialsymmetrischer Gleichgewichte, die sowohl den Einfluß von Massenströmungen als auch von anisotropem Druck berücksichtigt, existierte bisher nicht. Beide Effekte wurden bis jetzt getrennt betrachtet [22, 23, 11]. Mit Hilfe von Modellzustandsgleichungen für $p_{\parallel,\perp}(\rho, B)$, die geeignet sind, ein Plasma mit isotropem Druck und einem Anteil an heißen, durch Neutralteilcheninjektion erzeugten, anisotropen Ionen zu beschreiben, können wir das Gleichgewichtsproblem in ähnlicher Weise wie für isotropen Druck formulieren.

Das Kapitel ist so aufgebaut, daß wir zuerst das physikalische Problem auf seine mathematische Form reduzieren und die Eigenschaften des resultierenden Gleichungssystems diskutieren. Wir betrachten den von Iacono *et al.* [8] angestellten Vergleich zwischen kinetischer und makroskopischer Beschreibung. Dabei zeigt sich, daß die kinetische Beschreibung mit den von Iacono *et al.* gemachten Annahmen nur einen Teil des der Flüssigkeitsbeschreibung zugänglichen Parameterbereichs für die Massenströmung und die Druckkomponente erreicht. Zur Lösung des axialsymmetrischen Gleichgewichtsproblems wurde das Computerprogramm DIVAFlow geschrieben, das ein Flüssigkeitsmodell

für die Zustandsgleichungen von p_{\parallel} und p_{\perp} benutzt, das geeignet ist Neutralteilcheninjektion zu simulieren. Wir beschreiben die im Programm zur Lösung des Gleichungssystems angewandten numerischen Methoden. Schließlich zeigen und diskutieren wir Resultate, die in der Magnetfeldkonfiguration von ASDEX-Upgrade berechnet wurden.

2.1 Die Gleichgewichtsgleichungen

Wir betrachten in diesem Kapitel axialsymmetrische Plasmakonfigurationen, wie sie im Tokamak vorliegen. Als der Geometrie angepaßte Koordinaten benutzen wir das zylindrische Koordinatensystem (R, φ, z) , wobei R der Abstand zur Symmetrieachse, φ die ignorable Winkelkoordinate und z die Koordinate entlang der Symmetrieachse ist. Das Verhalten des Plasmas werde durch die Einflüssigkeitsgleichungen des GCP's beschrieben, wie sie in Kapitel 1 hergeleitet wurden (1.69 - 1.72, 1.56, 1.58). Stationäre Gleichgewichtszustände werden durch zeitunabhängige Lösungen dieses Gleichgewichtssystems beschrieben, und erfüllen damit die Gleichungen:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (2.1)$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{P} = p_{\perp} \vec{1} + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \mathbf{B} \mathbf{B} \quad , \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \rho} \right)_{\mathbf{B}} = \frac{p_{\parallel}}{\rho^2} \quad , \quad \left(\frac{\partial A}{\partial B} \right)_{\rho} = - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{\rho B} \quad , \quad \alpha_{\parallel} + \beta_{\parallel} - \beta_{\perp} = \Delta \quad , \quad (2.3)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad , \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad . \quad (2.7)$$

Für isotropen Druck reduziert sich das Gleichungssystem auf die MHD-Gleichgewichtsgleichungen mit Massenströmung, wie es von Zehrfeld und Greene [20] zum ersten Mal diskutiert wurde. Gleichung (2.3) ist dort durch die Entropieerhaltung des idealen Gases zu ersetzen. Wir lassen hier die explizite Form der Zustandsgleichungen $p_{\parallel, \perp}(\rho, B)$

so lange wie möglich offen, um die Gültigkeit der allgemeinen Formeln nicht durch spezielle Abhängigkeiten einzuschränken. Wie man die im folgenden benutzte allgemeine Darstellung für axialsymmetrische Vektorfelder findet, wird in Anhang (A) gezeigt. Wir nutzen diese Darstellung für die magnetische Induktion \mathbf{B} und die Stromdichte \mathbf{j} ,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi}(\nabla\Psi \times \nabla\varphi + \mu_0 J \nabla\varphi) \quad (2.8)$$

und

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2\pi}(\nabla J \times \nabla\varphi - \frac{1}{\mu_0} R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\Psi}{R^2} \right) \nabla\varphi) \quad , \quad (2.9)$$

wobei $\Psi(R, z)$ der poloidale magnetische Fluß und $J(R, z)$ der Poloidalstrom ist (Definition siehe Anhang (A)). In gleicher Weise können wir für die Massenströmung $\rho\mathbf{v}$

$$\rho\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi}(\nabla\Psi_M \times \nabla\varphi + L \nabla\varphi) \quad (2.10)$$

und die Wirbeldichte $\nabla \times \mathbf{v}$ des Geschwindigkeitsfeldes

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} \left[\nabla \left(\frac{L}{\rho} \right) \times \nabla\varphi - R^2 \nabla \cdot \left\{ \frac{\nabla\Psi_M}{\rho R^2} \right\} \nabla\varphi \right] \quad (2.11)$$

schreiben. $\Psi_M(R, z)$ ist der poloidale Massenfluß und L/ρ die poloidale Wirbelstärke des Geschwindigkeitsfeldes.

Die Rotationsfreiheit des elektrischen Feldes (2.5) ermöglicht die Einführung einer Potentialfunktion Φ für das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad . \quad (2.12)$$

Die allgemeine Potentialfunktion Φ für axialsymmetrische elektrische Felder \mathbf{E} ,

$$\Phi(R, \varphi, z) = \Phi_M(R, z) + \frac{\Phi_R}{2\pi}\varphi \quad , \quad (2.13)$$

enthält einen räumlich nicht eindeutigen Anteil, der mit einer toroidalen Ringspannung Φ_R ,

$$\Phi_R = - \oint_{\text{tor.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad , \quad (2.14)$$

verbunden ist. Diese ist bei der Frage nach resistiven Gleichgewichten [24] wichtig. Da wir ein ideal leitendes Plasma betrachten, muß die Ringspannung verschwinden. Im anderen Fall würde der toroidale Strom im Plasma ständig anwachsen und ein stationärer Zustand wäre nicht möglich.

Setzen wir (2.8), (2.10) und das elektrische Feld mit $\Phi_R \equiv 0$ in das Ohmsche Gesetz ein, so erhalten wir

$$\nabla\Phi_M = \frac{1}{4\pi^2\rho} \left\{ \frac{L}{R^2} \nabla\Psi - \frac{\mu_0 J}{R^2} \nabla\Psi_M - \nabla\Psi \cdot (\nabla\Psi_M \times \nabla\varphi) \nabla\varphi \right\} . \quad (2.15)$$

Die toroidale Komponente dieser Gleichung muß auf Grund der Axialsymmetrie verschwinden, d.h.

$$\nabla\Psi \cdot (\nabla\Psi_M \times \nabla\varphi) = 0 . \quad (2.16)$$

Daraus folgt $\Psi_M = \Psi_M(\Psi)$, d.h. die Flächen konstanten poloidalen Massenflusses fallen mit denen konstanten poloidalen magnetischen Flusses zusammen. Die Komponente parallel zu $\nabla\Psi$ führt einerseits auf die Bedingung $\Phi_M = \Phi_M(\Psi)$ und legt andererseits die toroidale Massenströmung L mit

$$L = \mu_0 J \Psi'_M + 4\pi^2 R^2 \rho \Phi'_M \quad (2.17)$$

fest. Dabei bedeutet $(\dots)' = \nabla\Psi \cdot \nabla(\dots) / |\nabla\Psi|^2$. Für Funktionen, die nur von Ψ abhängen, bedeutet dies, daß $' = d/d\Psi$. Mit dieser Darstellung für L können wir die Strömungsgeschwindigkeit in eine Komponente entlang \mathbf{B} und eine andere in φ -Richtung aufteilen:

$$\mathbf{v} = \frac{\Psi'_M}{\rho} \mathbf{B} + 2\pi R^2 \Phi'_M \nabla\varphi := \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} . \quad (2.18)$$

Damit ist eine Strömung parallel zu Magnetfeldlinien mit der Flächengröße $\Psi_M(\Psi)$ und eine toroidale Strömung mit dem elektrischen Feld ($\Phi'_M \neq 0$) verbunden. Die durch das elektrische Feld getriebene, toroidale Strömung entspricht einer starren Rotation der Flußfläche Ψ mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \Phi'_M$. Auf diese Weise erhalten wir Strömungen parallel zu Magnetfeldlinien mit $\Psi'_M \neq 0$ und $\Phi'_M \equiv 0$, bzw. rein toroidale Strömungen mit $\Phi'_M \neq 0$ und $\Psi'_M \equiv 0$.

Wir betrachten nun die Kräftebilanz (2.2). Die toroidale Komponente kann mit den Gleichungen

$$\nabla\varphi \cdot (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi R^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \left[M_P^2 J + (2\pi R)^2 \Phi'_M \Psi'_M \right] , \quad (2.19)$$

$$\nabla\varphi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) = \frac{1}{2\pi R^2} \mathbf{B} \cdot \nabla (\Delta J) \quad (2.20)$$

und

$$\nabla\varphi \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2\pi R^2} \mathbf{B} \cdot \nabla J \quad (2.21)$$

in einer Form geschrieben werden, die ihre Integrabilität entlang den Feldlinien erkennen läßt. Dabei ist Δ durch Gleichung (1.59) gegeben und M_P ist das Verhältnis von poloidaler Strömungsgeschwindigkeit zu poloidaler Alfvèngeschwindigkeit,

$$M_P^2 := \mu_0 \rho \frac{v_P^2}{B_P^2} = \mu_0 \frac{\Psi_M'^2}{\rho} . \quad (2.22)$$

Die integrierte Form der toroidalen Komponente führt auf eine neue Flächengröße $J_M(\Psi)$,

$$J_M(\Psi) = \tau J - 4\pi^2 R^2 \Phi_M' \Psi_M' , \quad \tau := 1 - M_P^2 - \Delta . \quad (2.23)$$

Sie zeigt, daß der Poloidalstrom auf den magnetischen Flächen nicht mehr konstant ist. Die Stromdichte \mathbf{j} enthält also eine Komponente senkrecht zu den magnetischen Flächen, die für statische Plasmen mit isotropem Druck verschwindet.

Die Komponente der Kräftebilanz parallel zu \mathbf{B} kann ebenfalls entlang den Magnetfeldlinien integriert werden und ergibt eine Beziehung, die eine Verallgemeinerung der Bernoulligleichung in der Kontinuumsmechanik darstellt:

$$U_D(\Psi) = \frac{1}{\rho} \left(\rho A(\rho, B, \Psi) + p_{\parallel} + \Psi_M' \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} - \frac{\rho v^2}{2} \right) . \quad (2.24)$$

$U_D(\Psi)$ ist eine weitere, durch die Integration erzeugte Flächengröße. Sie ist die Erweiterung der dynamischen Enthalpie [9] auf anisotropen Druck. Sie wurde von Iacono *et al.* [8] das erste Mal angegeben. Zur Integration wurde benutzt, daß einerseits

$$\mathbf{B} \cdot (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \rho \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\Psi_M'}{\rho} \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} - \frac{v^2}{2} \right) \quad (2.25)$$

gilt und wir andererseits mit der Integrabilitätsbedingung (2.3)

$$\mathbf{B} \cdot \nabla P = \rho \mathbf{B} \cdot \nabla \left\{ A(\rho, B) + \frac{p_{\parallel}}{\rho} \right\} \quad (2.26)$$

erhalten.

Die Komponente senkrecht zu den magnetischen Flußflächen führt auf eine quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für den poloidalen magnetischen Fluß $\Psi(R, z)$,

$$\begin{aligned} -R^2 \operatorname{div} \left[\tau \frac{\nabla \Psi}{R^2} \right] &= \mu_0 4\pi^2 R^2 \left[L \Phi_M'' + \Psi_M'' \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \right] + \\ &+ \mu_0^2 J J_M' + \mu_0 4\pi^2 R^2 \rho \left[U_D' - \left(\frac{\partial A}{\partial \Psi} \right)_{\rho, B} \right] . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sie ist das Analogon zur Gleichung von Grad-Shafranov-Schlüter-Lüst im isotropen statischen Fall und wurde das erste Mal von Iacono *et al.* [8] in einer leicht modifizierten Form

angegeben. In der entsprechenden Gleichung für das GCP, die von Dobrott & Greene [21] hergeleitet wurde, ist der Term $\rho[U'_D - \partial A/\partial \Psi]$ durch einen kinetischen Ausdruck zu ersetzen. Für verschwindende poloidale Strömung und ohne Anisotropie stimmt der Differentialoperator auf der linken Seite mit dem des statischen Falles überein. Zur Herleitung der partiellen Differentialgleichung wurden folgende Darstellungen für die drei in der Kräftebilanz vorkommenden Summanden benutzt:

$$\begin{aligned} \nabla \Psi \cdot (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= \rho \nabla \Psi \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{L}{4\pi^2 R^2} \nabla \Psi \cdot \nabla \left(\frac{L}{\rho} \right) - \\ &\quad - \frac{|\nabla \Psi|^2}{4\pi^2 \mu_0} \operatorname{div} \left(M_p^2 \frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) + \frac{\Psi'_M |\nabla \Psi|^2}{4\pi^2 \rho R^2} \nabla \Psi \cdot \nabla \Psi'_M, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\nabla \Psi \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi^2 R^2} \left[-\frac{1}{\mu_0} |\nabla \Psi|^2 R^2 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) - \mu_0 \mathbf{j} \nabla \Psi \cdot \nabla \mathbf{j} \right], \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \nabla \Psi \cdot \operatorname{div} \mathbf{P} &= -\frac{|\nabla \Psi|^2}{4\pi^2 \mu_0} \operatorname{div} \left(\Delta \frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) - \frac{1}{4\pi^2 R^2} \mu_0 \Delta \mathbf{j} \nabla \Psi \cdot \nabla \mathbf{j} + \\ &\quad + \frac{|\nabla \Psi|^2}{4\pi^2 \mu_0 R^2} \nabla \Psi \cdot \nabla \Delta + \nabla \Psi \cdot \nabla p_{\perp} + \frac{\Delta}{\mu_0} \nabla \Psi \cdot \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Die Zustandsgleichungen

Schließlich betrachten wir die Zustandsgleichungen für die Druckkomponenten $p_{\parallel, \perp}(\rho, B, \Psi)$. Wir wollen für die hier benutzte Einflüssigkeitsbeschreibung das in Kapitel 1 vorgeschlagene Modell (1.68) heranziehen, das geeignet ist, Druckanisotropie zu beschreiben, wie sie durch Neutralteilcheninjektion erzeugt wird. In diesem Modell ist die Gesamtmasendichte ρ des Plasmas aus dem Anteil des thermischen isotropen Hintergrundplasmas ρ_{HP} und dem der nichtthermischen anisotropen heißen Ionen ρ_{NBI} , die durch die Neutralteilcheninjektion erzeugt wurden, zusammengesetzt. Das Verhältnis von thermischem zu nichtthermischem Plasma, ρ_{HP}/ρ_{NBI} , darf nicht von ρ und B abhängen, kann sich aber von Flußfläche zu Flußfläche ändern. Ist der Anteil von nichtthermischem Plasma am Gesamtplasma durch $a(\Psi)$ gegeben, so können die Zustandsgleichungen in der Form

$$p_{\parallel}(\rho, B, \Psi) = (1 - a(\Psi)) \rho^{\gamma} C(\Psi) + a(\Psi) \rho \left(\frac{\rho}{B} \right)^{\gamma_{\parallel}} C_{\parallel}(\Psi), \quad (2.31)$$

$$p_{\perp}(\rho, B, \Psi) = (1 - a(\Psi)) \rho^{\gamma} C(\Psi) + a(\Psi) \rho B^{\gamma_{\perp}} C_{\perp}(\Psi) \quad (2.32)$$

geschrieben werden. Für die Exponenten γ , γ_{\parallel} und γ_{\perp} legen wir die Werte

$$\gamma = 1, \text{ bzw. } \frac{5}{3}, \quad 0 \leq \gamma_{\parallel} \leq 2, \quad 0 \leq \gamma_{\perp} \leq 1 \quad (2.33)$$

zugrunde, die wir der Einfachheit halber als im Plasma konstant annehmen. Für $a \equiv 0$ erhalten wir so ein Plasma mit isotropem Druck und für $a \equiv 1$ ein Plasma mit rein anisotropem Drucktensor, der für $\gamma_{\parallel} = 2$ und $\gamma_{\perp} = 1$ mit dem des CGL-Modells identisch ist. Definieren wir durch das ideale Gasgesetz Temperaturen T , T_{\parallel} und T_{\perp} für den thermischen und nichtthermischen Teil, so sind die Zustandsgleichungen identisch mit Gleichungen, die die Variation der drei Temperaturen auf einer Flußfläche angeben:

$$T(\rho, \Psi) = \frac{m}{k} \rho^{\gamma-1} C(\Psi), \quad (2.34)$$

$$T_{\parallel}(\rho, B, \Psi) = \frac{m}{k} \left(\frac{\rho}{B}\right)^{\gamma_{\parallel}} C_{\parallel}(\Psi), \quad (2.35)$$

$$T_{\perp}(\rho, B, \Psi) = \frac{m}{k} B^{\gamma_{\perp}} C_{\perp}(\Psi). \quad (2.36)$$

Es ist k die Boltzmannkonstante und $m = m_i + m_e$ die Summe aus Ionen- und Elektronenmasse, wenn es nur eine Sorte einfach ionisierter Ionen gibt. Für die partiellen Differentiale der Gesamtdruckkomponenten und das Potential $A(\rho, B, \Psi)$ erhalten wir

$$B \left(\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial B}\right)_{\rho, \Psi} = -\gamma_{\parallel} a(\Psi) \rho \left(\frac{\rho}{B}\right)^{\gamma_{\parallel}} C_{\parallel}(\Psi) = \frac{B^2}{\mu_0} \alpha_{\parallel}, \quad (2.37)$$

$$\rho \left(\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \rho}\right)_{B, \Psi} = \gamma(1 - a(\Psi)) \rho^{\gamma} C(\Psi) + (\gamma_{\parallel} + 1) a(\Psi) \rho \left(\frac{\rho}{B}\right)^{\gamma_{\parallel}} C_{\parallel}(\Psi) = \frac{B^2}{\mu_0} \beta_{\parallel}, \quad (2.38)$$

$$B \left(\frac{\partial p_{\perp}}{\partial B}\right)_{\rho, \Psi} = \gamma_{\perp} a(\Psi) \rho B^{\gamma_{\perp}} C_{\perp}(\Psi) = \frac{B^2}{\mu_0} \alpha_{\perp}, \quad (2.39)$$

$$\rho \left(\frac{\partial p_{\perp}}{\partial \rho}\right)_{B, \Psi} = \gamma(1 - a(\Psi)) \rho^{\gamma} C(\Psi) + a(\Psi) \rho B^{\gamma_{\perp}} C_{\perp}(\Psi) = \frac{B^2}{\mu_0} \beta_{\perp} \quad (2.40)$$

und

$$A(\rho, B, \Psi) = \frac{1}{\gamma-1} (1 - a(\Psi)) \rho^{\gamma-1} C(\Psi) + \frac{1}{\gamma_{\parallel}} a(\Psi) \left(\frac{\rho}{B}\right)^{\gamma_{\parallel}} C_{\parallel}(\Psi) + \frac{1}{\gamma_{\perp}} a(\Psi) B^{\gamma_{\perp}} C_{\perp}(\Psi) \quad (2.41)$$

für $\gamma = \frac{5}{3}$ und für $\gamma = 1$ muß $\rho^{\gamma-1}/(\gamma-1)$ durch $\ln(\rho)$ ersetzt werden.

Das Gleichgewichtsproblem kann also wie im Falle isotropen Drucks auf die Lösung einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung für Ψ reduziert werden. Die Differentialgleichung ist in unserem Modell allerdings mit sieben algebraischen Gleichungen gekoppelt, aus denen bei vorgegebenen Flächengrößen Ψ_M , Φ_M , J_M , U_D , C , C_{\parallel} und C_{\perp} die physikalisch anschaulichen Größen v_p , v_T , J , ρ , T , T_{\parallel} und T_{\perp} berechnet werden müssen. Setzen wir voraus, daß die algebraischen Gleichungen Lösungen besitzen, so haben wir ein kompliziertes, physikalisch hoch nichtlineares Gleichungssystem. Bevor wir auf die Eigenschaften dieses Gleichungssystems eingehen, betrachten wir die kinetische Formulierung in Axialsymmetrie.

Das driftkinetische axialsymmetrische Gleichgewichtsproblem

Für den Fall axialer Symmetrie gibt es von Dobrott & Greene [21] eine Beschreibung des Gleichgewichtsproblems, das die Gleichungen des halbmikroskopischen GCP-Modells benutzt. Durch die Einführung einer Pseudo-Hamilton-Funktion

$$H_{\nu}(u'_{\parallel}, \mu, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(u'_{\parallel} + \frac{B_T}{B}v_{\Phi}) + \mu B + \frac{q_{\nu}}{m_{\nu}}\Phi_{\parallel} - \frac{1}{2}v_{\Phi}^2 \quad (2.42)$$

für jede Teilchensorte ν können die driftkinetischen Gleichungen durch Verteilungsfunktionen der Form $f_{\nu}(\mu, H_{\nu}, \Psi)$ gelöst werden, wobei μ das magnetische Moment pro Masseneinheit ist. Die Massendichte ρ , die parallele Massengeschwindigkeit ρv_{\parallel} und die Druckkomponenten $p_{\parallel, \perp}$ ergeben sich durch Momentenbildung und Summation über die Teilchensorten. Die Änderung von ρ und $p_{\parallel, \perp}$ entlang einer Magnetfeldlinie kann auf Grund der Abhängigkeit der Verteilungsfunktionen f_{ν} von den Pseudo-Hamilton-Funktionen H_{ν} über die Änderungen der Magnetfeldstärke B und der Geschwindigkeit v_{Φ} ausgedrückt werden. Die Bedingung der Quasineutralität eliminiert dabei das parallele elektrische Feld. Wenn wir mit d das Differential entlang \mathbf{B} bezeichnen, so erhalten wir

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(1 + \frac{C_{+}}{\rho}\right) \frac{dB}{B} - \frac{C_{\pm} v_{\Phi} dv_{\Phi}}{\rho} \quad , \quad (2.43)$$

$$dp_{\parallel} = (p_{\parallel} - p_{\perp} + M_P^2 v_A^2 C_{+}) \frac{dB}{B} + (\rho - M_P^2 v_A^2 C_{\mp}) v_{\Phi} dv_{\Phi} \quad (2.44)$$

und

$$dp_{\perp} = (2p_{\perp} + C_{*}) \frac{dB}{B} - C_{+} v_{\Phi} dv_{\Phi} \quad . \quad (2.45)$$

Dabei sind die Funktionen C_{+} , C_{\mp} und C_{*} durch

$$C_{+} := \sum_{\nu} C_{\nu, 1} - \left(\sum_{\nu} \frac{q_{\nu}}{m_{\nu}} C_{\nu, 1}\right) \left(\sum_{\nu} \frac{q_{\nu}}{m_{\nu}} C_{\nu, 0}\right) / \sum_{\nu} \left(\frac{q_{\nu}}{m_{\nu}}\right)^2 C_{\nu, 0} \quad , \quad (2.46)$$

$$C_{\ddagger} := \sum_{\nu} C_{\nu,0} - \left(\sum_{\nu} \frac{q_{\nu}}{m_{\nu}} C_{\nu,0} \right)^2 / \sum_{\nu} \left(\frac{q_{\nu}}{m_{\nu}} \right)^2 C_{\nu,0} \quad (2.47)$$

und

$$C_{*} := \sum_{\nu} C_{\nu,2} - \left(\sum_{\nu} \frac{q_{\nu}}{m_{\nu}} C_{\nu,1} \right)^2 / \sum_{\nu} \left(\frac{q_{\nu}}{m_{\nu}} \right)^2 C_{\nu,0} \quad (2.48)$$

erklärt, wobei sich die Summation über alle Teilchensorten erstreckt. Die $C_{\nu,\lambda}$ sind durch die kinetischen Integrale

$$C_{\nu,\lambda} := 2\pi m_{\nu} B^{\lambda+1} \int_0^{\infty} d\mu \mu^{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial H_{\nu}} \quad (2.49)$$

definiert. Die drei Gleichungen für ρ , p_{\parallel} und p_{\perp} sind die Äquivalente der parallelen Kräftebilanz (2.24) und der Zustandsgleichungen in der Flüssigkeitsbeschreibung. Die hier nicht benötigten Gradienten senkrecht zu den magnetischen Flußflächen können in der gleichen Weise gebildet werden [21].

Iacono *et al.* [8] haben gezeigt, daß sich durch Einsetzen von (2.43) in (2.44) und (2.45) die Differentialquotienten der Flüssigkeitstheorie $\alpha_{\parallel,\perp}$ und $\beta_{\parallel,\perp}$ durch folgende Ausdrücke der kinetischen Theorie wiedergeben lassen:

$$\alpha_{\parallel} \equiv \frac{\mu_0}{B^2} \left(p_{\parallel} - p_{\perp} - \frac{\rho}{C_{\ddagger}} (\rho + C_{+}) + M_p^2 v_A^2 \rho \right) \quad , \quad \beta_{\parallel} \equiv \left(M_p^2 - \frac{\rho}{C_{\ddagger} v_A^2} \right) \quad , \quad (2.50)$$

$$\alpha_{\perp} \equiv \frac{\mu_0}{B^2} \left(2p_{\perp} + C_{*} - \frac{C_{+}}{C_{\ddagger}} (\rho + C_{+}) \right) \quad , \quad \beta_{\perp} \equiv \frac{C_{+}}{C_{\ddagger} v_A^2} \quad . \quad (2.51)$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Ausdrücke die Integrabilitätsbedingung erfüllen.

Der Unterschied zwischen der kinetischen Beschreibung und der Einflüssigkeitsdarstellung tritt klarer hervor, wenn die kinetischen Funktionen C_{+} , C_{\ddagger} und C_{*} in den entsprechenden Flüssigkeitsgrößen ausgedrückt werden [8]:

$$\frac{v_A^2}{\rho} C_{\ddagger} = - \frac{1}{\beta_{\parallel} - M_p^2} \quad , \quad (2.52)$$

$$\frac{1}{\rho} C_{+} = - \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel} - M_p^2} \quad , \quad (2.53)$$

$$\frac{\mu_0}{B^2} C_{*} = -2\mu_0 \frac{p_{\perp}}{B^2} + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp} \left(1 - \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel} - M_p^2} \right) \quad . \quad (2.54)$$

Die in einer Flüssigkeitsbeschreibung positiven Größen β_{\parallel} und M_p^2 führen auf eine Polstelle in diesen Funktionen, wenn die Strömung parallel zum Magnetfeld die Schallgeschwindigkeit erreicht, $\beta_{\parallel} = M_p^2$. Bei isotropem Druck ist dies der Fall bei $\Psi_M'^2 B^2 / \rho = \gamma p$. Im Falle des CGL-Modells lautet die Bedingung $\Psi_M'^2 B^2 / \rho = 3p_{\parallel}$. Die Definitionen der kinetischen Funktionen zeigen allerdings, daß diese Polstelle nur dann auftritt, wenn $\sum_{\nu} (q_{\nu}/m_{\nu})^2 C_{\nu 0}$ eine Nullstelle hat. Aus der Definition von $C_{\nu 0}$ folgt, daß für Verteilungsfunktionen, die im Phasenraum lokal stabil sind, d.h. $\partial f_{\nu} / \partial H_{\nu} \leq 0$ erfüllen, $C_{\nu 0}$ negativ definit ist und $\sum_{\nu} (q_{\nu}/m_{\nu})^2 C_{\nu 0}$ keine Nullstellen haben kann. Mithin zeigt die kinetische Beschreibung keine Polstelle in C_+ , C_{\pm} und C_* , außer in Fällen, in denen die Verteilungsfunktionen f_{ν} größere Bereiche mit $\partial f_{\nu} / \partial H_{\nu} \geq 0$ oder positive Sprünge haben. Iacono *et al.* zeigten, daß in einem Zweikomponentenplasma die Funktionen C_+ und C_{\pm} für lokal stabile Verteilungsfunktionen negativ definit sind. Dies ergibt sich aus einer Umformung der Ausdrücke für C_+ und C_{\pm} unter Ausnützung der Quasineutralitätsbedingung ($n_i \equiv n_e$) und führt auf ¹

$$C_+ = \rho \frac{\sum_{i,e} \rho_{\nu} \frac{C_{\nu 1}}{C_{\nu 0}}}{\sum_{i,e} \frac{\rho_{\nu}^2}{C_{\nu 0}}}, \quad C_{\pm} = \frac{\rho^2}{\sum_{i,e} \frac{\rho_{\nu}^2}{C_{\nu 0}}}. \quad (2.56)$$

In Flüssigkeitsbeschreibungen kann β_{\parallel} mit Hilfe der parallelen Druckkomponente dargestellt werden, so daß $M_p^2 = \beta_{\parallel}$ die kinetische Energiedichte ρv_{\parallel}^2 , die mit $\Psi_M' \neq 0$ verbunden ist, mit der thermischen Energiedichte von p_{\parallel} vergleicht. Um eine Vorstellung zu erhalten, was dieser Vergleich für die kinetische Beschreibung bedeutet, betrachten wir ihn der Einfachheit halber für eine Teilchensorte. Wir benutzen dazu eine Verteilungsfunktion, die bei Iacono *et al.* [8] zu einem Vergleich der kinetischen GCP-Darstellung der axialsymmetrischen Gleichgewichtstheorie mit deren Einflüssigkeitsbeschreibung heran-

¹Für C_{\pm} gilt die negative Definitheit für beliebig viele Teilchensorten, wenn deren Verteilungsfunktionen lokal stabil sind. Dies kann mit der Ungleichung

$$\left(\sum_{\nu} a_{\nu} \right) \left(\sum_{\nu} b_{\nu}^2 a_{\nu} \right) - \left(\sum_{\nu} b_{\nu} a_{\nu} \right) \left(\sum_{\nu} b_{\nu} a_{\nu} \right) = \sum_{\nu < \mu} a_{\nu} a_{\mu} (b_{\mu} - b_{\nu})^2 \geq 0, \quad a_{\nu} a_{\mu} \geq 0 \quad (2.55)$$

gezeigt werden, wobei Gleichheit für $b_{\nu} = b_{\mu}$ gilt, wenn $a_{\nu} a_{\mu} \neq 0$ ist.

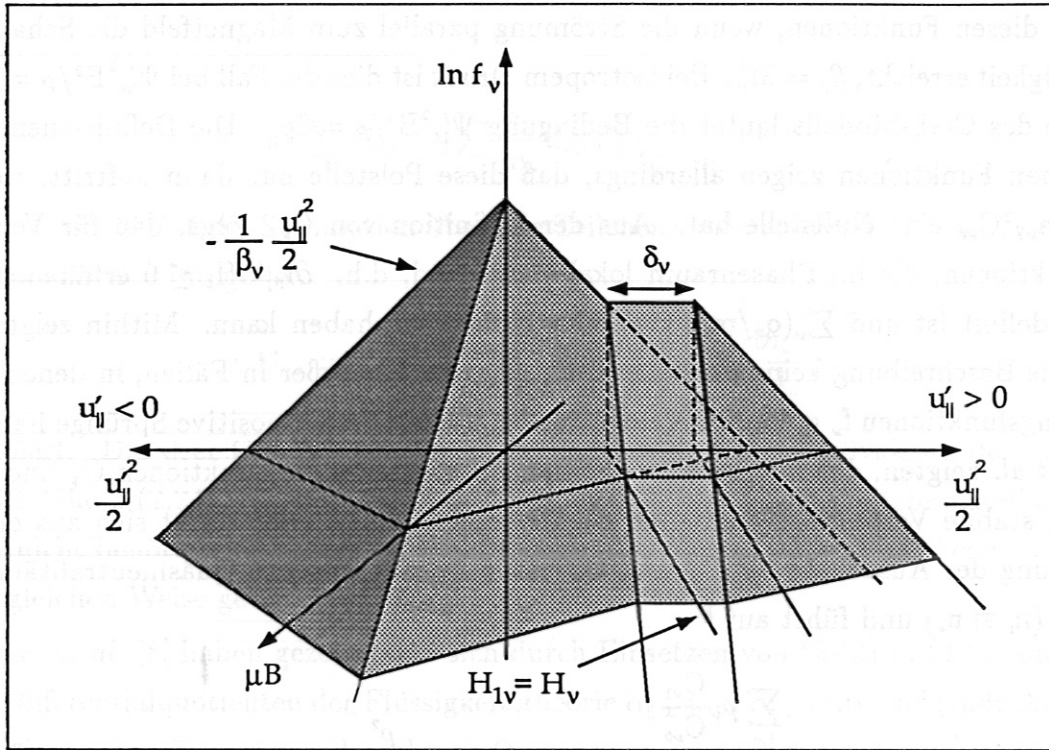


Abbildung 2.1: Skizze der Verteilungsfunktion in logarithmischem Maßstab.

gezogen wurde, und nur eine Massenströmung parallel zu \mathbf{B} erzeugt (Abb.: 2.1):

$$\begin{aligned}
 u'_{\parallel} < -\frac{B_T}{B} v_{\Phi} : f_v^< &= N_{\nu} \exp(-\beta_{\nu} H_{\nu}) \\
 u'_{\parallel} > -\frac{B_T}{B} v_{\Phi} : f_v^> &= N_{\nu} \begin{cases} \exp(-\beta_{\nu} H_{\nu}) & H_{\nu}^* := \frac{q_{\nu}}{m_{\nu}} \Phi_{\parallel} + \mu B \leq H_{\nu} \leq H_{1\nu} \\ \exp(-\beta_{\nu} H_{1\nu}) & H_{1\nu} \leq H_{\nu} \leq H_{1\nu} + \delta_{\nu} \\ \exp(-\beta_{\nu} (H_{1\nu} - \delta_{\nu})) & H_{1\nu} + \delta_{\nu} \leq H_{\nu} \end{cases} \quad (2.57)
 \end{aligned}$$

Dabei sind $N_{\nu}(\Psi) = n_{\nu}(\Psi) (\beta_{\nu}(\Psi) / 2\pi)^{3/2}$ und $\beta_{\nu}(\Psi) := m_{\nu} / kT_{\nu}(\Psi)$ Normierungsfaktoren, des weiteren sei $H_{1\nu}(\mu, \Psi) := \mu \tilde{B}_{\nu}(\Psi) + \tilde{\Phi}_{\nu}(\Psi)$ und $H_{\nu}^*(\mu, B) := \mu B + q_{\nu} \Phi_{\parallel}(B) / m_{\nu}$. Die Funktionen $\tilde{B}_{\nu}(\Psi)$ und $\tilde{\Phi}_{\nu}(\Psi)$ sind so zu wählen, daß auf jeder Flußfläche $H_{1\nu} \geq \max_{\Psi = \text{konst.}} H_{\nu}^*(\mu, B)$ gilt. Der Teil $f_v^<$ der Verteilungsfunktion ist eine Maxwellverteilung, während für $u'_{\parallel} \geq 0$ die Verteilungsfunktion für $\delta_{\nu} \neq 0$ durch Ausbildung einer Schulter von der Maxwellverteilung abweicht. Die Wahl von $H_{1\nu}$ stellt sicher, daß in der Schulter der Verteilungsfunktion für $\delta_{\nu} \neq 0$ keine gefangenen Teilchen enthalten sind. Somit tragen nur die umlaufenden Teilchen zur poloidalen Strömung bei, erhöhen aber gleichzeitig auch den Wert für p_{\parallel} .

