

**Entfaltung von Bolometersignalen
am Tokamak ASDEX Upgrade
(Fall 1: auf Flußflächen konstanter Emissivität)**

R. Wunderlich, W. Schneider, K. Lackner

IPP 5/37

Januar 1992



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN

**Entfaltung von Bolometersignalen
am Tokamak ASDEX Upgrade
(Fall 1: auf Flußflächen konstanter Emissivität)**

R. Wunderlich, W. Schneider, K. Lackner

ABSTRACT

We describe an algorithm and present a FORTRAN programme which allow to derive the distribution of the radiation emission from measured bolometer signals using flux surface structures computed by IPP 5/37. The algorithm appears to be constant on flux surfaces. Test examples are given and the use of the programme for ASDEX-Upgrade is described. Making a proper redefinition of the quantities, the programme can also be applied to the interpretation of measurements of UV detectors and X-ray cameras.

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

ABSTRACT

We describe an algorithm and present a FORTRAN programme which allow to derive the distribution of the radiation emission from measured bolometer signals using flux surface structures computed by an equilibrium code. The algorithm assumes the emissivity to be constant on flux surfaces. Test examples are given and the use of the programme for ASDEX-Upgrade is described. Making a proper redefinition of the quantities, the programme can also be applied to the interpretation of measurements of line densities and X-ray emission.

1. Einleitung

Bei der Strahlungsmessung durch Bolometer an Tokamak-Experimenten entsteht das Problem der Entfaltung der gemessenen Intensitäten: Die auf den einzelnen Flußflächen verschiedene Emissivität ist längs des Sehstrahles über verschiedene Flußflächen integriert. Die Aufgabe besteht nun darin, aus den Meßsignalen und der Information über die Flußflächen auf die Emissivitäten auf den Flußflächen rückzurechnen.

Analoge Probleme zu den hier behandelten tauchen bei der Interpretation von Interferometrie, weicher Röntgenstrahlung und der Bremsstrahlungsemissivität auf. Über einen weiten Parameterbereich ist dabei die Annahme konstanter Emissivität bzw. Plasmadichte auf einer Flußfläche gerechtfertigt, die bei den weiteren Rechnungen gemacht wird. Um die Inversion dieser Abbildung in die Lösung einer wohlkonditionierten Matrixgleichung umzuwandeln, muß die abzubildende Funktion durch zusätzliche Maßnahmen eingeschränkt werden. Dies geschieht meistens durch Beschränkung der Anzahl ihrer freien Parameter. Wir folgen im weiteren jedoch der sogenannten "Regularisierungsmethode" von Tikhonov [1], wobei wir als Straffunktion das räumliche Integral über das Quadrat der zweiten Ableitung der Emissivität wählen.

Die bei der Entfaltung gemachten Annahmen und der mathematische Formalismus werden im Abschnitt 2 beschrieben. Abschnitt 3 beschreibt die Implementierung des Algorithmus, Abschnitt 4 einige Test-Anwendungen. Abschnitt 5 gibt schließlich eine Benutzerbeschreibung der auf diesen Grundlagen entwickelten Subroutine **KBOLEA**.

2. Mathematische Grundlagen und Annahmen

Es seien K Meßwerte Φ_k längs Sehstrahlen gegeben, gesucht ist die Emissivität $w(\rho)$ als "best fit" an die fehlerbehafteten Meßwerte mit der Nebenbedingung, daß die Kurve $w = w(\rho)$ minimale Krümmung haben soll. Dies wird im Sinne der Regularisierungsmethode von Tikhonov durch die Addition einer entsprechenden Straffunktion sichergestellt. Die Forderung der Minimierung der Krümmung entspricht dabei der Gepflogenheit bei der Definition der kubischen Spline-Interpolation. Für die von uns betrachteten Anwendungen kann dafür auch ein physikalisches Argument angeführt werden, das vor allem bei der (hier nicht weiter betrachteten) Erweiterung der Methode auf auch auf Flußflächen variierenden Funktionen hilfreich ist.

Dieses Argument basiert auf zwei Prämissen:

- (1) die Verteilung der rückzurechnenden Größe wird durch einen diffusiven Prozeß bestimmt
- (2) der gewählte Fit soll möglichst geringen räumlich alternierenden Quellen und Senken entsprechen.

Die instationäre Diffusionsgleichung in zylindersymmetrischer Geometrie lautet

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} = -\frac{s}{D} - \frac{\partial \ln D}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Im Folgenden fassen wir unter dem Titel "Quellen" alle auf der rechten Seite befindlichen Terme - also auch zeitliche Variationen von w und Inhomogenitäten in D - zusammen. Unsere oben beschriebene Minimierungsforderung:

$$\int_0^a \left(\frac{s}{D} + \frac{\partial \ln D}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cdot \rho d\rho = \min.$$

ist somit äquivalent zu

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 \cdot \rho d\rho = \min.$$

Tests mit dieser und verwandten Formen des Regularisierungsterms ergaben kaum sichtbare Unterschiede in den Ergebnissen, so daß wir im Weiteren eine einer ebenen Geometrie entsprechende Formulierung benutzen werden. Die

physikalische Analogie zu dem Diffusionsprozess soll hier nur qualitativ verstanden werden, so daß wir Inhomogenitäten in dem angenommenen Diffusionskoeffizienten außer Betracht lassen. Eine Konsequenz dieser Regularisierungsmethode ist die möglichst starke (mit den Meßsignalen und deren Fehlerschranken noch compatible) Unterdrückung kurzweiliger Schwankungen: in einer Fourierdarstellung der gesuchten Ortsfunktion würde diese Straffunktion die Amplitude der m -ten Fourierkomponente mit dem Faktor m^4 wichten. ρ ist eine Maßzahl, die die einzelne Flußfläche bezeichnet und aus der Flußfunktion Ψ berechnet wird:

$$\rho = \sqrt{\frac{\Psi_0 - \Psi}{\Psi_0 - \Psi_s}},$$

wobei Ψ_0 der Wert der Flußfunktion im Plasmazentrum und Ψ_s der Wert auf der Separatrix ist.

Um die Meßwerte S_k zu erfüllen, muß das Integral von $w(\rho)$ längs des Sehstrahls gebildet werden (Fig. 1):

$$S_k = \int_s w(\rho) dl = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} w(\rho) \frac{d\ell_k}{d\rho} d\rho.$$

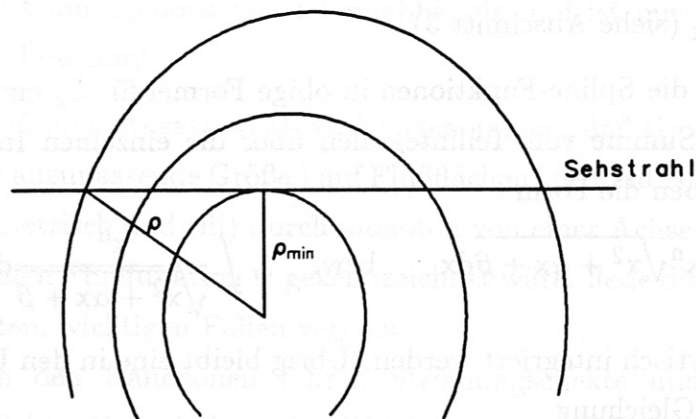


Fig. 1. Schematische Darstellung der Flußflächen und eines Sehstrahls

$\ell_k(\rho)$ ist dabei die Länge jener Strecke, die der Sehstrahl k im Gebiet $\rho^* < \rho$ verläuft. Es ist zweckmäßig, die Funktion $\ell_k(\rho)$ in einen schwach mit ρ

physikalische Analogie zu dem Diffusionsprozess soll hier nur qualitativ verstanden werden, so daß wir Inhomogenitäten in dem angenommenen Diffusionskoeffizienten außer Betracht lassen. Eine Konsequenz dieser Regularisierungsmethode ist die möglichst starke (mit den Meßsignalen und deren Fehlerschranken noch compatible) Unterdrückung kurzweiliger Schwankungen: in einer Fourierdarstellung der gesuchten Ortsfunktion würde diese Straffunktion die Amplitude der m -ten Fourierkomponente mit dem Faktor m^4 wichten. ρ ist eine Maßzahl, die die einzelne Flußfläche bezeichnet und aus der Flußfunktion Ψ berechnet wird:

$$\rho = \sqrt{\frac{\Psi_0 - \Psi}{\Psi_0 - \Psi_s}},$$

wobei Ψ_0 der Wert der Flußfunktion im Plasmazentrum und Ψ_s der Wert auf der Separatrix ist.

