

**Untersuchung modularer Systeme
aus nichtebenen Spulen
für den Stellarator-Fusionsreaktor**

E. Harmeyer

IPP 2/298

Dezember 1988



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
Garching bei München

Untersuchung modularer Systeme
aus nichtebenen Spulen
für den Stellarator-Fusionsreaktor

E. Harmeyer

IPP 2/298

Dezember 1988

Leicht gekürzter Abdruck einer Dissertation,
die an der Technischen Hochschule Darmstadt eingereicht wurde.

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die
Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

Steady-state stellarators constitute an important option for a future fusion reactor. The helical magnetic field required for plasma confinement can be produced by means of a set of modular nonplanar coils. In order to achieve optimum power density of the plasma, the magnetic flux density inside the torus is made as high as possible. State-of-the-art estimates allow values of the magnetic flux density on axis of $B_0 = 4 - 7$ T.

The present report is concerned with investigations on modular nonplanar stellarator coil systems. Coil systems with poloidal periodicity $\ell = 2$ and a coil system of the W VII-AS type with superposed $\ell = 0, 1, 2, 3$ terms are treated. Furthermore, the parameters are simultaneously varied while keeping constant the ratios of certain magnitudes. In the parameter space of the geometric values and coil number the following quantities are evaluated: *maximum magnetic flux density in the coil domain, stored magnetic energy of the coil system, magnetic force density distribution or magnetic forces, and mechanical stress distribution in the coils*. Numerical methods are applied in the programme systems used for these calculations. The aim of the study is to determine an optimum regime for the above parameters. The numerical results are compared with those of analytical approximation solutions.

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
1.1.	Plasmaphysikalischer Hintergrund	1
1.2.	Allgemeine Problematik von Stellarator-Spulensystemen	4
1.3.	Problemstellung und Ziel der Arbeit	11
1.4.	Gliederung der Arbeit	12
2.	Magnetischer Einschluß.....	14
2.1.	Kenngößen helikaler Magnetfelder	14
2.1.1.	Magnetische Flächen	14
2.1.2.	Rotationstransformation	15
2.1.3.	Verscherung	16
2.1.4.	Magnetische Mulde	16
2.2.	Magnetische Struktur des geraden Stellaratorfeldes	17
3.	Parameterstudien am L2-Stellarator	23
3.1.	Überblick	23
3.2.	Aufgabenstellung und Berechnungsmethode dieses Kapitels	25
3.3.	Analytische Näherungen	30
3.3.1.	Magnetische Feldverteilung und magnetischer Energieinhalt	30
3.3.2.	Magnetische Kräfte	32
3.3.3.	Mechanische Spannungen	33
3.3.4.	Charakterische Zahlenwerte der Referenzkonfiguration	36
3.3.5.	Kritik der analytischen Methode	37
3.4.	Numerische Berechnungen	37
3.4.1.	Variation des großen Torusradius R_0	38
3.4.2.	Variation des Spulenradius a	44
3.4.3.	Variation der Spulenanzahl N	48
3.4.4.	Variation des Spulenquerschnitts A_c	52
3.4.5.	Variation des Aspektverhältnisses des Spulenquerschnitts A_q	56
3.4.6.	Variation der toroidalen Spulenauslenkung c	61
3.5.	Zusammenfassung der Ergebnisse der Parameterstudien	68
4.	Simultane Parametervariation in toroidalen Spulensystemen	71
4.1.	Allgemeines	71
4.2.	Numerische Berechnungen	72
4.3.	Diskussion der Ergebnisse	75
5.	Optimierung eines modularen Stellarator-Spulensystems	77
5.1.	Allgemeines	77

5.2.	Die Eigenschaften des Spulensystems ASRA6C	78
5.3.	Magnetische Kräfte	82
5.4.	Analyse der mechanischen Spannungen	84
5.5.	Optimierung des Spulensystems	86
5.6.	Beschreibung und Bewertung der Ergebnisse	89
6.	Zusammenfassung	91
7.	Anhang: Theoretische Grundlagen	94
7.1.	Magnetostatik	94
7.1.1.	Strom- und Feldverteilung	94
7.1.2.	Der Energieinhalt des magnetischen Feldes	95
7.1.3.	Die Kraftverteilung in den Spulen	97
7.2.	Elastomechanik	98
7.2.1.	Der Verzerrungstensor	98
7.2.2.	Der Spannungstensor und die Gleichgewichtsbedingung	99
7.2.3.	Das Elastizitätsgesetz	101
8.	Literatur	103

1. Einleitung

1.1. Plasmaphysikalischer Hintergrund

Die Kernfusion stellt ein bedeutendes Energiereservoir dar und könnte deshalb für die Zukunft zur langfristigen Energieversorgung geeignet sein. Weltweit werden aus diesem Grunde die physikalischen und technologischen Probleme, die mit der kontrollierten Kernfusion zusammenhängen, erforscht. Das Ziel dieser Forschung ist die Entwicklung eines wirtschaftlich arbeitenden Fusionsreaktors [1, 2].

Bei der Kernfusion verschmelzen leichte Atomkerne und bilden schwerere. Dabei tritt der sogenannte Massendefekt auf, d.h. der neugebildete Kern ist leichter als die Summe seiner Teile. Die Massendifferenz wird in Energie umgewandelt, entsprechend dem EINSTEINSchen Äquivalenzgesetz

$$\Delta E = \Delta m c^2.$$

Der Energiebetrag ΔE ist die Bindungsenergie der Kernbausteine (Nukleonen). Die Bindungsenergie pro Nukleon hängt von der Anzahl der Nukleonen des Isotopes ab. Bei den leichten Isotopen ist sie für Helium besonders groß und beträgt 7.07 MeV pro Nukleon [3]. Im Vergleich dazu ist die chemische Bindungsenergie fossiler Brennstoffe um mehr als sechs Größenordnungen kleiner; sie beträgt bei Steinkohle etwa 4.2 eV pro Molekül (33.5 MJ/kg) [4]. ${}^4\text{He}$ stellt deshalb im Hinblick auf die Energieausbeute ein attraktives Fusionsprodukt dar.

Um den Helium-4-Kern zu bilden, ist es praktisch nicht möglich, 2 Wasserstoffkerne und 2 Neutronen direkt zu verschmelzen, da das gleichzeitige Zusammentreffen der 4 Nukleonen äußerst unwahrscheinlich ist. Man kann jedoch z.B. die Reaktion der Wasserstoff-Isotope Deuterium (${}^2\text{H}$) und Tritium (${}^3\text{H}$), die als Zweierstoß abläuft, verwenden (DT-Reaktion). Dabei entsteht ein Helium-Kern (${}^4\text{He}$) und ein Neutron. Die freiwerdende Energie wird in Form von kinetischer Energie auf den ${}^4\text{He}$ -Kern (α -Teilchen) und das Neutron übertragen.

Damit es zu Fusionsreaktionen kommt, müssen die Nukleonen mit genügend großer kinetischer Energie zusammenstoßen, um die gegenseitigen elektrostatischen Abstoßkräfte zu überwinden. Deshalb muß das Deuterium-Tritium-Gemisch auf Temperaturen von etwa 10^8 K aufgeheizt werden. Dabei lösen sich die Elektronen vom Kern ab, und es entstehen zu gleichen Teilen positiv geladene Ionen und negativ geladene Elektronen. Ein solches Gemisch wird Plasma genannt. Im Fusionsplasma müssen außerdem genügend viele Teilchen für eine gewisse Zeit vorhanden sein, um eine ausreichende Fusions-Leistungsdichte zu erzielen. Die DT-Reaktion zeichnet sich dadurch aus, daß sie mit relativ hohen Leistungsdichten bei vergleichsweise mäßigen Temperaturen ($T \approx 1.5 \cdot 10^8 \text{ K}$) abläuft (z.B. $p_f \approx 1.8 \text{ W/cm}^3$ bei Teilchendichten von $n_D = n_T = 5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$) [3]. Sie hat aber den Nachteil, daß für sie das

radioaktive Tritium notwendig ist. Dieses ist in der Natur kaum vorhanden und muß deshalb im Reaktor selbst erzeugt werden. Zu diesem Zweck wird das Plasma mit einem Mantel (Blanket) umgeben, in dem sich, je nach Konzept, festes oder flüssiges Lithium befindet. Die Reaktion der Neutronen mit Lithium führt u.a. zur Bildung von Tritium. Ein Heliumkreislauf kann die Aufgabe übernehmen, die durch die Neutronen im Blanket erzeugte Wärme aus dem Reaktor abzuführen und dem Kraftwerk zuzuleiten [3].

Neben der DT-Reaktion sind andere anwendbar, z.B. die Reaktion $D + {}^3\text{He}$. Dabei entsteht ${}^4\text{He}$ und ein Proton. Der Vorteil dieser Reaktion liegt darin, daß nur geladene Teilchen entstehen, deren Energie man durch Direktkonversion in verwertbare elektrische Energie überführen kann. Außerdem vermeidet man dabei die Handhabung des radioaktiven Tritiums. Zwar entstehen gleichzeitig durch DD-Reaktionen auch in geringem Maße Tritium und Neutronen, aber das Abschirmungsproblem ist vergleichsweise leicht zu lösen, und ein Blanket ist nicht notwendig, so daß der Reaktor sehr kompakt gebaut werden könnte. Der Nachteil der $D-{}^3\text{He}$ -Reaktion ist eine relativ geringe Fusions-Leistungsdichte [3].

Ein Fusionsplasma steht als gasförmige Materie unter starkem Druck und muß deshalb durch äußere Kräfte am Abströmen gehindert werden, d.h. es muß eingeschlossen werden. Der Einschluß der Energie einer ausreichenden Anzahl von Plasmateilchen über eine gewisse Zeit ist für die Energiebilanz eines Fusionsreaktors von entscheidender Bedeutung. Das Produkt aus Teilchendichte n und Einschlußzeit τ_E muß einen bestimmten Wert erreichen, um zu einer positiven Energiebilanz zu kommen (typisch $n\tau_E \geq 10^{20} \text{ sec/m}^3$). Es gibt verschiedene Einschlußarten für Plasmen; eine davon ist der magnetische Einschluß [3, 5]. Er soll im folgenden ausschließlich betrachtet werden. Bei diesem Einschlußkonzept wird die Tatsache ausgenützt, daß sich geladene Teilchen im allgemeinen spiralförmig um magnetische Feldlinien bewegen. Die Ursache dafür ist die LORENTZkraft $\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Die einfachste Einschlußkonfiguration ist ein langer Zylinder, ausgefüllt mit einem homogenen, axialen magnetischen Feld. Wenn die Teilchendichte nicht zu groß ist, kreisen ("gyrieren") die Teilchen ziemlich ungestört um die Feldlinien, während sie sich längs der Feldlinien frei bewegen. Auf diese Weise werden sie von den Wänden ferngehalten. Da der Zylinder jedoch offene Enden hat, entsteht ein Plasmaverlust, der zwar durch spezielle End-Magnetfelder ("magnetische Spiegel") verringert werden kann, aber prinzipiell nicht zu verhindern ist [5].

Um die Nachteile einer solchen linearen Anordnung zu vermeiden, hat man geschlossene Anordnungen geschaffen, bei denen das Magnetfeld ringförmig (toroidal) geführt wird. Dieses Magnetfeld kann durch eine toroidale Anordnung von Spulen erzeugt werden. Im Idealfall kann man sich den Torus gleichmäßig mit einer un-

endlich dünnen Stromschicht in poloidaler* Richtung belegt denken. Dieser "ideale Torus" erzeugt ein Magnetfeld B_φ , das eine $1/r$ -Abhängigkeit aufweist, wie man mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes zeigen kann. Das "reine Torusfeld" ist also inhomogen. Der Feldgradient verursacht eine Drift parallel bzw. antiparallel zur Torusachse (siehe Bild 1), je nach Ladungsvorzeichen der Teilchen. Diese Drift verursacht eine Ladungstrennung und damit ein elektrisches Feld, dessen Kraftwirkung wiederum zu einer Drift führt. Die Richtung dieser Drift weist radial nach außen, d.h. das Plasma verschiebt sich als Ganzes an die äußere Wand des Gefäßes. Das reine Torusfeld ist also für den Plasmaeinschluß ungeeignet.