Der Quotient $\rho_\nu v_{\parallel}^2/p_{\parallel\nu}$ kann mit Hilfe der Geschwindigkeitsmomente

$$\begin{aligned} M_{mn} &= 2\pi B^{m+1} \int_0^\infty d\mu \mu^m \int_{-\infty}^\infty du'_{\parallel} u'_{\parallel}{}^n f_\nu = \\ &= -\frac{2\pi B}{n+1} \sqrt{2}^{n+1} B^m \int_0^\infty d\mu \mu^m \int_{H_\nu^*}^\infty dH_\nu \sqrt{H_\nu - H_\nu^*}^{n+1} \left\{ \frac{\partial f_\nu^>}{\partial H_\nu} + (-1)^n \frac{\partial f_\nu^<}{\partial H_\nu} \right\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

ausgedrückt werden,

$$\rho_\nu \frac{v_{\parallel}^2}{p_{\parallel\nu}} = \frac{M_{01}^2}{M_{00}M_{02} - M_{01}^2} \quad (2.59)$$

Die benötigten Momente können durch Umformungen als

$$M_{01}^2 = \frac{n_\nu^2}{\beta_\nu} \left(\frac{d_\nu B}{\tilde{B}_\nu} \right)^2 \frac{1}{2\pi} e^{-2\beta_\nu \tilde{\Phi}_\nu} \quad , \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} M_{00} &= n_\nu \exp\left(-\beta_\nu \frac{q_\nu}{m_\nu} \Phi_{\parallel}\right) \left(1 + \frac{B}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy e^{-yB} \right. \\ &\quad \left[e^{d_\nu} \Gamma\left(\frac{3}{2}, y(\tilde{B}_\nu - B) + d_\nu + \beta_\nu(\tilde{\Phi}_\nu - \frac{q_\nu}{m_\nu} \Phi_{\parallel})\right) - \right. \\ &\quad \left. \left. - \Gamma\left(\frac{3}{2}, y(\tilde{B}_\nu - B) + \beta_\nu(\tilde{\Phi}_\nu - \frac{q_\nu}{m_\nu} \Phi_{\parallel})\right) \right] \right) \quad , \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} M_{02} &= \frac{n_\nu}{\beta_\nu} \exp\left(-\beta_\nu \frac{q_\nu}{m_\nu} \Phi_{\parallel}\right) \left(1 + \frac{2B}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy e^{-yB} \right. \\ &\quad \left[e^{d_\nu} \Gamma\left(\frac{5}{2}, y(\tilde{B}_\nu - B) + d_\nu + \beta_\nu(\tilde{\Phi}_\nu - \frac{q_\nu}{m_\nu} \Phi_{\parallel})\right) - \right. \\ &\quad \left. \left. - \Gamma\left(\frac{5}{2}, y(\tilde{B}_\nu - B) + \beta_\nu(\tilde{\Phi}_\nu - \frac{q_\nu}{m_\nu} \Phi_{\parallel})\right) \right] \right) \quad , \end{aligned} \quad (2.62)$$

geschrieben werden, wobei $\Gamma(a, z)$ die unvollständige Γ -Funktion ist und die Definitionen $y := \mu\beta_\nu$ und $d_\nu := \delta_\nu\beta_\nu$ als Abkürzungen eingeführt wurden. In der linken Abbildung 2.2 ist $\rho_\nu v_{\parallel}^2/p_{\parallel\nu}$ über d_ν und \tilde{B}_ν als Parameter aufgetragen, wobei $\tilde{B}_\nu \geq B = 2T$ gewählt wurde. Der Einfachheit halber haben wir $\tilde{\Phi}_\nu = 0 = \Phi_{\parallel}$ genommen, womit wir bei genauer Betrachtung von (2.59) eine obere Grenze für $\rho_\nu v_{\parallel}^2/p_{\parallel\nu}$ erhalten. Es ist zu erkennen, daß das Verhältnis $\rho_\nu v_{\parallel}^2/p_{\parallel\nu}$ zum einen nach oben beschränkt ist und zum anderen Werte um 1 erst ab $d_\nu \approx 10$ und nur für $\tilde{B}_\nu \approx B$ erreicht. Da d_ν die Breite der Schulter in Einheiten der Abfalllänge β_ν bezüglich H_ν mißt, bedeutet dies eine erhebliche Deformation der Maxwellverteilung. Eine asymptotische Entwicklung der unvollständigen Γ -Funktionen in $\rho_\nu v_{\parallel}^2/p_{\parallel\nu}$ zeigt, daß der Quotient für $\tilde{B}_\nu = B$ und $d_\nu \rightarrow \infty$ gegen 3 geht, d.h. $\rho_\nu v_{\parallel}^2 \leq 3p_{\parallel\nu}$ für die betrachteten Verteilungsfunktionen. Die Polstelle von K_0 , die im

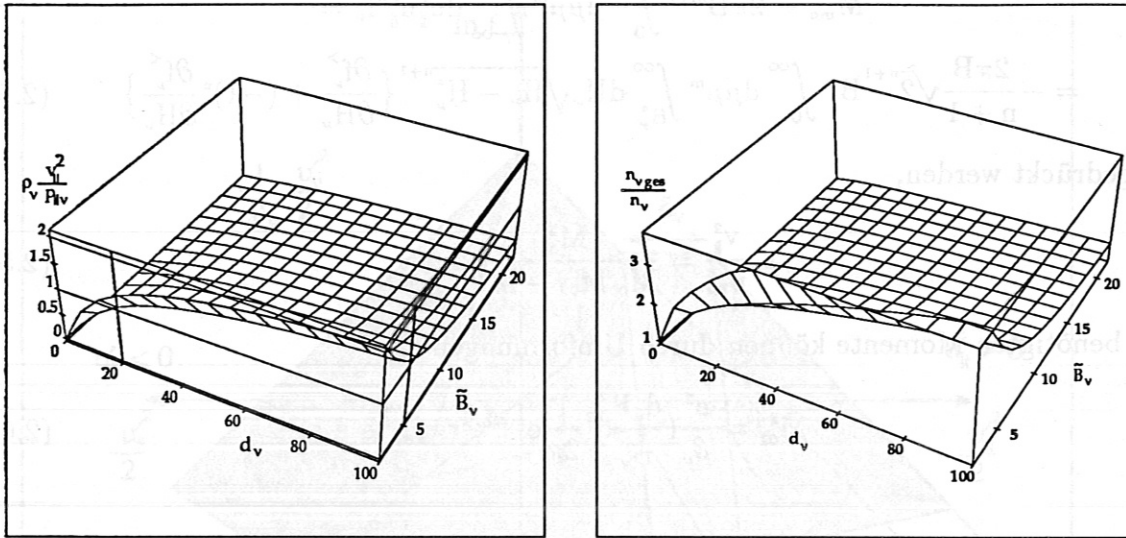


Abbildung 2.2: Die linke Abbildung zeigt das Verhältnis von kinetischer Bewegungsenergie zu paralleler Wärmeenergie. Dies entspricht dem Verhältnis von M_p^2 zu $\mu_0 p_\parallel / B^2$. Rechts ist das Verhältnis der Gesamteilchendichte zum Maxwell'schem Teil der Teilchendichte dargestellt. Dabei gilt $B=2$, $v_\perp = 0$, $\Phi_\parallel = 0 = \tilde{\Phi}_\nu$.

CGL-Modell bei $\rho_\nu v_\parallel^2 = 3p_\parallel$ liegt, kann vom kinetischen Modell nur für den nicht realistischen Grenzfall $d_\nu \rightarrow \infty$ erreicht werden. In der rechten Abbildung 2.2 ist das Verhältnis der Teilchendichte $n_{\nu,ges}$, die sich aus der Verteilungsfunktion ergibt, zum Maxwell'schen Anteil n_ν an der Teilchendichte ($\delta_\nu = 0$) ebenfalls über d_ν und \tilde{B}_ν aufgetragen. Daraus ist ersichtlich, daß für $d_\nu \approx 10$ und $\tilde{B}_\nu \approx B$ die Anzahl der Maxwell'schen Teilchen schon kleiner ist als die, die durch δ_ν in der Schulter der Verteilungsfunktion hinzukommen. Für $d_\nu \rightarrow \infty$ betrachten wir besser das Verhältnis $n_\nu / n_{\nu,ges}$, das dann gegen Null geht, d.h. es gibt nur noch umlaufende Teilchen. An diesen Ergebnissen wird sich durch andere lokal stabile Modellverteilungsfunktionen nichts ändern, da die Parameterbereiche für ρv_\parallel^2 und p_\parallel , die in der kinetischen Beschreibung zugänglich sind, auch für sie gekoppelt sein werden und daher in gleicher Weise eingeschränkt sind. Verteilungsfunktionen, die lokal stabil sind, beschränken sich so automatisch auf Bereiche mit $\rho v_\parallel^2 \leq 3p_\parallel$. Wird in der Flüssigkeitsbeschreibung auf eine Konsistenz in diesen Parameterbereichen Wert gelegt, so muß dort diese Beschränkung ebenfalls eingehalten werden. Da hier ρ , v_\parallel , und p_\parallel durch die Flächengrößen verbunden sind, wird deren freie Wählbarkeit eingeschränkt.

2.2 Zur Lösbarkeit des axialsymmetrischen Gleichgewichtsproblems

Auf Grund der Korrespondenz der partiellen Differentiale der Druckkomponenten mit den kinetischen Funktionen (2.50) und (2.51) kann das Lösungsverhalten des Gleichungssystems für Flüssigkeitsmodelle und für das kinetische Modell gemeinsam untersucht werden. Die Lösbarkeit des Gesamtgleichungssystems bestimmt sich einerseits aus dem Lösungsverhalten der algebraischen Gleichungen und andererseits aus dem Charakter der partiellen Differentialgleichung für Ψ . Für das kinetische Modell sind die entsprechenden Differentialgleichungen entlang Magnetfeldlinien zu betrachten.

Die quasilineare partielle Differentialgleichung

Nehmen wir an, wir hätten das Problem der algebraischen Gleichungen, bzw. der magnetischen Differentialgleichungen, gelöst, dann kann die partielle Differentialgleichung für Ψ (2.27) in der Form

$$\mathcal{D}(\Psi) = F(R, \Psi, |\nabla\Psi|) \quad (2.63)$$

geschrieben werden. Dabei repräsentiert \mathcal{D} den auf Ψ wirkenden Differentialoperator und F stellt formal die rechte Seite dar. Ohne poloidale Massenströmung und ohne Druckanisotropie ist der Differentialoperator \mathcal{D} elliptisch und die Differentialgleichung kann als Randwertproblem gelöst werden. Dies entspricht der physikalischen Problemstellung eines durch ideal leitende Wände eingeschlossenen Plasmas. Durch die Funktion τ im Differentialoperator von (2.23) hängt die Elliptizität der Differentialgleichung von der Stärke der poloidalen Massenströmung und der Druckanisotropie ab. Es ist bekannt, daß die Differentialgleichung für zunehmende poloidale Massenströmung hyperbolisch wird, wodurch das zugehörige Randwertproblem nicht mehr korrekt gestellt ist.

Der Charakter der Differentialgleichung kann durch eine Analyse des Differentialoperators \mathcal{D} festgestellt werden. Diese Untersuchung kann auf die kanonische Form von partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen zurückgreifen [25] und betrachtet die aus den Koeffizienten der zweiten Ableitungen des Differentialoperators gebildete charakteristische Determinante D . Ihr Vorzeichen bestimmt den Charakter

der Differentialgleichung. Wie bereits Iacono *et al.* [8] gezeigt haben, erhält man

$$D = \tau^2 \left(1 - \frac{2}{\tau} |\nabla \Psi|^2 \frac{\partial \tau}{\partial |\nabla \Psi|^2} \right) \begin{cases} > 0 & \text{elliptisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ < 0 & \text{hyperbolisch} \end{cases} \quad (2.64)$$

Berücksichtigt man, daß mit den Gleichungen (2.23) und (2.24) die Massendichte ρ und der Poloidalstrom J und damit auch $A(\rho, B, \Psi)$ als Funktionen von R , Ψ und $|\nabla \Psi|$ wiedergegeben werden können, kann zusammen mit (2.3) die Determinante auf die Form

$$D = \tau^2 B^2 \frac{K_0}{B_T^2 K_0 + B_P^2 \tau} \quad (2.65)$$

gebracht werden, wobei

$$K_0 := 1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp}(1 - N_n) \quad , \quad N_n := \frac{\beta_{\perp}}{N} \quad , \quad N := \beta_{\parallel} - M_P^2 \quad . \quad (2.66)$$

Die Determinante hat Nullstellen bei $\tau = 0$ und bei $K_0 = 0$. Ihr Vorzeichen ist durch das Vorzeichen von K_0 und das Vorzeichen des Nenners in (2.65) bestimmt. Im kinetischen Modell lautet K_0 [21]:

$$K_0 = 1 + \frac{\mu_0}{B} \left(\frac{\partial p_{\perp}}{\partial B} \right)_{v_{\phi}, \psi} = 1 + \frac{\mu_0}{B^2} (2p_{\perp} + C_*) \quad . \quad (2.67)$$

Ohne poloidale Rotation ($M_P^2 \equiv 0$) erhalten wir als Elliptizitätsgrenzen die Bedingung an das Nichteintreten der sogenannten "Firehose"-Instabilität ($1 - \Delta > 0$) und der sogenannten Spiegelnstabilität ($1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp}(1 - \beta_{\perp}/\beta_{\parallel}) > 0$). Nehmen wir an, daß $|\alpha_{\perp, \parallel}|, |\beta_{\perp, \parallel}|, |\Delta| = O(\mu_0 p_{\perp, \parallel}/B^2) \ll 1$ gilt, so sind bei nicht zu großer Anisotropie beide Bedingungen erfüllt. Da die Toroidalgeschwindigkeit in der Elliptizitätsbedingung nicht vorkommt, bleibt die partielle Differentialgleichung unter den eben genannten Bedingungen für rein toroidale Geschwindigkeiten elliptisch [8].

Für $M_P^2 > 0$ verschiebt sich die Nullstelle von K_0 :

$$K_0 = 0 \quad \implies \quad M_P^2 =: \beta^* = \beta_{\parallel} - \frac{\beta_{\perp}^2}{1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp}} < \beta_{\parallel} \quad . \quad (2.68)$$

Weiter hat K_0 eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $M_P^2 = \beta_{\parallel}$. Diese Eigenschaft ist vom Gleichgewichtsproblem mit isotropem Druck her bekannt und führt auf ein kleines Intervall knapp oberhalb von β^* , in dem D negativ ist. In diesem Intervall hat

das Gleichgewichtsproblem hyperbolischen Charakter. Deutlicher erkennt man den Vorzeichenwechsel von D , wenn man, wie in [8], die charakteristische Determinante durch Eliminierung von $\beta_{\parallel} - M_p^2$ als Nenner in K_0 umschreibt,

$$D = \tau^2 B^2 (1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp}) \frac{\beta^* - M_p^2}{B_p^2 M_p^4 - X M_p^2 + Y}, \quad (2.69)$$

wobei

$$X = B_T^2 (1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp}) + B_p^2 (1 - \Delta + \beta_{\parallel}) \quad (2.70)$$

und

$$Y = B_T^2 (1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp}) \beta^* + B_p^2 \beta_{\parallel} (1 - \Delta) \quad (2.71)$$

In dieser Darstellung ist zu sehen, daß D zwei Nullstellen ($\tau = 0$, $\beta^* = M_p^2$) und zwei Polstellen ($B_p^2 M_p^4 - X M_p^2 + Y = 0$) hat. Die beiden Polstellen von D entsprechen den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der langsamen und schnellen magnetoakustischen Wellen [8]. Mit der Annahme $B_p^2/B_T^2 \ll 1$, die für den Tokamak erfüllt ist, lassen sich die beiden Polstellen approximativ berechnen. Für die schnellen magnetoakustischen Wellen erhält man

$$M_{p,sw}^2 = \frac{B_T^2}{B_p^2} (1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp}) + 1 - \Delta + \beta_{\parallel} - \beta^* + O\left(\frac{B_p^2}{B_T^2}\right) \quad (2.72)$$

und für die langsamen magnetoakustischen Wellen

$$M_{p,*w}^2 = \beta^* + \frac{B_p^2 \beta_{\perp}^2 (1 - \Delta - \beta^*)}{B_T^2 (1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp})^2} + O\left(\frac{B_p^4}{B_T^4}\right) < \beta_{\parallel}, \quad (2.73)$$

wobei wir angenommen haben, daß für die Größen $|\alpha_{\perp,\parallel}|, |\beta_{\perp,\parallel}|, |\Delta| = O(\mu_0 p_{\perp,\parallel}/B^2) \ll 1$ gilt, wie dies für Tokamaks im allgemeinen der Fall ist. Der erste hyperbolische Bereich erstreckt sich also über das M_p^2 -Interval $[\beta^*, M_{p,*w}^2]$, der zweite elliptische Bereich reicht dann bis $M_{p,sw}^2$. Für Strömungen mit $M_p^2 > M_{p,sw}^2$ bleibt die Differentialgleichung hyperbolisch. Dies stimmt für isotropen Druck ($\alpha_{\perp,\perp} = \Delta = 0$, $\beta_{\perp,\perp} = \mu_0 \gamma p/B^2$) und der Annahme $B_p^2/B_T^2 \ll 1$, d.h. $B_T^2 \approx B^2$, mit den Ergebnissen in [22] überein und erweitert diese. Abbildung 2.3 zeigt das Verhalten der charakteristischen Determinante als Funktion von M_p^2 . Für $1 - \Delta < \beta_{\parallel}^*$ ergibt sich ein qualitativ anderes Verhalten. Diese Bedingung liegt jedoch in Tokamaks nicht vor, könnte aber in stellaren Plasmen durchaus erfüllt sein.

Iacono *et al.* haben in [8] gezeigt, daß in dem Verhalten von K_0 für $M_p^2 \approx \beta_{\parallel}$ ein wesentlicher Unterschied zwischen den Flüssigkeitsmodellen und der kinetischen Beschreibung

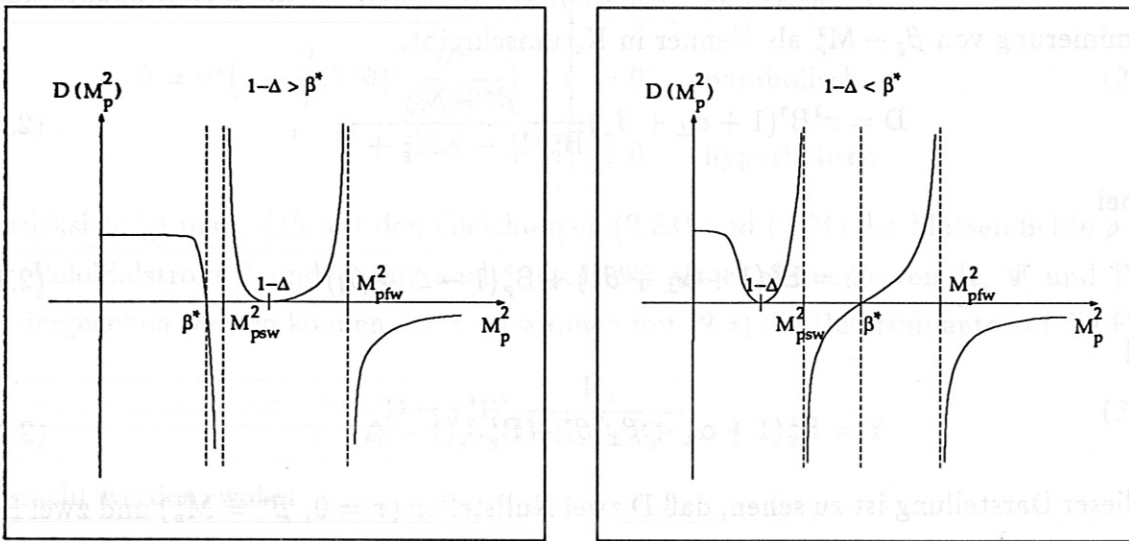


Abbildung 2.3: Skizze des Verhaltens der charakteristischen Determinante für $1 - \Delta > \beta_{||}^*$ und für $1 - \Delta < \beta_{||}^*$.

des GCP's liegt. Im GCP-Modell zeigt K_0 für lokal stabile Verteilungsfunktionen keine Polstelle und für $\mu_{0p\perp}/B^2 \ll 1$ ist auch keine Nullstelle vorhanden. Der erste hyperbolische Bereich verschwindet aber nicht in der kinetischen Beschreibung wie in [8] behauptet wird, sondern ist für lokal stabile Verteilungsfunktionen nicht erreichbar. Diese koppeln, wie wir gesehen haben, die parallele Strömung mit der parallelen Druckkomponente, so daß der in Frage stehende Parameterbereich nicht zugänglich ist. Die Koppelung selbst ist Ausdruck eines toroidalen Effektes, nämlich des Auftretens gefangener Teilchen. Unter diesem Gesichtspunkt sind Aussagen über das GCP in Axialsymmetrie, die aus der Zylindersymmetrie (als der in führender Ordnung dominierenden Geometrie bei einer Näherung für großes Aspektverhältnis) gewonnen werden [8], neu zu betrachten. Bei zylindrischer Symmetrie existieren keine gefangenen Teilchen, so daß Strömung und parallele Druckkomponente entkoppeln und sich ihre Parameterbereiche nicht gegenseitig einschränken.

Wir betrachten im folgenden nur Unterschallströmungen, d.h. $M_p^2 \leq \beta_{||}$.

2.3 Das Gleichgewichtsproblem und die Flächengrößen

Um die partielle Differentialgleichung (2.27) zu lösen, müssen wir die rechte Seite in der Form $F(R, \Psi, |\nabla\Psi|)$ kennen. Für das Flüssigkeitsmodell bedeutet dies, daß wir die Flächengrößen $\Psi_M, \Phi_M, J_M, U_D, C_{\parallel}, C_{\perp}, C$ und $a(\Psi)$ festlegen müssen, wobei $a(\Psi)$ als Parameter eine Sonderrolle einnimmt, und wir sieben algebraische Gleichungen zu lösen haben, um die physikalischen Größen $v_P, v_T, J, \rho, T_{\parallel}, T_{\perp}$ und T zu erhalten. Daß diese Aufgabe nicht einfach ist, ist aus der Berechnung stationärer Gleichgewichte mit isotropem Druck bekannt [22, 23]. Im kinetischen GCP-Modell, das wir ab jetzt nicht weiter betrachten wollen, bleiben von den Flächengrößen nur noch Ψ_M, Φ_M und J_M mit den Größen v_P, v_T und J verbunden. Die Werte für die Massendichte und die Druckkomponenten sowie ihre Gradienten sind aus den kinetischen Integralen unter Beachtung der Quasineutralität zu bestimmen.

2.3.1 Die Lösbarkeit der algebraischen Gleichungen

Nehmen wir an, das Problem der räumlichen Abhängigkeit $\Psi(R, Z)$ sei gelöst, dann legen die Flächengrößen über die algebraischen Gleichungen die zugeordneten physikalischen Größen fest:

$$v_P = \frac{\Psi'_M B_P}{\rho}, \quad B_P := \frac{|\nabla\Psi|}{2\pi R}, \quad (2.74)$$

$$v_T = B_T \frac{\Psi'_M}{\rho} + 2\pi R \Phi'_M, \quad B_T := \frac{\mu_0 J}{2\pi R}, \quad (2.75)$$

$$0 = f_1(\rho, B_T) = \frac{\mu_0 J_M}{2\pi R} - \tau B_T + 2\pi \mu_0 R \Phi'_M \Psi'_M, \quad (2.76)$$

$$0 = f_2(\rho, B_T) = A(\rho, B, \Psi) + \frac{p_{\parallel}}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\Psi'_M{}^2 B^2}{\rho^2} - U_D(\Psi) - \frac{1}{2} (2\pi R \Phi'_M)^2. \quad (2.77)$$

$A(\rho, B, \Psi)$ und $p_{\parallel}(\rho, B, \Psi)$ sind für das Modell des thermischen Hintergrundplasma und einer nichtthermischen Ionenspezies durch die Gleichungen (2.31) und (2.41) gegeben. Diese können durch die Gleichungen (2.34 - 2.36) ersetzt werden, die die jeweiligen Temperaturvariationen als Funktionen von ρ, B und Ψ wiedergeben.

Bis auf die impliziten Gleichungen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$, aus denen die Massendichte ρ und das toroidale Magnetfeld B_T bestimmt werden, sind die Gleichungen algebraisch

auflösbar. Die prinzipielle Auflösbarkeit der beiden Gleichungen nach ρ und B_T ist durch den Satz über implizite Funktionen gegeben. Danach sind f_1 und f_2 nach ρ und B_T bzw. J auflösbar, wenn die Jacobische Funktionalterminante ungleich Null ist:

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial B_T} & \frac{\partial f_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f_2}{\partial B_T} & \frac{\partial f_2}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0 \rho^2} [M_P^4 B_P^2 - X M_P^2 + Y] = 0 \quad , \quad (2.78)$$

dabei sind X und Y in (2.70) und (2.71) definiert. Die Nullstellen der Jacobischen Determinante sind mit den Polstellen der charakteristischen Determinante identisch. Die prinzipielle Auflösbarkeit ist also an den Grenzpunkten des ersten hyperbolischen zum zweiten elliptischen Bereich ($M_P^2 = M_{p_{sw}}^2$) und vom zweiten elliptischen zum zweiten hyperbolischen Bereich ($M_P^2 = M_{p'w}^2$) nicht gegeben. Auch zeigt sich, daß $\partial f_2 / \partial \rho \propto \beta_{\parallel} - M_P^2$, so daß es für $\beta_{\parallel} \approx M_P^2$ besser ist, f_1 zur Bestimmung von ρ und f_2 zur Bestimmung von B_T zu benutzen.

Die prinzipielle Lösbarkeit der Gleichungen $f_1(B_T, \rho) = 0$ und $f_2(B_T, \rho) = 0$ besagt nicht, daß die Lösungen reell sein müssen. Der algebraische Charakter der Gleichungen deutet darauf hin, daß sie im allgemeinen komplexe Lösungen haben werden. Besitzen wir allerdings in dem Gebiet, in dem wir die algebraischen Gleichungen lösen wollen, eine spezielle reelle Lösung (B_T, ρ) und hat die Jacobische Determinante in diesem Gebiet keine Nullstelle, dann haben wir im ganzen Gebiet reelle Lösungen für $f_1 = f_2 = 0$, die sich als Fortsetzung der speziellen Lösung ergeben. Die algebraischen Gleichungen sind also im ersten elliptischen und ersten hyperbolischen Bereich lösbar. Enthält ein Lösungsbereich den Punkt $M_P^2 = M_{p_{sw}}^2$, so können die algebraischen Gleichungen für die physikalischen Größen nicht mehr stetig gelöst werden, vielmehr treten Diskontinuitäten bei $M_P^2 = M_{p_{sw}}^2$ auf, sogenannte stationäre Schocks [26], die wir nicht im Rahmen dieser Arbeit behandeln.

Iacono *et al.* [8] haben für das GCP-Modell darauf hingewiesen, daß die Bedingung (2.78), als Bedingung für die Integrierbarkeit der Differentialgleichungen für die Massendichte und der Magnetfeldstärke entlang Feldlinien für lokal stabile Verteilungsfunktionen erfüllt ist, wenn sie die Kriterien für "Firehose"- und Spiegelstabilität erfüllen. Hier treffen die gleichen Aussagen zu wie bei der Diskussion der Elliptizität der partiellen Differentialgleichung (vgl. S. 43).

2.3.2 Die Gleichung für die Massendichte

Betrachten wir die Gleichungen zur Bestimmung von B_T und ρ für den Fall eines Tokamaks, in dem $\tau \approx 1$ ist, so sehen wir, daß $f_1 = 0$ von $J \approx J_M$ gelöst wird. Die Gleichung für die Massendichte hat eine empfindliche Struktur, wie aus der Betrachtung stationärer Gleichgewichte mit isotropem Druck bekannt ist [20, 22]. Mit den Gleichungen (2.31) und (2.41) erhalten wir als Gleichung für $f_2(\rho, B_T)$:

$$f_2(\rho, B_T) = \frac{k}{m} a \left[\frac{\gamma_{\parallel} + 1}{\gamma_{\parallel}} \left(\frac{\rho}{B} \right)^{\gamma_{\parallel}} C_{\parallel} + \frac{1}{\gamma_{\perp}} B^{\gamma_{\perp}} C_{\perp} \right] + \frac{k}{m} (1 - a) \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} C + \frac{1}{2} \frac{\Psi_M'^2 B^2}{\rho^2} - \frac{1}{2} (2\pi R \Phi_M')^2 \quad (2.79)$$

Um das prinzipielle Lösungsverhalten von $f_2 = 0$ einfacher diskutieren zu können, nehmen wir an, daß $B \propto 1/R$ sei, d.h. $J \approx J_M$ und $|B_P| \ll |B_T|$. Wir betrachten f_2 als Funktion von ρ auf einer magnetischen Fläche Ψ , halten also die Flächengrößen konstant und nehmen R als Parameter. Für $\rho \rightarrow 0$ dominiert der Summand $\frac{1}{2} \Psi_M'^2 B^2 / \rho^2$, so daß $f_2 \propto 1/\rho^2$ ist. Für $\rho \rightarrow \infty$ sind die wichtigen Terme $\rho^{\gamma_{\parallel}}$ und $\rho^{\gamma-1}$. Es ändert sich nichts an der Argumentation, wenn $\gamma = 1$ gilt und $\rho^{\gamma-1}/(\gamma - 1)$ durch $\ln \rho$ ersetzt wird. f_2 hat ein Minimum bezüglich ρ bei $\beta_{\parallel} = M_P^2$, das durch die Lösung der Gleichung

$$\frac{\Psi_M'^2 B^2}{\rho} = \gamma(1 - a) \rho^{\gamma} C + (\gamma_{\parallel} + 1) a \rho \left(\frac{\rho}{B} \right)^{\gamma_{\parallel}} C_{\parallel} \quad (2.80)$$

gegeben ist. Diese Gleichung gilt auch für $\gamma = 1$. Da f_2 immer ein Minimum hat, kann $f_2 = 0$ höchstens zwei Lösungen $\rho_1 \geq \rho_2$ mit $M_P^2(\rho_2) \geq M_P^2(\rho_1)$ haben. Durch eine Änderung von R auf der Flußfläche Ψ können sich die Koeffizienten in f_2 so verändern, daß der Punkt $\beta_{\parallel} = M_P^2$, an dem $\rho_1 = \rho_2$ gilt, überschritten wird und keine reelle Lösung für ρ möglich ist. In Abbildung 2.4 sind für die Fälle $a = 0$ und $a = 1$ die Auswirkungen der R -Abhängigkeit auf $f_2(\rho, B_T)$ mit den genannten Näherungen skizziert. Für den Fall isotropen Druckes, d.h. $a = 0$, führt eine Verkleinerung von R im wesentlichen zu einer Anhebung der Kurve. Ab einem bestimmten Wert R_{\min} wird das Minimum von f_2 bezüglich ρ positiv und die Gleichung $f_2(\rho, B_T) = 0$ hat keine reelle Lösung für ρ . Im Falle $a = 1$ hängt das Verhalten von f_2 auf Grund einer Änderung von R davon ab, welcher der beiden Terme mit C_{\parallel} bzw. C_{\perp} dominiert, d.h. wie sich p_{\parallel} und p_{\perp} zueinander verhalten. Falls $p_{\parallel} \gg p_{\perp}$ gilt, dominiert der Term mit C_{\parallel} über den mit C_{\perp} . Eine Verkleinerung von R hat zur Folge, daß f_2 absinkt, während eine Vergrößerung von R f_2 anhebt. Für $p_{\perp} \gg p_{\parallel}$ ist das Verhalten umgekehrt und für $p_{\parallel} \approx p_{\perp}$ lassen sich keine eindeutigen Aussagen machen, da die entsprechenden Terme gegeneinander arbeiten. Für die reelle

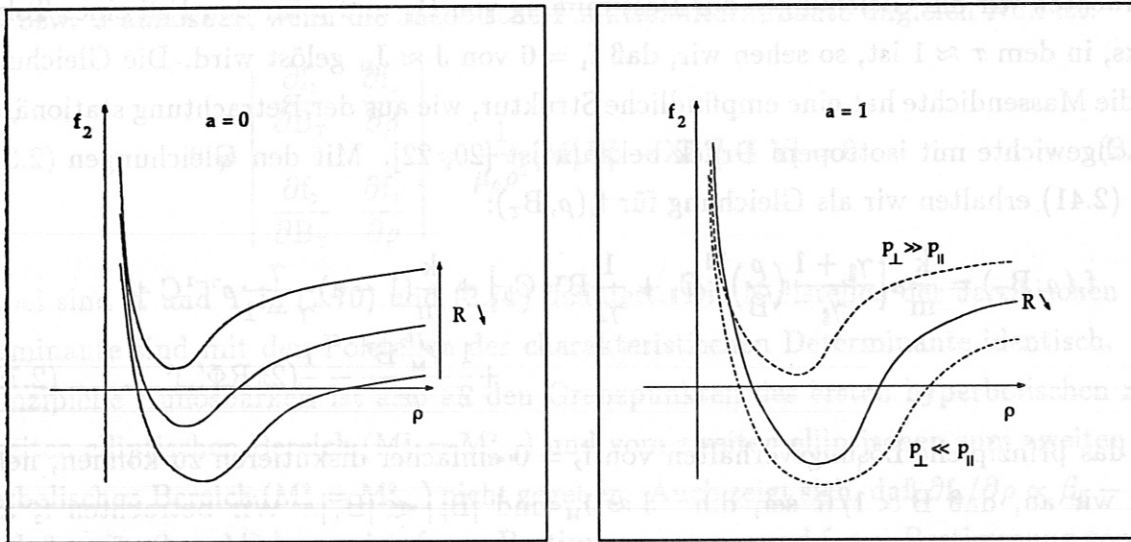


Abbildung 2.4: Skizze für das Verhalten von f_2 über ρ mit R als Parameter für die Fälle $a = 0$ und $a = 1$.

Lösbarkeit der algebraischen Gleichungen ist also die Wahl der Flächengrößen von großer Wichtigkeit.

