

**Methoden zur Untersuchung der räumlichen Struktur
von Dichtefluktuationen in der Randschicht von
Fusionsexperimenten demonstriert am
Divertortokamak ASDEX**

Gottfried Thelmer

**IPP III/169
Diplomarbeit
Betreuer: Dr. H. Niedermeyer**

Dezember 1990



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

**Methoden zur Untersuchung der räumlichen Struktur
von Dichtefluktuationen in der Randschicht von
Fusionsexperimenten demonstriert am
Divertortokamak ASDEX**

Gottfried Theimer

IPP III/169
Diplomarbeit
Betreuer: Dr. H. Niedermeyer

Dezember 1990

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über
die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Meßmethoden	7
2.1	Die Plasmarandschicht von ASDEX	7
2.2	H $_{\alpha}$ -Diagnostik	7
2.2.1	Physikalische Grundlagen	8
2.2.2	Experimentelle Anordnung	9
2.3	Langmuirsonden	13
2.3.1	Floating Potential	13
2.3.2	Ionensättigungsstrom	14
2.3.3	Experimenteller Aufbau	15
2.4	Messung von Teilchenflußfluktuationen	17
3	Phänomenologische Betrachtung der Meßwerte	19
3.1	Rohsignale	19
3.2	Stationarität und Ergodizität	19
4	Statistische Momente	24
5	Verteilungsfunktionen	25
6	Korrelationsfunktionen	28
6.1	Statistischer Fehler bei der Messung der Kreuzkorrelationsfunktion	30
6.1.1	Der lineare statistische Prozeß	30
6.1.2	Der autoregressive Prozeß	31
6.1.3	Test auf nichtverschwindende Kreuzkorrelation	32
6.2	Raum-zeitliche Korrelationsfunktionen	34
6.3	Sondenkorrelation bei der Simultanmessung von Floating Potential und Ionensättigungsstrom	34
6.3.1	Vergleich der Kreuzkorrelationsfunktionen von Ionensättigungsstrom und Floating Potential	35
6.3.2	Poloidale Geschwindigkeitskomponente der Fluktuationen	36
6.3.3	Poloidale Sondenkorrelation in Abhängigkeit von der radialen Position	38
7	Fouriertransformation (1D)	44

7.1	Eigenschaften	44
7.2	Fouriertransformation von stationären (statistischen) Prozessen	45
7.3	Sampling	46
7.4	Diskrete Fouriertransformation	47
7.4.1	Eigenschaften	47
7.5	Spektren	48
7.5.1	Eigenleistungsspektrum	48
7.5.2	Kreuzspektren	49
7.5.3	Frequenz- und Wellenzahlspektren eines xt -translationsinvarianten statistischen Prozesses	50
7.6	Diskrete Berechnung der Kreuzspektren	51
7.6.1	Mittelung	51
7.6.2	Gesamtleistung	52
7.7	Experimentelle Befunde zum k -Leistungsspektrum	53
7.7.1	H_α -Fluktuationen	53
7.7.2	Fenster	57
7.7.3	k -Spektrum mittels Fit ?	58
7.7.4	Messung von k -Leistungsspektren mit Langmuirsonden	61
7.8	Anwendungen der Kreuzspektralanalyse	63
7.8.1	k -Spektren	63
7.8.2	Frequenzspektren	68
7.8.3	Ausbreitungs- und Phasengeschwindigkeiten — Übersicht	68
7.8.4	Kohärenzlängen und Kohärenzzeiten	69
7.9	Zur Messung der k - und $k\omega$ -Spektren von Fluktuationen des E -Feldes und des Teilchenflusses	72
7.10	Vergleich mit den k -Spektren aus FIR-Messungen	75
8	Räumliche und zeitliche Spektralanalyse. — 2D-Fouriertransformation	76
8.1	Diskrete 2D-Fouriertransformation	76
8.1.1	Praktische Realisierung der 2D-DFT	77
8.2	$k\omega$ -Spektren	78
8.2.1	$k\omega$ -Spektren von H_α -Fluktuationen	79
8.2.2	$k\omega$ -Spektralanalyse des Teilchenflusses	84
8.2.3	$k\omega$ -Kreuzspektren	85

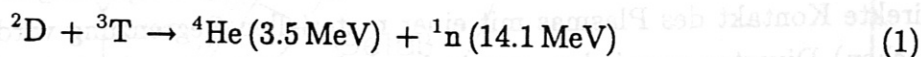
8.2.4 Zusammenhang zwischen Teilchenflußfluktuationen und Fluktuationen der Dichte und des elektrischen Feldes im $k\omega$ -Raum	88
9 Zusammenfassung und Ausblick	90
Verzeichnis der Abbildungen	93
Literatur	95
Danksagung	99

1 Einleitung

Energie aus Kernfusion Neben den regenerativen Energiequellen, welche letztlich alle solaren Ursprungs sind, ist zur Zeit die einzig bekannte Alternative zur künftigen Energieversorgung eine kontrollierte Kernfusionreaktion ausgehend von den Wasserstoffisotopen ^1H , ^2D , ^3T und des Heliumisotops ^3He zu dem besonders stabilen und daher energiereichen Endprodukt ^4He . Auch die Sonne bilanziert die abgestrahlte Leistung im Endeffekt aus der Verschmelzung von 4 Protonen zu einem ^4He , wobei die ablaufende Reaktion (*Bethe-Weizsäcker-Zyklus*) allerdings ein ziemlich komplizierter Kaskadenprozeß ist. Die Reaktionsrate ist entsprechend gering. Die Schwierigkeit eine rentable Rate von energieliefernden Fusionsreaktionen herbeizuführen, hat ihren Ursprung in der Coulombbarriere, deren Höhe B_C für zwei Kerne mit den Ordnungszahlen Z_1 , Z_2 gegeben ist durch

$$B_C = 0.28 \cdot Z_1 Z_2 \text{ [MeV]}$$

[Glasstone1964a]. Obwohl diese Energien mit Teilchenbeschleunigern ohne weiteres erreicht werden, erlauben die geringen Wirkungsquerschnitte sämtlicher in Frage stehender Reaktionen für das Prinzip „*energiereicher Teilchenstrahl/festes Target*“ keine positive Energiebilanz. Demnach ist dafür zu sorgen, daß die Teilchen viele Chancen für einen Fusionsstoß haben. Dies ist gerade das Prinzip der *thermonuklearen Fusion*. Aus der näherungsweise als *maxwellsch* angenommenen Energieverteilung der meisten Plasmen und dem quantenmechanischen *Tunneleffekt* resultiert das Maximum der Reaktionsrate bei einer Temperatur, deren Energieäquivalent wesentlich niedriger ist als die Coulombbarriere [Glasstone1964a]. Den größten Wirkungsquerschnitt aller Fusionsreaktionen hat



Die DT-Reaktion (1) erreicht ihre maximale Rate bei einer Iontemperatur von 50–60 keV¹ [Glasstone1964a], d. h. selbst für die am leichtesten zu zündende Reaktion braucht man außerordentlich hohe Temperaturen. Von *thermonuklearer Zündung* spricht man, wenn die im Plasma deponierte Fusionsleistungsdichte gleich ist der Gesamtverlustleistungsdichte. Die Zündung hängt somit von Dichte n , Temperatur T und Energieeinschlußzeit τ_E ab. Der Zusammenhang wird durch die Schar der „Zündkurven“ zum Parameter τ_E beschrieben [Pinkau1989a]. Zündung hat man, wenn für das Produkt aus Dichte, Temperatur und Energieeinschlußzeit (Zündparameter) gilt

$$n T \tau_E \geq 3 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \text{ keV s} \quad (2)$$

Da sich ein Kontakt des Plasmas mit materiellen Wänden bei derart hohen Temperaturen naturgemäß verbietet, werden heute zwei Einschlußprinzipien mit starkem Nachdruck experimentell erforscht:

¹ 1 eV der Temperatur $k_B T \equiv 11600 \text{ K}$

Trägheitsfusion: Ein kleines (mm) Kügelchen („Pellet“) aus gefrorenem DT wird durch Beschuß mit äußerst intensiver Teilchen- oder Laserstrahlung gleichzeitig komprimiert (10^2 – 10^3 -fache der Festkörperdichte) und auf die notwendige Temperatur gebracht. Die Einschlußzeit ist allein durch die Expansionsgeschwindigkeit des quasi als Mini-H-Bombe explodierenden Pellets bestimmt [Raeder1981a].

Magnetischer Plasmaeinschluß: Der Plasmaeinschluß nach diesem Prinzip ist mit Abstand am weitesten entwickelt, sowohl was die Erfüllung der Zündbedingung (2) betrifft, als auch im Hinblick auf eine dereinstige Reaktortauglichkeit. Im Gegensatz zum Trägheitseinschluß bemüht man sich hier bei rel. geringer Dichte (reaktortypisch wäre $n \approx 1 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$) um möglichst große Teilchen- und Energieeinschlußzeiten und gleichzeitig optimale Temperatur. Die Magnetfeldkonfigurationen zerfallen in 2 Klassen: Ist das Plasma in einem Gebiet eingeschlossen, innerhalb dessen die B-Feldlinien auf geschlossenen Flächen liegen, so spricht man von einer „geschlossenen Konfiguration“, andernfalls von einer „offenen Konfiguration“.

Tokamak: Das Tokamakprinzip [Artsimovich1972a] wurde von den Konzepten mit magnetischem Einschluß bis jetzt am intensivsten untersucht. Es ist eine toroidale (also geschlossene) Konfiguration bei der das Magnetfeld hauptsächlich eine Superposition darstellt aus einem mit Spulen erzeugten toroidalen B-Feld B_φ und dem von einem toroidalen Plasmastrom induzierten poloidalen B-Feld B_θ . Der toroidale Strom dient dabei zugleich der ohmschen Heizung des Plasmas.

ASDEX (Axially Symmetric Divertor Experiment) *Der Divertor:* Zur Herstellung eines definierten Plasmaquerschnitts benötigt man irgendeine Begrenzung (Limiter). Der direkte Kontakt des Plasmas mit einer materiellen Begrenzung wird durch den (magnetischen) Divertor vermieden, was insbesondere Plasmaverunreinigungen durch Wandelemente stark reduziert. Bei dieser Magnetfeldtopologie liegen die B-Feldlinien ab einem bestimmten Plasmaradius nicht mehr auf geschlossenen Flußflächen sondern durchsetzen abseits vom Hauptplasma die Divertorprallplatten.

Die Separatrix: Dies ist der äußere Rand der geschlossenen Flußflächen. Ein geladenes, entlang der B-Feldlinien frei bewegliches Teilchen, das auf irgendeine Weise aus dem Einschlußbereich an die Separatrix gelangt, muß die Divertorprallplatten erreichen. Bei ASDEX sind diese in zwei Divertorräumen ober- und unterhalb des Hauptplasmas untergebracht. Abbildung 1 zeigt einen ($\varphi = \text{konst.}$)-Schnitt durch ASDEX, einer Tokamakanordnung mit einem großen Radius von 165 cm und einem kleinen Radius von 40 cm. Das Hauptfeld B_φ ist $\leq 2.8 \text{ T}$, der Plasmastrom $I_p \leq 500 \text{ kA}$. Als Zusatzheizung stehen zur Verfügung ICRH („Ion Cyclotron Resonance Heating“) und NBI („Neutral Beam Injection“). HF-Einstrahlung bei der unteren hybriden Frequenz LH („Lower Hybrid“) dient unter anderem als Zusatzheizung für die Elektronen. Bezüglich der Einzelheiten des ASDEX-Konzepts und Designs sei auf die Literatur verwiesen

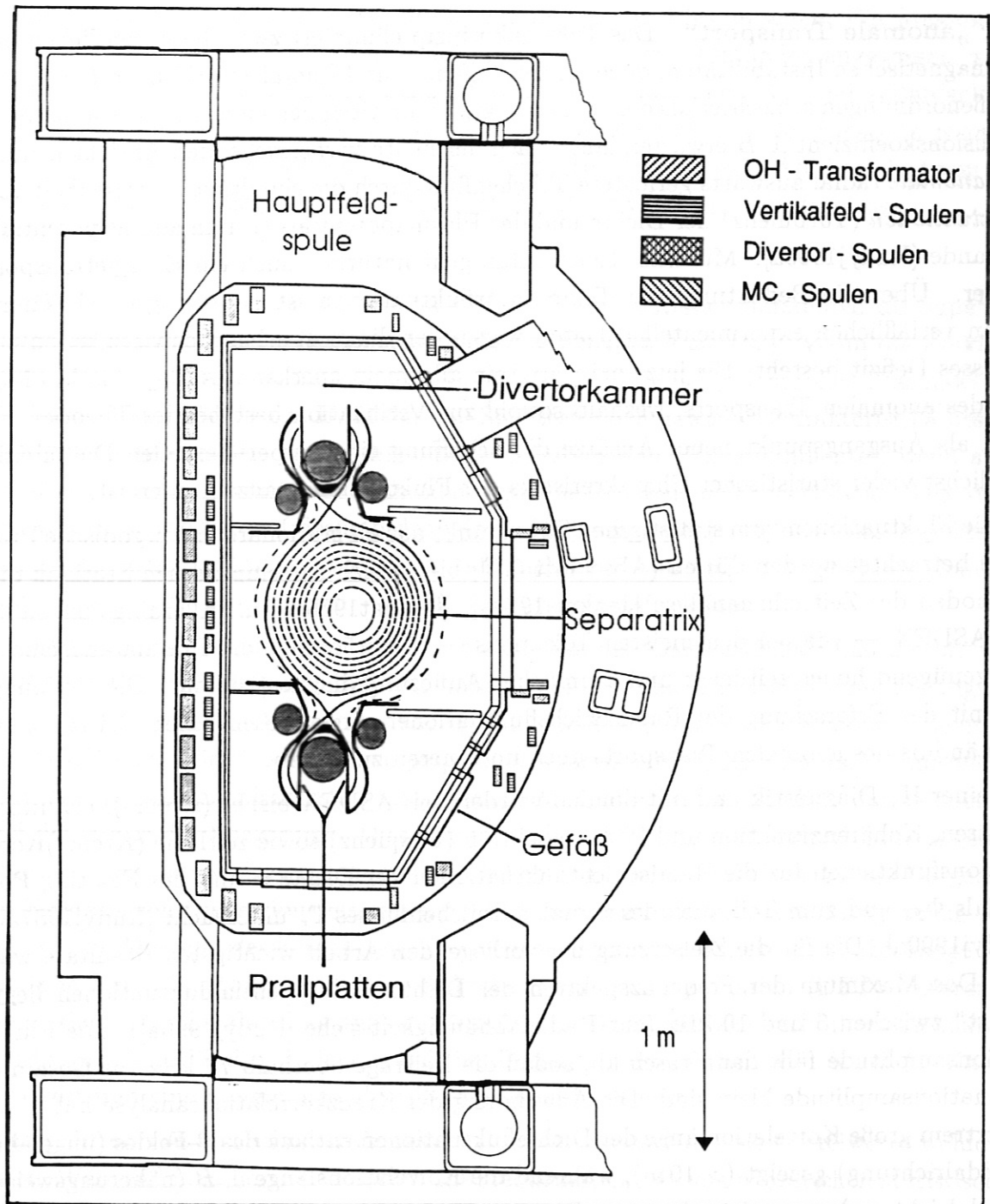


Abbildung 1: $\varphi = \text{konst.}$ -Schnitt durch ASDEX. Die fast kreisförmigen gestrichelten Linien im Zentrum der Abbildung symbolisieren die geschlossenen Flußflächen. Die Separatrix ist bezeichnet. Der Transformator (OH) induziert den toroidalen Plasmastrom.

z. B. [Keilhacker1981a], [Keilhacker1983a].

Der „anomale Transport“ Das Tokamakprinzip eliminiert zwar die wesentlichen hydromagnetischen Instabilitäten, doch ist der Teilchen- und Energieeinschluß trotzdem um Größenordnungen schlechter als der stoßbedingte theoretisch berechnete („neoklassische“) Diffusionskoeffizient $\perp B$ erwarten läßt. Nach der heute vorherrschenden Ansicht kommt der *anomale* radial auswärts gerichtete Teilchenfluß durch die simultane Anwesenheit von *Fluktuationen* (Turbulenz) der Dichte und des Plasmapotentials (Raumladungspotential) zustande [Rudyj1990a]. Mit dem Teilchenfluß geht natürlich auch ein Energietransport einher. Über die Bedeutung von Temperaturfluktuationen ist am wenigsten bekannt, da an verlässlichen experimentellen Daten wegen der diagnostischen Schwierigkeiten ein gewisses Defizit besteht. Bis jetzt existiert kein allgemein anerkanntes theoretisches Modell des anomalen Transports, weshalb sowohl zur Verifikation bestehender Theorien als auch als Ausgangspunkt neuer Ansätze die Schaffung einer experimentellen Datenbasis möglichst vieler statistischer Charakteristika der Fluktuationen anzustreben ist.

Da die Fluktuationen vom statistischen Standpunkt aus als stationäre und ergodische Prozesse betrachtet werden dürfen (Abschnitt 3.2), bieten sich zur empirischen Statistik die Methoden der Zeitreihenanalyse [Jenkins1968a], [Bendat1966a] an. Allerdings ist dafür an ASDEX — wie bei den meisten Tokamaks — eigentlich nur die Plasmarandschicht mit genügend hoher zeitlicher und räumlicher Auflösung diagnostizierbar. Die Hoffnung ist, mit der Erforschung der Randschichtfluktuationen einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis des anomalen Transports auch im Inneren zu leisten.

Mit einer H_α -Diagnostik und mit Sonden wurden bei ASDEX bisher (Kreuz-)Leistungsspektren, Kohärenzfunktion und Phasenspektren (Frequenz) sowie zeitliche (Kreuz-)Korrelationsfunktionen für die Randschichtfluktuationen der Dichte n und des Floating Potentials Φ_{Fl} und zum Teil auch des radialen Teilchenflusses Γ_r untersucht [Rudyj1987a], [Rudyj1990a]. Die für die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit wichtigsten Resultate waren: Das Maximum der Frequenzspektren der Dichte und Potentialfluktuationen liegt „meist“ zwischen 5 und 10 kHz (zur Radialabhängigkeit siehe [Rudyj1990a]). Die Fluktuationsamplitude fällt dann rasch ab, sodaß die Beiträge oberhalb 70 kHz zur Gesamtfluktuationsamplitude klein sind. Die Anwendung der Kreuzkorrelationsanalyse hat u. a. die extrem große Korrelationslänge der Dichtefluktuationen entlang des B-Feldes (ungefähr Toroidalrichtung) gezeigt (> 10 m), während die Korrelationslänge $\perp B$ (näherungsweise Poloidalrichtung) nur ~ 1 cm beträgt. Dies ist äquivalent zu $k_{tor}/k_{pol} \approx 0$. Eine Absolutmessung des lokalen fluktuationsinduzierten radialen Nettoteilchenflusses hat bestätigt, daß der beobachtete globale Teilchenverlust bei ASDEX den Fluktuationen zugeschrieben werden kann.

Offenbar fehlt noch detaillierte Information über die räumliche Struktur der Randschichtfluktuationen in radialer und poloidaler Richtung. Bei ASDEX mußte auf die Untersu-

chung der *radialen* Struktur verzichtet werden. Z. B. ist eine Bestimmung des k -Spektrums i. a. nur über Vielkanalmessungen mit Langmuirsonden möglich, doch könnte wegen deren Limitereigenschaft nur die innerste Spitze ein ungestörtes Plasma sehen. Für Messungen mit radialer Ortsauflösung wäre man auf neue diagnostische Methoden angewiesen, z. B. HIBP (Heavy Ion Beam Probe) [Schoch1987a]. Die simultane orts- und zeitaufgelöste (Vielkanal-)Messung von Fluktuationen des Plasmapotentials und der Dichte in *poloidaler* Richtung erlaubt die Bestimmung des *radialen* Teilchenflusses in Abhängigkeit von der Poloidalkoordinate. Insofern ist die *poloidale* Struktur von primärem Interesse.

Die Thematik Im statistischen Sinn sind auch Fluktuationen darstellbar als Superposition von monochromatischen ebenen Wellen $\propto \exp i(kx - \omega t + \varphi)$. Wenn die Fluktuationen das Ergebnis einer turbulenten Entartung irgendwelcher instabiler Plasmawellen darstellen, dann könnten z. B. in den $k\omega$ -Spektren noch gewisse Charakteristika des jeweils zugrundeliegenden Wellenphänomens enthalten sein. Ein prominenter, wenn auch mittlerweile recht umstrittener Kandidat sind die Driftwellen [Liewer1985a]. Die Wahl der Analysemethoden traf deshalb das (Kreuz-)Leistungsspektrum, das Phasenspektrum und die Kohärenzfunktion sowohl im k -, als auch $k\omega$ -Raum und — wegen ihrer Komplementarität zu den $k\omega$ -Spektren — die Kreuzkorrelationsfunktionen.

Richtungsweisend für diese Arbeit war die Erkenntnis [Carlson1989a], daß die oft vorgeschlagene Bestimmung des k -Spektrums aus den *Frequenz*-Phasenspektren der Signale *zweier* (!) Kanäle, z. B. Langmuirsonde mit 2 Spitzen, und deren Abstand voneinander [Beall1982a], die Existenz einer *Dispersionsrelation* notwendig voraussetzt, ansonsten aber nur die beiden niedrigsten statistischen Momente liefert, nämlich das mittlere k und die Breite des Spektrums. Dieses ursprünglich durch Simulationsrechnungen gefundene Resultat konnte inzwischen analytisch bestätigt werden [Carlson1990a]. Da gerade die Existenz von Dispersionsrelationen für Fluktuationen von vornherein fragwürdig war, kam für die Messung der k -Spektren nur eine von den Frequenzspektren unabhängige Methode in Betracht. Um eine auf der diskreten Fouriertransformation (DFT) basierende, der zeitlichen Spektralanalyse analoge räumliche Spektralanalyse durchführen zu können, wurde an ASDEX die H_α -Diagnostik im Rahmen dieser Arbeit von 8 auf 16 Kanäle erweitert und eine Langmuirsonde mit 16 Spitzen installiert.

Die Spektren von statistischen Prozessen sind naturgemäß nur als Mittelwerte wohldefiniert. Während man bei den *diskreten* 1D-Frequenzspektren von ergodischen statistischen Prozessen wegen der großen Anzahl der experimentell verfügbaren zeitlichen Stützstellen (10^4 – 10^5) sehr hohe spektrale Auflösung hat und deshalb über benachbarte Frequenzen mitteln darf, ist dies bei den diskreten k -Spektren aus 16 Stützstellen nicht sinnvoll. Stattdessen werden die k -Spektren zeitlich, d. h. über aufeinanderfolgende diskrete Messungen (bzw. *Realisationen* vom statistischen Standpunkt) gemittelt. Dieses Mittelungsverfahren ist den Definitionen des *diskreten* k -(Kreuz-)Leistungsspektrums, des k -Phasenspektrums

und der k -Kohärenzfunktion eigen. Im Fall des Kreuzleistungsspektrums bemerkt man, daß für festes k dessen Abhängigkeit von der delay time τ formal identisch ist mit der zeitlichen Autokovarianzfunktion der räumlichen Fouriertransformierten. Dies gab Anlaß, die Definition der Autokorrelationsfunktion, also der normierten Autokovarianzfunktion, auf komplexwertige Funktionen zu erweitern (Abschnitt 6).

Eine Verallgemeinerung der 1D-Definitionen des Kreuzleistungsspektrums, des Phasenspektrums und der Kohärenzfunktion auf den 2D-Fall ($k\omega$ -Raum) war in der dem Verfasser bekannten Literatur nicht zu finden, doch dürften die in dieser Arbeit angegebenen die natürlichen sein. Im Abschnitt 8.2.4 wird die Zerlegung des (auswärts gerichteten) radialen Nettoteilchenflusses $\bar{\Gamma}_r := \langle \Gamma_r \rangle_{x,t}$ nach den spektralen Komponenten von \tilde{n} und \tilde{E}_{pol} im $k\omega$ -Raum hergeleitet, wobei \tilde{n} und \tilde{E}_{pol} die fluktuierende Dichte und das fluktuierende poloidale E-Feld bezeichnen.

Ein weiterer wesentlicher Aspekt der Arbeit ist die Analyse von Fehlermöglichkeiten bedingt durch die Anwendung der DFT auf die mit 16 Stützstellen erfaßte räumliche Abhängigkeit der Fluktuationsamplitude. Es sind dies das bekannte „Aliasing“ und „spectral leakage“, also die Faltung des wirklichen k -Spektrums mit der Spektralfunktion des Fensters, was bei endlichen Fensterbreiten je nach Fensterform zu einer mehr oder weniger starken Verschmierung der k -Komponenten über den Spektralbereich führt. Mit dem Ergebnis des Abschnitts 7.3 kann in Abschnitt 7.7 das Aliasing der diskreten H_α - k -Spektren abgeschätzt werden, wodurch ihre physikalische Information erst verwertbar wird. Möglichkeiten zur Reduktion des spectral leakage werden in Abschnitt 7.7.2 (Fenster) diskutiert. Das Analyseprogramm ist diesbezüglich optimiert. Die (semiquantitative) Betrachtung der Charakteristiken der H_α - und Sondendiagnostik im k -Raum zeigt unter anderem, daß geometrische Effekte (Sondenspitzenabstand) für die Messung des k -Spektrums der E-Feldfluktuationen $\tilde{E}_{pol}(x,t)$ nicht kritischer sind als der Floating Potential- oder Ionensättigungsstromfluktuationen.

Als praktische Grundlage dieser Arbeit wurde ein FORTRAN-Programm erstellt, das die erwähnten statistischen Funktionen aus den Meßergebnissen berechnet. Die exemplarische Anwendung auf verschiedene Messungen an ASDEX soll einerseits die Möglichkeiten der Methode *an sich* ausloten, andererseits gibt sie Hinweise auf künftige experimentelle Erfordernisse. Die Anwendungen illustrieren gewissermaßen, welche physikalisch relevanten statistischen Größen in den Plots der ausgewerteten Daten enthalten sind und wie diese zu bestimmen sind.

2 Meßmethoden

2.1 Die Plasmarandschicht von ASDEX

Die folgende Beschreibung des Randschichtplasmas soll und kann lediglich ein grober Überblick über dieses komplizierte Gebiet sein. Die Zahlenwerte sind in erster Linie als Orientierungshilfe zu betrachten. In [Neuhauser1989a] findet sich eine eingehende Darstellung der ASDEX-Randschicht sowie deren Modellierung mit theoretischen Ansätzen. Als Randschicht bezeichnet man bei ASDEX eine Plasmaregion, die in Richtung Plasmazentrum ungefähr von der Separatrix begrenzt wird und von dort an etwa mehrere nach außen reicht. Die wahre Lage der Separatrix ist dabei nicht auf den Millimeter genau bekannt (s. auch Abschnitt 3.2). Unter der „nominellen“ Separatrix ist die aus Magnetfeldmessungen unter der Annahme toridaler Symmetrie berechnete mittlere Separatrixposition zu verstehen. Die tatsächliche Separatrix liegt vermutlich 1 – 1.5 cm weiter außen. Wie aus Messungen der Elektronentemperatur T_e mittels Thomsonstreuung und Langmuirsonden und der Elektronendichte n_e mittels Lithiumstrahl Diagnostik [McCormick1989a] hervorgeht, fallen $T_e(r)$ und $n_e(r)$ über der Randschichtdicke näherungsweise exponentiell nach außen ab. Die Messung der Ionentemperatur T_i ist, insbesondere wenn räumliche Auflösung gefordert wird, sehr schwierig. Ein theoretisches Modell [Neuhauser1989a] sagt für das Ionentemperaturprofil in der Randschicht einen im Vergleich zur Elektronentemperatur schwächeren Abfall von T_i mit dem Radius r voraus. Da T_i einerseits in die Interpretation der Sondenmessungen eingeht [Stangeby1984a], andererseits aber ein Mangel an verlässlichen Meßwerten besteht, wird in dieser Arbeit stets angenommen

$$T_i = T_e$$

Typische Werte für die Elektronentemperatur und Dichte sind an der „nominellen“ Separatrix $T_e = 100$ eV, $n_e = 1 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Die radiale $(1/e)$ -Abfalllänge von T_e und n_e beträgt für die ohmsche Phase ~ 2 cm. Das Fluktuationsniveau der Dichte ρ , welches das Verhältnis angibt von RMS-Fluktuationsamplitude zu Mittelwert (Gleichanteil), folgt aus Messungen des Ionensättigungsstromes zu $\sim 30\%$.

2.2 H_α -Diagnostik

Diese experimentelle Anordnung zur orts- und zeitaufgelösten Relativmessung der Elektronendichte n_e nutzt die vor allem in der Randschicht emittierte H_α -Strahlung, deren Intensität als näherungsweise proportional zur Elektronendichte betrachtet werden darf.

2.2.1 Physikalische Grundlagen

In der fusionsorientierten Plasmaphysik werden hauptsächlich Plasmen der Wasserstoffisotope H und D untersucht. Die Kontinuitätsgleichung fordert, daß bei einer stationären Entladung die durch den „neoklassischen“, d. h. stoßbedingten und den „anormalen“ Transport verursachten Teilchenverluste durch einen Einwärtsfluß $\perp B$ von elektrisch neutralen Teilchen, nämlich H, H₂ bzw. D, D₂ kompensiert werden.

Da die Rydbergenergie des Wasserstoffs (13.6 eV) und die typischen mittleren Randschichttemperaturen in ASDEX von ~ 50 eV nicht sehr verschieden sind, ist die Besetzung angeregter Zustände des H-Atoms neben der Ionisation durch Elektronenstoß relativ wahrscheinlich. Die angeregten Atome gehen vorzugsweise über verschiedene Zerfallskanäle in den Grundzustand über. Im sichtbaren Spektralbereich beobachtet man dabei u. a. die intensive, thermisch stark dopplerverbreiterte rote H α -Strahlung (Balmerserie: 658.28 nm).

Sei $B(T_e(r))$ der empfindlich von der Elektronentemperatur T_e und damit vom Radius abhängige Ratenkoeffizient der Anregung von Neutralteilchen aus dem Grundzustand und der Emission, und seien $n_0(r)$, $n_e(r)$ die Dichte der Neutralen bzw. der Elektronen. Da Rekombinationsstrahlung wegen ihres verhältnismäßig geringen Wirkungsquerschnitts vernachlässigbar ist, kann der totale H α -Strahlungsfluß pro Volumenelement d^3r geschrieben werden als

$$\frac{dI(r)}{d^3r} = E_\alpha B(T_e(r)) n_e(r) n_0(r) \quad [W cm^{-3}]$$

wo E_α ein konstanter Faktor ist, der die von *einem* H α -Emissionsprozeß freigesetzte Strahlungsenergie angibt. Ein auf das Plasmazentrum ausgerichteter Detektor empfängt daher die Strahlungsleistung

$$P_{Det} = f_{geom} \cdot E_\alpha \int_{-a}^a B(T_e(r)) n_e(r) n_0(r) dr + H \quad [W cm^{-2}] \quad (3)$$

Hier ist a : kleiner Plasmaradius, f_{geom} : Geometriefaktor, H : *Hintergrundstrahlung*.

Beiträge zum radialen Integral (3) der H α -Intensität kommen praktisch nur aus der detektorseitigen äußeren Randschicht und der inneren Randschicht, da infolge der Ionisation n_0 zum Zentrum hin rasch abnimmt. Um die Intensität der H α -Strahlung zu erhöhen und damit das Signal-Rauschverhältnis zu verbessern, bläst man in der Nähe der Beobachtungsstelle H₂ bzw. D₂ auf das Plasma. Der Beitrag des gegenüberliegenden Randes und der Hintergrundstrahlung sind dann vernachlässigbar. Das Maximum des Emissionsprofils liegt ungefähr 1 cm außerhalb der „nominellen“ Separatrix. An dieser radialen Position herrscht ungefähr eine Elektronentemperatur von $T_e = 50$ eV. Da der Koeffizient $B(T_e)$ oberhalb $T_e = 10$ eV ein flaches Maximum hat, sollte am Ort des Emissionsmaximums die H α -Emissivität nur schwach von T_e abhängen, sodaß der Hauptbeitrag zu P_{Det}

(3) näherungsweise eine lineare Funktion der Dichten n_0 , n_e des Neutralgases bzw. der Elektronen allein ist.

Die radiale Integration des Detektors bedingt eine nur geringe Ortsauflösung in radialer Richtung, die grob durch den Tiefenschärfenbereich der Optik und die Breite der abgebildeten Strukturen gegeben ist.

Deutlich innerhalb der Separatrix ist die Ionisation von H und D wegen der hohen Temperaturen (ASDEX: typisch 1–1.5 keV) nahezu vollständig. Linienstrahlung entsteht hier nur noch durch Verunreinigungselemente mit hoher Ordnungszahl (z. B. Cu). Diese aus dem Plasmainternen kommende Linienstrahlung ist im Gebiet der weichen Röntgenstrahlung und der Vakuum-UV-Strahlung anzusiedeln, andererseits erzeugen Coulombwechselwirkung und thermische Bewegung der Elektronen ein kontinuierliches Bremsstrahlungsspektrum.

2.2.2 Experimentelle Anordnung

Die Optik Eine Linse bildet das von der „Plasmaoberfläche“ kommende Licht im Maßstab (1 : 1) auf ein Feld von 16 linear in Poloidalrichtung angeordneten Lichtleitern ab, welche einen konstanten Abstand von 0.6 cm voneinander haben (Abb. 2). Die optische Achse liegt in der Äquatorialebene ($z = 0$), die Brennweite der symmetrischen Linse beträgt 640 mm und ihre Apertur ist (1:5). Bei optimaler Fokussierung beschränkt der Durchmesser der Lichtleiter (2 mm) das poloidale Auflösungsvermögen. Alle in dieser Arbeit vorgestellten Meßergebnisse wurden mit optimaler Fokussierung bezüglich des Emissionsmaximums gewonnen. Natürlich erfaßt der Abbildungskegel auch tieferliegende Plasmaschichten — insbesondere die innere Randschicht. Die Strahlung aus diesen Schichten wird unscharf abgebildet, was qualitativ bedeutet, daß Strukturen, deren Größe unterhalb des Auflösungsvermögens liegt, nur als homogener Strahlungshintergrund (Gleichanteil) gesehen werden. Da dieser auf dem endlichen Auflösungsvermögen beruhende Mittelungseffekt von allgemeinerer Bedeutung ist (Sampling, Abschnitt 7.3), sei er am Beispiel einer sinusförmigen Variation (Fourierkomponente) der Dichte n_e und damit der H_α -Intensität mit Wellenlänge λ , Amplitude 1 und willkürlicher Anfangsphase φ , dargestellt. Je kürzer die Wellenlänge im Vergleich zum Querschnitt $L(r)$ des Abbildungskegels zum Radius r , desto mehr wird sich dieselbe spektrale Komponente „herausmitteln“. Unter der Annahme einer konstanten Gewichtung über der gesamten Breite des Abbildungskegels ist der Beitrag s_λ zur Signalamplitude am Detektor

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \frac{1}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right) dx \\ &= \frac{\lambda}{\pi L} \sin\left(\frac{\pi L}{\lambda} + \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

In der Praxis ist es wohl eine ziemlich brauchbare Annahme, die absolute Anfangsphase φ der Fourierkomponenten eines *statistischen* Prozesses, wie der hier zu untersuchenden

Dichtefluktuationen, als gleichverteilt über $(-\pi, \pi]$ zu betrachten, weshalb man zur Gewinnung einer Abschätzung den ersten Sinusfaktor in Gl. 4 durch seinen RMS-Wert

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ersetzen darf. Man erhält so

$$s_\lambda \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda}{\pi L} \sin\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) \quad (5)$$

Wellenzahl k und Wellenlänge λ sind verknüpft über

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6)$$

Mit Gl. 6 wird

$$s_k \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{kL} \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (7)$$

Die Verschmierung der Strukturen über die Breite des Abbildungskegels ist äquivalent zu einem weichen k -Filter, dessen Charakteristik näherungsweise durch Gl. 7 gegeben ist.

Wie erwähnt, wurde die Optik hinsichtlich optimaler Fokussierung auf das Emissionsmaximum in der Randschicht justiert. Der radiale Tiefenschärfenbereich ($\pm\Delta r$), bei dem der geometrische Abbildungsfehler Δx_{res} gleich dem Radius der Lichtleiter (1mm) ist, ergibt sich aus der Apertur a der Linse zu

$$\Delta r = \frac{2\Delta x_{res}}{a} = 1 \text{ cm}$$

Demnach ist über der gesamten Randschichtdicke ($\approx 1.5 \text{ cm}$) die poloidale Auflösung hauptsächlich durch den Abstand der Lichtleiter ($\Delta x = 0.6 \text{ cm}$) begrenzt. Das H_α -Licht der inneren Randschicht wird vom Detektor wegen Gl. 5 als räumlich und — bei stationärem Betrieb — auch zeitlich *homogener* Anteil (Gleichanteil) gesehen.

Die Signalerfassung Die 16 Lichtleiter führen die H_α -Strahlung des jeweils auf ihnen abgebildeten Punktes der Plasmarandschicht zu 16 Photomultipliern des Typs RCA7265 (14 Stufen), welche mit ihrer speziellen S20-Kathode im interessierenden Wellenlängenbereich eine ausreichende Quantenausbeute (7%) haben. Am photomultiplierseitigen Ende der Lichtleiter wird eine evtl. durch die harte Röntgenstrahlung entstehende Fluoreszenz der Lichtleiter mit einem Gelatinefilter (Kodak N.91, $\lambda \geq 650 \text{ nm}$) zurückgehalten. Zur Abschirmung der Photomultiplier von den magnetischen Streufeldern in der Nähe des Entladungsgefäßes, ist jeder Photomultiplier separat in eine Weicheisenhülse gekapselt, während diese wiederum in einem Kasten aus 2 mm starkem Weicheisenblech untergebracht sind.

Der Anodenstrom der Photomultiplier darf für einen Betrieb im linearen Kennlinienbereich höchstens $\approx 100 \mu\text{A}$ betragen, weshalb an dem $1 \text{ k}\Omega$ -Widerstand (Abb. 2) maximal

~ 100 mV Signalamplitude anliegen. Zur Anpassung des Signalpegels an den Arbeitsbereich der Analog-Digital-Umsetzer (± 5 V bzw. ± 6 V), kommen die besonders rauscharmen Verstärker [TekAM502] zu Einsatz. Verstärkungsfaktor und Offsetspannung dieses Differenzverstärkers sowie die Photomultiplierspannung, von welcher der Verstärkungsfaktor der Photomultiplier äußerst empfindlich abhängt, sind der jeweiligen experimentellen Situation entsprechend auf passende Werte einzustellen.

Die Fluktuationsamplitude fällt i. a. ab 50 kHz stark ab ([Rudyj1987a]), doch muß mit dem gelegentlichen Auftreten von signifikanten Ereignissen bis zu 250 kHz gerechnet werden (siehe z. B. Abschnitt 8.2.1). Unter Berücksichtigung eines gewissen Sicherheitsfaktors (typisch 1.5) fordert das Nyquisttheorem daher je nach experimentellen Gegebenheiten Abtastraten von 200 kHz bis 1 MHz. Da bei fester Anzahl von Stützstellen die spektrale Auflösung umgekehrt proportional zur Abtastrate ist (Abschnitt 7.4), soll die Abtastrate andererseits nicht höher als tatsächlich nötig gewählt werden. Den hochfrequenten Anteilen des Schrot- und Verstärkerrauschens sowie sonstiger Störungen, die sämtlich auch noch *Aliasing* hervorrufen können (s. Abschnitt 7.3), muß analogseitig vorgebeugt werden und zwar durch ein im Verstärker (TekAM502) eingebautes RC-Tiefpaßfilter mit einstellbarer 3dB-Filtereckfrequenz (≤ 1 MHz). Für die im Rahmen dieser Arbeit präsentierten Messungen war die 3dB-Filtereckfrequenz 300 kHz und die Abtastrate 1 MHz.