Ein stabiler Plasmaeinschluß kann erst erreicht werden, wenn man zusätzlich zum Torusfeld B_φ ein poloidales Magnetfeld B_ϑ einführt. Die Kombination beider Magnetfelder ergibt ein schraubenförmiges (helikales) Feld [3]. Da die Teilchen sich längs der Feldlinien frei bewegen, befinden sie sich im helikalen Feld abwechselnd ober- und unterhalb der Ebene $z = 0$. Im zeitlichen Mittel ändert sich ihre Lage zur Torusseule wenig, da die genannte Drift parallel und antiparallel zur Torusachse für eine Teilchenart immer nur in eine Richtung wirkt, so daß sich die Teilchen genau so oft auf die Ebene $z = 0$ zu bewegen, wie von ihr weg. Auf diese Weise ist die Teilchendiffusion senkrecht zum Magnetfeld stark eingeschränkt und damit eine wichtige Voraussetzung für einen stabilen Plasmaeinschluß erfüllt.

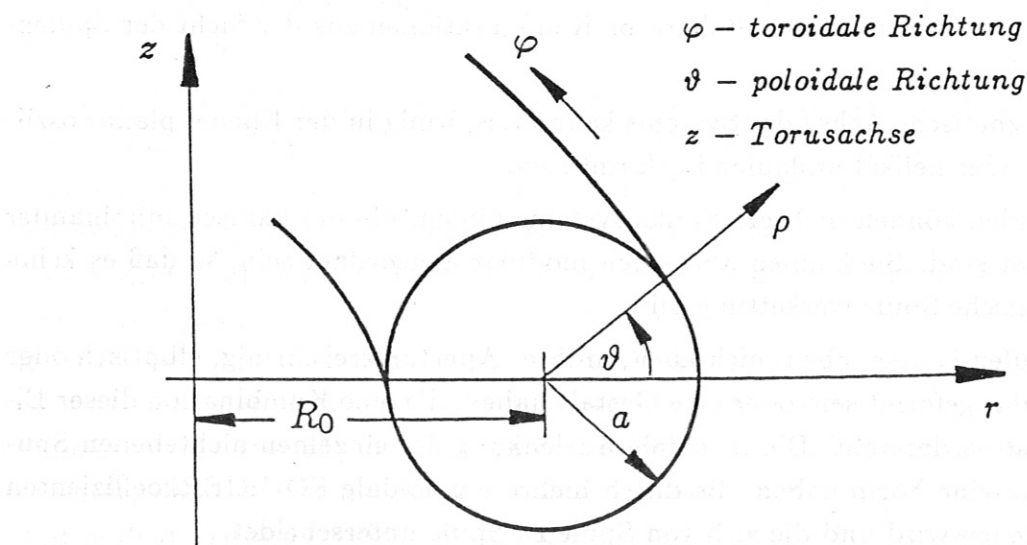


Bild 1: Quasitoroidale Koordinaten und Darstellung wichtiger geometrischer Größen einer toroidalen Anordnung. Es gilt: $r = R_0 + \rho \cos \vartheta$.

*Die poloidale Richtung wird in der Ebene $\varphi = \text{const.}$ durch den Winkel ϑ beschrieben; in quasitoroidalen Koordinaten ρ, φ, ϑ gilt: $\vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi$, siehe Bild 1.

Das poloidale Feld B_θ , das zur Bildung des helikalen Magnetfeldes notwendig ist, kann durch Ströme innerhalb oder außerhalb des Plasmas erzeugt werden. Der erste Weg wird beim Tokamak [6, 7] beschritten, indem man im Plasma einen Ringstrom induziert. Beim Stellarator [5, 8] dagegen wird B_θ durch stromführende äußere Leiter erzeugt. Beim klassischen Stellarator sind diese schraubenförmig um das Plasma angeordnet. Die Feldkomponente B_θ kann jedoch auch durch eine spezielle Formgebung der Spulen, insbesondere durch Auslenkung in toroidaler Richtung, so daß nichtebene Spulen (englisch: twisted coils) entstehen, erzeugt werden.

1.2. Allgemeine Problematik von Stellarator-Spulensystemen

Der Stellarator zeichnet sich durch eine große Mannigfaltigkeit in der magnetischen Feldtopologie und der zugehörigen Spulensysteme aus. Es gibt ein breites Spektrum verschiedener Stellarator-Konfigurationen, die ein helikales magnetisches Feld erzeugen, die sich aber hinsichtlich der Form der magnetischen Achse, der Anordnung der Spulen und der Spulenform unterscheiden. Wegen der Vielzahl der Parameter ist es schwierig, plasmaphysikalisch optimale Konfigurationen zu finden, die einen stabilen magnetischen Einschluß bei hohem Plasmadruck versprechen. Zwar gibt es auf diesem Gebiet bedeutende Erfolge (ein Beispiel dafür ist der im IPP Garching entwickelte "Advanced Stellarator" [9]), allgemeine Parameterstudien erscheinen aber wegen des sehr großen numerischen Aufwands kaum durchführbar.

Die wichtigsten Varianten von Stellarator-Konfigurationen aus der Sicht der Spulensysteme sind:

- Die magnetische Achse des Systems kann kreisförmig in der Ebene, planar oszillierend oder helikal umlaufend geformt sein.
- Die Spulen können mehrere Spulensysteme bilden, die mechanisch miteinander verkettet sind. Sie können aber auch modular angeordnet sein, so daß es keine mechanische Spulenverkettung gibt.
- Die Spulen können eben, nichteben, in ihrer Apertur kreisförmig, elliptisch oder triangular geformt sein oder eine Gestalt haben, die eine Kombination dieser Eigenschaften darstellt. Die toroidale Auslenkung der einzelnen nichtebenen Spulen kann eine Form haben, die durch mehrere poloidale FOURIERkoeffizienten beschrieben wird und die sich von Spule zu Spule unterscheidet.
- Die Anzahl der toroidalen Feldperioden kann variieren; sie beträgt im allgemeinen zwischen $M = 4$ und $M = 6$.

Im folgenden soll der *klassische Stellarator* dem *modularen Stellarator* gegenübergestellt und ein Vergleich durchgeführt werden.

Der *klassische Stellarator* besteht aus kreisförmigen Toroidalfeldspulen und aus ℓ Paaren zusätzlicher helikaler Windungen, die schraubenförmig um das Plasma-

gefäß angeordnet sind. Die Stromrichtung in den helikalen Windungen ist alternierend, d.h. der Strom fließt in benachbarten Windungen in entgegengesetzter Richtung.*

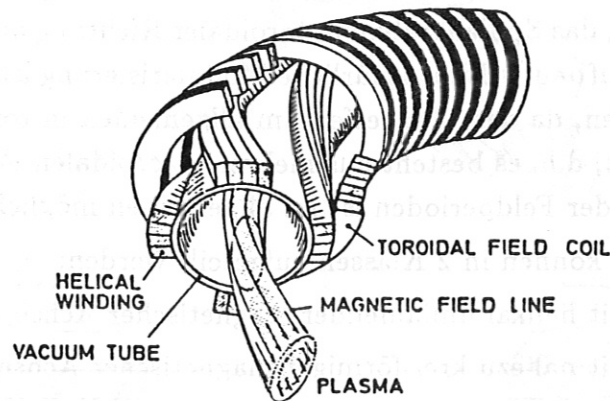


Bild 2: *Klassischer Stellarator mit helikalen Windungen der poloidalen Periodizität $L = 2$ (entnommen aus [8]).*

Bild 2 zeigt das Schema eines klassischen L2-Stellarators. Die Bezeichnung L2 bedeutet, daß hier der poloidale FOURIERkoeffizient $\ell = 2$ dominiert. Zugleich gibt ℓ die Anzahl der helikalen Leiterpaare in poloidaler Richtung an. Viele existierende Stellaratoren sind nach diesem Prinzip aufgebaut. Der klassische Stellarator bietet als Experimentiereinrichtung Vorteile, da die Toroidalfeldspulen und die helikalen Windungen unabhängig voneinander betrieben werden können. Durch unterschiedliche Einstellung des Stromes in den Spulen kann das Verhältnis B_θ/B_ϕ in weiten Bereichen variiert werden.

Ein Nachteil des klassischen Stellarators ist die Verkettung der helikalen Windungen mit den Toroidalfeldspulen. Wenn bei großen Konfigurationen die helikalen Windungen in ein starkes toroidales Magnetfeld eingebettet sind, treten starke radiale Kräfte auf, die in ihrer Richtung von einem helikalen Leiter zum nächsten abwechseln. Das Abstützproblem der Helices ist in solchen Konfigurationen schwierig zu lösen, zumal wenig Platz für Strukturmaterial vorhanden ist. Sind zudem beim Stellarator-Reaktor die Spulen supraleitend, so ist die Wartung der Anlage außerordentlich erschwert. Für den Stellarator-Reaktor erscheint deshalb ein modularer Aufbau des Spulensystems unerlässlich. Diese Forderung wird zusätzlich durch die Notwendigkeit erhärtet, daß das innenliegende Blanket, in dem die Energiekonversion stattfindet und in dem Tritium erbrütet wird, zugänglich und auswechselbar sein muß.

Ein *modularer Stellarator* ist dadurch gekennzeichnet, daß er aus einzelnen Spulen aufgebaut ist, die zwar in poloidaler Richtung, nicht jedoch in toroidaler Richtung geschlossen sind. Zur Erzeugung der Feldkomponente B_θ sind die Einzelspulen im

* Im Gegensatz zum klassischen Stellarator ist die Stromrichtung im "Torsatron" in allen helikalen Windungen gleichgerichtet [8].

allgemeinen nichtebenen und so angeordnet, daß die lateralen Auslenkungen von Spule zu Spule mit einem gewissen Steigungswinkel gegeneinander verschoben sind. Da diese Spulen naturgemäß nur relativ kleine laterale Auslenkungen besitzen können, besteht die Möglichkeit, das Spulensystem in toroidaler Richtung aus Segmenten aufzubauen (modularer Aufbau). Eine natürliche Modularisierung ist bereits durch die Feldtopologie vorgegeben, da das Magnetfeld im allgemeinen in toroidaler Richtung periodisch aufgebaut ist, d.h. es besteht aus mehreren toroidalen Feldperioden. Eine weitere Segmentierung der Feldperioden ist im allgemeinen möglich.

Modulare Stellaratoren können in 2 Klassen aufgeteilt werden:

- Konfigurationen mit helikal umlaufender magnetischer Achse, siehe Bild 3;
- Konfigurationen mit nahezu kreisförmiger magnetischer Achse, siehe Bild 4.

Konfigurationen mit helikal umlaufender Achse (HELIAC), bestehend aus einem zentralen Leiter und helikal angeordneten Kreisspulen, wurden in [10] behandelt. Im IPP in Garching wurde gezeigt, daß eine Modularisierung des Spulensystems möglich ist [11] (siehe Bild 3). Beim HELIAC-Typ überwiegt die poloidale Komponente $\ell = 1$. Beim W7AS-Typ mit nahezu kreisförmiger magnetischer Achse (AS = Advanced Stellarator) überwiegen dagegen die poloidalen Komponenten $\ell \geq 2$. Durch eine geschickte Formgebung der modularen Spulen erhält man eine im Hinblick auf den magnetischen Einschluß optimierte Kombination von $\ell = 0, 1, 2, 3$ -Termen [9]. Auf diese Weise werden die sekundären Plasmaströme im Vergleich zum klassischen Stellarator reduziert [12], und die Stabilität der Plasmasäule wird verbessert. Zwischen den Klassen sind auch Kombinationen möglich, die einen guten magnetischen Einschluß versprechen. Beispiele dafür sind der in [13] beschriebene HELIAS mit einer geringfügig helikalen magnetischen Achse, sowie Konfigurationen mit indentierten (bohnenförmigen) Spulen und einer nahezu planaren magnetischen Achse [14].

Einfache $\ell = 1$ Systeme können bereits durch ebene Spulen, deren Mittelpunkte auf einer helikal umlaufenden Achse angeordnet sind, erreicht werden. Auch $\ell = 2$ und $\ell = 3$ Systeme können durch ebene Spulen erzeugt werden; dabei müssen die einzelnen Spulen elliptisch oder triangular geformt sein [15]. Der Grad der Helizität (Rotationstransformation ι , siehe Abschnitt 2.1.2.) des magnetischen Feldes, der durch solche ebenen Spulen erreicht werden kann, ist jedoch relativ klein. Um die Rotationstransformation zu vergrößern, ist die Verwendung von nichtebenen Spulen erforderlich [16].