2.3.3 Die Festlegung der Flächengrößen

Da die Flächengrößen für die physikalische Beschreibung eines Gleichgewichtszustandes ungeeignet sind und zudem keine Zuordnung zu experimentellen Daten erlauben, benutzen wir das Konzept der Referenzlinie [22]. Dazu gehen wir von ineinander geschachtelten magnetischen Flußflächen aus (Abb. 2.5), wobei der Wert des poloidalen magnetischen Flusses Ψ auf der magnetischen Achse Ψ_A und am Plasmarand Ψ_B sei. Bei dieser Gelegenheit führen wir das von der Flußfläche Ψ_B eingeschlossene Plasmavolumen $V(\Psi_B)$ ein. Ein poloidaler Schnitt durch das Plasmavolumen definiert in der R - z -Ebene das Gebiet $G(\Psi_B)$, in welchem das Plasma enthalten ist, und die G berandende Kurve $\Gamma = \partial G$. Eine Referenzlinie L_R ist dann durch

$$L_R := \{R, z : R = R_R(\Psi), z = z_R(\Psi); \Psi \in (\Psi_A, \Psi_B)\} \quad (2.81)$$

erklärt. Einer Größe f , die als $f(R, z)$ auf dem Plasmagebiet gegeben ist, wird durch

$$f_R(\Psi) := f(R_R(\Psi), z_R(\Psi)) \quad (2.82)$$

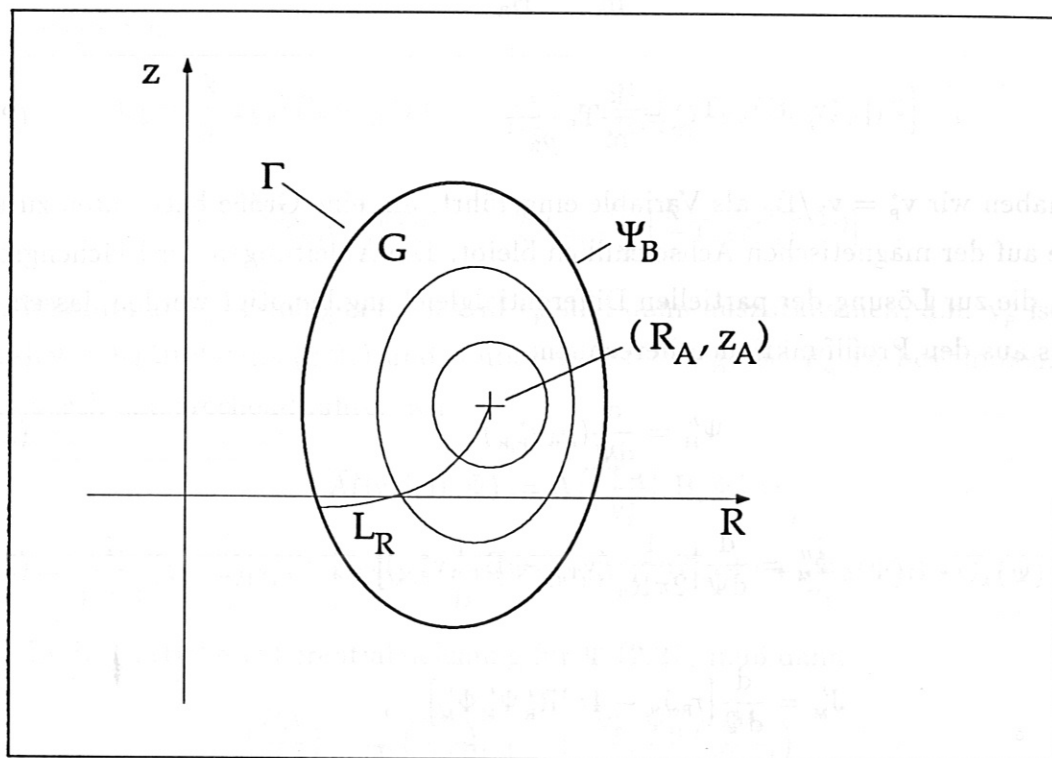


Abbildung 2.5: Eine mögliche Referenzlinie, die vom Plasmarand zur magnetischen Achse führt.

eine Profilkfunktion auf der Referenzlinie zugeordnet. Durch Vorgabe von Profilkfunktionen für die physikalischen Größen auf der Referenzlinie können die Flächengrößen berechnet werden:

$$\Psi'_M = \rho_R v_{P,R}^* \quad , \quad v_P^* := \frac{v_P}{B_P} \quad , \quad (2.83)$$

$$\Phi'_M = \frac{1}{2\pi R_R} (v_{T,R} - B_{T,R} v_{P,R}^*) \quad , \quad B_{T,R} = \frac{\mu_0 J_R}{2\pi R_R} \quad , \quad (2.84)$$

$$J_M = \tau_R J_R - 4\pi^2 R_R^2 \Psi'_M \Phi'_M \quad , \quad (2.85)$$

$$U_D = \frac{k}{m} \left\{ a \left(\frac{\gamma_{\parallel} + 1}{\gamma_{\parallel}} T_{\parallel,R} + \frac{1}{\gamma_{\perp}} T_{\perp,R} \right) + (1-a) \frac{\gamma}{\gamma-1} T_R \right\} + \frac{1}{2} v_{P,R}^* B_R^2 - \frac{1}{2} (2\pi R_R \Phi'_M)^2 \quad , \quad (2.86)$$

$$C_{\parallel} = \frac{k}{m} T_{\parallel,R} \frac{B_R^2}{\rho_R^2} \quad , \quad (2.87)$$

$$C_{\perp} = \frac{k}{m} T_{\perp,R} \frac{1}{B_R} \quad , \quad (2.88)$$

$$C = \frac{k}{m} T_R \frac{1}{\rho_R^{\gamma-1}} \quad . \quad (2.89)$$

Dabei haben wir $v_p^* = v_p/B_p$ als Variable eingeführt, um eine Größe betrachten zu können, die auf der magnetischen Achse endlich bleibt. Die Ableitungen der Flächengrößen nach Ψ , die zur Lösung der partiellen Differentialgleichung benötigt werden, lassen sich ebenfalls aus den Profildfunktionen berechnen:

$$\Psi_M'' = \frac{d}{d\Psi} (\rho_R v_{p,R}^*) \quad , \quad (2.90)$$

$$\Phi_M'' = \frac{d}{d\Psi} \left[\frac{1}{2\pi R_R} (v_{T,R} - B_{T,R} v_{p,R}^*) \right] \quad , \quad (2.91)$$

$$J_M' = \frac{d}{d\Psi} \left[\tau_R J_R - 4\pi^2 R_R^2 \Psi_M' \Phi_M' \right] \quad ,$$

$$\tau_R = 1 - \mu_0 \rho_R v_{p,R}^{*2} - \mu_0 a \rho_R \frac{k}{m} \frac{T_{\parallel,R} - T_{\perp,R}}{B_R^2} \quad , \quad (2.92)$$

$$U_D' = \frac{d}{d\Psi} \left[\frac{k}{m} \left\{ a \left(\frac{\gamma_{\parallel} + 1}{\gamma_{\parallel}} T_{\parallel,R} + \frac{1}{\gamma_{\perp}} T_{\perp,R} \right) + (1-a) \frac{\gamma}{\gamma-1} T_R \right\} + \frac{1}{2} v_{p,R}^{*2} B_R^2 - \frac{1}{2} (2\pi R_R \Phi_M')^2 \right] \quad , \quad (2.93)$$

$$C_{\parallel}' = \frac{d}{d\Psi} \left[\frac{k}{m} T_{\parallel,R} \left(\frac{B_R}{\rho_R} \right)^{\gamma_{\parallel}} \right] \quad , \quad (2.94)$$

$$C_{\perp}' = \frac{d}{d\Psi} \left[\frac{k}{m} T_{\perp,R} \frac{1}{B_{\perp}} \right] \quad , \quad (2.95)$$

$$C' = \frac{d}{d\Psi} \left[\frac{k}{m} T_R \frac{1}{\rho_R^{\gamma-1}} \right] \quad . \quad (2.96)$$

Um Gleichgewichte mit verschwindender Massendichte am Plasmarand, d.h. mit einer Plasma-Vakuum-Grenze, betrachten zu können, ist es günstiger die Rolle der Massendichte in C_{\parallel} und C gemäß $\rho_R = |\Psi_M'|/|v_{p,R}^*|$ durch $|v_p^*|$ zu ersetzen. Statt C_{\parallel} und C ,

die bei verschwindender Massendichte unendlich werden, betrachtet man die endlichen Flächengrößen

$$\bar{C}_{\parallel} = \frac{k}{m} T_{\parallel, R} (B_R |v_{P, R}^*|)^{\gamma_{\parallel}} \quad , \quad \bar{C}_{\parallel}' = \frac{d}{d\Psi} \left[\frac{k}{m} T_{\parallel, R} (B_R |v_{P, R}^*|)^{\gamma_{\parallel}} \right] \quad , \quad (2.97)$$

$$\bar{C} = \frac{k}{m} T_R |v_{P, R}^*|^{(\gamma-1)} \quad , \quad \bar{C}' = \frac{d}{d\Psi} \left[\frac{k}{m} T_R |v_{P, R}^*|^{(\gamma-1)} \right] \quad . \quad (2.98)$$

Die Bestimmungsgleichungen für ρ und v_P^* sind dann auszutauschen, d.h. v_P^* ist aus der parallelen Kräftebilanz (2.24) und ρ über die Flächengröße Ψ'_M zu bestimmen. Diesem Austausch entsprechend führen wir

$$\begin{aligned} \bar{A}(|v_P^*|, B, \Psi) &:= A \left(\left| \frac{\Psi'_M}{v_P^*} \right|, B, \Psi \right) = \\ &= \frac{1}{\gamma-1} (1-a) |v_P^*|^{1-\gamma} \bar{C}(\Psi) + \frac{1}{\gamma_{\parallel}} a(\Psi) (|v_P^*| B)^{-\gamma_{\parallel}} \bar{C}_{\parallel}(\Psi) + \frac{1}{\gamma_{\perp}} a(\Psi) B^{\gamma_{\perp}} C_{\perp}(\Psi) \end{aligned} \quad (2.99)$$

ein. In die partielle Differentialgleichung für Ψ (2.27) muß dann

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \Psi} \right)_{\rho, B} = \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \Psi} \right)_{|v_P^*|, B} + \frac{v_P^*}{|v_P^*|} \frac{\Psi''_M}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial |v_P^*|} \right)_{B, \Psi} \quad (2.100)$$

eingesetzt werden.

2.3.4 Referenzlinie und Randbedingungen

Die Regularität der partiellen Differentialgleichung (2.27) verlangt, daß ihre rechte Seite endlich bleibt. Semenzato *et al.* [22] haben gezeigt, daß dies auf der magnetischen Achse nicht automatisch erfüllt ist. Vielmehr führt die Forderung nach Regularität zu Bedingungen an die Profilkfunktionen und ihre Ableitungen auf der Achse. Der Grund für diese Schwierigkeit liegt im Auftreten von $dR_R/d\Psi$ in den Ableitungen der Flächengrößen. Benutzen wir eine Taylorentwicklung für $\Psi(R, z)$ um die magnetische Achse, so zeigt sich, daß der Verlauf von $R_R(\Psi)$ in der Nähe der Achse durch

$$R_R(\Psi) = R_A + t\sqrt{x} \quad , \quad x := \frac{\Psi - \Psi_A}{\Psi_B - \Psi_A} \quad (2.101)$$

gegeben ist. Dabei ist (R_A, z_A) der Ort der magnetischen Achse und t hängt vom Winkel ab, unter dem die Referenzlinie die magnetische Achse trifft. Die Ableitung $dR_R/d\Psi$ führt daher auf Terme, die an der magnetischen Achse divergieren. Das Beheben dieser Divergenzen fordert von den Profilkfunktionen an der Achse ein ähnliches Verhalten und führt auf Bedingungsgleichungen für die Ableitungen der Profilkfunktionen auf der Achse.

In Semenzato *et al.* [22] wurde eine Referenzlinie gewählt, die für den dort betrachteten Fall des isotropen Drucks die Lösbarkeit der Gleichung für die Massendichte garantierte. Da wir dies bei anisotropem Druck nicht können, wählen wir eine Referenzlinie, die das Problem der Divergenz auf der Achse vermeidet. Für die Referenzlinie

$$L_R = \{R, z : R_R = R_A, z_R = z(\Psi); \Psi \in (\Psi_A, \Psi_B)\} \quad , \quad (2.102)$$

die eine Vertikale von der magnetischen Achse zum Plasmarand beschreibt, gilt $dR_R/d\Psi \equiv 0$. Benutzen wir nun Profilkfunktionen, die auf der Achse endliche Ableitungen besitzen, so ist die Regularität der partiellen Differentialgleichung auf der magnetischen Achse gesichert.

Als nächstes betrachten wir den durch Ψ_B gegebenen Plasmarand. Im Gegensatz zu [22] und [23] legen wir den Plasmarand in einer Art und Weise fest, die experimentnäher ist. Bei gegebener Position der magnetischen Achse (R_A, z_A) wird der Plasmarand durch die erste, der um die Achse geschachtelten Flußfläche bestimmt, die entweder eine Begrenzungsstruktur trifft, oder auf der sich ein Sattelpunkt von $\Psi(R, z)$ ausgebildet hat. Im letzteren Fall bezeichnet man die Kurve aus dem Schnitt der poloidalen Ebene mit der das Plasma begrenzenden Flußfläche als Separatrix und den Sattelpunkt als x-Punkt. Begrenzungsstrukturen sind einerseits Gefäßwände und Einbauten oder spezielle Begrenzungspunkte durch eingebrachte Limiter.

Die Bedingungen, die wir an die Profilkfunktionen am Plasmarand stellen müssen, leiten wir aus zwei Forderungen her. Wir nehmen erstens an, daß das Magnetfeld am Plasmarand stetig sei, und zweitens, daß Ströme nur im Plasma und in externen Leitern fließen.

Die Stetigkeit des Magnetfeldes bedeutet, daß $\Psi(R, z)$ stetig differenzierbar und der Poloidalstrom J am Plasmarand stetig sein muß. Da außerhalb des Plasmas Ströme nur in externen Leitern fließen, ist der Poloidalstrom am Plasmarand durch den Strom gegeben, der in den externen Leitern in poloidaler Richtung fließt, d.h. der Gesamtstrom J_{sp} der Toroidalfeldspulen. Damit erhalten wir als Forderungen

$$J_R(\Psi_B) = J_{sp} \quad (2.103)$$

und $M_p^2 = 0 = \Delta$ auf dem Plasmarand. Dies ist äquivalent zu

$$\rho_R(\Psi_B)v_{p,R}^{*2}(\Psi_B) = 0 \quad , \quad \rho_R(\Psi_B)a(\Psi_B) = 0 \quad , \quad (2.104)$$

und kann entweder mit $\rho_R(\Psi_B) = 0$ erfüllt werden, d.h. mit einem Plasma-Vakuum-Übergang, oder mit $\rho_R(\Psi_B) \neq 0$ und $v_{p,R}^*(\Psi_B) = 0 = a(\Psi_B)$. Damit das Magnetfeld am

Plasmarand stetig sein kann, muß der Druck bei endlicher Randdichte am Plasmarand isotrop sein. Weitere Randbedingungen ergeben sich, falls die Stromdichte am Plasmarand stetig gegen Null gehen soll. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die partielle Differentialgleichung für Ψ am Plasmarand stetig ist, d.h. daß ihre rechte Seite stetig gegen Null geht. Daraus ergeben sich als weitere Randbedingungen,

$$\rho_R(\Psi_B) = 0 \implies 0 = \rho'_R(\Psi_B) = J'_R(\Psi_B) \quad (2.105)$$

bzw.

$$\rho_R(\Psi_B) \neq 0 \implies 0 = \{v_{P,R}^*, v_{T,R}, \rho'_R, J'_R, T'_R, a, a'\}_{\Psi=\Psi_B} \quad (2.106)$$

Dann ist $\Psi(R, z)$ überall zweimal stetig differenzierbar.

2.4 Die numerische Lösung des Gleichgewichtsproblems

Zur Lösung des Gleichgewichtsproblems wurde das Programm DIVAFlow entwickelt. Es löst das Gleichungssystem aus partieller Differentialgleichung und den algebraischen Gleichungen auf einem Rechteckgebiet $[R_{\min}, R_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$. Da in der partiellen Differentialgleichung für Ψ die rechte Seite und die Koeffizienten der höchsten Ableitungen von der Lösung selbst abhängt, verwenden wir eine Picard-Iteration

$$-R^2 \nabla \cdot \left(\tau \frac{\nabla \Psi^{n+1}}{R^2} \right) = F(R, \Psi^n, |\nabla \Psi^n|) \quad , \quad (2.107)$$

wobei wir die Behandlung des nichtlinearen Terms $\tau(R, \Psi, |\nabla \Psi|)$ in der Iteration weiter unten betrachten werden. Durch Regelung der Ströme in den äußeren Leitern wird die Position der magnetischen Achse festgehalten. Um $\Psi \equiv 0$ als mögliche Lösung des Gleichungssystems zu verhindern, halten wir den Toroidalstrom I_T des Plasmas durch eine Skalierung konstant.

2.4.1 Die Toroidalstromdichte und der poloidale magnetische Fluß

Zur Lösung der partiellen Differentialgleichung in einem Picard-Iterationsschritt verwenden wir eine Methode, die zuerst in [27] für die Berechnung statischer Gleichgewichte mit isotropem Druck vorgeschlagen und angewendet wurde. Die Methode geht davon aus, daß wir mit einer gegebenen axialsymmetrischen Stromdichte j_T für den vom Plasma erzeugten Anteil Ψ_P am poloidalen magnetischen Fluß Ψ ein Biot-Savartsches Gesetz

formulieren können: Sei G_T ein toroidal-axialsymmetrisches Gebiet und G_Q seine poloidale Querschnittsfläche (nicht notwendigerweise ein Rechteckgebiet), dann erhalten wir Ψ_P durch

$$\Psi_P(\mathbf{x}) = \iint_{G_Q} \iint_{G_T} L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) j_T(\tilde{\mathbf{x}}) d^2 \tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi} \iiint_{G_T} L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) j_T(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{d^3 \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{R}} \quad (2.108)$$

mit

$$L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \frac{2\mu_0}{k} \sqrt{R\tilde{R}} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right\}, \quad k^2 = \frac{4R\tilde{R}}{(R + \tilde{R})^2 + (z - \tilde{z})^2} \quad (2.109)$$

$K(k)$ und $E(k)$ sind die vollständigen elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung. $L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$ hat die Eigenschaft

$$R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})}{R^2} \right) = -2\pi \mu_0 R \tilde{R} \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (2.110)$$

und ist somit die Greensche Funktion der Gleichung

$$R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) = -2\pi \mu_0 R j_T \quad (2.111)$$

$L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$ hat die physikalische Bedeutung einer Induktivität, die die Wirkung der Stromdichte im Raum vermittelt. Das Biot-Savartsche Gesetz (2.108) würde es erlauben Ψ_P direkt zu berechnen, was aber sehr aufwendig wäre.

Eine schnellere Methode Ψ_P zu bestimmen, kann aus der Betrachtung des Randwertproblems

$$R^2 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Psi^*}{R^2} \right) = -2\pi \mu_0 R j_T, \quad \Psi^* |_{\partial G_T} = 0 \quad (2.112)$$

abgeleitet werden. Die Randbedingung bedeutet physikalisch, daß sich bei ∂G_T eine ideal leitende Wand befindet, die als Faradayscher Käfig verhindert, daß der von j_T erzeugte poloidale magnetische Fluß aus G_T hinausdringen kann. Setzen wir statt der Toroidalstromdichte die linke Seite von (2.112) in das Biot-Savartsche Gesetz (2.108) ein, dann erhalten wir

$$\Psi_P = -\frac{1}{4\pi^2 \mu_0} \iiint_{G_T} L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) \widetilde{\nabla} \cdot \left(\frac{\widetilde{\nabla} \Psi^*}{\tilde{R}^2} \right) d^3 \tilde{\mathbf{x}} \quad (2.113)$$

$\widetilde{\nabla}$ bedeutet dabei, daß der Gradient auf die Integrationsvariable $\tilde{\mathbf{x}}$ wirkt. Mit der Umformung des Integranden

$$L \widetilde{\nabla} \cdot \left(\frac{\widetilde{\nabla} \Psi^*}{\tilde{R}^2} \right) = \widetilde{\nabla} \cdot \left\{ L \frac{\widetilde{\nabla} \Psi^*}{\tilde{R}^2} - \Psi^* \frac{\widetilde{\nabla} L}{\tilde{R}^2} \right\} + \Psi^* \widetilde{\nabla} \cdot \left(\frac{\widetilde{\nabla} L}{\tilde{R}^2} \right) \quad (2.114)$$

ergibt sich eine neue Darstellung für Ψ_P :

$$\Psi_P = \Psi^* - \frac{1}{4\pi^2\mu_0} \iint_{\partial G_T} L \frac{\widetilde{\nabla}\Psi^*}{\widetilde{R}^2} \cdot d\widetilde{S} \quad , \quad (2.115)$$

wobei dS das gerichtete Flächenelement von ∂G_T ist. Für die Herleitung wurde die Eigenschaft (2.110) von L und die Randbedingung an Ψ^* benutzt. Wir könnten also Ψ_P durch Lösen des Randwertproblems (2.112) für Ψ^* und einer Integration nur noch über ∂G_T erhalten, die allerdings noch für jeden Punkt in G_T ausgeführt werden muß. Die Anzahl der Integrationen kann aber weiter reduziert werden, da mit (2.115) insbesondere

$$\Psi_{BG} := \Psi|_{\partial G_T} = -\frac{1}{4\pi^2\mu_0} \iint_{\partial G_T} L \frac{\widetilde{\nabla}\Psi^*}{\widetilde{R}^2} \cdot d\widetilde{S} \quad (2.116)$$

gilt. Lösen wir also zusätzlich zu (2.112) das Randwertproblem

$$R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi_P}{R^2} \right) = -2\pi\mu_0 R j_T \quad , \quad \Psi_P|_{\partial G_T} = \Psi_{BG} \quad , \quad (2.117)$$

so erhalten wir Ψ_P überall in G_T , ohne die Integration in (2.115) über das Innere von G_T ausführen zu müssen. Um Ψ_P auf diese Art und Weise zu berechnen, sind zwar zwei Randwertprobleme zu lösen, doch dies läßt sich numerisch viel effizienter und schneller durchführen, als die Integrationen in (2.108) oder in (2.115). Für die vollständige Lösung von Ψ muß jetzt nur noch der durch Ströme in äußeren Leitern erzeugte Fluß zu Ψ_P addiert werden.

2.4.2 Die quasilineare partielle Differentialgleichung

Das beschriebene Lösungsverfahren für die Picard-Iterationsschritte, das schnelle Algorithmen zur Lösung linearer Differentialgleichungen nutzen kann, kann im allgemeinen nicht auf quasilineare Differentialgleichungen angewandt werden. Spalten wir jedoch unseren Differentialoperator entsprechend

$$-R^2 \nabla \cdot \left(\tau \frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) = -\tau R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{R} \right) - \nabla \Psi \cdot \nabla \tau \quad (2.118)$$

auf und schreiben die partielle Differentialgleichung mit Hilfe der Flächengrößen um, so erhalten wir

$$-R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) = \mu_0^2 J J' + 4\pi^2 R^2 \mu_0 p'_\perp + 4\pi^2 R^2 (M_p^2 + \Delta) \left(B_p B'_p - \frac{1}{4\pi^2} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) \right) - 4\pi^2 R B_T^2 (M_T^2 + \Delta) R' \quad , \quad (2.119)$$

wobei $M_T^2 := \mu_0 \rho v_T^2 / B_T^2$ gesetzt wurde. Auf der linken Seite steht bis auf den Faktor $2\pi R \mu_0$ die toroidale Stromdichte (2.9). Wir wenden die Picard-Iteration auf (2.119) an, d.h.

$$-R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi^{n+1}}{R^2} \right) = \tilde{F}(R, \Psi^n, |\nabla \Psi^n|, \nabla \nabla \Psi^n) \quad , \quad (2.120)$$

und nehmen die zweiten Ableitungen von Ψ im dritten Summanden der rechten Seite mit in die Iteration. Auf diese linearisierte Differentialgleichung können wir das Lösungsverfahren anwenden, falls sichergestellt werden kann, daß sich das Verhalten der in die Iteration genommenen zweiten Ableitungen kontrollieren läßt. Die ungewöhnliche Behandlung dieses Teils der zweiten Ableitungen ist möglich, da sie mit dem poloidalen Krümmungsradius r der magnetischen Flußflächen verknüpft ist,

$$B_p B_p' - \frac{1}{4\pi^2} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) = \frac{B_p}{2\pi R r} \quad , \quad \frac{1}{r} \equiv -R \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{R |\nabla \Psi|} \right) \quad . \quad (2.121)$$

Der poloidale Krümmungsradius ist eine sehr anschauliche Größe, die sich während der Picard-Iteration gut kontrollieren läßt. Ein eventuelles Fehlgehen der Iteration kann auf diese Weise lokalisiert werden.

Drücken wir die Terme J' und p'_\perp durch die Flächengrößen und deren Ableitungen aus, so erhalten wir nach längerer Rechnung die von uns für die Picard-Iteration benutzte Form:

$$\begin{aligned} -R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) = 2\pi R \mu_0 j_T = k_0 \nabla \Psi \cdot \nabla R + k_1 \frac{B_p^3}{r} + k_2 \frac{\Psi''_M}{\Psi'_M} + k_3 \frac{\Phi''_M}{\Phi'_M} + k_4 \frac{J'_M}{J} + k_5 \frac{U'_D}{v_A^2} - \\ - k_6 \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial A}{\partial \Psi} - k_7 \frac{\mu_0}{B^2} \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \Psi} + k_8 \frac{\mu_0}{B^2} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial \Psi} \quad . \quad (2.122) \end{aligned}$$

Die $\{k_i\}_{i=0,\dots,8}$ ergeben sich als

$$k_0 \equiv \frac{N_n v_\phi^2}{K_0 v_A^2} + \frac{B_T^2}{B^2} \left(\frac{1 - K_0 - M_T^2 - \Delta}{K_0} + 2 \frac{4\pi^2 R^2 \Psi'_M \Phi'_M}{J \tau} \right) \quad , \quad (2.123)$$

$$k_1 \equiv 2\pi R \frac{K_0 - \tau}{B^2 K_0} \quad , \quad N_\Delta \equiv \tau B_p^2 + K_0 B_T^2 \quad , \quad (2.124)$$

$$k_2 \equiv \frac{\mu_0^2 J^2}{\tau K_0} \left[-N_n M_p^2 \frac{N_\Delta}{B_T^2} + K_0 \left\{ \frac{4\pi^2 R^2 \Psi'_M \Phi'_M}{J} + M_p^2 (1 + N_n) \right\} \right] \quad , \quad (2.125)$$

$$k_3 \equiv \frac{\mu_0^2 J^2}{\tau K_0} \left[N_n \frac{v_\phi^2}{v_A^2} \frac{N_\Delta}{B_T^2} + K_0 \left\{ \frac{4\pi^2 R^2 \Psi'_M \Phi'_M}{J} + \frac{v_\phi^2}{v_A^2} (1 + N_n) \right\} \right] \quad , \quad (2.126)$$

$$k_4 \equiv \frac{\mu_0^2 J^2}{K_0} \quad , \quad (2.127)$$

$$k_5 \equiv k_6 \equiv \frac{\mu_0^2 J^2}{\tau K_0} \left[N_n \frac{N_\Delta}{B_T^2} + K_0 (1 - N_n) \right] \quad , \quad (2.128)$$

$$k_7 \equiv \frac{\mu_0^2 J^2}{\tau K_0} \left[N_n \frac{N_\Delta}{B_T^2} - K_0 N_n \right] \quad (2.129)$$

und

$$k_8 \equiv \frac{\mu_0^2 J^2}{\tau K_0} \left[N_n \frac{N_\Delta}{B_T^2} - K_0 \right] \quad . \quad (2.130)$$

Die Abkürzungen N , N_n und K_0 sind in (2.66) definiert. Der Krümmungsradius taucht nur noch im zweiten Summanden von (2.122) in der Form B_p^3/r auf. Dadurch verhält sich dieser Term an den kritischen Punkten des Krümmungsradius, d.h. auf der Achse ($r \rightarrow 0$) und an x -Punkten, regulär.

2.4.3 Die Rolle des Toroidalstromes

Sind die Flächengrößen stetige Funktionen von Ψ , so ist $\Psi \equiv 0$ eine Lösung des Gleichungssystems. Die Picard-Iteration würde ohne weitere Bedingung auf diese Lösung führen. Um dies zu verhindern, geben wir den im Plasma fließenden toroidalen Gesamtstrom I_T mit $I_T \neq 0$ vor und halten ihn während der Iteration konstant. Dazu skalieren wir die Profildichten mit einem Faktor σ_0 , den wir als Lösung der Gleichung

$$I_T = \lambda(\sigma) \int_G j_T^*(\sigma) dR dz \quad (2.131)$$

mit $\lambda(\sigma_0) = 1$ erhalten. $j_T^*(\sigma = 1)$ sei die Toroidalstromdichte mit nicht skalierten Profildichten, und $j_T = j_T^*(\sigma = \sigma_0)$ diejenige mit skalierten Profildichten. Da die Profildichten in die Toroidalstromdichte in stark nichtlinearer Form eingehen, wird σ_0 durch ein Newtonverfahren ermittelt.

Es zeigt sich, daß es wegen der Nichtlinearität der Skalierung ungünstig ist, diese bei jeder Picard-Iteration vorzunehmen. Der Grund dafür ist, daß sich die Änderungstendenzen durch die Picard-Iteration, d.h. ohne Skalierung der Profile, mit denen durch die Skalierung ungünstig überlagern und das Iterationsverfahren destabilisieren. Wir erhalten ein stabileres Konvergenzverhalten, wenn wir die beiden Änderungstendenzen trennen. Dies läßt sich erreichen, indem wir für einige Picard-Iterationen den toroidalen Plasmastrom nur über λ konstant halten, d.h. die Profile festhalten und die Stromdichte j_T

für die Picard-Iteration durch $\lambda \cdot j_T^*$ ersetzen. Wenn sich die ergebende Folge λ^i nicht mehr ändert, d.h. $|\lambda^i - \lambda^{i-1}| \leq \varepsilon_\lambda$ ist, wird die Skalierung der Profilkfunktionen durch die Berechnung von σ_0 durchgeführt.

2.4.4 Die Kontinuitätsmethode

Durch die Koppelung der quasilinearen Differentialgleichung mit den algebraischen Gleichungen ist das gesamte Gleichungssystem hoch nichtlinear. Iterative Verfahren, die auf solche Probleme angewendet werden, neigen zur Divergenz. Deshalb führen wir die Nichtlinearität mit drei Kontinuitätsparametern α_t , α_p und α_λ ein, die schrittweise von Null auf Eins erhöht werden. Dabei führen wir zuerst die toroidale Massenströmung (α_t), dann die poloidale Massenströmung (α_p) und schließlich die Druckanisotropie (α_λ) ein. Den Startpunkt für die Iteration bildet ein statisches Plasmagleichgewicht mit isotropem Druck.

Abb.: 2.6 zeigt eine Skizze des Programmablaufs.

2.4.5 Die Eingabeparameter

Als Eingabeparameter gehen zum einen der gewünschte Toroidalstrom I_T und die Position der magnetischen Achse (R_A , z_A) ein, die wie beschrieben, während der Iteration konstant gehalten werden. Die Profilkfunktionen für die physikalischen Größen auf der Referenzlinie werden einmal in ihrer Form durch normierte Profilkfunktionen $f(x)$ gegeben, wobei x der in (2.101) definierte normierte poloidale magnetische Fluß ist und die Werte $x = 0$ auf der magnetischen Achse und $x = 1$ am Plasmarand hat. Zum anderen werden sie durch die Werte der physikalischen Größen auf der magnetischen Achse und am Plasmarand bestimmt. Eine Ausnahme bilden die Temperaturen, deren Werte durch die Fixierung des Toroidalstroms bestimmt sind und für die nur das Verhältnis von Achse zu Rand festgelegt ist. Die Achs- und Randwerte der Massenströmungen sind mit den Temperaturen gekoppelt, um die kinetische Energie des Plasmas mit seiner thermischen Energie vergleichbar halten zu können und die Elliptizitätsbedingung besser unter Kontrolle zu haben.

Diagramm für das Programm DivaFlow

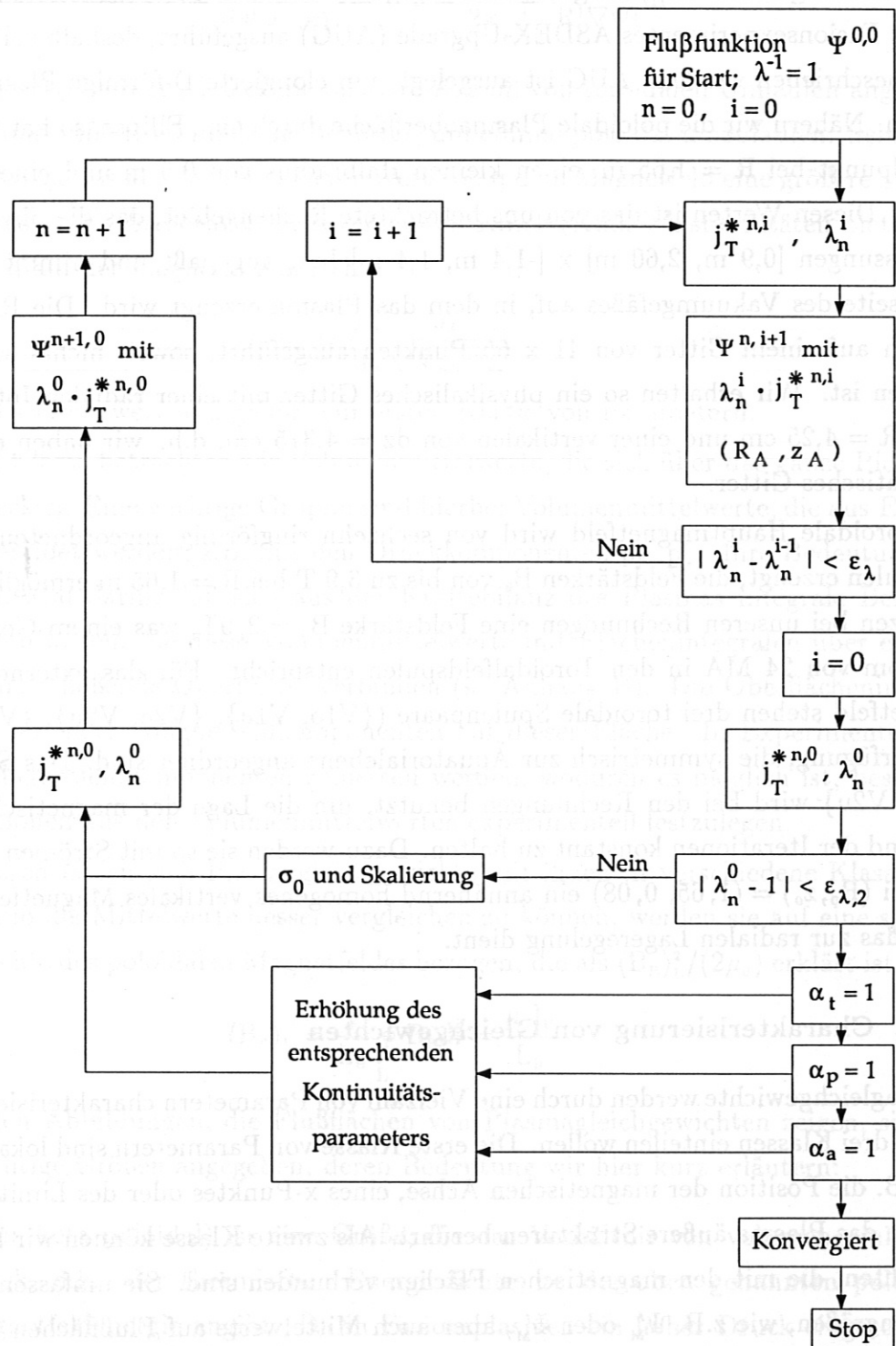


Abbildung 2.6:

2.5 Numerische Rechnungen

Die Rechnungen mit dem Programm DIVAFlow wurden in der Magnetfeldkonfiguration des Fusionsexperimentes ASDEX-Upgrade (AUG) ausgeführt, deshalb soll diese hier kurz beschrieben werden. AUG ist ausgelegt, um elongierte D-förmige Plasmen zu erzeugen. Nähern wir die poloidale Plasmaoberfläche durch eine Ellipse, so hat diese ihren Mittelpunkt bei $R = 1,65$ m, einen kleinen Halbradius von $0,5$ m und eine Höhe von $0,8$ m. Diesen Werten ist das von uns betrachtete Rechengebiet, das die physikalischen Abmessungen $[0,9 \text{ m}, 2,60 \text{ m}] \times [-1,4 \text{ m}, 1,4 \text{ m}]$ hat, angepaßt und nimmt damit die Innenseite des Vakuumpfäßes auf, in dem das Plasma erzeugt wird. Die Rechnungen werden auf einem Gitter von 41×65 Punkten ausgeführt, soweit nichts anderes angegeben ist. Wir erhalten so ein physikalisches Gitter mit einer radialen Intervalllänge von $dR = 4,25$ cm und einer vertikalen von $dz = 4,375$ cm, d.h. wir haben ein nahezu quadratisches Gitter.

Das toroidale Hauptmagnetfeld wird von sechzehn ringförmig angeordneten Toroidal-feldspulen erzeugt, die Feldstärken B_0 von bis zu $3,9$ T bei $R = 1,65$ m ermöglichen. Wir benutzen bei unseren Rechnungen eine Feldstärke $B_0 = 2,9$ T, was einem Gesamtpoloidalstrom von 24 MA in den Toroidal-feldspulen entspricht. Für das externe poloidale Magnetfeld stehen drei toroidale Spulenpaare ($\{V1o, V1u\}$, $\{V2o, V2u\}$, $\{V3o, V3u\}$) zur Verfügung, die symmetrisch zur Äquatorialebene angeordnet sind. Das Spulenpaar $\{V2o, V2u\}$ wird bei den Rechnungen benutzt, um die Lage der magnetischen Achse während der Iterationen konstant zu halten. Dazu werden sie so mit Strömen beschickt, daß bei $(R_0, z_0) = (1,65, 0,08)$ ein annähernd homogenes vertikales Magnetfeld erzeugt wird, das zur radialen Lageregelung dient.