Bei Abtastraten von 10^5 – 10^6 Hz ist eine hinreichend gute Photonenstatistik am Photomultiplier mit der aus der Restneutralgasdichte resultierenden H_α -Intensität nicht zu erreichen (Schrotrauschen). Durch „Anblasen“ der untersuchten Plasmaregion mit zusätzlichem Wasserstoffgas läßt sich die lokale Neutralteilchenkonzentration und wegen Gl. 3 die H_α -Emission soweit erhöhen, daß die RMS-Amplitude des Schrotrauschens gegenüber der RMS-Amplitude der H_α -Fluktuationen vernachlässigbar ist. Umfassende Messungen [Rudyj1987a] haben gezeigt, daß durch die Gasströmung kein signifikantes zusätzliches Rauschen (Fluktuationen der Neutralgasdichte n_0 oder der Elektronendichte n_e) entsteht. Alle Komponenten der Meßelektronik sind vom Erdpotential entkoppelt, um elektrische Schleifen zu vermeiden, in denen die Streufelder während einer Entladung hohe Spannungen induzieren könnten, welche die Messungen stören oder sogar die Elektronik beschädigen.

Die Analog-Digital-Umsetzung Zur Digitalisierung der Signale stehen je nach Messung zwei verschiedene Analog-Digital-Umsetzer zur Verfügung. Werden nur Daten aus irgendeiner stationären Phase der Entladung benötigt, so genügen CAMAC Module [LeCroy8210]: Abtastrate ≤ 1 MHz, Arbeitsbereich $-5 \dots +5$ V, Auflösung 10 bit, Memory 25000 Samples/Kanal. Das System Nic500 von Nicolet [Nicolet] ermöglicht dagegen so lange Zeitfenster, daß auch Entladungsphasen mit nur ungenau vorhersagbarem Anfangszeitpunkt (z. B. H-Phase) sicher erfaßt werden können: Abtastrate ≤ 10 MHz, Arbeitsbereich $[-6, 6]$ V, Auflösung 12 bit, Memory 10^6 Samples/Kanal.

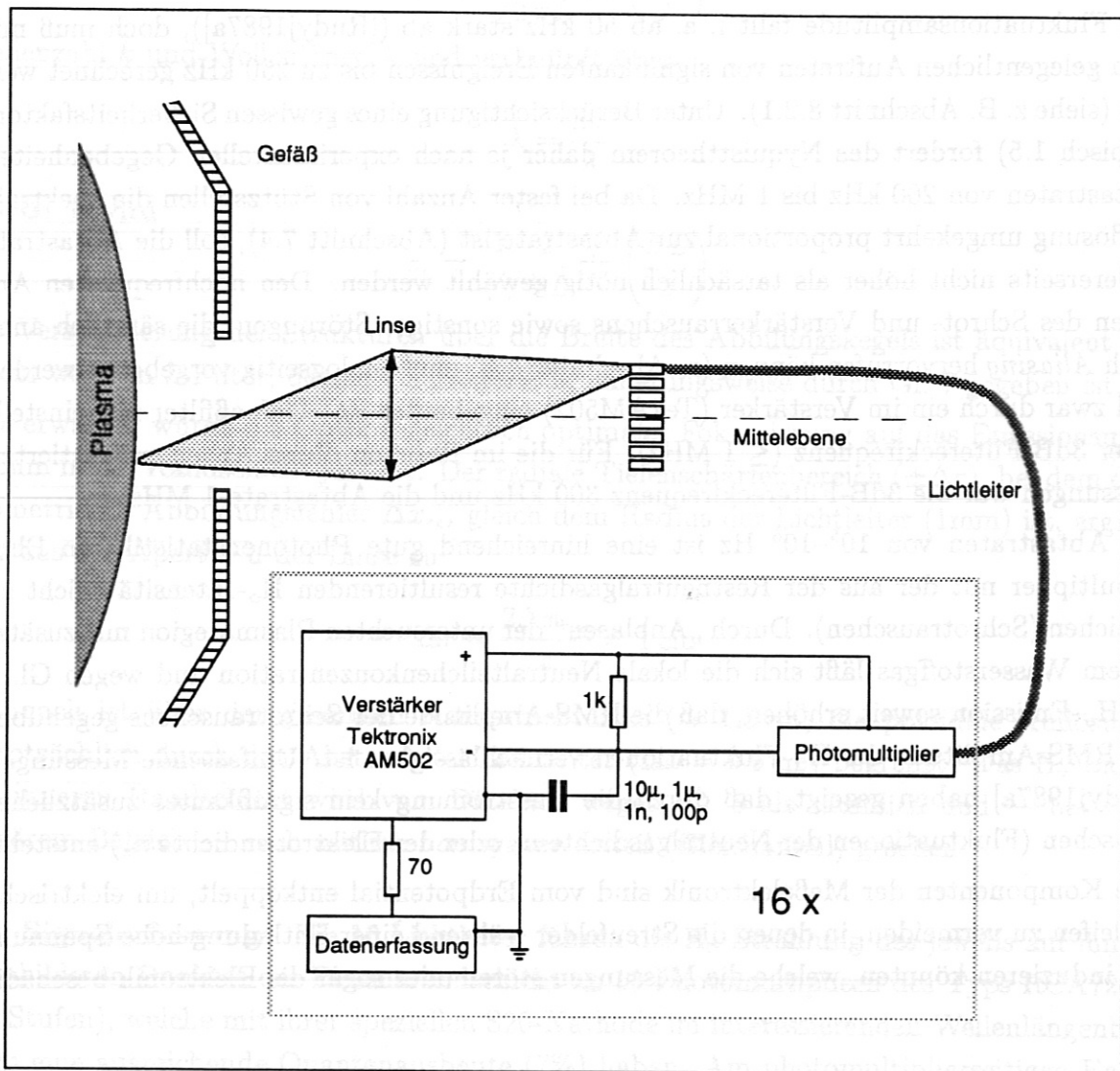


Abbildung 2: Die H_{α} -Diagnostik. Der prinzipielle Aufbau. (Mit freundlicher Genehmigung [Rudyj1990a].)

2.3 Langmuirsonden

Als Langmuirsonde bezeichnet man i. a. eine in das Plasma eintauchende Elektrode von möglichst kleinem, meist kreisförmigen Querschnitt, welche gegenüber einer weiteren Elektrode (Gegenelektrode), die großflächigen Kontakt mit dem Plasma haben soll, auf einem gewissen Potential liegt. Im Tokamak bieten sich als Gegenelektrode der Limiter oder die Divertorprallplatten an.

Die Theorie der Sonden als diagnostisches Werkzeug der Plasmaphysik an sich ist für Fluktuationsuntersuchungen nicht unmittelbar relevant. Zur Interpretation von Sondenmessungen (Dichte, Plasmapotential) benötigt man allerdings einige *Ergebnisse* der Sonden*theorie* sowie ein Verständnis ihrer prinzipiellen physikalischen Aussagen. Im folgenden werden deshalb nur die unmittelbar benötigten Tatsachen referiert und ansonsten auf die Literatur (z. B. [Stangeby1984a], [Stangeby1984b], [Manos1984a]) zu diesem, besonders im Fall magnetisierter Plasmen, recht subtilen Gegenstand verwiesen.

2.3.1 Floating Potential

An einer Sondenspitze mit Plasmakontakt stellt sich in sehr kurzer Zeit ein Floating Potential Φ_{Fl} ein, das sich additiv aus dem Schichtpotential Φ_{sheath} und dem lokalen Plasmapotential $\Phi(x, t)$ (Raumladungspotential) zusammensetzt:

$$\Phi_{Fl}(x, t) = \Phi_{sheath}(x, t) + \Phi(x, t) \quad (8)$$

Da das Plasmapotential die hier eigentlich interessierende Größe ist, und die Sonde *immer* nur das Floating Potential Φ_{Fl} sieht, ist zur Bestimmung von $\Phi(x, t)$ ein quantitativer Ausdruck für das Schichtpotential notwendig. Für H- und D-Plasmen hat man als grobe Näherung

$$\Phi_{sheath}(x, t) \approx -\frac{3k_B T_e(x, t)}{e} \quad (9)$$

Qualitativ ist das Schichtpotential eine Folge davon, daß bei $T_i \approx T_e$ die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen die der Ionen um ein Vielfaches übertrifft (in Wasserstoffplasmen um einen Faktor 40), d. h. zu *Beginn* treffen entsprechend mehr Elektronen als Ionen auf die Sondenoberfläche. Mit zunehmender negativer Ladung der Sonde verringert sich die Rate auftreffender Elektronen gemäß der Boltzmannstatistik solange, bis die Raten für Elektronen und Ionen gleich sind. Die Differenz zwischen dem so eingestellten Sondenpotential und dem benachbarten Plasma ist gerade das Schichtpotential.

Für das Sonden-Floating Potential ergibt sich mit Gl. 9

$$\Phi_{Fl}(x, t) \approx \Phi(x, t) - \frac{3k_B T_e(x, t)}{e} \quad (10)$$

Offenbar kann man das absolute Plasmapotential $\Phi(x, t)$ mit der Einzelsondenmethode nur bei bekannter Elektronentemperatur $T_e(x, t)$ bestimmen. Für eine (x, t) -aufgelöste Re-

lativmessung des *fluktuierenden* Anteils des Plasmapotentials (Abtastezeit wie bei den H_α -Messungen $10^5 - 10^6$ Hz) ist zwar die Kenntnis des Mittelwertes der Elektronentemperatur \bar{T}_e unwichtig, sehr problematisch dagegen sind *Fluktuationen* der Elektronentemperatur $\tilde{T}_e(x, t)$, da mit einer Einzelsonde gemäß Gl. 10 keine Möglichkeit zur Unterscheidung von Temperatur- und Potentialfluktuationen besteht. Das Kriterium für die Meßbarkeit von Fluktuationen des Plasmapotentials mit der Einzelsondenmethode lautet explizit:

$$\langle |\tilde{\Phi}(x, t)| \rangle \gg \frac{3k_B}{e} \langle |\tilde{T}_e| \rangle \quad (11)$$

Es ist nicht bekannt aber zweifelhaft, ob bei ASDEX diese Relation (11) erfüllt ist. Trotz der Unsicherheit über die Größe von \tilde{T}_e wurde auf die Messung des Floating Potential nicht verzichtet.

2.3.2 Ionensättigungsstrom

Wenn die Sonde durch Anlegen einer äußeren Spannung auf ein negatives Potential hinreichenden Betrags — etwa das 3-fache des Schichtpotentials Φ_{sheath} — gebracht wird, so schirmt diese Potentialbarriere die Sondenoberfläche von den thermischen Elektronen vollständig ab. Der resultierende Strom wird allein von den *Ionen* getragen, welcher vom Sondenpotential *unabhängig* ist und aufgrund dieser Eigenschaft *Ionensättigungsstrom* heißt. Die Ionensättigungsstromdichte ist durch das Bohmkriterium gegeben. Es besagt, daß an der Schicht-Plasma-Grenze die Ionenstromdichte j in Richtung Sondenoberfläche gegeben ist durch

$$\begin{aligned} j_{sat} &= e n_{SP} c_s & (12) \\ c_s &= \sqrt{\frac{k_B(T_e + T_i)}{m_i}} \\ n_{SP} &\approx \frac{n_\infty}{2} \end{aligned}$$

c_s ist dabei die *Ionenschallgeschwindigkeit*, n_{SP} die Dichte an der Schicht-Plasma-Grenze und n_∞ : Plasmadichte in großem Abstand von der Oberfläche, wenn der Abstand in Einheiten der Schichtdicke (einige Debyelängen) gemessen wird. Im ASDEX-Randschichtplasma beträgt die Debyelänge typisch $\sim 2 \cdot 10^{-5}$ m.

In magnetisierten Plasmen sind die Verhältnisse erheblich komplizierter, da das B-Feld die Ionenbeweglichkeit stark anisotrop macht ([Stangeby1984a], [Stangeby1984b]). Beispielsweise ist zur Messung der Ionensättigungsstromdichte $j_{sat} = I_{sat}/A$ die geometrische Sondenspitzenoberfläche A durch eine *effektive* Oberfläche zu ersetzen, etc. Da für die Korrelations- und Spektralanalyse dieser Arbeit nur *Relativmessungen* der Dichte $n(x, t)$ interessieren, kann in diesen Fällen auf B-Feld Korrekturfaktoren verzichtet werden. Für die Berechnung des Teilchenflusses wurde die effektive Sondenoberfläche gleich der geo-

metrischen gesetzt ($A = 5.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$), da im Rahmen dieser Arbeit eigentlich nur Relativwerte interessieren. Aus den Gl. (12) und unserer Annahme $T_i = T_e$ folgt

$$j_{sat}(x, t) \approx 0.5 \cdot e n(x, t) \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_i}} \quad (13)$$

Gl. 13 erlaubt die Relativmessung der fluktuierenden Dichte $n(x, t)$, falls das Fluktuationsniveau der Temperatur klein ist:

$$\frac{\sigma(\sqrt{T_e})}{\langle \sqrt{T_e} \rangle} \ll 1 \quad (14)$$

Bei der zeitaufgelösten Relativmessung einer *fluktuierenden* Dichte nach Gl. 13 ist die Kenntnis von T_i und T_e nicht erforderlich, entscheidend ist vielmehr, daß die *RMS-Fluktuationsamplitude* von $\sqrt{T_e}$ gegen ihren Mittelwert vernachlässigbar ist. Da die Wurzelfunktion glättend wirkt, könnte diese Forderung eher erfüllt sein als das Kriterium (11). Allerdings ist zu beachten, daß (14) eine Bedingung an das *Fluktuationsniveau* ist, während (11) eine Bedingung an die *absolute Höhe* der Fluktuationsamplitude der Elektronentemperatur ist.

2.3.3 Experimenteller Aufbau

Der Sondenkopf besteht aus 16 linear und äquidistant ($\Delta x = 2.5 \text{ mm}$ angeordneten Graphitspitzen mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser: 0.9 mm) und einigen mm effektiver Länge. Graphit wurde gewählt, weil es die thermische Belastung in der Entladung am besten verträgt [Manos1984a]. Im Vergleich zu Mo und W hat es gravierende Vorteile: Da im Targetmaterial nach der Bethe-Formel die Energiedeposition dW/dx aus hochenergetischer Elektronenstrahlung proportional zur Ordnungszahl ist, sind die im Tokamak entstehenden *Runawayelektronen* (einige MeV) für Graphit relativ ungefährlich. Außerdem sind wegen $Z_C \ll Z_{Mo}, Z_W$ Plasmaverunreinigungen durch Graphit weit weniger kritisch als solche durch Mo und W (Linienstrahlung). Während metallische Spitzen bei thermischer Überlastung schmelzen und damit zerstört werden, *sublimiert* Graphit, weshalb eine vollständige Zerstörung nicht so häufig vorkommt.

Der Sondenkopf sitzt auf einem radial beweglichen Manipulator, dessen $r(t)$ -Profil programmierbar ist. Jede Sondenspitze kann wahlweise zur Messung des Floating Potential oder des Ionensättigungsstrom verwendet werden. Für die typischen ASDEX-Plasmarsandschichtparameter ist bei I_{sat} -Messungen die Sondenspitze auf $\sim -150 \text{ V}$ gegenüber Gefäßpotential zu legen. Die Versorgung mit einer äußerst stabilen erdfreien Gleichspannung geschieht mit in Serie geschalteten Akkumulatoren.

Die Signalpegel werden wie im Fall der H_α -Messung mit Differenzverstärkern vom Typ „TekAM502“ optimal an die Arbeitsbereiche der ADUs angepaßt. Für die Digitalisierung gilt das dort gesagte. Der prinzipielle Aufbau zur Messung von I_{sat} und Φ ist in

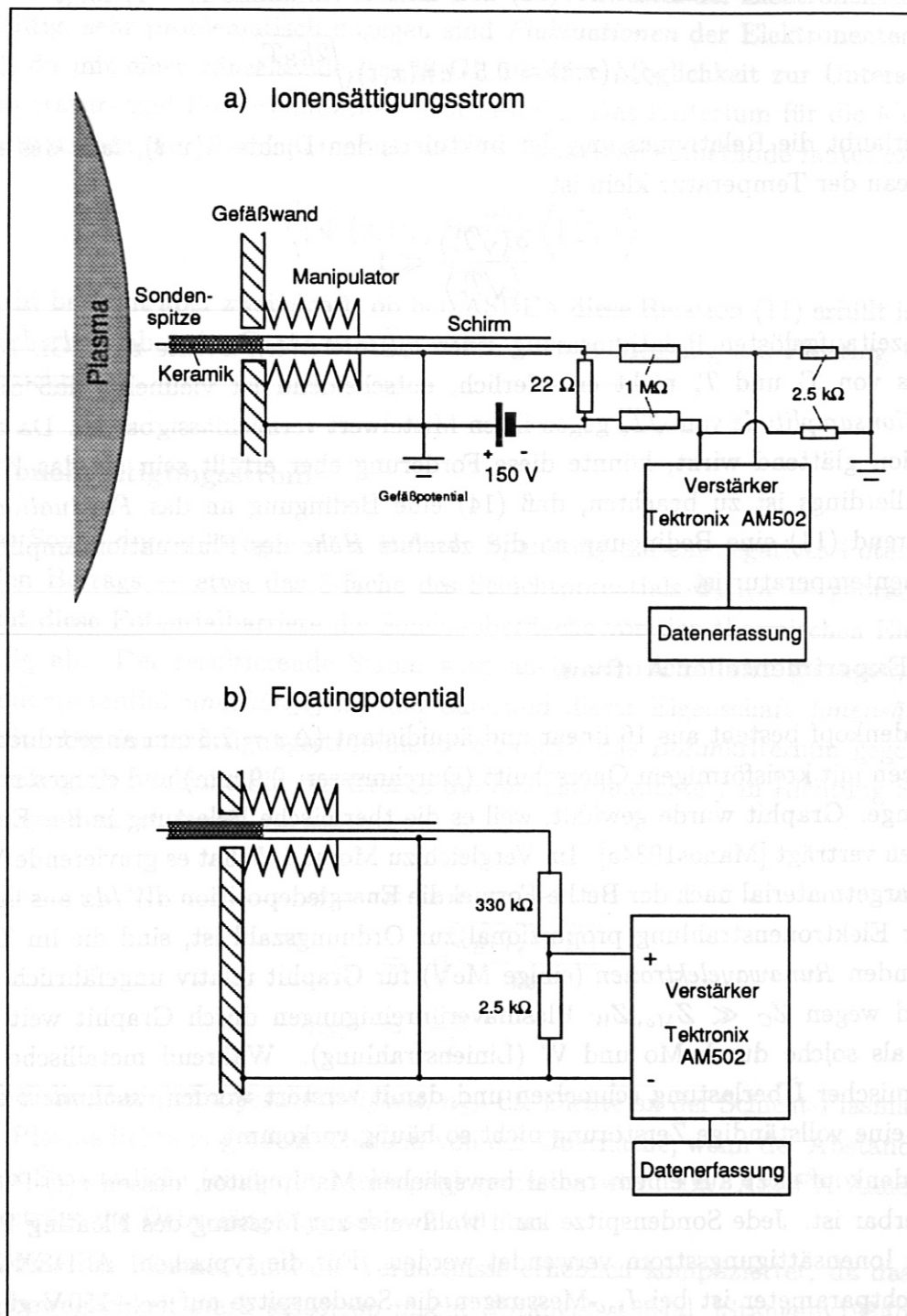


Abbildung 3: Die Sondendiagnostik. Prinzipielle Anordnung zur Messung von Ionensättigungsstrom (oben) und Floating Potential unten mit Langmuirsonden. Die Darstellung bezieht sich jeweils nur auf eine Spitze.

Abbildung 3 dargestellt. Weitere Aspekte der experimentellen Praxis und typische Probleme bei der Messung mit Sonden werden in [Rudyj1990a] behandelt.

2.4 Messung von Teilchenflußfluktuationen

Man ist heute allgemein der Auffassung, daß der „anomale“ Transport von Teilchen und Energie durch Fluktuationen (Turbulenz) bewirkt wird. An ASDEX wurde gezeigt, daß der im folgenden beschriebene $E \times B$ -Teilchenfluß den beobachteten globalen Teilchenverlust aus dem Einschlußbereich erklären kann [Rudyj1990a], [Bessenrodt1990a].

Die Kontinuitätsgleichung fordert aufgrund der Existenz von Dichtefluktuationen $n(x, t)$ auch Fluktuationen des Teilchenflusses (Transport) $\Gamma(x, t)$. Quantitativ ist jedoch die Bestimmung der Teilchenflußfluktuationen via Kontinuitätsgleichung aus der Messung der Dichtefluktuationen nicht möglich, da Γ , bedingt durch \mathbf{B} , stark anisotrop ist.

Allgemein gilt

$$\Gamma(\mathbf{x}, t) = n(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_{Drift}(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

wobei $\mathbf{v}_{Drift}(x, t)$ die mittlere Driftgeschwindigkeit der Teilchen ist. Tokamakplasmen sind theoretisch komplett beschreibbar durch die Maxwellgleichungen, die Lorentzkraft und die Newtonsche Mechanik. In homogenen und statischen E - und B -Feldern

$$\partial_{x,t} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \partial_{x,t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (16)$$

haben geladene Teilchen unabhängig vom Vorzeichen der Ladung eine $E \times B$ -Driftgeschwindigkeit ([Chen1984a])

$$\mathbf{v}_{E \times B} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (17)$$

Wir nehmen an, daß im Tokamak die durch Gl. 17 gegebene Driftgeschwindigkeit für den Teilchenfluß (15) maßgeblich ist. Dabei wird auf den interessierenden Längen- und Zeitskalen implizit vorausgesetzt, daß Driftbewegungen und Kräfte, welche aus dem Nichterfülltsein von Gl. 16 resultieren, gegenüber der ersten Näherung (17) vernachlässigbar sind, was bei fluktuierendem E -Feld und gekrümmtem B -Feld nicht von vornherein selbstverständlich ist. Es sei dazu erwähnt, daß in die Abschätzung des Fehlers, welchen man mit den Gl. 15, 17 durch die Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung begeht, als räumliche und zeitliche „Kleinheitsparameter“

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= r_L^{(ion)} \cdot \langle |k_{\tilde{E}}| \rangle \\ \epsilon_t &= \frac{\langle \omega_{\tilde{E}} \rangle}{\omega_L^{(ion)}} \end{aligned} \quad (18)$$

eingehen, wobei $r_L^{(ion)}$ und $\omega_L^{(ion)}$ der Larmorradius und die Frequenz für Ionen ist, und $\langle |k_{\tilde{E}}| \rangle$ und $\langle \omega_{\tilde{E}} \rangle$ ist die mittlere Wellenzahl bzw. Frequenz des Leistungsspektrums der

E-Feldfluktuationen. In der ASDEX-Randschicht hat man typisch

$$\begin{aligned}\epsilon_x &\approx 0.05 \text{ cm} \cdot (1-2) \text{ cm}^{-1} \leq 0.1 \\ \epsilon_t &\approx \frac{5 \cdot 10^4 \text{ Hz}}{3 \cdot 10^7 \text{ Hz}} \approx 1.7 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

Der Effekt des endlichen Larmorradius ist von 2. Ordnung in ϵ_x [Chen1984a]. Da Magnetfeldfluktuationen bei ASDEX keine Rolle spielen [Giannone1989a], braucht man sich um $\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ nicht zu kümmern. Die *diamagnetische Drift*

$$\mathbf{v}_D = \frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qn B^2}$$

wird hier ebenfalls vernachlässigt.

An ASDEX durchsetzt das B-Feld an der Randschicht die Äquatorialebene unter einem Winkel von $\approx 3^\circ$, d. h. die Toroidalkomponente B_φ macht betragsmäßig fast das gesamte B-Feld aus. Unter Vernachlässigung von B_θ und B_r liefert die Auswertung des Vektorproduktes in (17) die radiale Driftgeschwindigkeit und den radialen Teilchenfluß

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{E \times B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{E_\theta(\mathbf{x}, t)}{B_\varphi} \mathbf{e}_r \\ \Gamma_{E \times B}(\mathbf{x}, t) &= n(\mathbf{x}, t) \frac{E_\theta(\mathbf{x}, t)}{B_\varphi} \mathbf{e}_r\end{aligned}\quad (19)$$

Das B-Feld ist praktisch konstant.

Zur simultanen Messung des Plasmapotentials und der Dichte wird mit den 8 geradzahlig nummerierten Spitzen (0, 2, ..., 14) das Potential gemäß (10) gemessen, während mit den ungeradzahlig nummerierten Spitzen (1, 3, ..., 15) der Ionensättigungsstrom nach (13) gemessen wird. Wenn Temperaturfluktuationen vernachlässigbar sind, kann E_θ approximiert werden durch

$$E_\theta(x_i, t) = \frac{\Phi_{Fl}(x_{i+2}, t) - \Phi_{Fl}(x_i, t)}{2 \Delta x} \quad (20)$$

wobei $i = 0, 1, \dots, 12$ und $\Delta x = 2.5 \text{ mm}$.

Zum Fehler der Bestimmung von E_θ via Gl. 20 siehe Abschnitt 7.9.

3 Phänomenologische Betrachtung der Meßwerte

3.1 Rohsignale

Betrachten wir die Meßdaten zunächst mit bloßem Auge. Bild 4 zeigt mit der H_α -Diagnostik gewonnene Relativmeßwerte der Fluktuationsamplitude $s(x, t)$ von Dichtefluktuationen. Die Amplituden sind auf gleiche (zeitliche) Varianz und verschwindenden Gleichanteil normiert. Die Wiedergabe der Ortsabhängigkeit ist, bedingt durch die Anzahl der Kanäle, auf 16 Stützstellen beschränkt. Die zeitliche Entwicklung der Signale weist offenbar keinerlei Regelmäßigkeit auf. Vergleicht man dagegen Daten benachbarter Kanäle, so fällt auf, daß sich gewisse Strukturen mit einer dem Kanalabstand proportionalen zeitlichen Verschiebung in den benachbarten Kanälen wiederfinden. In Bild 4 markiert der Pfeil ein besonders auffälliges Ereignis. Obwohl es für große Kanalabstände ziemlich „verschmiert“, ist es gut als dasselbe Objekt identifizierbar. Die „Reichweite“ der weniger auffälligen Ereignisse ist wesentlich geringer und liegt teils unter einem Kanalabstand (6mm). Das Phänomen des „Wanderns“ der Strukturen erklärt sich selbst: Man findet nämlich unter sorgfältiger Berücksichtigung der tatsächlichen Anordnung der Lichtleiter und der Orientierung des B-Feldes am Ort der Messung, daß sich die Fluktuationen mit einer Geschwindigkeit in Richtung der diamagnetischen Drift der Ionen ausbreiten. Die quantitative Bestimmung der Geschwindigkeit erfolgt über die Korrelationsfunktionen. Nicht so klar dagegen ist die Bedeutung der Deformation. Jedenfalls läßt sich aus dem Kanalabstand, über den man ein bestimmtes Ereignis noch verfolgen kann, und der poloidalen Geschwindigkeitskomponente der Fluktuationen eine Zeit angeben, die qualitativ als Lebensdauer des Ereignisses interpretiert werden kann.

Zur Demonstration der *räumlichen* Struktur entlang der Poloidalkoordinate und ihrer zeitlichen Entwicklung zeigt Bild 5 denselben Signalausschnitt noch einmal aus einer anderen Perspektive: Links die 151 Kurven der jeweils im Abstand von $1 \mu s$ mit 16 Kanälen gemessenen H_α -Fluktuationsamplitude. Rechts 6 ausgewählte, vergrößerte räumliche Intensitätsverteilungen im Abstand von $30 \mu s$. Die mittlere poloidale Ausdehnung der Fluktuationen schätzt man nach Bild 5 wohl auf 2 – 4 Kanalabstände entsprechend 1.2 – 2.4 cm, was gut zu den gemessenen k-Spektren paßt.

3.2 Stationarität und Ergodizität

Der Verlauf einer Entladung ist grob untergliedert durch die Zündung, den Strom- und Dichteaufbau, das Ein- und Ausschalten der Zusatzheizungen (NBI, LH, ICRH) und das Abklingen von Dichte und Plasmastrom am Ende der Entladung. Diese Aktionen bewirken Übergangsphasen, in denen sich der Plasmazustand stark ändert. Dazwischen gibt es bei ASDEX und Tokamaks ähnlicher Größe Zeitintervalle von ~ 1 sec Länge mit praktisch konstanten Plasmametern wie Plasmastrom, Magnetfeld, Dichte, Tempe-

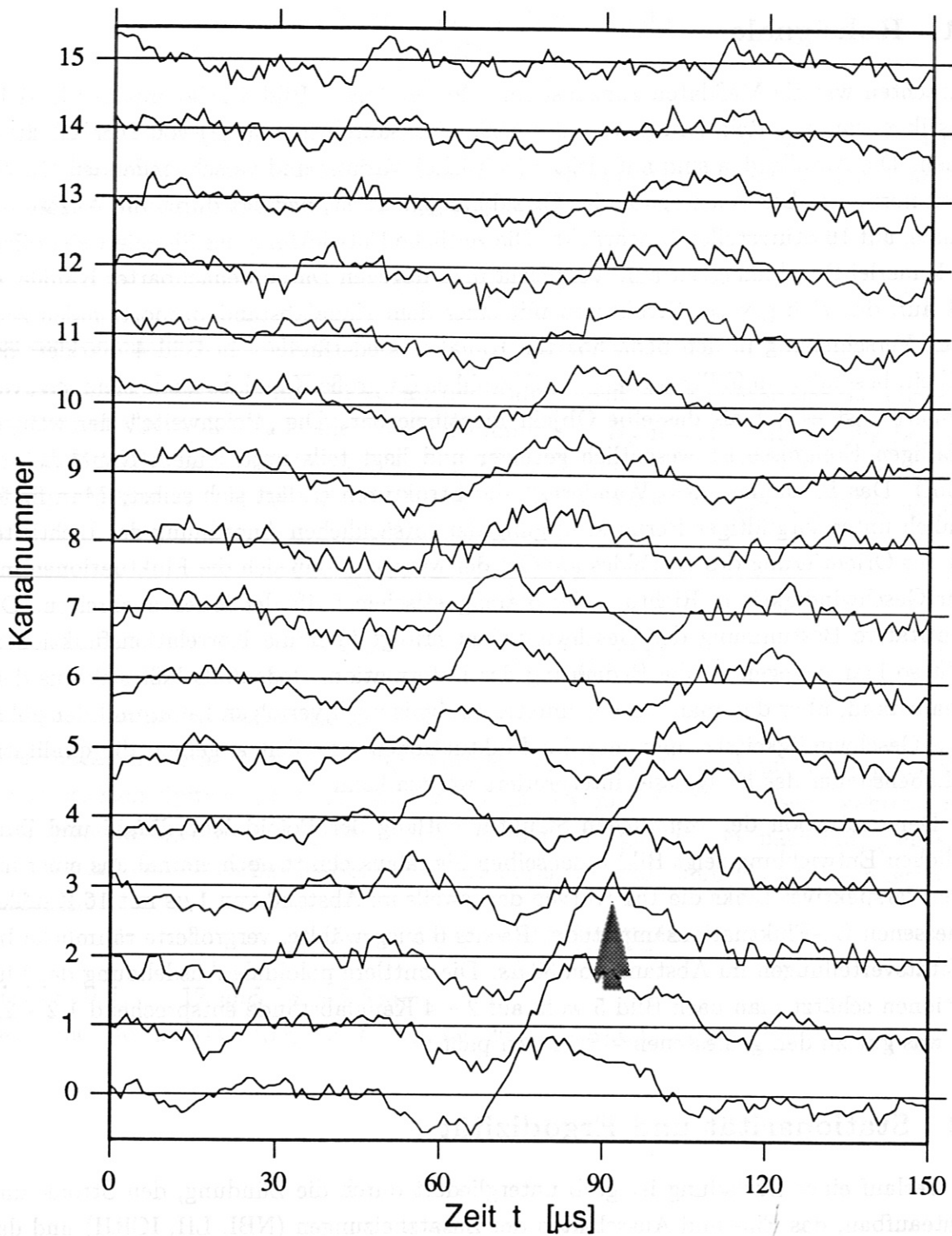


Abbildung 4: H_{α} -Fluktuationsamplitude für ein zufällig gewähltes Zeitfenster während einer typischen H-Phase mit Co-Neutralinjektion (ASDEX-Schuß 30717). Abtastrate 1MHz, Kanalabstand 0.6 cm.

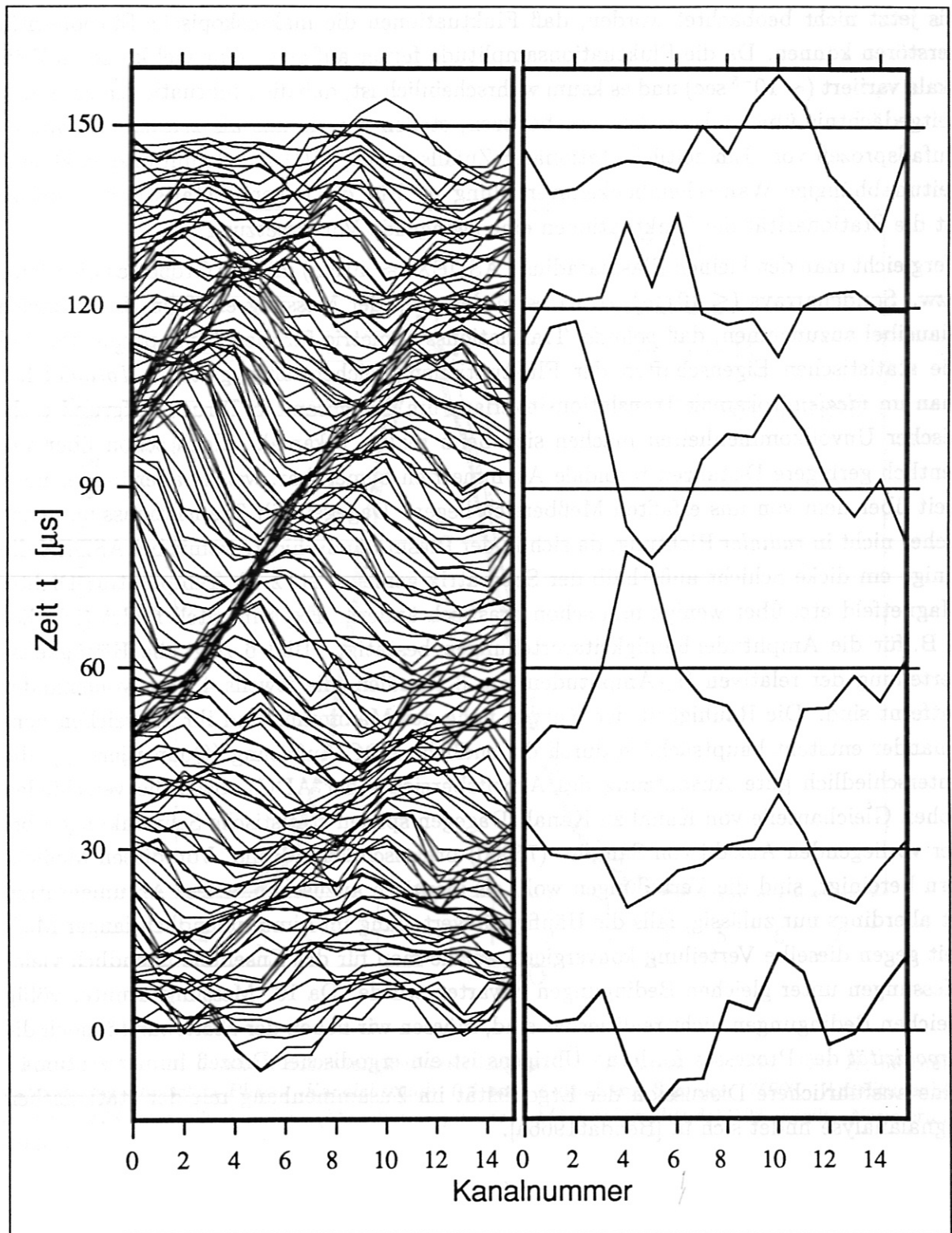


Abbildung 5: H_{α} -Fluktuationsamplitude über der Poloidalkoordinate in Abhängigkeit von der Zeit. Links: 151 Kurven im Abstand von $1 \mu s$. Rechts: 6 ausgewählte, vergrößerte räumliche Intensitätsverteilungen im Abstand von $30 \mu s$.

ratur etc. Das Plasma befindet sich dann in einem quasistationären Zustand. Es ist bis jetzt nicht beobachtet worden, daß Fluktuationen die makroskopische Stationarität zerstören können. Da die Fluktuationsamplitude ferner auf einer sehr viel kürzeren Zeitskala variiert ($\sim 10^{-5}$ sec) und es kaum wahrscheinlich ist, daß die Fluktuationen ein Langzeitgedächtnis über z. B. $\sim 10^{-2}$ sec besitzen, stellen wir sie uns als *zeitlich stationären* Zufallsprozeß vor. Ein zeitlich stationärer Zufallsprozeß, $X(t)$ hat definitionsgemäß eine zeitunabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung p . Für die folgende statistische Analyse ist die Stationarität der Fluktuationen eine zwingende Voraussetzung.

Vergleicht man den kleinen Plasmaradius (ASDEX: ≈ 40 cm) mit der Größe des Lichtleiter- bzw. Sondenarrays (≤ 10 cm), so ist es in dem von der Messung erfaßten Raumbereich plausibel anzunehmen, daß *poloidal* Translationssymmetrie für die Plasmaparameter und die statistischen Eigenschaften der Fluktuationen gleichermaßen gelten. *Toroidal* hat man im *idealen* Tokamak Translationsinvarianz um den gesamten Torus. Aufgrund technischer Unvollkommenheiten machen sich beim realen Tokamak jedoch schon über wesentlich geringere Distanzen toroidale Asymmetrien bemerkbar, welche aber immer noch weit über dem von uns erfaßten Meßbereich liegen. Dagegen gilt Translationssymmetrie sicher nicht in *radialer* Richtung, da sich in der Plasmarandschicht, womit bei ASDEX die einige cm dicke Schicht außerhalb der Separatrix gemeint ist, z. B. Temperatur, Dichte, Magnetfeld etc. über wenige mm schon drastisch ändern. Experimentell findet sich dies z. B. für die Amplitudenhäufigkeitsverteilungen bestätigt. Bild 6 zeigt die Häufigkeitsverteilung der relativen H_α -Amplituden von 3 Kanälen, die jeweils 4.2 cm voneinander entfernt sind. Die Rauigkeit der Kurven nahe des Maximums und ihr Abweichen voneinander entsteht hauptsächlich durch die endliche ADC-Auflösung (Quantisierung), die unterschiedlich gute Ausnutzung des Arbeitsbereiches der ADCs sowie die verschiedenen hohen Gleichanteile von Kanal zu Kanal. Dagegen spielen statistische Schwankungen bei der vorliegenden Anzahl von Samples (75000) praktisch keine Rolle. Von diesen Meßfehlern bereinigt, sind die Verteilungen wohl als identisch anzusehen. Diese Argumentation ist allerdings nur zulässig, falls die Häufigkeitsverteilung im Limes unendlich langer Meßzeit gegen dieselbe Verteilung konvergiert, welche man für das Ensemble unendlich vieler Messungen unter gleichen Bedingungen erwarten würde. Da 10^4 Messungen unter völlig gleichen Bedingungen nicht realisierbar sind, müssen wir neben der *Stationarität* noch die *Ergodizität* des Prozesses fordern. Übrigens ist ein ergodischer Prozeß immer stationär. Eine ausführlichere Diskussion der Ergodizität im Zusammenhang mit der statistischen Signalanalyse findet sich in [Bendat1966a].