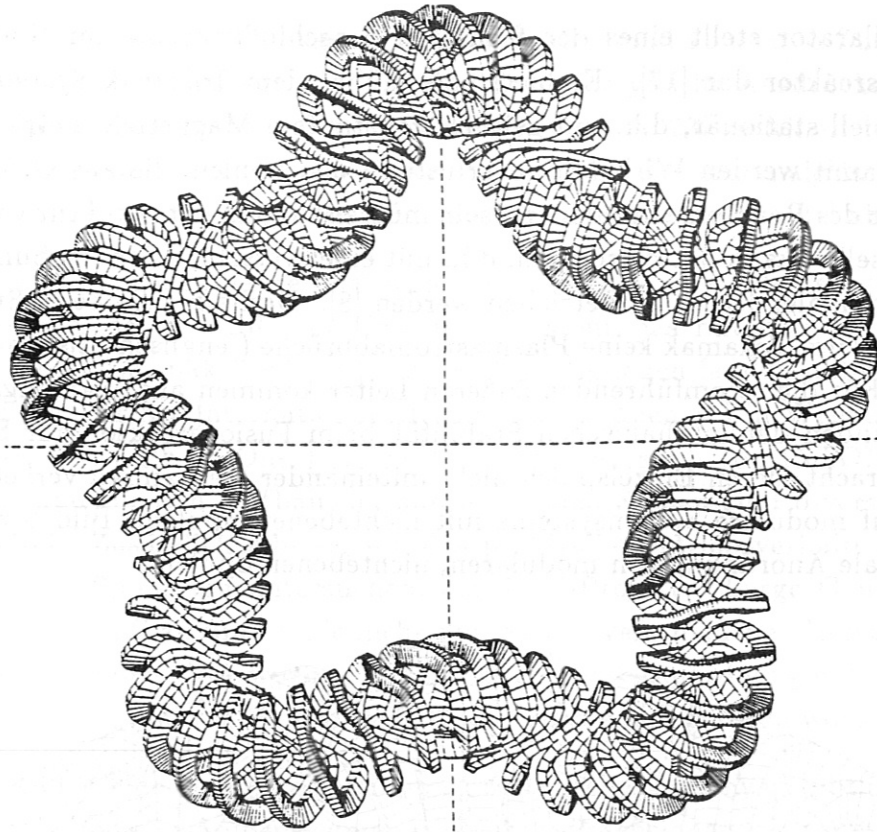


Bild 3: Modulares Stellarator-Spulensystem vom HELIAC-Typ, 5 Feldperioden mit je 14 Spulen, insgesamt 70 Spulen.

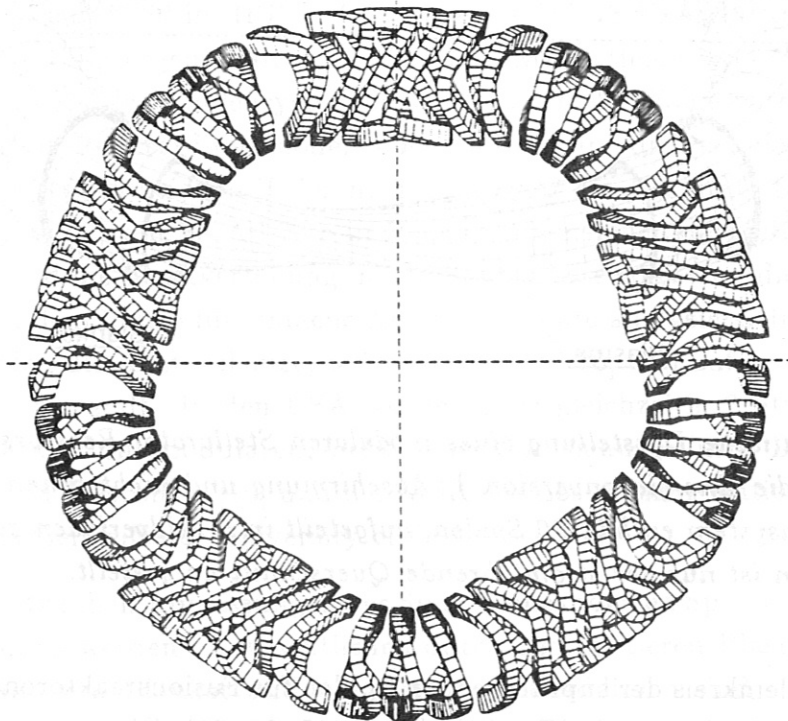


Bild 4: Modulares Stellarator-Spulensystem vom W7AS-Typ, 5 Feldperioden mit je 9 Spulen, insgesamt 45 Spulen.

Der Stellarator stellt eines der frühesten Einschlußkonzepte im Hinblick auf einen Fusionsreaktor dar [17]. Er bietet gegenüber dem Tokamak Systemvorteile, da er prinzipiell stationär, d.h. mit zeitlich konstantem Magnetfeld betrieben werden kann. Damit werden Wirbelstromverluste in den Spulen, die aus Gründen der Energiebilanz des Reaktors supraleitend sein müssen, und in der Struktur vermieden. Das Plasma selbst kann nettostromfrei, d.h. mit einer verschwindenden Summe aller Ströme in toroidaler Richtung betrieben werden [8]. Deshalb sind beim Stellarator im Gegensatz zum Tokamak keine Plasmastromabbrüche (englisch: disruptions) zu befürchten. Für die stromführenden äußeren Leiter kommen aus Wartungsgründen und aus Gründen der mechanischen Stabilität beim Fusionsreaktor nur Spulensysteme in Betracht, deren Einzelspulen nicht miteinander mechanisch verkettet sind. Das führt auf modulare Spulensysteme mit nichtebenen Spulen. Bild 5 zeigt eine solche toroidale Anordnung von modularen, nichtebenen Spulen.

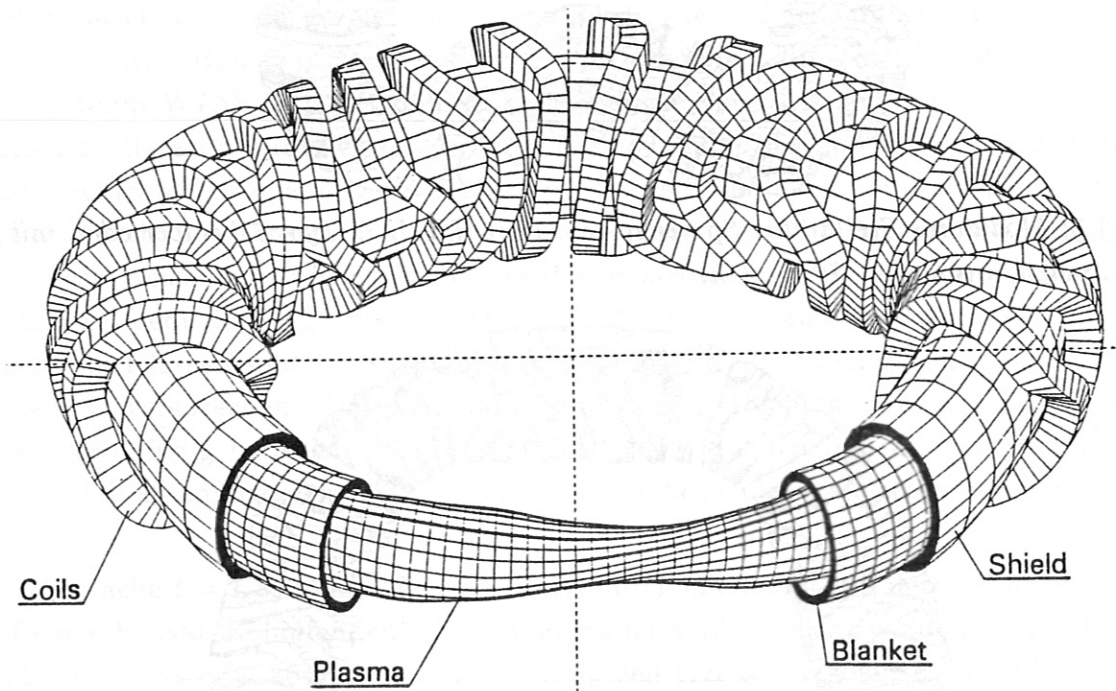


Bild 5: Schematische Darstellung eines modularen Stellarator-Reaktors mit Plasma, Blanket (für die Energiekonversion), Abschirmung und nichtebenen Spulen. Das gesamte Spulensystem enthält 30 Spulen, aufgeteilt in 5 Feldperioden zu je 6 Spulen. Von den Spulen ist nur der stromführende Querschnitt dargestellt.

Zum Problemkreis der supraleitenden Spulen für Fusionsreaktoren wurde bisher eine Vielzahl von Arbeiten veröffentlicht [7, 18, 19, 20, 21]. Die meisten Arbeiten befassen sich mit ebenen Spulen, wie sie beim axialsymmetrischen Tokamak verwendet werden. In der Arbeit [21] wurden für den Tokamak Spulen in D-Form als optimal

vorgeschlagen, da dann die Biegemomente reduziert und konstante Zugspannungen in den Spulen erzeugt werden. In [22] sind dazu analytische Ausdrücke für die magnetischen Kräfte angegeben. Die Ergebnisse werden in [23] verfeinert für reale Spulensysteme mit endlichen Querschnittsabmessungen. Weitere analytische Resultate hinsichtlich diverser Systemgrößen sind für "ideale" D-Spulen in [24] abgeleitet.

In den vergangenen Jahren hat sich eine internationale Arbeitsgruppe aus Vertretern Japans, der UdSSR, der USA und Westeuropas mit dem INTOR-Projekt (International Tokamak Reaktor) befaßt. Die Tagungen fanden unter der Schirmherrschaft der IAEA (International Atomic Energy Agency) in Wien statt. In dem Abschlußbericht (Phase One) [7] wird das Spulensystem von INTOR ausführlich behandelt, und für den Aufbau der supraleitenden Spulen sind diverse Vorschläge ausgearbeitet. Zusätzlich gibt es, um das praktische Betriebsverhalten von großen supraleitenden Spulen zu untersuchen, das LCT-Projekt (Large Coil Task) [25]. Sechs in ihrem Aufbau unterschiedliche Spulen von verschiedenen Herstellern in Europa, Japan und den USA wurden in der Experimentieranordnung in Oak Ridge TN (USA) installiert, und die Testphase ist inzwischen abgeschlossen worden.

Während es eine umfangreiche Literatur zur Stellaratorphysik gibt (Übersicht in [26]), sind Stellarator-Spulensysteme in Reaktordimensionen mit modularen, nichtebenen Spulen bisher nur vereinzelt untersucht worden. Nachdem das Prinzip von modularen, nichtebenen Stellarator-Spulensystemen in [16] erstmals 1973 gezeigt wurde, begann man 1980 im IPP in Garching das W7AS-Experiment zu erarbeiten [12]. In [27] sind die Eigenschaften des Vakuum-Magnetfeldes von W7AS beschrieben und in [28] ist das Spulensystem behandelt. In der Folge wurde das W7AS-Spulensystem zu Reaktordimensionen hochskaliert, um die technischen Probleme eines solchen Systems zu identifizieren. In [18] sind die Resultate für unterschiedliche Spulensysteme vom W7AS-Typ in Reaktordimensionen dargestellt. Es wurden u.a. die Feld- und die Kraftverteilung in den Spulen berechnet und die mechanischen Spannungen in den Spulen für einfache Abstützkonzepte analysiert. In den folgenden Arbeiten wurden die Abstützkonzepte komplexer [29, 30] und auf verschiedene Konfigurationen angewandt. In den USA wurden etwa gleichzeitig 2 Studien für einen Stellarator-Reaktor mit modularen, nichtebenen Spulen ausgeführt: Der UWTOR-M der University of Wisconsin [19] und der MSR des Los Alamos National Laboratory in Zusammenarbeit mit der University of California [31].

Die geometrischen Abmessungen der Spulen eines solchen Spulensystems mit Reaktordimensionen werden im wesentlichen durch den mittleren Plasmaradius r_p , zu dem die Dicken von Blanket und Abschirmung zu addieren sind (siehe Bild 5), und durch den Spulenstrom I_c , der zur Erzeugung des magnetischen Feldes auf der Plasmaachse erforderlich ist, bestimmt. Beim Fusionsplasma ist nach heutigem Kenntnisstand [32] mit einem Plasmaradius $r_p = 1 - 2 m$ zu rechnen [18, 19].