2.5.1 Charakterisierung von Gleichgewichten

Plasmagleichgewichte werden durch eine Vielzahl von Parametern charakterisiert, die wir hier in drei Klassen einteilen wollen. Die erste Klasse von Parametern sind lokaler Natur, wie z.B. die Position der magnetischen Achse, eines x-Punktes oder des Limiterpunktes an dem das Plasma äußere Strukturen berührt. Als zweite Klasse können wir Parameter betrachten, die mit den magnetischen Flächen verbunden sind. Sie umfassen originäre Flächengrößen, wie z.B. Ψ'_M oder Φ'_M , aber auch Mittelwerte auf Flußflächen und Volumenmittelwerte, die über ein von der Flußfläche spezifiziertes Volumen gehen. Zu den Flußflächenmittelwerten gehört der sogenannte Sicherheitsfaktor q , der als Ableitung des

toroidalen nach dem poloidalen magnetischen Fluß definiert ist:

$$q(\Psi) := \frac{d}{d\Psi} \int_{G(\Psi)} \mathbf{B}_T \cdot d^2s = \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_{\Gamma(\Psi)} \frac{J}{R|\nabla\Psi|} dl \quad (2.132)$$

Es kann gezeigt werden, daß er die mittlere Anzahl von toroidalen Umläufen angibt, die eine Feldlinie auf einer Flußfläche benötigt, um einmal poloidal umzulaufen. Seinen Namen leitet q daraus ab, daß ein höherer Wert von q dem Magnetfeld eine größere Steifheit verleiht und damit Sicherheit vor sogenannten Knick-(Kink-)Instabilitäten bietet. Der Wert von q auf der magnetischen Achse

$$q_A = \frac{\mu_0}{R_A} \frac{J_A}{\sqrt{\Psi_{RR} \Psi_{zz}}} \quad (2.133)$$

entsteht als Grenzwert und gehört zur ersten Klasse von Parametern.

Als dritte Klasse betrachten wir Volumenmittelwerte, die sich über das ganze Plasmagebiet erstrecken. Eine wichtige Gruppe sind hierbei Volumenmittelwerte, die aus Energiedichten gebildet werden, z.B. aus den Druckkomponenten p_{\parallel} , p_{\perp} . Ihre Bedeutung liegt zum einen Mal darin, daß sich aus der Kräftebilanz des Plasmas integrale Beziehungen ableiten lassen, die diese Volumenmittelwerte mit Flächenintegralen über eine das Plasma einschließende Oberfläche verbinden (s. Anhang B). Die Oberflächenintegrale enthalten nur noch Magnetfeldkomponenten auf dieser Fläche. In Experimenten können die Magnetfeldkomponenten gemessen werden, wodurch es möglich ist, bestimmte Kombinationen aus den Volumenmittelwerten experimentell festzulegen.

Zum anderen lassen sich Plasmagleichgewichte mit ihnen in verschiedene Klassen einordnen. Um die Mittelwerte besser vergleichen zu können, werden sie auf eine spezielle Energiedichte des poloidalen Magnetfeldes bezogen, die als $\langle B_P \rangle_L^2 / (2\mu_0)$ erklärt ist, wobei

$$\langle B_P \rangle_L = \frac{1}{L_B} \oint_L B_P dl = \frac{\mu_0 I_P}{L_B} \quad (2.134)$$

gilt. In den Abbildungen, die Flußflächen von Plasmagleichgewichten zeigen, sind folgende wichtige Größen angegeben, deren Bedeutung wir hier kurz erläutern:

β_P (sprich: beta poloidal) ist eine Größe, die das Verhältnis von volumengemitteltem Druck, d.h. der thermischen Energiedichte, zu der oben genannten poloidalen Magnetfeldenergie angibt. Da in Fusionsplasmen ein hoher Druck eingeschlossen werden soll, werden dort hohe Werte von β_P angestrebt ($\beta \approx 2 - 3$). Die Werte lassen sich für anisotropen Druck in gleicher Weise für die Druckkomponenten erklären, d.h. $\beta_{P\parallel}$, $\beta_{P\perp}$ (nicht zu verwechseln mit den partiellen Ableitungen $\beta_{\parallel,\perp}$).

β_p läßt sich dann als arithmetisches Mittel aus beiden erklären.

l_i gibt das Verhältnis von zwei Energiedichten des poloidalen Magnetfeldes an, der volumengemittelten poloidalen Magnetfeldenergiedichte zu der oben genannten. l_i wird als Induktivitätskoeffizient bezeichnet und ist ein Maß für die räumliche Verteilung der Toroidalstromdichte.

μ ist das Verhältnis des Volumenmittelwertes, der aus der Differenz der Energiedichten des toroidalen Vakuummagnetfeldes B_{T0} und des toroidalen Magnetfeldes B_T , d.h. $(B_{T0}^2 - B_T^2)/(2\mu_0)$, gebildet wird, zu der speziellen poloidalen Magnetfelddichte. Betrachten wir die Differenz von B_{T0}^2 und B_T^2 , so kann diese mit der Näherung ($B_T \approx B_{T0}$) als $B_{T0}(B_{T0} - B_T)/\mu_0$ beschrieben werden. Damit kann μ als Differenz von toroidalen magnetischen Flüssen interpretiert werden und gibt damit ein Maß dafür, wieviel das Plasma zum toroidalen magnetischen Fluß beiträgt. Ist $\mu < 0$, so verstärkt das Plasma das Toroidalfeld und wird deshalb als paramagnetisch bezeichnet. Ist $\mu > 0$, dann wird das Toroidalfeld abgeschwächt und das Plasma verhält sich diamagnetisch. μ wird daher als diamagnetisches Moment bezeichnet. Von ihm leitet sich mit $\beta_D := 1 - \mu$ der sogenannte diamagnetische β -Wert ab, der ein diamagnetisches Plasma mit $\beta_D < 1$ beschreibt und ein paramagnetisches mit $\beta_D > 1$.

2.5.2 Tests und Validierung

Als Ausgangspunkt für die Darstellung des Einflusses von Massenströmungen und anisotropem Druck dient uns im folgenden ein mit dem Programm DIVA des MPI für Plasmaphysik (Garching) berechnetes statisches Gleichgewicht mit isotropem Druck. Die Profile sowie die Achs- und Randwerte sind in Tabelle 2.5.2 zusammengefaßt, wobei das Profil für den Druck in Dichte- und Temperaturprofil aufgespalten ist, um es für DIVAFlow benutzen zu können. Abb. 2.7 zeigt die Konturlinien des poloidalen magnetischen Flusses, sowie die Gefäßwand und einige Einbauten. Charakteristische Plasmaparameter sind auf der linken Seite angegeben. Der Plasmastrom I_T liegt bei 344.4kA und die Achse liegt bei $(R_A, z_A) = (1.75, 0.0875)$. Da der Poloidalstrom auf der magnetischen Achse größer ist als am Plasmarand, ist das Plasma leicht diamagnetisch. Der diamagnetische Wert von β_p , der mit $1 - \mu$ bestimmt wird, daher liegt unter Eins. Das Programm DIVAFlow wurde für isotropen Druck in seinem Verhalten bei vernach-

phys. Größe	Profilfunktion	Achswert	Randwert
JJ'	$(1 - x)^3$	$J_A = 24.0312 \text{ MA}$	$J_B = 24 \text{ MA}$
n	$(1 - x)^2$	10^{+20} m^{-3}	10^{12} m^{-3}
T	$(1 - x)^2$	$4.48 \cdot 10^7 \text{ K}$	$4.48 \cdot 10^5 \text{ K}$

Tabelle 2.1: Profile sowie Achs- und Randwerte für das Referenzgleichgewicht.

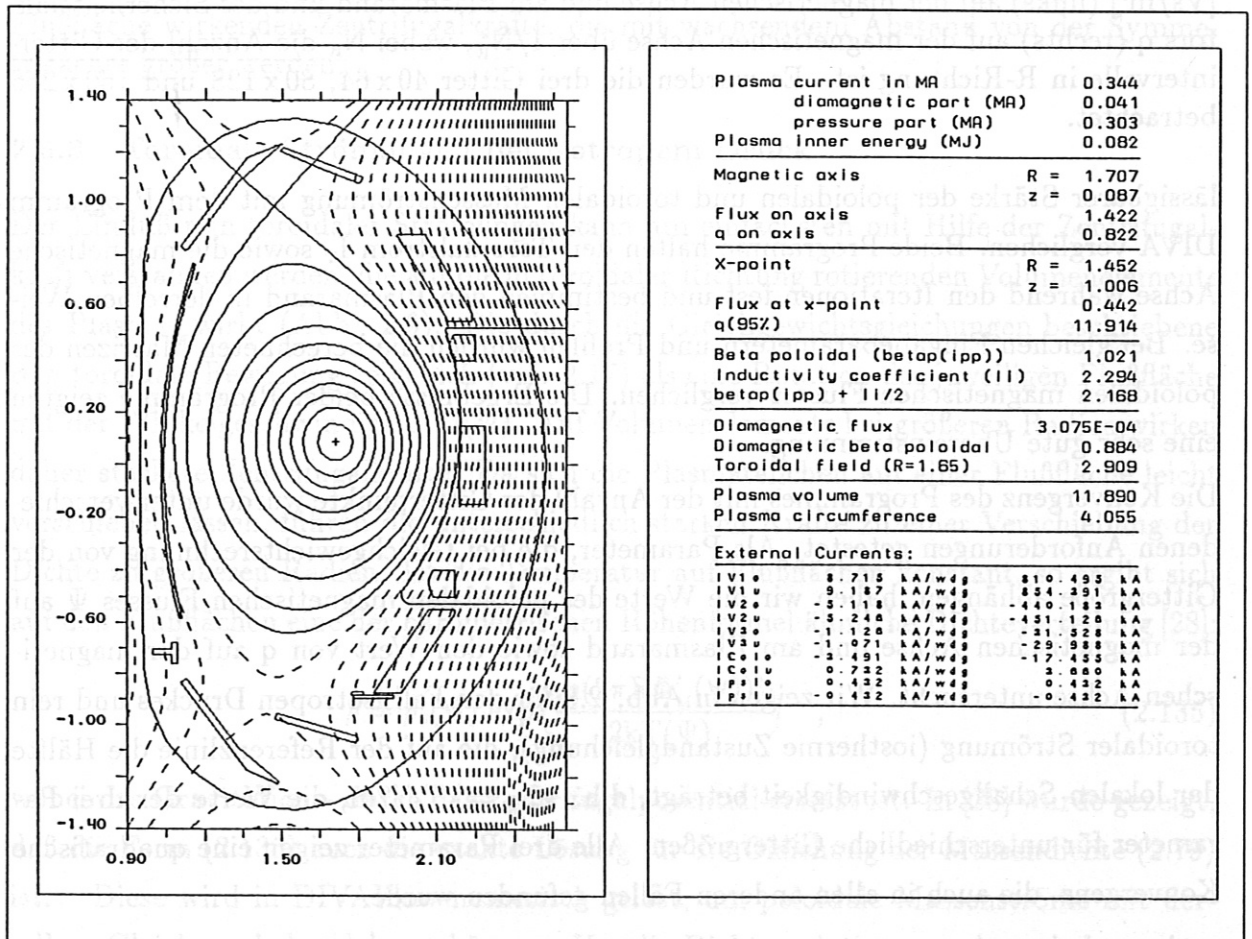


Abbildung 2.7: Konturen des poloidalen magnetischen Flusses Ψ , wichtige Gleichgewichtsgrößen und Ströme in externen Spulen. Der Wert von β_{pol} (ipp) wird bei anisotropem Druck durch $1/2(\beta_{\text{p||}} + \beta_{\text{p\perp}})$ gebildet.

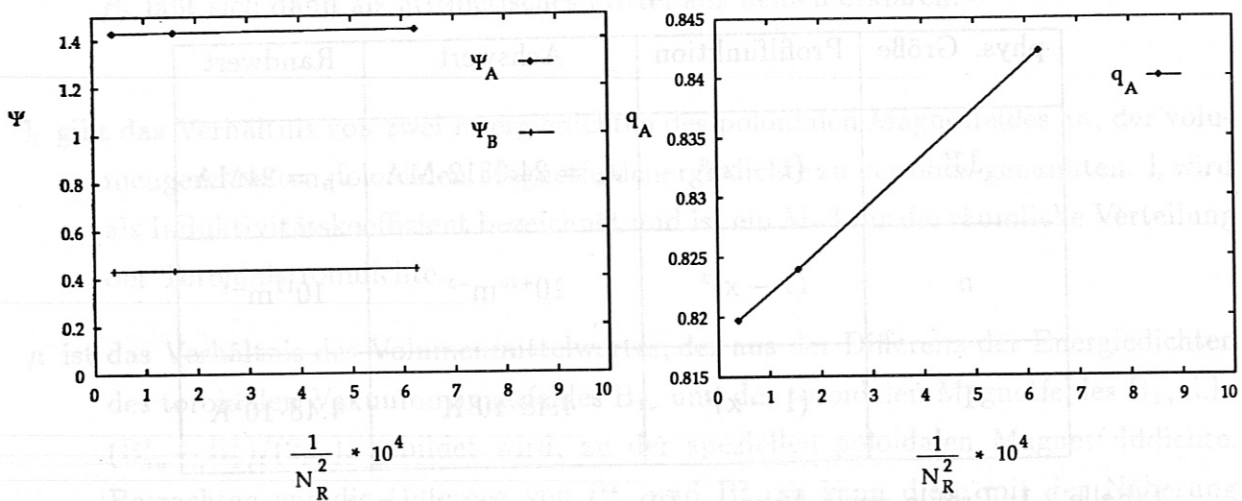


Abbildung 2.8: Aufgetragen sind die Werte des poloidalen magnetischen Flusses Ψ in $[\text{Vs}/\text{m}^2]$ (links) auf der magnetischen Achse und am Plasmarand und des Sicherheitsfaktors q (rechts) auf der magnetischen Achse über $1/N_R^2$, wobei N_R die Anzahl der Gitterintervalle in R-Richtung ist. Es wurden die drei Gitter 40×64 , 80×128 und 160×256 betrachtet.

lässigbarer Stärke der poloidalen und toroidalen Massenströmung mit dem Programm DIVA verglichen. Beide Programme halten den Toroidalstrom I_T sowie die magnetische Achse während den Iterationen fest und bestimmen den Plasmarand in derselben Weise. Bei gleichen Eingabeparametern und Profilen wurden die berechneten Matrizen des poloidalen magnetischen Flusses verglichen. Die Ergebnisse beider Programme zeigten eine sehr gute Übereinstimmung.

Die Konvergenz des Programmes mit der Anzahl der Gitterpunkte wurde unter verschiedenen Anforderungen getestet. Als Parameter, die bei Gleichgewichtsrechnung von der Gittergröße abhängen, haben wir die Werte des poloidalen magnetischen Flusses Ψ auf der magnetischen Achse und am Plasmarand sowie den Wert von q auf der magnetischen Achse untersucht. Wir zeigen in Abb. 2.8 für den Fall isotropen Druckes und rein toroidaler Strömung (iostherme Zustandgleichung), die auf der Referenzlinie die Hälfte der lokalen Schallgeschwindigkeit beträgt, d.h. $v_{T,R}^2 = kT_R/2m$, die Werte der drei Parameter für unterschiedliche Gittergrößen. Alle drei Parameter zeigen eine quadratische Konvergenz, die auch in allen anderen Fällen gefunden wurde.

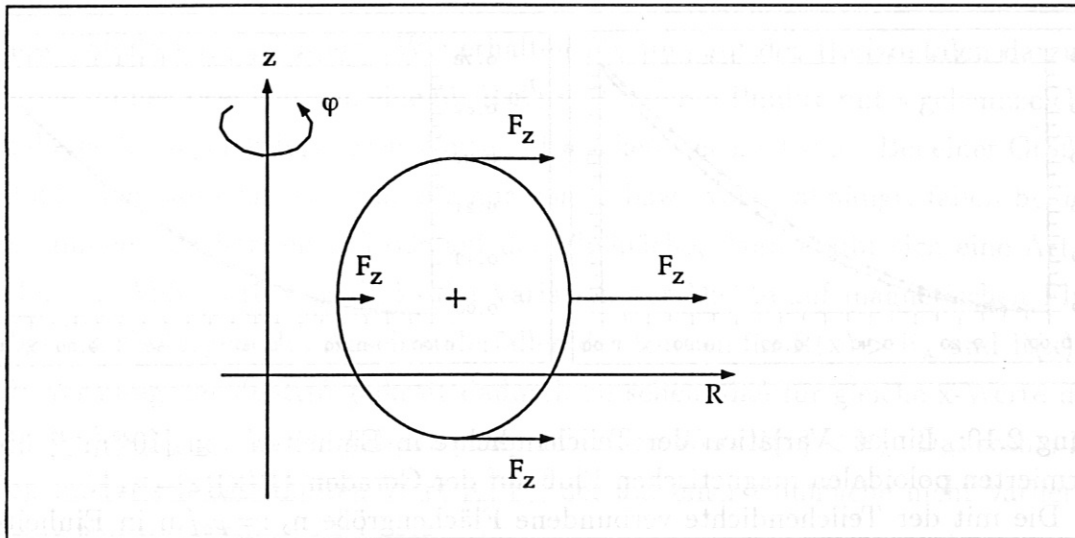


Abbildung 2.9: Die auf einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Flußfläche wirkenden Zentrifugalkräfte, die mit wachsendem Abstand von der Symmetrieachse größer werden.

2.5.3 Toroidale Strömungen bei isotropem Druck

Der Einfluß rein toroidaler Strömungen kann am einfachsten mit Hilfe der Zentrifugalkraft verstanden werden, die auf die in toroidaler Richtung rotierenden Volumenelemente des Plasmas wirkt (Abb. 2.9). Die durch die Gleichgewichtsgleichungen beschriebene rein toroidale Bewegung zeigt sich (vgl. 2.17) als eine Rotation der jeweiligen Flußfläche mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega(\Psi)$. Auf Volumenelemente bei größeren Radien wirken daher stärkere Zentrifugalkräfte. Da sich die Plasmateilchen auf einer Flußfläche leicht verschieben lassen, führen die unterschiedlich starken Kräfte zu einer Verschiebung der Dichte zu größeren Radien. Ist die Temperatur auf Flußflächen konstant, so ergibt sich auf den Flußflächen eine der barometrischen Höhenformel ähnliche Dichteverteilung [28]:

$$\rho = \rho_0(\Psi) \exp\left(\frac{m(2\pi R\Phi'_M(\Psi))^2}{2kT(\Psi)}\right), \quad (2.135)$$

wobei das Gravitations- durch das Zentrifugalpotential ersetzt ist. In [28] wurde gezeigt, daß die Form (2.135) auch die exakte Lösung für die Gleichung der Massendichte (2.79) ist. Diese wird in DIVAFlow numerisch gelöst, um poloidale Massenströme mit derselben Gleichung behandeln zu können. Um die Dichteveriation zu zeigen, haben wir ρ und ρ_0 auf einer Horizontalen, die vom inneren Plasmarand ($R < R_A$) über die magnetische Achse zum äußeren Plasmarand ($R > R_A$) führt, berechnet und über den normierten Fluß x aufgetragen (Abb. 2.10). Da wir die Auftragung häufiger benutzen, sei sie an

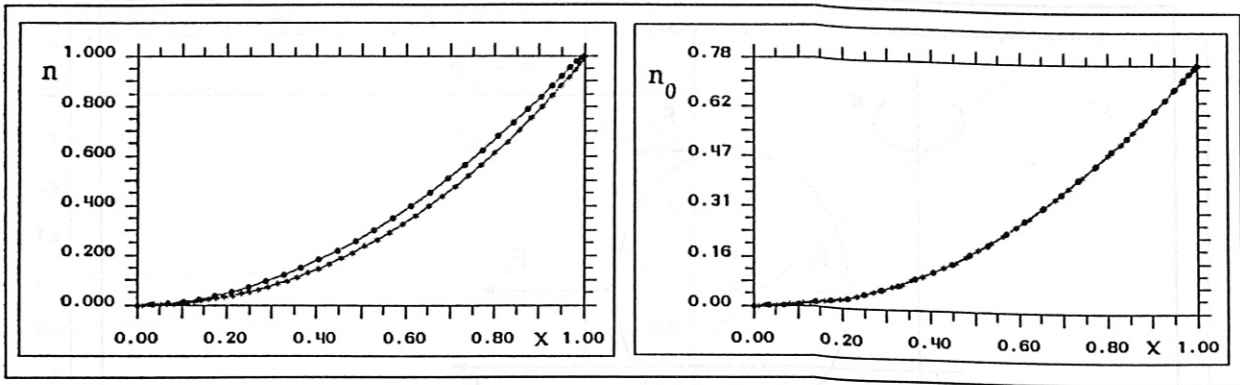


Abbildung 2.10: Links: Variation der Teilchendichte in Einheiten von $[10^{20}m^{-3}]$ über dem normierten poloidalen magnetischen Fluß auf der Geraden $\{R(x), z = z_A\}$. Rechts: Die mit der Teilchendichte verbundene Flächengröße $n_0 := \rho_0/m$ in Einheiten von $[10^{20}m^{-3}]$ zeigt keine Variation auf Flußflächen.

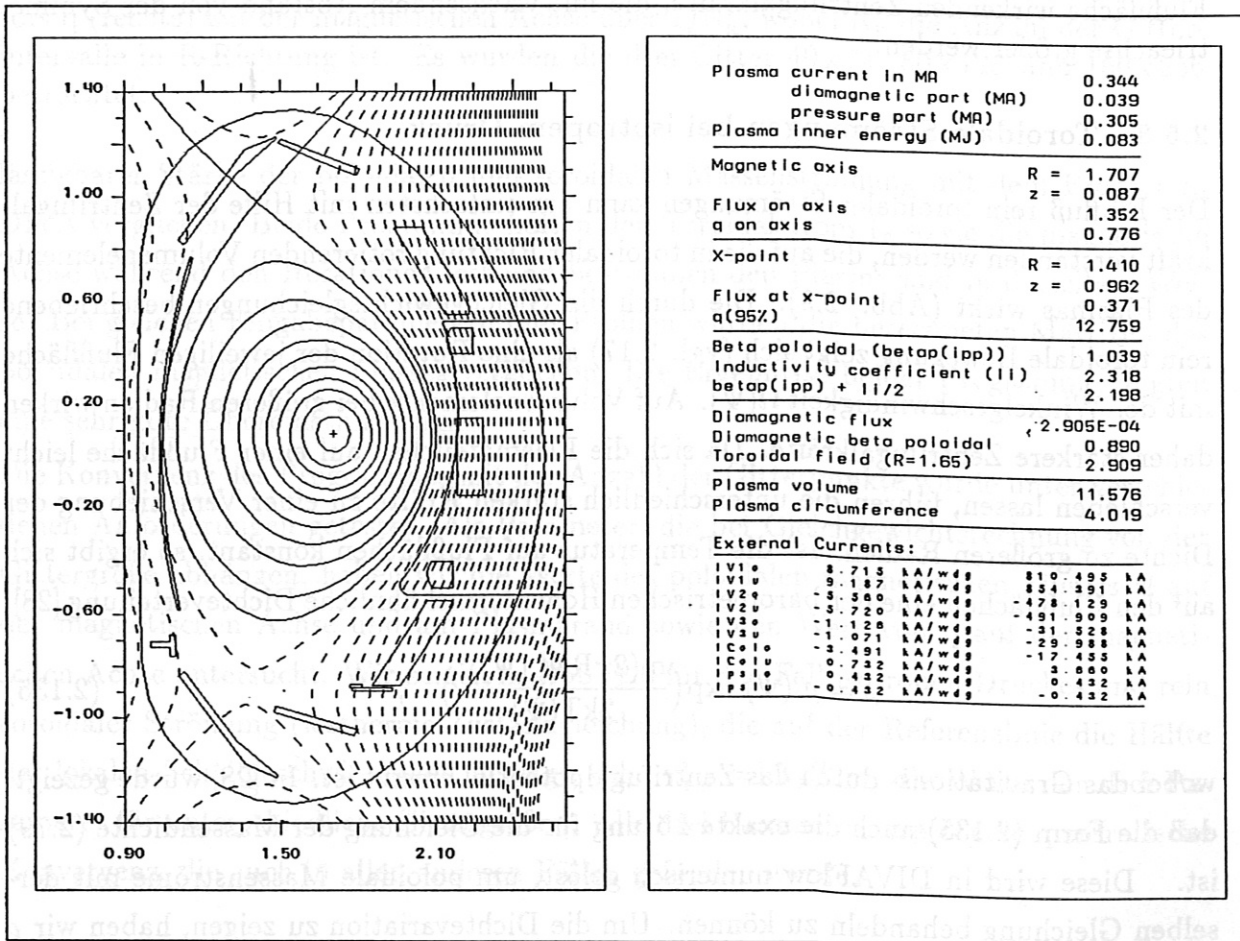


Abbildung 2.11: Gleichgewicht mit toroidaler Rotation, das aus dem Referenzgleichgewicht entsteht, wenn das Plasma mit einfacher Schallgeschwindigkeit rotiert.

dieser Stelle kurz erläutert. Wir erhalten für eine auf der Horizontalen darzustellende Größe immer zwei Kurven, eine für $R(x) \leq R_A$, deren Punkte mit * gekennzeichnet sind, und eine für $R(x) \geq R_A$, deren Werte mit • gekennzeichnet sind. Bei einer Größe, die auf Flußflächen konstant ist, d.h. die nur von Ψ bzw. von x abhängt, fallen beide Kurven zusammen. Variiert eine Größe auf der Flußfläche, dann ergibt sich eine Art Hysteresekurve. Abb. 2.10 zeigt links die Variation der Dichte auf magnetischen Flußflächen über x aufgetragen. Im Auseinanderfallen der Kurven für $R(x) > R_A$ und $R(x) < R_A$ ist die Wirkung der Zentrifugalkraft dadurch zu sehen, daß für gleiche x -Werte die Dichte für $R(x) > R_A$ größer ist als beim entsprechenden Wert $R(x) < R_A$. Das rechte Bild zeigt den numerisch bestimmten Wert $\rho_0(\Psi)$, der auf einer Flußfläche nicht variiert, so daß beide Kurven aufeinander liegen.

Die an der Torusaußenseite erhöhte Dichte führt auch zu einer Erhöhung des Drucks und damit des Druckgradienten. Dieser Effekt ist für Stabilitätsuntersuchungen wichtig, da z.B. die sogenannten Ballooning-Instabilitäten durch den Druckgradienten in dieser Plasmaregion getrieben werden.

Da die Stärke der Zentrifugalkräfte auf jeder Flußfläche noch von der dort herrschenden mittleren Teilchendichte abhängt, ergibt sich als weitere Folge eine Deformation der Flußflächen. Würde der Plasmarand fixiert bleiben, ergäbe sich daraufhin eine Verschiebung der magnetischen Achse [23]. Da wir die magnetische Achse festhalten, verschiebt sich die äußerste magnetische Fläche. Ein Vergleich zwischen dem statischen Gleichgewicht in Abb. 2.7 und dem mit toroidaler Rotation in Abb. 2.11 zeigt, daß sich die äußerste Flußfläche der Struktur auf der Torusinnenseite nähert. Für das Gleichgewicht von Abb. 2.11 wurde auf der ganzen Referenzlinie für die toroidale Rotation einfache Schallgeschwindigkeit angenommen, d.h. $mv_{T,R}^2 = kT_R$. Um die magnetische Achse an ihrem Platz zu halten, müssen schließlich die Zentrifugalkräfte durch die elektromagnetischen Kräfte aufgefangen werden. In Abb. 2.12 haben wir für auf der Referenzlinie konstante toroidale Rotationen die Ströme in den zur Lageregelung der magnetischen Achse benutzten Spulen V2o und V2u über dem Quadrat der toroidalen Machzahl $m_T^2 := mv_T^2/kT$ aufgetragen. Die mit der Strömung zunehmende Zentrifugalkraft äußert sich in der in unserem Falle linearen Zunahme der Ströme mit m_T^2 .

2.6 Poloidale Massenströmung bei isotropem Druck

Ist zusätzlich zur toroidalen Massenströmung eine poloidale vorhanden, so ändert sich das Bild der Kräfte deutlich. Die Bewegung eines Plasmavolumens bleibt nicht mehr auf

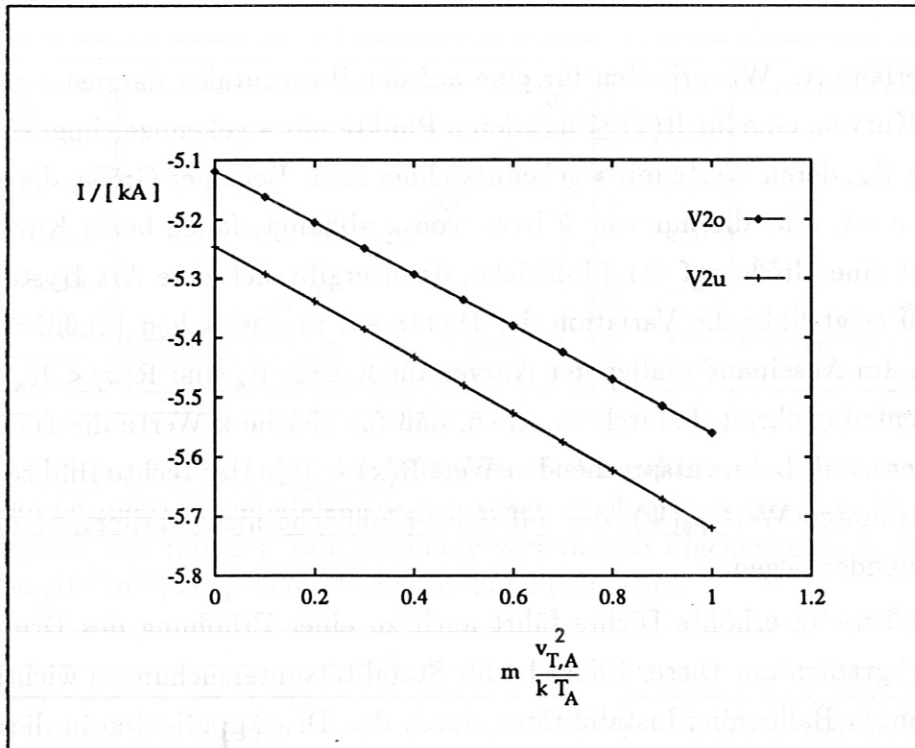


Abbildung 2.12: Die Ströme in den Poloidal­feldspulen V2o und V2u, die zur Lagerege­lung der magnetischen Achse dienen, in Abhängigkeit vom Quadrat der toroidalen Mach­zahl. Die mit der Machzahl ansteigenden Zentrifugalkräfte bedingen stärkere Ströme in den Spulen.

einen festen Radius R beschränkt, sondern führt auf der Flußfläche um die magnetische Achse herum. Dabei erfährt es zusätzlich zu den Zentrifugalkräften eine Corioliskraft F_c . Ist $\vec{\omega} \parallel \nabla z$ der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Plasmavolumens, so führt die poloidale Geschwindigkeitskomponente mit

$$F_{c,t} = 2m(\mathbf{v}_p \times \vec{\omega}) \parallel \nabla \varphi \tag{2.136}$$

zu einer Kraft in toroidaler Richtung (Abb. 2.13), die nur durch eine elektromagnetische Kraft ausgeglichen werden kann. Eine toroidale Kraft aus dem Kreuzprodukt $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ kann sich nur über zwei poloidale Komponenten ergeben. Das heißt, es muß einen Anteil der Stromdichte \mathbf{j} geben, der durch die magnetischen Flächen fließt und mit \mathbf{B}_p zusammen die toroidale Komponente der Corioliskraft kompensiert. Damit ist der Poloidalstrom J nicht mehr wie bei statischen Gleichgewichten oder bei rein toroidaler Strömung eine Flächengröße, sondern variiert auf Flußflächen.

Die Kompensation der Corioliskraft ist aber der geringere Effekt dieser "radialen" Stromdichte. Mit dem wesentlich stärkeren toroidalen Magnetfeld \mathbf{B}_T gekreuzt ergibt sich eine

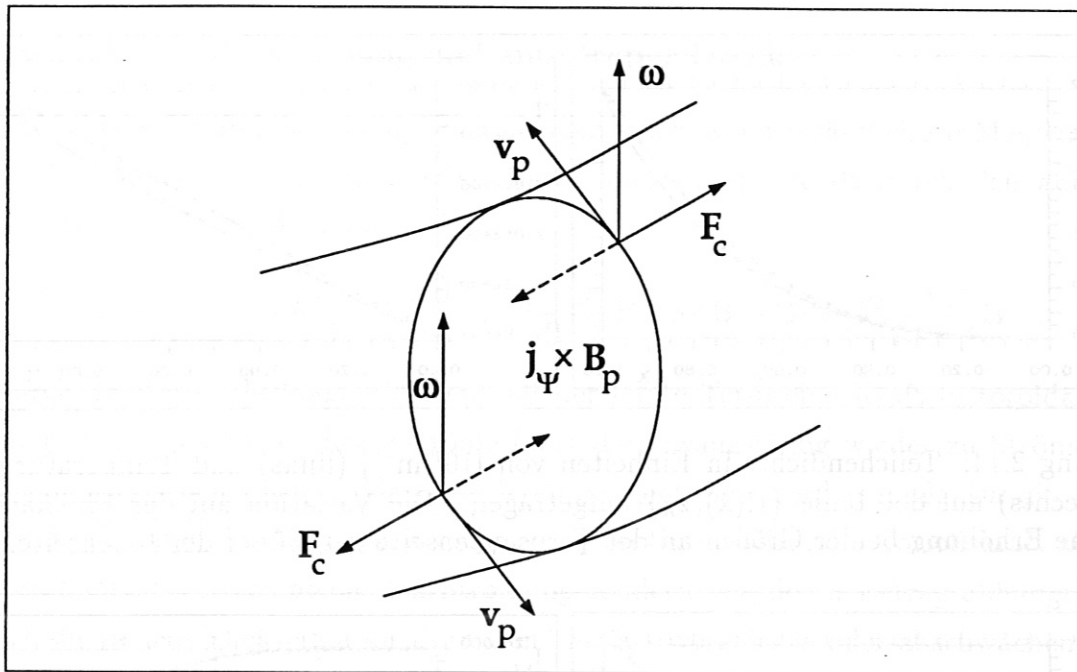


Abbildung 2.13: Die Corioliskräfte auf einer Flußfläche, sowie die sie bilanzierenden magnetischen Kräfte, die einen Strom j_{Ψ} senkrecht zur Flußfläche verlangen.

Kraft in den Flußflächen, die durch einen Druckgradienten auf der Flußfläche aufgefangen werden muß. Dies bedeutet, daß die Dichte, und bei Benutzung der isentropen Zustandsgleichung für die Abhängigkeit des Druckes von der Dichte und der Temperatur, auch die Temperatur auf den Flußflächen variiert. Abb. 2.14 zeigt in der Auftragung über x die Variation der Teilchendichte bzw. der Temperatur auf der Horizontalen durch die magnetische Achse. Die Erhöhung des Druckes auf der Torusaußenseite ist im linken Teil der Abb. 2.15 zusehen. Im rechten Teil ist der Poloidalstrom abgebildet, wobei die Differenz der Kurven ein Maß für die Stärke der radialen Ströme darstellt, die durch die magnetischen Flächen fließen.