Um die Meßwerte S_k zu erfüllen, muß das Integral von $w(\rho)$ längs des Sehstrahls gebildet werden (Fig. 1):

$$S_k = \int_s w(\rho) dl = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} w(\rho) \frac{d\ell_k}{d\rho} d\rho.$$

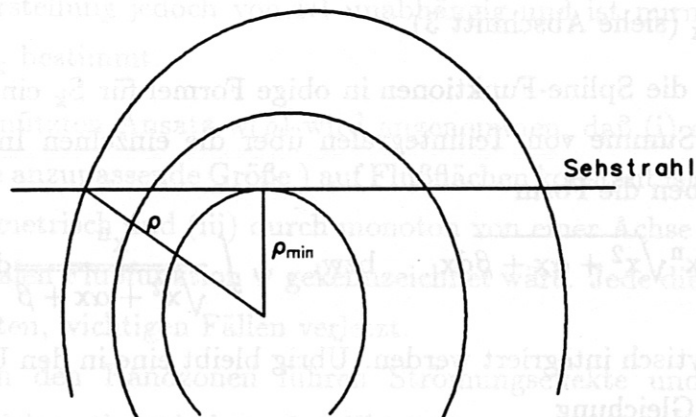


Fig. 1. Schematische Darstellung der Flußflächen und eines Sehstrahls

$\ell_k(\rho)$ ist dabei die Länge jener Strecke, die der Sehstrahl k im Gebiet $\rho^* < \rho$ verläuft. Es ist zweckmäßig, die Funktion $\ell_k(\rho)$ in einen schwach mit ρ

variierenden Teil $g_k(\rho)$ und einen das singuläre Verhalten bei tangentialem Einfall wiedergebenden Term aufzuspalten:

$$\ell_k(\rho) = g_k(\rho)\sqrt{\rho^2 - \rho_{\min,k}^2},$$

wobei $\rho_{\min,k}$ definiert ist als die Maßzahl der innersten Flußfläche, welche der Sehstrahl k gerade noch berührt. Die Funktionen $g_k(\rho)$ und auch das gesuchte $w(\rho)$ seien intervallweise als Spline-Funktionen definiert durch die Funktionswerte f_i und deren 1. Ableitungen $\frac{df_i}{d\rho} = f'_i$ an den Intervallgrenzen ρ_i :

$$f(\rho - \rho_i) = a_i(\rho - \rho_i)^3 + b_i(\rho - \rho_i)^2 + c_i(\rho - \rho_i) + d_i$$

wobei

$$a_i = \frac{2f_i - 2f_{i+1}}{(\rho_{i+1} - \rho_i)^3} + \frac{f'_i + f'_{i+1}}{(\rho_{i+1} - \rho_i)^2}$$

$$b_i = \frac{3f_{i+1} - 3f_i}{(\rho_{i+1} - \rho_i)^2} - \frac{2f'_i + f'_{i+1}}{(\rho_{i+1} - \rho_i)}$$

$$c_i = f'_i$$

$$d_i = f_i.$$

Die Funktionen $g_k(\rho)$ und $g'_k(\rho)$ werden ermittelt aus den numerisch berechneten $\ell_k(\rho)$ und $\rho_{\min,k}$ (siehe Abschnitt 3).

Führt man nun die Spline-Funktionen in obige Formel für S_k ein, so zerfällt das Integral in die Summe von Teilintegralen über die einzelnen Intervalle. Diese Teilintegrale haben die Form

$$\int x^n \sqrt{x^2 + \alpha x + \beta} dx \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}} dx,$$

sie können analytisch integriert werden. Übrig bleibt eine in den Unbekannten w_i bzw. w'_i lineare Gleichung

$$S_k = S_k(w_i, w'_i).$$

Den eingangs erwähnten "best-fit" erhält man durch Minimalisierung des folgenden Ausdrucks:

$$Q = \int_{\rho=0}^{\rho_{\max}} \left(\frac{d^2 w(\rho)}{d\rho^2} \right)^2 d\rho + A_0 \sum_{k=1}^K \left(\frac{S_k(w_i, w'_i) - \Phi_k}{\epsilon_k \Phi_k} \right)^2 = \min.$$

Das Integral bewirkt die geforderte minimale Krümmung der Kurve $w = w(\rho)$, der Summenausdruck erfüllt die Meßwerte S_k , die mit relativen Meßfehlern ε_k behaftet sind. Die Wichtung beider Ausdrücke geschieht durch den Gewichtungsfaktor A_0 . Beide Ausdrücke sind quadratisch in den Unbekannten w_i und w_i' . Die Forderung der Minimalisierung bedeutet, daß die Ableitungen von Q nach den Unbekannten w_i, w_i' null sein müssen. Somit erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten w_i, w_i' , das durch Gauß-Elimination gelöst wird.

Es bleibt noch der Wichtungsfaktor A_0 . Dieser wird in dem vorliegenden Programm iterativ bestimmt aus

$$A_0^{(m+1)} = A_0^{(m)} \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{S_k(w_i, w_i') - \Phi_k}{\varepsilon_k \Phi_k} \right)^2}$$

und erzwingt die Einhaltung der Forderung, daß die passend gewichtete mittlere Abweichung einem Erwartungswert des experimentellen Fehlers entspricht [1]. Die Anzahl der Spline-Intervalle NI ist frei wählbar, sie bestimmt einerseits die Zahl der Unbekannten und damit den Rechenaufwand; andererseits ist dadurch die mögliche Form der Fitkurve festgelegt: Pro Intervall kann sie maximal zwei Extrema und einen Wendepunkt haben. Bei ausreichender Zahl der Spline-Intervalle wird die Funktionsdarstellung jedoch von NI unabhängig und ist nurmehr durch die Fehlerangaben ε_k bestimmt.

Mit dem hier benützten Ansatz $w(\rho)$ wird angenommen, daß (i) die Emissivität (oder jede andere anzupassende Größe) auf Flußflächen konstant ist, und daß diese (ii) toroidal symmetrisch und (iii) durch monoton von einer Achse aus abfallende Werte der poloidalen Flußfunktion Ψ gekennzeichnet wäre. Jede dieser Annahmen wird in bestimmten, wichtigen Fällen verletzt.

(i) Vor allem in den Randzonen führen Strömungseffekte und der endliche Wert der parallelen thermischen Leitfähigkeiten zu Gradienten in Dichte und Temperatur. Im Plasmainneren kann selbst für das Hauptplasma deutlich subsonische toroidale Rotation zu starken innen-außen Unsymmetrien in der Verunreinigungskonzentration und daher entsprechenden Variationen der Strahlungsemissivität auf Flußflächen führen.

(ii) Die von MHD-Moden produzierten, resonanten Störungen verursachen helikal umlaufende Inseln in der Feldlinienstruktur. Flächen konstanter Plasmamparameter

existieren zwar dann weiter, sind jedoch nicht mehr toroidal symmetrisch.

(iii) In einem Divertortokamak sind Flußflächen jenseits der Separatrix offen gegenüber materiellen Begrenzungen. Gleichzeitig entsprechen mindestens zwei, nicht miteinander zusammenhängende Regionen demselben Wert der poloidalen Flußfunktion Ψ .

Das Problem (ii) taucht vor allem bei der Interpretation von Signalen weicher Röntgenstrahlung aus dem Plasmainternen auf. In diesen Fällen ist die Geometrie der ungestörten, toroidal symmetrischen Flußflächen ein guter Ausgangspunkt zur Analyse, wobei die Variation mit poloidalem Winkel durch eine abgeschnittene Fourierreihe dargestellt wird. Ein diesem Rezept folgender Code wird gegenwärtig von H. Krause [2] entwickelt. Dieser Code würde auch für andere Fälle poloidal variierender Signale aus dem Plasmainternen das geeignete Instrument sein.

Probleme (i) und (iii) sind im allgemeinen eng miteinander verknüpft, da auf nach außen offenen Flußflächen die Konstanz der Signale nicht mehr zu erwarten ist. Auch ist in diesen Fällen eine Zerlegung der Emissivitäten nach auf Flußflächen periodischen Funktionen nicht sinnvoll. In einem weiteren Bericht soll ein an diese Fälle besonders angepaßter Code vorgestellt werden.

Es ergibt sich jedoch somit, daß die Annahme konstanter Emissivitäten auf Flußflächen im allgemeinen für die Plasmazonen in der Nähe der Targetplatten und die sogenannte "private" Flußzone jenseits des Staupunktes nicht zu rechtfertigen ist. Für den im folgenden beschriebenen Code werden daher die aus der betreffenden Zone kommenden Sehstrahlen und ihre Signale nicht zur Interpretation benutzt. Dadurch löst sich gleichzeitig das Problem der Mehrdeutigkeit der Zuordnung von Raumregion und Ψ .