Berücksichtigt man Blanket und Abschirmung, erhält man einen mittleren Spulenradius $a = 3.0 - 5.5 m$. Den Spulenquerschnitt A_c einer Spule kann man abschätzen, wenn man von einer magnetischen Flußdichte auf der Plasmaachse von $B_0 = 5 T$ ausgeht. Bei einem großen Torusradius von $R_0 = 20 m$ und einer Spulenanzahl von $N = 30$ erhält man einen Gesamtstrom von $I_c = 16.7 MA$. Es ergeben sich also Spulenquerschnitte von $A_c \approx 1 m^2$, bei mittleren Stromdichten von $j_c = 16 MA/m^2$ in den Spulen. Diese Zahlen zeigen bereits, daß die stromtragenden Spulen mit Volumina von $V_c = 20 - 40 m^3$ außerordentlich groß sind. Nichtebene Spulen dieser Größenordnung wurden bisher noch nicht gebaut*; sie bedeuten technisches Neuland.

Typische Parameterbereiche für Stellarator-Spulensysteme mit Reaktordimensionen sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

- Großer Torusradius	R_0	15 - 25 m
- Mittlerer Plasmaradius	r_p	1 - 2 m
- Mittlerer Spulenradius	a	3.0 - 5.5 m
- Spulenquerschnitt	A_c	$\sim 1.0 m^2$
- Spulenvolumen	V_c	20 - 40 m^3
- Spulenanzahl	N	20 - 60
- Gemittelte Stromdichte	j_c	10 - 25 MA/m^2
- Gesamt-Spulenstrom	I_c	10 - 30 MA
- Durchflutung	$N \cdot I_c$	400 - 600 MA
- Magn. Flußdichte auf der Plasmaachse	B_0	4 - 7 T
- Max. magn. Flußdichte an den Spulen	B_M	8.5 - 12 T
- Fusionsleistung	P_F	0.4 - 4 GW
- Gespeicherte magnetische Energie	E_m	60 - 240 GJ

Die stromtragenden Spulen sind gemäß $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$ mechanischen Kraftwirkungen ausgesetzt. Aufgrund der hohen Stromdichte und der großen magnetischen Flußdichte im Spulenbereich sind die Spulen bereits im statischen Fall mechanisch außerordentlich stark belastet. Das Maximum der magnetischen Kraftdichte in den Spulen kann Werte von etwa $300 MN/m^3$ erreichen. Dadurch treten in den Spulen mechanische Spannungen auf, die den magnetischen Kräften in jedem Volumenelement das Gleichgewicht halten. Die mechanische Spannungen dürfen dabei nicht die zulässigen Grenzwerte der Materialien überschreiten.

* Die größten bisher gebauten nichtebenen, supraleitenden Spulen sind die Yin-Yang-Spulen für die Endverschlüsse der Spiegelmaschine MFTF mit einem großen Radius von 2.5 m und einem Gesamt-Spulenstrom von 8 MA [20].

1.3. Problemstellung und Ziel der Arbeit

Im Interesse eines wirtschaftlich arbeitenden Fusionsreaktors wird eine hohe Fusions-Leistungsdichte p_f angestrebt. Diese ist abhängig von den Plasmaparametern und dem Betrag der magnetischen Flußdichte im Plasma ($p_f \sim \beta^2 B^4$ [3]). Dabei bezeichnet β allgemein das Verhältnis von Plasmadruck p zum Magnetfeld-
druck $B_0^2/2\mu_0$; β ist also der normierte Plasmadruck. Der Plasmadruck p ist eine Funktion der Dichte und der Temperatur des Plasmas. Es kommt demnach darauf an, die beiden Größen β und B so weit wie möglich zu steigern. Der normierte Plasmadruck β ist jedoch wegen der Gefahr von Plasmainstabilitäten beschränkt. Man kann zwar beim Stellarator durch spezielle Magnetfeldtopologien die Bedingungen für den stabilen Plasmaeinschluß, z.B. durch Reduktion der sekundären Plasmaströme, verbessern und damit die β -Grenze erhöhen. Erfolgsbeispiele für die Forschungen auf diesem Gebiet sind der "Advanced Stellarator" [9,12] und die in [13] beschriebene HELIAS-Konfiguration. Die theoretischen Modellrechnungen zur β -Grenze bedürfen jedoch der Verifikation durch laufende und künftige Stellarator-Experimente. Für den Fusionsreaktor wird ein mittleres β für den stabilen Plasmaeinschluß von 5% angestrebt. Die Erhöhung der β -Grenze, die man als plasmaphysikalische Optimierung bezeichnen kann, ist nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Gegenstand dieser Arbeit ist die technologische Optimierung von modularen, nichtebenen Stellarator-Spulensystemen. Dabei soll unter der technologischen Optimierung allgemein verstanden werden, daß der Betrag der magnetischen Flußdichte im Plasmabereich gesteigert wird. Da die magnetische Flußdichte im Spulenbereich linear mit B_0 ansteigt, der Energieinhalt des magnetischen Feldes, die magnetischen Kräfte und die mechanischen Spannungen in den Spulen mit B_0^2 anwachsen, diese Größen jedoch durch die Art der verwendeten Materialien und deren zulässige Beanspruchungen beschränkt sind, kommt es darauf an, daß diese Größen für einen festen Wert B_0 minimiert werden. Das technologische Optimum ist dann erreicht, wenn unter Beachtung der Randbedingungen und Bewertung der einzelnen Größen ein resultierendes Minimum erzielt wird. Zwischen der plasmaphysikalischen und der technologischen Optimierung kann es in dem gewählten Parameterbereich zum Zielkonflikt kommen, so daß die endgültigen Parameter eines konkreten Spulensystems im Wege des Kompromisses gefunden werden müssen.

Die Aufgabenstellung dieser Arbeit ist es, Studien an modularen, nichtebenen Stellarator-Spulensystemen durchzuführen. Die Untersuchungen werden an L2-Spulensystemen mit 5 toroidalen Feldperioden, d.h. einem standardisierten Modell mit gleichartigen Spulen der toroidalen Periodizität $M = 5$ und der poloidalen Periodizität $\ell = 2$, und an einem Spulensystem vom W7AS-Typ, genannt ASRA6C, das eine Überlagerung von $\ell = 0, 1, 2, 3$ -Termen enthält, vorgenommen. Die Topologie des Magnetfeldes im Plasmaraum stellt beim L2-Stellarator hinsichtlich der

Einschlußeigenschaften für das Plasma kein Optimum dar, da die β -Grenze relativ niedrig ist. Für die Fragen der technologischen Optimierung des Systems ist das aber nicht wesentlich. Das Spulensystem ASRA6C arbeitet dagegen bei einer höheren Rotationstransformation ι , und die sekundären Plasmaströme sind reduziert. Die Magnetfeldtopologie ist in der Weise optimiert, die für den "Advanced Stellarator" kennzeichnend ist [9]. Die β -Grenze für den stabilen Plasmaeinschluß liegt hier höher als beim L2-Stellarator, sie erreicht allerdings nicht den für Fusionsreaktoren erwünschten Wert von 5%.

Bei den Parameterstudien am L2-Stellarator werden der große Torusradius R_0 , der Spulenradius a , die Anzahl N der Spulen des Systems, der Spulenquerschnitt $A_c = h \cdot d$, das Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts $A_q = h/d$, sowie die toroidale Spulenauslenkung c aus der Ebene $\varphi = const.$ variiert (siehe Bild 1 und Bild 5). Außerdem werden simultane Parametervariationen unter Konstanthaltung bestimmter Größenverhältnisse vorgenommen.

Als Kenngrößen für vergleichende Beurteilungen werden in diesem Parameterraum

- die maximale magnetische Flußdichte im Spulenbereich,
- der magnetische Energieinhalt des Spulensystems,
- die magnetischen Kräfte und
- die mechanischen Spannungen in den Spulen

berechnet. Diese Größen werden im folgenden als Systemgrößen bezeichnet. Zur Berechnung der Systemgrößen werden Programmsysteme benutzt, die numerische Methoden anwenden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, optimale Bereiche für die genannten Systemgrößen in dem gewählten Parameterraum zu finden. Die numerischen Resultate werden mit analytischen Näherungsformeln für die Systemgrößen verglichen. Aus den errechneten Daten werden die Zusammenhänge zwischen wichtigen Systemgrößen eines Spulensystems ermittelt, z.B. zwischen dem magnetischen Energieinhalt des Spulensystems und den mechanischen Spannungen in den Spulen.

1.4. Gliederung der Arbeit

Die ersten beiden Kapitel dieser Arbeit sind einführende Kapitel. Sie dienen dazu, die Problemstellung und das Arbeitsumfeld zu umreißen und folgerichtig auf das Thema der modularen Stellarator-Spulensysteme mit nichtebenen Spulen hinzuführen. Im Kapitel 2. werden die wichtigsten Begriffe des magnetischen Einschusses erläutert. Schließlich wird in kompakter Form die analytische Beschreibung des geraden Stellaratorfeldes gegeben, wie sie aus der Literatur wohlbekannt ist. Die Ableitung der zugehörigen erzeugenden Stromverteilung zeigt, daß modulare Spulensysteme zur Erzeugung helikaler Magnetfelder möglich sind.

Die Kapitel 3. bis 6. bilden den Kern dieser Arbeit. In den Kapiteln 3. und 4. wird wegen der großen Mannigfaltigkeit der Stellarator-Konfigurationen von konkreten Systemen abstrahiert und die Betrachtung auf L2-Spulensysteme beschränkt. In dem Kapitel 3. werden der magnetische Energieinhalt und die magnetische Flußdichte im Spulenbereich, die magnetischen Kräfte und die mechanischen Spannungen in den Spulen mit Hilfe von numerischen Methoden in dem gewählten Parameterraum systematisch untersucht. Um die numerischen Berechnungen zu kontrollieren, werden sie mit analytischen Näherungen verglichen, die in der Arbeit [37] für die Systemgrößen abgeleitet worden sind. Ferner wird mit Hilfe des Virialtheorems der Zusammenhang zwischen der gespeicherten magnetischen Energie des Spulensystems und den mechanischen Spannungen in den Spulen hergestellt.

Im Kapitel 4. werden simultane Parametervariationen unter Konstanthaltung des Spulenaspektverhältnisses $A_m = R_0/a$ und des Verhältnisses a/h der Spulen für die genannten Systemgrößen durchgeführt. Die Ergebnisse werden mit den in [37] abgeleiteten analytischen Lösungen verglichen.

Kapitel 5. enthält die Optimierung eines konkreten Stellarator-Spulensystems vom W7AS-Typ [12]. Die magnetischen Eigenschaften dieser Konfiguration werden beschrieben, die wichtigsten Daten werden berechnet und mit den Ergebnissen der Parameterstudien von Kapitel 3. verglichen. Abschließend werden die Systemgrößen dieser Konfiguration für die Parameter $A_c = h \cdot d$ und $A_q = h/d$ optimiert.

Kapitel 6. gibt schließlich in einer Zusammenfassung die Beschreibung und Bewertung der Untersuchungsergebnisse.

Die Kapitel 7. bis 9. bilden den Anhang dieser Arbeit und enthalten die theoretischen Grundlagen, das Literaturverzeichnis und das Verzeichnis der Formelzeichen.

2. Magnetischer Einschluß

2.1. Kenngrößen helikaler Magnetfelder

In diesem Abschnitt werden einige wichtige Begriffe, die für den magnetischen Einschluß von Bedeutung sind, erläutert. Es handelt sich um eine Zusammenfassung von Darstellungen, wie sie in der Literatur verstreut zu finden sind (siehe vor allem in [16, 33, 34]).

2.1.1. Magnetische Flächen

Die Differentialgleichungen der magnetischen Feldlinien lauten in krummlinigen, orthogonalen Koordinaten x_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\frac{\sqrt{g_{11}} dx_1}{B_1} = \frac{\sqrt{g_{22}} dx_2}{B_2} = \frac{\sqrt{g_{33}} dx_3}{B_3}. \quad (2,1)$$

Dabei sind die B_i die physikalischen Komponenten der magnetischen Flußdichte \vec{B} , und die g_{ii} sind die Komponenten des Metriktensors, dessen Linienelement ds aus der Beziehung $(d\vec{s})^2 = \sum_i \sum_j g_{ij} dx_i dx_j$ folgt. In Zylinderkoordinaten ρ, φ, ϑ lautet (2,1)

$$\frac{d\rho}{B_\rho} = \frac{\rho d\varphi}{B_\varphi} = \frac{dz}{B_z}. \quad (2,2)$$

In einer toroidalen Anordnung spannt die einzelne helikale Feldlinie bei vielen Umläufen um die Torusachse im allgemeinen eine schlauchförmige Fläche auf. Diese *magnetische Fläche* kann durch die Skalarfunktion $\psi(\vec{x}) = \text{const.}$ beschrieben werden. Magnetische Feldlinien, die zu verschiedenen Flächen gehören, sind ineinandergeschachtelt und enthalten in ihrem Innern die *magnetische Achse*. Alle magnetischen Feldlinien liegen auf magnetischen Flächen, so daß die Bedingung

$$\nabla\psi \cdot \vec{B} = 0 \quad (2,3)$$

erfüllt ist, d.h. der Gradient von ψ steht senkrecht auf der magnetischen Fläche.