Für ein Gleichgewicht mit einer Strömung parallel zu Magnetfeldlinien und isentroper Zustandsgleichung, die die Profile und Parameter des Referenzgleichgewichtes für Teilchendichte, Temperatur und Poloidalstrom benutzt, zeigen wir in Abb. 2.14 und Abb. 2.15 die Variation der Teilchendichte und der Temperatur bzw. des Poloidalstroms und der damit verbundenen Flächengröße J_M . Als Profil für die auf das poloidale Magnetfeld normierte Poloidalgeschwindigkeit haben wir eine lineare Abhängigkeit $\sim (1 - x)$ benutzt und die Achs- bzw. Randwerte mit $mv_{p,A}^{*2} = 0.81B_A^2 kT_A$ bzw. $mv_{p,B}^{*2} = 0.16B_B^2 kT_B$. Dichte und Temperatur zeigen beide höhere Werte auf der Torusaußenseite und verstärken wie bei der toroidalen Strömung den Druck. Die Dichte variiert zum Teil um mehr als

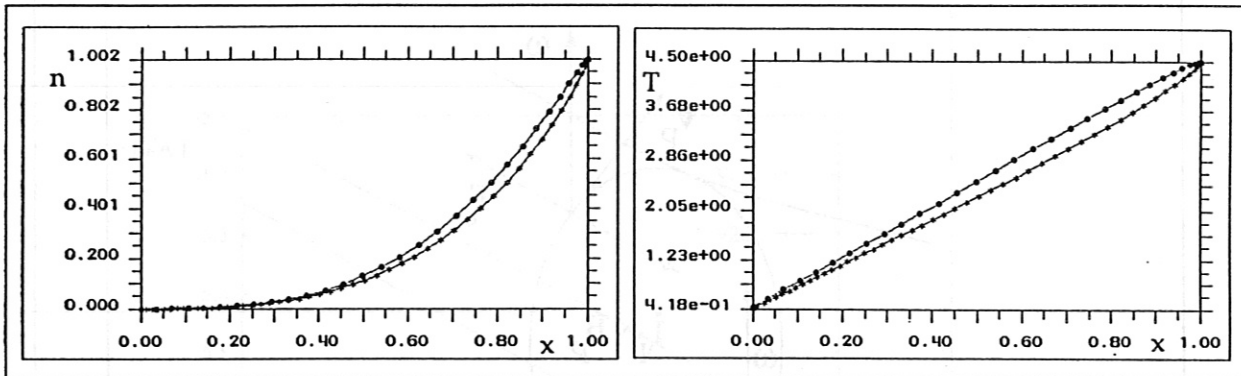


Abbildung 2.14: Teilchendichte in Einheiten von $[10^{20}m^{-3}]$ (links) und Temperatur in 10^7K (rechts) auf der Linie $\{R(x), z_A\}$ aufgetragen. Die Variation auf der Flußfläche zeigt eine Erhöhung beider Größen an der Torausenseite gegenüber der Innenseite.

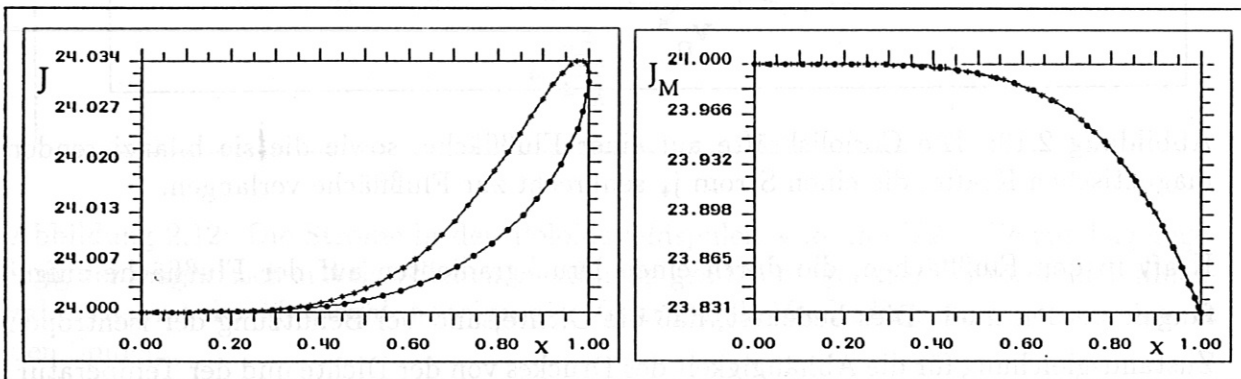


Abbildung 2.15: Links: Variation des Poloidalstroms J in MA. Die Differenz der beiden Kurven gibt ein Maß für die Stärke der Ströme durch die Flußflächen. Rechts: Die mit J verbundene Flächengröße J_M in MA. Die poloidale Strömung trägt die Differenz zwischen dem "paramagnetischen" Verlauf von J ($J_B < J_A$).

10 % zwischen der Innen- und der Außenseite des Torus.

Die das Plasma charakterisierenden Parameter sind trotz der recht hohen poloidalen Strömung fast die gleichen wie beim isotropen statischen Gleichgewicht. Dies liegt vor allem daran, daß wir in unseren Rechnungen den Poloidalstrom auf der magnetischen Achse festhalten. Abb. 2.15 zeigt, daß der Poloidalstrom auf der magnetischen Achse größer ist als am Rand, während für die Flächengröße J_M das umgekehrte gilt. Hielten wir den Wert von J_M auf der Achse fest und ließen die poloidale Strömung gegen Null gehen, so würde J_M in den Poloidalstrom übergehen und wir hätten anstatt eines diamagnetischen Plasmas ein paramagnetisches. Wir können also die poloidale Strömung auch so interpretieren, daß sie einen zusätzlichen Diamagnetismus im Plasma erzeugt.

2.6.1 Poloidale Strömung und anisotroper Druck

Das Bild der Kräftebilanz kompliziert sich natürlich, wenn zusätzlich zur Massenströmung die Druckanisotropie hinzukommt. Betrachten wir die Kraft durch den anisotropen Drucktensor, so erhalten wir

$$\nabla \cdot \mathbf{p} = \nabla p_{\perp} + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \nabla \frac{B^2}{2} + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \right) \mathbf{B} \quad (2.137)$$

Durch das toroidale Magnetfeld enthält der letzte Term eine Kraft in toroidaler Richtung. Ohne poloidale Massenströme führt dies zwangsläufig wieder zu Strömen durch die magnetischen Flächen, da diese Kraft ausgeglichen werden muß. Da die Richtung der Kraft durch das Vorzeichen von $p_{\parallel} - p_{\perp}$ bestimmt wird, die Corioliskraft aber nicht vom Umlaufsinn der poloidalen Strömung sondern von deren Betrag abhängt, können sich die beiden Effekte auf die "radialen" Ströme verstärken oder abschwächen.

Die Kräfte in der magnetischen Fläche sind nicht mehr so einfach auseinanderzuhalten, wie dies bei isotropem Druck der Fall war, da jeder Term einen Anteil in diesem Teil der Kraftbilanz liefert. Deutlicher zeigen sich die Auswirkungen auf die Massendichte, wenn wir die integrierte Form der parallelen Kraftbilanz wieder entlang Magnetfeldlinien differenzieren und nach $\mathbf{B} \cdot \nabla \rho$ auflösen:

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \rho = \left(1 - \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel} - M_p^2} \right) \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla B}{B} + \frac{v_{\phi}^2}{\beta_{\parallel} - M_p^2} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla R}{R} \quad (2.138)$$

Dabei haben wir die Definitionen der partiellen Differentiale der Druckkomponenten und Integrabilitätsbedingungen benutzt. In dieser zum ersten Mal in [8] angegebenen Form erkennt man, daß, solange $1 > \beta_{\perp}/(\beta_{\parallel} - M_p^2)$ gilt, sich die Dichte wie die Magnetfeldstärke ändert. Wir betrachten dahingehend das Standardgleichgewicht mit der gleichen poloidalen Massenströmung wie im vorigen Abschnitt, behandeln aber den Druck in der CGL-Form mit $a(\Psi) \equiv 1$. Wir haben dabei angenommen, daß die Druckanisotropie auf der Referenzlinie verschwindet. Die Profilkfunktionen für die anisotropen Temperaturen T_{\parallel} und T_{\perp} sind dieselben wie die der isotropen Temperatur zuvor, d.h. $\sim (1 - x)$. Abb. 2.16 zeigt die Teilchendichte auf der Horizontalen durch die magnetische Achse über R bzw. x aufgetragen. Die Dichtevariation hat sich gegenüber dem Fall isotropen Druckes umgekehrt, so daß jetzt die Dichte auf der Torusinnenseite größer ist. Abb. 2.17 und Abb. 2.18 zeigen die CGL-Temperaturen bzw. die CGL-Druckkomponenten. Die Temperaturen variieren vor allem am Plasmarand wegen der starken Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke beträchtlich. Hier überschätzt das CGL-Modell die Variation

2.6. POLOIDALE MASSENSTRÖMUNG BEI ISOTROPEM DRUCK

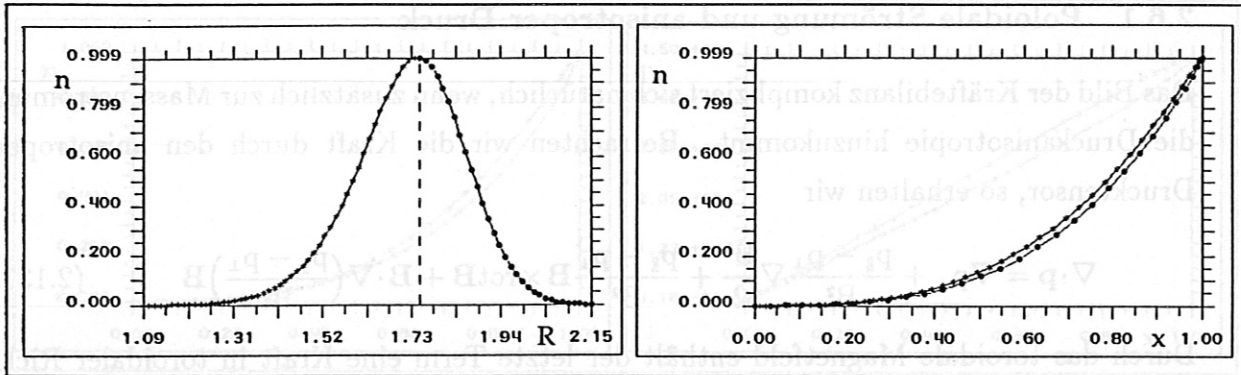


Abbildung 2.16: Verlauf der Teilchendichte in Einheiten von $[10^{20} \text{m}^{-3}]$ über R in m bzw. x . Die Dichteveriation auf Flußflächen hat sich im Vergleich zum Fall mit isotropem Druck umgekehrt.

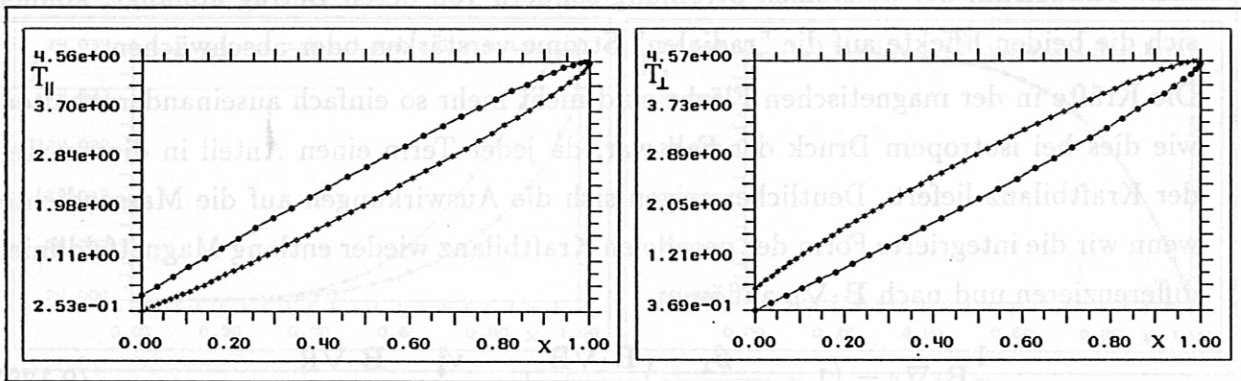


Abbildung 2.17: Verlauf der CGL-Temperaturen in Einheiten von $[10^7 \text{K}]$ über x . T_{\perp} ist in den Regionen größerer Magnetfeldstärke, d.h. auf der Torusinnenseite, höher. Dies ist ein Ausdruck der in dieser CGL-Gleichung enthaltenen Erhaltung des magnetischen Moments der Teilchen. T_{\parallel} zeigt die umgekehrte Variation.

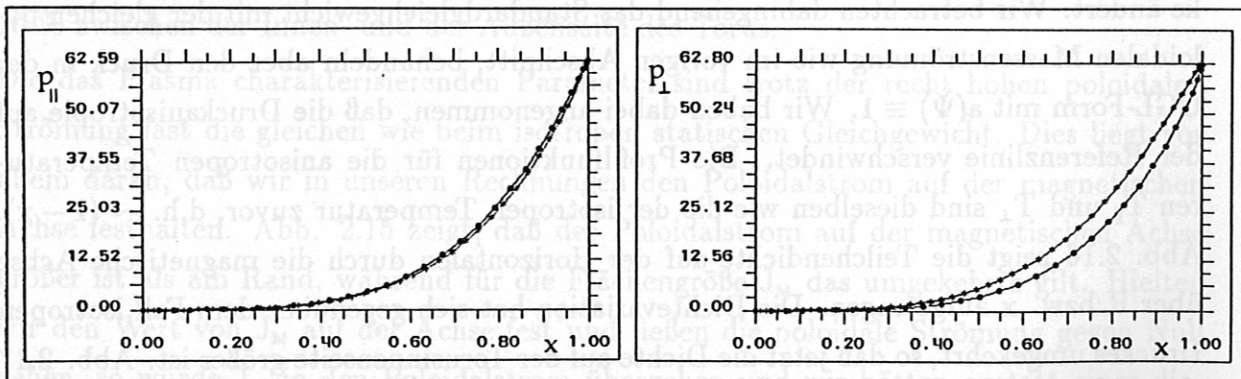


Abbildung 2.18: Verlauf der Druckkomponenten in kPa über x . Die Variation von Dichte und paralleler Temperatur heben sich nahezu auf, während die Dichteveriation und die Variation der Senkrecht-Temperatur sich verstärken.

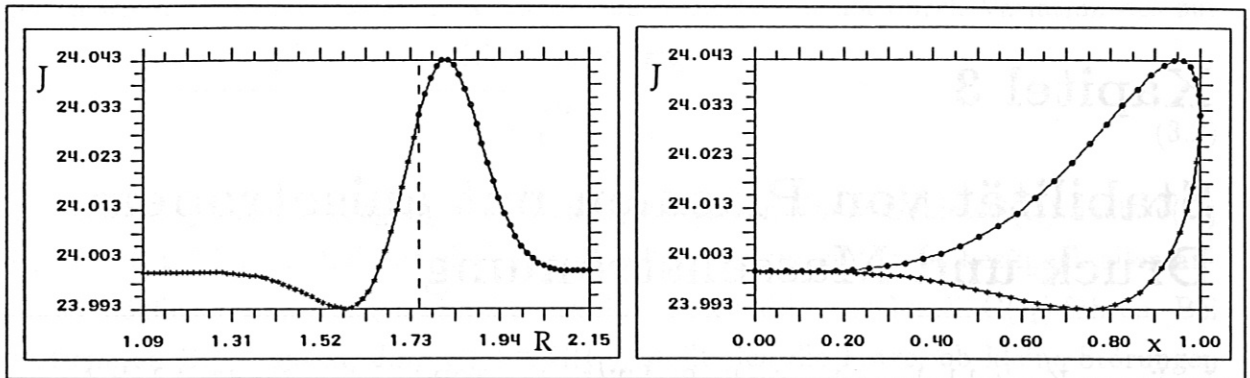


Abbildung 2.19: Verlauf des Poloidalstroms in MA über R in m und über x.

durch die Vernachlässigung der Wärmeströme. Bei den Druckkomponenten zeigt p_{\perp} eine deutliche Verringerung seines Wertes an der Torusaußenseite. Dieser Effekt könnte für Stabilitätsbetrachtungen von Wichtigkeit sein. Abb. 2.19 zeigt den Poloidalstrom, der durch die Druckanisotropie besonders verändert wird. Durch die geringe Anhebung seines Wertes auf der Achse gegenüber des Wertes auf dem Rand durchläuft er sowohl ein Minimum als auch ein Maximum. Dies bedeutet, daß die Niveaulinien des Poloidalstroms eine Separatrix aufweisen, d.h. eine Linie konstanten Poloidalstromes ($J \equiv J_B$), die das Plasma durchquert und Bereiche mit $J < J_B$ von denen mit $J > J_B$ trennt.

Kapitel 3

Stabilität von Plasmen mit anisotropem Druck und Massenströmung

In diesem Kapitel behandeln wir die Stabilität des GCP in seiner Einflüssigkeitsformulierung. Wir benutzen dazu einen Lagrangeformalismus, der sich eines Koordinatensystems bedient, das mit der Flüssigkeitsbewegung verbunden ist. Zur Bestätigung der gewählten Lagrangefunktion leiten wir die Bewegungsgleichungen des Plasmas ab. Aus deren Lagrangescher Formulierung erhalten wir dann die Stabilitätsgleichung. Diese Stabilitätsgleichung schließt die Lücke zwischen den Stabilitätsbetrachtungen, die Plasmaströmungen und einen isotropen Druck betrachten, und denen, die nur einen anisotropen Drucktensor betrachten und die Effekte durch Strömungen vernachlässigen. Durch die Annahme relativ allgemeiner Abhängigkeiten für die Druckkomponenten ist die so gewonnene Stabilitätsgleichung eine Verallgemeinerung des CGL-Plasmodells mit Strömung, das feste Abhängigkeiten vorgibt. Schließlich betrachten wir für die Stabilitätsgleichung den Grenzfall der stark lokalisierten Ballooningmoden mit Hilfe des Eikonalansatzes.

3.1 Der Lagrange-Formalismus

Wir betrachten ein Fluid mit der Lagrangefunktion

$$L = \int_G \left(\frac{1}{2} \rho v^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 - \rho A \right) d^3x \quad , \quad (3.1)$$

wobei G das von Plasma erfüllte Gebiet zum Zeitpunkt t sei. A ist die bei der Plasma-bewegung am Plasma geleistete Arbeit aus der Flüssigkeitsbeschreibung des GCP. Diese hängt laut Gleichung (1.56) vom Ort nur über die Massendichte ρ und die Stärke der magnetischen Induktion B ab und besitzt die durch (1.57) gegebenen partiellen Ableitungen. Aus physikalischen Gründen nehmen wir an, daß für die Bewegung des Fluids die Erhaltung der Masse (1.71) und des magnetischen Flusses (1.69) gelte, und die Arbeit A die Integrabilitätsbedingung (1.75) erfüllt. Zur Verifikation der Lagrangefunktion

leiten wir die Bewegungsgleichung für das betrachtete Plasma durch Variation des zur Lagrangefunktion gehörenden Wirkungsintegrals

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt \quad (3.2)$$

ab. Die tatsächliche Bewegung des Plasmas, die es von einem Gebiet $G(t_1)$ nach $G(t_2)$ überführt, zeichnet sich durch ein Extremum des Wirkungsintegrals bezüglich allen anderen möglichen Bewegungen aus, die dasselbe leisten, d.h. $G(t_1)$ nach $G(t_2)$ führen. Bei stationären Bewegungen, d.h. $G(t) \equiv G(t_1)$, stellt sich die Frage, ob kleine Störungen in der Bewegung die Stationarität durch ein unbegrenztes Anwachsen zerstören können. Dies untersucht die sogenannte Stabilitätsanalyse der Bewegungsgleichung. Wir wählen den Weg über das Wirkungsintegral, da uns dieser die Bewegungsgleichungen mit Hilfe von zeitabhängigen Transformationen in einer Form liefert, die es erlaubt, die Gleichungen der Stabilitätsanalyse besonders einfach zu erhalten.

3.2 Die Durchführung der Variation

Die Betrachtung der Bewegung eines Flüssigkeitsvolumens, das sich zum Zeitpunkt t am Ort \mathbf{x} aufhält, kann prinzipiell von zwei besonders ausgezeichneten Koordinatensystemen erfolgen. Das erste betrachtet die Bewegung des Flüssigkeitsvolumenelementes entlang seiner Bahn $\mathbf{x}(t)$ ($\dot{\mathbf{x}}$) vom Startpunkt $\dot{\mathbf{x}}$ aus, an dem es sich zum Zeitpunkt $t = t_1$ befand. Mit einem sogenannten begleitenden Dreibein, das mit dem Flüssigkeitselement fest verbunden ist, verfolgt der Betrachter vom Startpunkt aus die Verformungen, die das Volumenelement auf seinem Weg erfährt. Dieser sogenannten Lagrangeschen steht die Eulersche Beschreibung der Bewegung gegenüber. Sie nimmt ein ortsfestes Koordinatensystem an und betrachtet die Bewegung aller Flüssigkeitselemente durch ein Geschwindigkeitsfeld. Im stationären Fall, d.h. wenn sich das Geschwindigkeitsfeld an festem Ort nicht mit der Zeit ändert, sind die Strömungslinien des Geschwindigkeitsfeldes mit den Bahnlinien der Flüssigkeitselemente identisch. Im nichtstationären Fall weichen die Bahnen von den Strömungslinien ab. Ein Betrachter, der die Volumenelemente an einem festen Ort \mathbf{x} vorbeigleiten sieht, beobachtet Flüssigkeitselemente, die von unterschiedlichen Ursprungsorten $\dot{\mathbf{x}}$ kommen. In der Eulerschen Beschreibung entfernt sich also der Ursprungsort $\dot{\mathbf{x}}(t)$ (\mathbf{x}) des gerade betrachteten Volumenelementes, während in der Lagrangeschen Beschreibung sich das betrachtete Volumenelement vom Ursprungsort, d.h. vom Betrachter, entfernt.

Um die Variation einer Bewegung zwischen zwei Punkten zu beschreiben, scheint mit- hin die Lagrangesche Darstellung der Bewegung intuitiver zu sein als die Eulersche. Es zeigt sich auch, daß Erhaltungssätze, die für die Bewegung gelten sollen, eine einfache Form annehmen. Eine Schwierigkeit der Lagrangeschen Darstellung besteht darin, daß sie zur Beschreibung der Verformungen der Volumenelemente zeitabhängige Koordina- tensysteme benötigt. Ist diese Schwierigkeit allerdings bewältigt, so vereinfachen sich viele Schritte, die in der Eulerschen Beschreibung umständlich sind.

Um den Übergang zwischen Lagrangescher und Eulerscher Darstellung zu vereinfachen, betrachten wir die Bewegung eines Flüssigkeitselementes als eine zeitabhängige Trans- formation des Raumes auf sich selbst:

$$\mathbf{x}(t) : \dot{\mathbf{x}} \longrightarrow \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(t=0)(\dot{\mathbf{x}}) . \quad (3.3)$$

Entsprechend erklären wir die Umkehrtransformation

$$\dot{\mathbf{x}}(t) : \mathbf{x} \longrightarrow \dot{\mathbf{x}}(t)(\mathbf{x}) , \quad (3.4)$$

und erhalten damit die Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t) \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) = (\dot{\mathbf{x}}(t) \circ \mathbf{x}(t))(\dot{\mathbf{x}}) . \quad (3.5)$$

Dabei haben wir das Kompositionssymbol \circ verwendet, um die unabhängigen Variablen und den Transformationscharakter der Bewegung zu betonen. Die Benutzung von zeit- abhängigen Transformationen hat den Vorteil, daß wir auf einfache und wohldefinierte Weise zwischen der Lagrangeschen und Eulerschen Beschreibung wechseln können. In dem oben erläuterten Sinne liegt die Lagrangesche Beschreibung der Bewegung vor, wenn $\dot{\mathbf{x}}$ und t die unabhängigen Variablen sind, und die Eulersche Beschreibung, wenn \mathbf{x} und t das unabhängige Variablenpaar sind. So ist die zeitliche Änderung der Transformation

$$\dot{\mathbf{x}}(t)(\dot{\mathbf{x}}) := \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t}(\dot{\mathbf{x}}) \quad (3.6)$$

auf einfache Weise mit der Eulerschen Geschwindigkeit \mathbf{v} eines Flüssigkeitsvolumens am Ort \mathbf{x} verbunden:

$$\mathbf{v}(t)(\mathbf{x}) := \dot{\mathbf{x}}(t) \circ \dot{\mathbf{x}}(t)(\mathbf{x}) . \quad (3.7)$$

In Anhang (C) beschreiben wir die zeitabhängigen Transformationen genauer, während wir hier auf die dort abgeleiteten Ergebnisse zurückgreifen.

Die Transformation $\mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}})$ induziert eine Metrik, die in dem zeitabhängigen begleitenden Dreibein

$$\mathbf{x}_\lambda(t)(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}^\lambda} \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) \quad (3.8)$$

und dem metrischen Tensor $g_{\mu\lambda}(t)(\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}_\mu(t)(\dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{x}_\lambda(t)(\dot{\mathbf{x}})$ ihren Ausdruck findet. Für das Volumenelement gilt dann

$$\sqrt{g(t)(\dot{\mathbf{x}})} d^3\dot{\mathbf{x}} = d^3\mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) \quad , \quad (3.9)$$

wobei $g(t)(\dot{\mathbf{x}})$ die Determinante des metrischen Tensors ist.

In Anhang (C) wird gezeigt, daß die Erhaltungssätze für die Masse und den magnetischen Fluß in dieser Metrik eine besonders einfache Form annehmen und sich in der Zeitunabhängigkeit der Größen $\sqrt{g}\rho$ und $\sqrt{g}B^\mu$ ausdrücken,

$$\dot{\rho}(\dot{\mathbf{x}}) = \sqrt{g(t)(\dot{\mathbf{x}})} \rho(t) \circ \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) \quad (3.10)$$

und

$$\dot{B}^\mu(\dot{\mathbf{x}}) = \sqrt{g(t)(\dot{\mathbf{x}})} B^\mu(t) \circ \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) = (B(t) \circ \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}})) \cdot \nabla(\dot{\mathbf{x}}^\mu(t) \circ \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}})) \quad . \quad (3.11)$$

Die physikalische Deutung von Gleichung (3.10), d.h. die Erhaltung der Masse, ist schnell ersichtlich, wenn sie mit dem Volumenelement $d^3\dot{\mathbf{x}}$ multipliziert und (3.9) beachtet wird. (3.11) kann in ähnlicher Weise mit Hilfe des zeitabhängigen Dreibein (3.8) und des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ interpretiert werden.

Wir beschreiben die Variation der Flüssigkeitsbewegung durch die einparametrische Transformationsschar

$$\mathbf{x}(t; \epsilon)(\dot{\mathbf{x}}) := \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) + \epsilon \mathbf{w}(t)(\dot{\mathbf{x}}) \quad , \quad (3.12)$$

wobei ϵ der Variationsparameter und \mathbf{w} die Lagrangesche Versetzung ist. Für $\epsilon = 0$ erhalten wir eine ungestörte Bahnbewegung. Der Variationsparameter geht in natürlicher Weise in die zeitabhängige Metrik über, d.h. wir haben $\mathbf{x}_\lambda(t; \epsilon)(\dot{\mathbf{x}})$ und $g_{\mu\nu}(t; \epsilon)(\dot{\mathbf{x}})$ zu betrachten.

Um die Notation zu vereinfachen werden wir im weiteren die Transformationen ohne die unabhängigen Variablen angeben und, wie in (3.7), bedeutet der Punkt die Ableitung nach der Zeit t für die damit bezeichnete Transformation. Des weiteren nehmen wir an, daß Skalar- und Vektorfelder als Funktionen der Eulerschen Koordinaten, d.h. von \mathbf{x}

und t , gegeben sind, z.B. $B = B(t)(x)$. Damit Unklarheiten bezüglich der momentanen Darstellung vermieden werden, geben wir zusammengesetzte Transformationen mit dem Kompositionssymbol an.

Nach diesen Vorbemerkungen schreiben wir den Integranden in der Lagrangefunktion in der zeitabhängigen Metrik als

$$\left(\frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2\mu_0}B^2 - \rho U\right) \circ x = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{2} \dot{\rho} \dot{x}^2 - \frac{1}{2\mu_0 \sqrt{g}} g_{\mu\nu} \dot{B}^\mu \dot{B}^\nu - \dot{\rho} U \left(\frac{\sqrt{g}}{\dot{\rho}}, (g_{\mu\nu} \dot{B}^\mu \dot{B}^\nu)^{1/2} \right) \right). \quad (3.13)$$

Der Integrand kann also in der Form $L = L(\dot{x}, x_\mu, \dot{x}, t)$ geschrieben werden. Da die Volumenintegration nun über das Gebiet $G_0 = G(t_1)$ geht, können wir im Wirkungsintegral Zeit- und Volumenintegration vertauschen:

$$I = \int_{G_0} \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x_\mu, \dot{x}, t) dt d^3 \dot{x} \quad (3.14)$$

Die explizite Zeitabhängigkeit der Lagrangedichte entsteht durch eine mögliche Zeitabhängigkeit von $\dot{\rho}$ und \dot{B}^μ . Sind diese zeitunabhängig, geht die Zeit nur noch über die Ortsabhängigkeit in L ein.

Wir führen nun die Variation des Wirkungsintegrals durch und verlangen als Extremalbedingung ihr Verschwinden, d.h.

$$0 = \frac{dI}{d\epsilon} = - \int_{G_0} \int_{t_1}^{t_2} \{w \circ x\} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{,\mu} \right\} dt d^3 \dot{x} + \int_{G_0} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\{w \circ x\} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) + (\{w \circ x\} \cdot \frac{\partial L}{\partial x_\mu})_{,\mu} \right\} dt d^3 \dot{x} \quad (3.15)$$

wobei wir eine partielle Integration vorgenommen haben. Wir nehmen als Randbedingung für die Versetzung w an, daß sie an den Integrationsgrenzen ($t = t_1, t_2, \dot{x} \in \partial G_0$) verschwindet. Das zweite Integral kann dann partiell integriert werden und verschwindet auf Grund dieser Randbedingungen. Damit die Variation von I verschwindet, muß das erste Integral für beliebige w , die die erwähnten Randbedingungen erfüllen, Null ergeben. Dies kann nur der Fall sein, wenn

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{,\mu} = 0 \quad (3.16)$$

gilt, d.h. die sogenannte Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt ist. Dies ist eine Differentialgleichung, die die funktionale Abhängigkeit der Transformation von der Zeit t festlegt und damit die Flüssigkeitsbewegung bestimmt.

Mit Hilfe der Formeln aus Anhang (C) und unter Berücksichtigung der partiellen Ableitungen von A erhalten wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{\rho} \dot{x} \quad (3.17)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_\mu} = \left\{ \sqrt{g} (g^{\mu\beta} p_\perp \circ \mathbf{x} + \frac{g_{rx} g^{\mu\beta}}{2\mu_0 \sqrt{g}} \dot{\mathbf{B}}^x \dot{\mathbf{B}}^\beta + \frac{\sqrt{g} (p_\parallel - p_\perp) \circ \mathbf{x}}{\dot{\mathbf{B}}^x \dot{\mathbf{B}}^\beta g_{rx}} \dot{\mathbf{B}}^\mu \dot{\mathbf{B}}^\beta - \frac{\dot{\mathbf{B}}^\mu \dot{\mathbf{B}}^\beta}{\mu_0 \sqrt{g}} \right\} \mathbf{x}_\beta \quad (3.18)$$

Setzen wir dies in (3.16) ein, dann erhalten wir die Bewegungsgleichung in ihrer Lagrangeschen Form, die mit der von Newcomb [29] angegebenen übereinstimmt.

Unter Benutzung von (C.24), (C.25) und (C.36) und der Vektoridentität

$$\nabla \frac{B^2}{2} - \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} \quad (3.19)$$

erhalten wir

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_\mu} \right)_{|\mu} \circ \dot{\mathbf{x}} = \{ \sqrt{g} \circ \dot{\mathbf{x}} \} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{p} \right), \quad \mathbf{p} = p_\perp \vec{\mathbf{1}} + \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2} \mathbf{B} \mathbf{B} \quad (3.20)$$

Setzen wir dies in Gleichung (3.16) ein, so ergibt sich die Eulersche Darstellung der Bewegungsgleichung (vgl. (1.72)) als

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{p} \quad (3.21)$$

3.3 Die Energieerhaltung

Das von uns betrachtete Flüssigkeitsmodell ist auf Grund der beiden Erhaltungssätze für die Massendichte und den magnetischen Fluß sowie der Potentialeigenschaft der Arbeit ein konservatives Modell für die Strömung. Im vollen Sinne konservativ ist es allerdings nur, wenn ρ und $\dot{\mathbf{B}}^\mu$ zeitunabhängig sind. Wie bereits erwähnt, hat die Lagrangedichte dann keine explizite Zeitabhängigkeit, d.h. $L = L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_\mu, \dot{\mathbf{x}})$, und das betrachtete Gesamtsystem ist energieerhaltend. Wir zeigen dies, indem wir die zeitliche Änderung des Integrales I,

$$\frac{dI}{dt} = K(t_2) - K(t_1) - E(t_2) + E(t_1) \quad (3.22)$$

betrachten, wobei

$$K(t) = \int_{G_0} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}}^2 d^3 \dot{\mathbf{x}} \quad (3.23)$$

und

$$E(t) = \int_{G_0} \sqrt{g} \left\{ \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \rho A \right) \circ \mathbf{x} \right\} d^3 \dot{\mathbf{x}} \quad (3.24)$$

die kinetische bzw. die potentielle Energie sind. Eine andere Form erhalten wir, wenn wir bei der Variation von I (3.15) für die Versetzung w die Flüssigkeitsbewegung v , die die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt, einsetzen. Da die Flüssigkeitsbewegung nicht den Randbedingungen an die Versetzung genügt, ist das zweite Integral in (3.15) nun von Null verschieden und es gilt

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \left(\frac{dI}{d\epsilon}\right)_{w=v} = \int_{G_0} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{x} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \left(\dot{x} \cdot \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{|\mu} \right\} dt d^3 \dot{x} \quad (3.25)$$

Liegt sowohl das Magnetfeld als auch das Geschwindigkeitsfeld in ∂G , strömt also kein Plasma oder magnetischer Fluß durch ∂G , so verschwindet der zweite Term durch partielle Integration wegen

$$\left(\dot{x} \cdot \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \right)_{|\mu} = \sqrt{g} \nabla \cdot \left\{ \left[(p_\perp + \frac{1}{2\mu_0} B^2) v - \frac{1}{\mu_0} \left(1 - \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2} \right) (B \cdot v) B \right] \circ x \right\} \quad (3.26)$$

und wir erhalten

$$\frac{dI}{dt} = \int_{G_0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{x}^2) dt d^3 \dot{x} = 2(K(t_2) - K(t_1)) \quad (3.27)$$

Zusammen mit (3.22) ergibt dies die Energieerhaltung

$$K(t_2) + E(t_2) = K(t_1) + E(t_1) \quad (3.28)$$

3.4 Verbindung zum Hamilton-Formalismus

Die Hamiltonfunktion H ist definiert als die Legendretransformierte der Lagrangefunktion L :

$$H(\pi, x_\mu, \dot{x}) := \dot{x}\pi - L(\dot{x}(\pi, x_\mu, \dot{x}), x_\mu, \dot{x}) = \frac{\pi^2}{2\rho} + \sqrt{g} \left\{ \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \rho A \right) \circ x \right\} \quad (3.29)$$

Dabei ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \pi = \dot{\rho} \dot{x} \quad (3.30)$$

der zu \dot{x} adjungierte Impuls. Nun ergibt die Variation des Integrals I

$$\frac{dI}{d\epsilon} = - \int_{G_0} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon} \cdot \left[\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial \pi} \right] - \frac{\partial \dot{x}}{\partial \epsilon} \cdot \pi - \frac{\partial x_\mu}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_\mu} \right\} dt d^3 \dot{x} \quad (3.31)$$

Durch partielle Integration der letzten beiden Terme und mit den gleichen Annahmen für $w \circ x$ auf ∂G_0 und für $t = t_1, t_2$, erhalten wir

$$\frac{dI}{d\epsilon} = - \int_{G_0} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon} \cdot \left[\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial \pi} \right] - \{w \circ x\} \cdot \left[\frac{\partial \pi}{\partial t} - \left(\frac{\partial H}{\partial x_\mu} \right)_{|\mu} \right] \right\} dt d^3 \dot{x} \quad (3.32)$$

Für beliebiges w erhalten wir als Bedingung für das Verschwinden der Variation die kanonischen Gleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \pi} \quad \text{und} \quad \dot{\pi} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_\mu} \right)_{|\mu} \quad (3.33)$$

Die erste kanonische Gleichung ist dabei identisch mit der Einführung des adjungierten Impulses

$$\frac{\partial H}{\partial \pi} = \pi \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \pi} + \dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \pi} \quad (3.34)$$

und die zweite kanonische Gleichung ergibt die Bewegungsgleichung.