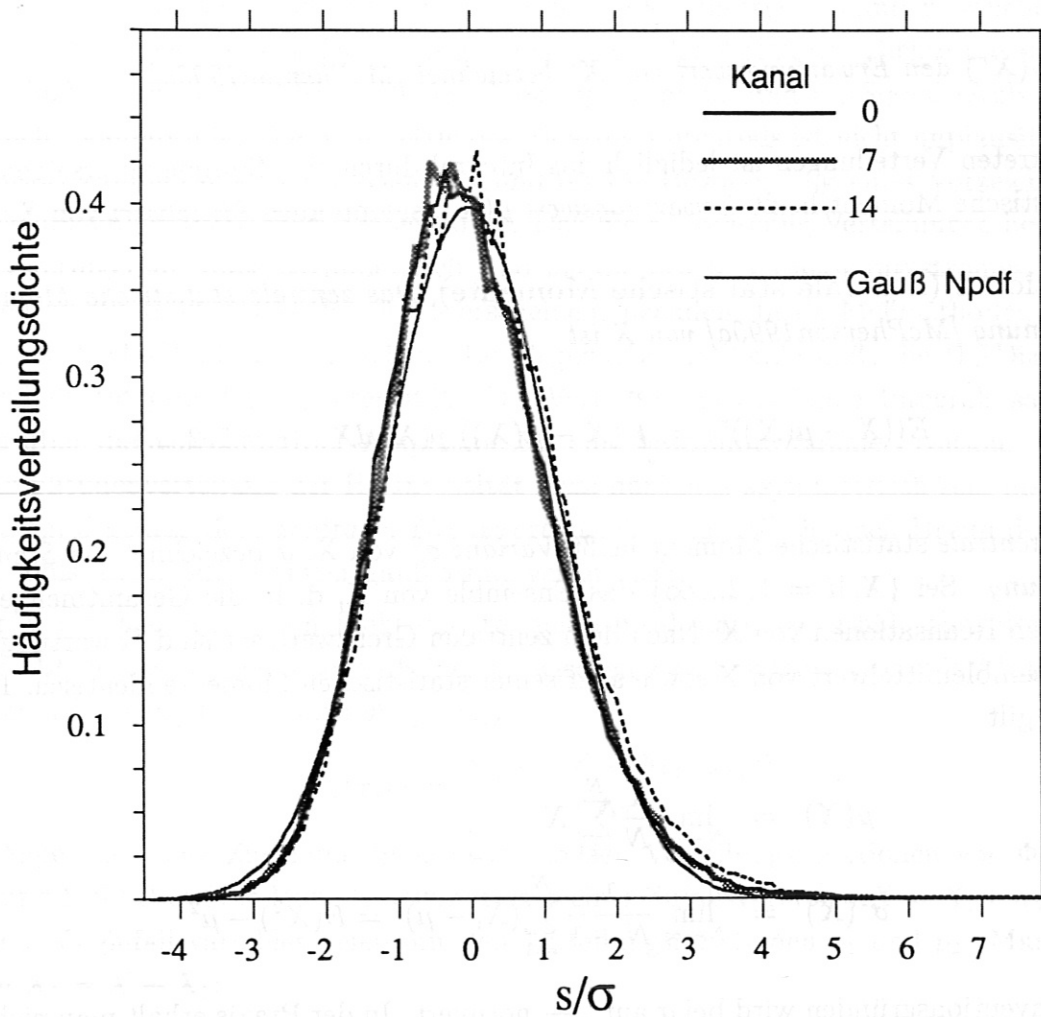


Abbildung 6: Rel. Amplitudenhäufigkeitsverteilungsdichte für Kanal 0, 7, 14 einer H_α -Messung während der ohmschen Phase. Kanalabstand: 0.6 cm. Anzahl von Samples: 75000. Amplitudenbereiche in 128 Intervalle der Höhe (Maximalamplitude - Minimalamplitude)/128 geteilt. Normierung auf $\sigma = 1$.

4 Statistische Momente

Definition 1 (Statistische Momente) Sei X eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte $p(X)$, dann ist das statistische Moment der Ordnung r gegeben durch

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} X^r p(X) dX \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (21)$$

wobei $E(X^r)$ den Erwartungswert von X^r bezeichnet [McPherson1990a].

Bei diskreten Verteilungen ist lediglich das Integral durch eine Summe zu ersetzen. Das 1. statistische Moment heißt *Erwartungswert* $\mu(X)$, salopp auch *Mittelwert* von X .

Definition 2 (Zentrale statistische Momente) Das zentrale statistische Moment r -ter Ordnung [McPherson1990a] von X ist

$$E((X - \mu(X))^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu(X))^r p(X) dX \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (22)$$

Das 2. zentrale statistische Moment heißt *Varianz* σ^2 von X . σ bezeichnet die *Standardabweichung*. Sei $\{X_i; i = 1, 2, \dots, \infty\}$ das Ensemble von X , d. h. die Gesamtmenge aller möglichen Realisationen von X . Nach dem zentralen Grenzwertsatz sind Erwartungswert und Ensemblemittelwert von X sowie aller seiner statistischen Momente identisch. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \\ \sigma^2(X) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 \end{aligned} \quad (23)$$

Aus Konventionsgründen wird bei σ auf $\frac{1}{N-1}$ normiert. In der Praxis erhält man nicht die Erwartungswerte einer Meßgröße sondern immer nur Mittelwerte einer endlichen Menge von Realisationen, welche je nach der Anzahl von Messungen eine mehr oder weniger gute Schätzung des Erwartungswertes darstellen. Der relative statistische Fehler skaliert gemäß

$$\frac{|\text{Erwartungswert} - \text{Mittelwert}|}{|\text{Erwartungswert}|} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (24)$$

Im folgenden wird nur das 1. und das 2. statistische Moment benötigt, doch auch den höheren Momenten kommt eine physikalische Bedeutung zu. So tritt z. B. das kubische ($r=3$) statistische Moment im Zusammenhang mit dem Bispektrum auf [Kim1978a], [Kim1980a].

5 Verteilungsfunktionen

Abbildung 7 zeigt die relativen Amplitudenhäufigkeiten für den Ionensättigungsstrom, das Floating Potential, das elektrische Feld und den Teilchenfluß. Zwecks einfacherer Vergleichbarkeit sind alle Daten auf Standardabweichung $\sigma = 1$ und Mittelwert 0 normiert. Dargestellt ist außerdem eine Gaußverteilung mit den gleichen Parametern. Im Fall des Ionensättigungsstromes ist eine deutliche Asymmetrie erkennbar, welche durch die Konkavität des radialen Dichteprofiles (exponentieller Abfall der Dichte mit r) in der Randschicht erklärbar ist [Rudyj1990a]. Floating Potential und H_α -Signal (Abb. 6) sind „ziemlich“ gaußförmig. Die Symmetrie des Floating Potentials ist nicht unplausibel, weil es a priori zumindest keinen trivialen Grund für die Bevorzugung eines Vorzeichens bei Abweichungen vom Mittelwert geben sollte. Daß die H_α -Messung Verteilungen liefert, die in viel geringerem Maße asymmetrisch sind als die des Ionensättigungsstromes, könnte auf den ersten Blick als Widerspruch erscheinen, nachdem beide Meßmethoden im wesentlichen Dichtefluktuationen sehen. Im Gegensatz zur Sonde mißt die H_α -Diagnostik das radiale Integral der H_α -Intensität. Die Verteilung des radialen Integrals sagt aber nichts über die Verteilung der Amplitude für eine bestimmte radiale Position. Obwohl die Amplitudenverteilung der H_α -Intensität lokal durchaus asymmetrisch sein mag, wird das Integral gemäß dem *zentralen Grenzwertsatz der Statistik*, je nach Breite des Emissionsprofils, mehr oder weniger gaußförmig verteilt sein.

Unter Vernachlässigung von Elektronentemperaturfluktuationen erhält man den räumlichen Mittelwert des elektrischen Feldes E zwischen zwei Sondenspitzen mit Abstand Δx aus deren Floating Potentialen Φ_{F11} , Φ_{F12}

$$E_{12}(x, t) \approx \frac{\Phi_{F12}(x_2, t) - \Phi_{F11}(x_1, t)}{\Delta x} \quad (25)$$

Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den Verteilungsfunktionen von Φ_{F11} und Φ_{F12} und E führt auf die Verteilungsfunktion p einer Zufallsvariablen $X = X_1 + X_2$, wobei X_1 und X_2 Zufallsvariablen seien mit den Verteilungsfunktionen p_1 und p_2 . Man erhält wegen $X_2 = X - X_1$:

$$p(X) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{12}(X_1, X - X_1) dX_1 \quad (26)$$

und im Falle der Unabhängigkeit von X_1 und X_2

$$p(X) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_1)p_2(X - X_1) dX_1 \quad (27)$$

Trivialerweise ist der Erwartungswert einer Summenzufallsvariablen $\mu(X) = 0$, wenn $\mu(X_1)$, $\mu(X_2) = 0$.

Mit Gl. 26 und 27 läßt sich die Unabhängigkeit zweier statistischer Prozesse testen. Einfacher ist dies allerdings mit den Standardabweichungen möglich, denn die Zufallsgrößen

X_1 und X_2 mit den Standardabweichungen σ_1, σ_2 sind genau dann unabhängig, wenn für das σ der Summenzufallsvariablen $X = X_1 + X_2$ gilt

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (28)$$

Wie sich bei der Auswertung der Meßdaten gezeigt hat, kann die Beachtung dieser Relation oft den ersten Hinweis auf eventuelle Fehlmessungen liefern. Eine weitere wichtige Konsequenz von 28 ist, daß *die Leistung der Superposition statistisch unabhängiger Rauschsignale durch die Summe ihrer Einzelleistungen gegeben ist.*

Der *Teilchenfluß* Γ ist nach 19, abgesehen von dem praktisch konstanten Faktor $1/B_\phi$, durch das Produkt von E und n gegeben. Die Verteilungsfunktion p einer Produktzufallsgröße $X = X_1 X_2$ ist wegen $X_2 = X/X_1$:

$$p(X) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{12}(X_1, X/X_1) dX_1 \quad (29)$$

Im Gegensatz zur Summenzufallsvariablen braucht der Erwartungswert der Produktzufallsvariablen *nicht* 0 zu sein, wenn $\mu(X_1), \mu(X_2) = 0$ (simple Gegenbeispiele). Dies erklärt, warum die gemessene Teilchenflußverteilung Abbildung 7 einen endlichen Mittelwert hat, obwohl Γ nur aus den fluktuierenden Anteilen \tilde{n} und \tilde{E} berechnet wurde. Nettoteilchenfluß !

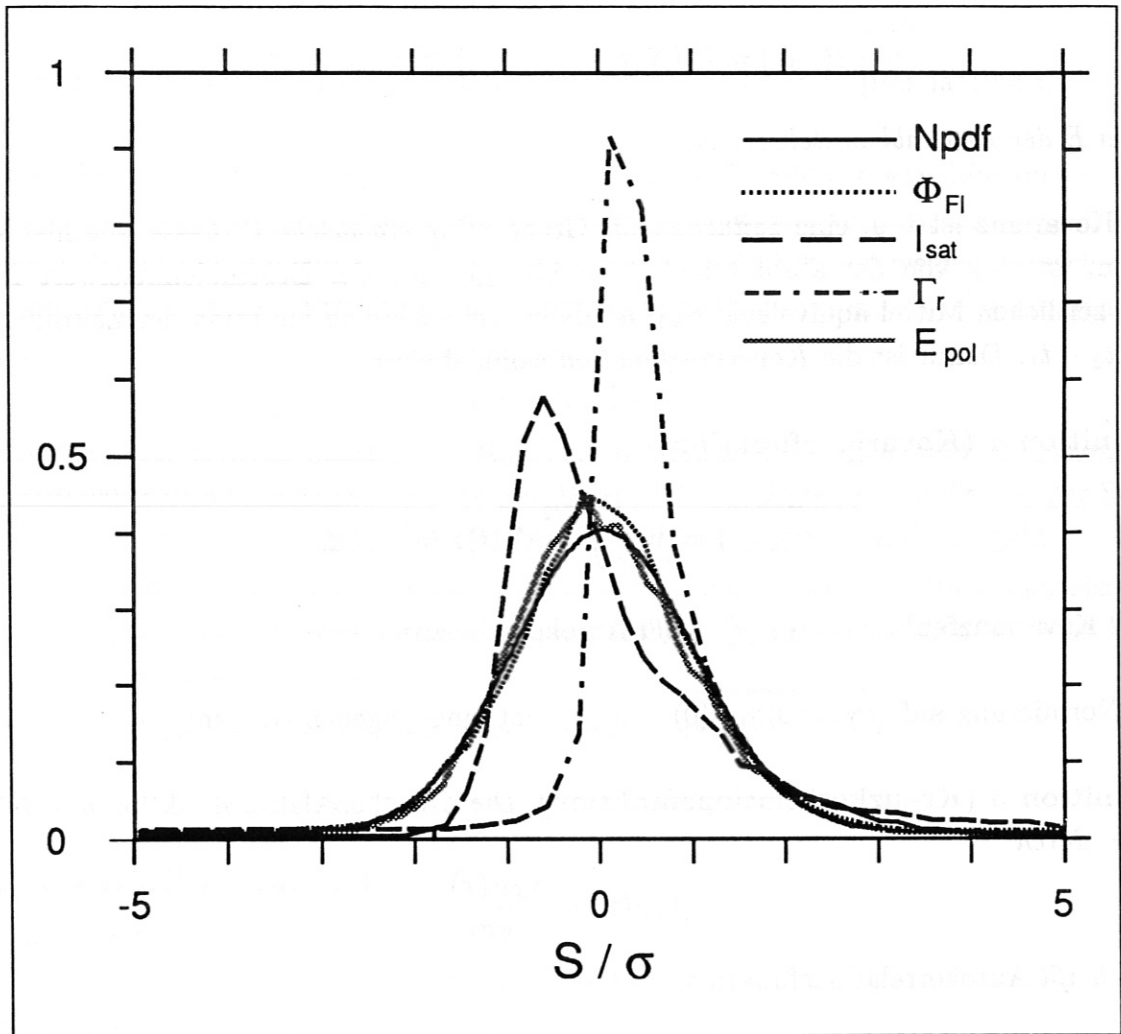


Abbildung 7: Rel. Amplitudenhäufigkeitsverteilungsdichte vom Ionensättigungsstrom I_{sat} , Floating Potential Φ_{FI} , elektrischen Feld E_{pol} und radialen Teilchenfluß Γ_r . Normierung auf $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Teilung der Amplitudenbereiche in 128 Intervalle. 20000 samples. Zum Vergleich: Gaußsche Normalverteilung ($Npdf$).

6 Korrelationsfunktionen

Ein Maß für die lineare Abhängigkeit zweier Signale bzw. statistischer Prozesse $X(t_1)$ und $Y(t_2)$ zu verschiedenen Zeiten t_1, t_2 ist durch ihre *Kovarianz* γ_{XY} gegeben.

Definition 3 (Kovarianz)

$$\gamma_{XY}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(Y(t_2) - \mu_Y(t_2))] \quad (30)$$

wobei E der *Ensemblemittelwert* ist.

Die Kovarianz ist i. a. eine *zeitabhängige* Größe. Für *ergodische* Prozesse, die hier vorliegen, ist γ_{XY} von der absoluten Zeit unabhängig und der Ensemblemittelwert E ist dem zeitlichen Mittel äquivalent. γ_{XY} ist dann nur noch eine Funktion der Zeitdifferenz $\tau = t_2 - t_1$. Damit ist die *Kovarianzfunktion* wohldefiniert:

Definition 4 (Kovarianzfunktion)

$$\gamma_{XY}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)Y(t + \tau) dt \quad (31)$$

heißt *Kovarianzfunktion*. $\gamma_{XX}(\tau)$ heißt *Autokovarianzfunktion*.

Die Normierung auf $\sqrt{\gamma_{XX}(0)\gamma_{YY}(0)} = \sigma_X\sigma_Y$ hat einen eigenen Namen:

Definition 5 (Kreuzkorrelationsfunktion) Die *Kreuzkorrelationsfunktion* ρ_{XY} ist gegeben durch

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{\gamma_{XY}(\tau)}{\sigma_X\sigma_Y} \quad (32)$$

ρ_{XX} heißt *Autokorrelationsfunktion*.

Eigenschaften

$$\begin{aligned} \rho_{XX}(0) &= 1 \\ |\rho_{XY}(\tau)| &\leq \frac{1}{2}(\rho_{XX}(0) + \rho_{YY}(0)) = 1 \\ \rho_{YX}(\tau) &= \rho_{XY}(-\tau) \quad \text{und} \quad \rho_{XX}(\tau) = \rho_{XX}(-\tau) \end{aligned} \quad (33)$$

Additionseigenschaft: Seien $X_1(t)$ und $X_2(t)$ zwei stationäre Zufallsprozesse. Dann gilt für die Autokorrelationsfunktion ρ_{YY} der Linearkombination $Y(t) = a_1X_1(t) + a_2X_2(t)$:

$$\rho_{YY}(\tau) = a_1^2\rho_{11}(\tau) + a_1a_2[\rho_{12}(\tau) + \rho_{21}(\tau)] + a_2^2\rho_{22}(\tau) \quad (34)$$

Beispiele Autokorrelationsfunktion:

1.) *Sinus*:

$$X(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \theta) \rightarrow \rho_{XX}(\tau) = \frac{X^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (35)$$

2.) *Weißes Rauschen*:

$$X(t) \text{ weißes Rauschen} \rightarrow \rho_{XX}(\tau) = \begin{cases} 1 & : \tau = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (36)$$

Weitere Beispiele für die Auto- und Kreuzkorrelationsfunktion in [Bendat1966a].

Anwendung Die Bedeutung der Korrelationsfunktion beruht insbesondere auch auf der Eigenschaft, daß sie die Detektion des *periodischen* Anteils eines verrauschten Signals $Y(t)$ ermöglicht. Sei $Y(t)$ die Summe eines sinusförmigen Signals $X(t)$ mit weißem Rauschanteil $R(t)$ also $Y(t) = X(t) + R(t)$. Dann folgt aus Eigenschaft 34 für die Autokorrelation von $Y(t)$:

$$\rho_{YY}(\tau) = \rho_{XX}(\tau) + \rho_{RR}(\tau)$$

da die Kreuzkorrelationsfunktion von Rauschen mit jedem beliebigen anderen stationären statistischen Prozeß identisch 0 ist. Wegen Beispiel 1 und 2 gibt ρ_{YY} außer an der Stelle $\tau = 0$ wieder ein Sinussignal, wobei die Phaseninformation jedoch verloren geht.

Eine im Hinblick auf das Folgende sinnvolle sowie mit der reellen Definition 5 konsistente Erweiterung der Kreuzkorrelationsfunktion auf komplexwertige ergodische Prozesse $X(t)$, $Y(t)$ mit Erwartungswert 0 ist

Definition 6 (Komplexe Kreuzkorrelationsfunktion)

$$\hat{\rho}_{XY}(\tau) = \frac{1}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(t) Y(t + \tau) dt$$

mit $\hat{\sigma}_X^2 = E(|X|^2) = E(X^* X)$.

Eigenschaften:

$$\hat{\rho}_{XY}(-\tau) = \hat{\rho}_{YX}^*(\tau) \quad (37)$$

und deshalb:

$$\hat{\rho}_{XX}(\tau = 0) = 1$$

Wo nicht ausdrücklich erwähnt, ist im folgenden immer die reelle Korrelationsfunktion gemeint.

Diskretisierung Sind $X(t)$ und $Y(t)$ empirisch gegeben, so liegen ihre Werte nur in *endlicher* Anzahl N für *diskrete*, meist *äquidistante* Zeitpunkte t_i vor (Sampling). Der *Meßwert* $c_{XY}(\tau_i)$ für die Kovarianzfunktion $\gamma_{XY}(\tau_i)$ ist dann näherungsweise

$$c_{XY}(\tau_i) = \frac{1}{N - i} \sum_{k=0}^{N-1-i} X(t_k) Y(t_k + \tau_i) \quad (38)$$

Die *diskretisierte Korrelationsfunktion* folgt aus Gl. 38 und Def. 5. Es ist klar, daß Gl. 38 i. a. nur für $i \ll N - 1$ eine gute Approximation zu $\gamma_{XY}(\tau_i)$ liefern wird. Nach Gl. 38 ist die Anzahl erforderlicher Multiplikationen und Additionen zur Berechnung von c_{XY} für einen Bereich von τ , entsprechend einem konstanten Bruchteil des gesamten Zeitintervalls, proportional zu N^2 .

6.1 Statistischer Fehler bei der Messung der Kreuzkorrelationsfunktion

Dies ist ein (statistischer) Effekt der endlichen Dauer T einer Messung bzw. der endlichen Zahl N von Samples. Seien X_t und Y_t die diskretisierten Meßwerte von 2 *unkorrelierten* Signalen mit Autokorrelationsfunktionen ρ_{XX} und ρ_{YY} endlicher Breite (also kein weißes Rauschen). Dann kann es passieren, daß die *Messung* der Kreuzkorrelation $c_{XY}(\tau_k)$ trotzdem nicht-verschwindende Werte liefert. Eine einfache quantitative Abschätzung des Effekts erhält man, wenn man den statistischen Prozessen X_t und Y_t das Modell des autoregressiven Prozesses 1. Ordnung zugrunde legt [Jenkins1968a]. Dazu müssen einige Begriffe erklärt werden.

6.1.1 Der lineare statistische Prozeß

Definition 7 (Linearer statistischer Prozeß) Sei $Z(t)$ weißes Rauschen und $h(v)$ eine geeignete Filterfunktion. Dann ist im kontinuierlichen Fall der allgemeine lineare statistische Prozeß $X(t)$ gegeben durch:

$$X(t) - \mu = \int_0^{\infty} h(v)Z(t-v)dv \quad (39)$$

und im diskreten Fall:

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k Z_{t-k} \quad (40)$$

Da Stationarität gefordert ist, muß man an h gewisse Forderungen stellen [Jenkins1968a]. Physikalisch ist ein linearer Prozeß durch Filterung weißen Rauschens realisierbar. Es läßt sich leicht ableiten, daß die *Kovarianzfunktion* γ_{XX} des linearen Prozesses im kontinuierlichen Fall gegeben ist durch:

$$\gamma_{XX}(\tau) = \sigma_{ZZ}^2 \int_0^{\infty} h(v)h(v+\tau)dv \quad (41)$$

und im diskreten Fall:

$$\gamma_{XX}(\tau_k) = \sigma_{ZZ}^2 \sum_{j=0}^{\infty} h_j h_{j+k} \quad (42)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion folgt aus Def. 5.

6.1.2 Der autoregressive Prozeß

Die autoregressiven Prozesse m^{ter} -Ordnung sind wiederum eine bestimmte Klasse von linearen stochastischen Prozessen. Hier ist nur der *diskrete* Fall 1. Ordnung von Interesse:

Definition 8 (Autoregressiver Prozeß 1. Ordnung) Sei $Z(t)$ weißes Rauschen. Dann ist der diskrete autoregressive Prozeß 1. Ordnung gegeben durch

$$X_t - \mu = \alpha_1(X_{t-1} - \mu) + Z_t$$

Diese rekursive Darstellung von X_t ist äquivalent zu folgender Potenzreihenentwicklung:

$$X_t - \mu = Z_t + \alpha_1 Z_{t-1} + \alpha_1^2 Z_{t-2} + \dots \quad (43)$$

Offenbar folgt aus der Forderung nach Stationarität: $|\alpha_1| < 1$. Aus Def. 5 und Gl. 42 folgt die Autokorrelationsfunktion für den diskreten autoregressiven Prozeß 1. Ordnung X_t

$$\rho_{XX}(\tau_k) = \alpha_1^{|\tau_k|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (44)$$

Seien X_t und Y_t zwei Prozesse entsprechend Definition 8 mit den Parametern α_1 und β_1 und *verschwindender Kreuzkorrelation*: $\rho_{XY}(\tau_k) = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dann ist nach Definition 8

$$\rho_{XX}(\tau_k) = \alpha_1^{|\tau_k|} \quad \text{und} \quad \rho_{YY}(\tau_k) = \beta_1^{|\tau_k|} \quad (45)$$

und für $|\alpha_1|, |\beta_1| < 1$ gilt näherungsweise (Beweis: [Jenkins1968a]):

$$\text{Var}[c_{XY}(\tau_k)] \approx \frac{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}{N} \left(\frac{1 + \alpha_1 \beta_1}{1 - \alpha_1 \beta_1} \right) \quad (46)$$

Wenn $\{X(t)\}$ und $\{Y(t)\}$ weißes Rauschen ist, folgt $\alpha_1, \beta_1 = 0$ und

$$\text{Var}[c_{XY}(\tau_k)] \approx \frac{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}{N} \quad (47)$$

$c_{XY}(\tau_k)$ ist dabei der *Meßwert der Kovarianz*. Als statistische Schwankung σ der Kreuzkorrelationsfunktion ρ_{XY} hat man nach Gl. 47 und Def. 5

$$\sigma[\rho_{XY}(\tau_k)] = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (48)$$

Dies ist die quantitative Abschätzung für die gemessene Kreuzkorrelation zweier in Wahrheit *unkorrelierter* autoregressiver Prozesse 1. Ordnung. Allerdings dürfte die Abschätzung auch für stationäre ergodische Prozesse von a priori unbekannter Natur (wie die hier untersuchten Fluktuationen) von Nutzen sein, da der autoregressive Prozeß 1. Ordnung als erste Näherung des in Wirklichkeit vorliegenden Prozesses aufgefaßt werden kann.

6.1.3 Test auf nichtverschwindende Kreuzkorrelation

Durch Differentiation eines (stochastischen) Signals $X(t)$ entsteht i. a. ein viel rauheres Signal $dX(t)/dt$ (diskret: $X'(t_k) = \frac{X(t_k) - X(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$). Oftmals kann das differenzierte Signal näherungsweise als weißes Rauschen betrachtet werden, theoretisch *genau dann*, wenn das ω -Leistungsspektrum $\propto 1/\omega^2$ ist. Falls dies auf $X(t)$ und $Y(t)$ zutrifft, stellt wegen Gl. 47 die Messung der Kreuzkorrelation der *differenzierten* Signale einen *Test* auf nichtverschwindende Kreuzkorrelation $\rho_{XY}(\tau_k)$ dar [Jenkins1968a].

Abbildung 8 (oben) zeigt die Autokorrelationsfunktion eines diskret differenzierten typischen H_α -Signals. Im Rahmen der für 15000 Samples zu erwartenden statistischen Schwankungen ist diese kaum von der diskret berechneten Autokorrelationsfunktion weißen Rauschens zu unterscheiden. Abbildung 8 (Mitte) und (unten) zeigen ferner die Kreuzkorrelationsfunktionen der differenzierten Signale der Kanäle 0 und 1 bzw. 0 und 2. Beträgsmäßig erreichen die Kreuzkorrelationsextrema Werte von ca. 4 %. Die rel. Varianz der diskret (mit 15000 Samples) berechneten Kreuzkorrelationsfunktion von zwei *unkorrelierten* weißen Rauschsignalen ist nach Gl. 47

$$\frac{1}{\sqrt{15000}} \approx 0.8\%$$

Damit liegen die Beträge der Kreuzkorrelationsextrema um einen Faktor 5 über dem statistischen Niveau und bei einigen 10^4 Abtastwerten steht die *statistische* Signifikanz von Strukturen der diskreten Kreuzkorrelationsfunktion bis hinab zu einer rel. Größe im Prozentbereich außer Zweifel.

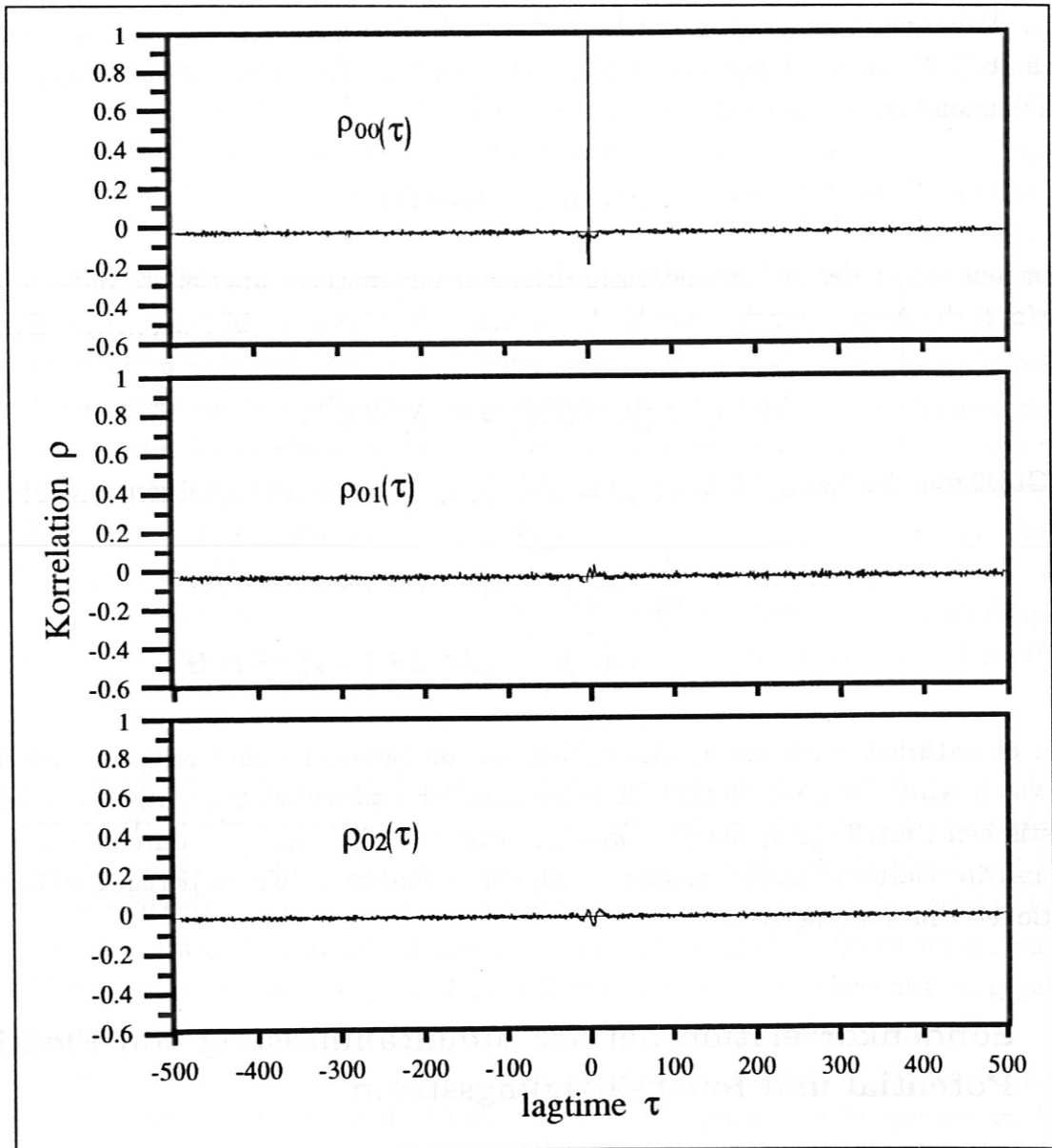


Abbildung 8: Korrelationsfunktionen der zeitabgeleiteten H_{α} -Signale einer ohmschen Entladung. Oben: Autokorrelationsfunktion für Kanal 0. Mitte, unten: Kreuzkorrelation für die Kanäle 0 und 1 bzw. 0 und 2.

6.2 Raum-zeitliche Korrelationsfunktionen

Die Messung der orts- und zeitabhängigen Fluktuationsamplitude $s(x, t)$ einer einzigen physikalischen Größe an 2 verschiedenen Orten x_1 und x_2 liefert 2 zeitabhängige statistische Prozesse $s(x_1, t)|_{x_1=konst.}$ und $s(x_2, t)|_{x_2=konst.}$ zu den kontinuierlichen Parametern x_1, x_2 . Wenn wir für $s(x, t)$ räumliche und zeitliche Translationsinvarianz annehmen (s. Abschnitt 3.2), dann ist $\rho(x_1, x_2, \tau)$ allein vom Abstand $\Delta x = x_2 - x_1$ abhängig, sodaß wir abkürzend schreiben dürfen

$$\rho(x_1, x_2, \tau) \equiv \rho(\Delta x, \tau)$$

Ferner muß wegen der xt -Translationsinvarianz für für sämtliche abgeleitete Zufallsgrößen von $s(x, t)$ die Äquivalenz der verschiedenen Arten der Mittelwertbildung gelten. Symbolisch:

$$\langle \dots \rangle_{Ensemble} = \langle \dots \rangle_t = \langle \dots \rangle_x = \langle \dots \rangle_{x,t} \quad (49)$$

Aus Gl. 49 und den bezüglich Ort (x) und Zeit (t) symmetrischen Definitionen (3–5) folgt:

$$\begin{aligned} \rho(\Delta x, \tau) &= \frac{1}{\sigma_s^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} s(x + \Delta x, t + \tau) s(x, t) dt \\ &= \frac{1}{\sigma_s^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} s(x + \Delta x, t + \tau) s(x, t) dx \end{aligned} \quad (50)$$

wobei es natürlich auch für σ_s gleichgültig ist, ob räumliche oder zeitliche Mittelung angewandt wird. Nach Gl. 50 sind für einen räumlich und zeitlich translationsinvarianten statistischen Prozeß $s(x, t)$ die ($\tau = konst.$)-Schnitte $\rho(\Delta x, \tau)|_{\tau=konst.}$ durch die zeitliche (Kreuz-)Korrelationsfunktion identisch mit den räumlichen (Kreuz-)Kreuzkorrelationsfunktionen zum Parameter τ .

6.3 Sondenkorrelation bei der Simultanmessung von Floating Potential und Ionensättigungsstrom

Bei der Simultanmessung von Ionensättigungsstrom und Floating Potential stehen für die beiden Größen I_{sat} und Φ_{Fl} jeweils nur die halbe Anzahl von Spitzen (8) in der in Abschnitt 2.4 geschilderten Anordnung zur Verfügung, sodaß dem Vorteil der Spektralanalyse, nämlich einer einfacheren Interpretation ihrer statistischen Aussage, der Nachteil von schwer eliminierbaren Fehlern durch *Aliasing* und "spectral leakage" in verschärfter Weise gegenübersteht (Abschnitt 7.3, 7.7.2). Bei der zeitlichen Kreuzkorrelationsanalyse beschränkt die endliche Zahl der räumlichen Stützstellen lediglich die Ortsauflösung, ansonsten ist sie unkritisch.

6.3.1 Vergleich der Kreuzkorrelationsfunktionen von Ionensättigungsstrom und Floating Potential

Abbildung 10 zeigt Niveaulinienplots der Kreuzkorrelation zwischen den jeweils 8 Spitzen, mit denen der Ionensättigungsstrom (Bild oben) bzw. das Floating Potential (Bild unten) gemessen wurde. Die Messung erfolgte 2 cm außerhalb der nominellen Separatrix während der ohmschen Phase von ASDEX-Schuß 31146. Nur die untere Hälfte ($\Delta x \leq 0$) wurde tatsächlich gemessen: Die perfekte Punktsymmetrie der Plots, welche man *idealerweise* wegen Eigenschaft (33) erwartet, ist durch *numerische* Punktspiegelung am Ursprung entstanden. Daß die Konturlinien trotz der groben Ortsauflösung feine Strukturen aufweisen, liegt an der bilinearen Interpolation der Daten, deren τ -Abhängigkeit ja in sehr guter Auflösung gegeben ist (Abtastrate = 1MHz). „Schwarz“ bedeutet *maximale* Korrelation.

Hauptunterschied zwischen Dichte- und Potentialkorrelation (salopp für Korrelation von Ionensättigungsstrom bzw. Floating Potential) ist, daß das Dichtekorrelationsmaximum wesentlich breiter ist als das Potentialkorrelationsmaximum. Wenn von der „Breite“ der Korrelationsfunktion die Rede ist, muß sie zunächst erklärt werden. Die Definition der *räumlichen Breite* L_r der Kreuzkorrelationsfunktion muß eine sinnvolle Aussage über die x -Abhängigkeit des Signals $s(x, t)$ zu *konstantem* t ermöglichen. Demnach ist die räumliche Breite der Korrelationsfunktion $\rho(\Delta x, \tau)$ auf natürliche Weise definiert als dasjenige Δx , bis zu dem die Korrelation zu $\tau = 0$ auf ein bestimmtes Niveau $0 < r < 1$ abfällt:

$$|\rho(L_r, \tau = 0)| = r$$

In Abbildung 9 repräsentiert die Ellipse die Konturlinie zu einem Niveau r . Die Länge der Strecke \overline{OB} in Einheiten der Δx -Skala ist mit der räumlichen Breite L_r von $\rho(\Delta x, \tau)$ zu identifizieren. L_r wird oft auch als *Korrelationslänge* bezeichnet. In Abbildung 10 ist die poloidale 20%-Breite $L_{0.2}$ von Ionensättigungsstrom bzw. Floating Potential ≈ 1.1 cm bzw. ≈ 0.6 cm. Im Gegensatz zur räumlichen Breite ist die *zeitliche* Breite *nicht* invariant gegenüber Galileitransformation. Auf sie soll erst im nächsten Abschnitt eingegangen werden.

Auffälligste Gemeinsamkeit: Zeichnet man in die Korrelogramme von Ionensättigungsstrom und Floating Potential Abb. 10 die zur Δx -Achse parallelen Tangenten an die ellipsenähnlichen Höhenlinien (in Abb. 9 die Tangente h), so liegen die Berührungspunkte mit einer gewissen statistischen Schwankung auf Geraden (in Abb. 9 mit „ g “ bezeichnet). Der Neigungswinkel dieser Geraden gegen die τ -Achse stimmt für Ionensättigungsstrom und Floating Potential überein. Wie im Abschnitt 6.3.2 zu zeigen sein wird, ist durch den Tangens des Neigungswinkels von g die Poloidalkomponente der Geschwindigkeit der Fluktuationen wohldefiniert — obgleich dies nicht die einzig sinnvolle Definition einer Ausbreitungsgeschwindigkeit (Gruppengeschwindigkeit) der Fluktuationen ist. Es überrascht nicht sonderlich, daß die aus dem simultan gemessenen Ionensättigungsstrom und

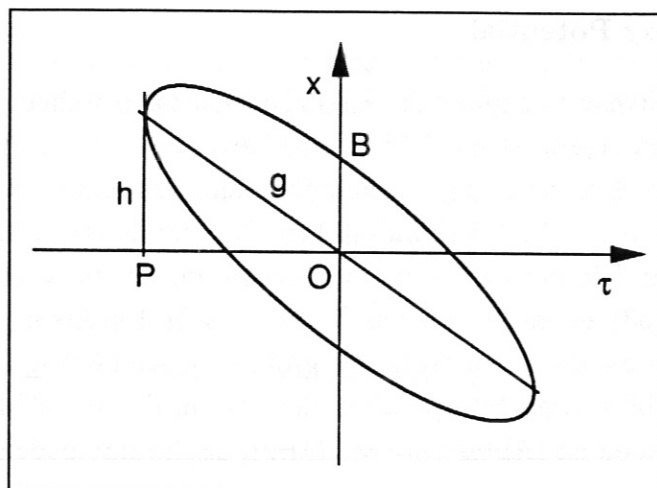


Abbildung 9: Skizze zur Definition von zeitlicher und räumlicher Breite T_r bzw. L_r der Korrelationsfunktion sowie der poloidalen Geschwindigkeitskomponente v_{pol} der Fluktuationen

dem Floating Potential ermittelten Ausbreitungsgeschwindigkeiten übereinstimmen.