Fig. 2 zeigt exemplarisch die bei der Interpretation ausgeschlossenen Sehstrahlen für die von der äußeren Mittelebene beobachtenden Bolometerkameras und ein Standard Single-Null- Gleichgewicht. Wie dort gezeigt, definieren die Begrenzungen der Targetplatten, (bzw. , wenn höher, die Lage des Staupunktes) ein Rechteck. Alle in dieses Rechteck eindringenden Sehstrahlen werden in der weiteren Analyse ignoriert. Vorgegeben wird auch eine Flußfläche außerhalb der Separatrix (mit $\Psi_{\text{lim}} \leq \Psi_s$), jenseits der die Emissivität gleich null gesetzt wird.

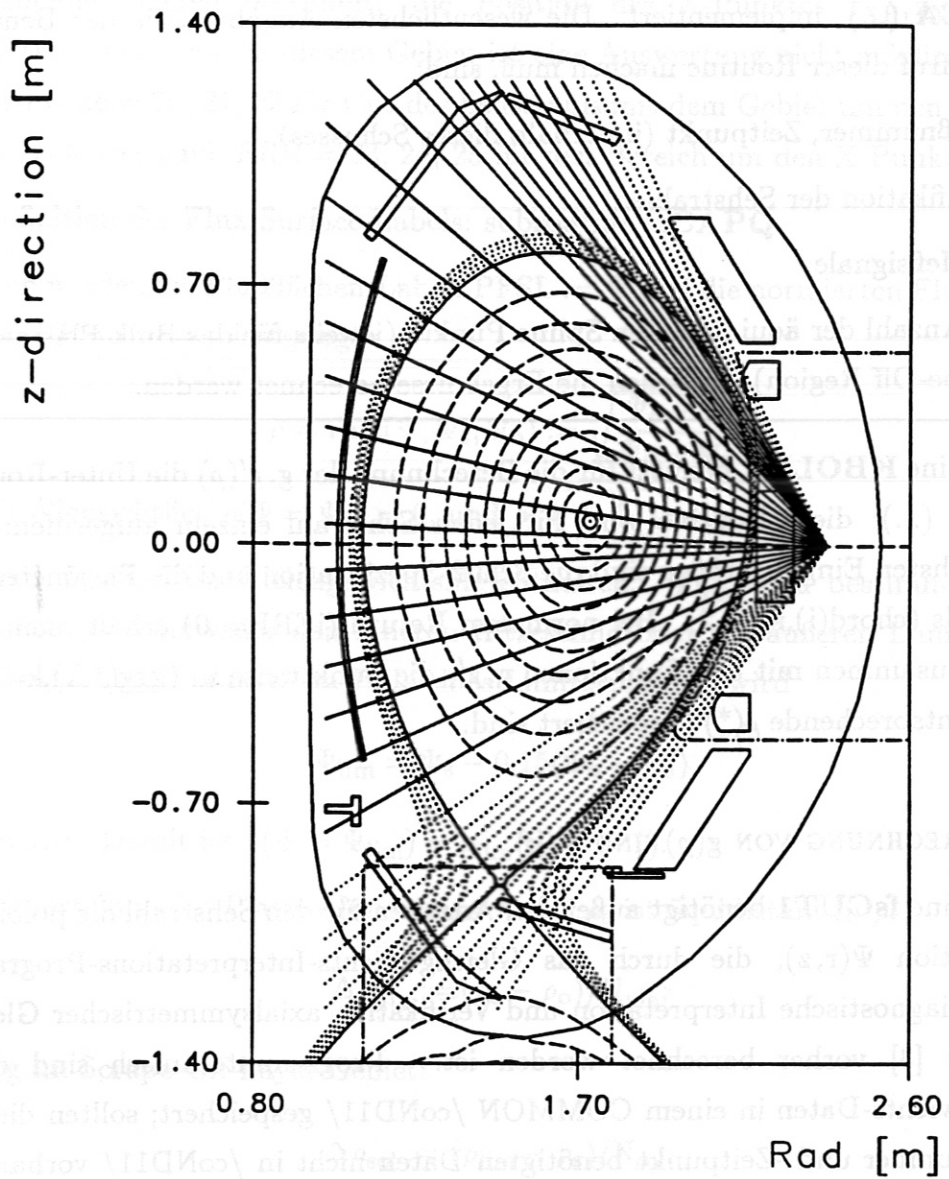


Fig. 2. Poloidaler Querschnitt von ASDEX-Upgrade (Schema) mit den Flußflächen eines Single-Null-Gleichgewichts und der Lage der Bolometer-Sichtstrahlen

3. Implementierung

Der im vorherigen Abschnitt beschriebene Algorithmus ist in der Subroutine **KBOLEA** (...) implementiert. Die wesentlichsten Angaben, die der Benutzer beim Aufruf dieser Routine machen muß, sind:

- (1) Schußnummer, Zeitpunkt (innerhalb dieses Schusses).
- (2) Spezifikation der Sehstrahlen.
- (3) die Meßsignale.
- (4) Die Anzahl der äquidistanten Spline Punkte (jeweils für das Bulk Plasma und die Scrape-Off Region), an denen die Ergebnisse berechnet werden.

Die Routine **KBOLEA** benützt für die Berechnung der $g, g'(\rho)$ die Unter-Routine **fsCUT1** (...); diese Routine wird für jeden Sehstrahl einzeln aufgerufen: die wesentlichsten Eingabegrößen sind die Schuß-Spezifikation und die Parameter des Sehstrahls ($\text{chord}(i), i=0,2$). Bei normalem Return ($iERR=0$) erhält man ρ_{\min} zurück, zusammen mit den Funktionen g, g' , die punktweise in ($ggg(*,k), k=1,2$), für das entsprechende $\rho(*)$ gespeichert sind.

3.1. BERECHNUNG VON $g(\rho)$ UND $g'(\rho)$

Die Routine **fsCUT1** benötigt außer den Angaben für den Sehstrahl die poloidale Flußfunktion $\Psi(r, z)$, die durch das Gleichgewichts-Interpretations-Programm DIVA (Diagnostische Interpretation und Verifikation axialsymmetrischer Gleichgewichte) [3] vorher berechnet worden ist. Programmtechnisch sind diese Gleichgewichts-Daten in einem COMMON /coND11/ gespeichert; sollten die für Schuß-Nummer und -Zeitpunkt benötigten Daten nicht in /coND11/ vorhanden sein, beschafft sich **fsCUT1** mittels **ndRD1a** (..) die richtigen Werte. Die darüber hinaus notwendigen Daten über andere, das Gleichgewicht begrenzende Strukturen (Prallplatten, Blenden, Antennen, etc.), werden -wenn noch nicht vorhanden- mittels **ndGCd1** (..) gelesen und in /coND13/ gespeichert.

Nachdem sichergestellt ist, daß in /coND11/ und /coND13/ die richtigen Daten enthalten sind, wird als erstes überprüft, ob der Sehstrahl das "verbotene" Gebiet

um den X-Punkt herum schneidet:

Die äußeren Kanten der unteren Targetplatten x_1, x_2 werden aus den in /coND13/ vorhandenen Daten bestimmt; die Position des X-Punktes r_{XP}, z_{XP} ist in /coND11/ enthalten. In diesem Gebiet ist eine Auswertung nicht möglich (iERR-Return-code:= 20, 21, 22 für Cut des Sehstrahls mit dem Gebiet um den X-Punkt unten; entsprechend iERR:= 23, 24, 25 für den Bereich um den X-Punkt oben).

(i) Definition der Flux-Surface-Labels: subroutine **fsCAPQ**

Sodann werden die Flußflächen-Labels $PFSL := \Psi$ und die normierten Flußflächen Labels $PFSnrm := \rho$ festgelegt:

$$\rho = \text{rhof}(\Psi, \Psi_s, \Psi_o) := \sqrt{\frac{\Psi_o - \Psi}{\Psi_o - \Psi_s}}$$

womit offensichtlich $\rho(\Psi = \Psi_o) = 0$, und $\rho(\Psi = \Psi_s) = 1$.

Ψ_o und Ψ_s sind im Gleichgewichtsfile enthalten. Ψ_{lim} wird bestimmt als die Flußfläche, die entweder den inneren Hitzeschild oder die äußeren Limiter bzw. ICRH-Antennen berührt. Im Falle eines Limiterplasmas wird

$$\Psi_{lim} = \Psi_s - 0.15(\Psi_o - \Psi_s)$$

festgesetzt. Damit ist $\rho(\Psi = \Psi_{lim}) = \rho_{lim}$ (i.A. > 1).