Magnetische Flächen spielen eine wichtige Rolle bei der Betrachtung des magnetohydrodynamischen (MHD-) Gleichgewichts einer Plasmasäule, die in einem Magnetfeld \vec{B} eingeschlossen ist.

In der idealen MHD-Theorie ist ein Gleichgewichtszustand erreicht [33], wenn sich die Druckkraftdichte ∇p und die magnetische Kraftdichte $\vec{j}_p \times \vec{B}$ die Waage halten. Dann gilt also

$$\nabla p = \vec{j}_p \times \vec{B}. \quad (2,4)$$

Dabei ist p der hydrodynamische Druck des Plasmas und \vec{j}_p die Plasmastromdichte. Gleichung (2,4) und die MAXWELLSchen Gleichungen für den stationären Fall

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_p, \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\
\operatorname{div} \vec{j}_p &= 0
\end{aligned} \tag{2,5}$$

bilden die Bedingungen für das MHD-Gleichgewicht. Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0, \tag{2,6}$$

$$\vec{j}_p \cdot \nabla p = 0. \tag{2,7}$$

Gleichung (2,6) sagt aus, daß \vec{B} und $\operatorname{grad} p$ orthogonal zueinander sind, d.h. die Flächen konstanten Drucks stimmen mit den magnetischen Flächen überein. In (2,7) zeigt sich, daß die Plasmastromdichte \vec{j}_p überall parallel zu den Flächen konstanten Drucks verläuft. Mit anderen Worten: Die \vec{j}_p - und \vec{B} -Linien liegen in Flächen mit $p = \text{const.}$ Diese Flächen sind die magnetischen Flächen $\psi = \text{const.}$, da es wegen $\nabla p \perp \vec{B}$ keinen Gradienten von p in Richtung der magnetischen Flächen gibt. Die \vec{j}_p - und \vec{B} -Linien zusammen ergeben ein Netz, das die magnetischen Flächen überzieht.

2.1.2. Rotationstransformation

In quasitoroidalen Koordinaten ρ, φ, ϑ (Bild 1) wird das helikale magnetische Feld durch die toroidale und die poloidale Feldkomponente B_φ und B_ϑ beschrieben. Betrachtet man eine Schnittfläche, die normal zur magnetischen Achse liegt, so durchstößt eine Feldlinie bei jedem Umlauf um die Torusachse einmal diese Fläche. Bei jedem toroidalen Umlauf k kann eine poloidale Winkeldifferenz ι_k festgestellt werden, so daß sich bei N Umläufen der Gesamtbetrag des Winkels zu $\sum_{k=1}^N \iota_k$ ergibt. Ein mittlerer Wert wird durch

$$\iota = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \iota_k \tag{2,8}$$

definiert und als *Rotationstransformation* ι bezeichnet [34]. Die Rotationstransformation ι beschreibt die Helizität des magnetischen Feldes.

Es gibt eine zweite Definition der Rotationstransformation, die den magnetischen Fluß zugrunde legt. Wenn innerhalb einer magnetischen Fläche ψ der toroidale Fluß als $\Phi(\psi)$ und der poloidale Fluß als $X(\psi)$ bezeichnet wird, dann ist die Rotationstransformation ι durch

$$\iota = 2\pi \frac{dX(\psi)}{d\Phi(\psi)} \tag{2,9}$$

gegeben [34]. Im allgemeinen ist ι eine Funktion der magnetischen Fläche ψ .

2.1.3. Verscherung

Wenn die Rotationstransformation ι von ψ , d.h. vom Radius ρ abhängt, variiert die Steigung der Feldlinien von Fläche zu Fläche. Die Ableitung von ι nach der radialen Koordinate ρ wird als Verscherung Θ bezeichnet [33]:

$$\Theta = \frac{\rho^2}{2\pi R_0} \cdot \frac{d\iota}{d\rho}. \quad (2, 10)$$

2.1.4. Magnetische Mulde

Mit Hilfe des Volumens V , das von einer magnetischen Fläche ψ endlicher Dicke gebildet wird, und des in diesem Volumen enthaltenen magnetischen Flusses Φ kann man das *spezifische Volumen* V' definieren [33]:

$$V' = \frac{dV}{d\Phi}. \quad (2, 11)$$

Dieses spezifische Volumen ist identisch mit dem Linienintegral der reziproken magnetischen Flußdichte längs einer magnetischen Feldlinie auf der magnetischen Fläche ψ , wenn sich die Feldlinie nach einem toroidalen Umlauf schließt, unabhängig davon, welche Feldlinie i betrachtet wird [33]:

$$V' = \oint \frac{dl}{B}. \quad (2, 12)$$

Wenn die magnetischen Feldlinien nicht geschlossen sind, kann das spezifische Volumen folgendermaßen definiert werden:

$$V' = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_N \frac{dl}{B}. \quad (2, 13)$$

Das spezifische Volumen V' kann dann als ein Maß für den Mittelwert von $1/B$ auf einer magnetischen Fläche ψ betrachtet werden. Wenn V' mit zunehmendem Radius ρ abfällt, d.h. wenn B im Mittel zum Rande hin ansteigt, dann liegt eine sogenannte mittlere Minimum-B-Region vor, die eine wichtige Bedingung für die *Stabilität* des Plasmas ist. Wird der Wert von V' auf der magnetischen Achse mit V'_0 und auf einer äußeren magnetischen Fläche mit V'_a bezeichnet, dann ist die *magnetische Mulde* $V'' = \Delta V'/V'$ durch

$$V'' = \frac{\Delta V'}{V'} = - \frac{V'_0 - V'_a}{V'_0} \quad (2, 14)$$

definiert.

2.2. Magnetische Struktur des geraden Stellaratorfeldes

Im folgenden wird in kompakter Form eine zusammenhängende analytische Beschreibung eines Stellarator-Magnetfeldes einschließlich der erzeugenden Stromverteilung gegeben, wie sie aus der Literatur wohlbekannt ist [16, 34]. Zur quantitativen Bestimmung dieser magnetischen Struktur wird der Torus durch einen langen Zylinder approximiert. Das entspricht einer toroidalen Konfiguration mit dem Aspektverhältnis $A_m = R_0/a \rightarrow \infty$. Dieser "gerade Stellarator" hat ein magnetisches Feld mit helikaler Symmetrie. Aus diesem Grunde ist eine analytische Behandlung möglich. Das Magnetfeld kann durch Ringspulen in Kombination mit helikalen Windungen endlicher Steigung oder durch nichtebene Spulen erzeugt werden. Führt man Zylinderkoordinaten ρ, φ, z ein, so hängt das magnetische Feld nur von ρ und $\theta = \varphi - \alpha z$ ab, wobei $\alpha = 2\pi/L$ die Steigung der helikalen Windungen beschreibt ($L =$ Länge einer Feldperiode in z -Richtung).

Fließt innerhalb des Zylinders kein Strom ($j = 0$), so läßt sich das magnetische Feld wegen $\text{rot}\vec{B} = 0$ als Gradient eines skalaren magnetischen Potentials Φ_B darstellen:

$$\vec{B} = \nabla\Phi_B. \quad (2,15)$$

Wegen $\text{div}\vec{B} = 0$ muß das Potential die LAPLACEgleichung erfüllen

$$\nabla^2\Phi_B = 0. \quad (2,16)$$

Die Lösung von (2,16) für den geraden Stellarator lautet [34]:

$$\Phi_B = B_0 z + \frac{1}{\alpha} \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} I_{\ell}(\ell\alpha\rho) \sin \ell(\varphi - \alpha z) \quad \text{für } \alpha > 0. \quad (2,17)$$

Dabei ist B_0 der Betrag des axialen magnetischen Feldes in z -Richtung, die b_{ℓ} sind die noch zu bestimmenden Integrationskonstanten und die I_{ℓ} sind die modifizierten BESSELFunktionen erster Art mit der Ordnung ℓ .

Die Feldkomponenten erhält man mit Hilfe von (2,17) zu

$$B_{\rho} = \frac{\partial\Phi_B}{\partial\rho} = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \ell I'_{\ell}(\ell\alpha\rho) \sin \ell(\varphi - \alpha z),$$

$$B_{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi_B}{\partial\varphi} = \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \frac{\ell}{\alpha\rho} I_{\ell}(\ell\alpha\rho) \cos \ell(\varphi - \alpha z),$$

$$B_z = \frac{\partial \Phi_B}{\partial z} = B_0 - \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \ell I_{\ell}(\ell \alpha \rho) \cos \ell(\varphi - \alpha z). \quad (2,18)$$

Dabei ist I'_{ℓ} die Ableitung der modifizierten BESSELfunktion I_{ℓ} nach dem Argument. Stellt man das magnetische Feld \vec{B} mit Hilfe des Vektorpotentials \vec{A} entsprechend der Relation $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ dar, so ergibt sich, wenn man die Normierung $A_z = 0$ vornimmt [34], der Zusammenhang

$$\begin{aligned} B_{\rho} &= -\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_B}{\partial \rho}, \\ B_{\varphi} &= \frac{\partial A_{\rho}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_B}{\partial \varphi}, \\ B_z &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_{\varphi})}{\partial \rho} - \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial \Phi_B}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2,19)$$

Damit lauten die Komponenten des Vektorpotentials:

$$\begin{aligned} A_{\rho} &= -\frac{1}{\alpha^2 \rho} \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} I_{\ell}(\ell \alpha \rho) \sin \ell(\varphi - \alpha z), \\ A_{\varphi} &= B_0 \frac{\rho}{2} - \frac{1}{\alpha} \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} I'_{\ell}(\ell \alpha \rho) \cos \ell(\varphi - \alpha z), \\ A_z &= 0. \end{aligned} \quad (2,20)$$

Um die Gleichung der magnetischen Flächen $\psi(\vec{x}) = \text{const.}$ zu erhalten, benötigt man die Differentialgleichungen der magnetischen Feldlinien, die in Zylinderkoordinaten folgende Form haben

$$\frac{\partial \rho}{B_{\rho}} = \rho \frac{\partial \varphi}{B_{\varphi}} = \frac{\partial z}{B_z}. \quad (2,21)$$

Unter Verwendung von (2,3) und der Relation $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ und unter Berücksichtigung der helikalen Symmetrie, also

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2,22)$$

ergibt sich nach elementaren, aber umfangreichen Umformungen die Gleichung für die magnetischen Flächen

$$\psi = A_z + \alpha \rho A_{\varphi} = \alpha \rho A_{\varphi} = \text{const.} \quad (2,23)$$

Im folgenden soll nur *eine* harmonische Komponente* des magnetisches Feldes betrachtet werden. Die Gleichungen für das skalare Potential Φ_B und für die magnetischen Flächen ψ lauten in diesem Fall

$$\Phi_B = B_0 z + \frac{1}{\alpha} b_\ell I_\ell(\ell\alpha\rho) \sin \ell(\varphi - \alpha z), \quad (2, 24a)$$

$$\psi = \frac{B_0}{2\alpha} \left((\alpha\rho)^2 - \frac{b_\ell}{B_0} 2\alpha\rho I'_\ell(\ell\alpha\rho) \cos \ell(\varphi - \alpha z) \right). \quad (2, 24b)$$

Für kleine Werte von ρ (genauer: für $\ell\alpha\rho \ll 1$) gilt

$$I_\ell(\ell\alpha\rho) \approx \frac{1}{\ell!} \left(\frac{\ell\alpha\rho}{2} \right)^\ell,$$

$$I'_\ell(\ell\alpha\rho) \approx \frac{1}{2(\ell-1)!} \left(\frac{\ell\alpha\rho}{2} \right)^{\ell-1} \approx \frac{I_\ell(\ell\alpha\rho)}{\alpha\rho}.$$

Damit folgt aus (2,24b) für die magnetischen Flächen in der Ebene $z = 0$:

$$(\alpha\rho)^2 - \frac{b_\ell}{B_0} \frac{1}{(\ell-1)!} \left(\frac{\ell}{2} \right)^{\ell-1} (\alpha\rho)^\ell \cos \ell\varphi = \text{const.} \quad (2, 25)$$

Speziell für $\ell = 2$ ergibt sich

$$\rho^2 \cdot \left(1 - \frac{b_2}{B_0} \cos 2\varphi \right) = \text{const.} \quad (2, 26)$$

Gleichung (2,26) stellt für $|b_\ell/B_0| < 1$ Ellipsen dar, während sich für $|b_\ell/B_0| > 1$ Hyperbeln ergeben. Die magnetischen Flächen für $\ell = 1$, $\ell = 2$ und $\ell = 3$ Stellaratorfelder sind in Bild 6 dargestellt. Die singulären Punkte werden Separatrixpunkte genannt. Eine magnetische Fläche, die diesen Punkt enthält, heißt Separatrix.