6.3.2 Poloidale Geschwindigkeitskomponente der Fluktuationen

Die Steigung der Geraden g hat die Dimension einer Geschwindigkeit und es sei kurz erklärt, warum sie mit der poloidalen Geschwindigkeitskomponente der Fluktuationen bzw. — wenn bestätigt wird, wofür vieles spricht — der poloidalen Rotation des Plasmas zu identifizieren ist. Sei x bzw. \hat{x} die poloidale Koordinate im Laborsystem S bzw. im mit den Fluktuationen mitbewegten System \hat{S} . \hat{S} bewege sich gegenüber S mit konstanter Geschwindigkeit v und o. B. d. A. gelte zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ der Messung $\hat{x} = x$. Der Zusammenhang zwischen x und \hat{x} zur Zeit t wird durch die Galileitransformation beschrieben:

$$\hat{x} = x - vt \quad \text{oder} \quad x = \hat{x} + vt \quad (51)$$

Damit wird die Korrelationsfunktion zweier Kanäle im Abstand Δx bezügl. des ruhenden Systems:

$$\rho(\tau, x, x + \Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \hat{x} + vt) s(t + \tau, \hat{x} + \Delta x + vt + v\tau) dt \quad (52)$$

Da $\rho(\tau, x, x + \Delta x)$ aus Gl. 52 unter der Bedingung

$$\Delta x = -v\tau \quad (53)$$

in die Autokorrelationsfunktion bezüglich S übergeht, ist für einen Schnitt zu konstantem τ ein Maximum bei $\Delta x = -v\tau$ zu erwarten. Die Menge der zu allen ($\tau = konst.$)-Schnitten

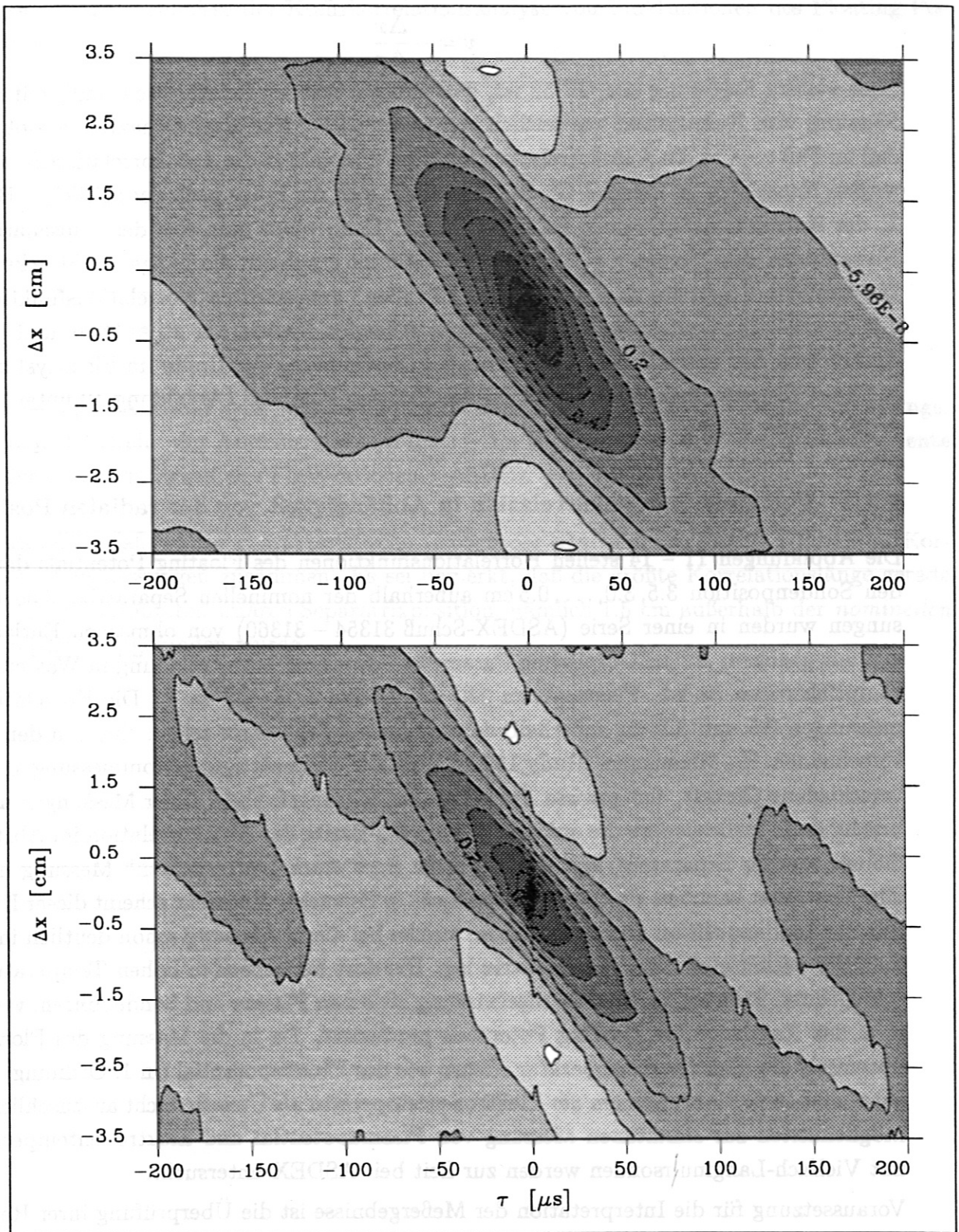


Abbildung 10: Kreuzkorrelationsfunktion $\rho(\tau, \Delta x)$ des Ionensättigungsstromes (oben) und des Floating Potentials (unten). Simultane Sondenmessung 2 cm außerhalb der nominellen Separatrix während der ohmschen Phase von ASDEX-Schuß 31146. Abtastrate 1MHz. Effektiver Kanalabstand: 0.5 cm. Jeweils äquidistante Höhenlinienniveaus: 0.80, 0.7, -0.2. „Schwarz“ entspricht max. Korrelation.

bestimmten Δx , liegt auf einer Geraden mit der Steigung

$$v = -\frac{\Delta x}{\Delta \tau} \quad (54)$$

Eine weitere Folgerung aus Gl. 52 ist, daß mit wachsender Relativgeschwindigkeit v die Messung vom Ruhesystem aus zeitlich immer schmalere Korrelationsmaxima ergibt, und daß im Fall $v \rightarrow \infty$ die Autokorrelationsfunktion übergeht in die Autokorrelationsfunktion weißen Rauschens (s. Beispiel Gl. 36). Es erhebt sich die Frage nach der zeitlichen Breite T_r der Korrelationsfunktionen im Eigensystem. Dazu wählt man eine der ellipsenartigen Niveaulinien zum Niveau $r = 0.2$ aus und bestimmt graphisch die Länge der Strecke \overline{OP} . Die zeitliche 0.2-Breite $L_{0.2}$ der in Bild 10 (oben) dargestellten Korrelationsfunktionen des Ionensättigungsstromes ergibt sich vom ruhenden System aus zu $\approx 38 \mu s$ und unter Anwendung des geschilderten Verfahrens zur Bestimmung der Breite im Eigensystem zu $\approx 77 \mu s$. Die entsprechenden Werte für das Floating Potential (Abbildung 10 unten) sind $\approx 20 \mu s$ bzw. $\approx 53 \mu s$.

6.3.3 Poloidale Sondenkorrelation in Abhängigkeit von der radialen Position

Die Abbildungen 11 – 14 stellen Korrelationsfunktionen des Floating Potentials dar bei den Sondenposition 3.5, 3.0, ..., 0.5 cm außerhalb der nominellen Separatrix. Die Messungen wurden in einer Serie (ASDEX-Schuß 31354 – 31360) von ohmschen Entladungen mit gleichen, ASDEX-typischen Parametern durchgeführt: Entladung in Wasserstoff, Hauptfeldstrom 35 kA, Plasmastrom 380 kA, Dichte $3.08 \cdot 10^{19} m^{-3}$. Die Korrelationsmessungen 0.5 und 3.5 cm außerhalb der nominellen Separatrix zeigen eine von den entsprechenden H_α -Messungen [Rudyj1990a] und der Ionensättigungstrommessung derart verschiedene Gestalt, daß gewisse Zweifel an der Störungsfreiheit dieser Messungen angebracht sind. Insbesondere die auffällig geringe 0.2-Breite der Autokorrelation im Abstand 0.5 cm von der Separatrix, legt den Verdacht einer stark „verrauschten“ Messung nahe. Die Verstärker kommen als Quelle jedoch nicht in Betracht. Vielmehr scheint dieser Effekt mit der Sondenposition zu tun zu haben, welche bei dieser Messung schon deutlich innerhalb der vermuteten *wahren* Separatrix lag. Die dort herrschenden hohen Temperaturen und Dichten könnten zu einer Wechselwirkung zwischen Plasma und Sonde führen, welche u. a. das Rauschen des Floating Potentials produziert. Da in die Messung des Floating Potentials die Elektronentemperatur ebenso wie das Plasmapotential (in 1. Ordnung) eingeht, sind auch Fluktuationen der Elektronentemperatur als Ursache nicht auszuschließen. Möglichkeiten zur simultanen Messung von Plasmapotential und Elektronentemperatur mit Vielfach-Langmuirsonden werden zur Zeit bei ASDEX untersucht.

Voraussetzung für die Interpretation der Meßergebnisse ist die Überprüfung ihrer Reproduzierbarkeit, die Validierung der experimentellen Anordnung und die Durchführung von entsprechenden Messungen des Ionensättigungsstromes (am besten simultane Messung von Potential und Ionensättigungsstrom).

Tabelle 1: Ergebnisse der Kreuzkorrelationsanalyse von Fluktuationen des Floating Potentials

$r - r_s$ [cm]	$L_{0.2}$ [cm]	$T_{0.2}$ [μs]	v_{pol} [ms^{-1}]	ASDEX #
3.5	(?)	(?)	(?)	31358
3.0	0.54	31	148	31359
2.5	0.71	44	< 200	31357
2.0	0.92	74	248	31356
1.5	1.1	137	255	31355
1.0	0.87	44	266	31354
0.5	(?)	≈ 4	1790 (?)	31360

$r - r_s$: Abstand von der nominellen Separatrix. $L_{0.2}$: 0.2-Korrelationslänge. $T_{0.2}$: 0.2-Breite der Autokorrelationsfunktion im Eigensystem. v_{pol} : Poloidalkomponente der Geschwindigkeit der Fluktuationen. ASDEX #: Schußnummer.

Tabelle 1 faßt einige charakteristische Größen der abgebildeten Floating Potential Korrelationsmessungen zusammen. Es sei bemerkt, daß die größte Korrelationslänge gerade bei der vermuteten *wahren* Separatrixposition, nämlich 1.5 cm außerhalb der *nominellen* Separatrix, gefunden wurde.

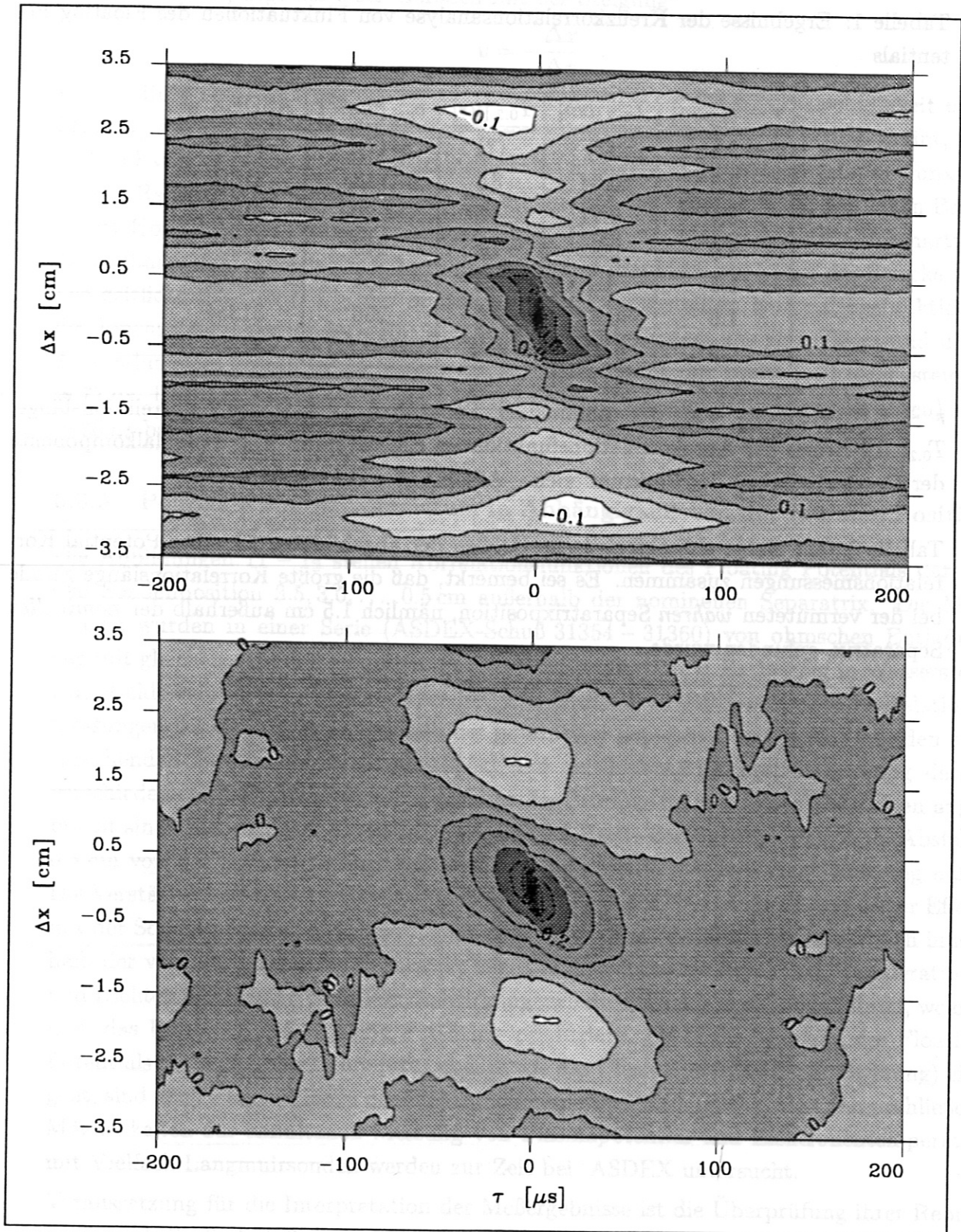


Abbildung 11: Korrelationsfunktionen des Floating Potentials 3.5 und 3.0 cm außerhalb der nominellen Separatrix (Bild oben bzw. unten). Höchstes Konturniveau: 0.9. Niedrigste Konturniveaus: -0.1 (oben) und -0.2 (unten). Konstanter Niveauband: 0.1. Schwarz bedeutet maximale Korrelation.

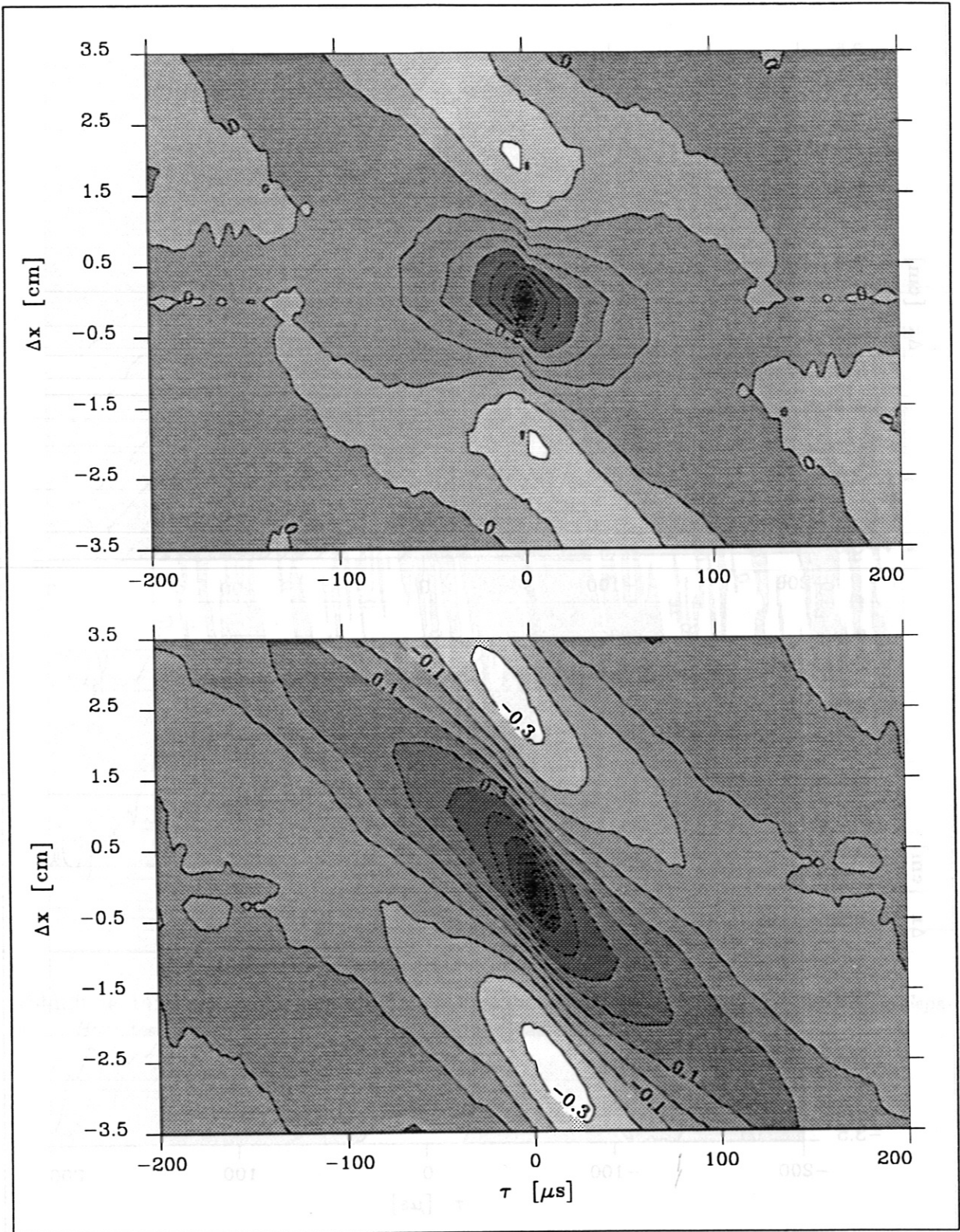


Abbildung 12: Korrelationsfunktionen des Floating Potentials 2.5 und 2.0 cm außerhalb der nominellen Separatrix (Bild oben bzw. unten). Höchstes Konturniveau: 0.9. Niedrigste Konturniveaus: -0.2 (oben) und -0.3 (unten). Konstanter Niveauabstand: 0.1. Schwarz bedeutet maximale Korrelation.

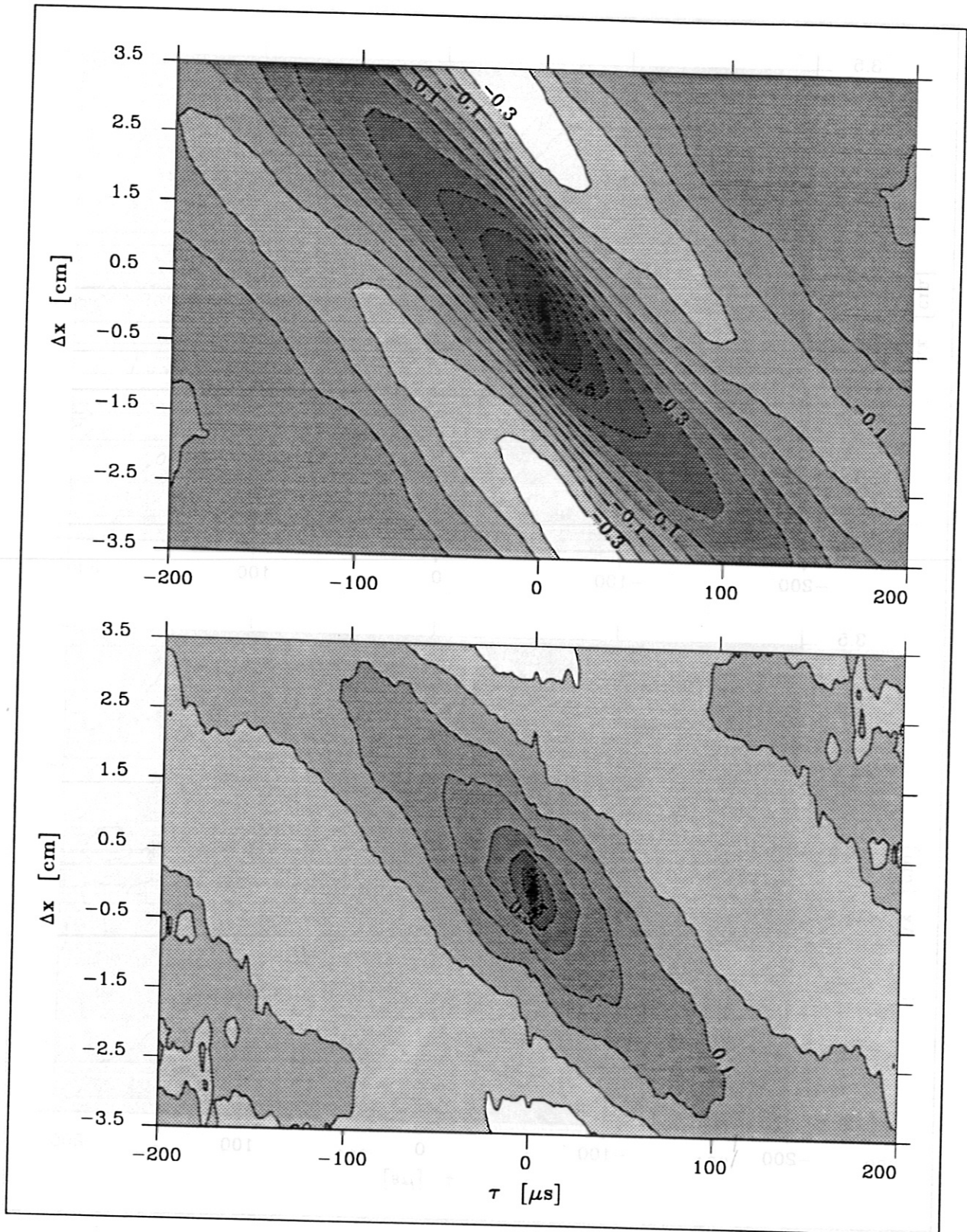


Abbildung 13: Korrelationsfunktionen des Floating Potentials 1.5 und 1.0 cm außerhalb der nominellen Separatrix (Bild oben bzw. unten). Höchstes Konturniveau: 0.9. Niedrigste Konturniveaus: -0.3 (oben) und -0.1 (unten). Konstanter Niveaubabstand: 0.1. Schwarz bedeutet maximale Korrelation.

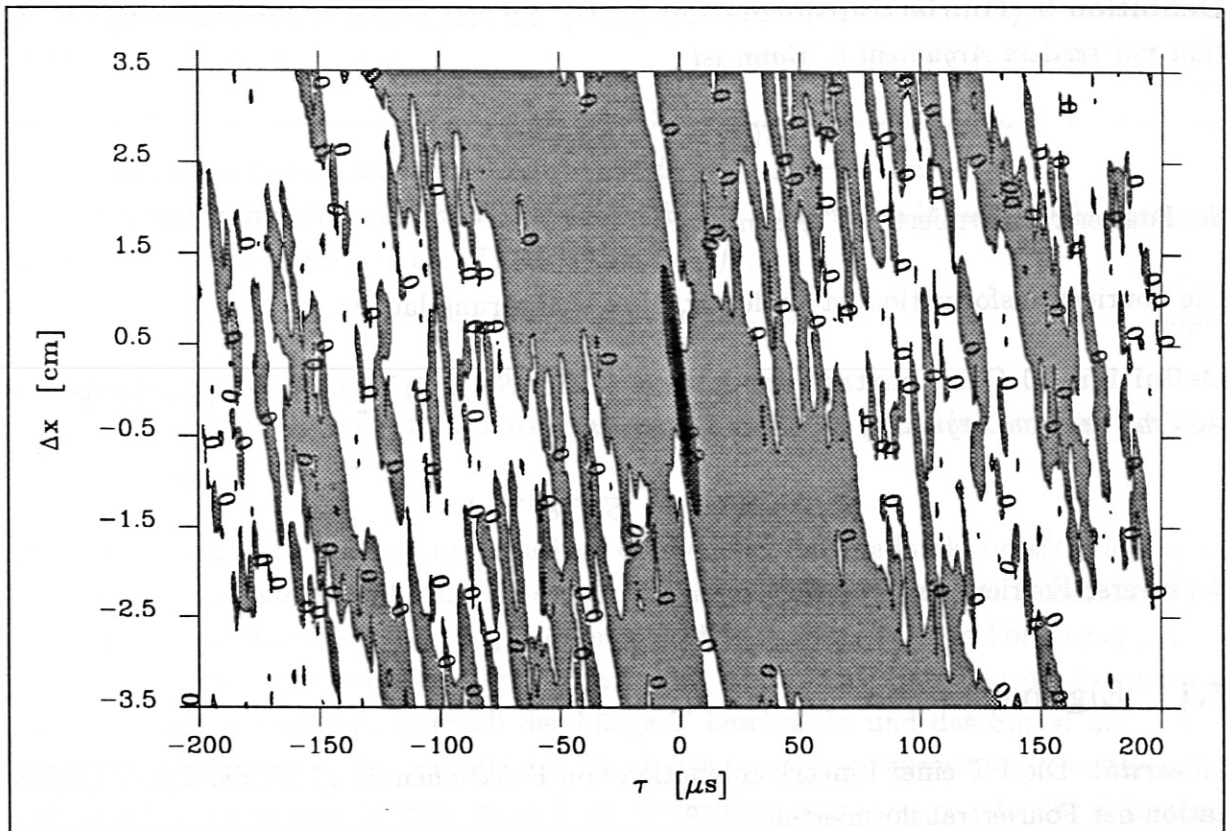


Abbildung 14: Korrelationsfunktionen des Floating Potentials 0.5 cm außerhalb der nominellen Separatrix. Höchstes Konturniveau: 0.2. Tiefstes Konturniveau: 0.0. Niveauabstand: 0.1.

7 Fouriertransformation (1D)

Der Übergang vom Zeitbereich bzw. Ortsraum in den Frequenzbereich bzw. k-Raum ist durch die *Fouriertransformation* [Bracewell1986a] gegeben. In den Theorieabschnitten wird überall dort, wo dieselben Beziehungen für Ort und Zeit bzw. k-Raum und Frequenzbereich gelten, nur der Zeit- und Frequenzbereich betrachtet. Die entsprechenden Aussagen für Orts- und k-Raum erhält man einfach durch Variablensubstitution und gegebenenfalls korrektes Einfügen eines Faktors 2π bzw. $1/2\pi$.

Definition 9 (Fouriertransformation (1D)) Sei $s(t)$ eine i. a. komplexwertige Funktion mit reellem Argument t . Dann ist

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

die Fouriertransformierte (FT) von $s(t)$.

Die Fouriertransformation ist eindeutig. Ihre Umkehrung lautet:

Definition 10 (Umkehrtransformation (1D)) Sei $S(f)$ eine i. a. komplexwertige Funktion mit reellem Argument f . Dann beschreibt

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi ft} df$$

die inverse Fouriertransformation von $s(t)$.

7.1 Eigenschaften

Linearität: Die FT einer Linearkombination von Funktionen ist gleich der Linearkombination der Fouriertransformierten.

Verschiebungseigenschaft: Sei $S(f)$ die Fouriertransformierte von $s(t)$. Dann gilt:

$$\text{FT: } s(t - a) \rightarrow e^{-2i\pi af} S(f) \quad (55)$$

Ähnlichkeit: Sei $S(f)$ die Fouriertransformierte von $s(t)$. Dann gilt:

$$\text{FT: } s(at) \rightarrow |a|^{-1} S(f/a) \quad (56)$$

Hermitezität der Fouriertransformierten einer reellen Funktion: Aus der Eulerschen Identität $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, der Geradheit von Cosinus, der Ungeradheit von Sinus und Definition 9 folgt:

$$S(-f) = S^*(f) \quad (57)$$

Parsevalsches Theorem: Seien $S_1(f)$, $S_2(f)$ die Fouriertransformierten von zwei Funktionen $s_1(t)$, $s_2(t)$. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f)S_2^*(f) df \quad (58)$$

Für das Weitere ist noch das durch „*“ symbolisierte *Faltungsprodukt* zweier Funktionen s_1 , s_2 wichtig:

Definition 11 (Faltung)

$$s_1 * s_2(u) := \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(u-t) dt \quad (59)$$

heißt *Faltung* von s_1 und s_2 .

Aus Def. (11), *Verschiebungseigenschaft* (55) und Anwendung der *inversen FT* (10) gewinnt man unter Berücksichtigung des *Parsevalschen Theorems* das

Faltungstheorem: Sei $s(u)$ das *Faltungsprodukt* $s_1 * s_2(u)$ von $s_1(t)$ und $s_2(t)$, dann gilt für die *Fouriertransformierten* $S(f)$, $S_1(f)$ und $S_2(f)$:

$$S(f) = S_1(f) S_2(f) \quad (60)$$

7.2 Fouriertransformation von stationären (statistischen) Prozessen

Die Definition 9 der Fouriertransformation setzt voraus, daß die Funktion $s(t)$ *quadratinTEGRABEL* ist. Das Integral (58) muß also endlich sein $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$. Stationäre Prozesse, wie beispielsweise sinusförmig variierende Signale, können diese Forderung jedoch quasi per definitionem *nicht* erfüllen. Man behilft sich damit, daß man die Integration zunächst auf ein endliches Intervall der Länge T beschränkt und das Signal mit $1/\sqrt{T}$ normiert. Das Integral (58) und die aus Def. 9 der Fouriertransformation resultierenden Spektralfunktionen konvergieren dann beim Grenzübergang $T \rightarrow \infty$. In den folgenden Abschnitten, die sich mit stationären Prozessen befassen, beziehen sich deshalb die Definitionen sämtlicher statistischer Funktionen im Spektralbereich auf die in abgewandelter Weise bestimmte Spektralfunktion

$$S(f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (61)$$

wobei noch der Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ durchzuführen ist. Ähnliche Verfahren zur Definition der Fouriertransformation eines stationären Prozesses werden in der Literatur beschrieben, z. B. [Bracewell1986a].

Im Experiment kann der Grenzübergang nicht vollzogen werden. Durch hinreichend lange Meßzeiten ist allerdings eine beliebig gute Approximation möglich. Bei der diskreten Fouriertransformation (Abschn. 7.4, 8.1) stellt sich das Problem nicht.

7.3 Sampling

Die Abtastung eines kontinuierlichen Signals $s(t)$ mit konstanter Rate $1/\Delta$ liefert das diskretisierte Signal $s_i(t)$. Formal wird Sampling als Impulsmodulation beschrieben, also

$$s_i(t) = s(t)i(t) \quad (62)$$

wobei

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) \quad (63)$$

Die Fouriertransformierte $S_i(f)$ von $s_i(t)$ ist nach Theorem 60 das Faltungsprodukt der Fouriertransformierten $S(f)$ und $I(f)$. Die FT angewandt auf $i(t)$ ergibt (Beweis in [Lighthill1959a])

$$I(f) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{\Delta}) \quad (64)$$

Damit findet man durch Ausrechnung des Faltungsintegrals:

$$S_i(f) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - \frac{n}{\Delta}) \quad (65)$$

$S_i(f)$ ist eine *periodische* Funktion mit Periodenlänge $1/\Delta$:

$$S_i(f + k\frac{1}{\Delta}) = S_i(f) \quad \text{für} \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (66)$$

Natürlich ist bei reellem $s(t)$ auch $s_i(t)$ reell (Gl. 62), weshalb $S(f)$ und $S_i(f)$ hermitesch sind. Falls $S(f) = 0$ für $|f| \geq 1/2\Delta$ ist $S_i(f)$ einfach eine periodische Version von $S(f)$. Multiplikation mit

$$H(f) = \begin{cases} \Delta & : |f| < \frac{1}{2\Delta} \\ 0 & : |f| \geq \frac{1}{2\Delta} \end{cases} \quad (67)$$

liefert wieder $S(f) = S_i(f)H(f)$. Das heißt, daß ein beliebiges Signal $s(t)$ aus seinen Abtastwerten rekonstruiert werden kann, wenn nur seine Fouriertransformierte $S(f)$ für alle betragsmäßig größeren Frequenzen als die halbe Abtastrate $1/2\Delta$ verschwindet (*Nyquisttheorem*). Die explizite Rekonstruktion von $s(t)$ erhält man wiederum über das Faltungstheorem, nämlich

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi u/\Delta)}{(\pi u/\Delta)} s_i(t - u) du \quad (68)$$

Falls nicht mittels Tiefpaß die spektralen Komponenten oberhalb der Nyquistfrequenz $f_{Nyq} = 1/2\Delta$ aus $s(t)$ herausgefiltert werden, entsteht *Aliasing*:

Jedes beliebige f läßt sich aufspalten in $f = 1/2\Delta + \hat{f}$. Damit ist wegen der Periodizität (66) von $S_i(f)$

$$S_i(f) = S_i(\hat{f} + \frac{1}{2\Delta}) = S_i(\hat{f} - \frac{1}{2\Delta}) \quad (69)$$

Für reelles $s(t)$ ist $S_i(f)$ hermitesch. Deshalb:

$$S_i(f) = S_i(\hat{f} - \frac{1}{2\Delta}) = S_i^*(\frac{1}{2\Delta} - \hat{f}) \quad (70)$$

$$\rightarrow S_i(f_{Nyq}) = S_i^*(f_{Nyq})$$

Folgerung: Wenn das reelle Signal $s(t)$ nichtverschwindende spektrale Komponenten bei Frequenzen oberhalb der halben Abtastrate $1/2\Delta$ (Nyquistfrequenz) besitzt, dann werden die konjugiert komplexen Fourierkoeffizienten des gesampelten Signals $s_i(t)$ an f_{Nyq} gespiegelt. Es erscheinen also die Fourierkoeffizienten zu $f < f_{Nyq}$ um diese gespiegelten Beiträge von $f \geq f_{Nyq}$ erhöht. Stetigkeit von $S(f)$ an der Stelle f_{Nyq} fordert wegen Gleichung 70

$$S_i(f_{Nyq}) = 2 \operatorname{Re}[S(f_{Nyq})] \quad (71)$$

Aliasing ist ein Effekt der endlichen *Abtastrate*. Bei Messungen ist außerdem die endliche Anzahl von Samples oder, gleichbedeutend, die endliche *Fensterbreite* T zu berücksichtigen. Dies führt zur *diskreten* Fouriertransformation (DFT).

7.4 Diskrete Fouriertransformation

Definition 12 (DFT) Sei $s(t)$ an N äquidistanten Stützstellen gegeben durch

$$s_r = s(r\Delta) \quad \text{für} \quad r = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

dann ist durch Angabe der N Fourierkoeffizienten S_m die DFT vollständig bestimmt:

$$S_m = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} s_r e^{-i2\pi mr/N} \quad (72)$$

S_m gehört zu der diskreten Frequenz $\frac{m}{N\Delta}$, wobei $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

7.4.1 Eigenschaften

Periodizität: $S_{m+kN} = S_m$, für alle ganzzahligen k . Die Periodizität erlaubt den Wertebereich von m auf ein willkürliches Intervall der Länge N einzuschränken, ohne dabei Information zu verlieren. Im folgenden ist der repräsentative Indexbereich immer:

$$\begin{array}{ll} -\frac{N}{2} + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} & N \text{ gerade} \\ -\frac{N-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2} & N \text{ ungerade} \end{array} \quad (73)$$

Dies läßt sich zusammenfassen in:

$$-\left[\frac{N-1}{2}\right], \dots, -1, 0, 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right]$$

Die eckigen Klammern [...] bezeichnen den ganzzahligen Anteil.

Hermitezität: Für reelles $s(t)$ gilt:

$$S_{-m} = S_m^*$$

Mittelwert: S_0 ist der zeitliche Mittelwert von s_r .

Die Berechnung der N Fourierkoeffizienten nach Definition (12) erfordert eine zu N^2 proportionale Anzahl von Additionen und Multiplikationen. Der mathematisch äquivalente FFT-Algorithmus liefert dasselbe mit einem Rechenaufwand $\sim N \log N$.

Für Funktionen $s(t)$, welche diskrete, nichtverschwindende Fourierkomponenten nur bei den *ganzzahligen* Vielfachen der Grundfrequenz $1/N\Delta$ besitzen, jedoch keine Beiträge bei höheren Frequenzen als der Nyquistfrequenz haben (*periodische Funktionen*), ist die DFT exakt. Für Spektralanteile von $s(t)$ bei nichtganzzahligen Frequenzvielfachen von $1/2\Delta$ liefert die DFT Beiträge zu *sämtlichen* ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz. Obwohl der Hauptbeitrag i. a. an die nächst benachbarte Harmonische geht, ist bei kleiner Zahl von Samples Vorsicht geboten (k -Spektrum aus 16 Ortskanälen!). Durch Wahl geeigneter *Fensterfunktionen* (im Zeitbereich) kann ein Kompromiß erzielt werden zwischen spektraler Auflösung und Frequenzselektivität [Hesselmann1983a].

7.5 Spektren

7.5.1 Eigenleistungsspektrum

Sei $s(t)$ wieder die Realisation eines ergodischen Zufallsprozesses. Sowohl die kontinuierliche als auch die diskrete Fouriertransformierte $S(f)$ einer bestimmten Realisation $s(t)$ wird i. a. *nicht* verschwinden. Dagegen muß für den *Ensemblemittelwert* gelten

$$\langle S(f) \rangle = 0. \quad (74)$$

Gleichung 74 sagt lediglich, daß auch die Erwartungswerte der spektralen Komponenten $S(f)e^{-2i\pi ft}$ identisch 0 sind. Der Erwartungswert der Amplituden $\langle |S(f)| \rangle$ ist dagegen i. a. von 0 verschieden.

Definition 13 (Eigenleistungsdichtespektrum) Den Erwartungswert der Amplitudenquadrate

$$P(f) = C(f) = \langle |S(f)|^2 \rangle = \langle S^*(f)S(f) \rangle$$

in Abhängigkeit von f nennt man Eigenleistungsdichtespektrum.

Eigenschaften Da das Eigenleistungsdichtespektrum im Gegensatz zu $S(f)$ *per definitionem* reell ist, geht die in der Fouriertransformierten enthaltene Phaseninformation verloren. Das Leistungsspektrum reellwertiger statistischer Prozesse (Meßsignale) ist wegen der Hermitezität der Fouriertransformierten und $|z^*| = |z|$ symmetrisch: $P(-f) = P(f)$. Es genügt daher, das Leistungsspektrum für positive f bzw. k zu berechnen. Das Integral

des Eigenleistungsspektrums ist gleich dem Erwartungswert der Leistung (RMS-Wert der Fluktuationsamplitude) des statistischen Prozesses. Bei der Berechnung der *Gesamtleistung* sind die Beiträge von negativen f bzw. k zu berücksichtigen, weshalb theoretisch gilt

$$P^{(ges)} = 2 \int_0^{\infty} P(f) df \quad (75)$$

Das Eigenleistungsspektrum an der Stelle $f = 0$ allgemein ist gegeben durch:

$$P(0) = \langle s(t) \rangle_t^2 \cdot \delta(f) \quad (76)$$

wobei $\delta(f)$ die Diracsche Deltafunktion bezeichnet (beachte Abschn. 7.2).