3.5 Die Stabilitätsgleichung

Um mit dem Kompositionssymbol die Darstellung im weiteren nicht zu belasten, kennzeichnen wir Transformationen bzw. Skalar- und Vektorfelder, die mit einer der beiden Ortstransformationen x bzw. \dot{x} verknüpft sind durch $\hat{\cdot}$. Dies ist eindeutig, da höchstens eine der beiden auftritt und aus den Definitionen der entsprechenden Felder auch ersichtlich ist, welche gemeint ist, z.B.

$$\hat{w} = w \circ x \quad (3.35)$$

3.5.1 Die Stabilitätsgleichung und die zweite Variation

Die erste Variation des Wirkungsintegrals I hat mit der Euler-Lagrange-Gleichung für $x(t)$ (\dot{x}) eine Extremalbedingung für die Bewegung geliefert. Analog zur Diskussion relativer Extrema in der Differentialrechnung entscheidet das Vorzeichen der zweiten Ableitung nach ϵ , d.h. der zweiten Variation, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt. Für die Bildung der zweiten Variation nutzen wir, daß aus der Struktur von L

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\lambda} \right) = 0 \quad (3.36)$$

folgt. Benutzen wir noch, daß $\partial^2 L / (\partial \dot{\mathbf{x}} \partial \dot{\mathbf{x}}) = \vec{\rho} \vec{1}$ ist, so erhalten wir

$$\frac{d^2 I}{d\epsilon^2} = \int_{G_0} \int_{t_1}^{t_2} [\dot{\rho} |\dot{\mathbf{w}}|^2 + \hat{\mathbf{w}}_{|\lambda} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \cdot \hat{\mathbf{w}}_{|\mu}] dt d^3 \dot{\mathbf{x}} \quad (3.37)$$

Ist $\mathbf{x}(t)$ ($\dot{\mathbf{x}}$) ein Extremum von I , so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für ein Minimum, daß die zweite Variation positiv für alle zugelassenen Versetzungen \mathbf{w} ist, d.h. $d^2 I / d\epsilon^2 > 0$. Wir weisen daraufhin, daß die zugelassenen Versetzungen dieselben sind wie bei der ersten Variation, d.h. dieselben Randbedingungen erfüllen müssen.

Bevor wir die Minimalbedingung weiter diskutieren, betrachten wir den zweiten Summanden im Integranden von (3.37). Für jedes μ und λ ist $\partial^2 L / (\partial x_\lambda \partial x_\mu)$ ein Tensor zweiter Stufe. Seine explizite Darstellung erhalten wir, indem wir die entsprechenden Ableitungen bilden. Starten wir mit (3.18) und beachten wir

$$\frac{\partial p_{\perp, \parallel}}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial p_{\perp, \parallel}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial p_{\perp, \parallel}}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial x_\lambda}, \quad (3.38)$$

so erhalten wir mit den Formeln aus Anhang (C), sowie mit (3.10) und (3.11) die Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} = & - \sqrt{g} \left\{ \left(\frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} [1 + 2(\hat{\beta}_\perp + \hat{\alpha}_\perp)] - \hat{p}_\perp \right) x^\lambda x^\mu + \left(\hat{p}_\perp + \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right) x^\mu x^\lambda - \right. \\ & - \frac{1 + \hat{\alpha}_\perp}{\mu_0} (x^\lambda \hat{B} \hat{B}^\mu + \hat{B}^\lambda \hat{B} x^\mu) + \frac{1 - \hat{\Delta}}{\mu_0} \hat{B}^\lambda \hat{B}^\mu x^\rho x_\rho - \\ & \left. - (\hat{\alpha}_\parallel - \hat{\alpha}_\perp - 2\hat{\Delta}) \frac{\hat{B}^\mu \hat{B}^\lambda}{\mu_0 \hat{B}^2} \hat{B} \hat{B} + \frac{\hat{\alpha}_\parallel + \hat{\beta}_\parallel - \hat{\beta}_\perp - \hat{\Delta}}{\mu_0} x^\lambda \mathbf{B} \hat{B}^\mu \right\}. \quad (3.39) \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Definitionen in (1.59) für die partiellen Ableitungen der Druckkomponenten benutzt. Die Potentialeigenschaft der Arbeit A (1.58) führt zum Verschwinden des letzten Terms in (3.39). Mit dem Tensor $\partial^2 L / (\partial x_\lambda \partial x_\mu)$ läßt sich ein Tensor \mathbf{Q} vierter Stufe bilden

$$\sqrt{g} \mathbf{Q} = -x_\lambda \frac{\partial^2 L}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} x_\mu \iff \sqrt{g} Q^{\alpha\beta\lambda\mu} = -x^\alpha \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \cdot x^\beta. \quad (3.40)$$

Dieser wurde von Hain, Lüst und Schlüter [18] für die Stabilitätsbetrachtung von statischen Plasmen mit isotropem Druck eingeführt und wurde hier für anisotropen Druck mit Massenströmungen verallgemeinert. Es mag verwundern, daß in die Form des Tensors \mathbf{Q} bzw. in $\partial^2 L / (\partial x_\lambda \partial x_\mu)$ die Flüssigkeitgeschwindigkeit scheinbar nicht eingeht, d.h. für statische und stationäre Plasmen gleich aussieht. Der Unterschied ist jedoch, daß im stationären Fall die Flüssigkeitsbewegung über die von ihr induzierte Metrik

	isotherm	isentrop	CGL
α_{\parallel}	0	0	$-\gamma_{\parallel}\mu_0 \frac{p_{\parallel}}{B^2}$
α_{\perp}	0	0	$\gamma_{\perp}\mu_0 \frac{p_{\perp}}{B^2}$
β_{\parallel}	$\mu_0 \frac{p}{B^2}$	$\mu_0 \frac{5}{3} \frac{p}{B^2}$	$(\gamma_{\parallel} + 1)\mu_0 \frac{p_{\parallel}}{B^2}$
β_{\perp}	$\mu_0 \frac{p}{B^2}$	$\mu_0 \frac{5}{3} \frac{p}{B^2}$	$\mu_0 \frac{p_{\perp}}{B^2}$

Tabelle 3.1: Partielle Ableitungen der Druckkomponenten in verschiedenen Modellen.

in die beiden Tensoren eingeht. Es darf des weiteren nicht vergessen werden, daß die Flüssigkeitsbewegung auch über die Euler-Lagrange-Gleichung, d.h. die Kräftebilanz, Auswirkungen auf die magnetische Induktion und den Drucktensor hat.

Die Darstellung (3.39) für den Tensor zweiter Stufe hat den Vorteil, daß wir eine geschlossene Darstellung des Tensors haben, die die Plasmamodelle mit isotropem und anisotropem Druck vereint. In Tabelle 3.5.1 sind für Plasmen mit isotropem Druck die partiellen Ableitungen aus der isotropen bzw. der isothermen Zustandsgleichung und für Plasmen mit anisotropem Druck die des modifizierten CGL-Modells zusammengefaßt. Setzen wir diese ein, so erhalten wir den Tensor des jeweiligen Modells. Im Gegensatz dazu wäre es nicht möglich, aus einer Herleitung des Tensors unter alleiniger Benützung von Zustandsgleichungen eines Modells, z.B. des CGL-Modells, auf das Aussehen oder Verhalten des Tensors in anderen Modellen zu schließen.

Betrachten wir nun wieder die Bedingung für ein Minimum des Wirkungsintegrals, d.h. $d^2I/d\epsilon^2 > 0$. Setzen wir die Darstellung (3.39) für den Tensor zweiter Stufe in (3.37) ein, so sehen wir, daß der daraus entstehende Term symmetrisch in den Indizes λ und μ ist. Die Frage, ob es ein \hat{w} gibt, für das $d^2I/d\epsilon^2 < 0$ gilt, kann als ein Minimierungsproblem für $d^2I/d\epsilon^2$ bezüglich \hat{w} betrachtet werden. Auf dieses Problem können wir erneut die

Variationsrechnung anwenden, in dem wir $d^2I/d\epsilon^2$ als Wirkungsintegral

$$\tilde{I} := \int_{G_0} \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{\rho} |\dot{\hat{w}}|^2 + \hat{w}_{|\lambda} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \cdot \hat{w}_{|\mu} \right] dt d^3 \hat{x} \quad (3.41)$$

mit der Lagrangedichte

$$\tilde{L} = \tilde{L}(\dot{\hat{w}}, \{\hat{w}_{|\nu}\}_{\nu=1,2,3}, t) = \dot{\rho} |\dot{\hat{w}}|^2 + \hat{w}_{|\lambda} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \cdot \hat{w}_{|\mu} \quad (3.42)$$

interpretieren. Die Lagrangedichte \tilde{L} hängt auf Grund der Bewegung explizit von der Zeit ab, d.h. die zu \hat{w} gehörende Energie ist im Gegensatz zu der zur Bewegung $\mathbf{x}(t)$ ($\hat{\mathbf{x}}$) gehörenden keine Erhaltungsgröße mehr. Bilden wir die Variation von \tilde{I} bezüglich \hat{w} , d.h. setzen wir $\hat{w} = \hat{w}(t, \epsilon)$ ($\hat{\mathbf{x}}$), so erhalten wir in analoger Weise wie bei der Flüssigkeitsbewegung eine Euler-Lagrange-Gleichung für \hat{w} :

$$\dot{\rho} \ddot{\hat{w}} + \left(\hat{w}_{|\lambda} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \right)_{|\mu} = 0 \quad (3.43)$$

Rücken wir von den Randbedingungen an \hat{w} ab, d.h. nehmen wir $\hat{w}(t_1)$ ($\hat{\mathbf{x}}$) $\neq 0$ und legen wir $\hat{w}(t_2)$ ($\hat{\mathbf{x}}$) nicht fest, dann beschreibt (3.43) die Zeitentwicklung einer Versetzung \hat{w} , die auf dem Hintergrund einer stationären Bewegung $\mathbf{x}(t)$ ($\hat{\mathbf{x}}$) stattfindet, diese Bewegung aber nicht beeinflusst. Dies ist aber genau das, was eine lineare Stabilitätsgleichung leistet. Wir haben also mit (3.43) die lineare Stabilitätsgleichung in ihrer Lagrangeschen Darstellung erhalten, die für isotropen Druck im statischen Fall mit der in [18] gegebenen Form übereinstimmt.

3.5.2 Die Stabilitätsgleichung und die Bewegungsgleichung

Die Herleitung der Stabilitätsgleichung aus der zweiten Variation des Wirkungsintegrals I unterliegt der Einschränkung, daß für die Lagrangedichte L die Arbeit A als Funktion von ρ und B erklärt sein muß. Stabilitätsbetrachtungen, die davon ausgehen, daß sich die Bewegung des Plasmas und die Störung auf verschiedenen Zeitskalen entwickeln, können über den Lagrangeformalismus nicht erreicht werden. Vielmehr müssen in die Zeitentwicklungsgleichungen des Plasmas wie sie z.B. durch (1.71) - (1.74) gegeben sind, Lagrangesche Störungen, die mit der Lagrangeschen Versetzung \hat{w} verbunden sind, eingeführt und das Gleichungssystem linearisiert werden.

Diesen Weg müssen wir nicht gehen, da wir die Bewegungsgleichung in ihrer Lagrangeschen Darstellung besitzen. Betrachten wir Störungen der Plasmabewegung, die den magnetischen Fluß und die Teilchenzahl erhalten, so erlangen wir die Stabilitätsgleichung

direkt aus der Variation der Bahnbewegungen $\mathbf{x}(t; \epsilon) (\dot{\mathbf{x}})$, wie sie in der Bewegungsgleichung vorkommt:

$$0 = \frac{d}{d\epsilon} [(\dot{\rho}\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{T}_{|\mu}] = \dot{\rho}\ddot{\mathbf{w}} + (\hat{\mathbf{w}}_{|\lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_\lambda})_{|\mu} \quad (3.44)$$

Dabei sei \mathbf{T} durch

$$\mathbf{T} := \left\{ \sqrt{g}(g^{\mu\beta}\hat{p}_\perp + \frac{g_{rx}g^{\mu\beta}}{2\mu_0\sqrt{g}}\dot{B}^x\dot{B}^r + \sqrt{g}(\hat{p}_\parallel - \hat{p}_\perp)\dot{B}^x\dot{B}^r g_{rx}\dot{B}^\mu\dot{B}^\beta - \frac{\dot{B}^\mu\dot{B}^\beta}{\mu_0\sqrt{g}} \right\} \mathbf{x}_\beta \quad (3.45)$$

gegeben. Formal ist die Definition von \mathbf{T} mit dem Ausdruck für $\partial L/\partial \mathbf{x}_\mu$ identisch. Wir haben \mathbf{T} hier eingeführt, um zum Ausdruck zu bringen, daß die Lagrangesche Darstellung der Bewegungsgleichung nicht an die Existenz einer Lagrangedichte gebunden ist. Die einzige Annahme, die zur Ausführung der partiellen Ableitung $\partial \mathbf{T}/\partial \mathbf{x}_\lambda$ notwendig ist, ist, daß die Druckkomponenten nur über die Massendichte und die Magnetfeldstärke vom Ort abhängen mögen. Die Stabilitätsgleichung (3.44) ist formal identisch mit der aus der zweiten Variation (3.43), unterscheidet sich allerdings in ihrer Herleitung dadurch, daß die partiellen Ableitungen $\alpha_{\parallel,\perp}$ und $\beta_{\parallel,\perp}$ der Druckkomponenten von der Zeitskala abhängen können, auf der sich die Störung entwickelt. Die als Integrabilitätsbedingung (1.75) an die Arbeit $A(\rho, B)$ eingeführte Forderung an die partiellen Ableitungen der Druckkomponenten muß auch hier gelten. Dies ist dadurch begründet, daß lokal auch die durch die Versetzung am Plasma geleistete Arbeit \tilde{A} ein totales Differential von ρ und B sein sollte.

Ein Beispiel für diese Art der Stabilitätsbetrachtung findet sich bei Hain, Lüst und Schlüter [18]. Unter der Voraussetzung, daß die physikalischen Vorgänge, die die Flüssigkeitsbewegung bestimmen, auf einer Zeitskala stattfinden, die groß gegenüber der Stoßzeit der Teilchen ist, kann für das stationäre Gleichgewicht ein isotroper Druck angenommen werden. Betrachten wir Störungen, die auf einer Zeitskala anwachsen, die klein gegenüber der Stoßzeit ist, so wird sich von einem isotropen Druck ausgehend eine Druckanisotropie entwickeln. Dies bedeutet, daß die durch die Variation der Bahnbewegung entstandenen partiellen Ableitungen $\alpha_{\parallel,\perp}$ und $\beta_{\parallel,\perp}$ in der Stabilitätsgleichung die eines stoßfreien Plasmas sein werden, wie es das CGL-Modell beschreibt:

$$\alpha_\parallel = -2\mu_0 \frac{P_\parallel}{B^2}, \quad \alpha_\perp = \mu_0 \frac{P_\perp}{B^2}, \quad \beta_\parallel = 3\mu_0 \frac{P_\parallel}{B^2}, \quad \beta_\perp = \mu_0 \frac{P_\perp}{B^2} \quad (3.46)$$

Da sich die Versetzung auf dem Hintergrund eines isotropen Drucks entwickelt, ist in den partiellen Ableitungen ($p_\parallel = p_\perp = p$) zu setzen, d.h.

$$\alpha_\parallel = -2\mu_0 \frac{P}{B^2}, \quad \alpha_\perp = \mu_0 \frac{P}{B^2}, \quad \beta_\parallel = 3\mu_0 \frac{P}{B^2}, \quad \beta_\perp = \mu_0 \frac{P}{B^2} \quad (3.47)$$

Wie sich leicht überprüfen läßt, erfüllen diese die Integrierbarkeitsbedingung (1.75). Dieses Modell ist durch den Lagrangeformalismus nicht beschreibbar, da sich keine Funktion $A(\rho, B)$ angeben läßt, die sowohl für die Flüssigkeitsbewegung als auch für die Störung gilt. Da die Stabilitätsgleichungen aus dem Lagrangeformalismus und der Bahnvariation in der Bewegungsgleichung vom Aussehen identisch sind, interpretieren wir im weiteren die partiellen Ableitungen so, daß sie durch die Zeitskala bestimmt seien, auf der sich die Störung entwickelt. Wir schreiben die Stabilitätsgleichung in ihrer Lagrangeschen Darstellung als

$$\rho \ddot{\hat{w}} + \mathcal{F}_i(\hat{w}) = 0 \quad , \quad (3.48)$$

wobei $\mathcal{F}_i(\hat{w})$ der in (3.44) auf \hat{w} wirkende Operator sei, dessen explizite Darstellung wir mit der rechten Seite von (3.39) erhalten,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i(\hat{w}) = & - \left(\sqrt{g} \hat{w}_{|\lambda} \cdot \left\{ \left(\frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} [1 + 2(\hat{\beta}_\perp + \hat{\alpha}_\perp)] - \hat{p}_\perp \right) x^\lambda x^\mu + \left(\hat{p}_\perp + \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right) x^\mu x^\lambda - \right. \right. \\ & - \frac{1 + \hat{\alpha}_\perp}{\mu_0} (x^\lambda \hat{B} \hat{B}^\mu + \hat{B}^\lambda \hat{B} x^\mu) + \frac{1 - \hat{\Delta}}{\mu_0} \hat{B}^\lambda \hat{B}^\mu x^\rho x_\rho - \\ & \left. \left. - (\hat{\alpha}_\parallel - \hat{\alpha}_\perp - 2\hat{\Delta}) \frac{\hat{B}^\mu \hat{B}^\lambda}{\mu_0 \hat{B}^2} \hat{B} \hat{B} + \frac{\hat{\alpha}_\parallel + \hat{\beta}_\parallel - \hat{\beta}_\perp - \hat{\Delta}}{\mu_0} x^\lambda \hat{B} \hat{B}^\mu \right\} \right)_{|\mu} . \quad (3.49) \end{aligned}$$

3.6 Die Eulersche Darstellung der Stabilitätsgleichung

Die Eulersche Darstellung der Stabilitätsgleichung erhalten wir in zwei Schritten. Zuerst betrachten wir die zweifache Zeitableitung, und danach den Differentialoperator \mathcal{F}_i .

Um die Zeitableitungen ins Eulersche Bild zu übersetzen, verwenden wir der Deutlichkeit halber wieder das Kompositionssymbol. Für die erste Ableitung erhalten wir dann

$$\dot{\hat{w}} \circ \dot{x} = (w \circ x)' \circ \dot{x} = \dot{w} + v \cdot \nabla w \quad , \quad (3.50)$$

wobei wir benutzt haben, daß $x \circ \dot{x}$ die Einheitstransformation ist. Bei der Bildung der zweiten Zeitableitung haben wir nicht nur die Zeitabhängigkeit von v , sondern die von $(v \cdot \nabla) \circ x$ zu berücksichtigen,

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{w}} \circ \dot{x} &= (\dot{w} \circ x + (v \cdot \nabla w) \circ x)' \circ \dot{x} = \\ &= \ddot{w} + 2v \cdot \nabla \dot{w} + v \cdot \nabla (v \cdot \nabla w) + ((v^\mu \circ x)' \partial_\mu (w \circ x)) \circ \dot{x} . \quad (3.51) \end{aligned}$$

Da die Metrik von der Flüssigkeitsbewegung induziert ist, erhalten wir mit (C.63) die Formel

$$\ddot{\mathbf{w}} \circ \dot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{w}} + 2\mathbf{v} \cdot \nabla \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) + \dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{w} \quad , \quad (3.52)$$

wobei der letzte Term verschwindet, wenn wir annehmen, daß die Flüssigkeitsbewegung stationär ist.

Die Eulersche Form $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{w})$ des Differentialoperators $\mathcal{F}_i(\hat{\mathbf{w}})$ kann mit den Formeln des Nablakalküls in Anhang (C) und (3.39) aus (3.49) gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{w}) = & -\nabla \left[\left(\frac{B^2}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} + \beta_{\perp} + \alpha_{\perp} \right) - p_{\perp} \right) \nabla \cdot \mathbf{w} \right] - (\nabla \mathbf{w}) \cdot \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p_{\perp} \right) - \\ & - \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p_{\perp} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) + \left[\mathbf{B} \cdot \nabla \left(\mathbf{B} \frac{1 + \alpha_{\perp}}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{w} \right) + \nabla \left(\frac{1 + \alpha_{\perp}}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{w}) \right) \right] - \\ & - \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{1 - \Delta}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{w} \right) + \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\mathbf{B} \frac{\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp} - 2\Delta}{\mu_0 B^2} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{w}) \right) \quad . \quad (3.53) \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Kräftebilanz kann der Operator nach längerer Rechnung in die häufiger benutzte Gestalt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{w}) = & -\nabla \cdot (\rho \mathbf{w} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})) - \frac{1}{\mu_0} \left((\nabla \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{Q} \right) - \nabla \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{p}) - \\ & - \nabla \cdot \left\{ \frac{B^2}{\mu_0} \left[(\beta_{\perp} + \alpha_{\perp}) \nabla \cdot \mathbf{w} - \alpha_{\perp} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{w}) \right] \mathbf{g} - \frac{B^2 \Delta}{\mu_0} \left[(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{w}) \mathbf{b} + \mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{w}) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{B^2}{\mu_0} \left[(\Delta - \alpha_{\perp}) \nabla \cdot \mathbf{w} - (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp} - 2\Delta) \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{w}) \right] \mathbf{b} \mathbf{b} \right\} \quad (3.54) \end{aligned}$$

umgeschrieben werden. Dabei ist \mathbf{b} der Einheitsvektor in Richtung der magnetischen Induktion \mathbf{B} und

$$\mathbf{Q} := \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \quad (3.55)$$

ist die Störung der magnetischen Induktion \mathbf{B} (nicht zu verwechseln mit dem zuvor betrachteten Tensor 4. Stufe). Nehmen wir an, daß die Flüssigkeitsbewegung stationär ist, erhalten wir für die Stabilitätsgleichung

$$\rho \ddot{\mathbf{w}} + 2\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \dot{\mathbf{w}} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) + \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{w}) = 0 \quad . \quad (3.56)$$

Die am häufigsten benutzte Form der Stabilitätsgleichung erhält man, wenn die Terme, die nur Ortsableitungen enthalten zu einem Differentialoperator $\mathbf{F}(\mathbf{w})$ zusammengefaßt werden:

$$\rho \ddot{\mathbf{w}} + 2\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \dot{\mathbf{w}} = -\mathbf{F}(\mathbf{w}) := -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) - \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{w}) \quad . \quad (3.57)$$

Der Operator \mathbf{F} ist in der Eulerschen Darstellung nicht mehr zeitabhängig und eignet sich daher, um die Frage nach der Stabilität in eine etwas einfachere Form zu bringen.

3.7 Ein notwendiges Stabilitätskriterium

Da der Operator F in (3.57) von der Zeit unabhängig ist, können wir nach Lösungen der Stabilitätsgleichung fragen, deren Zeitverhalten durch $e^{i\omega t}$ wiedergegeben wird. Damit erhalten wir eine quadratische Eigenwertgleichung [30]

$$\omega^2 \rho w - 2i\omega \rho v \cdot \nabla w - F(w) = 0 \quad (3.58)$$

Durch Multiplikation mit dem konjugiert komplexen w^* und Integration über das Plasmagebiet erhalten wir als notwendige Stabilitätsbedingung

$$\delta W := \int_G w^* \cdot F(w) d^3x \geq 0 \quad (3.59)$$

Sie kann ausgehend von Gleichung (3.53) in einer symmetrischen Form geschrieben werden,

$$\begin{aligned} \delta W = \int_G d^3x \left\{ -\rho |v \cdot \nabla w|^2 + (1 - \Delta) \frac{B^2}{\mu_0} |b \cdot \nabla w|^2 - (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp} - 2\Delta) \frac{B^2}{\mu_0} |bb : \nabla w|^2 + \right. \\ \left. + \frac{B^2}{\alpha_1 \mu_0} |\alpha_1 \nabla \cdot w - \alpha_2 bb : \nabla w + \frac{\mu_0}{B^2} w \cdot \nabla P^*|^2 - \right. \\ \left. - \frac{B^2}{\alpha_1 \mu_0} |\alpha_2 bb : \nabla w - \frac{\mu_0}{B^2} w \cdot \nabla P^*|^2 + ww : \nabla \nabla P^* \right\} \quad (3.60) \end{aligned}$$

wobei

$$P^* := \frac{B^2}{2\mu_0} + p_{\perp} \quad , \quad \alpha_1 := 1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp} \quad , \quad \alpha_2 := 1 + \alpha_{\perp} \quad (3.61)$$

gesetzt wurde. Für die Herleitung dieser Form wurde beim partiellen Integrieren von den Randbedingungen an B , v und w Gebrauch gemacht, sowie quadratisch ergänzt. Diese Form stellt die Verbindung her zwischen den notwendigen Stabilitätskriterien für Plasmen mit isotropem Druck [10] und den Plasmen mit einem anisotropen Drucktensor [12]. Setzen wir in die symmetrische Form die dem CGL-Modell entsprechenden Werte für die partiellen Differentiale α_{\perp} , α_{\parallel} und β_{\perp} ein, so ist sie mit der von Wang und Bhattacharjee [12] angegebenen Form für die Variation der "potentiellen Energie" der Störung identisch.

Eine zweite Form für δW , in der sich Stabilitätseigenschaften von verschiedenen Plasmamodellen betrachten lassen, ergibt sich mit $F(w)$ in der Darstellung von (3.54). Mit

$$w \cdot \left((\nabla \times Q) \times B \right) = \nabla \cdot \left(Q \times (B \times w) \right) - Q^2 \quad , \quad (3.62)$$

einer partiellen Integration und der Berücksichtigung der Randbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta W = \int_G d^3x \left\{ \frac{Q^2}{\mu_0} + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{w} \cdot \nabla p_{\perp}) \nabla \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \left(\nabla \cdot (\mathbf{w} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \right) - \right. \\ \left. - \rho |\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}|^2 + \nabla \cdot \left(\mathbf{w} \frac{\Delta B^2}{\mu_0} \right) \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{w} + 2 \frac{\Delta B^2}{\mu_0} |\mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{w}|^2 + \right. \\ \left. + \frac{B^2}{\mu_0} \left(\beta_{\perp} |\nabla \cdot \mathbf{w}|^2 + \alpha_{\perp} |\nabla \cdot \mathbf{w} - \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{w}|^2 - \alpha_{\parallel} |\mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla \mathbf{w}|^2 \right) \right\} . \quad (3.63) \end{aligned}$$

Einigen Termen kommt in dieser Darstellung physikalische Bedeutung zu. So stecken im ersten Summanden die Alfvénwellen (Q^2/μ_0), im letzten die gewöhnlichen Schallwellen (β_{\perp}) und ihre Entsprechungen (α_{\perp} , $-\alpha_{\parallel}$) auf Grund der B-Abhängigkeit der Druckkomponenten. Dabei ist zu beachten, daß im allgemeinen $-\alpha_{\parallel} \geq 0$ gilt, wie z.B. im CGL-Plasmodell ($-\alpha_{\parallel} = 2\mu_0 p_{\parallel}/B^2$). Im zweiten Summanden steckt die leicht zugängliche Form, der destabilisierende Anteil der Kink-Instabilitäten ($\mathbf{Q} \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{w} = \mathbf{j}_{\parallel} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{w}$). Die restlichen Terme entsprechen den schnellen magnetoakustischen Wellen und den Austausch-Instabilitäten.

3.7.1 Vergleich der Stabilität unterschiedlicher Plasmodelle

Kruskal und Oberman [13] konnten mit Hilfe der kinetischen Beschreibung des statischen Plasmas die Stabilität von verschiedenen Plasmodellen vergleichen, indem sie von der Freiheit, die in den von ihnen betrachteten Gleichgewichtsverteilungsfunktionen steckte, Gebrauch machten. Die beiden sich hierbei ergebenden Vergleichstheoreme lassen sich mit Hilfe von (3.63) in der entsprechenden Flüssigkeitsform nachvollziehen.

Das erste Vergleichstheorem setzt ein Plasma mit anisotropem Drucktensor voraus. Da die Gleichgewichtsgrößen festgelegt sind, können wir δW bei gegebenem Versetzungsfeld \mathbf{w} als Funktion der partiellen Ableitungen der Druckkomponenten betrachten. Halten wir β_{\perp} konstant (diese Freiheit gibt uns die Integrabilitätsbedingung), so hängt der Wert von δW nur noch von der B-Abhängigkeit der Druckkomponenten ab. Da das CGL-Plasma Wärmeströme vernachlässigt, zeigen die Druckkomponenten in diesem Modell die stärkste Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke B , d.h. es gilt in diesem Fall

$$\delta W \leq \delta W_{\text{CGL}} . \quad (3.64)$$

Die hier vorgestellte Flüssigkeitsversion dieses ersten Vergleichstheorem von Kruskal und Oberman kann so interpretiert werden, daß die Vernachlässigung von Wärmeströmen

parallel zum Magnetfeld (und diese werden in dem hier betrachteten Modell wie auch bei Kruskal und Oberman betrachtet) bei anisotropen Plasmen stabilisierend wirkt.

Das zweite Vergleichstheorem erhalten wir, wenn wir ein isotropes Plasma zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen machen ($\Delta = 0$). Bei gegebenem Versetzungsfeld w sehen wir, daß δW für eine Störung, die sich mit anisotropem Druck entwickelt, wegen $(\alpha_{\perp}, -\alpha_{\parallel} \geq 0)$ einen größeren Wert hat als die sich mit isotropem Druck entwickelnde, d.h.

$$\delta W_{\text{iso}} \leq \delta W \quad . \quad (3.65)$$

Die physikalische Grundlage für diese Annahme ist, daß die Stoßzeit der Ionen klein genug ist, damit sich auf der Gleichgewichtszeitskala ein isotroper Druck einstellen kann, die Instabilität sich aber auf einer kürzeren Zeitskala als der der Stoßzeit entwickelt. Das Verhalten der Druckkomponenten muß deshalb auf der Zeitskala der Instabilität als anisotrop angenommen werden, auch wenn es von einem isotropen Druck aus startet (siehe auch S. 84). Dies bedeutet, daß eine Störung, die den isotropen Druck bewahrt, instabiler ist (im Sinne der "potentiellen Energie" δW , die zur Verfügung steht), als eine Störung, die einen anisotropen Druck entwickelt.

3.8 Stark lokalisierte Störungen: Die Ballooning-Gleichungen

Im allgemeinen ist die Frage nach der Stabilität toroidaler Plasmen ein dreidimensionales Problem. Es gibt aber Störungen, für die sich das Stabilitätsproblem auf ein eindimensionales Problem entlang Magnetfeldlinien reduziert. Die Störungen zeichnen sich dadurch aus, daß sie sich entlang der Magnetfeldlinie nur wenig ändern, ihre Änderung senkrecht dazu dagegen groß ist. Störungen dieser Art werden durch den Druckgradienten in solchen Plasmagebieten getrieben, in denen der Krümmungsvektor des Magnetfeldes die gleiche Richtung hat wie der Druckgradient, beim Tokamak handelt es sich dabei um die Torusaußenseite. Solche Plasmagebiete werden deshalb als Regionen ungünstiger Krümmung bezeichnet. Da sich die Amplitude dieser Störungen in den Regionen ungünstiger Krümmung verstärkt, sie sich dort also aufblähen, werden sie als Ballooningmoden bezeichnet. Sie sind insofern von Interesse, als sie, durch den Druckgradienten getrieben, den maximalen Druck, d.h. die thermische Energie des Plasmas bestimmen, der durch ein toroidales Magnetfeld eingeschlossen werden kann.

In diesem Abschnitt leiten wir die Ballooning-Moden-Gleichungen im Rahmen der WKB-Methode [31] mit dem sogenannten Eikonalanansatz her. Wir betrachten dann die Glei-

chungen in axialsymmetrischer toroidaler Geometrie, für die bekannt ist, daß eine Strömung senkrecht zu Magnetfeldlinien das Zeitverhalten der Gleichungen so ändert, daß ein Normalmodenansatz nicht mehr möglich ist [32]. Erst in jüngster Zeit konnte das numerisch festgestellte Zeitverhalten der Lösungen [33], das ebenfalls numerisch in [34] und [35] untersucht wurde, theoretisch erklärt werden [36]. In allgemeiner toroidaler Geometrie beschränken wir uns auf den Fall von Strömungen parallel zum Magnetfeld.

3.8.1 Der Eikonalansatz

Wir benutzen für die Störung den sogenannten Eikonalansatz, der das Verhalten der Störung durch das Produkt einer schnell veränderlichen Phase und einer sich langsam ändernden Amplitudenfunktion beschreibt,

$$w = e^{inS(\mathbf{x},t)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k w_k \quad (3.66)$$

Dabei ist $(1/n) \gg 1$ der Kleinheitsparameter der Entwicklung. Änderungen von S erzeugen so mit n eine sich schnell ändernde Phase. Für die Phasenfunktion S nehmen wir

$$\mathbf{B} \cdot \nabla S = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0 \quad (3.67)$$

an. Für allgemeine Geschwindigkeiten \mathbf{v} wird das Eikonal S auf Grund der zweiten Gleichung zeitabhängig sein, falls die Flüssigkeitsbewegung nicht rein parallel zu \mathbf{B} verläuft. In diesem Falle gilt ganz allgemein $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$. Die Bewegungsgleichung für w kann mit (3.53) in der folgenden für die Durchführung der Entwicklung günstigen Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla w) = & \\
 \frac{B^2}{\mu_0} (1 + \beta_{\perp} + \alpha_{\perp}) \nabla (\nabla \cdot w) + \nabla \left(\frac{B^2}{\mu_0} (1 + \beta_{\perp} + \alpha_{\perp}) \right) \nabla \cdot w + & \\
 + (\nabla w) \cdot \nabla \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \nabla \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \nabla \cdot w - & \\
 - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B} (1 + \alpha_{\perp}) \nabla \cdot w) - \frac{1}{\mu_0} \nabla ((1 + \alpha_{\perp}) \mathbf{B} \mathbf{B} : \nabla w) + & \\
 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla ((1 - \Delta) \mathbf{B} \cdot \nabla w) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B} (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp} - 2\Delta) \mathbf{b} \mathbf{b} : \nabla w) \quad (3.68) &
 \end{aligned}$$

Wir setzen (3.66) in diese Gleichung ein und ordnen nach Potenzen von n , wobei wir die Bedingungen aus (3.67) berücksichtigen. In führender Ordnung ($O(n^2)$) erhalten wir

$$\frac{B^2}{\mu_0}(1 + \beta_{\perp} + \alpha_{\perp})\mathbf{w}_0 \cdot \nabla S = 0 \iff \mathbf{w}_0 \cdot \nabla S = 0, \quad (3.69)$$

d.h. die Störung ist bezüglich des Wellenvektors $\mathbf{k} = n\nabla S$ rein transversal, und kann somit in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\mathbf{w}_0 = X\mathbf{N} + \frac{Z}{\rho}\mathbf{B}, \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla S}{B^2}. \quad (3.70)$$

Der Vektor \mathbf{N} wird im allgemeinen die Zeitabhängigkeit von S übernehmen. Als Gleichung in $O(n)$ erhalten wir

$$\mathbf{f} := \nabla \cdot \mathbf{w}_0 + i\mathbf{w}_1 \cdot \nabla S = \frac{(1 + \alpha_{\perp})\mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{w}_0) - \mathbf{w}_0 \cdot \nabla (\mu_0 p_{\perp} + \frac{1}{2}B^2)}{B^2(1 + \beta_{\perp} + \alpha_{\perp})}, \quad (3.71)$$

wobei wir das Ergebnis aus der führenden Ordnung (3.69) verwendet haben. Gleichung (3.71) eliminiert die zu \mathbf{k} parallele Komponente der Störung in der Ordnung n von \mathbf{w}_1 . Die Gleichung in $O(n^0)$ ergibt dann

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}_0}{\partial t^2} + 2\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}_0) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla ((1 - \Delta)\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{w}_0) - \\ &- \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B}f(1 + \alpha_{\perp}) + \mathbf{B}(\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp} - 2\Delta)\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{w}_0)) - f \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p_{\perp} \right) - \\ &- \mathbf{w}_0 \cdot \nabla \left(\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p_{\perp} \right) \right) + i \frac{B^2}{\mu_0} (1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp}) (\nabla \cdot \mathbf{w}_1 + i\mathbf{w}_2 \cdot \nabla S) \nabla S - \\ &- i \frac{1 + \alpha_{\perp}}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{w}_1) \nabla S + i\mathbf{w}_1 \cdot \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p_{\perp} \right) \nabla S. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Wir erhalten daraus eine Gleichung für die beiden zu \mathbf{k} transversalen Komponenten von \mathbf{w}_0 , in dem wir die Komponenten in Richtung ∇S eliminieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\perp} \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}_0}{\partial t^2} + 2\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}_0) \right) &= \mathcal{P}_{\perp} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla ((1 - \Delta)\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{w}_0) - \right. \\ &- \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B}f(1 + \alpha_{\perp}) + \mathbf{B}(\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp} - 2\Delta)\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{w}_0)) - \\ &\left. - f \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p_{\perp} \right) - \mathbf{w}_0 \cdot \nabla \left(\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p_{\perp} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Der Projektionsoperator \mathcal{P}_{\perp} sei erklärt durch

$$\mathcal{P}_{\perp} = \vec{1} - \frac{1}{|\nabla S|^2} \nabla S \nabla S \iff \frac{1}{|\nabla S|^2} \nabla S \times (\dots) \times \nabla S. \quad (3.74)$$

Er hängt wie \mathbf{N} im allgemeinen von der Zeit ab. Gleichung (3.73) wird als Ballooning-Moden-Gleichung bezeichnet.