Die Unterteilung im Plasma-Inneren $\rho_o \leq \rho \leq \rho_s$ ist äquidistant in ρ :

$$\Delta\rho_{pla} := (\rho_s - \rho_o)/N_{pla};$$

analog im Scrape-Off-Layer Gebiet:

$$\Delta\rho_{sol} := (\rho_{lim} - \rho_s)/N_{sol}.$$

Aus dem so festgelegten ρ , gespeichert in (PFSnrm(i), $i=0, N_{pla}+N_{sol}$) werden die (nicht-normierten) Flußflächen-Labels $PFSL(i)$ berechnet:

$$PFSL = PFSf(\rho, \Psi_s, \Psi_o) := \Psi_o - \rho^2(\Psi_o - \Psi_s).$$

(ii) Schnitt des Sehstrahls mit $\Psi(r, z)$; Berechnung von ρ_{min}

Der nächste Schritt ist die Bestimmung der poloidalen Flußwerte $\text{FPFM}(s) := \Psi(s)$ längs des Sehstrahls s . Dabei berechnet man z.B. für alle vorgegebenen Werte des r -Gitters x aus der Geradengleichung

$$yf(x) = \text{chord}(0) + \text{chord}(1) * x$$

die zugehörigen z -Werte (fscu1x,y). Um den diesem (r,z) -Wert nächsten Nachbar-Gitterpunkt (i,j) herum wird eine 2D-Polynom-Interpolation (fit2D2 bzw. fit2D4 entsprechend 2. bzw. 4. Ordnung) benutzt, um den Wert $\text{FPFM}(s) := \Psi(r,z)$ auf dem Sehstrahl zu ermitteln (val2Df), s ist die Koordinate längs des Sehstrahls.

Das Maximum dieser 1D-Funktion $\text{FPFM}(s)$, welches durch eine 1D-Interpolation 2.Ordnung ermittelt wird, sei FPFmax ; dann ist

$$\rho_{\min} = \text{rhof}(\text{FPFmax}).$$

(iii) Berechnung von $\ell(\rho)$

Schließlich benötigt man noch die Sekantenlänge ℓ des Sehstrahls innerhalb der Flußfläche ρ . Dafür werden die Schnittpunkte der Funktion $\text{FPFM}(s)$ mit den oben definierten Flux-Surface-Label Werten $\text{FPFM}(s) = \text{PFSL}_i$ bestimmt (Routine fscu1n,m ; 1D-Fit-Routine fit1D2 , val1D2); man findet für ein bestimmtes ρ : $(x,y)_{\text{links}}$ und $(x,y)_{\text{rechts}}$. Daraus folgt:

$$\ell(\rho) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Die Funktion $g(\rho)$ ist damit bestimmt als:

$$g(\rho) = \frac{\ell(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - \rho_{\min}^2}}.$$

Die Ableitung $g'(\rho)$ wird mit Hilfe finiter Differenzen ausgerechnet.

NB: Sollte die Anzahl der $\Delta\rho$ Intervalle intern anders sein als in der Argumentliste vorgegeben, dann werden die lokal berechneten Funktionen durch eine cubic-spline-Interpolation kkI1Dq3 (...) auf die geforderten Intervalle abgebildet. Bei den CUT-Berechnungen geht man immer längs der x -Richtung falls $|\text{chord}(1)| \leq 1$; sonst entsprechend längs y .

3.2. ENTFALTUNG

Nachdem die Subroutine **fsCUT1** die Sehstrahlen ausgewählt hat, deren Meßdaten zur Entfaltung benutzt werden können, und die erforderlichen Funktionen $g(\rho)$ und $g'(\rho)$ sowie ρ_{\min} berechnet hat, kann die Entfaltung vorgenommen werden, wie sie in Kapitel 2 beschrieben wurde. Das Programm benützt dazu die Subroutine **KPROFL**, in welcher zuerst die Linienintegrale aufbereitet werden und dann der Fit zusammen mit der Forderung nach minimaler Krümmung der Fitkurve durchgeführt wird. Die dabei nötige Gauß-Elimination geschieht durch die Subroutine **DGAUSS**.

4. Prüfung des Programms an Testfällen

4.1. LINIENINTEGRALE AUF ANALYTISCH GEGEBENEN FLUSSFLÄCHEN

Nimmt man für die Flußflächen z. B. konzentrische Ellipsen mit der Exzentrizität e und den Mittelpunktskoordinaten μ, ν an, so kann man die nach Abschnitt 2 für die Linienintegrale benötigte Funktion $g_k(\rho)$ analytisch berechnen: Man bestimmt die Schnittpunkte der Geraden $y_k = m_k x + t_k$ mit den Ellipsen und findet deren Abstand $\ell_k(\rho)$ als

$$\ell_k^2(\rho) = 4(m_k^2 + 1) \frac{(m_k(t_k - \nu) - \mu e^2)^2 - (m_k^2 + e^2)(\mu^2 e^2 + (t_k - \nu)^2 - b^2(\rho))}{(m_k^2 + e^2)^2}.$$

Die Maßzahl ρ geht dabei linear mit der Halbachse b und hat für die Halbachse der "Separatrix" b_s den Wert 1 :

$$b(\rho) = b_s \rho.$$

Die Halbachse der innersten Ellipse, die der Sehstrahl gerade noch berührt, erhält man aus $\ell_k(\rho) = 0$ zu

$$b_{\min,k} = b_s \rho_{\min,k} = e \cdot \frac{(m_k \mu + t_k - \nu)}{\sqrt{m_k^2 + e^2}}.$$

Aus der Definitionsgleichung

$$g_k(\rho) = \frac{\ell_k(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - \rho_{\min,k}^2}}$$

findet man schließlich durch Einsetzen obiger Ausdrücke

$$g_k = 2b_s \sqrt{\frac{m_k^2 + 1}{m_k^2 + e^2}}$$

und stellt fest, daß g_k für alle Flußflächen dasselbe ist. Im Grenzfall konzentrischer Kreise ($e = 1$) erhält man für g_k den Durchmesser des Separatrixkreises.

Wählt man nun für die Emissivität $w(\rho)$ eine geeignete Funktion, so kann das Integral S_k bei vorgegebenem Sehstrahl berechnet werden. Die einzige Bedingung an $w(\rho)$ ist dabei, daß es am äußeren Rand $\rho = \rho_{\lim}$ den Wert Null erreicht. Wir wählen

$$w(\rho) = w_0 \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\lim}}\right)^6\right),$$

dann kann das Integral für S_k geschlossen integriert werden:

$$S_k = \int_{\rho_{\min,k}}^{\rho_{\lim}} 2w_0 b_s \sqrt{\frac{m_k^2 + 1}{m_k^2 + e^2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\lim}}\right)^6\right) \cdot \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_{\min,k}^2}}.$$

Man findet den Ausdruck

$$S_k = 2w_0 b_s \sqrt{\frac{m_k^2 + 1}{m_k^2 + e^2}} \cdot \sqrt{\rho_{\lim}^2 - \rho_{\min,k}^2} \cdot$$

$$\frac{30\rho_{\lim}^6 - 6\rho_{\lim}^4 \rho_{\min,k}^2 - 8\rho_{\lim}^2 \rho_{\min,k}^4 - 16\rho_{\min,k}^6}{35\rho_{\lim}^6}.$$

Zum Test des Entfaltungsprogramms wählt man eine Schar Sehstrahlen mit den Steigungen m_k und den Abschnitten t_k auf der vertikalen Achse, berechnet für jeden Sehstrahl das zugehörige $\rho_{\min,k}$ und schließlich das Bolometersignal S_k , das bei der angenommenen Emissivität $w(\rho)$ gemessen werden müßte. Diese Meßsignale, versehen mit relativen Fehlern ε_k , steckt man zusammen mit den übrigen gewählten Werten in das Entfaltungsprogramm und vergleicht am Schluß die von diesem gefittete Emissivität $w(\rho)$ mit der ursprünglich gewählten. Die Abbildungen Fig. 3, 4 und 5 zeigen hierfür ein Beispiel, die dabei verwendeten Daten sind:

- Flußflächen: konzentrische Ellipsen der Elliptizität $e = 2$,
Koordinaten des Ellipsenmittelpunkts: $\mu = 1.7$ m, $\nu = 0.1$ m,
Halbachse der Separatrix $b_s = 0.84$ m.
- Sehstrahlen: Daten der Bolometerkamera, wie sie an ASDEX-Upgrade eingesetzt werden soll. Die genaue Lage kann aus der Zeichnung entnommen werden.
- Meßsignale: $w_0 = 10^4$, $\rho_{\lim} = 1.07$, relativer Fehler ε_k siehe Fig. 5.