7.5.2 Kreuzspektren

Die Fluktuationen stellen Zeit- und ortsabhängige statistische Prozesse $s(x, t)$ dar. Durch $s(x_1, t)$ und $s(x_2, t)$, wobei x_1, x_2 jetzt Parameter seien, sind dann (abgesehen von $x_1 = x_2$) zwei verschiedene, nur von t abhängige, statistische Prozesse gegeben. Die Substitution von $S^*(f) S(f)$ durch $S^*(x_1, f) S(x_2, f)$ in Definition (13) ergibt eine *komplexe* Funktion:

Definition 14 (Kreuzspektrumsdichtefunktion)

$$C(x_1, x_2, f) = \langle S^*(x_1, f) S(x_2, f) \rangle$$

Die Spektralfunktionen $S(x_1, f)$ und $S(x_2, f)$ folgen aus Gl. 61.

Unter Beschränkung auf ein Intervall der Länge 2π , welches o. B. d. A. $(-\pi, \pi]$ sei, hat jede komplexe Zahl die eindeutige Darstellung $z = |z|e^{i\varphi(z)}$. Die Kreuzspektrumsdichtefunktion ist daher äquivalent zu *zwei reellen* Funktionen. Den Betrag nennt man *Kreuzleistungsspektrum*.

Definition 15 (Kreuzleistungsdichtespektrum)

$$P(x_1, x_2, f) = |C(x_1, x_2, f)|$$

Das Eigenleistungsdichtespektrum gemäß Def. (13) geht aus 15 für $x_1 = x_2$ hervor. Die relative Phasenverschiebung φ der spektralen Komponenten der Prozesse $s(x_1, t)$ und $s(x_2, t)$ ist gegeben durch

Definition 16 (Phasenspektrum)

$$\varphi(x_1, x_2, f) = \arg(C(x_1, x_2, f)) \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

Information über wirkliche Phasendifferenzen mit Betrag $> \pi$ der Spektralkomponenten zur Frequenz f ist in den Fouriertransformierten nicht enthalten. Durch die Beschränkung des Wertebereichs auf $(-\pi, \pi]$ und die *modulo*-Eigenschaft wird die Messung i. a. sogar

dann Unstetigkeiten liefern, wenn die Phasenspektren in Wirklichkeit *stetig* sind. Ein Phasenspektrum $\Phi(x_1, x_2, f)$ existiert auch für Signale $s(x_1, t)$ und $s(x_2, t)$ mit völlig unkorrelierten Spektralanteilen zur Frequenz f . Da dies wenig sinnvoll ist, benötigt man ein Maß für die Korrelation der Frequenzkomponenten $S(x_j, f)$ für $j = 1, 2$ als Funktion von f . Ein solches ist durch die *Kohärenzfunktion* $\kappa(x_1, x_2, f)$ gegeben:

Definition 17 (Kohärenzfunktion)

$$\kappa(x_1, x_2, f) = \frac{P(x_1, x_2, f)}{\sqrt{P(x_1, f)P(x_2, f)}}$$

$\kappa(x_1, x_2, f)$ ist das auf die Eigenleistungen $P(x_j, f)$ von $s(x_j, t)$, ($j = 1, 2$) normierte Kreuzleistungsdichtespektrum.

Eigenschaften (Kohärenzfunktion): Für die *Frequenz-Kohärenzfunktion* des statistischen Prozesses $s(x, t)$ gilt

$$x_1 = x_2 \rightarrow \kappa(x, f) = 1 \quad \text{für } -\infty < f < \infty \quad (77)$$

da jedes Signal mit sich selbst kohärent sein muß. Analoges gilt im Fall der k -Kohärenzfunktion für $t_1 = t_2$.

Wertebereich von κ :

$$0 \leq \kappa(x_1, x_2, f) \leq 1 \quad \text{für } -\infty < x_1, x_2, f < \infty \quad (78)$$

Die Ensemblemittelwerte, die Bestandteil aller vorangehend definierten statistischen Funktionen sind, können in unserem Fall praktisch nicht bestimmt werden, da eine ausreichende Anzahl gleicher Entladungen nicht durchgeführt werden kann. Im Abschnitt 7.6 werden für die diskretisierten Darstellungen der Kreuzspektren die zwei zur Anwendung gelangten Mittelungsverfahren beschrieben.

7.5.3 Frequenz- und Wellenzahlspektren eines xt -translationsinvarianten statistischen Prozesses

Für räumlich (x) und zeitlich (t) translationsinvariante statistische Prozesse $s(x, t)$ sind die im letzten Abschnitt definierten statistischen Funktionen C , P , φ und κ im *Frequenzbereich* nur vom *räumlichen Abstand* $\Delta x = x_2 - x_1$ parametrisch abhängig (vgl. Abschnitt 6.2), also

$$C, P, \varphi, \kappa(x_1, x_2, f) \equiv C, P, \varphi, \kappa(\Delta x, f) \quad (79)$$

Im k -Raum wird durch $C(k, t_1, t_2)$, $P(k, t_1, t_2)$, $\varphi(k, t_1, t_2)$, und $\kappa(k, t_1, t_2)$ die Beziehung beschrieben, die zwischen der räumlichen Struktur von $s(x, t)$ zum Zeitpunkt t_1 und derjenigen zum Zeitpunkt t_2 besteht. Die xt -Translationsinvarianz bedeutet in diesem Fall, daß C , P , φ und κ nur von der *delay time* $\tau = t_2 - t_1$ parametrisch abhängen:

$$C, P, \varphi, \kappa(k, t_1, t_2) \equiv C, P, \varphi, \kappa(k, \tau) \quad (80)$$

Der Erwartungswert in Def. (14–17) kann im Frequenzbereich durch räumliche Mittelung über alle x_1, x_2 mit festem Abstand Δx ersetzt werden und im k -Raum durch zeitliche Mittelung über alle t_1, t_2 mit fester Differenz τ .

Anwendung der Definition 14 ergibt

$$\begin{aligned} C(\Delta x, f) &= \langle S^*(x, f) S(x + \Delta x, f) \rangle \\ C(k, \tau) &= \langle S^*(k, t) S(k, t + \tau) \rangle \end{aligned} \quad (81)$$

Der Vergleich von Gl. 81 mit Def. (6) zeigt unter Berücksichtigung von Gl. 49, daß $C(\Delta x, f)|_{f=\text{konst.}}$ und $C(k, \tau)|_{f=\text{konst.}}$ nichts anderes sind, als die unnormierten *komplexen* Autokorrelationsfunktionen der zeitlichen bzw. räumlichen Fouriertransformierten von $s(x, t)$.

7.6 Diskrete Berechnung der Kreuzspektren

Seien $S(x_1, f_i)$ und $S(x_2, f_i)$ die N Fourierkoeffizienten der durch N äquidistante Abtastwerte gegebenen Signale $s(x_1, t)$ und $s(x_2, t)$. Dann ist der diskrete Wert des Kreuzleistungsdichtespektrums bei f_i

$$C_i(x_1, x_2, f_i) = \langle S_i^*(x_1, f_i) S_i(x_2, f_i) \rangle \quad (82)$$

mit $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

7.6.1 Mittelung

Die Ergodizität erlaubt für die Wellenzahlspektren anstatt der Berechnung der Ensemblemittelwerte E *zeitliche* Mittelung.

Direkte Zeitmittelung Konkret sieht dies für die k -Kreuzspektrumsdichtefunktion folgendermaßen aus: Zunächst ist in Gleichung 82 x durch t und f durch k zu ersetzen und aus Konventionsgründen die Reihenfolge der Argumente zu vertauschen. Damit ist

$$C_i(k_i, t_1, t_2) = \frac{N_x \Delta x}{2\pi} \langle S_i^*(k_i, t_1) S_i(k_i, t_2) \rangle \quad (83)$$

Der Faktor $\frac{1}{\Delta k} = \frac{N_x \Delta x}{2\pi}$ normiert auf ein k -Intervall. Da das Kreuzspektrum $C_i(k_i, t_1, t_2)$ von ergodischen Prozessen nicht von der absoluten Zeit abhängt, geht nur die Differenz $\tau = t_2 - t_1$ ein (s. Abschnitt 7.5.3). Substitution des Ensemblemittelwertes durch den Zeitmittelwert ergibt die *diskrete Kreuzspektrumsdichtefunktion* für k :

$$C_i(k_i, \tau_m) = \frac{N_x \Delta x}{2\pi} \frac{1}{N_t - m} \sum_{j=0}^{N_t - 1 - m} S_i^*(k_i, t_j) S_i(k_i, t_j + \tau_m) \quad (84)$$

Bei festgehaltenem k_i ist $C_i(k_i, \tau_m)$ eine Funktion von τ_m . Der Bereich von m , in dem die Berechnung von $C_i(k_i, \tau_m)$ nach Formel (84) noch signifikante Resultate liefert, hängt von der Zahl N der Stützstellen ab. Bei $N_t \geq 20000$ Samples mittelt man für τ -Werte bis zur halben Länge des Zeitintervalls $T = N_t \Delta t$ immer noch wenigstens über 10000 Punkte, was statistisch völlig ausreichend ist.

Spektrale Mittelung Im Prinzip könnte die Mittelung bei den Frequenzspektren analog erfolgen: Über nicht zu große Entfernungen gilt ja annähernd Translationsinvarianz, sodaß sich zur Messung der Frequenz-Kreuzspektrumsdichtefunktion Mittelung über die $N_x = 16$ Kanäle anbietet. Da die Spektren für einen Mittelungsfaktor $M = 16$ sehr rauh werden (der rel. statistische Fehler skaliert wieder mit $1/\sqrt{M}$), mittelt man *spektral* über M benachbarte Frequenzen f_i . Die Frage, wie groß der Mittelungsfaktor für statistisch hinreichend signifikante Ergebnisse sein muß, wird z. B. in [Smith1974a] und [Rudj1987a] untersucht. Bei der oben genannten Anzahl von Samples ist oft $M = 40$ ein angemessener Kompromiß zwischen statistischer Rauigkeit der Spektren und ihrer spektralen Auflösung

$$\Delta f = \frac{M}{N_t \Delta t} \quad (85)$$

Für $N = 20000$ und $M = 40$ ist $\Delta f = 2$ kHz.

Die Formel für die diskrete Frequenz-Kreuzspektrumsdichtefunktion zum Mittelungsfaktor M ist:

$$C_i(x_1, x_2, f_i) = \frac{N_t \Delta t}{M} \sum_{j=-\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor + i \cdot M}^{(i+1) \cdot M - \lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor - 1} S_j^*(x_1, f_j) S_j(x_2, f_j) \quad (86)$$

wobei $0 \leq i \leq \lfloor \frac{N_t}{2M} \rfloor - 1$. Die eckigen Klammern [...] bezeichnen den ganzzahligen Anteil.

7.6.2 Gesamtleistung

Für die diskrete Berechnung der Gesamtleistung sind 2 Fälle zu unterscheiden:

$$P^{(ges)}(x_1, x_2) = \Delta f \cdot \begin{cases} P(x_1, x_2, f_0) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} P(x_1, x_2, f_i) + P(x_1, x_2, f_{\frac{N}{2}}) & : N \text{ gerade} \\ P(x_1, x_2, f_0) + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} P(x_1, x_2, f_i) & : N \text{ ungerade} \end{cases} \quad (87)$$

Bei kleinen N ist auf diese Unterscheidungen sehr zu achten.

Auf die Präsentation und Diskussion von Kreuzleistungs- und Phasenspektren im *Frequenzbereich* sei hier verzichtet und auf die Literatur verwiesen (ASDEX: [Rudj1987a] und [Rudj1990a]).

7.7 Experimentelle Befunde zum k-Leistungsspektrum

7.7.1 H_α -Fluktuationen

Abbildung 15 zeigt in doppelt logarithmischem Maßstab k-Leistungsdichtespektren einer H_α -Messung während der OH-, H-, und L- Phase. Aus den 16 Ortspunkten folgen 9 k-Werte: $k_i = i\Delta k$ mit $i = 0, 1, \dots, 8$ und $\Delta k = 0.6545 \text{ cm}^{-1}$. Die Spektren haben bei k_1 oder k_2 ein Maximum bzw. zeigen einen flachen Verlauf gegen 0. Dann fallen sie monoton mit spätestens ab k_3 positiver 2. Ableitung. Diese „Verlangsamung“ des Abfalls ist als Effekt des Aliasing erklärbar. Die Meßsignale passieren zwar ein Analogfilter gegen Frequenzaliasing aber keines gegen k-Aliasing und es ist sehr unwahrscheinlich, daß das k-Spektrum von $s(x, t)$ irgendwo diskontinuierlich auf 0 abfällt. Mit Gl. 71 kann für das Nyquist-k ($= k_8$) der vom Aliasing bereinigte Wert $P(k_8)$ angegeben werden. Im Mittel wird zu jeder k-Komponente des Eigenleistungsdichtespektrums $P(k) = \langle S^*(k, t) S(k, t) \rangle_t$ Real- und Imaginärteil der Fouriertransformierten $S(k, t)$ gleich viel beitragen, also

$$\langle S^*(k, t) S(k, t) \rangle_t = \langle |S(k, t)|^2 \rangle_t = 2 \langle \text{Re}^2(S(k, t)) \rangle_t$$

Gleichung 71 besagt, daß im Fall von Aliasing gilt:

$$S_{\text{diskret}}(k_{Nyq}, t) = 2 \text{Re} [S_{\text{cont}}(k_{Nyq}, t)]$$

weshalb der Wert des diskret berechneten Leistungsspektrums bei k_8 das *zweifache* des wahren Wertes ist. Abbildung 16 zeigt noch einmal das k-Leistungsspektrum für die ohmsche Phase mit dem Aliasing-korrigierten Wert $\hat{P}(k_8)$. Wir nehmen an, daß das wahre k-Spektrum für $k \geq 2 \text{ cm}^{-1}$ in der doppeltlogarithmischen Darstellung *linear* abfallen würde (in Abbildung 16 die schattierte Gerade). Für diesen k-Bereich gilt dann

$$P(k) = \text{konst.} \cdot k^{-r} \quad \text{für } k \geq 2 \text{ und } r > 1 \quad (88)$$

Der Abfall des k-Spektrums gemäß einem Potenzgesetz (88) entspricht den k-Spektren, die generell bei *stark turbulenten Prozessen* zu erwarten sind. Bei den H_α -Messungen zeigen sich deutliche Unterschiede im Exponenten r in Gl. 88 für verschiedene Entladungsbedingungen. Für den ASDEX-Schuß 30437 mit Counter-Neutralinjektion ergibt die graphische Bestimmung von r anhand von Bild 15 Werte von 2–2.5 für alle drei dargestellten Entladungsphasen. Bei Schuß 30717 findet man während der H-Phase mit Co-Neutralinjektion: $r \approx 3.25$ (ohne Abbildung). Aus Beziehungen der Art (88) folgt *keine charakteristische Länge*. Eine solche ergibt sich dagegen aus dem Abknicken im k-Intervall von 0.65 bis 1.3 cm^{-1} :

$$0.7 \leq \frac{1}{k_{\text{knick}}} < 1.6 \quad [\text{cm}]$$

Das Abknicken der Spektren bei $k_{\text{knick}} \approx 1$ war in der der — aus Zeitgründen — geringen Anzahl (5) von untersuchten H_α -Messungen vollständig reproduzierbar. Da die

Randschichtdicke L mit 1 – 1.5 cm angegeben wird, ist es naheliegend, den reziproken k -Wert des Knickpunktes in Relation zu setzen mit L . In auffallend guter numerischer Übereinstimmung gilt für die vorliegenden Daten:

$$\frac{1}{k_{knick}} \approx L \quad (89)$$

Unter der Annahme einigermaßen isotroper Verhältnisse in der Randschicht bezüglich der (r, Θ) -Ebene, ist nämlich durch L auch in poloidaler Richtung eine obere Schranke für die Ausdehnung der Strukturen gegeben, was für das wahre k -Spektrum ungefähr bei $k_{knick} = 1/L$ ein Abknicken des Spektrums und dann einen verhältnismäßig flachen Verlauf gegen $k = 0$ erwarten läßt.

Im diskreten Fall ist die Komponente zu $k = 0$ hauptsächlich das Integral der k -Komponenten mit $k < k_1$. Jedenfalls kann das k -Leistungsspektrum schon aufgrund der Endlichkeit der Gesamtleistung (Gl. 75 bzw. 87) *keinen* Pol einer Ordnung $|r| \geq 1$ haben, wie ihn Gl. 88 ergäbe, falls sich ihr Geltungsbereich über beliebig kleine $|k|$ erstrecken würde.

Die Frage ob die experimentell gefundene Form des k -Spektrums bei $|k| \leq 2 \text{ cm}^{-1}$ echt oder durch die geringe Anzahl der räumlichen Stützstellen bedingt ist (mit anderen Worten das Ergebnis eines systematischen Meßfehler darstellt), ist nicht ohne weiteres zu beantworten. Man muß dazu untersuchen, welches Resultat die Berechnung des diskreten Leistungsspektrums mit 16 Stützstellen ergibt, wenn das Potenzgesetz erst bei sehr kleinen $|k| \ll k_1 \approx 0.65 \text{ cm}^{-1}$ seine Gültigkeit verliert (kritischster Fall). Das sogenannte "spectral leakage", verursacht durch die endliche Fensterbreite $b = N\Delta x$, kann zu einer erheblichen Verzerrung des Spektrums führen [Hesselmann1983a]. Es wurde versucht, mit *Fensterfunktionen* diesen Effekt sowenig störend wie möglich zu machen.

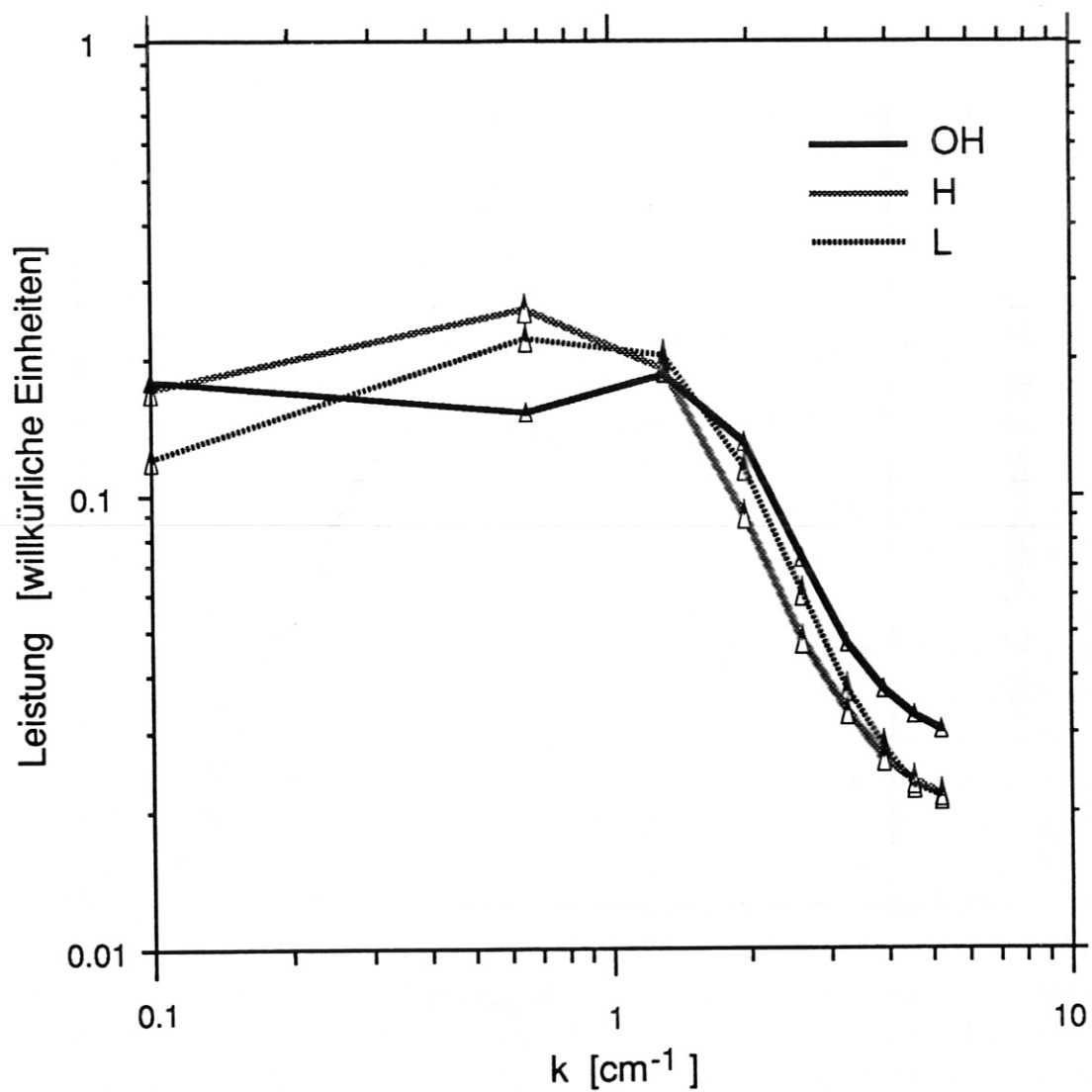


Abbildung 15: k_{pol} -Eigenleistungsdichtespektren von Dichtefluktuationen via Relativmessung der H_{α} -Intensität während der OH-, H, und L-Phase. H- und L-Phase mit Counter-Neutralinjektion (ASDEX Schuß 30437). Die Spektren sind auf gleiche Gesamtleistung normiert. Der Wert für $k = 0$ wurde bei $k = 0.1 \text{ cm}^{-1}$ aufgetragen.

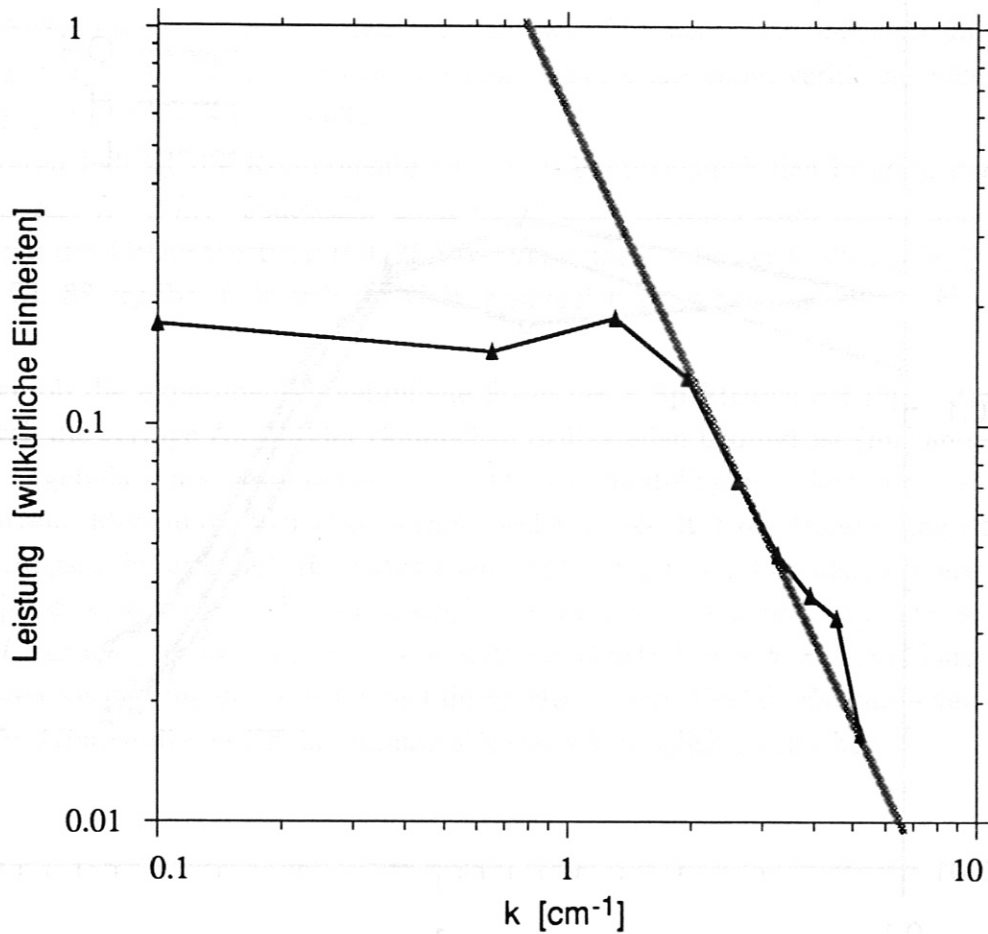


Abbildung 16: k_{pol} -Eigenleistungsdichtespektrum von Dichtefluktuationen via Relativmessung der H_{α} -Intensität während der OH-Phase (siehe Abbildung 15). Letzter Meßpunkt (durchgezogene Line) Aliasing korrigiert. Die schattierte Linie ist der geschätzte wirkliche Verlauf des k -Spektrums für $k \geq 2$.

7.7.2 Fenster

Sampling von $s(x)$ über ein endliches Intervall $[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ ist äquivalent zu unendlichem Sampling des modifizierten Signals

$$\hat{s}(x) = w(x)s(x) \quad (90)$$

wobei

$$w(x) = \begin{cases} 1 & : -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (91)$$

$w(x)$ heißt *Rechteckfenster*. Nach dem Faltungssatz gilt dann im k -Raum für das Eigenleistungsdichtespektrum von \hat{s}

$$P_{\hat{s}}(k) = \langle |W(k) * S(k)|^2 \rangle \quad (92)$$

Die Fouriertransformierte (Spektralfunktion) $W(k)$ der Fensterfunktion $w(x)$ ist im Fall des Rechteckfensters

$$W(k) = b \frac{\sin(\pi kb)}{\pi kb}$$

d. h. durch endliches Sampling werden bis auf die $P(k)$ zu Vielfachen der k -Auflösung $\Delta k = 2\pi/b$ sämtliche spektralen Anteile von $s(x)$ über alle Komponenten des *diskret* berechneten $P(k)$ „verschmiert“.

In [Niedermeyer1990a] wird mit numerischen Modellrechnungen der Beitrag der Spektralkomponenten zu den einzelnen Fourierkoeffizienten für 8 (simultane Messung von Floating Potential und Ionensättigungsstrom mit Sonden) und 16 räumliche Stützstellen untersucht. Für Leistungsdichtespektren der Form 88 ergab sich, daß ab einem bestimmten Exponenten r (< 2) der Beitrag des Spektrums um $k = 0$ zum *diskreten* k -Eigenleistungsdichtespektrum bei k_1, k_2, \dots, k_8 höher ist, als der Beitrag des *Spektrums* eben bei diesen k_i . Da die Spektren in Wirklichkeit in der Nähe von 0 abknicken, wurde der Fehler der diskreten Berechnung der Leistungsspektren exemplarisch für einen Abknickpunkt bei $k = 0.2 \Delta k$ und die Exponenten $r = 2$ und 3 für das Rechteck-, Hamming-, Hann- und Blackmanfenster [Hesselmann1983a] untersucht. Das Rechteckfenster ergibt damit allenfalls noch für $r = 2$ akzeptable Resultate. Die weich abschneidenden Fenster liefern zwar hinsichtlich der Frequenzselektivität befriedigende Resultate, jedoch nimmt die spektrale Auflösung gleichmäßig über dem gesamten k -Bereich ab. Da bei der apparativ gegebenen Fensterbreite von 9.6 cm (H_α -Diagnostik) und ursprünglicher Verwendung des Rechteckfensters das Abknicken des Spektrums bei $0.65 \leq k \leq 1.3 \text{ cm}^{-1}$ gefunden wurde, und gerade diese Eigenschaft besonders interessiert, kann bei kleinen $|k|$ nicht auf spektrale Auflösung verzichtet werden. Dies schließt die simple Anwendung hinsichtlich Frequenzselektivität optimierter Fensterfunktionen im Ortsraum aus. So hat das Hamming Fenster, welches einen recht guten Kompromiß zwischen Frequenzselektivität und spektraler Auflösung darstellt, eine äquivalente Rauschbandbreite von $1.36 \Delta f$ [Hesselmann1983a].

Stattdessen wird in [Niedermeyer1990a] eine Matrix berechnet, mit der die diskrete *Fouriertransformierte* zu multiplizieren ist. Die Matrixelemente wurden so bestimmt, daß die Frequenzselektivität und die spektrale Auflösung individuell für jedes k_i ($i = 0, 1, \dots, 8$) auf den jeweils günstigsten Wert gebracht werden. Den Effekt auf das diskrete Leistungsspektrum muß man sich in etwa so vorstellen, als ob gleichzeitig die k_0 und k_1 -Komponente unter Verwendung des Rechteckfensters, die k_2 -Komponente mit dem Hammingfenster und der Rest mit dem Hannfenster berechnet würden. Es sei erwähnt, daß die aus der Hintereinanderschaltung von DFT und Multiplikation mit dieser „Kombinationsmatrix“ entstehende Transformation *nicht* notwendig unitär ist. Die Computerimplementation führt die räumliche DFT und die Multiplikation der Fouriertransformierten mit der Kombinationsmatrix in *einem* Arbeitsgang aus, da die DFT-Matrix und die Kombinationsmatrix beide $N \times N$ -Matrizen sind, sodaß es bei gegebenem N (16) möglich ist, ihr Produkt fest abzuspeichern, bzw. es mit dem ersten Aufruf der entsprechenden Subroutine während eines Programmlaufes ein für allemal zu berechnen.

Abbildung 17 vergleicht exemplarisch die Effekte des Rechteckfensters und der modifizierten DFT-Matrix auf das diskrete k -Leistungsspektrum der 16-Kanalmessung von H_α -Fluktuationen während der ohmschen Phase von ASDEX-Schuß 30437 mit $\Delta k = 0.65 \text{ cm}^{-1}$ sowie der simultan gemessenen Floating Potential- und Ionensättigungsstrom-Fluktuationen in der OH-Phase von ASDEX-Schuß 31146 mit je 8 Kanälen und $\Delta k = 1.57 \text{ cm}^{-1}$. Wie zu erwarten, ist der Unterschied für die H_α -Spektren geringer als für die Sondenspektren. Die Tatsache, daß es in beiden Fällen keine drastischen Unterschiede gibt, deutet darauf hin, daß das k -Spektrum nicht erst bei einem (sehr) kleinen Bruchteil von k_1 in einen relativ flachen Verlauf gegen $k = 0$ übergeht (poloidale Ausdehnung von Fluktuationen des Floating Potentials bzw. der Dichte $< \frac{1}{k} = 10 \text{ cm}$). Die Messungen dürften daher das wahre k -Spektrum einigermaßen gut wiedergeben.

7.7.3 k -Spektrum mittels Fit ?

Die graphische Bestimmung des Exponenten r ist zwar für Einzelauswertungen — wie im Rahmen dieser Arbeit — geeignet. Für zukünftige Parameterstudien, welche eine große Zahl ($\geq 10^2$) Zahl von Auswertungen erfordert, wäre eine automatische Fitprozedur aus mehreren Gründen wünschenswert:

- Zeitersparnis
- Standardisierung und Reproduzierbarkeit
- höhere Genauigkeit: Ein qualitativer Sprung in der Genauigkeit der k -Spektren sowie eine echte Abschätzung des Fehlers ist in definierter Weise nur mit einer Fitprozedur möglich.

- Die Abhängigkeit der Spektren von Entladungsparametern kann selbst mit einigen wenigen Parametern beschrieben werden.
- k-Spektrum in analytischer Form darstellbar: Dies ist z. B. von Bedeutung, wenn man aus der Verteilung der *poloidalen* k-Komponente die Verteilung von

$$|k| = \sqrt{k_{pol}^2 + k_r^2 + k_{toroidal}^2} \approx \sqrt{k_{pol}^2 + k_r^2}$$

bestimmt. Bei rotationssymmetrischen Verteilungen leistet dies die *inverse Abeltransformation* (s. 7.10). Aus numerischen Gründen erfordert diese entweder eine große Anzahl von Stützstellen oder ein analytisch integrierbares Argument.

Die Entwicklung des Fit-Algorithmus und die Programmierung der zugehörigen Routine hätte den zeitlichen Rahmen dieser Arbeit gesprengt.

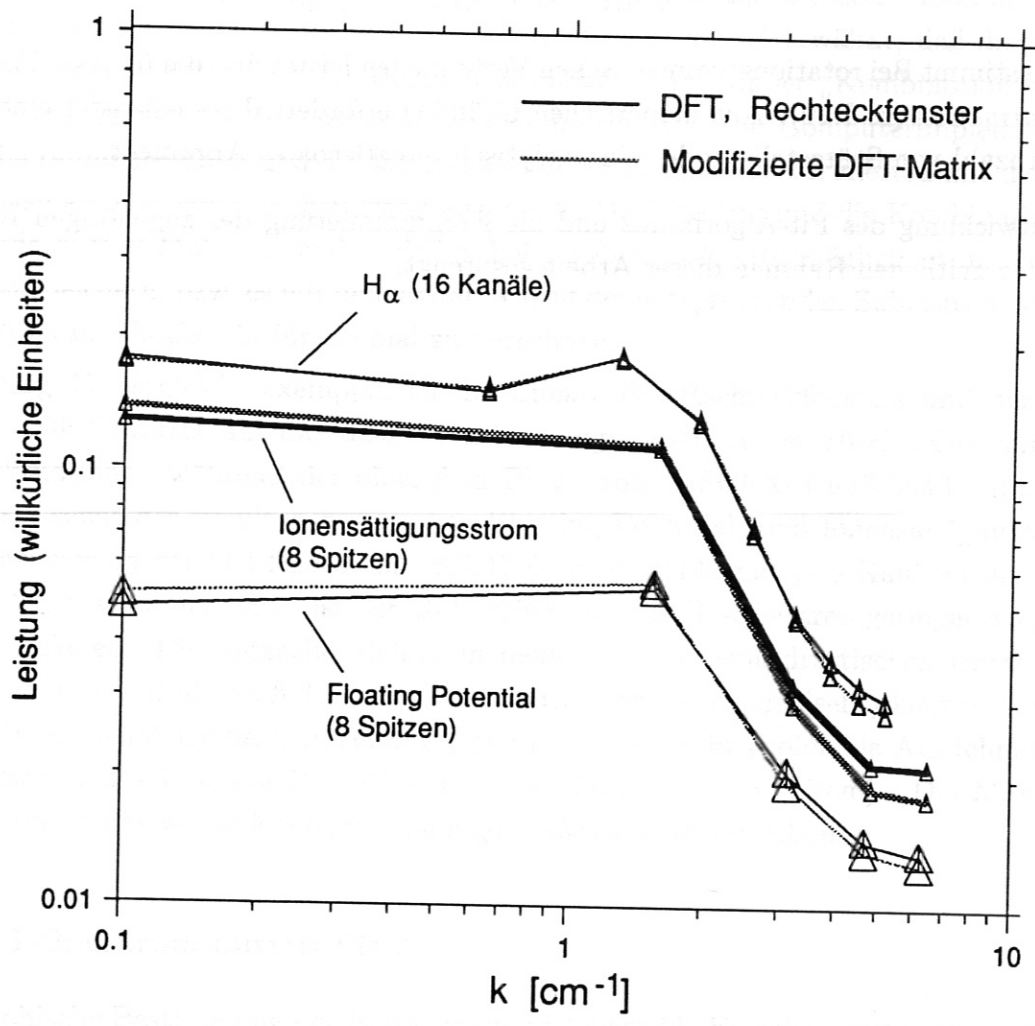


Abbildung 17: Effekt der „modifizierten“ DFT-Matrix (s. Text) im Vergleich zur DFT mit Rechteckfenster. 16-Kanalmessung: k -Spektrum von H_{α} -Fluktuationen (Spektrale Auflösung $\Delta k = 0.65 \text{ cm}^{-1}$). 8-Kanalmessung: Simultane Messung des k -Spektrums von Floating Potential und Ionensättigungsstrom 2 cm außerhalb der nominellen Separatrix. Spektrale Auflösung $\Delta k = 1.57 \text{ cm}^{-1}$. (ASDEX-Schuß 31146).

Tabelle 2: Exponent des k -Leistungsspektrums (Floating Potential) in Abhängigkeit vom radialen Separatrixabstand

$r - r_s$ [cm]	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	0.5
Exponent	?	1.88	1.98	2.2	2.2	2.15	?
ASDEX #	31358	31359	31357	31356	31355	31354	31360

$r - r_s$: Abstand von der nominellen Separatrix. ASDEX #: Schußnummer

7.7.4 Messung von k -Leistungsspektren mit Langmuirsonden

In Abbildung 18 sind k -Leistungsspektren derselben Floating Potential Messungen dargestellt, deren Korrelationsfunktionen bereits in Abschnitt 6.3.3 diskutiert wurden. Die 16-fach Sonde hat eine spektrale Auflösung von $\Delta k = \frac{2\pi}{16\Delta x} = 1.57 \text{ cm}^{-1}$. Bis auf die innersten zwei Messungen mit 0.5 und 1.0 cm Abstand von der nominellen Separatrix haben die Spektren ein Maximum bei k_1 . Sonst fallen sie monoton. Offenbar gilt auch für die k -Spektren der Floating Potentialfluktuationen ab k_2, k_3 näherungsweise ein Potenzgesetz der Form 88. Tabelle 2 enthält die graphisch ermittelten Exponenten r in Abhängigkeit vom Abstand $r - r_s$ der Sonde von der nominellen Separatrix. Der Abfall der Spektren zu großen k hin ist 1.5–2.0 cm außerhalb der *nominellen* Separatrix, am steilsten. Da die physikalische Separatrix 1.5 – 2.0 cm gegenüber der nominellen Separatrix verschoben ist, heißt das, daß die k -Spektren an der *Separatrix* am steilsten abfallen. Der Vergleich des H_α - k -Spektrums während der ohmschen Phase (Abbildung 15) mit den Floating Potential Spektren zeigt *keine* großen Unterschiede zwischen den k -Spektren der Dichte und des Potentials. Somit besteht neben der Ähnlichkeit der Frequenzspektren [Rudyj1990a] Ähnlichkeit auch für die k -Spektren von Potential- und Dichtefluktuationen.