3.8.2 Die Ballooning-Gleichungen in Axialsymmetrie für rein toroidale Geschwindigkeiten

In axialsymmetrischer toroidaler Geometrie gilt für eine Geschwindigkeit in Symmetrie-richtung die Darstellung (vgl. (2.18))

$$\mathbf{v} = 2\pi R^2 \Phi'_M \nabla \varphi \quad , \quad (3.75)$$

wobei $' = \nabla \Psi \cdot \nabla / |\nabla \Psi|^2$ die Ableitung senkrecht zu magnetischen Flußflächen ist. Für S erhalten wir als Lösung der beiden Bestimmungsgleichungen

$$S = \varphi + 2\pi Q(\Psi, \Theta, \Theta_0) - 2\pi \Phi'_M t \quad , \quad (3.76)$$

mit φ und Θ als toroidale bzw. poloidale Winkelvariable auf der Flußfläche. Q ist durch

$$Q(\Psi, \Theta, \Theta_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi}{\mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\Theta}} d\hat{\Theta} \quad \text{mit} \quad Q(\Psi, \Theta_0 + 2\pi, \Theta_0) = q(\Psi) \quad (3.77)$$

definiert. Wir wählen eine neue poloidale Winkelvariable, in der das Eikonale besonders einfach wird:

$$S = \varphi + 2\pi q(\Psi) \theta - 2\pi \Phi'_M t \quad \text{mit} \quad \theta = \frac{Q(\Psi, \Theta, \Theta_0)}{q(\Psi)} \quad . \quad (3.78)$$

In der für Wellenphänomene typischen Weise können wir für die räumliche Abhängigkeit des Eikonals einen Wellenvektor \mathbf{k}

$$\mathbf{k} := n \nabla S = n (\nabla \varphi + 2\pi q \nabla \theta + 2\pi (q' \theta - \Phi''_M t) \nabla \Psi) \quad . \quad (3.79)$$

definieren. Wie wir sehen, ist er wegen Φ''_M im allgemeinen zeitabhängig. Nur für ($\Phi''_M \neq 0$), dem Fall der starren toroidalen Rotation, verliert er seine Zeitabhängigkeit. Sein Auftauchen war lange Zeit der Grund, daß die nichtstarreren toroidalen Rotationen, bei denen die Strömung sich von Flußfläche zu Flußfläche ändert, aus der theoretischen Behandlung der Ballooning-Moden scheinbar ausgeklammert werden mußten. Numerische Rechnungen von Cooper [33], die zeitabhängige Ballooning-Gleichungen für diesen Fall lösten, zeigten ein periodisch auftretendes Anschwellen der Amplitude der Störungen, das von einem leichten Anwachsen der maximalen Amplitude begleitet war. Erst Hameiri und Chun [36] erklärten, dieses Zeitverhalten. Sie zeigten, daß sich diese Zeitabhängigkeit aus dem Wellenvektor eliminieren läßt, indem eine neue zeitabhängige poloidale Koordinate

$$\tilde{\theta} = \theta - \frac{\Phi'_M t}{q} = \frac{Q(\Psi, \Theta, \Theta_0) - \Phi'_M t}{q} \quad (3.80)$$

eingeführt wird. In dem Koordinatensystem $(\tilde{\theta}, \varphi)$ bewegen wir uns gerade so entlang einer Magnetfeldlinie, daß der Wellenvektor zeitunabhängig erscheint:

$$\nabla S = \nabla \varphi + 2\pi q \nabla \tilde{\theta} + 2\pi q' \tilde{\theta} \nabla \Psi \quad . \quad (3.81)$$

Seine räumliche Abhängigkeit hat er allerdings nicht verloren, da immer noch die säkulare Abhängigkeit von $\tilde{\theta}$ über Θ vorhanden ist. In der Differentialgleichung für w_0 bedeutet dies, daß der Projektionsoperator \mathcal{P}_\perp nicht mehr von der Zeit abhängt. Allerdings sind die Koeffizienten der Differentialgleichung jetzt periodische Funktionen von der Zeit mit der Periode $T = q/\Phi'_M$, da sie im ortsfesten Koordinatensystem periodische Funktionen von $\theta = \tilde{\theta} + t\Phi'_M/q$ sind. Die Differentialgleichung ist vom Floquetschen Typ und ihr Zeitverhalten wird durch Funktionen der Form

$$w_0(\tilde{\theta}, t) = e^{i\nu t} \hat{w}_0(\tilde{\theta}, t) \quad (3.82)$$

beschrieben, wobei \hat{w}_0 mit der Periode T periodisch in t ist. Die numerisch festgestellte Periode des Anschwellens der Strömungsamplituden ist mit der zeitlichen Periodizität von \hat{w}_0 zu erklären, während das Zeitverhalten des Anwachsens durch den Imaginäranteil der komplexen Frequenz ν wiedergegeben wird. Wir haben soweit gezeigt, daß das Zeitverhalten, das für die Ballooning-Moden mit isotropem Druck bei verscherter toroidaler Strömung festgestellt wurde, ebenso bei anisotropem Druck auftritt.

3.8.3 Die Ballooning-Gleichungen für rein parallele Geschwindigkeiten

Bewegt sich das Plasma nur entlang den Magnetfeldlinien, so entfällt die Beschränkung auf die axialsymmetrische Geometrie und wir können die Ballooning-Gleichungen für allgemeine toroidale Magnetfelder betrachten. Für die divergenzfreie Massenströmungen entlang Magnetfeldlinien gilt

$$\rho \mathbf{v} = \Psi'_M \mathbf{B} \quad , \quad (3.83)$$

wobei $\Psi'_M = d\Psi_M(\Psi)/d\Psi$ ist, und wir angenommen haben, daß magnetische Flächen existieren, die es erlauben einen poloidalen magnetischen Fluß Ψ zu definieren. Das Eikonale ist nun zeitunabhängig. Mit dem Normalmodenansatz, der die Zeitabhängigkeit von w_0 mit $e^{i\omega t}$ spezifiziert, lassen sich die Ballooning-Gleichungen in ein Eigenwertproblem für die komplexe Frequenz ω umwandeln [37, 12]. Dies ist das gleiche Vorgehen, wie es bei

der Formulierung des notwendigen Stabilitätskriteriums für allgemeine Störungen angewandt wurde (vgl. Abschnitt 3.7). Setzen wir (3.83) und den Normalmodenansatz in (3.73) ein, so erhalten wir eine Gleichung für w_0 , in der nur noch Ableitungen von w_0 entlang einer Magnetfeldlinie vorkommen. Multiplizieren wir die Gleichung mit w_0^* und integrieren wir über den Weg L der Magnetfeldlinie, so erhalten wir eine notwendige Bedingung für die Stabilität gegen ballooning-Moden:

$$0 \leq \omega^2 \int_{\mathcal{L}} \rho |w_0|^2 \frac{dl}{B} = \int_{\mathcal{L}} \left[(1 - \Delta - \beta_D) \frac{B^2}{\mu_0} |\mathbf{b} \cdot \nabla w_0|^2 - (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp} - 2\Delta) |\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla w_0)|^2 - \frac{B^2}{\mu_0(1 + \alpha_{\perp} + \beta_{\perp})} |(1 + \alpha_{\perp}) \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla w_0) - \frac{\mu_0}{B^2} w_0 \cdot \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p_{\perp} \right)|^2 + w_0^* \cdot (w_0 \cdot \nabla (\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + p_{\perp} \right))) \right] \frac{dl}{B} \quad (3.84)$$

Ein Vergleich mit dem Stabilitätskriterium für allgemeine Störungen (3.60) zeigt die minimierende Wirkung des Eikonalansatzes. Der stabilisierend wirkende vierte Summand in (3.60) ist auf Grund des Eikonalansatzes in (3.84) verschwunden.

Das Stabilitätskriterium (3.84) geht im Falle isotropen Drucks in das in [37] beschriebene und für den Fall des CGL-Modells in das von Bhattacharjee [12] hergeleitete Kriterium über. Es stellt somit eine Verbindung zwischen den beiden Kriterien her und verallgemeinert sie. Die Minimierung des Integrals bezüglich der zu \mathbf{B} parallelen Komponente von w_0 wie sie für den Fall isotropen Drucks und des CGL-Modells für axialsymmetrische toroidale Plasmen durchgeführt wurde, wollen wir hier nicht mehr in Betracht ziehen. Wir vermuten, daß für axialsymmetrische toroidale Plasmen eine geeignete Minimierung existiert, wenn die partiellen Differentiale $\alpha_{\parallel, \perp}$ und $\beta_{\parallel, \perp}$ für die Gleichgewichts- und Stabilitätsbetrachtung die jeweils gleichen Abhängigkeiten von ρ und B haben.

Anhang A

Zur Darstellung von axialsymmetrischen Vektorfeldern

Bei den Problemen des Gleichgewichts und der Stabilität von Plasmen spielt die Darstellung von Vektorfeldern in geeigneten Koordinaten eine wichtige Rolle. Wir wollen hier einige Beziehungen herleiten, die bei axialsymmetrischen Problemen der Geometrie des Tokamaks nützlich sind.

A.1 Allgemeine axialsymmetrische Vektorfelder

Als Koordinatensystem, das der Axialsymmetrie angepaßt ist, benutzen wir die Zylinderkoordinaten (R, φ, z) . Ein Vektorfeld $\mathbf{V}(R, \varphi, z)$ kann dann mit Hilfe der nicht normierten Basis $(\nabla R, \nabla \varphi, \nabla z)$ in der Form

$$\mathbf{V} = V_R \nabla R + V_\varphi \nabla \varphi + V_z \nabla z \quad (\text{A.1})$$

dargestellt werden. Dieses Vektorfeld ist axialsymmetrisch, wenn die Vektorkomponenten (V_R, V_φ, V_z) von φ unabhängig sind.

Wir bezeichnen Richtungen oder Vektoren, die parallel zu $\nabla \varphi$ sind, als toroidal und Richtungen oder Vektoren senkrecht dazu als poloidal. Jeder Vektor läßt sich eindeutig als Summe eines poloidalen und eines toroidalen Vektors schreiben:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_P + \mathbf{V}_T \quad , \quad \mathbf{V}_P := V_R \nabla R + V_z \nabla z \quad , \quad \mathbf{V}_T := V_\varphi \nabla \varphi \quad . \quad (\text{A.2})$$

Eine generelle Eigenschaft axialsymmetrischer toroidaler Vektorfelder ist ihre Divergenzfreiheit, da $\nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta \varphi = 0$ für $R \neq 0$ gilt. Damit trägt nur der poloidale Teil eines Vektors zu dessen Divergenz bei,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V}_P \quad . \quad (\text{A.3})$$

Wird die Rotation eines axialsymmetrischen Vektorfeldes gebildet, so läßt sich zeigen, daß die Rotation des toroidalen Anteils in einen poloidalen Vektor übergeht und der

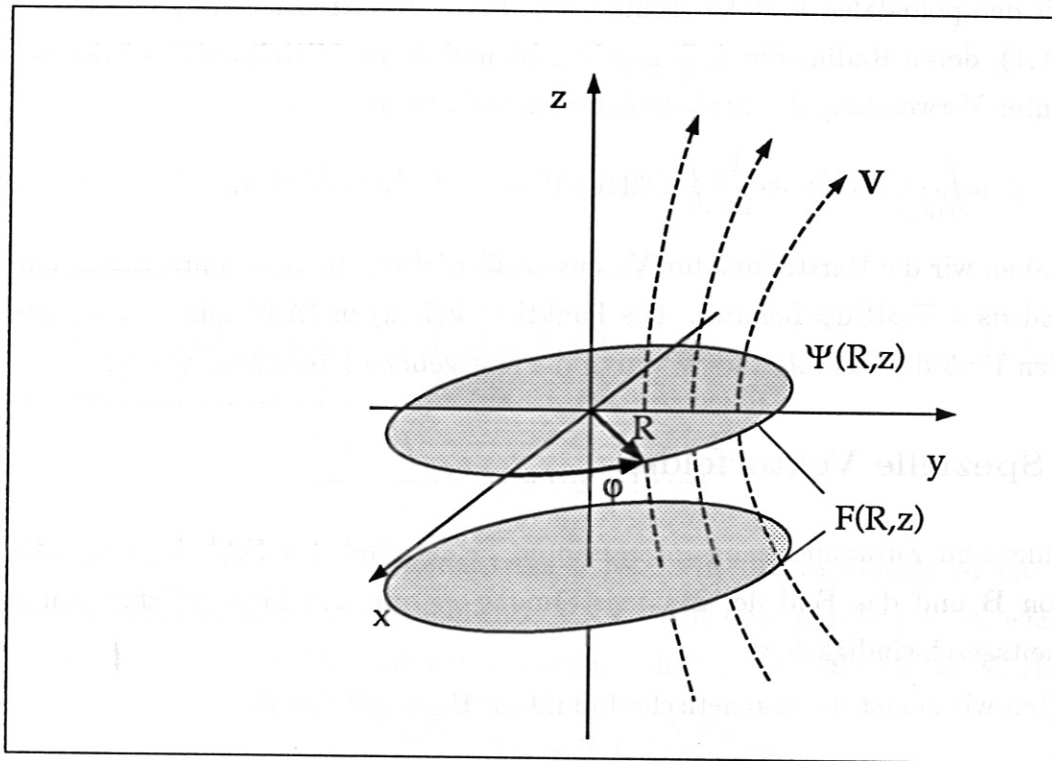


Abbildung A.1: Zylinderkoordinaten und poloidale Flüsse.

poloidale Anteil einen toroidalen Vektor ergibt:

$$\begin{aligned} \nabla \times (V_\varphi \nabla \varphi) &= \nabla V_\varphi \times \nabla \varphi \perp \nabla \varphi \quad , \\ \nabla \times \{V_R \nabla R + V_z \nabla z\} &= \nabla V_R \times \nabla R + \nabla V_z \times \nabla z \parallel \nabla \varphi \quad . \end{aligned} \quad (A.4)$$

A.2 Divergenzfreie axialsymmetrische Vektorfelder

Für divergenzfreie Vektorfelder gilt, daß sie als Rotation eines weiteren Vektorfeldes dargestellt werden können,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \quad (A.5)$$

Wegen (A.3) und (A.4) können wir bei divergenzfreien axialsymmetrischen Vektorfeldern den divergenzfreien poloidalen Vektor immer als Rotation eines toroidalen Vektors schreiben, z.B. $\mathbf{A}_T = \frac{1}{2\pi} \Psi(R, z) \nabla \varphi$, da $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ für $R \neq 0$. Damit folgt für divergenzfreie axialsymmetrische Felder die allgemeine Darstellung

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2\pi} \nabla \Psi \times \nabla \varphi + V_\varphi \nabla \varphi \quad , \quad R \neq 0 \quad , \quad (A.6)$$

wobei die Bedeutung der Funktion $\Psi(R, z)$ noch zu bestimmen ist. Diese ergibt sich, wenn wir den poloidalen Fluß betrachten, der durch eine Kreisfläche $F(R, z)$ tritt (Abb. A.1), deren Radius durch R gegeben ist und deren Mittelpunkt auf der z -Achse liegt. Unter Verwendung des Stokesschen Satzes erhalten wir

$$\int_{F(R, z)} \mathbf{V}_p \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(R, z) \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi R^2 d\varphi = \Psi(R, z) \quad . \quad (\text{A.7})$$

Dabei haben wir die Darstellung für \mathbf{V}_p aus (A.6) und für die Linienintegration auf dem Kreisrand $ds = \nabla\varphi R^2 d\varphi$ benutzt. Die Funktion $\Psi(R, z)$ in (A.6) gibt also gerade den poloidalen Fluß des Vektorfeldes \mathbf{V} durch die angegebene Kreisfläche wieder.

A.3 Spezielle Vektorfelder

Die in unserem Zusammenhang interessanten Felder sind das Feld der magnetischen Induktion \mathbf{B} und das Feld der Massenströmung $\rho\mathbf{v}$ mit der Massendichte ρ und der Flüssigkeitsgeschwindigkeit \mathbf{v} .

Betrachten wir zuerst die magnetische Induktion \mathbf{B} , so gilt für sie

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad , \quad (\text{A.8})$$

wobei \mathbf{j} die Stromdichte ist. Ersetzen wir in (A.6) ∇ durch \mathbf{B} , so erhalten wir $\Psi(R, z)$ als poloidalen magnetischen Fluß. Aus dem Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion und Stromdichte können wir B_φ bestimmen. Analog zu \mathbf{V} betrachten wir den poloidalen Fluß der Stromdichte durch $F(R, z)$. Dieser ist identisch mit dem poloidalen Strom J , der durch die Kreisfläche F fließt,

$$J(R, z) = \int_{F(R, z)} \mathbf{j}_p \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mu_0} B_\varphi(R, z) \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi R^2 d\varphi = \frac{2\pi}{\mu_0} B_\varphi(R, z) \quad . \quad (\text{A.9})$$

Die magnetische Induktion genügt als der Darstellung

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi} (\nabla\Psi \times \nabla\varphi + \mu_0 J \nabla\varphi) \quad . \quad (\text{A.10})$$

Die Stromdichte erhalten wir durch Rotationsbildung entsprechend (A.8)

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2\pi} \left(\nabla J \times \nabla\varphi + \frac{1}{\mu_0} R^2 \nabla\varphi \cdot \nabla \times (\nabla\Psi \times \nabla\varphi) \nabla\varphi \right) \quad , \quad (\text{A.11})$$

wobei wir berücksichtigt haben, daß die Rotation des poloidalen Teils von \mathbf{B} auf einen toroidalen Vektor führt. Für die Auswertung von (A.11) merken wir an, daß sich der Faktor $\nabla\varphi \cdot \nabla \times (\nabla\Psi \times \nabla\varphi)$ als die Divergenz von $(\nabla\Psi \times \nabla\varphi) \times \nabla\varphi = -\nabla\Psi/R^2$ erweist,

weil die Rotation eines Gradienten verschwindet. Damit geht (A.11) in die einfachere Form

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2\pi} \left(\nabla J \times \nabla \varphi - \frac{1}{\mu_0} R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{R^2} \right) \right) \quad (\text{A.12})$$

über. Für eine stationäre Massenströmung, die weder Quellen noch Senken hat, gilt

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (\text{A.13})$$

Analog zur Behandlung der magnetischen Induktion führen wir hier den poloidalen Massenfluß $\Psi_M(R, z)$ ein. Mit (A.6) erhalten wir entsprechend:

$$\rho \mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} (\nabla \Psi_M \times \nabla \varphi + L \nabla \varphi) \quad , \quad (\text{A.14})$$

wobei L das Analogon zum Poloidalstrom J ist. Mit der Strömung ist ein weiteres Vektorfeld verbunden, seine Wirbeldichte $\nabla \times \mathbf{v}$. Auf dem gleichen Weg, wie wir zur Darstellung der Stromdichte \mathbf{j} (A.12) gelangten, erhalten wir jetzt für die Wirbeldichte

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} \left(\nabla \left(\frac{L}{\rho} \right) \times \nabla \varphi - R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi_M}{\rho R^2} \right) \nabla \varphi \right) \quad . \quad (\text{A.15})$$

Anhang B

Charakterisierende Integrale für axialsymmetrische Gleichgewichte mit Massenströmung und anisotropem Druck

Ausgangspunkt für die Herleitung der integralen Beziehungen für axialsymmetrische Plasmen [38, 39] sind die Gleichungen

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (\text{B.1})$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{p} = 0 \quad , \quad \mathbf{p} = p_{\perp} \vec{\mathbf{1}} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b} \mathbf{b} \quad , \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{B.3})$$

und

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (\text{B.4})$$

Mit den Identitäten

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\frac{B^2}{2} \vec{\mathbf{1}} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right) \quad , \quad (\text{B.5})$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \quad (\text{B.6})$$

kann der Tensor

$$\mathbf{T} := \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{\mathbf{1}} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} + \mathbf{p} \quad (\text{B.7})$$

eingeführt werden. Dieser erlaubt für die Kräftebilanz (B.2) die Darstellung

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad . \quad (\text{B.8})$$

Der Virialsatz kann mit \mathbf{T} als

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{T} : \vec{\mathbf{1}} = \rho v^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + 2p_{\perp} + p_{\parallel} \quad (\text{B.9})$$

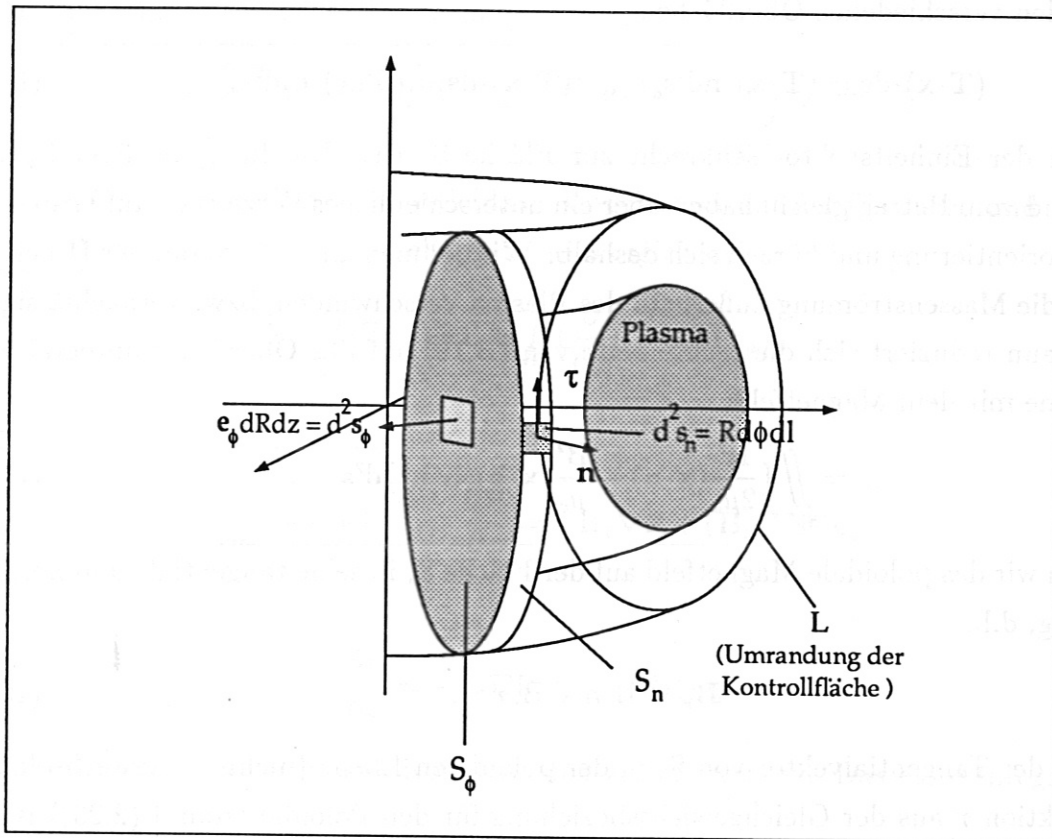


Abbildung B.1: Skizze eines axialsymmetrischen Plasmas mit Kontrollfläche S_n , sowie den Vektoren τ und n und den Formen des Flächenelementes d^2s_n je nach betrachteter Fläche.

geschrieben werden. Aus diesen beiden Gleichungen werden die integralen Beziehungen gewonnen. Zur Rechnung benutzen wir die Zylinderkoordinaten (R, Φ, z) .

Wir betrachten eine in der R - z -Ebene geschlossene Kurve L , die das Plasma poloidal einschließt (Abb. B.1). Die toroidale Rotation von L erzeugt die Fläche S_n mit dem Volumen V , das das Plasma enthält. Die poloidale Fläche S_ϕ sei als Schnitt des Volumens V mit der poloidalen Ebene bei Φ definiert.

Wir integrieren die beiden Gleichungen (B.8) und (B.9) über das Volumen $V_{d\phi}$, das durch die poloidalen Flächen S_ϕ und $S_{\phi+d\phi}$, sowie eines Teiles von S_n mit der Länge $d\phi$ begrenzt ist.

Zuerst betrachten wir den Virialsatz

$$\iiint_{V_{d\phi}} \left[\rho v^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + 2p_\perp + p_\parallel \right] dV = \int_{O(V_{d\phi})} [\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}] \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{B.10})$$

mit $\mathbf{x} = R\nabla R + z\nabla z$ und dem Volumenelement $dV = RdRdzd\phi$. Für die rechte Seite gilt an den verschiedenen Oberflächen

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}) \cdot n d^2 s_n \quad , \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_\phi d^2 s_\phi \quad , \quad (\text{B.11})$$

wobei \mathbf{n} der Einheitsvektor senkrecht zur Fläche S_n ist. Die Integrale über S_ϕ und $S_{\phi+d\phi}$ sind vom Betrag gleich, haben aber ein unterschiedliches Vorzeichen auf Grund der Flächenorientierung und kürzen sich deshalb. Wir nehmen an, daß sowohl der Drucktensor wie die Massenströmung außerhalb des Plasma verschwinden, bzw. vernachlässigbar sind. Dann reduziert sich die rechte Seite von (B.10) auf das Oberflächenintegral über die Terme mit dem Magnetfeld:

$$\dots = \iint_{S_n} \left\{ \frac{B^2}{2\mu_0} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) - \frac{B^2}{\mu_0} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \right\} d^2 s_n \quad . \quad (\text{B.12})$$

Zerlegen wir das poloidale Magnetfeld auf der Fläche S_n in seine tangentiale und normale Richtung, d.h.

$$\mathbf{B}_p = B_n \mathbf{n} + B_\tau \boldsymbol{\tau} \quad , \quad (\text{B.13})$$

wobei $\boldsymbol{\tau}$ der Tangentialvektor von S_n in der poloidalen Ebene (nicht zu verwechseln mit der Funktion τ aus der Gleichgewichtsbeziehung für den Poloidalstrom J (2.23)) ist, so erhalten wir

$$\dots = \iint_{S_n} \frac{B_{T0}^2}{2\mu_0} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) d^2 s_n + \frac{1}{2\mu_0} \iint_{S_n} (B_\tau^2 - B_n^2) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) - 2B_n B_\tau (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}) d^2 s_n \quad . \quad (\text{B.14})$$

Da der Poloidalstrom außerhalb des Plasmas konstant ist, kann das erste Integral in der Form

$$\iint_{S_n} \frac{B_{T0}^2}{2\mu_0} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) d^2 s_n = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{V_{d\phi}} B_{T0}^2 dV \quad , \quad B_{T0} = \frac{\mu_0 J_B}{2\pi R} \quad (\text{B.15})$$

geschrieben werden, wobei wir die von Shafranov [28] gegebene Beziehung

$$\iint_{S_n} R^\alpha (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) d^2 s_n = (3 + \alpha) \iiint_{V_{d\phi}} R^\alpha dV \quad (\text{B.16})$$

benutzt haben. Damit lautet der Virialsatz

$$\begin{aligned} \iiint_{V_{d\phi}} (p_{\parallel} + 2p_{\perp} + \rho v^2 + \frac{B_p^2}{2\mu_0} - \frac{B_{T0}^2 - B_T^2}{2\mu_0}) dV = \\ \frac{1}{2\mu_0} \iint_{S_n} (B_\tau^2 - B_n^2) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) - 2B_n B_\tau (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}) d^2 s_n \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Betrachten wir nun die Kräftebilanz. Mit dem Gaußschen Satz erhalten wir für das Volumenintegral über $V_{d\phi}$ die Gleichung

$$0 = \int_{O(V_{d\phi})} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_n} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s}_n + \iint_{S_\phi} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s}_\phi + \int \int_{S_{\phi+d\phi}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s}_{\phi+d\phi} \quad . \quad (\text{B.18})$$

Dabei ist in $d^2s_n = R dl d\phi$ ein poloidales Wegelement auf der Fläche S_n und $d^2s_\phi = dR dz$. Mit der Grenzbeziehung $d\phi \rightarrow 0$ ergibt sich

$$0 = \oint_L (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) R dl + \iint_{S_\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\phi) d^2s_\phi \right) \quad . \quad (\text{B.19})$$

Mit

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\nabla R \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \phi} = -B_T \nabla R + (\mathbf{B}_P \cdot \nabla R) \mathbf{e}_\phi \quad (\text{B.20})$$

und

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \phi} = -v_T \nabla R + (\mathbf{v}_P \cdot \nabla R) \mathbf{e}_\phi \quad (\text{B.21})$$

können die Integranden in ihre Komponenten zerlegt werden. Das erste Integral führt auf

$$\begin{aligned} \nabla R \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) &= p_\perp (\nabla R \cdot \mathbf{n}) + \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2} (\nabla R \cdot \mathbf{B}) B_n + \\ &\frac{B^2}{2\mu_0} (\nabla R \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{\mu_0} (\nabla R \cdot \mathbf{B}) B_n + \rho (\nabla R \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \nabla z \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) &= p_\perp (\nabla z \cdot \mathbf{n}) + \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2} (\nabla z \cdot \mathbf{B}) B_n + \\ &\frac{B^2}{2\mu_0} (\nabla z \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{\mu_0} (\nabla z \cdot \mathbf{B}) B_n + \rho (\nabla z \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{e}_\phi \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) = \rho v_T (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{\mu_0} B_T B_n + \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2} (\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{B}) B_n \quad . \quad (\text{B.24})$$

Das zweite Integral enthält

$$\nabla R \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\phi) = \rho v_T^2 - \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B_T^2}{\mu_0} - p_\perp - \frac{p_\parallel - p_\perp}{B^2} B_T^2 \quad , \quad (\text{B.25})$$

$$\nabla z \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\phi) = 0 \quad , \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{e}_\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\phi) = \rho v_T (\mathbf{v} \cdot \nabla R) + \frac{B_T}{\mu_0} (\mathbf{B}_n \cdot \nabla R) + \frac{P_{\parallel} - P_{\perp}}{B^2} B_T (\mathbf{B}_P \cdot \nabla R) \quad (\text{B.27})$$

Wir betrachten hier nur die radiale Komponente. Auf Grund der Axialsymmetrie erhalten wir

$$\oint_L (\nabla R \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) R dl = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_n} (\nabla R \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) d^2 s_n \quad (\text{B.28})$$

Benutzen wir noch einmal die Annahme, daß die Druckkomponenten und die Massenströmung außerhalb des Plasma vernachlässigbar ist, dann läßt sich das Integral in der Form

$$\begin{aligned} \iint_{S_n} (\nabla R \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) d^2 s_n &= \iint_{S_n} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \nabla R \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\mu_0} (\nabla R \cdot \mathbf{B}) B_n \right) d^2 s_n = \\ &= -2\pi \iint_{S_\phi} \left(\frac{B_{T0}^2}{2\mu_0} \right) d^2 s_\phi + \iint_{S_n} (B_\tau^2 - B_n^2) (\nabla R \cdot \mathbf{n}) - 2B_n B_\tau (\nabla R \cdot \boldsymbol{\tau}) d^2 s_n \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

schreiben. Dabei haben wir die ebenfalls von Shafranov [28] angegebene Beziehung

$$\iint_{S_n} R^\alpha \nabla R \cdot \mathbf{n} d^2 s_n = 2\pi (\alpha + 1) \iint_{S_\phi} R^\alpha d^2 s_\phi \quad (\text{B.30})$$

benutzt. Damit erhalten wir aus dem Virialsatz und der radialen Kräftebilanz die beiden integralen Beziehungen

$$\begin{aligned} \iiint_V (P_{\parallel} + 2P_{\perp} + \rho v^2 + \frac{B_P^2}{2\mu_0} - \frac{B_{T0}^2 - B_T^2}{2\mu_0}) dV = \\ \frac{1}{2\mu_0} \iint_{S_n} (B_\tau^2 - B_n^2) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) - 2B_n B_\tau (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}) d^2 s_n \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

und

$$\begin{aligned} 2\pi \iint_{S_\phi} \left(P_{\parallel} - \frac{P_{\parallel} - P_{\perp}}{B^2} B_P^2 + \rho v_T^2 + \frac{B_P^2}{2\mu_0} + \frac{B_{T0}^2 - B_T^2}{2\mu_0} \right) ds_\phi = \\ \frac{1}{2\mu_0} \iint_{S_n} (B_\tau^2 - B_n^2) (\nabla R \cdot \mathbf{n}) - 2B_n B_\tau (\nabla R \cdot \boldsymbol{\tau}) d^2 s_n \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Beide müssen im axialsymmetrischen Gleichgewicht erfüllt sein. Sie können durch passend (d.h. physikalisch evident) eingeführte Größen miteinander in Beziehung gesetzt werden. Wir setzen

$$\langle B_P \rangle_L = \frac{1}{L_B} \oint_L B_P dl = \frac{\mu_0 I_T}{L_B} \quad (\text{B.33})$$

$$\langle \dots \rangle_V = \frac{1}{V} \iiint \dots d^3x = \frac{2\pi}{V_B} \iint_{S_\phi} \dots R ds_\phi, \quad (\text{B.34})$$

wobei L_B die Länge der Kurve L sei und I_T der toroidale Plasmastrom ist.. Weiter erklären wir die Funktionen s_1 und s_2 durch

$$s_1 := \frac{1}{\langle B_P \rangle_L^2 V} \iint_{S_n} \frac{B_r^2 - B_n^2}{2} ((\mathbf{x} - R_A \nabla R) \cdot \mathbf{n}) - B_n B_r ((\mathbf{x} - R_A \nabla R) \cdot \boldsymbol{\tau}) d^2s_n, \quad (\text{B.35})$$

$$s_2 := \frac{R_A}{\langle B_P \rangle_L^2 V} \iint_{S_n} \frac{B_r^2 - B_n^2}{2} (\nabla R \cdot \mathbf{n}) - B_n B_r (\nabla R \cdot \boldsymbol{\tau}) d^2s_n, \quad (\text{B.36})$$

mit R_A dem Radius der magnetischen Achse und einem mittleren gewichteten Radius R_T

$$R_T := \frac{\iint_{S_\phi} w R ds_\phi}{\iint_{S_\phi} w ds_\phi}, \quad (\text{B.37})$$

mit

$$w := p_{\parallel} - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} B_P^2 + \rho v_T^2 + \frac{B_P^2}{2\mu_0} + \frac{B_{T_0}^2 - B_T^2}{2\mu_0}. \quad (\text{B.38})$$

Mit den Abkürzungen

$$\beta_{P\parallel} := 2\mu_0 \frac{\langle p_{\parallel} \rangle_V}{\langle B_P \rangle_L^2}, \quad (\text{B.39})$$

$$\beta_{P\perp} := 2\mu_0 \frac{\langle p_{\perp} \rangle_V}{\langle B_P \rangle_L^2}, \quad (\text{B.40})$$

$$l_i := \frac{\langle B_P^2 \rangle_V}{\langle B_P \rangle_L^2}, \quad (\text{B.41})$$

$$\mu := \frac{\langle B_{T_0}^2 - B_T^2 \rangle_V}{\langle B_P \rangle_L^2}, \quad (\text{B.42})$$

$$W_P := \mu_0 \frac{\langle \rho v_P^2 \rangle_V}{\langle B_P \rangle_L^2}, \quad (\text{B.43})$$

$$W_T := \mu_0 \frac{\langle \rho v_T^2 \rangle_V}{\langle B_P \rangle_L^2}, \quad (\text{B.44})$$

$$\Delta_P := 2\mu_0 \frac{\langle \frac{P_{\parallel} - P_{\perp}}{B^2} B_P^2 \rangle_V}{\langle B_P \rangle_L^2} \quad (\text{B.45})$$

erhalten wir für die beiden Gleichungen (B.31) und (B.32)

$$\beta_{P_{\parallel}} + 2\beta_{P_{\perp}} + 2W_P + 2W_T + l_i - \mu = 2(s_1 + s_2) \quad (\text{B.46})$$

und

$$\beta_{P_{\parallel}} - \Delta_P + 2W_T + l_i + \mu = 2 \frac{R_T}{R_A} s_2 \quad (\text{B.47})$$

Sie können so kombiniert werden, daß l_i und μ getrennt auftreten:

$$\beta_{P_{\parallel}} + \beta_{P_{\perp}} - \frac{1}{2}\Delta_P + W_P + 2W_T + l_i = s_1 + s_2 \left(1 + \frac{R_T}{R_A}\right) \quad (\text{B.48})$$

$$\beta_{P_{\perp}} + \frac{1}{2}\Delta_P + W_P - \mu = (s_1 + s_2 \left(1 - \frac{R_T}{R_A}\right)) \quad (\text{B.49})$$

Da die Terme mit der poloidalen Massenströmung und der Druckanisotropie, d.h. mit W_P^2 und Δ_P , von der Größenordnung des Gesamt- β sind, die anderen Terme aber von der Ordnung Eins sind, können wir durch die Vernachlässigung von W_P^2 und Δ_P die einfacheren Gleichungen

$$\beta_{P_{\perp}} = (s_1 + s_2 \left(1 - \frac{R_T}{R_A}\right)) + \mu \quad (\text{B.50})$$

und

$$\beta_{P_{\parallel}} + 2W_T = 2 \frac{R_T}{R_A} s_2 - l_i - \mu \quad (\text{B.51})$$

erhalten.