Fig. 3 zeigt die konzentrischen, elliptischen Flußflächen sowie die Lage der Bolometersichtstrahlen. Das "verbotene Gebiet" (s. Abschnitt 3.1) ist durch das Rechteck links unten gekennzeichnet. Sehstrahlen, die dieses Gebiet treffen oder die außerhalb der Flußflächen verlaufen, werden zur Entfaltung nicht benutzt und sind punktiert gezeichnet. Auf Fig. 4 sind die Funktionen $g(\rho)$ und $g'(\rho)$ für alle

benutzten Kanäle dargestellt. Man sieht, daß die Funktion $g(\rho)$ für alle Sehstrahlen über ρ konstant ist; dementsprechend ist $g'(\rho)$ überall = 0. Fig. 5 schließlich zeigt für zwei Fälle die angenommene Emissivität $w(\rho)$ sowie als gestrichelte Kurve die vom Programm gefitteten Werte. Die kleinen Striche längs der ρ -Achse markieren die minimalen ρ -Werte der Meßkanäle. Im Fall a) wurde dabei für alle Kanäle ein relativer Meßfehler von $\epsilon_k = 0.05$ angenommen. Die Abweichung des Fits von den ursprünglichen Werten ergibt sich aus der Forderung minimaler Krümmung für die Fitkurve. Im Fall b) wurden die Meßfehler $\epsilon_k = 0.001$ gewählt, hier fallen die beiden Kurven praktisch zusammen.

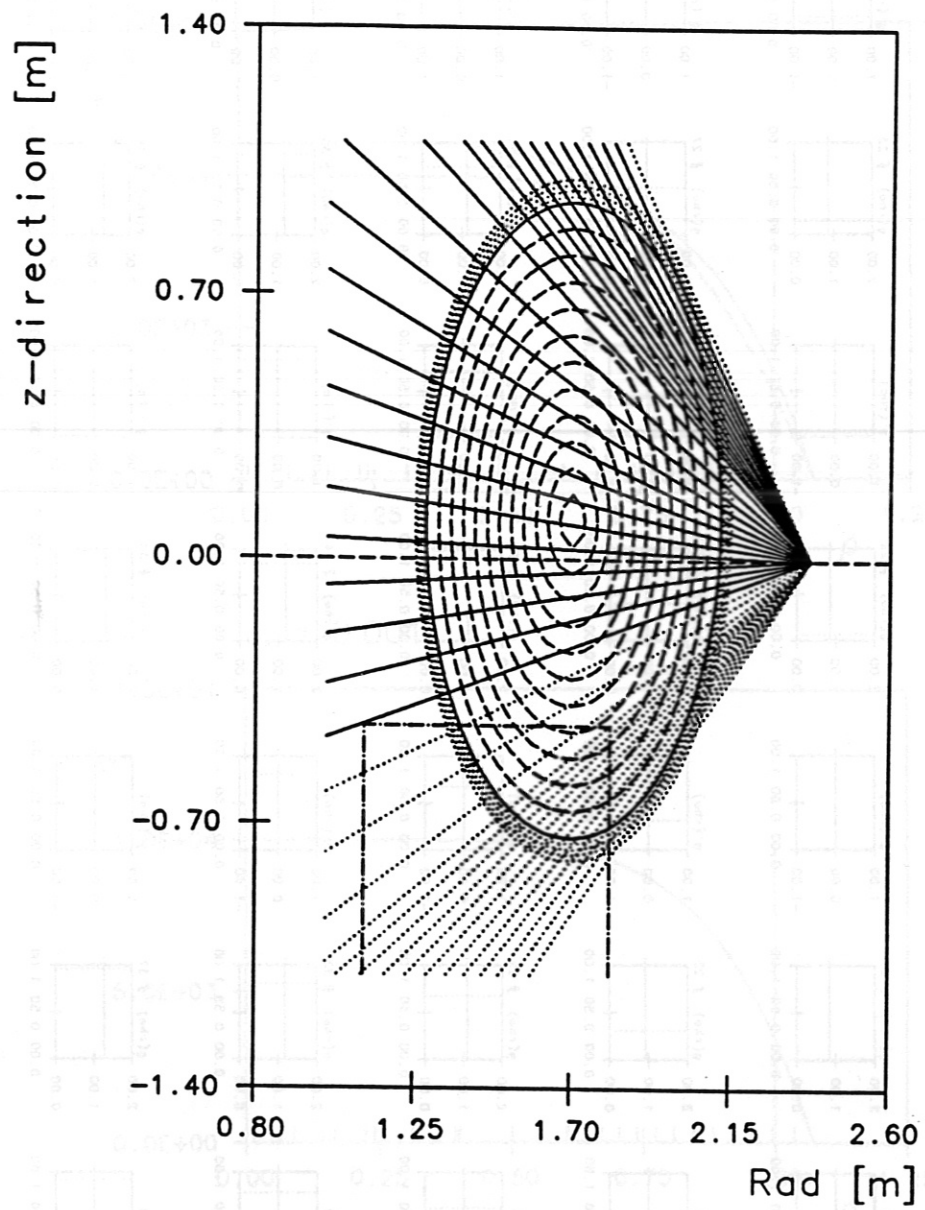


Fig. 3. Darstellung der elliptischen Flußflächen sowie der zur Entfaltung benutzten Sehstrahlen

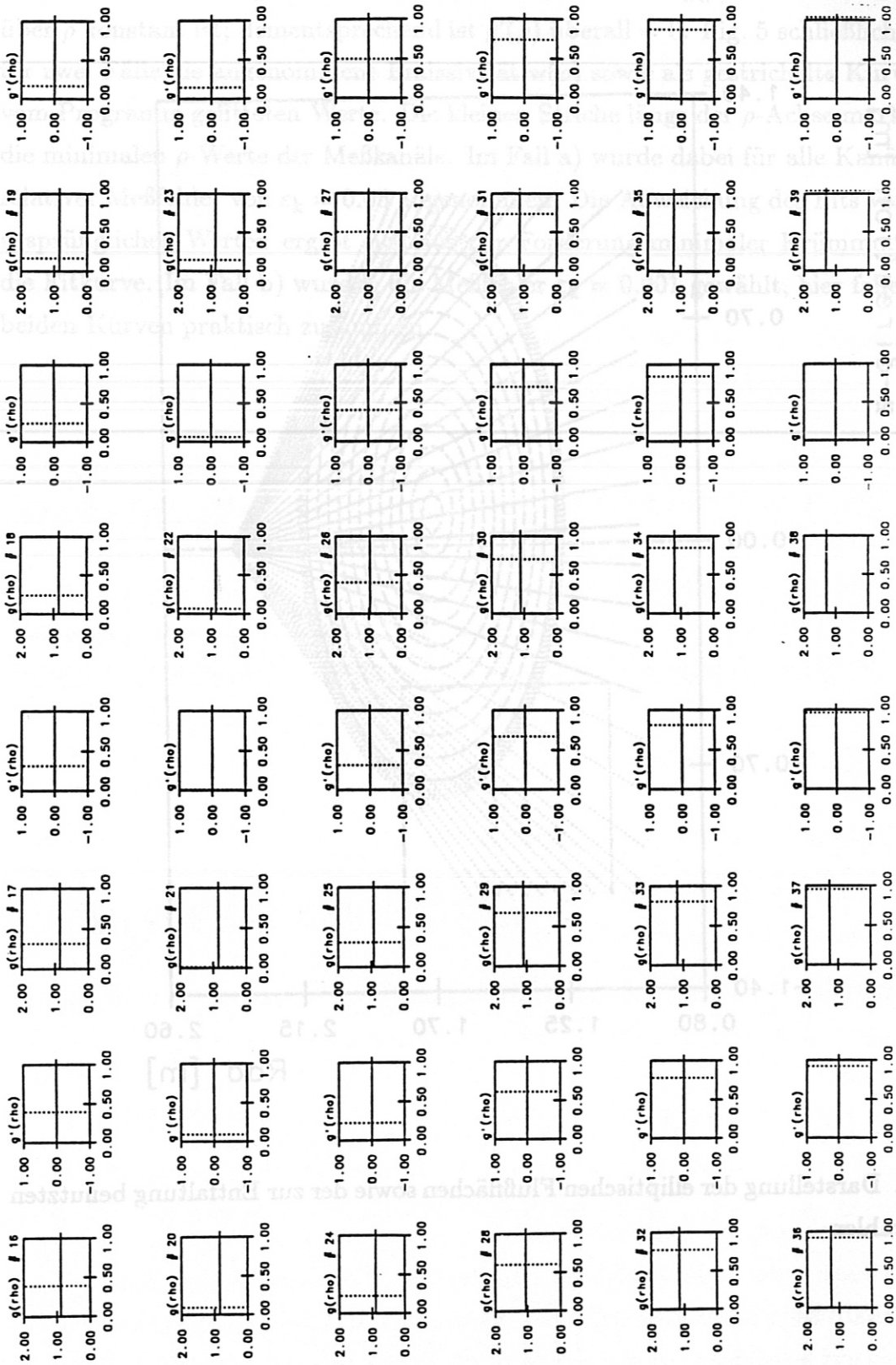


Fig. 4. Plot der berechneten Funktionen $g(\rho)$ und $g'(\rho)$ für alle benutzten Sehstrahlen