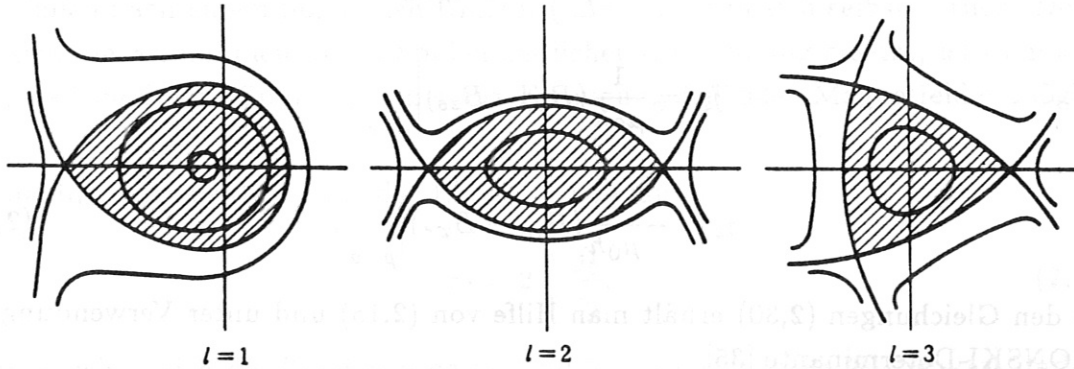


Bild 6: Querschnittsbilder magnetischer Flächen für $\ell = 1$, $\ell = 2$ und $\ell = 3$ Stellaratorfelder (entnommen aus [33]).

* Das Feld von ℓ Paaren dünner helikaler Leiter besteht zwar aus einer unendlichen Summe von harmonischen Komponenten, aber die Komponente mit $i = \ell$ ist dominant.

Es soll nun die Stromverteilung auf der Zylinderoberfläche mit dem Radius $\rho = a$ berechnet werden, die das helikalsymmetrische Feld innerhalb des Zylinders erzeugen kann. Dazu wird die LAPLACEgleichung im Gebiet innerhalb und außerhalb des Zylinders gelöst [16].

Im Bereich innerhalb des Zylinders gilt nach (2,17):

$$\Phi_{Bi} = B_0 z + \frac{1}{\alpha} \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell i} I_{\ell}(\ell \alpha \rho) \sin \ell(\varphi - \alpha z) \quad \text{für } \alpha > 0. \quad (2,27)$$

Die analoge Lösung für den Bereich außerhalb des Zylinders lautet

$$\Phi_{Be} = \frac{1}{\alpha} \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell e} K_{\ell}(\ell \alpha \rho) \sin \ell(\varphi - \alpha z) \quad \text{für } \alpha > 0. \quad (2,28)$$

Sie wird durch die modifizierten BESSELFunktionen zweiter Art K_{ℓ} dargestellt, weil das Feld im Unendlichen gegen Null gehen muß.

Die Koeffizienten $b_{\ell i}$ und $b_{\ell e}$ können gemäß der ersten MAXWELLSchen Gleichung aus der Randbedingung

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0 h} (\vec{n} \times (\vec{B}_i(a) - \vec{B}_e(a))) \quad (2,29)$$

an der stromtragenden Grenzschicht (Dicke $h \rightarrow 0$) bei $\rho = a$ bestimmt werden.

In Komponenten lautet (2,29):

$$\begin{aligned} 0 &= (B_{\rho i} - B_{\rho e})|_{\rho=a}, \\ j_{\varphi} &= \frac{1}{\mu_0 h} (B_{z i} - B_{z e})|_{\rho=a}, \\ j_z &= -\frac{1}{\mu_0 h} (B_{\varphi i} - B_{\varphi e})|_{\rho=a}. \end{aligned} \quad (2,30)$$

Aus den Gleichungen (2,30) erhält man Hilfe von (2,15) und unter Verwendung der WRONSKI-Determinante [35]

$$W\{K_{\ell}(x), I_{\ell}(x)\} = I'_{\ell}(x) K_{\ell}(x) - K'_{\ell}(x) I_{\ell}(x) = \frac{1}{x} \quad (2,31)$$

die folgenden Zusammenhänge:

$$b_{\ell e} = b_{\ell i} \frac{I'_{\ell}(\ell \alpha a)}{K'_{\ell}(\ell \alpha a)} \quad \text{für } \ell \geq 1, \quad \alpha > 0, \quad (2,32)$$

$$j_\varphi = j_z \alpha a \quad \text{für } \ell \geq 1, \quad \alpha > 0, \quad (2,33)$$

$$\mu_0 j_0 h = B_0, \quad j_0 := j_\varphi(\ell = 0) \quad \text{für } \ell = 0. \quad (2,34)$$

Für die Stromdichteverteilung kann also wegen (2,33) folgender Ansatz gemacht werden:

$$j_\varphi = j_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} j_\ell \alpha a \cos \ell(\varphi - \alpha z),$$

$$j_z = \sum_{\ell=1}^{\infty} j_\ell \cos \ell(\varphi - \alpha z). \quad (2,35)$$

Die Koeffizienten j_ℓ hängen von der Größe der Auslenkung der Stromlinien in z -Richtung auf dem Zylinder ab. Mit Hilfe der Stromdichtekomponenten erhält man durch Integration die Gleichungen für die Stromlinien, denn es gilt für $\rho = a$:

$$\frac{dz}{j_z} = a \frac{d\varphi}{j_\varphi}. \quad (2,36)$$

Die Integration ergibt, wenn wiederum *eine* dominante Komponente j_ℓ der Stromlinien betrachtet wird, in der Umgebung von $z = z_0$:

$$z = 2 \frac{a}{\ell} \frac{j_\ell}{j_0} \sin \ell(\varphi - \alpha(z - z_0)) + z_0. \quad (2,37)$$

Gleichung (2,37) für die Stromlinien ist eine nichtlineare Gleichung vom Typ $f(z, \varphi) = 0$. Sie zeigt eine periodische Struktur: Wegen $\theta = \varphi - \alpha z$ laufen die Stromlinien nach einem poloidalen Umlauf ($\Delta\theta = 2\pi$) in sich selbst zurück. Denkt man sich die Stromlinien durch Spulen endlicher Ausdehnung ersetzt, ist damit gezeigt, daß modulare Spulensysteme zur Erzeugung helikaler Magnetfelder möglich sind.

Die maximale Auslenkung aus der Ebene $z = z_0$ lautet:

$$z_\ell = 2 \frac{a}{\ell} \frac{j_\ell}{j_0}. \quad (2,38)$$

Damit ergeben sich die Koeffizienten $b_{\ell i}$ und $b_{\ell e}$, wenn man (2,38) benutzt und die Gleichungen (2,32-2,34) berücksichtigt, zu

$$b_{\ell i} = B_0 \ell z_\ell \alpha^2 a K'_\ell(\ell\alpha a), \quad (2,39)$$

$$b_{\ell e} = B_0 \ell z_\ell \alpha^2 a I'_\ell(\ell\alpha a), \quad (2,40)$$

für $\ell = 1, 2, 3, \dots$

Für die Feldstärkekomponenten im Innern des Zylinders ergibt sich

$$\begin{aligned}
 B_\rho &= B_0 \alpha^2 a \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2 z_\ell K'_\ell(\ell\alpha a) I'_\ell(\ell\alpha\rho) \sin \ell(\varphi - \alpha z), \\
 B_\varphi &= B_0 \frac{\alpha a}{\rho} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2 z_\ell K'_\ell(\ell\alpha a) I_\ell(\ell\alpha\rho) \cos \ell(\varphi - \alpha z), \\
 B_z &= B_0 \left(1 - \alpha^2 a \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2 z_\ell K'_\ell(\ell\alpha a) I_\ell(\ell\alpha\rho) \cos \ell(\varphi - \alpha z) \right). \quad (2,41)
 \end{aligned}$$

In der Praxis ist es nicht möglich, eine dichte Stromverteilung entsprechend (2,35) herzustellen, da der anregende Strom immer in Spulen mit endlicher geometrischer Ausdehnung lokalisiert ist. Zwischen den Spulen gibt es Lücken, so daß es zu magnetischen Streuflüssen kommt und das Feld eine Welligkeit (engl.: field ripple) aufweist. Die Approximation des Oberflächenstromes durch Spulen endlicher Ausdehnung erzeugt jedoch das gewünschte magnetische Feld im inneren Bereich des Zylinders um so genauer, je größer die Distanz zu den Spulen ist [16].

Geht man von der Konfiguration des "geraden Stellarators" zu einer toroidalen Anordnung über, dann verliert man die helikale Symmetrie. Aus diesem Grunde sind analytische Lösungen dann nicht mehr möglich. Numerische Verfahren zeigen jedoch, daß auch in diesem Falle magnetische Flächen, zumindestens in gewissen Bereichen nahe der magnetischen Achse, existieren, und daß es möglich ist, in diesen Bereichen eine Rotationstransformation, eine Verscherung und eine magnetische Mulde des Magnetfeldes zu erhalten. Außerhalb dieser Bereiche kann das magnetische Feld eine ergodische Struktur aufweisen.

3. Parameterstudien am modularen L2-Stellarator

3.1. Überblick

Wie in Kapitel 1. erläutert, eignet sich eine endliche Anzahl von stromtragenden Spulen in toroidaler Anordnung zum magnetischen Einschluß eines heißen Fusionsplasmas. In (2,37) wurde gezeigt, daß man das dafür erforderliche helikale Magnetfeld mit nichtebenen Spulen erzeugen kann. Aus ökonomischen Gründen ist beim Fusionsreaktor eine hohe Fusions-Leistungsdichte p_f erwünscht. Da diese stark vom Betrag des magnetischen Feldes im Plasma abhängt, versucht man die magnetische Flußdichte im Torusinnern so groß wie möglich zu machen. Nach heutigem Kenntnisstand wird eine magnetische Flußdichte auf der magnetischen Achse von $B_0 = 4 - 7 T$ angestrebt. Die erreichbare Flußdichte auf der Achse ist begrenzt u.a. durch die zulässige maximale magnetische Flußdichte in den Spulen. Diese ist zum einen bestimmt durch die Art des supraleitenden Materials und dessen kritische Größen*, zum anderen durch die zulässigen mechanischen Beanspruchungen der Spulen. Es kommt also darauf an, daß die Feldüberhöhung, d.h. das Verhältnis von maximaler magnetischer Flußdichte B_M im Spulenbereich zur Flußdichte B_0 auf der magnetischen Achse, so klein wie möglich ist.

Der magnetische Energieinhalt im Spulensystem, der von der Verteilung der magnetischen Flußdichte abhängt, stellt eine weitere wichtige Systemgröße dar. Die gespeicherte Energie des magnetischen Feldes ist eine integrale Größe. Einerseits ist sie dem Volumenintegral des Quadrates der magnetischen Flußdichte proportional, wobei über das Volumen des gesamten Raumes zu integrieren ist. Andererseits wird sie nach dem Virialtheorem gemäß (7,48) durch das Volumenintegral der mechanischen Spannungen im Spulensystem beschrieben, wobei über das Volumen des Spulensystems zu integrieren ist. Das bedeutet, daß die magnetische Energie dem Produkt aus den mittleren mechanischen Spannungen im Spulensystem und dem Spulenvolumen (einschl. Strukturmaterial) proportional ist. Eine Minimierung der Magnetfeldenergie bietet also technische und damit letztlich ökonomischen Vorteile. Ein weiterer vorteilhafter Teilaspekt einer minimalen gespeicherten magnetischen Energie ist die vereinfachte Entladungsprozedur des Systems im Falle von Störungen und Betriebsunterbrechungen.