Die Werte für s_1 und s_2 können aus experimentellen Messungen des Magnetfeldes um das Plasma herum bestimmt werden. Bei Gleichgewichtsrechnungen können die Integrale direkt berechnet werden. Dazu ist es günstig, die Oberflächen in Volumenintegrale umzuwandeln und die Funktionen s_1 und s_2 durch

$$s_1 = \frac{1}{\langle B_P \rangle_L^2 V} \iiint_V \left\{ \frac{B_P^2}{2} \left(1 - \frac{R_A}{R}\right) + \mu_0 (\mathbf{x} - R_A \nabla R) \cdot \mathbf{B}_P \times \mathbf{j}_T \right\} d^3x \quad (\text{B.52})$$

und

$$s_2 = \frac{R_A}{\langle B_P \rangle_L^2 V} \iiint_V \left\{ \frac{B_P^2}{2R} + \mu_0 \nabla R \cdot \mathbf{B}_P \times \mathbf{j}_T \right\} d^3x \quad (\text{B.53})$$

zu bestimmen. Die anderen in (B.46) und (B.47) vorkommenden Größen stehen bei Gleichgewichtsrechnungen in gleicher Weise zur Verfügung, so daß (B.46) und (B.47) zu einer Konsistenzprüfung der berechneten Gleichgewichte herangezogen werden können.

Anhang C

Tensordarstellung von zeitabhängigen Transformationen

Für den Leser, der mit der Tensorrechnung nicht vertraut ist, wollen wir hier die in der vorliegenden Arbeit benutzte Notation erklären. Wir leiten einige nützliche Resultate her, die in Kapitel (3) verwendet werden. Für Summationen gilt die Einsteinkonvention.

C.1 Übersicht zur Tensoranalysis

Wir betrachten ein krummliniges Koordinatensystem $\{u^\mu\}_{\mu=1,2,3}$. Die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren werden durch

$$\mathbf{x}^\mu \equiv \mathbf{x}^{|\mu} := \nabla u^\mu \quad , \quad \mathbf{x}_\mu \equiv \mathbf{x}_{|\mu} := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\mu} \quad (\text{C.1})$$

erklärt. Sie erfüllen die Gleichungen

$$\mathbf{x}^\mu \cdot \mathbf{x}_\lambda = \delta^\mu_\lambda \quad , \quad \vec{\mathbb{1}} = \mathbf{x}^\lambda \mathbf{x}_\lambda \quad , \quad (\text{C.2})$$

die sich aus $\partial u^\lambda / \partial u^\mu = \delta^\lambda_\mu$ mit $u^\lambda(\mathbf{x}(\{u^\mu\}))$ bzw. aus $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x} = \vec{\mathbb{1}}$ mit $\mathbf{x}(\{u^\lambda(\mathbf{x})\})$ ergeben. Die letztere Form ist identisch mit

$$\frac{\partial \mathbf{x}_\mu}{\partial x_\nu} = \mathbf{x}^\rho \delta^\mu_\lambda \mathbf{x}_\rho \quad . \quad (\text{C.3})$$

Definieren wir die Tensoren

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} := \mathbf{x}_\mu \cdot \mathbf{x}_\nu \quad , \quad \mathbf{g}^{\mu\nu} := \mathbf{x}^\mu \cdot \mathbf{x}^\nu \quad , \quad (\text{C.4})$$

so erfüllen sie wegen Gleichung (C.2)

$$\mathbf{g}^{\mu\rho} \mathbf{g}_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_\mu = \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{x}^\nu \quad , \quad \mathbf{x}^\mu = \mathbf{g}^{\mu\nu} \mathbf{x}_\nu \quad . \quad (\text{C.5})$$

Mit Hilfe der Gleichung

$$\mathbf{x}^\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^\nu}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial \mathbf{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \mathbf{g}^{\nu\lambda} \mathbf{x}^\mu \quad , \quad (\text{C.6})$$

erhalten wir die Identität

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = -(g^{\lambda\nu} x^\mu + g^{\mu\lambda} x^\nu) \quad , \quad (C.7)$$

sowie

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x_\lambda} = -x^\mu x^\lambda \quad . \quad (C.8)$$

Für die Determinante des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ gilt

$$\sqrt{g} = \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{g}} = \nabla u^1 \cdot (\nabla u^2 \times \nabla u^3) \quad . \quad (C.9)$$

Aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz für Determinanten erhalten wir

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda\mu}} g_{\lambda\nu} = g \delta^\mu_\nu \quad . \quad (C.10)$$

Durch Vergleich mit Gleichung (C.5) folgt

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda\mu}} = g g^{\mu\lambda} \quad . \quad (C.11)$$

Sei $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ das Permutationssymbol, dann definieren wir den antisymmetrischen Tensor ϵ durch

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{g} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \quad . \quad (C.12)$$

Damit erhalten wir einige nützliche Relationen für die Auswertung von Kreuzprodukten und Rotoren:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\rho\gamma} \epsilon^\beta_{\rho\gamma} \quad , \quad (C.13)$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta} \epsilon_\mu^{\sigma\tau} = g^{\alpha\sigma} g^{\beta\tau} - g^{\alpha\tau} g^{\beta\sigma} \quad , \quad (C.14)$$

$$\epsilon^\alpha_{\mu\gamma} \epsilon^\mu_{\rho\chi} = \delta^\alpha_\rho g_{\gamma\chi} - \delta^\alpha_\chi g_{\gamma\rho} \quad , \quad (C.15)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \quad , \quad (C.16)$$

$$\mathbf{x}^\alpha = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\rho\gamma} \mathbf{x}_\rho \times \mathbf{x}_\gamma \quad , \quad (C.17)$$

$$\mathbf{x}_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\rho\gamma} \mathbf{x}^\rho \times \mathbf{x}^\gamma, \quad (\text{C.18})$$

$$\mathbf{x}^\rho \times \mathbf{x}^\gamma = \epsilon^{\rho\gamma\alpha} \mathbf{x}_\alpha, \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{x}_\rho \times \mathbf{x}_\gamma = \epsilon_{\rho\gamma\alpha} \mathbf{x}^\alpha. \quad (\text{C.20})$$

Mit Hilfe von (C.9), (C.19) und (C.20) erhalten wir noch

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\mu} = \sqrt{g} x^\mu, \quad \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\mu} = -\sqrt{g} x_\mu. \quad (\text{C.21})$$

Verwenden wir (C.17) und $x_{\mu|\lambda} = x_{\lambda|\mu}$, so läßt sich

$$\left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\mu} \right)_{|\mu} = (\sqrt{g} x^\mu)_{|\mu} = 0 \quad (\text{C.22})$$

zeigen.

Bisher haben wir nur die Basisvektoren betrachtet. Sei nun \mathbf{A} ein Vektorfeld, dann sind seine kovarianten bzw. seine kontravarianten Komponenten durch die Gleichungen

$$A^\mu = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^\mu, \quad A_\mu = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_\mu \quad (\text{C.23})$$

definiert, und für das Vektorfeld gilt die Darstellung

$$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{x}_\mu = A_\mu \mathbf{x}^\mu. \quad (\text{C.24})$$

C.2 Nabla-Operator und Tensoranalysis

Die Wirkung des Nabla-Operators ∇ können wir formal durch Nachdifferenzieren nach den Koordinaten $\{u^\mu\}$ ableiten,

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial u^\mu}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial A}{\partial u^\mu} =: \mathbf{x}^\mu \partial_\mu A \equiv \mathbf{x}^\mu A_{|\mu}, \quad (\text{C.25})$$

wobei ∂_μ die partielle Ableitung nach der μ -ten Koordinate bezeichnet. Damit können wir die gängigen Operationen mit dem Nabla-Operator folgendermaßen schreiben:

$$\nabla A = \mathbf{x}^\mu \partial_\mu (A) = \mathbf{x}^\mu A_{|\mu}, \quad (\text{C.26})$$

$$\nabla \mathbf{A} = x^\mu \partial_\mu (\mathbf{A}) = x^\mu \mathbf{A}_{|\mu} \quad , \quad (\text{C.27})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = x^\mu \cdot \partial_\mu (\mathbf{A}) = x^\mu \cdot \mathbf{A}_{|\mu} \quad , \quad (\text{C.28})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = x^\mu \times \partial_\mu (\mathbf{A}) = x^\mu \times \mathbf{A}_{|\mu} \quad . \quad (\text{C.29})$$

Bilden wir zweite Ableitungen, so erhalten wir

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{A} = x^\mu \cdot \partial_\mu (x^\lambda \partial_\lambda (\mathbf{A})) = x^\mu \cdot (x^\lambda \mathbf{A}_{|\lambda})_{|\mu} = x^\mu \cdot (x^\lambda_{|\mu} \mathbf{A}_{|\lambda} + x^\lambda \mathbf{A}_{|\lambda|\mu}) \quad , \quad (\text{C.30})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) = x^\mu \cdot \partial_\mu (x^\lambda \partial_\lambda (\mathbf{A})) = x^\mu \cdot (x^\lambda \mathbf{A}_{|\lambda})_{|\mu} = x^\mu \cdot (x^\lambda_{|\mu} \mathbf{A}_{|\lambda} + x^\lambda \mathbf{A}_{|\lambda|\mu}) \quad , \quad (\text{C.31})$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) = x^\mu \partial_\mu (x^\lambda \cdot \partial_\lambda (\mathbf{A})) = x^\mu (x^\lambda \cdot \mathbf{A}_{|\lambda})_{|\mu} = x^\mu (x^\lambda_{|\mu} \cdot \mathbf{A}_{|\lambda} + x^\lambda \cdot \mathbf{A}_{|\lambda|\mu}) \quad (\text{C.32})$$

und

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = x^\mu \times \partial_\mu (x^\lambda \times \partial_\lambda (\mathbf{A})) = x^\mu \times (x^\lambda \times \mathbf{A}_{|\lambda})_{|\mu} \quad . \quad (\text{C.33})$$

Für die doppelte Rotation können wir

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= x^\mu \times (x^\lambda_{|\mu} \times \mathbf{A}_{|\lambda} + x^\lambda \times \mathbf{A}_{|\lambda|\mu}) \\ &= x^\lambda_{|\mu} (x^\mu \cdot \mathbf{A}_{|\lambda}) - \mathbf{A}_{|\lambda} (x^\mu \cdot x^\lambda_{|\mu}) + x^\lambda (x^\mu \cdot \mathbf{A}_{|\lambda|\mu}) - \mathbf{A}_{|\lambda|\mu} (x^\lambda \cdot x^\mu) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

schreiben. Unter Verwendung von $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A})$ und dem Vergleich mit (C.32) erhalten wir die Formel

$$x^\mu (x^\lambda_{|\mu} \cdot \mathbf{A}_{|\lambda} + x^\lambda \cdot \mathbf{A}_{|\lambda|\mu}) = x^\alpha_{|\beta} (x^\beta \cdot \mathbf{A}_{|\alpha}) + x^\alpha (x^\beta \cdot \mathbf{A}_{|\alpha|\beta}) \quad . \quad (\text{C.35})$$

Eine nützliche Formel für die Divergenz läßt sich mit Hilfe von (C.22) und $(x^\mu \cdot x_\lambda)_{|\mu} = 0$ ableiten,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = x^\mu (A^\lambda x_\lambda)_{|\mu} = A^\lambda_{|\lambda} - x^\mu_{|\mu} \cdot x_\lambda A^\lambda = A^\lambda_{|\lambda} + \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g})_{|\lambda} A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} A^\lambda)_{|\lambda} \quad . \quad (\text{C.36})$$

C.3 Zeitabhängige Transformationen

Wir betrachten nun zeitabhängige Koordinatensysteme. Diese lassen sich als Transformationen des Raumes in sich selbst mit einer parametrischen Abhängigkeit von der Zeit

$$\mathbf{x} : \dot{\mathbf{x}} \longrightarrow \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) \quad (\text{C.37})$$

auffassen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ geben die $\dot{\mathbf{x}}$ die ursprünglichen Punkte wieder, d.h.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(0)(\dot{\mathbf{x}}) \quad . \quad (\text{C.38})$$

Die Umkehrabbildung sei durch die Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t)(\mathbf{x}) \quad (\text{C.39})$$

definiert. So gilt

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t)\mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) = (\dot{\mathbf{x}}(t) \circ \mathbf{x}(t))(\dot{\mathbf{x}}) \quad . \quad (\text{C.40})$$

In gleicher Weise finden wir

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}(t)(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}(t) \circ \dot{\mathbf{x}}(t))(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{C.41})$$

Um die Notation zu Vereinfachen, nehmen wir o.B.d.A. an, daß die $\{\dot{x}^\mu\}$ die kartesischen Koordinaten sind. Von einem krummlinigen Koordinatensystem können wir immer durch eine geeignete Transformation auf ein kartesisches übergehen. Die Positionsvektoren $\dot{\mathbf{x}}$ und \mathbf{x} sind dann erklärt durch

$$\mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) = x^\mu(t)(\dot{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_\mu \quad , \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{x}^\mu \mathbf{e}_\mu \quad , \quad (\text{C.42})$$

wobei $\{\mathbf{e}_\mu\}$ die kartesische Basis bezeichnet. An dieser Stelle ist eine Bemerkung zur Darstellung von Ortsvektoren bezüglich der ortsfesten Koordinaten und der bewegten Koordinaten angebracht. Betrachten wir \mathbf{x} vom ortsfesten Koordinatensystem aus, so gilt

$$\mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) = x^\mu(t)(\dot{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_\mu \quad , \quad (\text{C.43})$$

d.h. wir haben bezüglich der erklärten Basisvektoren zeitabhängige Koordinaten. Vom bewegten Koordinatensystem aus gilt natürlich

$$\mathbf{x} = x^\mu(t) \circ \dot{\mathbf{x}}(t)(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\mu = x^\mu \mathbf{e}_\mu \quad , \quad (\text{C.44})$$

d.h. wir haben zeitunabhängige Koordinaten. Diese Eigenschaft zeichnet ja gerade ein bewegtes Koordinatensystem aus. Entsprechend gilt auch für $\dot{\mathbf{x}}$

$$\dot{\mathbf{x}}(t)(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^\mu(t)(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\mu \quad , \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^\mu(t) \circ \mathbf{x}(t)(\dot{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_\mu = \dot{\mathbf{x}}^\mu \mathbf{e}_\mu \quad . \quad (\text{C.45})$$

Wir definieren die zeitabhängigen kovarianten und kontravarianten Basisvektoren unserer Transformation bezüglich der ortsfesten Koordinaten durch

$$\mathbf{x}^\mu \equiv \mathbf{x}^\mu(t)(\dot{\mathbf{x}}) := \nabla(\dot{\mathbf{x}}^\mu(t) \circ \mathbf{x}(t))(\dot{\mathbf{x}}) \quad , \quad \mathbf{x}_\mu \equiv \mathbf{x}_\mu(t)(\dot{\mathbf{x}}) := \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}^\mu}(\dot{\mathbf{x}}) \quad . \quad (\text{C.46})$$

Für $t=0$ sind sie mit der kartesischen Basis identisch.

Um die Formeln im folgenden zu vereinfachen, gehen wir in allen Gleichungen dazu über nur noch die Transformationen zu schreiben, und ihre explizite Zeit- und Ortsabhängigkeit nicht mehr anzugeben. Wir gehen dabei davon aus, daß die Transformation auf ihre Definitionsvariable wirkt, wie dies in (C.46) der Fall ist. Ortsabhängigkeiten, die von einer vorgeschalteten Transformation herrühren, werden durch das Kompositionssymbol angezeigt. Mißverständnisse sind bei dieser Regelung zwar ausgeschlossen, doch wo wir denken, daß diese kürzere Schreibweise das Verständnis erschwert, greifen wir zur expliziten Angabe aller Abhängigkeiten zurück. Als Beispiel diene die Identität (C.40), die in der verkürzten Schreibweise so aussieht:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x} \quad . \quad (\text{C.47})$$

Da auf der rechten Seite, durch das Kompositionssymbol kenntlich gemacht, zwei Transformationen stehen, und die letzte als Definitionsvariable den Ortsvektor $\dot{\mathbf{x}}$ besitzt, muß auf der linken Seite der Ortsvektor selbst stehen.

Da wir uns im weiteren für die zeitlichen Änderungen unserer Transformationen interessieren, führen wir den Zeitdifferentiationsoperator ∂_t ein. Er wirkt, so weit nicht durch Klammern kenntlich gemacht, immer nur auf die direkt nach ihm stehende Transformation.

C.3.1 Wie bewegt sich das Koordinatensystem?

Um den Unterschied zwischen den Basisvektoren in den verschiedenen Koordinatensystemen explizit zu zeigen, bilden wir die Zeitableitung der Identität (C.42),

$$0 = \partial_t(\mathbf{x} \circ \dot{\mathbf{x}}) \quad , \quad (\text{C.48})$$

leiten diese nach \dot{x}^μ ab und vertauschen die Ableitungen,

$$0 = \partial_i(x_\mu \circ \dot{x}) \quad . \quad (C.49)$$

Diese Gleichung besagt, daß die kontravarianten Basisvektoren im bewegten Koordinatensystem keine Zeitabhängigkeit haben, d.h. es sind die gleichen Basisvektoren wie zum Zeitpunkt $t=0$, d.h. $x_\mu(0) \circ \dot{x}(0)(x) = e_\mu$. Aus der weiter oben gemachten Bemerkung wird dies sofort verständlich.

Wir führen

$$w \equiv w(t)(x) := \partial_i x(t) \circ \dot{x}(t)(x) \quad (C.50)$$

als lokale Geschwindigkeit der Transformation ein. Diese Geschwindigkeit wird allerdings an das bewegte System geheftet. Die Definition wird verständlich, wenn wir uns vorstellen, daß wir uns auf einem Fluß mit der Strömung bewegen. Befanden wir uns bei $t=0$ am Ort \dot{x} , so bewegen wir uns zum Zeitpunkt t mit der Geschwindigkeit $\partial_i(x(t))(\dot{x})$ von \dot{x} aus betrachtet. Wir können dies aber auch so ausdrücken, daß wir sagen, der Fluß besitzt zum Zeitpunkt t am Ort x die Geschwindigkeit $\partial_i(x(t)) \circ \dot{x}(t)(x)$.

Das Gesagte wird verdeutlicht, wenn wir die Zeitableitung der Identität (C.40) bilden:

$$0 = \partial_i \dot{x} \circ x + \partial_i x \cdot \nabla(\dot{x} \circ x) \quad \iff \quad \partial_i \dot{x} = -w \cdot \nabla \dot{x} \quad , \quad (C.51)$$

wobei die zweite Formulierung im bewegten Koordinatensystem zu sehen ist. Damit erhalten wir für die kontravarianten Komponenten

$$\partial_i \dot{x}^\mu = -w^\mu \quad . \quad (C.52)$$

Diese Formulierung besagt, daß sich der Startpunkt \dot{x} mit der Geschwindigkeit $-w$ von uns entfernt.

C.3.2 Die zeitliche Änderung der Metrik

Wir betrachten nun die Änderung der Basisvektoren im ortsfesten Koordinatensystem. Für die kontravarianten Basisvektoren gilt

$$\partial_i x_\mu = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}(\partial_i x) = (w \circ x)_{|\mu} = x_\mu \cdot \nabla(w \circ x) \quad . \quad (C.53)$$

Die Änderung der kovarianten Basisvektoren wird durch

$$\partial_i \mathbf{x}^\mu = \partial_i (\nabla \dot{\mathbf{x}}^\mu \circ \mathbf{x}) = \nabla (\partial_i \dot{\mathbf{x}}^\mu \circ \mathbf{x}) + \partial_i \mathbf{x} \cdot \nabla (\mathbf{x}^\mu \circ \mathbf{x}) \quad (\text{C.54})$$

beschrieben. Mit (C.50) und (C.52) erhalten wir

$$\partial_i \mathbf{x}^\mu \circ \dot{\mathbf{x}} = -\nabla \mathbf{w}^\mu + \mathbf{w} \cdot \nabla (\mathbf{x}^\mu \circ \dot{\mathbf{x}}) \quad (\text{C.55})$$

Damit besitzen wir die Möglichkeit die Zeitabhängigkeit des metrischen Tensors im ortsfesten Koordinatensystem zu bestimmen,

$$\partial_i g_{\mu\nu} = (\partial_i \mathbf{x}_\mu) \cdot \mathbf{x}_\nu + \mathbf{x}_\mu \cdot (\partial_i \mathbf{x}_\nu) = (\mathbf{w} \circ \mathbf{x})_{|\mu} \cdot \mathbf{x}_\nu + \mathbf{x}_\mu \cdot (\mathbf{w} \circ \mathbf{x})_{|\nu} \quad (\text{C.56})$$

Mit $\partial_i (g^{\mu\nu} g_{\nu\rho}) = 0$ erhalten wir die Zeitabhängigkeit für die Inverse des metrischen Tensors,

$$\partial_i g^{\mu\nu} = -g^{\mu\sigma} (\partial_i g_{\sigma\rho}) g^{\rho\nu} \quad (\text{C.57})$$

Mit Hilfe von (C.11) ergibt sich die zeitliche Änderung der metrischen Determinante,

$$\partial_i g = g g^{\mu\nu} \partial_i g_{\nu\mu} = 2g \operatorname{div}(\mathbf{w} \circ \mathbf{x}) \iff \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} = \operatorname{div}(\mathbf{w} \circ \mathbf{x}) \quad (\text{C.58})$$

C.3.3 Wie ändern sich Vektorfelder?

Wir nehmen an, daß wir ein Vektorfeld in der Form $\mathbf{A}(t)(\mathbf{x})$ gegeben haben, d.h. wir betrachten das Vektorfeld ebenso als Transformation. Uns interessiert nun die zeitliche Änderung des Vektorfeldes am Ursprungsort $\dot{\mathbf{x}}$ zum Zeitpunkt t . Dazu betrachten wir die Komponenten von \mathbf{A} bezüglich der zeitabhängigen Basisvektoren. Für die kontravarianten Komponenten erhalten wir laut deren Definition

$$\begin{aligned} \partial_i A_\mu &:= \partial_i (\mathbf{x}_\mu \cdot \mathbf{A} \circ \mathbf{x}) = \\ &= (\mathbf{w} \circ \mathbf{x})_{|\mu} \cdot (\mathbf{A} \circ \mathbf{x}) + \partial_i \mathbf{A} \circ \mathbf{x} + \mathbf{x}_\mu \cdot ((\mathbf{w} \circ \mathbf{x}) \cdot \nabla (\mathbf{A} \circ \mathbf{x})) \quad (\text{C.59}) \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\mathbf{w}^\mu \nabla (A_\mu \circ \mathbf{x}) = \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{w} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\text{C.60})$$

erhalten wir

$$(\mathbf{x}^\mu \partial_i A_\mu) \circ \dot{\mathbf{x}} = \partial_i \mathbf{A} + \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\text{C.61})$$

Auf die gleiche Weise betrachten wir die kovarianten Komponenten,

$$\begin{aligned} x_\mu \partial_i A^\mu &= x_\mu \partial_i (x^\mu \cdot \mathbf{A} \circ \mathbf{x}) = \\ &= x_\mu (\mathbf{A} \circ \mathbf{x}) \cdot \partial_i x^\mu + \partial_i \mathbf{A} \circ \mathbf{x} + (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{A}) \circ \mathbf{x} \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

und es gilt mit (C.55)

$$(x_\mu \partial_i A^\mu) \circ \dot{\mathbf{x}} = \partial_i \mathbf{A} - \text{rot}(\mathbf{w} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \text{div} \mathbf{w} + \mathbf{w} \text{div} \mathbf{A} \quad . \quad (\text{C.63})$$

C.3.4 Massen- und Flußerhaltung in der idealen MHD

Wir bestimmen jetzt die Variation der Massendichte $\rho(t)(\mathbf{x})$ und der magnetischen Induktion $\mathbf{B}(t)(\mathbf{x})$ mit der Zeit, wenn sich das Plasma mit der Geschwindigkeit $\mathbf{w}(t, \mathbf{x})$ bewegt. Betrachten wir die Kontinuitätsgleichung für die Massendichte,

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{w} \quad , \quad (\text{C.64})$$

so erhalten wir mit (C.58) und $\partial_i (\rho \circ \mathbf{x}) = \partial_i \rho \circ \mathbf{x} + (\mathbf{w} \circ \mathbf{x}) \cdot \nabla (\rho \circ \mathbf{x})$ die kompakte Form

$$\partial_i (\sqrt{g} (\rho \circ \mathbf{x})) = 0 \quad \iff \quad \rho \circ \mathbf{x} = \frac{\dot{\rho}}{\sqrt{g}} \quad . \quad (\text{C.65})$$

Für die magnetische Induktion gilt

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \quad \text{und} \quad \text{div} \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (\text{C.66})$$

Benutzen wir (C.58) und (C.63) mit $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, so erhalten wir

$$x_\mu \partial_i B^\mu + \mathbf{B} \text{div} \mathbf{w} = 0 \quad \iff \quad \partial_i (\sqrt{g} B^\mu) = 0 \quad , \quad (\text{C.67})$$

so daß

$$\mathbf{B} \circ \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{g}} \dot{\mathbf{B}}^\mu x_\mu \quad (\text{C.68})$$

gilt.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Wesson. *Tokamaks*. Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [2] K. Pinkau and U. Schumacher. Kernfusion mit magnetisch eingeschlossenen plasmen. *Physik in unserer Zeit*, 13:138–154, 1982.
- [3] E. Speth. Neutral beam heating of fusion plasmas. *Rep. Prog. Phys.*, 52:57–121, 1989.
- [4] J. Raeder. *Kontrollierte Kernfusion*. B.G.Teubner, Stuttgart, 1981.
- [5] A. Kallenbach, H.M. Mayer, G. Fussmann, V. Mertens, U. Stroth, O. Vollmer, and the ASDEX-Team. Characterization of the angular momentum transport in asdex. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 33(6):595–605, 1991.
- [6] J.D. Callen and K.C. Shaing. A pressure-gradient-driven tokamak "resistive magnetohydrodynamic" instability in the banana-plateau collisionality regime. *Phys. Fluids*, 28:1845–1858, 6 1985.
- [7] H. Grad. Microscopic and macroscopic models in plasma physics. In J. Fox, editor, *Proceedings of the Symposium on Electromagnetics and Fluid Dynamics of Gaseous Plasmas*, pages 37–64, New York, 1961. Polytechnic Press.
- [8] R. Iacono, A. Bondeson, F. Troyon, and Gruber R. Axisymmetric toroidal equilibrium with flow and anisotropic pressure. *Phys. Fluids B*, 2:1794–1803, 8 1990.
- [9] H.P. Zehrfeld. Priv. communication.
- [10] E. Hameiri. The equilibrium and stability of rotating plasmas. *Phys. Fluids*, 26:230–237, 1 1983.
- [11] E.R. Salberta, R.C. Grimm, J.L. Johnson, J. Manickam, and W.M. Tang. Anisotropic pressure tokamak equilibrium and stability considerations. *Phys. Fluids*, 30:2796–2805, 1987.
- [12] L.X.-H. Wang and A. Bhattacharjee. Ballooning stability of anisotropic rotating plasmas. *Phys. Fluids B*, 2:2346–2352, 10 1990.

- [13] M.D. Kruskal and C.R. Oberman. On the stability of plasma in static equilibrium. *Phys. Fluids*, 1(4):275–280, 1958.
- [14] R.M. Kulsrud. *MHD Description of Plasmas*, volume 1, pages 115–145. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1983.
- [15] G.F. Chew, M.L. Goldberger, and F.E. Low. The boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. *Proc. R.Soc. A*, 236:112–118, 1956.
- [16] M.N. Rosenbluth and N. Rostoker. Theoretical structure of plasma equations. *Phys. Fluids*, 2(1):23–30, 1959.
- [17] A. Bondeson and R. Iacono. Ideal stability of cylindrical plasma in the presence of mass flow. *Phys. Fluids B*, 1:1431–1443, 7 1989.
- [18] B.K. Hain, R. Lüst, and A. Schlüter. Zur stabilität eines plasmas. *Z. Naturforsch.*, 12a:833–841, N.N. 1957.
- [19] L. Woltjer. Hydromagnetic equilibrium. iv. axisymmetric compressible media. *Astrophys. J.*, 130:405–413, 1959.
- [20] H.P. Zehrfeld and B. Green. Stationary toroidal equilibria at finite beta. *Nucl. Fusion*, 12:569–575, 1972.
- [21] D. Dobrott and J.M. Greene. Steady flow in the axially symmetric torus using the guiding-center equations. *Phys. Fluids*, 13(9):2391–2397, 9 1970.
- [22] S. Semenzato, R. Gruber, and H.P. Zehrfeld. Computation of symmetric ideal mhd flow equilibria. *Comp. Phys. Reports*, 1:389–425, 1984.
- [23] W. Kerner and S. Tokuda. Computation of tokamak equilibria with steady flow. *Z. Naturforsch.*, 42a:1154–1166, 1987.
- [24] H.P. Zehrfeld and F. Casci. Calculation of axially symmetric resistive steady-state plasma equilibria in terms of pressure distributions. *Comput. Phys. Commun.*, 31:155–165, 1984.
- [25] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt(Main), 1981.

- [26] J.M. Green and N.K. Winsor. Stationary shocks and toroidal diffusion. *Phys. Fluids*, 16:863-870, 1973.
- [27] K.v. Hagenow and K. Lackner. Computation of axisymmetric mhd equilibria. In *Proceedings of the 7th Conference on the Numerical Simulation of Plasmas*, pages 140-143, 1975.
- [28] E.K. Maschke and H. Perrin. Exact solutions of the stationary mhd equations for a rotating toroidal plasma. *Plasma Phys.*, 22:579-594, 1980.
- [29] W.A. Newcomb. Lagrangian and hamiltonian methods in magnetohydrodynamics. *Nucl. Fusion Suppl.*, pages 451-463, 1962.
- [30] E. Frieman and M. Rotenberg. On hydromagnetic stability of stationary equilibria. *Rev. Mod. Phys.*, 32:898-902, 1960.
- [31] R.L. Dewar and A.H. Glasser. Ballooning mode spectrum in general toroidal systems. *Phys. Fluids*, 26(10):3038-3052, 10 1983.
- [32] E. Hameiri and P. Laurence. xxx. *J. Math. Phys.*, 25:396, 1984.
- [33] W.A. Cooper. Ballooning instabilities in tokamaks with sheared toroidal flows. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 30:1805-1812, 1988.
- [34] E.K. Grassie and M. Krech. A complete set of resistive compressive ballooning equations for two-dimensional flow equilibria. *Phys. Fluids B*, 2:536-538, 3 1990.
- [35] E.K. Grassie and M. Krech. Results for resistive compressible flow ballooning modes in a large aspect ration expansion. *Phys. Fluids B*, 2:1864-1870, 3 1990.
- [36] E. Hameiri and S.T. Chun. Stability of ballooning modes in a rotating plasma. *Phys. Rev. A*, 41(2):1186-1189, 1 1990.
- [37] A. Bhattacharjee, R. Iacono, J.L. Milovich, and C. Paranicas. Ballooning stability of axisymmetric plasmas with sheared equilibrium flows. *Phys. Fluids B*, 1:2207-2212, 11 1989.
- [38] Shafranov V.D. Determination of the parameters β_p and l_i in a tokamak for arbitrary shape of plasma pinch cross-section. *Plasma Physics*, 13:757-762, 1971.
- [39] W.A. Cooper and Wootton A.J. β_p analysis for tokamak plasma with anisotropic pressure and mass flow. *Plasma Physics*, 24:1183-1185, 1982.

Danksagung

Herrn Professor Dr K. Pinkau danke ich für die Möglichkeit diese Arbeit im Max-Planck-Institut für Plasmaphysik durchführen zu können.

Herrn Dr Hans-Peter Zehrfeld danke ich besonders herzlich für das interessante und vielseitige Thema sowie für zahlreiche Anregungen und Diskussionen, die ganz wesentlich zur Bewältigung vieler physikalischer, mathematischer und numerischer Probleme beigetragen haben.

Herrn Professor Dr K. Lackner danke ich sehr für die freundliche Aufnahme in die Abteilung Theorie 3 (jetzt Tokamakphysik), für vielfältige Förderung und sein Interesse am Fortgang und Inhalt der Arbeit.

Den Mitgliedern der Gruppe Theorie 3 danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre und Hilfsbereitschaft, insbesondere Frau Privatdozentin Dr M. Bessenrodt-Weberpals und den Dres O. Kardaun, C. Hoffmann, R. Schneider und W. Schneider.