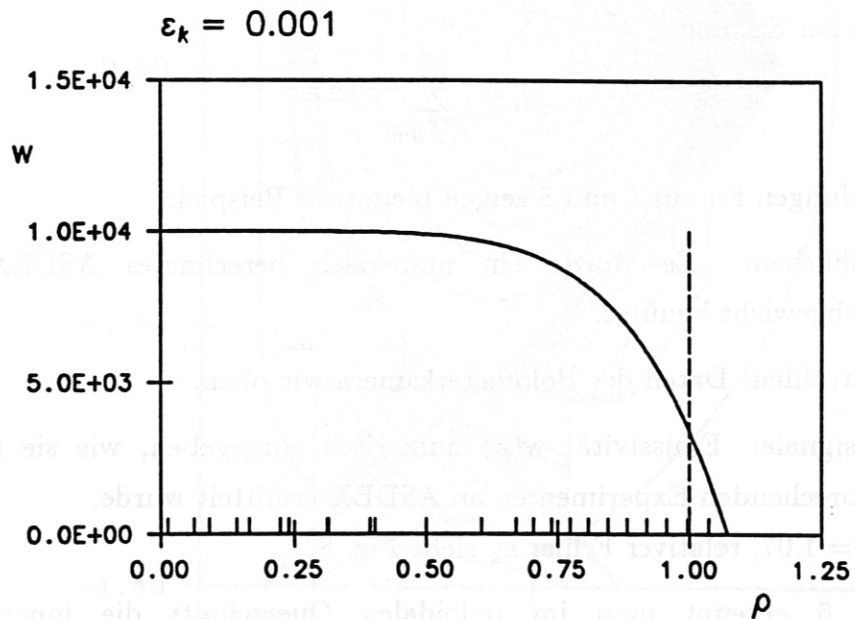
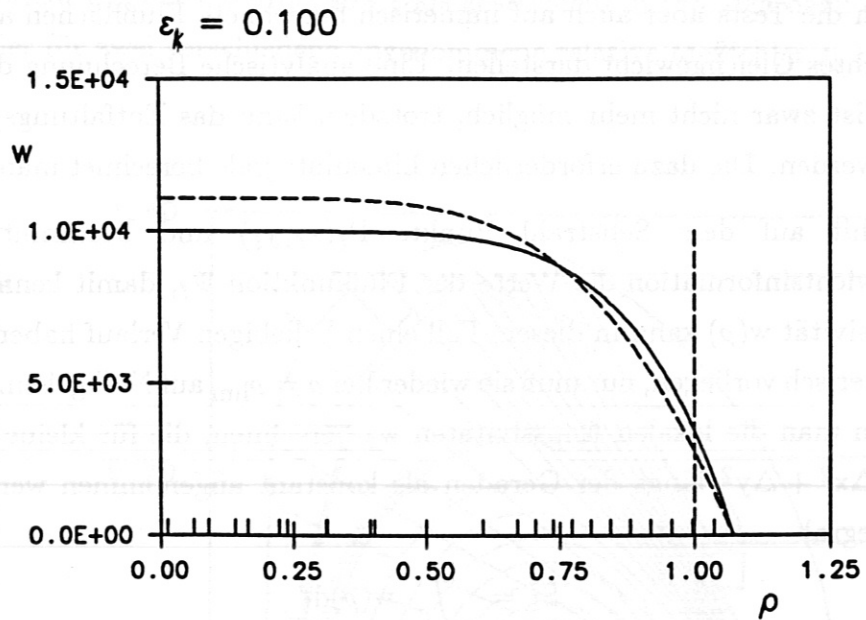


Fig. 5. Vorgegebene (ausgezogen) sowie gefittete (gestrichelt) Emissivität $w(\rho)$ für zwei verschiedene relative Fehler ε_k

4.2. LINIENINTEGRALE AUF NUMERISCH BERECHNETEN FLUSSFLÄCHEN

Man kann die Tests aber auch auf numerisch berechnete Flußflächen ausdehnen, die ein echtes Gleichgewicht darstellen. Eine analytische Berechnung der Linienintegrale ist zwar nicht mehr möglich, trotzdem kann das Entfaltungsprogramm getestet werden. Die dazu erforderlichen Linienintegrale berechnet man wie folgt:

Man wählt auf dem Sehstrahl Punkte $P_\ell(x_\ell, y_\ell)$ und bestimmt aus der Gleichgewichtsinformation die Werte der Flußfunktion Ψ_ℓ , damit kennt man ρ_ℓ . Die Emissivität $w(\rho)$ kann in diesem Fall einen beliebigen Verlauf haben, sie kann auch numerisch vorliegen, nur muß sie wieder bei $\rho = \rho_{\text{lim}}$ auf Null gehen. Mit ihrer Hilfe kann man die lokalen Emissivitäten w_ℓ berechnen, die für kleine Intervalle $\Delta\ell = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ längs der Geraden als konstant angenommen werden. Das Linienintegral

$$S_L = \int_{\rho \leq \rho_{\text{lim}}} w(\rho) d\ell$$

wird dann zur Summe

$$S_L = \sum_{\rho \leq \rho_{\text{lim}}} w_\ell \Delta\ell.$$

Die Abbildungen Fig. 6, 7 und 8 zeigen hierzu ein Beispiel:

- Flußflächen: Es wurde ein numerisch berechnetes ASDEX-Upgrade Gleichgewicht benützt.
- Sehstrahlen: Daten der Bolometerkamera wie oben.
- Meßsignale: Emissivität $w(\rho)$ numerisch vorgegeben, wie sie früher bei entsprechenden Experimenten an ASDEX ermittelt wurde.
 $\rho_{\text{lim}} = 1.07$, relativer Fehler ε_k siehe Fig. 8.

Auf Fig. 6 erkennt man im poloidalen Querschnitt die innere Kontur des Vakuumgefäßes von ASDEX-Upgrade sowie die Umrissse der wichtigsten Einbauten. Die vom Programm DIVA berechneten Flußflächen eines Single-Null-Gleichgewichtes sind eingezeichnet, ebenso das Rechteck des "verbotenen Gebietes" sowie die benutzten und nicht benutzten Bolometersichtstrahlen. In Fig. 7 sind für alle benutzten Kanäle die Funktionen $g(\rho)$ und $g'(\rho)$ dargestellt, die jetzt eine Abhängigkeit von ρ aufweisen. Fig. 8 zeigt die numerisch vorgegebene

Emissivität $w(\rho)$, wie sie früher an ASDEX bei einem ähnlichen, kreisförmigen Gleichgewicht gemessen wurde, sowie als gestrichelte Kurve den dazu ermittelten Fit, wieder für zwei verschiedene angenommene relative Meßfehler ε_k .