*Die 3 Größen "kritische Feldstärke, kritische Temperatur und kritische Stromdichte" sind für die Eigenschaften eines Supraleiters kennzeichnend. Sie sind nicht unabhängig voneinander, d.h. es gibt kritische Wertetripel. Diese liegen auf der Grenzfläche in einem dreidimensionalen Parameterraum mit den Koordinaten B , T und j , die den supraleitenden Zustand vom normalleitenden Zustand trennt [3].

Die Speicherung von Energie im magnetischen Feld eines Spulensystems ist mit mechanischen Kraftwirkungen auf die stromtragenden Leiter verknüpft. Das Kreuzprodukt des Stromdichtevektors mit dem magnetischen Flußdichtevektor im Spulenbereich ergibt den Vektor der magnetischen Kraftdichteverteilung in den Spulen. Aufgrund der hohen Stromdichte und der daraus resultierenden großen magnetischen Flußdichte können die Spulen bereits im statischen Fall mechanisch außerordentlich stark belastet sein, da die mechanischen Spannungen den magnetischen Kräften in jedem Volumenelement das Gleichgewicht halten müssen. Die mechanischen Spannungen dürfen die zulässigen Grenzwerte der verwendeten Materialien nicht überschreiten.

Die magnetischen Kräfte in einer toroidalen Anordnung von stromtragenden Spulen sind so gerichtet, daß sie die Induktivität des Spulensystems zu vergrößern suchen. Anhand von (3,10) erkennt man, daß dies durch eine Vergrößerung des Spulenradius a und durch eine Verkleinerung des großen Torusradius R_0 erreichbar ist, d.h. die magnetischen Feldlinien versuchen sich zu verkürzen und ihren Abstand zu verbreitern. Damit folgt, daß auf die Einzelspule des Systems radiale Kräfte, die die Spule zu vergrößern trachten, und eine resultierende Kraft, die im wesentlichen auf die Torusachse hin gerichtet ist, wirken. Außerdem gibt es bei nichtebenen Spulen innerhalb einer Feldperiode laterale Kräfte zwischen den Spulen, die längs des Spulenumfangs variieren und die in ihrer Größe von der lokalen Spulenkrümmung und von dem Abstand zwischen den Spulen abhängen. Die Spulen einer toroidalen Spulenordnung bedürfen also einer mechanischen Abstützung, sowohl gegeneinander als auch gegen die Torusachse.

Die vier Systemgrößen *maximale magnetische Flußdichte im Spulenbereich, magnetischer Energieinhalt des Spulensystems, magnetische Kraftdichteverteilung bzw. magnetische Kräfte und mechanische Spannungsverteilung in den Spulen* hängen zum einen vom Achsenmagnetfeld B_0 , zum anderen von den geometrischen Parametern des Spulensystems und von der Anzahl N der Spulen ab. Die mechanische Spannungsverteilung in den Spulen ist außerdem von den Randbedingungen, d.h. von der Art der Abstützung und von der Materialzusammensetzung der Spulen einschließlich der Stützstruktur, abhängig. Im folgenden wird eine systematische Untersuchung der Systemgrößen im Parameterraum der geometrischen Größen und der Spulenzahl durchgeführt.

3.2. Aufgabenstellung und Berechnungsmethode dieses Kapitels

Die Parameterstudien werden an einem modularen Stellarator-Spulensystem mit der poloidalen Periodizität $\ell = 2$ (L2-Stellarator) durchgeführt. Die ebenen und nichtebenen Einzelspulen mit kreisförmiger Apertur sind auf einem Kreis mit dem großen Torusradius R_0 angeordnet. Die toroidale Periodizität beträgt $M = 5$. Elliptische oder anderweitig geformte Spulen werden nicht betrachtet, um die Variationsbreite nicht zu groß werden zu lassen.

Ausgangspunkt für die Berechnungen ist eine Konfiguration mit den folgenden Hauptdaten:

- Großer Torusradius	R_0	15 m
- Spulenradius	a	3.24 m
- Zahl der toroidalen Feldperioden	M	5
- Spulenzahl pro Feldperiode	n	10
- Gesamtanzahl der Spulen	N	50
- Zahl der poloidalen Feldperioden	L	2
- Gemittelte Stromdichte	j_c	18 MA/m ²
- Gesamt-Spulenstrom	I_c	10.8 MA
- Durchflutung	$N \cdot I_c$	540 MA
- Magn. Flußdichte auf der Plasmaachse	B_0	7.2 T

Diese Konfiguration ist von dem "Advanced Stellarator Burner" (ASB) abgeleitet, der Reaktoreigenschaften besitzt [29]. Die geometrischen Abmessungen sind die gleichen wie beim ASB. Bei einem Plasmaradius $r_p \approx 1$ m ist ausreichend Platz für ein Lithium-Blanket und die erforderliche Abschirmung zwischen Spuleninnenseite und Plasmarand vorhanden. Durch die Durchflutung wird eine mittlere magnetische Flußdichte $B_0 = 7.2$ T auf der magnetischen Achse erreicht, da für den idealen Torus

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I_c}{2 \pi R_0} \quad (3,1)$$

gilt.

Die Topologie des Magnetfeldes im Plasmaraum weist bei dieser Konfiguration allerdings keine guten Einschlußeigenschaften für das Plasma auf, da der L2-Stellarator nur eine relativ geringe Rotationstransformation ι hat. Für die Fragen zum Energieinhalt des Magnetfeldes, zur maximalen magnetischen Flußdichte an den Spulen und zu den magnetischen Kräften ist das aber nicht wesentlich. Bild 7 zeigt als Beispiel einen L2-Stellarator mit 5 toroidalen Feldperioden zu je 6 Spulen, also insgesamt 30 Spulen.

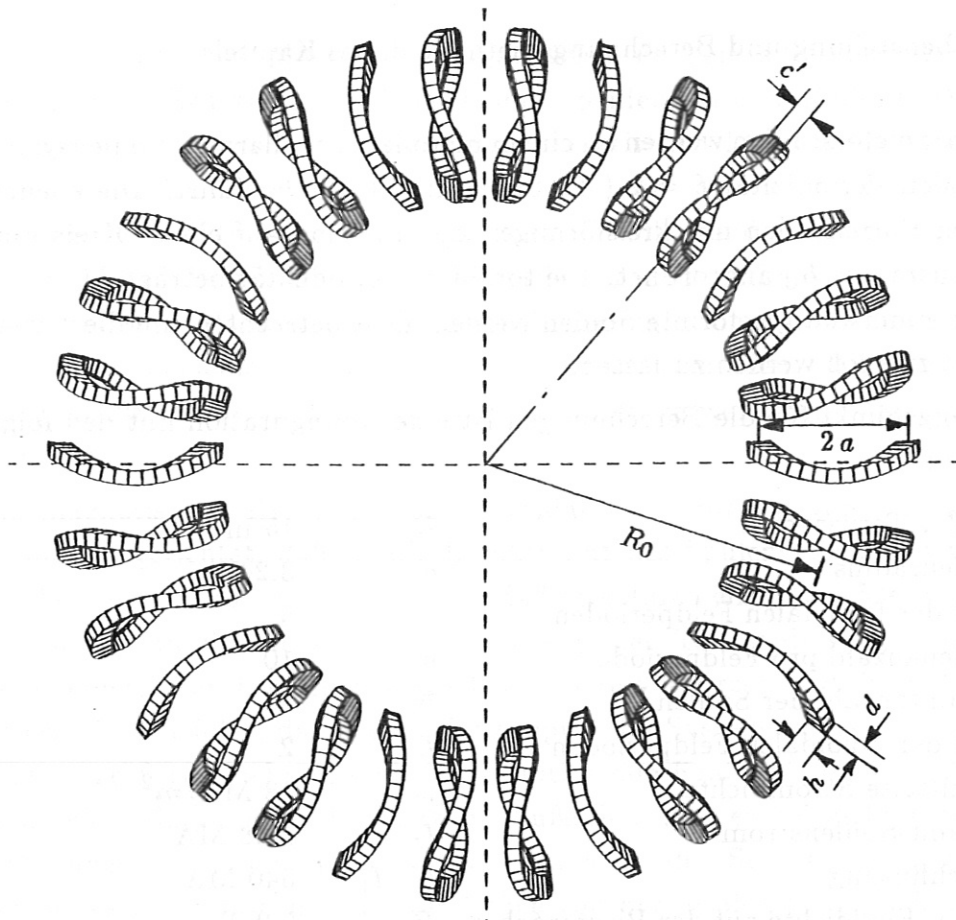


Bild 7: L2-Stellarator mit 30 nichtebenen Spulen der toroidalen Periodizität $M = 5$

Das Achsenmagnetfeld von $B_0 = 7.2 T$ liegt dem Betrage nach an der oberen Grenze des technisch möglichen Bereiches. Für die folgenden Parameterstudien ist das jedoch von untergeordneter Bedeutung, da es leicht möglich ist, die errechneten Daten auf einen anderen Bezugswert B_0 umzurechnen.

Die Untersuchung der Systemgrößen wird in Abhängigkeit von folgenden Parametern des Spulensystems durchgeführt:

- Großer Torusradius R_0
- Spulenradius a
- Spulenzahl N
- Spulenquerschnitt A_c
- Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts A_q
- Toroidale Spulenauslenkung c

Mit der Variation des großen Torusradius R_0 und des Spulenradius a wird zugleich das Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$ variiert. Die toroidale Spulenauslenkung c ist auf den großen Torusradius R_0 bezogen ($c = c'[m]/R_0[m]$) und stellt die maximale Auslenkung aus der Spulenebene dar.

Für die Berechnung der Systemgrößen in Abhängigkeit von den genannten Parametern des Spulensystems müssen numerische Verfahren angewendet werden. Eine analytische Behandlung ist wegen der *endlichen* Spulenanzahl und der *nichtebenen* Spulen nicht möglich. Für die Feldberechnung wird das EFFI-Programmsystem [36] verwendet. Dieses Programmsystem benutzt zur Berechnung der Feldgrößen einen Algorithmus, der auf einer Kombination von analytischer und numerischer Integration des BIOT-SAVARTschen Gesetzes gemäß (7,8) und der Beziehung für das Vektorpotential gemäß (7,7) basiert. In diesem Programmsystem wird vorausgesetzt, daß sich die stromtragenden Spulen aus geraden Volumenelementen mit rechteckigem Querschnitt zusammensetzen lassen. In den einzelnen Volumenelementen ist die Stromdichte konstant und fließt in Längsrichtung. Zur Ermittlung der Gesamtfeldstärke bzw. des Vektorpotentials werden die Beiträge der einzelnen Volumenelemente in das globale kartesische Koordinatensystem transformiert und aufsummiert.

Die Berechnung der Induktivitätsmatrix für das Spulensystem erfolgt ebenfalls mit dem genannten Programmsystem. Dabei wird die Beziehung (7,18) in Verbindung mit (7,15), (7,16) und (7,9) durch die erwähnte Kombination analytischer und numerischer Integration des Vektorpotentials ausgewertet.

Die Kraftdichten in den Spulen werden mit dem EFFI-Programmsystem gemäß (7,20) berechnet. Die Spulen sind längs ihres Umfangs in 40 Volumenelemente unterteilt. Für jedes Volumenelement wird ein Wert des Kraftdichtevektors \vec{f} in globalen, kartesischen Koordinaten errechnet. Dabei wird über die magnetische Flußdichte \vec{B} in dem betreffenden Element integriert und der Mittelwert gebildet, gemäß

$$\vec{f} = \frac{1}{V_{El}} \int \int \int \vec{j} \times \vec{B} dV . \quad (3,2)$$

Durch eine Koordinatentransformation kann die Kraftdichteverteilung \vec{f} in ein natürliches, lokales Koordinatensystem R, S, T umgerechnet werden. Dieses lokale Koordinatensystem wird durch die Orientierung eines jeden Volumenelements der Spule bestimmt, wobei R den Normalen-, S den Binormalen- und T den Tangenteneinheitsvektor anzeigt. Man kann R auch als Radialkomponente und S als Lateralkomponente bezeichnen. Mit der Transformation der Kraftdichteverteilung \vec{f} in das lokale Koordinatensystem R, S, T ist eine Kontrolle des Ergebnisses möglich, denn da die Stromdichte \vec{j} in diesem Koordinatensystem nur die Komponente j_T hat, ergeben sich für die Kraftdichteverteilung \vec{f} die Komponenten f_R und f_S in radialer und in lateraler Richtung, während die Komponente f_T verschwindet. Bild 8 zeigt als typisches Beispiel die mittlere Kraftdichteverteilung einer nichtebenen Spule eines L2-Stellarators in lokalen Koordinaten.