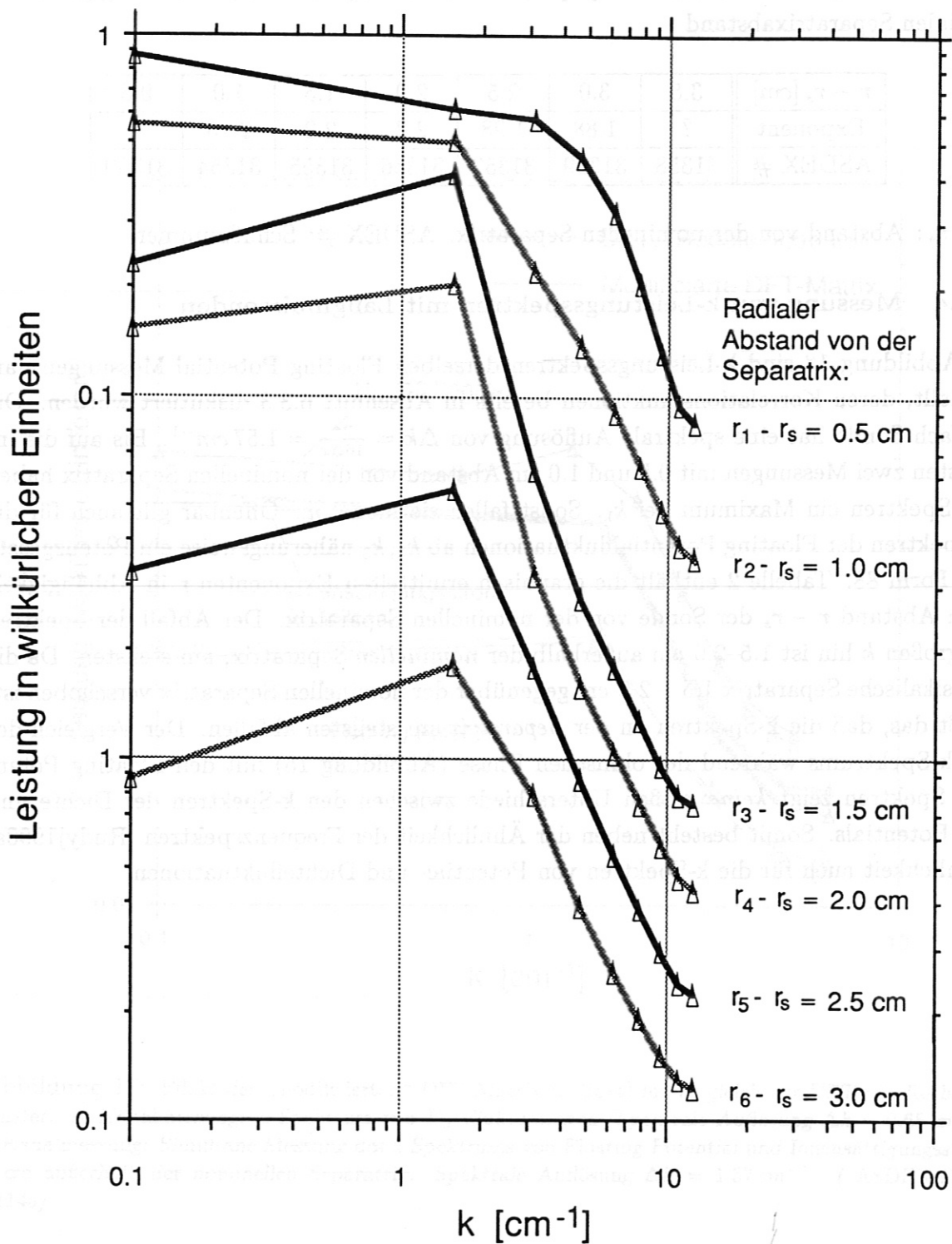


Abbildung 18: k -Leistungsdichtespektren von Fluktuationen des Floating Potentials für verschiedene Sondenpositionen außerhalb der nominellen Separatrix. Ohmsche Phase. (Zwecks Übersichtlichkeit sind die Spektren derart auf unterschiedliche Gesamtleistung normiert, daß sich eine überschneidungsfreie Darstellung ergibt.)

7.8 Anwendungen der Kreuzspektralanalyse

7.8.1 k-Spektren

Gemäß Def. 17 ist die explizite Kohärenzfunktion im k -Raum der Absolutbetrag des komplexen Ausdruckes

$$\frac{\langle S^*(k, t) S(k, t + \tau) \rangle_t}{\sqrt{\langle S^*(k, t) S(k, t) \rangle_t \langle S^*(k, t + \tau) S(k, t + \tau) \rangle_t}} \quad (93)$$

Da wir Ergodizität voraussetzen, gilt

$$\langle S^*(k, t) S(k, t) \rangle_t = \langle S^*(k, t + \tau) S(k, t + \tau) \rangle_t$$

weshalb der Ausdruck (93) äquivalent ist zu

$$\frac{\langle S^*(k, t) S(k, t + \tau) \rangle_t}{\langle S^*(k, t) S(k, t) \rangle_t} \quad (94)$$

Der Nenner ist dabei einfach das k -Eigenleistungsspektrum.

Das Phasenspektrum ist der Arkus des komplexwertigen Zählers (*Kreuzspektrumsdichtefunktion*) des Quotienten (94). Es genügt, *entweder* das Kreuzleistungsspektrum *oder* die Kohärenzfunktion darzustellen. Da durch die Kohärenzfunktion ein Maß für die Signifikanz des Phasenspektrums gegeben ist, beschränken wir uns auf die Kohärenzfunktion und das Phasenspektrum.

Die Abb. 19 – 21 zeigen schattierte Höhenlinienplots der Kohärenz und der korrespondierenden Phase für die ohmsche Phase (OH), die H-Phase (*“high confinement”*) mit Counter Neutralteilchen-Injektion und der anschließenden L-Phase (*“low confinement”*) von ASDEX-Schuß 30437. Die entsprechenden k -Eigenleistungsspektren sind in Abb. 15 dargestellt. Die Höhenlinienniveaus teilen den Wertebereich der Kohärenz $[0, 1]$ logarithmisch. Da bei einem Mittelungslevel in der Größenordnung 10^4 die *zufällige* Kohärenz weißen Rauschens $\approx 1/\sqrt{10^4} = 1\%$ ist, wurde das niedrigste Niveau knapp oberhalb 1% gelegt, sodaß zufällige Kohärenz weitgehend unsichtbar ist (weiße Gebiete). Die Kohärenzfunktionen zu gegebenen Werten von τ sind hier die Schnitte parallel zur k -Achse, während die Schnitte parallel zur τ -Achse als Absolutbeträge der unnormierten komplexen *zeitlichen* Autokorrelationsfunktionen der *räumlichen* Fouriertransformierten $S(k, t)$ zu interpretieren sind. Die 2π -Diskontinuitäten, welche im Phasenspektrum aufgrund der *modulo*-Eigenschaft immer dann auftreten, wenn die Phase betragsmäßig π erreicht, wurden eliminiert, sodaß die Phase nicht mehr auf $(-\pi, \pi]$ beschränkt ist. Die „regellosen“ Gebiete in den Phasenplots korrespondieren mit dem Absinken der Kohärenz auf das statistische Niveau. Außerdem ist zu beachten, daß die k -Auflösung nur 0.65 cm^{-1} beträgt. Die genaue Form der Konturen entsteht durch Interpolation und darf nicht überinterpretiert werden. Die τ -Abhängigkeit der Kohärenz variiert in allen 3 Entladungsphasen stark

mit k und ist für $k_1 = 0.65 \text{ cm}^{-1}$ über dem dargestellten τ -Bereich ($100 \mu\text{s}$) maximal oder zumindest besonders ausgeprägt. Um die Gestalt von Kohärenz über der (k, τ) -Ebene besser zu illustrieren, zeigt Abb. 22 exemplarisch für die ohmsche Entladungsphase von ASDEX-Schuß 30437 Schnitte parallel zur τ -Achse für $k = 1.5, 3.0, 4.5 \text{ cm}^{-1}$. Schnitte durch den zugehörigen Phasenplot (Abb. 19 für $k_i = i \cdot 0.65 \text{ cm}^{-1}$ mit $i = 0, 1, \dots, 4$ sind in Abb. 23 dargestellt. Da die Fourierkoeffizienten $S(k = 0, t)$ mit dem räumlichen Mittelwert $\langle s(x, t) \rangle_x$ übereinstimmen und folglich auch *reell* sind, ist durch die unterste Kurve der Absolutbetrag der *reellen* Autokorrelationsfunktion des räumlichen Mittelwertes gegeben. Es ist bekannt, daß die Autokorrelationsfunktionen der Fluktuationen im H_α -Licht für einzelne Kanäle, d. h. lokal, Nullstellen haben (ASDEX: s. [Rudyj1987a], [Rudyj1990a]), weshalb man auch für die zeitliche Autokorrelationsfunktion des räumlichen Mittelwertes Nullstellen erwarten darf. Die Einbrüche der untersten Kurve in Abb. 22 bzw. die hellen Stellen nahe der τ -Achse der Kohärenzniveaulinienplots sind dann die durch die logarithmische Darstellung stark hervorgehobenen Betragsminima der Autokorrelationsfunktion. In Abb. 22 wird ferner bis zu einer bestimmten Grenze von τ ein näherungsweise exponentieller Zerfall der Kohärenz sichtbar. Für $k = 1.5, 3.0, 4.5 \text{ cm}^{-1}$ bestimmt man entsprechende Bereichsgrenzen zu ca. 0, 30, 25, 10 μs .

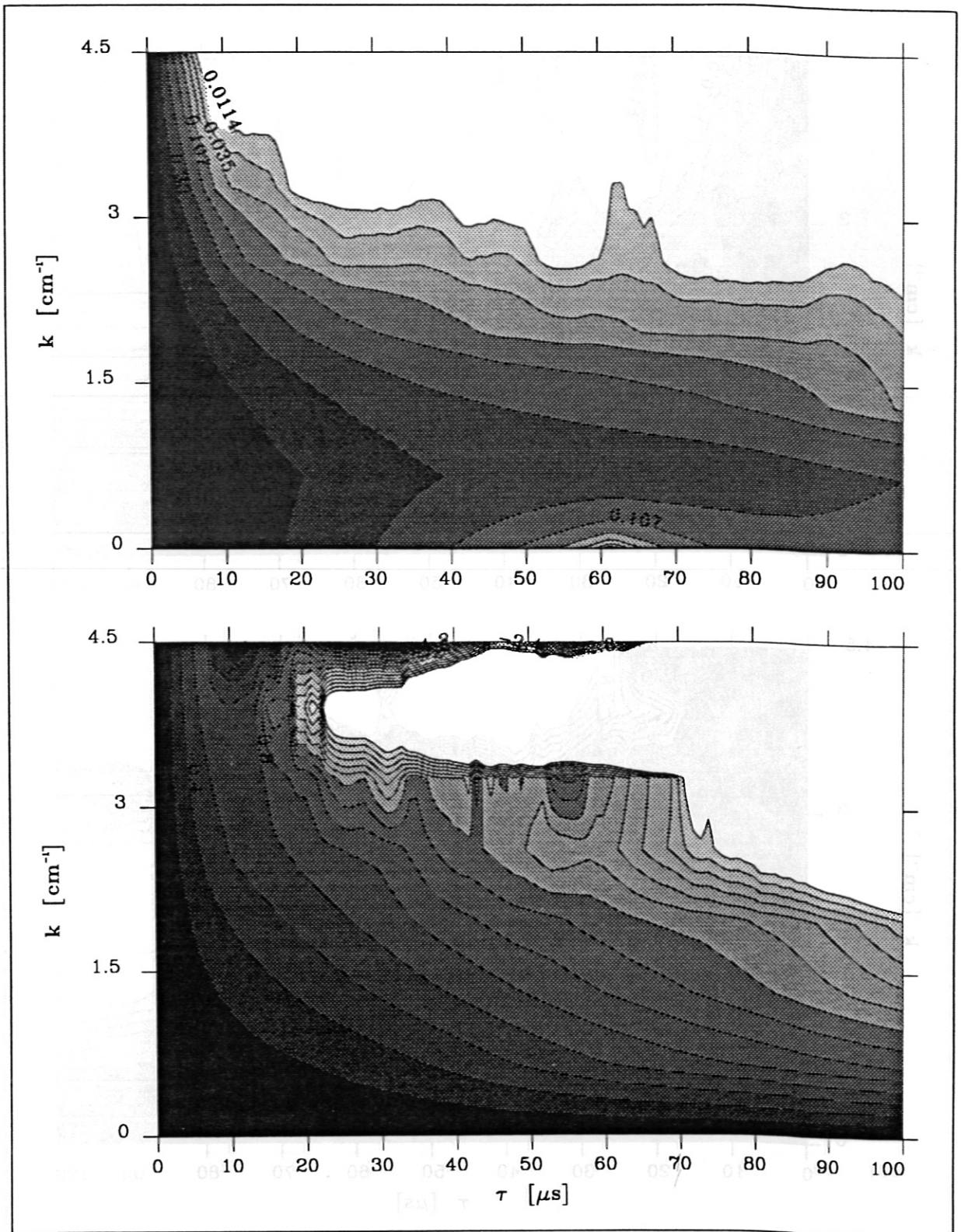


Abbildung 19: Oben: k -Kohärenz von H_{α} -Fluktuationen während der ohmschen Phase. ASDEX-Schuß 30437. 8 Konturlinien in logarithmischer Teilung. Niveaus: $(\frac{4}{7})^n$ mit $n = 1, 2, \dots, 8$. Unten: k -Phasenspektrum. 14 Konturniveaus mit konst. Niveauabstand. Niveaus: $-0.2, -0.4, \dots, -2.8$. Phase in Einheiten von π .

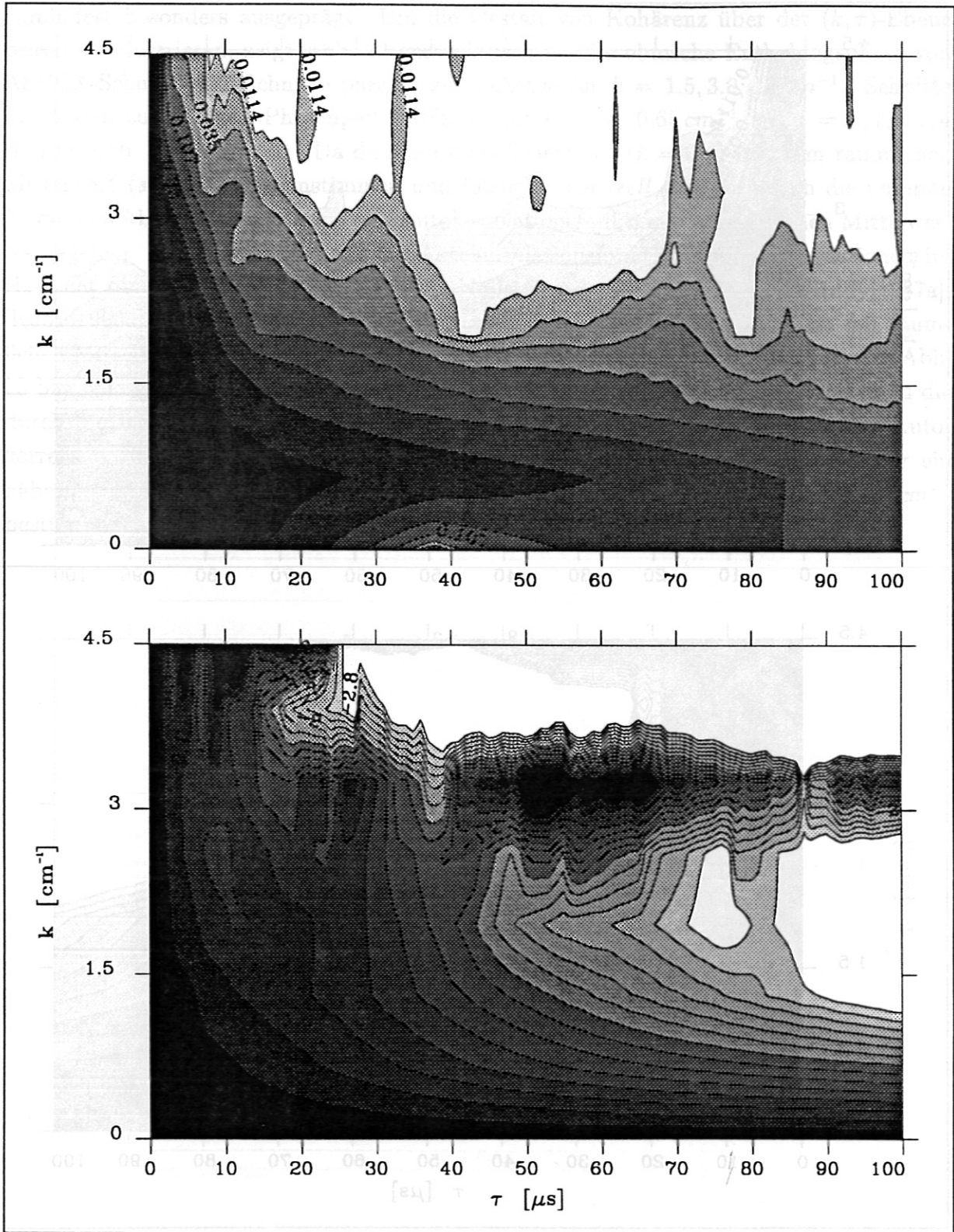


Abbildung 20: Oben: k -Kohärenz von H_α -Fluktuationen während der H-Phase mit Counter Neutralteilchen Injektion. ASDEX-Schuß 30437. 8 Konturlinien in logarithmischer Teilung. Niveaus: $(\frac{4}{7})^n$ mit $n = 1, 2, \dots, 8$. Unten: k -Phasenspektrum. 14 Konturniveaus mit konst. Niveaubestand. Niveaus: $-0.2, -0.4, \dots, -2.8$. Phase in Einheiten von π .

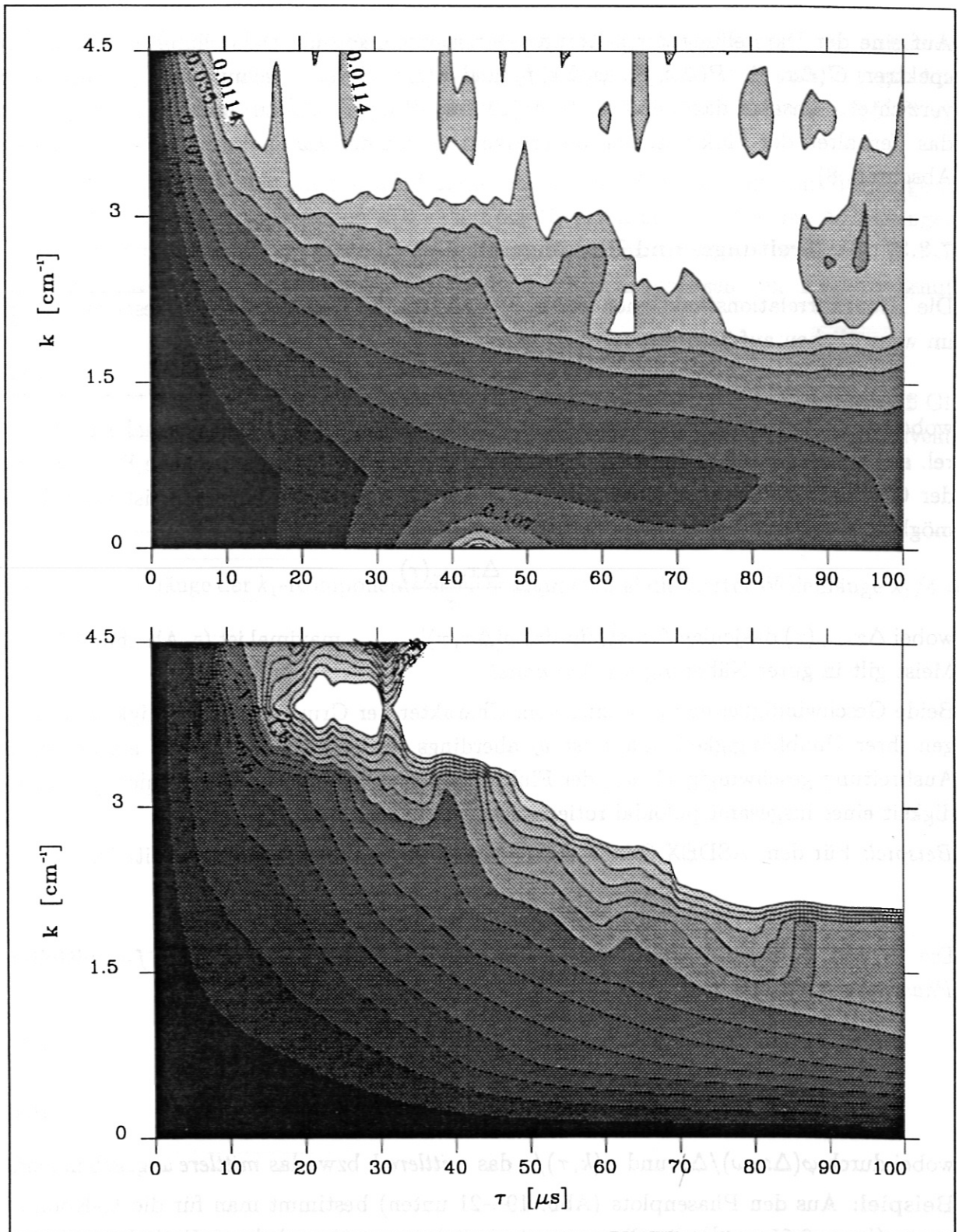


Abbildung 21: Oben: k -Kohärenz von H_{α} -Fluktuationen während der L -Phase. ASDEX-Schuß 30437. 8 Konturlinien in logarithmischer Teilung. Niveaus: $(\frac{4}{7})^n$ mit $n = 1, 2, \dots, 8$. Unten: k -Phasenspektrum. 14 Konturniveaus mit konst. Niveauabstand. Niveaus: $-0.2, -0.4, \dots, -2.8$. Phase in Einheiten von π .

7.8.2 Frequenzspektren

Auf eine der Darstellung der k -Kreuzspektren entsprechende Darstellung der Frequenzspektren $C(\Delta x, f)$, $P(\Delta x, f)$, $\varphi(\Delta x, f)$ und $\kappa(\Delta x, f)$ (s. Abschnitt 7.5.3) wurde hier verzichtet. Ansätze dazu sind in [Rudyj1987a], [Rudyj1990a] zu finden. Im übrigen ist das Verhalten der Fluktuationen im Frequenzbereich den $k\omega$ -Spektren zu entnehmen (s. Abschnitt 8).

7.8.3 Ausbreitungs- und Phasengeschwindigkeiten — Übersicht

Die Kreuzkorrelationsfunktionen $\rho(\Delta x, \tau)$ erlauben die Definition einer Geschwindigkeit im wesentlichen auf 2 Arten:

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\tau_{max}(\Delta x)} \quad (95)$$

wobei $\tau_{max}(\Delta x)$ dasjenige τ bezeichnet, für das $\rho(\Delta x, \tau)|_{\Delta x=konst.}$ maximal ist. v_1 ist rel. stark von Δx abhängig (siehe z. B. [Rudyj1987a], [Zweben1985a]). Die Bestimmung der Geschwindigkeit nach dieser Definition aus dem zeitlichen Maximum ist auch dann möglich, wenn nur 2 räumliche Meßpunkte vorliegen.

$$v_2 = \frac{\Delta x_{max}(\tau)}{\tau} \quad (96)$$

wobei $\Delta x_{max}(\tau)$ dasjenige Δx ist, für das $\rho(\Delta x, \tau)|_{\tau=konst.}$ maximal ist (s. Abschnitt 6.3.2). Meist gilt in guter Näherung $v_2(\tau) = konst.$.

Beide Geschwindigkeiten v_1, v_2 sind vom Charakter her Gruppengeschwindigkeiten. Wegen ihrer Unabhängigkeit von τ ist v_2 allerdings besser definiert. Es ist als poloidale Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{pol} der Fluktuationen selbst oder als Randschichtgeschwindigkeit eines insgesamt poloidal rotierenden Plasmas zu interpretieren.

Beispiel: Für den ASDEX-Schuß 30437 wurden für v_2 folgende Werte ermittelt:

$$v_2 = 570 \text{ (OH)}, 850 \text{ (H)} \text{ und } 625 \text{ (L)} \quad ms^{-1}$$

Die f - und k -Phasenspektren eignen sich zur Bestimmung von k - bzw. f -gemittelten Phasengeschwindigkeiten:

$$v_{Ph}(\omega) = \frac{\Delta x \omega}{\varphi(\Delta x, \omega)} \quad (97)$$

$$v_{Ph}(k) = \frac{1}{k} \frac{\varphi(k, \tau)}{\tau} \quad (98)$$

wobei durch $\varphi(\Delta x, \omega)/\Delta x$ und $\varphi(k, \tau)/\tau$ das mittlere k bzw. das mittlere ω gegeben sind.

Beispiel: Aus den Phasenplots (Abb. 19—21 unten) bestimmt man für die k_1 -Komponente ($k_1 = 0.65 \text{ cm}^{-1}$) die Phasengeschwindigkeiten während der 3 Entladungsphasen zu

$$v_{ph}(k_1) = 537 \text{ (OH)}, 840 \text{ (H)} \text{ und } 586 \text{ (L)} \quad ms^{-1}$$

7.8.4 Kohärenzlängen und Kohärenzzeiten

Als *Kohärenzlänge* $l_\kappa(\omega)$ bezeichnet man die Entfernung Δx , über der die *Frequenz-Kohärenzfunktion* $\kappa(\omega, \Delta x)$ auf ein bestimmtes Niveau $0 < \kappa < 1$ abfällt (vgl. Abschnitt 6.3.1). Beispiele zur Frequenz-Kohärenzfunktion finden sich in [Rudyj1987a], [Rudyj1990a].

Im k -Raum definiert man entsprechend die *Kohärenzzeit* $\tau_\kappa(k)$. Sie bestimmt dasjenige τ , über dem die k -Kohärenzfunktion $\kappa(k, \tau)$ auf das Niveau κ abfällt. Aus den Abbildungen 19—21 (oben) ermittelt man beispielsweise zum Kohärenzniveau $\kappa = 4/7 = 57\%$ und $k_1 = 0.65 \text{ cm}^{-1}$ folgende Kohärenzzeiten für die 3 Entladungsphasen von ASDEX-Schuß 30437:

$$\tau_{0.57\%}(k_1) : 20 \text{ (OH)}, 27 \text{ (H)}, 17 \text{ (L)} \quad \mu\text{s}$$

Das Produkt der Kohärenzzeit $\tau_\kappa(k)$ und der k -Phasengeschwindigkeit $v_{Ph}(k)$ (gemäß Gl. 98) ergibt die *Laufstrecke* der k -Komponente bis zum Zerfall der Kohärenz auf das Niveau κ . Mit den k -Phasengeschwindigkeiten des Beispiels in Abschnitt 7.8.3 findet man:

$$v_{Ph}(k_1) \cdot \tau_{0.57\%}(k_1) : 1.1 \text{ (OH)}, 2.3 \text{ (H)}, 0.99 \text{ (L)} \quad \text{cm}$$

Die Kohärenzlänge der k_1 -Komponente erreicht nicht einmal die viertel Wellenlänge $\lambda_1/4 = 2.4 \text{ cm}$.

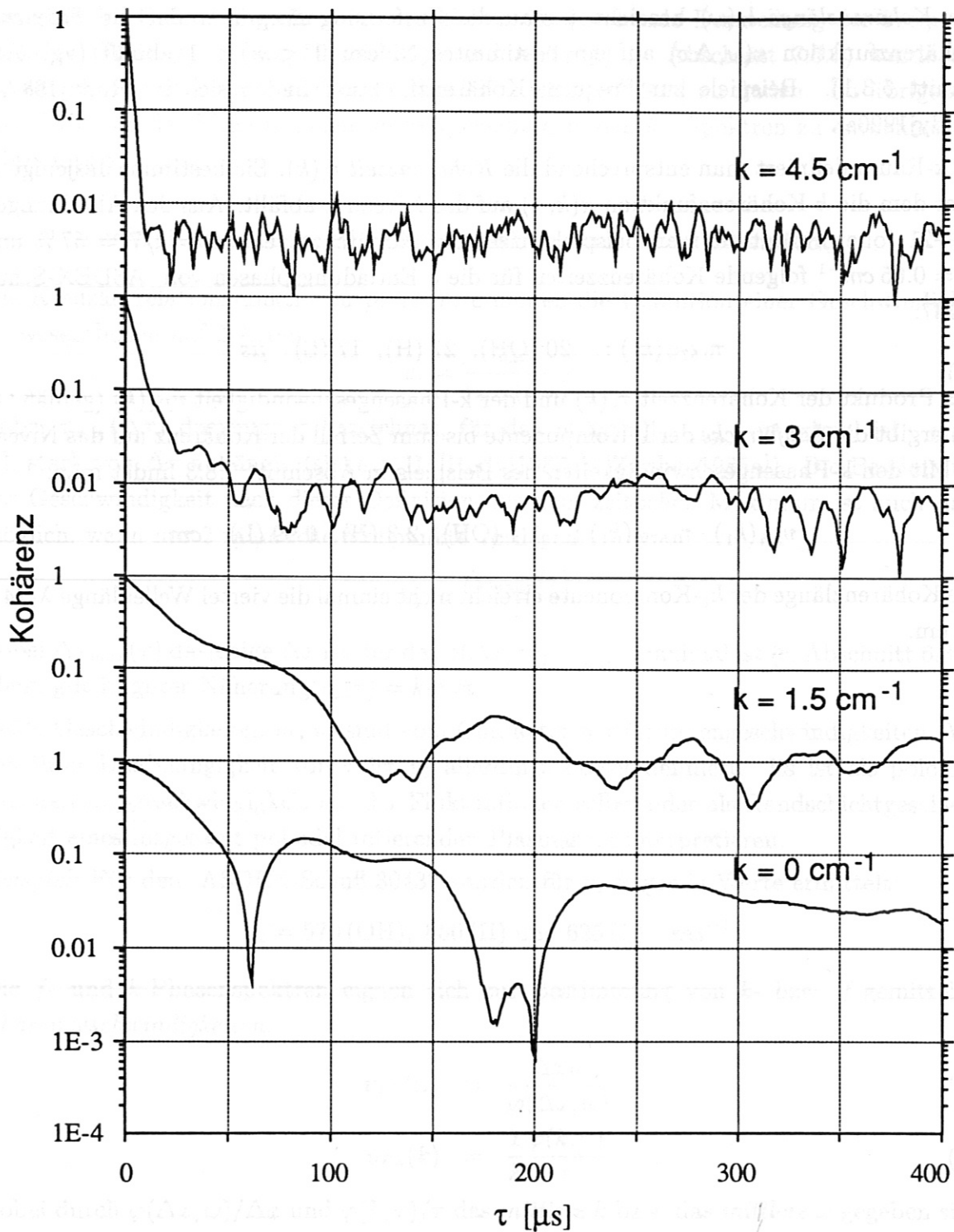


Abbildung 22: τ -Abhängigkeit der Kohärenz bzw. Betrag der komplexen Autokorrelationsfunktion der räumlich Fouriertransformierten für $k = 0, 1.5, 3.0$ und 4.5 cm^{-1} ($(k = \text{konst.})$ -Schnitte durch den k -Kohärenzplot Abb. 19 für eine H_α -Messung während der ohmschen Phase von ASDEX-Schuß 30437. Darstellung für vierfachen τ -Bereich.)

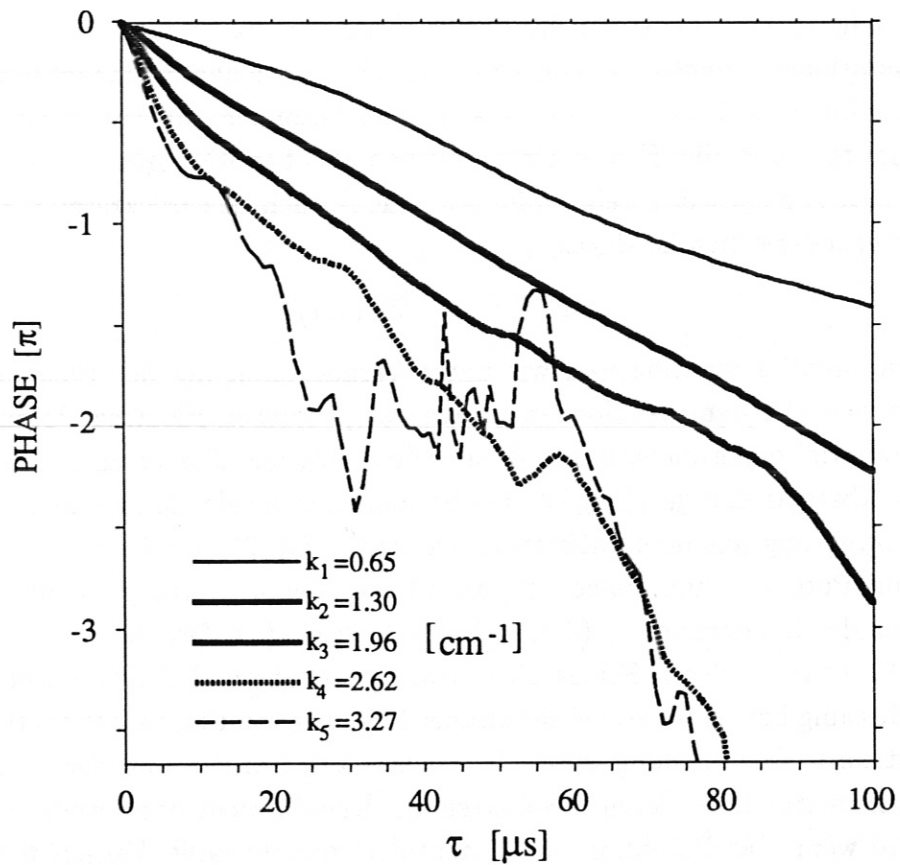


Abbildung 23: τ -Abhängigkeit der Phase bzw. Phase der komplexen Autokorrelationsfunktion der räumlichen Fouriertransformierten für $k = 0, 1.5, 3.0$ und 4.5 cm^{-1} ($(k = \text{konst.})$ -Schnitte durch den k -Phasenplot Abb. 19 für eine H_α -Messung während der ohmschen Phase von ASDEX-Schuß 30437. Darstellung für vierfachen τ -Bereich.)

7.9 Zur Messung der k - und $k\omega$ -Spektren von Fluktuationen des E -Feldes und des Teilchenflusses

Der Teilchenfluß, welcher näherungsweise durch Gl. 19 beschrieben wird, ist *keine* direkt meßbare Größe. Im folgenden wird mit Betonung des qualitativen Aspektes diskutiert, was man aus den Fluktuationmessungen hinsichtlich $\tilde{E}_{pol}(x, t)$ und $\tilde{\Gamma}_r(x, t)$ lernen kann.

Äquidistantes Sampling von stationären (Zeit) oder translationsinvarianten (x) statistischen Prozessen wie z. B. Fluktuationen des H_α -Lichts, des Floating Potentials und des Ionensättigungsstromes sowie die Bestimmung der diskreten Spektren sind wohldefinierte Operationen *unabhängig* von Korrelations- und Kohärenzlängen und Zeiten des zugrundeliegenden statistischen Prozesses. Da der besonders interessierende radiale Teilchenfluß $\Gamma(x, t)$ durch die $E \times B$ -Drift gegeben ist, benötigt man im Zusammenhang mit der Spektralanalyse des Teilchenflusses $\Gamma(x, t)$ auch das (diskrete) k -Spektrum des E -Feldes, welches gegeben ist durch

$$E(x, t) = -\nabla\Phi(x, t)$$

Das Plasmapotential identifizieren wir unter Vernachlässigung der Elektronentemperaturfluktuationen mit dem der Sondenmessung zugänglichen Floating Potential. Da das Floating Potential experimentell und daher notwendig nur diskret an N (16 – 19) Stützstellen mit Abstand Δx gegeben ist, erhält man das *lokale* elektrische Feld $E(x, t)$ in simpelster Näherung aus dem Differenzenquotienten Gl. 25. Im Gegensatz zur Messung von Floating Potential und Ionensättigungsstrom, deren Werte poloidal nur über den Durchmesser der Sondenspitzen (0.9 mm) gemittelt sind, liefert der Differenzenquotient räumliche Mittelwerte des E -Feldes über dem Spitzenabstand Δx (2.5 mm bei Floating Potential Messung bzw. 5.0 mm bei simultaner Messung von Floating Potential und Ionensättigungsstrom). Die Eignung dieses Verfahrens zur Bestimmung der lokalen E -Felder (Poloidalkoordinate) bzw. deren k -Spektren ist deshalb nicht ohne weiteres einzusehen. Insbesondere wenn das Potential einen „deutlich“ nichtlinearen Verlauf innerhalb eines Stützstellenabstandes Δx hat, was gleichbedeutend damit ist, daß das Potential spektrale Komponenten von nichtvernachlässigbarer Amplitude mit Wellenlängen λ enthält, die im Bereich der Nyquist-Wellenlänge ($\lambda_{Nyq} = 2\Delta x$) oder darunter liegen, wäre ein Versagen der Methode zu erwarten.

Es erhebt sich die Frage, ob das (diskrete) k -Spektrum des E -Feldes in dem der DFT zugänglichen k -Bereich auch dann einigermaßen korrekt bestimmt werden kann, wenn keine *lokalen* Meßwerte von $E(x, t)$ vorliegen. Man muß sich zunächst vergegenwärtigen, daß z. B. auch das Floating Potential nicht wirklich lokal gemessen wird, sondern stets nur dessen Mittelwert über ein bestimmtes Raumgebiet. Gestalt und Größe dieses Gebiets hängen selbst wiederum von den Abmessungen der Sondenspitzen und vom B -Feld etc. ab ([Stangeby1984a]). Hinsichtlich dieses Aspekts besteht also kein *qualitativer* Unterschied zwischen der Messung des E -Feldes und der Messung von Floating Potential

oder Ionensättigungsstrom. Aus Gl. 7 läßt sich ableiten, daß die implizite räumliche Mittelung der Poloidalkomponente des E-Feldes durch den Differenzenquotienten äquivalent ist zu einem („weichen“) k-Filter, dessen 3dB-Grenzwellenlänge ganz grob mit $\lambda \approx 2\Delta x$ angegeben werden kann. Da dies gerade dem Auflösungsvermögen der DFT entspricht ($\lambda_{Nyq} = 2\Delta x$), während sowohl Floating Potential als auch Dichte poloidal noch auf wesentlich kürzeren Skalen merklich nichtlinear variieren (Aliasing der diskreten k-Spektren in Abschnitt 7.7), darf wohl angenommen werden, daß der Fehler, den die Substitution des lokalen E-Feldes durch die über Δx gemittelten E-Felder verursacht, durch die Reduktion des Aliasing zumindest ausgeglichen wird. A priori besteht daher kein Grund zu der Annahme, daß die Messung von *k-Spektren* und *(k, ω)-Spektren* des elektrischen Feldes und des Teilchenflusses kritischer wäre als die von Floating Potential und Dichte.

Eine obere Schranke des Abstandes Δx für den das lokale E-Feld $E(x, t)$ durch den Differenzenquotienten 25 approximiert werden darf, ergibt sich aus der Forderung, daß die Ableitung einer reellwertigen differenzierbaren Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ nur dann durch einen Differenzenquotienten ersetzt werden darf, wenn der tatsächliche Verlauf der Funktion über dem Stützstellenabstand Δx wenigstens annähernd linear ist. Ein notwendiges Kriterium ist:

$$n \cdot [f(x + \Delta x) - f(x)] \approx f(x + n \cdot \Delta x) - f(x) \quad (99)$$

für kleine ganze Zahlen $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Analog muß man für einen stationären stochastischen Prozeß wie das Floating Potential $\Phi_{Fl}(x, t)$ die Linearität der Standardabweichung der Potentialdifferenz bezüglich Δx fordern:

$$\sigma_i[\Phi_{Fl}(x + n \cdot \Delta x, t) - \Phi_{Fl}(x, t)] \approx n \cdot \sigma_i[(\Phi_{Fl}(x + \Delta x, t) - \Phi_{Fl}(x, t))] \quad (100)$$

für kleine ganze Zahlen $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Abb. 24

zeigt die linke Seite von Gl. 100, die zur Abkürzung mit $\sigma_i(\Delta\phi(n \cdot \Delta x))$ bezeichnet wird, in Abhängigkeit von n mit $\Delta x = 0.25 \text{ cm}$ für eine Floating Potentialmessung in 1 cm Abstand von der nominellen Separatrix. Offenbar ist das Potential als Funktion von der Poloidalkoordinate x schon über Entfernungen $\Delta x \approx 0.25 - 0.5 \text{ cm}$ stark nichtlinear, was zur Folge hat, daß der Differenzenquotient Gl. 25 als „ziemlich“ grobe Näherung des lokalen Feldes $E(x, t)$ anzusehen ist.