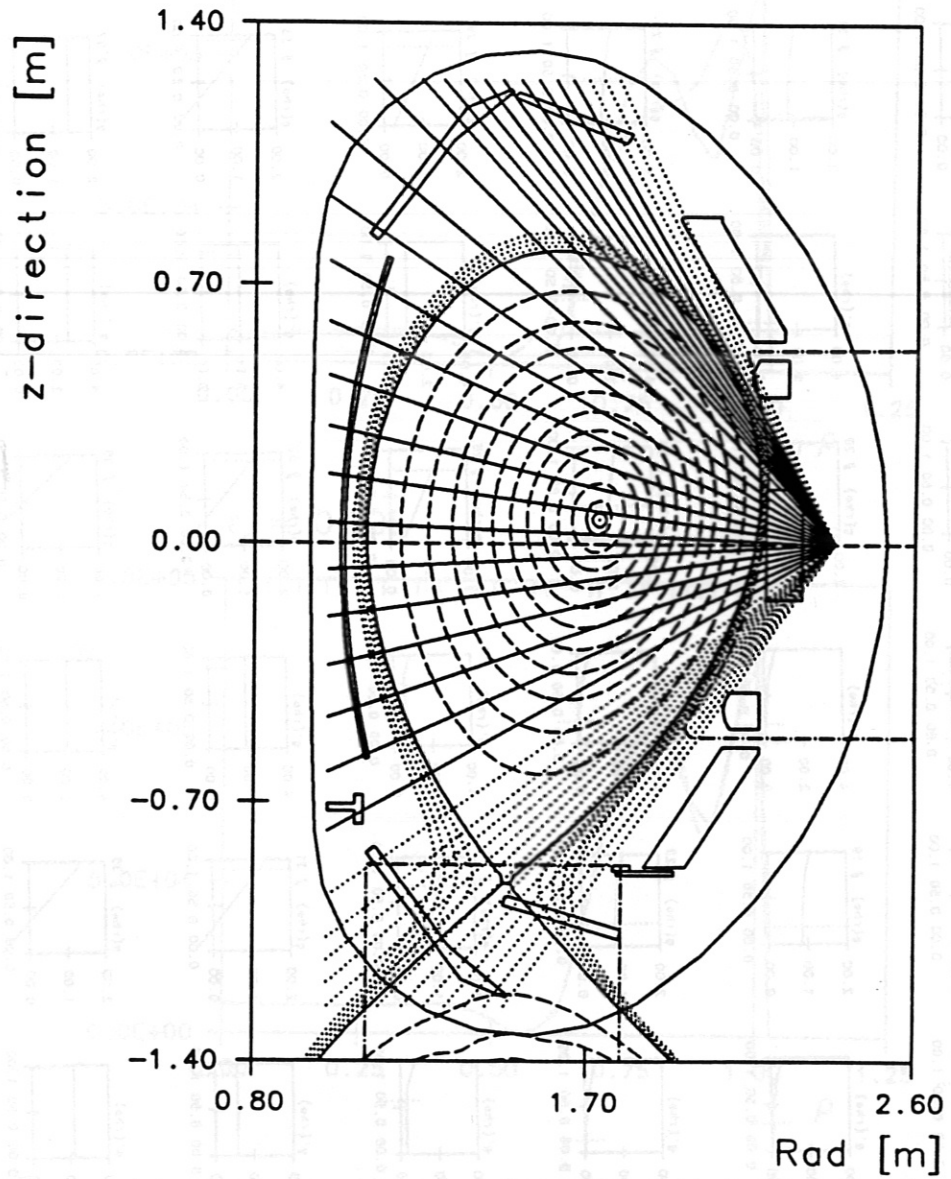


Fig. 6. Numerisch berechnete Flußflächen an ASDEX-Upgrade und zur Entfaltung benutzte Sehstrahlen

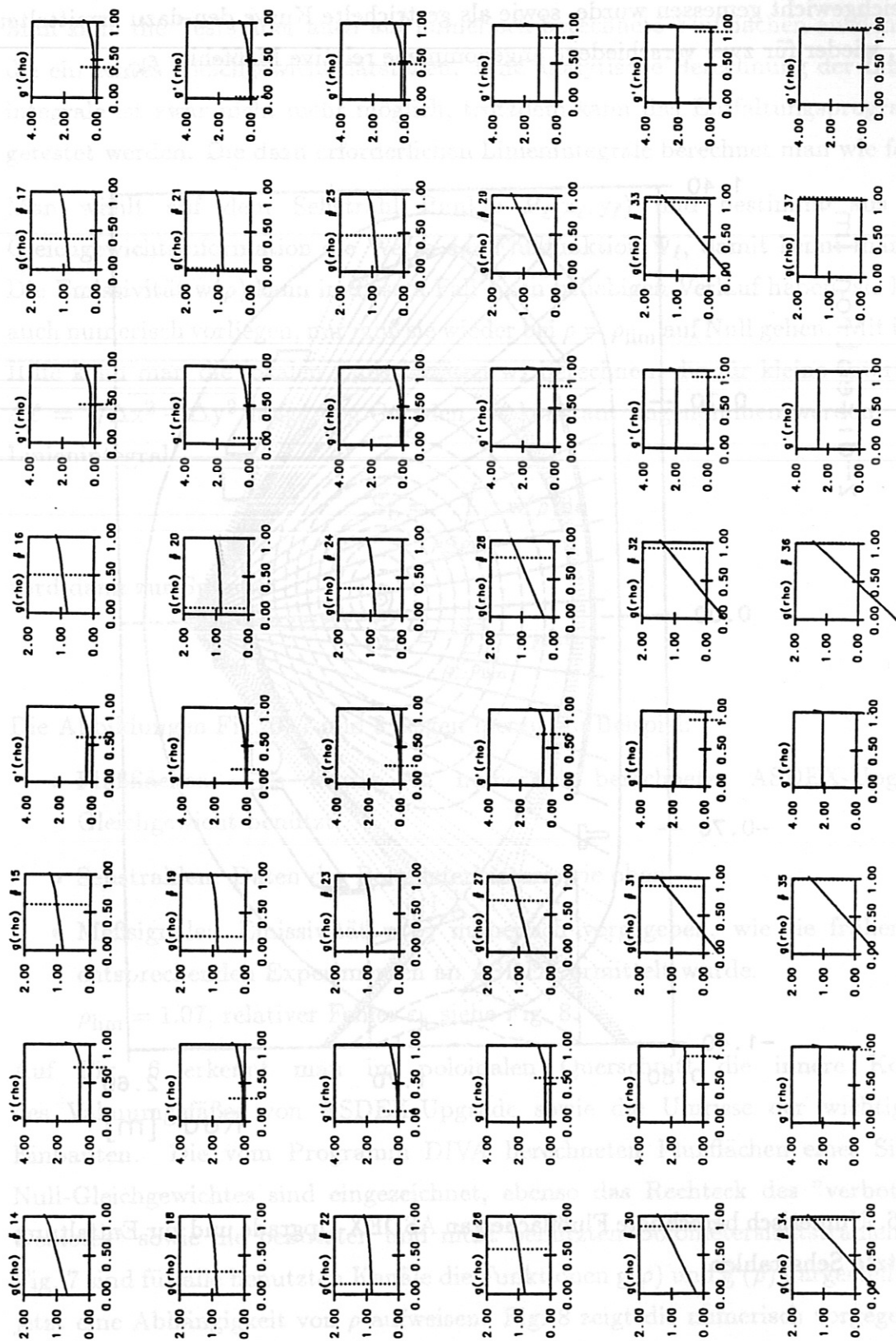


Fig. 7. Plot der berechneten Funktionen $g(\rho)$ und $g'(\rho)$ für alle benutzten Sehstrahlen

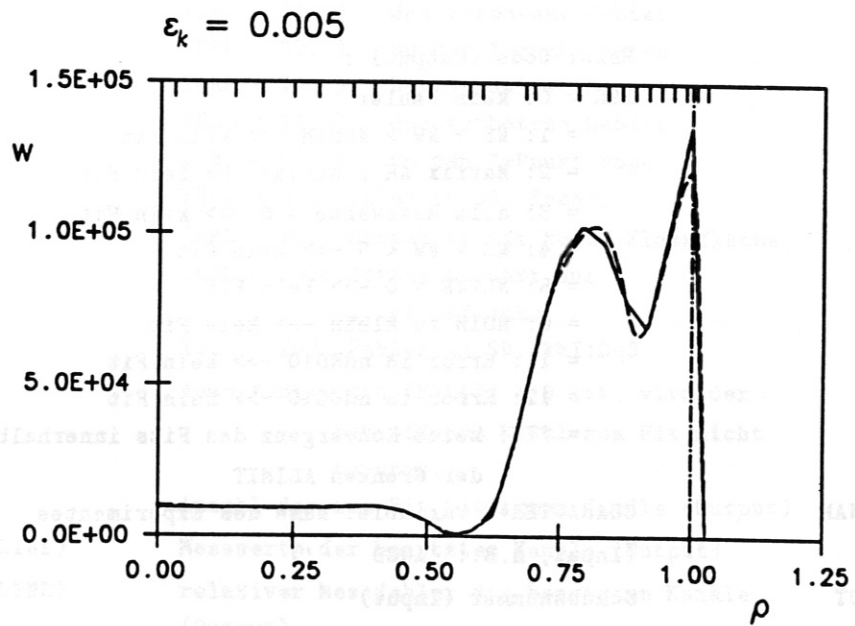
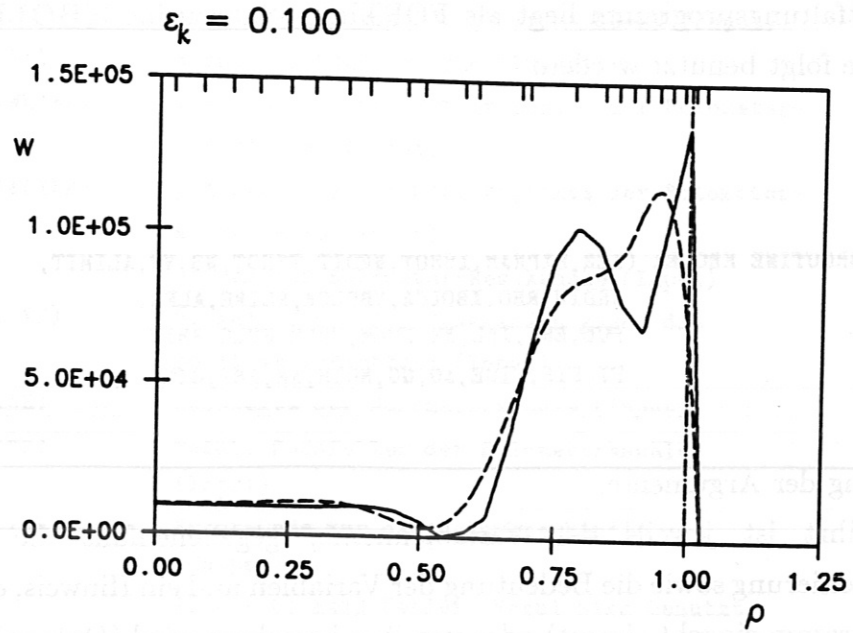