Zur Messung des lokalen elektrischen Feldes wäre nach Bild 24 ein effektiver Spitzenabstand von weniger als 0.25 cm notwendig. Wegen der sehr großen Korrelationslängen $> 10 \text{ m}$ [Rudyj1990a] entlang der Magnetfeldlinien könnte der effektive Spitzenabstand Δx_{eff} durch Drehung verringert werden. Unter Vermeidung gegenseitiger Abschattung der Spitzen, ist bei einem Durchmesser der Spitzen von 0.9 mm bestenfalls ein Faktor 0.5 zu gewinnen.

Fazit: Die Messung der lokalen E-Feldfluktuationsamplitude $E(x, t)$ mit Sonden ist, auch abgesehen von der bis jetzt unbekanntem Größe der T_e -Fluktuationen, wegen der kleinen

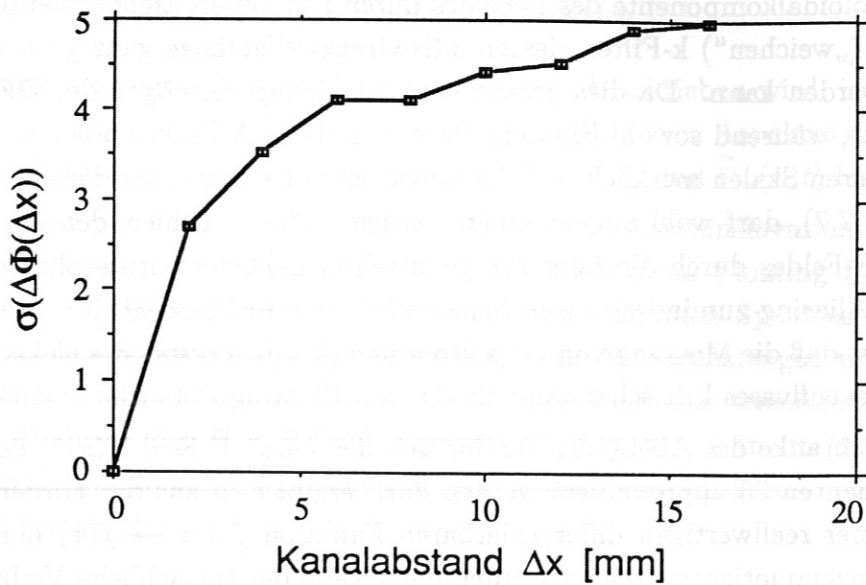


Abbildung 24: Abhängigkeit der Standardabweichung der Floating Potentialdifferenz $\Delta\Phi_{Fl}$ vom Abstand $n\Delta x$ ($n = 1, 2, \dots$) der Sondenspitzen. Auftragung des Abstandes in Vielfachen von $\Delta x = 0.25$ cm. Ohmsche Entladung. Abstand der Sonde von der nominellen Separatrix: 1 cm.

poloidalen Korrelationslängen problematisch. Die Meßbarkeit des diskreten k-Spektrums von \tilde{E}_{pol} in bestimmten Wellenzahlbereichen bleibt davon jedoch unberührt.

7.10 Vergleich mit den k-Spektren aus FIR-Messungen

Eine andere Möglichkeit k-Spektren von Dichtefluktuationen zu messen, welche bei ASDEX angewandt wurde, ist die Untersuchung des Streulichts von Laserstrahlung im fernen IR (FIR). Das physikalische Prinzip der Methode, sowie ihr diagnostischer Aufbau ist in [Holzhauer1990a] beschrieben.

FIR-Messungen des k-Spektrums liegen für die Einschlußzone bis knapp *innerhalb* der Separatrix vor. Obwohl bei ASDEX mit den Langmuirsonden *nur* und mit der H_α -Diagnostik *hauptsächlich* in der Randschicht, also außerhalb der Separatrix, gemessen wurde, erwartet man a priori doch keine sehr verschiedenen Spektren von „FIR“ und „ H_α “. Tatsächlich aber liefert der direkte Vergleich der k-Spektren aus FIR- und H_α -Messungen teils krasse Diskrepanzen, so beträgt z. B. das $k_{max}^{(FIR)}$ das 2–3-fache von $k_{max}^{(H_\alpha)}$. Fehlmessungen kommen als Erklärung kaum in Betracht. Vermutlich ist ein *direkter* Vergleich unzulässig.

Die FIR-Diagnostik sieht nur spektrale Komponenten mit einem Wellenvektor \mathbf{k} aus einem sehr engen Raumwinkelbereich *senkrecht* zum Laserstrahl. Wenn man am Ort der Messung ein *lokales* kartesisches Koordinatensystem $\{\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r\}$ zugrundelegt, bedeutet diese Eigenschaft der FIR-Diagnostik z. B. für poloidale Strahlrichtung, daß praktisch ausschließlich Ereignisse mit

$$\mathbf{k} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ k_{pol} \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfaßt werden. Falls für die statistischen Eigenschaften der Dichtefluktuationen bezüglich der ($\varphi = konst.$)-Schnitte *Isotropie* gilt, so mißt man mit der FIR-Streuung die k-Spektren zum *absoluten* $k = |\mathbf{k}|$. Die H_α - und Sondendiagnostik sieht dagegen das *Integral* der *Poloidalkomponente* sämtlicher spektraler Anteile, weshalb ein direkter Vergleich der FIR- und H_α -k-Spektren keine Übereinstimmung ergeben wird.

Für *2D-Isotropie* stellt die *Abeltransformation* [Bracewell1986a] den eindeutigen Zusammenhang dar zwischen dem mit FIR-Streuung gemessenen k-Spektrum und dem k-Spektrum der „*poloidal projizierten*“ Dichtefluktuationen, wie sie von der H_α - und Sondendiagnostik gesehen werden.

Die exponentielle radiale Variation von Dichte und Temperatur, besonders aber die offensichtliche Abhängigkeit des Floating Potential-k-Spektrums vom Separatrixabstand (s. Abb. 18) machen — wenn der Analogieschluß erlaubt ist — eine *Isotropie* des k-Spektrums der Dichtefluktuationen in der Randschicht wenig *wahrscheinlich*. Dies erschwert einen sinnvollen Vergleich der FIR- und H_α -/Sonden-Spektren außerordentlich. So sind z. B. über den Effekt der Anisotropie plausible Annahmen zu machen, etc.

8 Räumliche und zeitliche Spektralanalyse. — 2D-Fouriertransformation

Motivation:

Die 2-dimensionale Fouriertransformation vom Ortsraum (Poloidalkoordinate) in den k-Raum und vom Zeit- in den Frequenzbereich ist die adäquate Methode zur Detektion von beliebigen Wellen

$$A(x, t) = A_0 e^{ikx - \omega t + \varphi} \quad (101)$$

und Dispersionsrelationen. Sobald die $k\omega$ -Fouriertransformierte eines Signals $s(x, t)$ verfügbar ist, kann gegebenenfalls die Dopplerverschiebung im Frequenzspektrum des Signals zwischen dem Eigensystem der Plasmarandschicht und dem Laborsystem eliminiert werden (zur poloidalen Geschwindigkeit der Fluktuationen bzw. der „poloidalen Rotation“ des Plasmas siehe Abschnitt 6.3.2). Neben diesen eher mittelbaren Anwendungsmöglichkeiten der 2D-DFT besteht an den $k\omega$ -Spektren der verschiedenen fluktuierenden Größen *an sich* ein natürliches Interesse, ebenso wie die Frequenzspektren schon seit langem zum „Repertoire“ der experimentellen Fluktuationsforschung gehören.

Die Forderung einer konsistenten Verallgemeinerung der 1D-Fouriertransformation (Def. 9) auf 2 Dimensionen führt auf

Definition 18 (Fouriertransformation (2D)) Sei $s(x, t)$ eine i. a. komplexwertige Funktion der reellen Variablen x und t , dann ist

$$S(\hat{k}, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, t) e^{-i2\pi(\hat{k}x + ft)} dx dt \quad (102)$$

wobei $\hat{k} = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\lambda}$.

sämtliche Eigenschaften der 1D-Fouriertransformation sind auf den mehrdimensionalen Fall übertragbar. Da im folgenden des öfteren zitiert, sei die Verallgemeinerung der *Hermitezität* vom 1D- auf den 2D-Fall explizit angegeben. Für die räumlich und zeitlich Fouriertransformierte $S(\hat{k}, f)$ des *reellwertigen* Signals $s(x, t)$ gilt:

$$S(-\hat{k}, -f) = S^*(\hat{k}, f) \quad (103)$$

d. h. die Hermitezität bezieht sich auf den 2D-Vektor (\hat{k}, f) anstelle der als 1D-Vektor aufzufassenden Variablen f .

8.1 Diskrete 2D-Fouriertransformation

Definition 19 (Diskrete Fouriertransformation (2D)) Sei $s_{r,q}$ das an $N_x \times N_t$ Stützstellen $(r\Delta x, q\Delta t)$ gegebene Signal $s(x, t)$, wobei $r, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, N_{x,t}$ und x die Poloidalkoordinate bezeichne, dann ist die 2-dimensionale DFT $S(m\Delta\hat{k}, l\Delta f)$ von $s(x, t)$

gegeben durch

$$S_{ml} = \frac{1}{N_t N_x} \sum_{q=-\lfloor \frac{N_t-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N_t}{2} \rfloor} \sum_{l=-\lfloor \frac{N_x-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N_x}{2} \rfloor} s_{rq} e^{-i2\pi \left(\frac{m \cdot r}{N_x} + \frac{l \cdot q}{N_t} \right)} \quad (104)$$

wobei $m, l = -\lfloor \frac{N_{x,t}-1}{2} \rfloor, \dots, -1, 0, 1, \dots, \lfloor \frac{N_{x,t}}{2} \rfloor$. Die eckigen Klammern [...] bezeichnen den ganzzahligen Anteil.

Von den Eigenschaften der diskreten 2D-Fouriertransformierten sei exemplarisch die Periodizität erwähnt:

$$S_{m+\mu \cdot N_x, l+\lambda \cdot N_t} = S_{ml} \quad \text{für } \mu, \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (105)$$

Ansonsten gelten die Verallgemeinerungen der Eigenschaften des 1D- auf den 2D-Fall analog dem Muster der Hermitesität der kontinuierlichen Transformierten Def. 18 oben.

8.1.1 Praktische Realisierung der 2D-DFT

Bei der praktischen Realisierung (FORTRAN-Programm) der 2D-DFT wurde von der Hermitesität der Transformierten einer reellen Funktion $s(x, t)$ zweimal Gebrauch gemacht, was eine Speicherplatzersparnis um einen Faktor 2 ermöglichte. Für typisch 25000 (Zeit) \times 16 (Ort) Stützstellen ist dies kein unbedeutendes Detail. Das diskretisierte, als 2-dimensionales Feld vorliegende, reelle Signal $s(x, t)$ wird zunächst vom Orts- in den k -Raum transformiert. Der dabei angewandte DFT-Algorithmus liefert aber *nicht* die komplexen hermiteschen Fourierkoeffizienten selbst, sondern deren Real- und Imaginärteile für *positive* Indizes. Seien mit A die Real- und mit B die Imaginärteile bezeichnet, dann sind die Fourierkoeffizienten S_{mq} der *räumlichen* Fouriertransformierten unter Berücksichtigung der Hermitesität wie folgt rekonstruierbar:

$$S_{mq} = S(m \cdot \Delta k, q \cdot \Delta t) = A_{|m|q} + i \cdot \text{sgn}(m) B_{|m|q} \quad (106)$$

wobei $m, q = -\lfloor \frac{N_{x,t}-1}{2} \rfloor, \dots, -1, 0, 1, \dots, \lfloor \frac{N_{x,t}}{2} \rfloor$.

Wegen 106 genügt es anstatt $N_x \times N_t$ komplexer Zahlen, die $N_t \times \left(\lfloor \frac{N_x}{2} \rfloor + 1 \right)$ reellen $A_{|m|q}$ und die $N_t \times \lfloor \frac{N_x-1}{2} \rfloor$ reellen $B_{|m|q}$ abzuspeichern. Das zuvor erwähnte Datenfeld enthält daher insgesamt wieder $N_x \times N_t$ reelle Zahlen. In gleicher Weise kann jetzt bei der Transformation vom kt -Raum in den $k\omega$ -Raum auf die direkte Abspeicherung der komplexen, hermiteschen Fourierkoeffizienten S_{ml} verzichtet werden. Zur Angabe der Rekonstruktionsformel für die kompletten Fourierkoeffizienten S_{ml} müssen einige Bezeichnungen erklärt werden: Seien (ψ_{ml}) und (ζ_{ml}) die diskreten $t \rightarrow f$ -Fouriertransformierten des Real- und Imaginärteils von (S_{mq}) , also

$$(A_{mq}) \xrightarrow{DFT} (\psi_{ml}) \quad \text{und} \quad (B_{mq}) \xrightarrow{DFT} (\zeta_{ml}) \quad (107)$$

und ferner

$$\left. \begin{aligned} AA_{ml} &:= \operatorname{Re}(\psi_{ml}) \\ BA_{ml} &:= \operatorname{Im}(\psi_{ml}) \\ AB_{ml} &:= \operatorname{Re}(\zeta_{ml}) \\ BB_{ml} &:= \operatorname{Im}(\zeta_{ml}) \end{aligned} \right\} \text{für } m, l = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N_{x,t}}{2} \right\rfloor \quad (108)$$

Die Berechnung der diskreten $k\omega$ -Fouriertransformierten (S_{ml}) und die „komprimierte“, d. h. nicht-redundante Abspeicherung des Ergebnisses geschieht nach folgendem Schema:

$$(S_{r,q})_{N_x \times N_t} \xrightarrow{2D-DFT} \begin{pmatrix} (AA)_{(1+\lfloor \frac{N_x}{2} \rfloor) \times (1+\lfloor \frac{N_t}{2} \rfloor)} & (BA)_{(1+\lfloor \frac{N_x}{2} \rfloor) \times (\lfloor \frac{N_t-1}{2} \rfloor)} \\ (AB)_{(\lfloor \frac{N_x-1}{2} \rfloor) \times (1+\lfloor \frac{N_t}{2} \rfloor)} & (BB)_{(\lfloor \frac{N_x-1}{2} \rfloor) \times (\lfloor \frac{N_t-1}{2} \rfloor)} \end{pmatrix} \quad (109)$$

Aus jeweils 4 Elementen der rechts stehenden *reellen* partitionierten Matrix bildet man die komplexen $k\omega$ -Fourierkoeffizienten S_{ml} . Da ψ_{ml} und ζ_{ml} wieder hermitesch sind, besitzen sie wie in Gl. 106 die Darstellung

$$\begin{aligned} \psi_{ml} &= AA_{|m||l|} + i \cdot \operatorname{sgn}(l) BA_{|m||l|} \\ \zeta_{ml} &= AB_{|m||l|} + i \cdot \operatorname{sgn}(l) BB_{|m||l|} \end{aligned} \quad (110)$$

Aus Gl. 106, 107, 108 und 110 folgen wegen der *Linearität* der Fouriertransformation (Abschnitt 7.1) die Fourierkoeffizienten S_{ml} des räumlich und zeitlich transformierten Signals $s(x, t)$

$$\begin{aligned} S_{ml} &= \psi_{ml} + i \cdot \operatorname{sgn}(m) \zeta_{ml} \\ &= AA_{|m||l|} - \operatorname{sgn}(ml) BB_{|m||l|} + i \cdot (\operatorname{sgn}(l) BA_{|m||l|} + \operatorname{sgn}(m) AB_{|m||l|}) \end{aligned} \quad (111)$$

wobei wieder $m, l = -\left\lfloor \frac{N_{x,t}-1}{2} \right\rfloor, \dots, -1, 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N_{x,t}}{2} \right\rfloor$.

Zur Berechnung der $k\omega$ -Leistungs-, Kreuzleistungs- und Phasenspektren übernimmt eine FORTRAN-Funktion vom Typ „complex“ die Bereitstellung von S_{ml} gemäß Gl. 111.

8.2 $k\omega$ -Spektren

Ein Maß für die spektrale Verteilung der Fluktuationsamplitude im $k\omega$ -Raum ist gegeben durch

Definition 20 ($k\omega$ -Leistungsdichtespektrum) Der Erwartungswert des Betragsquadrates der Fouriertransformierten $S(k, \omega)$ eines stationären statistischen Prozesses $s(x, t)$ ist das $k\omega$ -Leistungsspektrum

$$P(k, \omega) = C(k, \omega) = \langle S^*(k, \omega) S(k, \omega) \rangle \quad (112)$$

(Beachte Abschnitt 7.2)

Eigenschaften:

Wegen der Hermitizität von $S(k, \omega)$ (Gl. 103) ist $P(k, \omega)$ bezüglich $(k = 0, \omega = 0)$ *punktsymmetrisch*

$$P(-k, -\omega) = P(k, \omega) \quad (113)$$

d. h. , es genügt, $P(k, \omega)$ für eine *Halbebene*, etwa die durch $\omega \geq 0$ definierte Hälfte der $k\omega$ -Ebene, zu berechnen.

In der Praxis wurde der Erwartungswert (Ensemblemittelwert) des *diskreten* Leistungsspektrums durch spektrale Mittelung über M (40–100) benachbarte Frequenzen approximiert (s. Abschnitt 7.6 Gl. 86). Unter Beschränkung auf $\omega \geq 0$ lautet die Formel für das diskrete $k\omega$ -Spektrum daher:

$$P(k_m, \omega_l) = \frac{1}{\Delta\omega \Delta k} \sum_{j=-\lceil \frac{M-1}{2} \rceil + lM}^{(l+1)M - \lceil \frac{M-1}{2} \rceil - 1} S^*(k_m, \omega_j) S(k_m, \omega_j) \quad (114)$$

wobei $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N_t \Delta t}$, $\Delta k = \frac{2\pi}{N_x \Delta x}$, $\omega_l = l \Delta\omega$, $k_m = k \Delta k$ und $0 \leq l \leq \lceil \frac{N_t}{2M} \rceil - 1$.

8.2.1 $k\omega$ -Spektren von H_α -Fluktuationen

Die Abb. 25–26 zeigen kf -Leistungsdichtespektren von H_α -Fluktuationen während der OH-, H- und L-Phase von ASDEX-Schuß 30437 (vgl. k -Spektren Abschnitt 7.7.1). Die Auftragung von f anstelle von ω über k erfolgte aus Konventionsgründen. Allen Spektren ist eine gewisse „Schiefheit“ gemeinsam. Veranschaulicht man diese Schiefheit durch Einzeichnen „optisch passender“ Geraden, so sind deren Steigungen dk/df sämtlich > 0 . Der reziproke Wert df/dk ist bis auf den Faktor 2π per definitionem eine Gruppengeschwindigkeit und physikalisch entweder als poloidale Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{pol} der Fluktuationen selbst oder als poloidale Geschwindigkeit des Plasmas — bedingt durch dessen poloidale Rotation insgesamt — aufzufassen. Im Rahmen der Streuung dieser doch recht subjektiven Methode zur Bestimmung von v_{pol} findet man Übereinstimmung mit den Werten, welche man mit der Methode über die Kreuzkorrelationsfunktionen erhält (Abschnitt 6.3.2). H_α -Kreuzkorrelogramme von $s(x, t)$, welche mit den in Abb. 25 und 26 dargestellten $k\omega$ -Spektren korrespondieren, und die aus ihnen ermittelten Werte für v_{pol} (einige 10^2 ms^{-1}) finden sich in [Rudyj1990b]. Falls die Schiefheit des Spektrums als Effekt einer poloidalen Plasmabewegung zu deuten ist, sind $k\omega$ -Spektren durch den Dopplereffekt modifiziert, der bei der erwähnten Größenordnung von v_{pol} natürlich *klassisch* beschrieben werden darf. Die Frequenzen erscheinen durch den *klassischen* Dopplereffekt erhöht um

$$\Delta\omega = v_{pol} \cdot k \quad (115)$$

während k dopplerinvariant ist. Die Dopplerkorrektur Gl. 115 wurde für das $k\omega$ -Spektrum zur OH-Phase exemplarisch durchgeführt (Abb. 25 unten). Das v_{pol} wurde hierfür aus dem

korrespondierenden Kreuzkorrelogramm (Abb. s. [Rudyj1990b]) nach der in Abschnitt 6.3.2 geschilderten Methode bestimmt.

Schnitte durch dasselbe $k\omega$ -Spektrum zu konstantem k sind in Abb. 27 im *linearen* Maßstab dargestellt. Offenbar bleibt die Asymmetrie bezüglich der $(\omega = 0)$ - und $(k = 0)$ -Achse erhalten. Wenn man sich die Fluktuationen als Turbulenzphänomen irgendwelcher Plasmawellen, z. B. *Driftwellen* (siehe [Liewer1985a], [Fischer1989a], [Horton1981a]), vorstellen darf, dann breiten sich diese Wellen im Eigensystem der Plasmarandschicht insbesondere für $k \geq 2$ entlang einer von k und ω abhängigen Vorzugsrichtung aus.

Das Minimum — präziser der „Sattelpunkt“ — bei $k, f = 0$ ist möglicherweise eine Spezialität der H_α -Diagnostik. Als Ursache wäre eine Modulation der Neutralgasdichte n_0 durch \tilde{n}_e denkbar.

Vergleich der Spektren für die OH-,H- und L-Phase Bei der Normierung der Spektren auf gleiche Gesamtleistung und gleichen logarithmischen Niveauabstand ist klar erkennbar, daß das $k\omega$ -Spektrum der H_α -Fluktuationen während der *ohmschen Phase* bezüglich k und ω am breitesten ist und während der H-Phase den steilsten Abfall gegen große $|k|$ ($\geq 1 \text{ cm}^{-1}$) und $|\omega|$ ($\geq 10 \text{ kHz}$) hat. Die H-Phase zeigt als Besonderheit eine gegenüber $v_{pol} = 850 \pm 25 \text{ ms}^{-1}$ ([Rudyj1990b]) sehr schnelle Mode, welche mit einer aus Abb. 26 (oben) zu schätzenden Geschwindigkeit von $\approx 10800 \text{ ms}^{-1}$ in entgegengesetzter Richtung läuft. Die Amplitude erreicht bei $f = 200\text{--}240 \text{ kHz}$ und $k = 1.3 \text{ cm}^{-1}$ ihr Maximum.

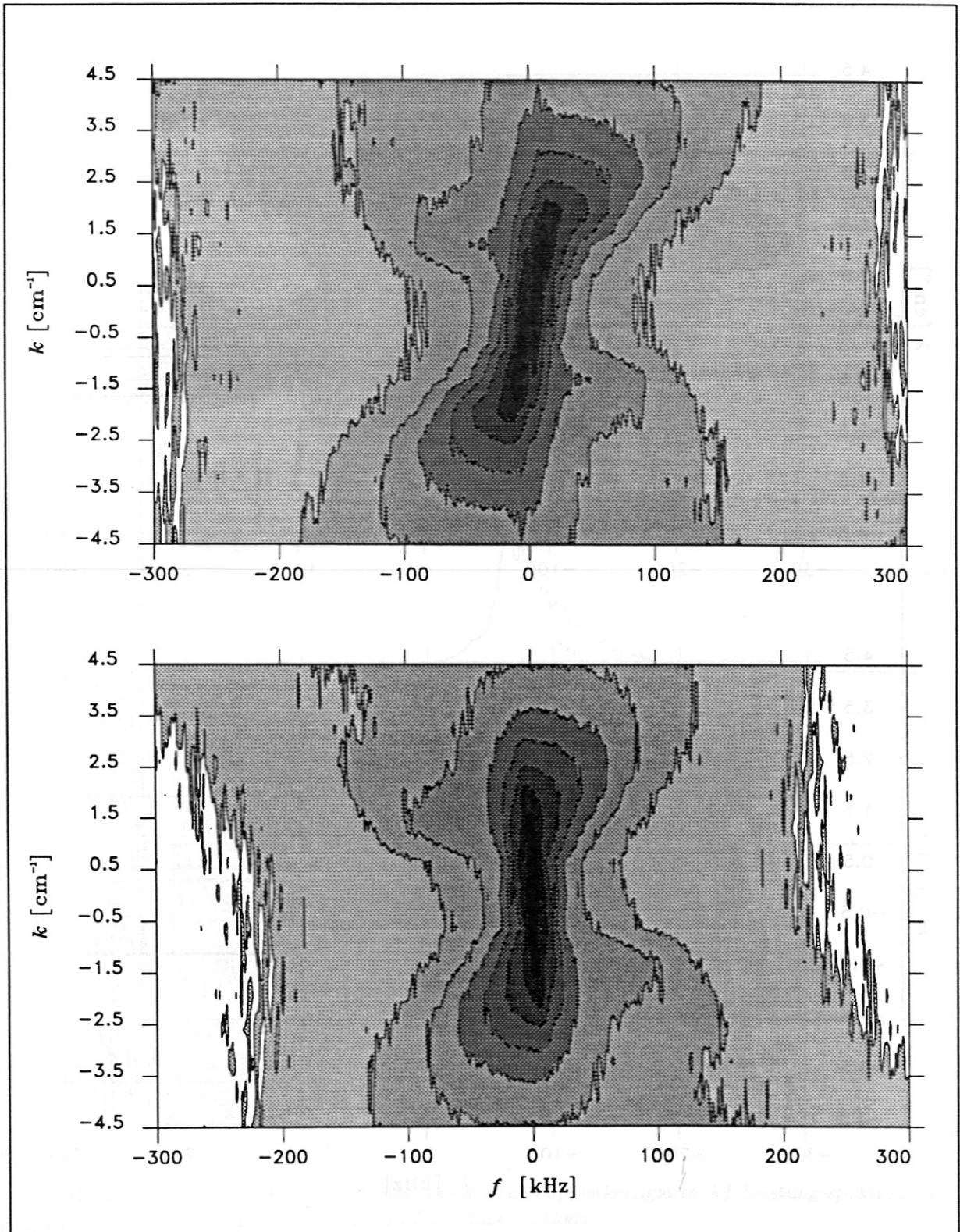


Abbildung 25: Oben: kf -Leistungsspektrum von H_{α} -Fluktuationen während der ohmschen Phase. Normierung auf Gesamtleistung. Logarithmische Teilung des Wertebereichs mit 8 Konturniveaus. Von „schwarz“ nach „weiß“: $(\max = 0.12 \cdot 10^{-4}) \cdot (55/129)^n$ mit $n = 1, 2, \dots, 8$. Unten: Dasselbe Spektrum mit Dopplerkorrektur.

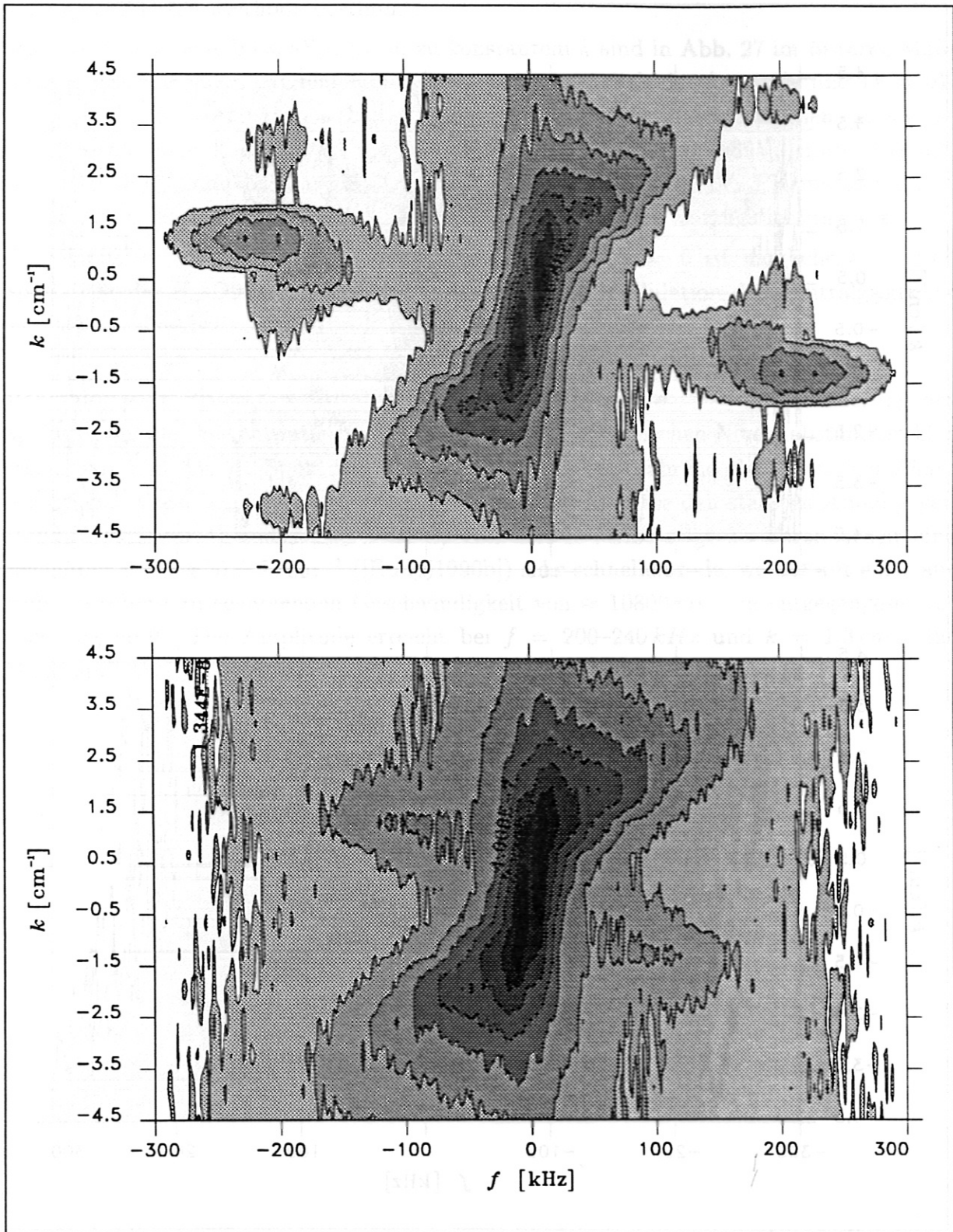


Abbildung 26: kf -Leistungsspektren von H_α -Fluktuationen. Normierung auf Gesamtleistung. Logarithmische Teilung des Wertebereichs mit 8 Konturniveaus. Von „schwarz“ nach „weiß“: $(\max = 0.12 \cdot 10^{-4}) \cdot (55/129)^n$ mit $n = 1, 2, \dots, 8$. Oben: H-Phase. Unten: L-Phase.

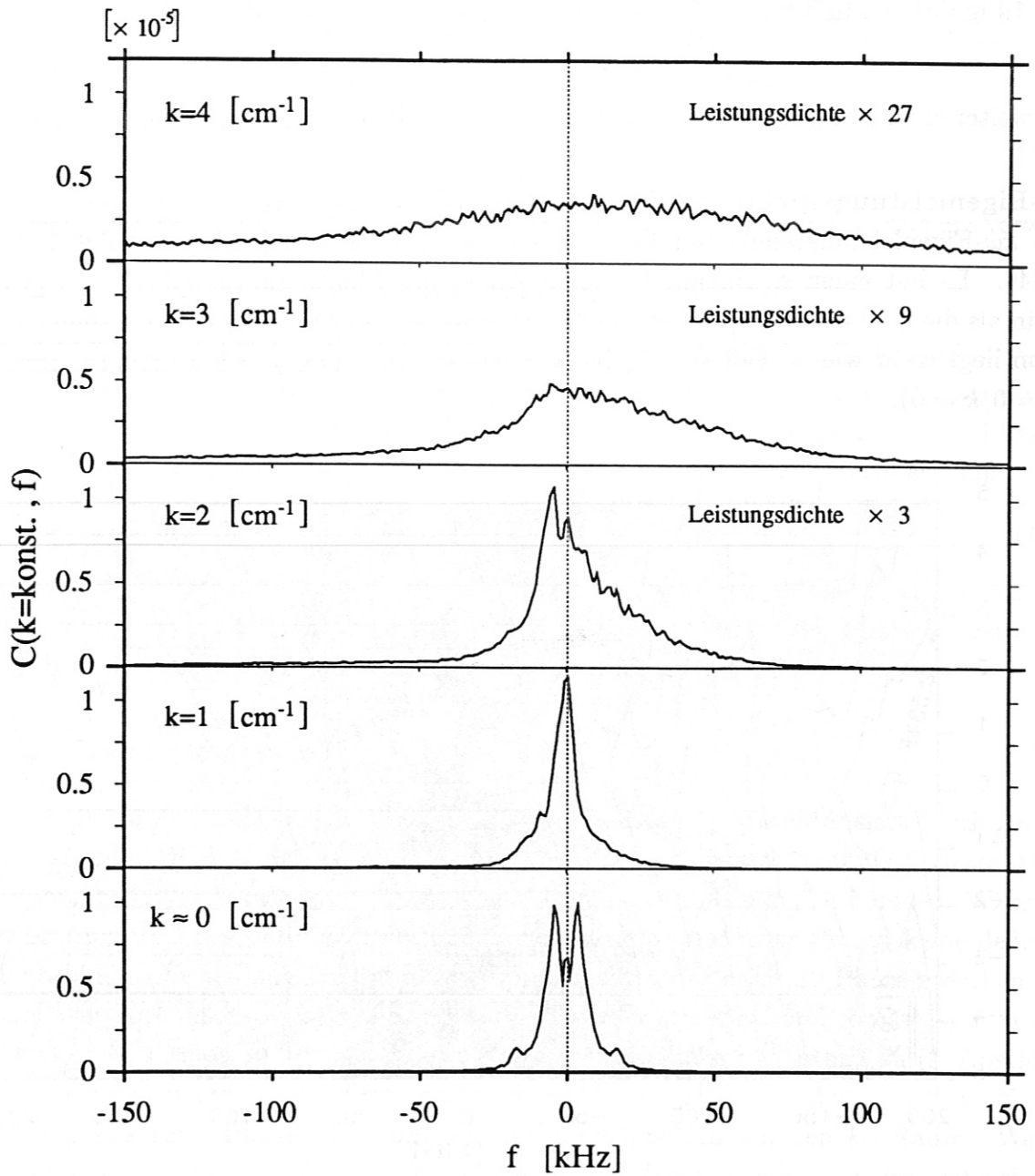


Abbildung 27: ($k = \text{konst.}$)-Schnitte durch das dopplerkorrigierte kf -Leistungsspektrum von H_α -Fluktuationen während der ohmschen Phase. Lineare Skala.

8.2.2 $k\omega$ -Spektralanalyse des Teilchenflusses

Der $E \times B$ -Teilchenfluß Γ wurde in Abschnitt 2.4 behandelt. Da im Rahmen dieser Arbeit allein Relativwerte interessieren, dürfen wir den praktisch konstanten Vorfaktor $1/B_\varphi$ in Gl. 19 ignorieren und für die Fluktuationen des *radialen* Teilchenflusses schreiben

$$s_\Gamma(x, t) = s_N(x, t) s_E(x, t) \quad (116)$$

Im weiteren ist mit „Teilchenfluß“ immer die durch Gl. 116 gegebene Größe gemeint.

$k\omega$ -Eigenleistungsspektrum der Teilchenflußfluktuationen Abbildung 28 zeigt das $k\omega$ -Eigenleistungsspektrum $P_\Gamma(k, \omega)$ von $s_\Gamma(x, t)$ nach Def. 20 für ASDEX-Schuß 31146. Es hat einen signifikant flacheren Abfall der Fluktuationsamplitude zu großen k hin als die $k\omega$ -Leistungsspektren der H_α -Fluktuationen (Abb. 25, 26). Das Hauptmaximum liegt nicht wie im Fall von H_α bei $k = 0.6 - 1.3 \text{ cm}^{-1}$ und $f = 5 - 10 \text{ kHz}$ sondern bei $(f = 0, k = 0)$.

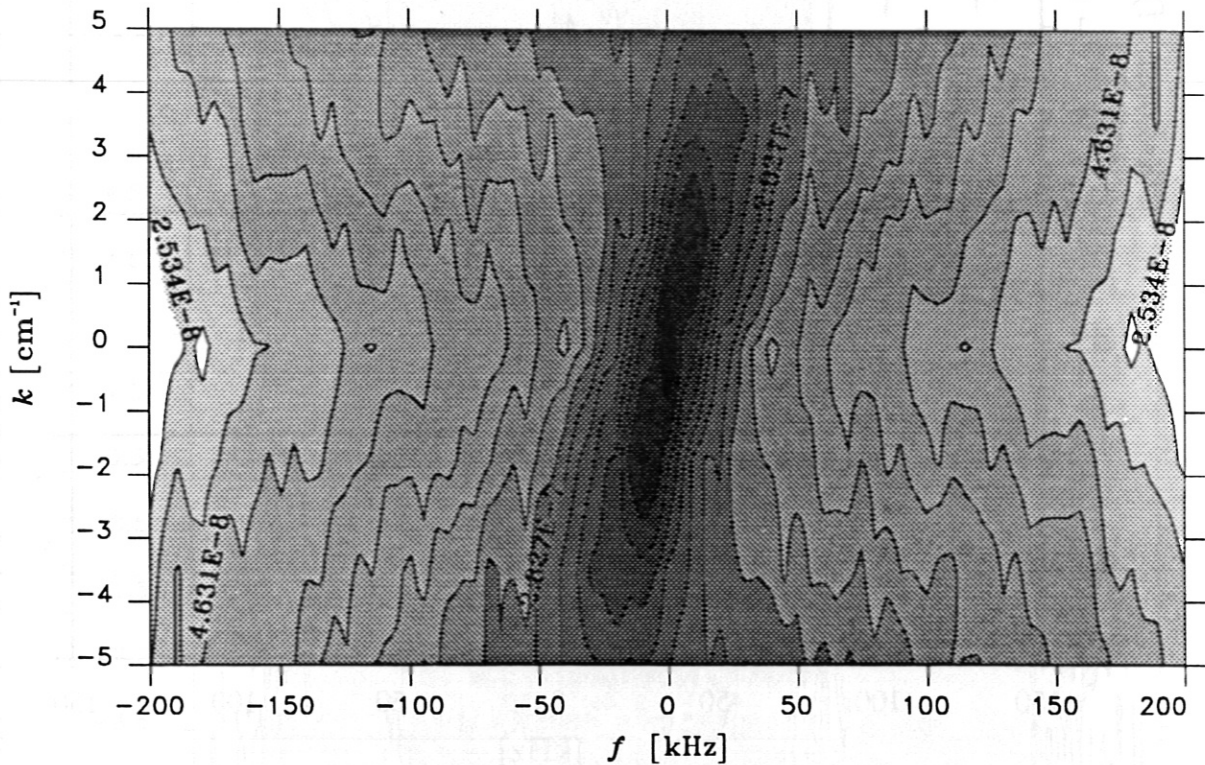


Abbildung 28:
 kf -Leistungsspektrum der Γ -Fluktuationen $\tilde{\Gamma}_r$. Normierung auf Gesamtleistung. Konturlinienniveaus logarithmisch. Von „schwarz“ nach „weiß“: $(\max = 0.23 \cdot 10^{-5}) \cdot (54/73)^n$ $n = 1, 2, \dots, 15$.

Die $P_\Gamma(f = 0, k = 0)$ Komponente des diskret berechneten Leistungsspektrums der Γ -Fluktuationen ist nichts anderes als das Quadrat des räumlichen und zeitlichen Mittelwertes von Γ . Mit der analog Gl. 61 bestimmten $k\omega$ -Spektralfunktion $S_\Gamma(k, \omega)$ würde P_Γ

nach Def. 20 an der Stelle $k, f = 0$ einer δ -Funktion entsprechen (vgl. 1D-Fall: 76) Das Integral von P_Γ über eine beliebig kleine Umgebung des Punktes $k, f = 0$ ergibt dann das Quadrat des Mittelwertes von s_Γ .