Fig. 8. Vorgegebene (ausgezogen) sowie gefittete (gestrichelt) Emissivität $w(\rho)$ für zwei verschiedene relative Fehler ε_k

5. Anwendung des Programms

Das Entfaltungsprogramm liegt als FORTRAN-Subroutine **KBOLEA** vor und kann wie folgt benutzt werden:

Aufruf:

```
SUBROUTINE KBOLEA (IER,EXPNAM,ISHOT,NEDIT,TSHOT,NS,NW,ALIMIT,
NRDIM,RHO,XBOLCA,YBOLCA,NLINE,ALFA,
FUL,ERL,IHL,NK,FULM,ERLM,FULC,RMIN,
FI,FIS,FISE,AO,GG,MDIM,AM,AMI,CIK)
```

Erklärung der Argumente:

(Aufgeführt ist jeweils der Variablenname, gegebenenfalls die notwendige Dimensionierung sowie die Bedeutung der Variablen und ein Hinweis, ob die Größe ins Programm eingeht (Input) oder von ihm berechnet wird (Output))

IER	Error-Code (Output) : IER = 0: kein Fehler = 1: $NS + NW > NRDIM$ ->> kein Fit = 2: Matrix AM singularär ->> kein Fit = 3: alle Messwerte = 0 ->> kein Fit = 4: $NS + NW < 5$ ->> kein Fit = 5: $NLINE = 0$ ->> kein Fit = 6: MDIM zu klein ->> kein Fit = 11: Error in ndRD10 ->> kein Fit = 12: Error in ndGC10 ->> kein Fit = 777: keine Konvergenz des Fits innerhalb der Grenzen ALIMIT
EXPNAM	CHARACTER*8-Variable: Name des Experimentes (Input, z.B.: 'AUGD')
ISHOT	Schussnummer (Input)
NEDIT	Edition-Nummer (Input)
TSHOT	Zeitpunkt (sec) innerhalb des Schusses (Input)
NS	Anzahl der Stützstellen von $\rho=0$ bis $\rho=r_{sep}$, NS muss ≥ 3 sein (Input)
NW	Anzahl der Intervalle in der Scrape-off Region, NW muss ≥ 2 sein (Input) NS+NW ist die Gesamtzahl der Stützstellen

ALIMIT(2)	Grenzen des Fit-Faktors A0 (Input) Empfehlung: 1.0E+05, 1.0
NRDIM	1. Dimension von GG: NRDIM >= NS+NW (Input)
RHO(NRDIM)	normierte "Radien" rho (Output)
XBOLCA(NLINE)	x-Koord. (m) des Schnittpunkts der Bolometer- sichtlinien (Input)
YBOLCA(NLINE)	y-Koord. (m) des Schnittpunkts der Bolometer- sichtlinien (Input)
NLINE	Anzahl der Bolometer-Messkanäle (Input)
ALFA(NLINE)	Winkel (Grad) der Messkanäle gegen die positive x-Richtung (Input)
FUL(NLINE)	Messwerte der Bolometerkanäle (Input)
ERL(NLINE)	relat. Messfehler der Bolometerkanäle (Input)
IERL(NLINE)	Error-Code für die Bolometerkanäle (Output): IERL = 0: kein Fehler, Kanal wird benutzt IERL = 20:) Der Strahl schneidet IERL = 21:) das verbotene Gebiet IERL = 22:) um den X-Punkt unten IERL = 23:) Der Strahl schneidet IERL = 24:) das verbotene Gebiet IERL = 25:) um den X-Punkt oben IERL = 33: Fehler in SR. fscapq IERL = 101: Strahl trifft keine Flussfläche IERL = 102: Strahl berührt nur 1. Flussfläche IERL = 203: Fehler in SR. kkI1Dq3 Anmerkung: wenn IERL(I) > 0 ist, wird der betreffende Kanal zum Fit nicht benutzt.
NK	Anzahl der zum Fit benutzten Kanäle (Output)
FULM(NLINE)	Messwerte der benutzten Kanäle (Output)
ERLM(NLINE)	relativer Messfehler der benutzten Kanäle (Output)
FULC(NLINE)	Werte der Linienintegrale, berechnet aus der gefitteten Funktion (Output)
RMIN(NLINE)	normierter Radius rhomin der innersten Fluss- fläche, die der Sichtstrahl des Linien- integrals berührt (Output)
FI(NS+NW)	gefittete Funktionswerte an den Stützstellen

	RHO (Output)
FIS(NS+NW)	1. Ableitung der gefitteten Funktion an den Stützstellen (an der Separatrix: linker Wert) (Output)
FISE	Steuergrösse für 1. Abl. bei rho = rsep: (Input und Output): = 0.0: 1. Abl. stetig -> FISE bleibt unverändert > 0.0: 1. Abl. unstetig -> FISE enthält bei Rückkehr den Wert der 1. Ableitung "rechts" (=ausserhalb) der Separatrix
AO	Gewichtsfaktor der Messwerte beim Fit (Output)
GG(NRDIM,2,NLINE)	Hilfsarray zur Berechnung der Flussflächenfunktionen g(rho) und g'(rho)
MDIM	1. Dimension der Hilfsarrays "AM" und "AMI": MDIM = 2*(NS+NW) (Input)
AM(MDIM,MDIM+2)	Hilfsarray (REAL*8)
AMI(MDIM,NLINE)	Hilfsarray (REAL*8)
CIK(18,NS+NW)	Hilfsarray (REAL*8)

Benötigte Daten:

Gleichgewichtsinformation von H. Zehrfeld
 Daten der Graphit-Struktur (s. Abschnitt 3.1)
 Daten der Bolometerkamera
 Meßsignale und relative Fehler
 Anzahl der Stützstellen (NS, NW) für den Fit

Die beiden erstgenannten Datensätze werden intern gelesen und verwaltet.

Liste der (im Paket enthaltenen) Subroutinen:

KBOLEA (...)
KPROFL (...)
DGAUSS (...)
fsCUT1 (...)
ndRD1a (...)
ndGCd1 (...)

Alle hier beschriebenen Programme sind in der Bibliothek **libkk.a** gespeichert. Für das Lesen der Daten aus den AUGD Schußfiles benötigt man die Bibliothek **libsfa.a**. Für einige allgemeine Utilities und Plots braucht man außerdem die **libwoss.a** und die **libpplot.a**. Alle genannten Bibliotheken sind auf den UNIX-Workstations des Experiments ASDEX-Upgrade vorhanden:

```
libs = /usr/ads/libkk.a  \  
      /usr/ads/libwoss.a \  
      /usr/ads/libsfa.a  \  
      /usr/ads/libpplot.a
```

Für CMS-Benutzer (nur IBM-C) mit AUG-Profilen werden die beiden letztgenannten Bibliotheken automatisch bereitgestellt.

6. Literaturverzeichnis

- [1] A. N. Tikhonov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 15, 501 (1963)
- [2] H. Krause, private Mitteilung
- [3] K. Lackner, H.P. Zehrfeld, private Mitteilung

erfolgte Daten

Für CMS-Benutzer (nur IBM-C) mit AUG-Prozess werden die beiden letztgenannten Gleichgewichtsinformationen von H. Zehrfeld, H. Krause und K. Lackner von Bibliothekern automatisch bereitgestellt (Abschnitt 3.1)

Daten der Graphit-Studie (s. Abschnitt 3.1)

Daten der Heliumdetektoren

Meßsignale und relative Fehler

Anzahl der Stützstellen (NS, NW) für den FT

Die beiden erstgenannten Datensätze werden intern gelesen und verwaltet.