Das Verhältnis ρ des Mittelwertes zur mittleren Fluktuationsamplitude von s_Γ , also der Kehrwert des Fluktuationsniveaus für ASDEX-Schuß 31146, der hier sämtlichen Beispielen im Zusammenhang mit dem Teilchenfluß zugrunde liegt, ist

$$\rho = \frac{\langle s_\Gamma(x, t) \rangle_{x,t}}{\sigma_{x,t}(s_\Gamma(x, t))} = 0.39 \quad (117)$$

(s. auch Abbildung 7) Zur Berechnung von (117) wurden folgende Normierungen verwendet:

$$\langle s_N(x, t) \rangle_{x,t} = 0 \quad \text{und} \quad \langle s_E(x, t) \rangle_{x,t} = 0$$

Ein gewisses „Gefühl“ für die Zahl 0.39 vermittelt ihr Vergleich mit dem Wert von ρ gemäß (117), der sich ergäbe, wenn $s_N(x, t)$ und $s_E(x, t)$ nicht fluktuierende Größen wären, sondern 2 monochromatische ebene Wellen mit gleicher Wellenlänge und einer Phasenverschiebung φ gegeneinander. Anhand Def. Gl. 117 ist leicht nachzurechnen, daß

$$\rho = \sqrt{2} \cos \varphi \quad (118)$$

Betrag und Vorzeichen (welches über auswärts oder einwärts gerichteten Nettoteilchenfluß entscheidet) von ρ wären in diesem Fall allein durch den Cosinus der Phase φ bestimmt. Dem Betrag von $\rho = 0.39$ entspricht eine Phasendifferenz von 74° .

8.2.3 $k\omega$ -Kreuzspektren

Eine monochromatische ebene Welle (Gl. 101) ist vollständig charakterisiert durch *Amplitude*, *Frequenz* ω , *Wellenzahl* k und *Phase* φ . Das $k\omega$ -Leistungsspektrum Def. 20 stellt den Zusammenhang dar zwischen dem Erwartungswert der Amplitude und k und ω . Während ein bestimmter Zeit- und Ortstranslationsinvarianter *statistischer* Prozeß keine definierten absoluten Phasen hat, kommt dem Erwartungswert der *relativen* Phase zwischen den spektralen Komponenten $s_1(k, \omega)$ und $s_2(k, \omega)$ zweier statistischer Prozesse $s_1(x, t)$ und $s_2(x, t)$, z. B. Dichte- und E-Feldfluktuationen, physikalische Bedeutung zu (s. Abschnitt 7.6). Dies motiviert zur Verallgemeinerung von Kreuzspektrumsdichtefunktion, Kreuzleistungsspektrum, Phasenspektrum und Kohärenzfunktion auf den $k\omega$ -Raum. Wegen der Analogie zum 1D-Fall sei eine kommentarlose Zusammenfassung der Definitionen gestattet:

Definition 21 ($k\omega$ -Kreuzspektrumsdichtefunktion) Für zwei stationäre statistische Prozesse $s_1(x, t)$ und $s_2(x, t)$ mit den Fouriertransformierten $s_1(k, \omega)$ und $s_2(k, \omega)$ heißt der komplexe Erwartungswert

$$C_{12}(k, \omega) = \langle S_1^*(k, \omega) S_2(k, \omega) \rangle \quad (119)$$

$k\omega$ -Kreuzspektrumsdichtefunktion.

Der Absolutbetrag der Kreuzspektrumsdichtefunktion ist das $k\omega$ -Kreuzleistungsdichtespektrum:

$$P_{12}(k, \omega) = |C_{12}(k, \omega)| \quad (120)$$

Das $k\omega$ -Phasenspektrum modulo 2π ist gegeben durch

$$\varphi_{12}(k, \omega) = \arg(C_{12}(k, \omega)) \quad (121)$$

Auch hier gilt das in Abschnitt 7.6 gesagte zum Wertebereich der Phase φ . Die zugehörige $k\omega$ -Kohärenzfunktion ist

$$\kappa_{12}(k, \omega) = \frac{P_{12}(k, \omega)}{\sqrt{P_{11}(k, \omega) P_{12}(k, \omega)}} \quad (122)$$

$k\omega$ -Kreuzphasenspektrum von Ionensättigungsstrom und elektrischem Feld
In Abb. 29 (oben) ist der Cosinus des kf -Phasenspektrums (Gl. 121) von Fluktuationen des Ionensättigungsstromes und der Floating Potentialdifferenz dargestellt, das, sofern Elektronentemperaturfluktuationen vernachlässigt werden können, dem kf -Phasenspektrum von Dichte und E -Feld entspricht. $\cos(\varphi(k, f))$ wurde gewählt, weil es *stetig* und — wie Gl. 118 andeutet — die eigentlich transportrelevante Größe ist. Das weiß markierte Gebiet in Abb. 29 entspricht den Phasen φ mit

$$\cos \varphi \leq -0.9$$

d. h. wegen Gl. 118, daß sich in diesem weiß markierten Teil des Spektrums die Phase zwischen $S_E(k, f)$ und $S_n(k, f)$ so einstellt, daß *maximaler* Nettoteilchenfluß \bar{s}_Γ nach außen resultiert. Aus dem Vergleich mit dem kf -Leistungsspektrum der Teilchenflußfluktuationen Abb. 28 ist außerdem ersichtlich, daß das „weiße“ Gebiet den für die Gesamtfluktuationsleistung wesentlichen Spektralbereich umfaßt. Andererseits markiert „schwarz“ diejenigen Gebiete mit

$$\cos \varphi \leq +0.9$$

also *einwärts* gerichteten Teilchenfluß, dessen Signifikanz aber bezweifelt werden muß, da die kf -Kohärenz (Abb. 29 (unten)), gerade in diesen Bereichen unter 30% fällt und damit dem statistischen Kohärenzniveau ($\approx 20\%$) verdächtig nahe kommt. Da s_E über das Floating Potential der Sonde bestimmt wurde (s. Abschnitt 2.3.1), könnten auch Fluktuationen der Elektronentemperatur bei passender Phasenlage eine Einwärtsdrift des Plasmas vortäuschen (beachte Gl. 10).

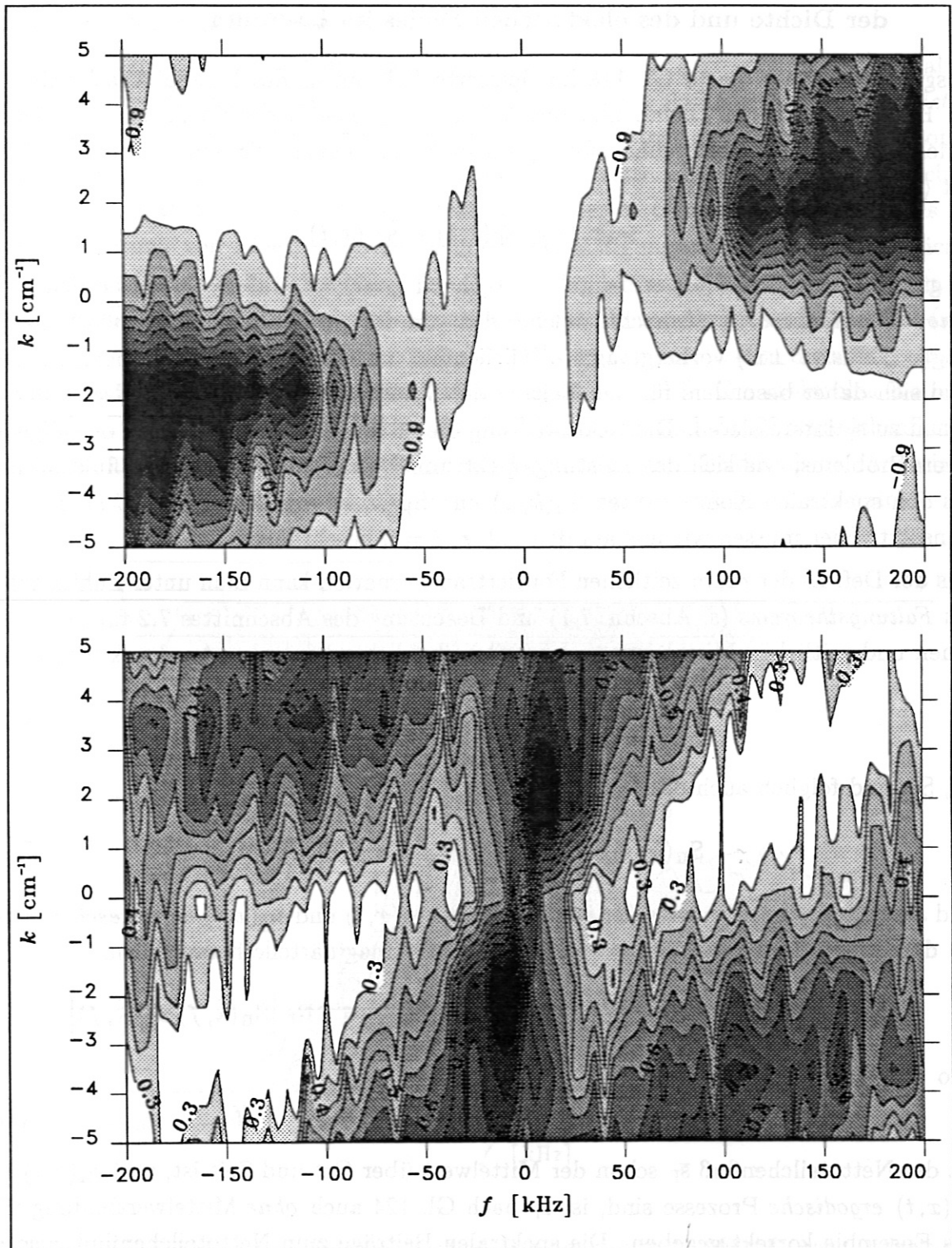


Abbildung 29: Oben: Höhenlinienplot vom Cosinus des kf -Phasenspektrums von Ionensättigungsstrom und Floating Potentialdifferenz (E -Feld, falls $\tilde{T}_e \approx 0$). Von „weiß“ nach „schwarz“ äquidistante Niveaus: $-0.9, -0.7, \dots, 0.9$. Unten: kf -Kohärenzfunktion dazu. Von „weiß“ nach „schwarz“ äquidistante Niveaus: $0.3, 0.35, \dots, 0.8$.

8.2.4 Zusammenhang zwischen Teilchenflußfluktuationen und Fluktuationen der Dichte und des elektrischen Feldes im $k\omega$ -Raum

Ausgangspunkt ist die in Gl. 118 kondensierte Erkenntnis des letzten Abschnitts, daß die Fluktuationen der Dichte und des poloidalen E -Feldes sowohl zu einem auswärts gerichteten radialen Nettoteilchenfluß \bar{s}_Γ als auch zu einem oszillierenden Anteil \tilde{s}_Γ führen mit $\langle \tilde{s}_\Gamma \rangle_{x,t} := 0$, sodaß

$$s_\Gamma(x, t) = \bar{s}_\Gamma(x, t) + \tilde{s}_\Gamma(x, t)$$

Es gilt mittlerweile als experimentell weitgehend gesichert, daß \bar{s}_Γ im wesentlichen den „*anomalen Transport*“ ausmacht, welcher den von der „*neoklassischen Theorie*“ (stoßbedingte Diffusion $\perp B$) vorhergesagten Teilchenfluß um Größenordnungen übertrifft. Man wird sich daher besonders für den Beitrag der Spektren von Dichte- und E -Feldfluktuationen zu \bar{s}_Γ interessieren. Die Beantwortung dieser Frage ist ein Spezialfall des allgemeineren Problems, wie sich das Leistungsspektrum $P_\Gamma(k, \omega)$ der Teilchenflußfluktuationen aus den spektralen Komponenten $S_N(k, \omega)$ und $S_E(k, \omega)$ von Dichte und E -Feld zusammensetzt. Hier müssen wir uns auf den Fall $k, f = 0$ beschränken.

Aus der Def. 18 der raum-zeitlichen Fouriertransformation kann man unter Zuhilfenahme des *Faltungstheorems* (s. Abschn. 7.1) und Beachtung des Abschnittes 7.2 für den räumlichen und zeitlichen Mittelwert \bar{s}_Γ der Teilcheflußdichte folgenden Ausdruck herleiten:

$$\bar{s}_\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_N(\hat{k}, f) S_E(-\hat{k}, -f) d\hat{k}df \quad (123)$$

S_N, S_E und folglich auch das Produkt

$$S_N(\hat{k}, f) S_E(-\hat{k}, -f) = S_N(\hat{k}, f) S_E^*(\hat{k}, f)$$

sind als Fouriertransformierte der *reellen* Größen $s_N(x, t)$ und $s_E(x, t)$ *hermitesch*, weshalb bei der Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ (Gl. 123) die Imaginärteile herausfallen:

$$S_N(-\hat{k}, -f) S_E^*(-\hat{k}, -f) + S_N(\hat{k}, f) S_E^*(\hat{k}, f) = 2 \operatorname{Re} [S_N(\hat{k}, f) S_E^*(\hat{k}, f)]$$

also

$$\bar{s}_\Gamma = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [S_N(\hat{k}, f) S_E^*(\hat{k}, f)] d\hat{k}df \quad (124)$$

Da der Nettoteilchenfluß \bar{s}_Γ schon der Mittelwert über Ort und Zeit ist, und $s_N(x, t)$ und $s_E(x, t)$ *ergodische* Prozesse sind, ist \bar{s}_Γ nach Gl. 124 auch *ohne* Mittelwertbildung über das Ensemble korrekt gegeben. Die spektralen Beiträge zum Nettoteilchenfluß, also der Integrand, haben dagegen nur als *Ensemblemittelwerte* eine physikalische Bedeutung:

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{Re} [S_N(\hat{k}, f) S_E^*(\hat{k}, f)] \rangle &= \operatorname{Re} [\langle S_N(\hat{k}, f) S_E^*(\hat{k}, f) \rangle] \\ &= \cos(\varphi_\Gamma(\hat{k}, f)) P_{nE}(\hat{k}, f) \end{aligned} \quad (125)$$

Die zweite Identität in (125) folgt aus der Def. 21 des $k\omega$ -Kreuzleistungsspektrums $P_{nE}(\hat{k}, f)$ und des $k\omega$ -Phasenspektrums $\varphi_{\Gamma}(\hat{k}, f)$.

Abb. 30 zeigt die zum $k\omega$ -Leistungsspektrum von Γ (Abb. 28) korrespondierende Analyse des Beitrags der $k\omega$ -Spektralfunktionen der Dichte- und E-Feldfluktuationen zum *Nettoteilchenfluß* \bar{s}_{Γ} . Die Maxima sind gegenüber Dichte- und Floating Potentialfluktuationen bezüglich der Wellenzahl betragsmäßig zu $k \approx 2 \text{ cm}^{-1}$ verschoben, wobei aber Unsicherheit darüber besteht, ob dies nicht ein Effekt des halbierten Ortsauflösungsvermögens bei Simultanmessung von Floating Potential und Ionensättigungsstrom ist. Mit ziemlicher Sicherheit darf man wohl behaupten, daß der Beitrag kleiner Strukturen ($k \geq 2$) zu \bar{s}_{Γ} erheblich größer ist als im Fall der Fluktuationsamplitude von Dichte und Potential (vgl. das zu Abb. 28 Gesagte). Aus mathematischer Sicht ist dies insofern zu erwarten, als das *E-Feld* s_E multiplikativ in den Teilchenfluß s_{Γ} eingeht (Gl. 116). Die spektralen Komponenten der Fluktuationen des E-Feldes, des Teilchenflusses und des Nettoteilchenflusses werden bei großen \hat{k} stärker gewichtet, da der Definition des E-Feldes als el. Potentialgradient $E(\mathbf{x}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}, t)$ die Multiplikation von Φ mit $i\mathbf{k}$ im k -Raum entspricht.

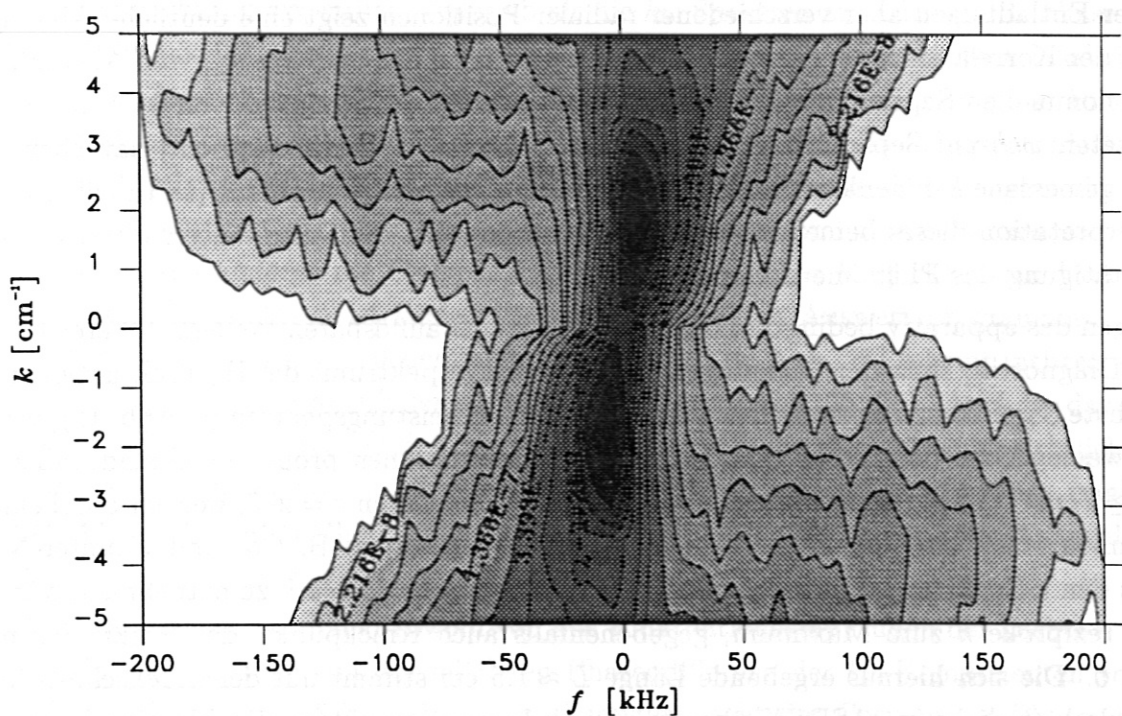


Abbildung 30: Beiträge des kf -Kreuzleistungsspektrums von elektrischem Feld E_{pol} und Dichte n zum Nettoteilchenfluß \bar{s}_{Γ} (nach Gleichung 125). Logarithmische Teilung des Wertebereichs mit 15 Konturniveaus. Von „schwarz“ nach „weiß“: $(\max = 0.82 \cdot 10^{-5}) \cdot (66/104)^n$ mit $n = 1, 2, \dots, 15$.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Anhand verschiedener Beispiele wurde gezeigt, daß Messungen mit größeren räumlichen Arrays (Vielkanalmessungen) unverzichtbar sind, um eindeutige Aussagen über die turbulenten Vorgänge in der Randschicht von Tokamaks zu erhalten. Frühere Versuche, die Information mit nur zwei Meßstellen zu gewinnen, beruhten auf der falschen Annahme, daß sich die räumlichen Strukturen während ihrer Bewegung über die Meßstelle hinweg praktisch nicht verändern.

Die Leistungsfähigkeit der präsentierten „Diagnostikwerkzeuge“, Meßmethoden und Analyseverfahren, ist vielleicht nirgends so überzeugend bestätigt, wie im Fall der Bestimmung der Poloidalgeschwindigkeit v_{pol} der Fluktuationen bzw. der Geschwindigkeit der poloidalen Rotation des Plasmas (Abschnitt 6.3.2). Die Idee, diese Geschwindigkeit über die Kreuzkorrelationsfunktionen zu bestimmen, war an sich nicht neu, doch bediente man sich stets eines experimentell zwar einfacheren aber ungeeigneten Verfahrens. (siehe z. B. auch [Zweben1985a]).

Die Kreuzkorrelationsanalyse von Floating Potentialmessungen während gleichartiger ohmscher Entladungen aber verschiedener radialer Positionen zeigt eine deutliche Abhängigkeit der Korrelationszeit, der poloidalen Korrelationslänge und von v_{pol} vom Abstand von der nominellen Separatrix. Die zeitliche und räumliche Korrelation von $\tilde{\Phi}_{Fl}$ an der vermuteten *wahren* Separatrix ist maximal (s. Tabelle 1). Dem entspricht, daß eben dort das gemessene k -Eigenleistungsspektrum von $\tilde{\Phi}_{Fl}$ am steilsten abfällt (s. Tabelle 2). Der Interpretation dieses bemerkenswerten Umstandes sollte evtl. eine weitere experimentelle Bestätigung des Phänomens vorausgehen.

Wegen des apparativ bedingten, besonders günstigen auflösbaren Wellenzahlbereiches der H_α -Diagnostik, kann den Messungen des k -Leistungsspektrums der H_α -Fluktuationen die höchste Signifikanz zugesprochen werden. Die H_α - k -Leistungsspektren (s. Abb. 15), welche im wesentlichen den radial gemittelten Dichtefluktuationen proportional sind, fallen für ($k \geq 2 \text{ cm}^{-1}$) nach einem Potenzgesetz (88) mit Exponenten $r = 2-3$, welcher anscheinend ziemlich stark mit den Entladungsbedingungen variiert (z. B. Co- und Counter-NBI). Aus den k -Spektren ist nur eine einzige *charakteristische Länge* L zu entnehmen, nämlich das reziproke k zum Maximum, gegebenenfalls auch Knickpunkt, des Spektrums nahe $k = 0$. Die sich hieraus ergebende Länge $L \approx 1.5 \text{ cm}$ stimmt mit der durchschnittlichen Randschichtdicke in ASDEX überein. Die k -Leistungsspektren des Floating Potentials sind in den wesentlichen Aspekten denen der Dichte (H_α) ähnlich. Das Fehlen einer charakteristischen Länge — abgesehen von der mehr oder weniger trivialen Schichtdicke — und die Form des k -Spektrums (88) sind ein Hinweis darauf, daß es sich bei den Randschichtfluktuationen um *starke Turbulenz* handelt.

Aus dem k -Phasenspektrum, welches die *Phasengeschwindigkeit* liefert (s. Abschn. 7.8.3), und der k -Kohärenzfunktion, die eine *Kohärenzzeit* definiert (7.8.4), ergibt sich für jede

k -Komponente eine *Laufstrecke*, über der die Kohärenz zerfällt (z. B. Abnahme auf 50 %). Diese Laufstrecke ist klein gegenüber der Wellenlänge. Für das typische Beispiel von ASDEX-Schuß 30437 ist sie während der H-Phase am größten ("high confinement").

Abseits von der Hauptintention dieser Arbeit steht die Erkenntnis, daß der poloidale Verlauf des Floating Potentials über Distanzen von 2 Sondenspitzenabständen (5 mm) bereits deutlich nichtlinear variiert, sodaß $\tilde{\Phi}_{Fl}$ nicht-vernachlässigbare spektrale Anteile mit $k \geq 12 \text{ cm}^{-1}$ enthalten muß (Abschnitt 7.9). Es wurde ferner begründet, daß die verwendete Differenzenmethode zur Messung von $\tilde{E}_{pol}(x, t)$ trotzdem geeignet ist, das k -Spektrum des E-Feldes in dem der Sonde zugänglichen Spektralbereich ($k \leq 12.6 \text{ cm}^{-1}$) zu bestimmen, weil die Methode selbst wie ein „ k -Tiefpaß“ wirkt.

Die $k\omega$ -Leistungsspektren ermöglichen die Erkennung von Dispersionsrelationen. sämtliche Beispiele des Abschnitts 8.2 demonstrieren aber, daß der Zusammenhang zwischen k und ω in der Hauptsache *statistischer* Natur ist (s. etwa Abbildung 27).

Es besteht ein hoher Grad an qualitativer und — in beschränktem Maße — auch an quantitativer Ähnlichkeit mit den k - und $k\omega$ -Spektren, die am CALTECH-Tokamak mit Langmuirsonden gemessen wurden [Zweben1985a]. Das $k\omega$ -Spektrum zur H-Phase fällt in k - und ω -Richtung wesentlich steiler ab als die $k\omega$ -Spektren zur OH- und L-Phase von ASDEX-Schuß 30437. Falls irgendwelche „Moden“ auftreten, also rel. stark lokalisierte Ereignisse im $k\omega$ -Raum (z. B. Abbildung 26 oben), dann ist die Bestimmung der Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeiten über das $k\omega$ -Leistungsspektrum die adäquate Methode. Die $k\omega$ -Spektralanalyse und die Kreuzkorrelationsanalyse ergänzen sich bezüglich der Geschwindigkeitsbestimmung: Aus der einen erhält man vornehmlich die *Phasengeschwindigkeiten*, aus der anderen die *Gruppengeschwindigkeiten*. Eine Möglichkeit zur Dopplerkorrektur der $k\omega$ -Spektren ist Bestandteil des verwendeten Auswerteprogrammes. Das $k\omega$ -Leistungsspektrum der Teilchenflußfluktuationen $\tilde{\Gamma}$ (s. Abb. 28) scheint insbesondere in k -Richtung langsamer abzufallen als die H_α -Spektren (Abb. 25, 25). Auch ist das Maximum zu höheren k -Werten ($1.5\text{--}2 \text{ cm}^{-1}$) verschoben. Ob die Ergebnisse hinsichtlich der k -Richtung verlässlich sind, ist bei effektiv 8 räumlichen Stützstellen allerdings fraglich, weshalb für die k - und $k\omega$ -Spektralanalyse von $\tilde{\Gamma}$ eine Verdopplung der Spitzenanzahl des Sondenarrays wünschbar wäre.

Der Nettoteilchenfluß $\bar{\Gamma}_r$ hängt sowohl von den Fluktuationsamplituden der Dichte n und des E-Feld E_{pol} als auch von der mittleren Phasendifferenz der $k\omega$ -Komponenten von \tilde{n} und \tilde{E}_{pol} ab (s. Abschn. 8.2.4). In die $k\omega$ -Zerlegung geht der Cosinus der Phasendifferenz $\varphi(k, \omega)$ zwischen den $k\omega$ -Komponenten der Dichte- und der E_{pol} -Feldfluktuationen multiplikativ ein (Gl. 125). In den $k\omega$ -Gebieten, die gekennzeichnet sind durch eine $k\omega$ -Kohärenz (zwischen \tilde{I}_{sat} und \tilde{E}_{pol}) über dem statistischen Niveau (s. Abb. 29) und durch eine signifikante $k\omega$ -Eigenleistung der Teilchenflußfluktuationen (s. Abb. 28), stellt sich die Phasendifferenz auf einen Wert ein, bei dem maximaler radialer Nettoteilchenfluß $\bar{\Gamma}_r$ nach außen resultiert.

In Zukunft wären die Analyseverfahren systematisch bei der Untersuchung der H_α -, Ionensättigungsstrom-, Floating Potential- und Teilchenflußfluktuationen für verschiedene Plasmaparameter einzusetzen. Brauchbare Messungen liegen zumindest im Fall der H_α -Fluktuationen schon für eine Vielzahl von Bedingungen vor. Unbedingt notwendig ist die Messung der Fluktuationsamplitude der Elektronentemperatur T_e . Falls sie sich gegenüber $\tilde{\Phi}$ als vernachlässigbar herausstellt, wären die in dieser Arbeit angewandten Meßmethoden für das Plasmapotential, das E-Feld und den radialen Teilchenfluß tatsächlich die Adäquaten. Andernfalls müßten mit Mehrfachsonden \tilde{I}_{sat} , $\tilde{\Phi}$ und \tilde{T}_e *simultan* gemessen werden. Neben dem geeigneten Design des Sondenarrays fehlt u. a. auch eine Programmroutine zur Aufschlüsselung der Meßwerte nach den gesuchten 3 Meßgrößen. Eine automatische Fitprozedur für die k - bzw. $k\omega$ -Spektren wäre gemäß dem in Abschnitt 7.7.3 Erörterten zu entwickeln. Außerdem steht ein korrekter Vergleich der mit Laserstreuung (FIR) gewonnenen $k\omega$ -Spektren mit den H_α - und I_{sat} - $k\omega$ -Spektren noch aus (Abschnitt 7.10). Die bisherigen experimentellen Untersuchungen der Randschichtfluktuationen führen die Vorstellungen über das Wesen dieses turbulenten Prozesses eher in Richtung eines „*Blobmodells*“, demzufolge man sich die Fluktuationen als erratische Überlagerung von Einzelergebnissen, z. B. Wirbel, lokale Dichtestörungen (sog. „*Blobs*“) oder ähnliches denkt. Eine Simulation der experimentellen Ergebnisse durch numerische Berechnung von plausiblen Modellen sollte schließlich eine Selektion, wenn auch nicht unbedingt eine Entscheidung, zwischen den alternativen Vorstellungen herbeiführen.

Abbildungsverzeichnis

1	Poloidalschnitt durch ASDEX	3
2	Die H_α -Diagnostik	12
3	Die Sondendiagnostik	16
4	H_α -Rohsignale	20
5	H_α -Fluktuationsamplitude über der Poloidalkoordinate	21
6	Translationsinvarianz der H_α -Amplitudenverteilung	23
7	Häufigkeitsverteilungsdichten der Fluktuationsamplituden von I_{sat} , Φ_{Fl} , E_{pol} und Γ_r	27
8	Korrelationsfunktionen zeitabgeleiteter H_α -Signale	33
9	Skizze zur Definition von v_{pol}	36
10	Korrelationsfunktionen von I_{sat} und Φ_{Fl} (simultane Messung)	37
11	Kreuzkorrelation (Floating Potential) 3.5 und 3.0 cm außerhalb der nom. Separatrix	40
12	Kreuzkorrelation (Floating Potential) 2.5 und 2.0 cm außerhalb der nom. Separatrix	41
13	Kreuzkorrelation (Floating Potential) 1.5 und 1.0 cm außerhalb der nom. Separatrix	42
14	Kreuzkorrelation (Floating Potential) 0.5 cm außerhalb der nom. Separatrix	43
15	k-Leistungsspektren (H_α)	55
16	k-Leistungsspektrum ohne Aliasing (H_α)	56
17	Vergleich von „ <i>modifizierter DFT</i> “ und „ <i>DFT mit Rechteckfenster</i> “	60
18	k-Leistungsspektren von Fluktuationen des Floating Potentials	62
19	H_α -k-Kohärenzfunktion und Phasenspektrum (OH)	65
20	H_α -k-Kohärenzfunktion und Phasenspektrum (H)	66
21	H_α -k-Kohärenzfunktion und Phasenspektrum (L)	67
22	Schnitte durch eine k-Kohärenzfunktion (H_α)	70
23	Schnitte durch ein k-Phasenspektrum (H_α)	71
24	Abhängigkeit der Standardabweichung der Floating Potentialdifferenz $\Delta\Phi_{Fl}(\Delta x)$ in Abhängigkeit vom Abstand der Sondenspitzen.	74
25	kf -Leistungsspektrum von H_α -Fluktuationen. Ohmsche Phase	81
26	kf -Leistungsspektren von H_α -Fluktuationen. H- und L-Phase.	82
27	($k = konst.$)-Schnitte durch ein dopplerkorrigiertes kf -Leistungsspektrum (H_α)	83

28	kf -Leistungsspektrum von $\tilde{\Gamma}_r$	84
29	kf -Phasenspektrum und Kohärenzfunktion von \tilde{I}_{sat} und \tilde{E}_{pol}	87
30	kf -Spektrum vom Nettoteilchenfluß $\bar{\Gamma}_r$	89

Literatur

- [Artsimovich1972a] Lew A. Artsimovich, "Tokamak Devices", *Nuclear Fusion*, **12**, 2, (1972), pp. 215–252.
- [Beall1982a] J. M. Beall, Y. C. Kim, and J. Powers, "Estimation of wavenumber and frequency spectra using fixed probe pairs", *Journal of Applied Physics*, **53**, 6, (1982).
- [Bendat1966a] J.S. Bendat and A.G. Piersol, *Measurement and Analysis of Random Data*, John Wiley & Sons, (1966).
- [Bessenrodt1990a] M. Bessenrodt-Weberpals, A. Carlson, G. Haas, H.D. Murmann, J. Neuhauser, N. Tsois, H. Verbeek, and the ASDEX-Team, "Characterizing the Edge Plasma of Different Ohmic Confinement Regimes in ASDEX", *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **32**, 1, (1990), pp. 21–31.
- [Bracewell1986a] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, (1986).
- [Carlson1989a] A. Carlson, A. Rudyj, and H. Niedermeyer, "The Limitation of Measurements of the Local Wavenumber", in X. Garbet, P. Ghendrih, and C. Laviron, editors, *Workshop on Electrostatic Turbulence*, (Centre d'études nucléaires de Cadarache, 1989), pp. 255–261.
- [Carlson1990a] A. Carlson. "Two-Point Estimates of $S(k, \omega)$ with Finite Separation and Volume". To be submitted to "*Journal of Applied Physics*", 9 1990.
- [Chen1984a] Francis F. Chen, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press, (1984).
- [Fischer1989a] B. Fischer and M. Krämer, "Experimental Study of Drift Wave Turbulence and Anomalous Transport", *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **31**, 3, (1989), pp. 453–470.
- [Giannone1989a] Louis Giannone and ASDEX- and NI- and ICRH- and Pellet-Team, "Experimental Observation of Broadband Magnetic Fluctuations in ASDEX", Laborbericht IPP III/138, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 1989.
- [Glasstone1964a] S. Glasstone and R. H. Lovberg, *Kontrollierte thermonukleare Reaktionen*, Karl Thiemig KG, (1964).
- [Hesselmann1983a] Norbert Hesselmann, *Digitale Signalverarbeitung*, Vogel-Buchverlag, (1983).

- [Holzhauer1990a] E. Holzhauer and G. Dodel, "Collective laser light scattering from electron density fluctuations in fusion research plasmas (invited)", *Review of Scientific Instruments*, **61**, 10, (1990). Im Druck.
- [Horton1981a] W. Horton, "Drift Wave Turbulence and Anomalous Transport", Report No. IFSR-35/ DOE-ET-53088-35, Texas Univ. , Austin(US). Inst. for Fusion Studies / Department of Energy, Washington, D. C. (US), 1981.
- [Jenkins1968a] G. M. Jenkins and D. G. Watts, *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, (1968).
- [Keilhacker1981a] M. Keilhacker and the ASDEX-Team, "Impurity Control Experiments in the ASDEX Divertor Tokamak", in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1980*, 1981, Vol. 2, pp. 351-366.
- [Keilhacker1983a] M. Keilhacker and the ASDEX-Team, "Divertor Operation at Large Power Flows in Neutral-Beam-Heated ASDEX Discharges", in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1982*, 1983, Vol. 3, pp. 183-199.
- [Kim1978a] Y. C. Kim and E. J. Powers, "Digital bispectral analysis of self-excited fluctuation spectra", *Physics of Fluids*, **21**, (1978).
- [Kim1980a] Y. C. Kim, J. M. Beal, E. J. Powers, and R. W. Miksad, "Bispectrum and nonlinear wave coupling", *Physics of Fluids*, **23**, (1980).
- [LeCroy8210] LeCroy. *CAMAC Model 8210 Quad 10-Bit Transient Digitizer*, 1983. Version 5 Edition.
- [Liewer1985a] Paulette C. Liewer, "Measurements of Microturbulence in Tokamaks and Comparisons with Theories of Turbulence and Anomalous Transport", *Nuclear Fusion*, **25**, 5, (1985), pp. 543-621.
- [Lighthill1959a] M. J. Lighthill, *An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, (1959).
- [Manos1984a] D.M. Manos and G.M. McCracken, "Probes for Plasma Edge Diagnostics in Magnetic Confinement Fusion Devices", in D.E. Post and R. Behrisch, editors, *Physics of Plasma-Wall Interactions in Controlled Fusion*, (Plenum Press, 1984), Vol. 131 of *NATO ASI series, Series B, Physics*, p. 135.
- [McCormick1989a] G. K. McCormick, Z. A. Pietrzyk, the ASDEX Team, and the NI Team, "Characterization of the ASDEX Scrape-Off Layer Density Profile During Neutral Beam Heating", *Journal of Nuclear Materials*, **162-164**, (1989).

- [McPherson1990a] G. McPherson, *Statistics in Scientific Investigation*, Springer-Verlag New York Inc., (1990).
- [Neuhauser1989a] J. Neuhauser, M. Bessenrodt-Weberpals, B.J. Braams, A. Carlson, R. Chodura, G. Fussmann, L. Giannone, G. Haas, G. Janeschitz, M. Kaufmann, M. Krech, K. Lackner, K. McCormick, D. Meisel, E.R. Müller, H. Murmann, H. Niedermeyer, W. Poschenrieder, J. Roth, A. Rudyj, U. Schneider, W. Schneider, G. Siller, A. Stäbler, K.-H. Steuer, E. Taglauer, N. Tsois, H. Verbeek, O. Vollmer, R. Wunderlich, H. Würz, and the ASDEX-Team, "Tokamak Edge Modelling and Comparison with Experiment in ASDEX", *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **31**, 10, (1989), pp. 1551-1568.
- [Nicolet] Nicolet Instrument Corporation. *System 500, Data Acquisition System*, 1988.
- [Niedermeyer1990a] H. Niedermeyer. Private Mitteilung, 1990. Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 8046 Garching.
- [Pinkau1989a] K. Pinkau, U. Schumacher, and G.H. Wolf, "Fortschritte der Fusionsforschung mit magnetischem Einschluß", *Physikalische Blätter*, **45**, 2, (1989), pp. 41-47.
- [Raeder1981a] Jürgen Raeder, Kurt Borraß, Rolf Bünde, Wolfgang Dänner, Rolf Klingelhöfer, Lajos Lengyel, Fritz Leuterer, and Matthias Söll, *Kontrollierte Kernfusion*, Teubner, (1981).
- [Rudyj1987a] Alexander Rudyj, "Untersuchung der Randschichtfluktuationen am Divertor-Tokamak ASDEX", Report No. IPP III/117, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 1987. Diplomarbeit.
- [Rudyj1990a] A. Rudyj. *Untersuchung transportrelevanter Fluktuationen in der Randschicht von ASDEX*. PhD thesis, Technische Universität München, 1990. Laborbericht IPP III/160, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 8046 Garching.
- [Rudyj1990b] A. Rudyj, A. Carlson, M. Endler, H. Niedermeyer L. Giannone, G. Theimer, and the ASDEX-Team, "Structure of Density Fluctuations in the Edge Plasma of ASDEX", in *17th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Heating*, (European Physical Society, 1990), pp. 1464-67.
- [Schoch1987a] P. M. Schoch, J. C. Forster, R. L. Hickok, and A. J. Wootton, "Fluctuation Induced Transport Studies in TEXT with an HIBP", in *14th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, (European Physical Society, 1987).

- [Smith1974a] D.E. Smith, E.J. Powers, and G.S. Caldwell, "Fast-Fourier-Transform Spectral-Analysis Techniques as a Plasma Fluctuation Tool", *IEEE Transactions on Plasma Science*, **2**, 12, (1974), pp. 261-272.
- [Stangeby1984a] Peter C. Stangeby, "The Plasma Sheath", in D.E. Post and R. Behrisch, editors, *Physics of Plasma-Wall Interactions in Controlled Fusion*, (Plenum Press, 1984), Vol. 131 of *NATO ASI series, Series B, Physics*, pp. 41-97.
- [Stangeby1984b] P.C. Stangeby, "Plasma Sheath Transmission Factors for Tokamak Edge Plasmas", *Physics of Fluids*, **27**, 3, (1984), pp. 682-690.
- [TekAM502] Tektronix Inc. *AM502 Differential Amplifier*, 1984.
- [Zweben1985a] S.J. Zweben and R.W. Gould, "Structure of Edge Plasma Turbulence in the Caltech Tokamak", *Nuclear Fusion*, **25**, 2, (1985), pp. 171-183.