Zur Berechnung der mechanischen Spannungen in den Spulen wird das Programmsystem SAP V(2) [38] benutzt. Dieses Programmsystem berechnet mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FE) [39] unter Zugrundelegung linear elastischer Materialdaten den Verschiebungsvektor \vec{u} der Knoten der Elemente und den mechanischen Spannungstensor \mathbf{S} für die Elemente. Als Eingangsgröße dient die magnetische Kraftdichteverteilung \vec{f} , die mit Hilfe von Formfunktionen [40] in die Knotenkräfte der finiten Elemente umgerechnet wird. Die Lösung des Problems erfolgt durch numerische Behandlung des zum Differentialgleichungssystem der Gleichungen (7,42) in Verbindung mit (7,30) und (7,38) zugehörigen Variationsproblems [39].

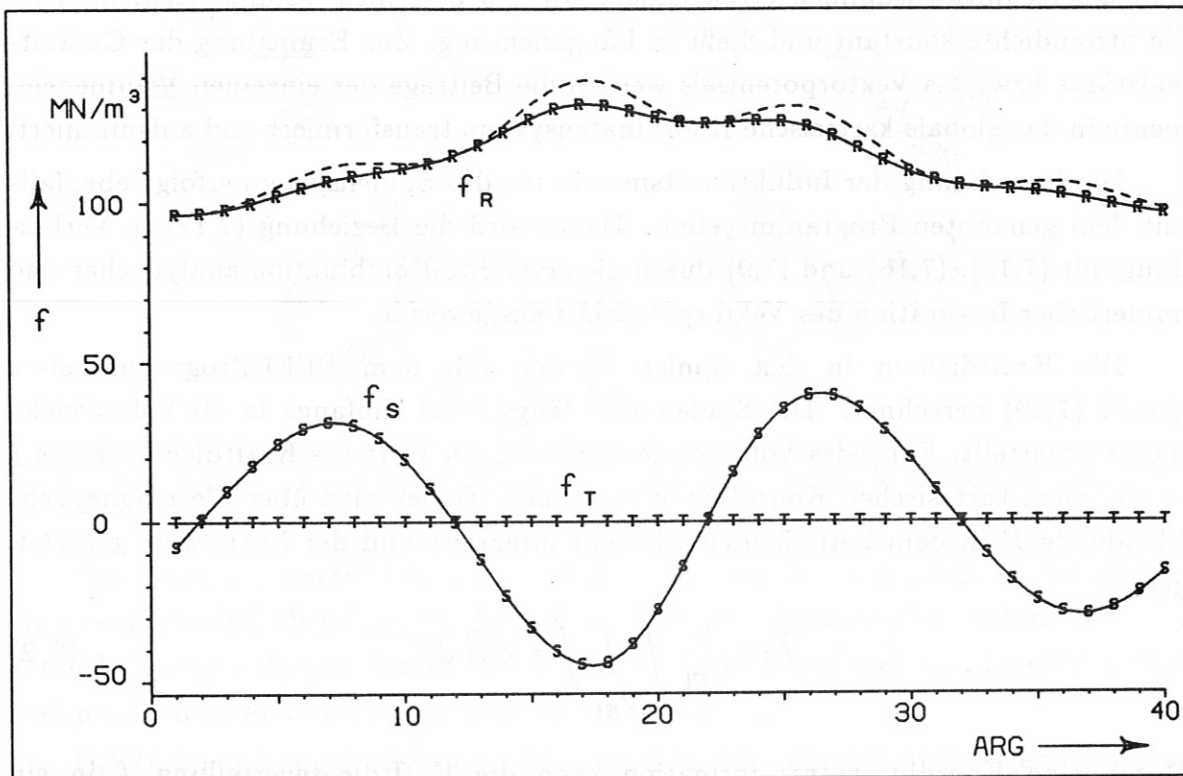


Bild 8: Magnetische Kraftdichteverteilung in einer nichtebenen Spule eines L2-Stellarators in Abhängigkeit von der Längskoordinate der Spule. Die Abbildung zeigt die Komponenten f_R , f_S , f_T und den Betrag der Kraftdichte.

Damit das Spulensystem im Gleichgewicht bleibt, müssen die einzelnen Spulen abgestützt werden. Die Abstützung erfolgt hier in der Weise, daß die Zwischenräume zwischen den Spulen durch materielle Elemente der gleichen Höhe h wie die der Spulen ausgefüllt werden. Auf diese Weise entsteht eine toroidale Schale, die an dem Ort der Spulen mit einer magnetischen Kraftdichteverteilung belegt ist. Die resultierenden Kräfte der einzelnen Spulen werden also durch gegenseitige Abstützung (Gewölbeabstützung) aufgefangen. Bild 9 zeigt als Beispiel die Darstellung der finiten Elemente einer solchen toroidalen Schale mit 30 nichtebenen Spulen. Diese An-

ordnung besteht insgesamt aus 4800 Elementen mit 9600 Knoten, da 8-knotige finite Volumenelemente verwendet werden. Die Berechnung wird mit isotropen Materialdaten ($E = 150 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) für *alle* Elemente der toroidalen Schale durchgeführt. Auf diese Weise ist die Spannungsverteilung unabhängig von den Materialdaten. Die errechneten Spannungswerte sind den Mittelpunkten der finiten Elemente sowie den Randpunkten in der Mitte der Elementseitenflächen im Torusinnern zugeordnet.

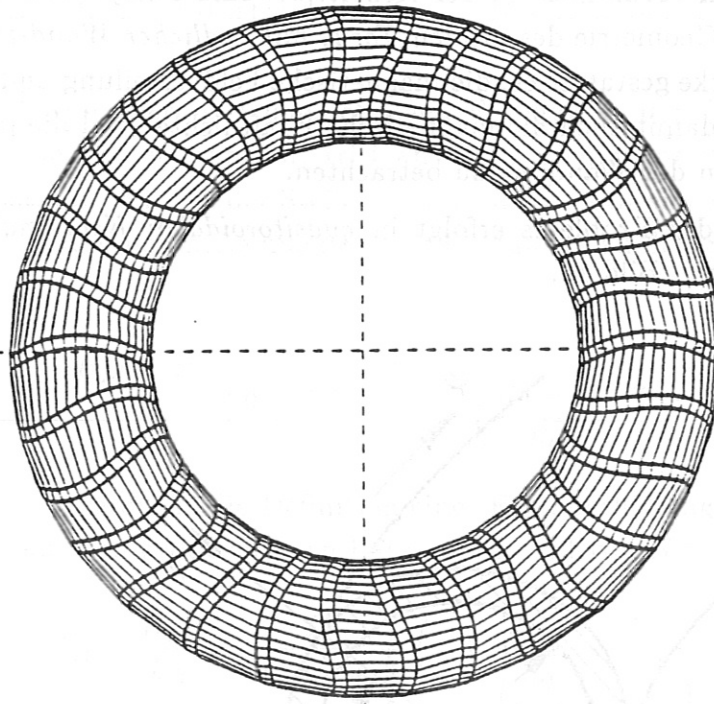


Bild 9: Toroidale Schale mit 30 nichtebenen Spulen.

Für Anordnungen mit mehr als 30 Spulen wird, da das FE-Programmsystem höchstens 9999 Knoten verarbeiten kann, mit der halben Spulenanzahl gerechnet. Dieser halbe Torus muß an den Schnittflächen durch feste Randelemente gehalten werden. Untersuchungen haben gezeigt, daß die durch diese Randbedingungen verursachten Störungen auf die Spannungsverteilung in den Spulen, die weit von den Schnittflächen entfernt angeordnet sind, praktisch keinen Einfluß haben.

Die Gesamtanordnung einer toroidalen stromtragenden Schale ist *kraftfrei*, d.h. sie muß nicht durch *äußere Kräfte* gehalten werden. Es treten deshalb an der toroidalen Schale keine Reaktionskräfte mit daraus resultierenden zusätzlichen mechanischen Spannungen auf. Auf diese Weise ist es möglich, die Ergebnisse der Spannungsanalyse der Spulen bei veränderten Parametern des Spulensystems zu vergleichen.

3.3. Analytische Näherungen

Für die Kontrolle von numerisch gewonnenen Resultaten ist es vorteilhaft, wenn man sie mit solchen in Beziehung setzen kann, die man analytisch erhalten hat. Analytische Lösungen zeigen unmittelbar die Abhängigkeit der Feldgrößen von den Parametern. Sie sind jedoch für den betrachteten Problemkreis nur möglich, wenn man gewisse Idealisierungen vornimmt. In der Arbeit [37] sind analytische Näherungen abgeleitet, die für die Geometrie des *idealen Torus mit endlicher Wandstärke* gelten. Die endliche Wandstärke gestattet es, die magnetische Feldverteilung und die Stromdichteverteilung, und damit auch die magnetische Kraftdichte- und die mechanische Spannungsverteilung in der Wandung zu betrachten.

Die Behandlung des Problems erfolgt in *quasitoroidalen Koordinaten* ρ, φ, ϑ , entsprechend Bild 1 bzw. Bild 10.

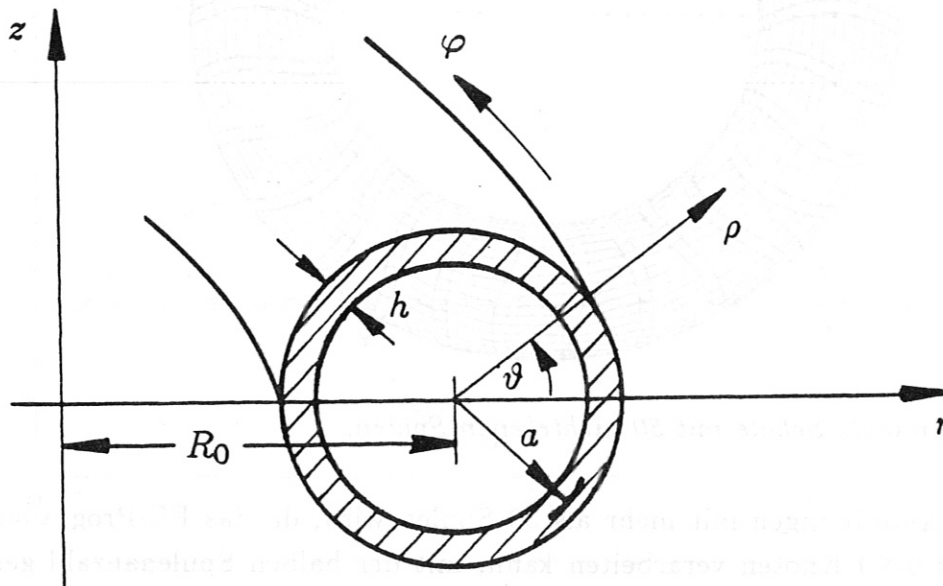


Bild 10: Idealer Torus mit endlicher Wandstärke h

3.3.1. Magnetische Feldverteilung und magnetischer Energieinhalt

Unter der Voraussetzung der Axialsymmetrie lauten die Gleichungen für die Stromdichte- und die magnetische Feldverteilung des idealen Torus mit endlicher Wandstärke h :

$$j_{\vartheta} = -\frac{B_0}{\mu_0 h} \frac{R_0}{r} \quad \text{für} \quad a - \frac{h}{2} \leq \rho \leq a + \frac{h}{2}, \quad (3,3)$$

und

$$B_\varphi = \begin{cases} B_0 \frac{R_0}{r} & \text{für } 0 \leq \rho \leq a - \frac{h}{2}, \\ B_0 \frac{R_0}{r} \frac{a + \frac{h}{2} - \rho}{h} & \text{für } a - \frac{h}{2} \leq \rho \leq a + \frac{h}{2}, \end{cases} \quad (3,4)$$

mit $r = R_0 + \rho \cos\vartheta$.

Die Bedingung $\text{div } \vec{B} = 0$ ist erfüllt, da die B_φ -Komponente nicht vom Winkel φ abhängt.

Der Maximalwert der magnetischen Flußdichte, der für die Auslegung von Spulen besonders interessant ist, tritt an der Spuleninnenseite, die der Torusachse zugewandt ist, auf, d.h. an der Stelle $r = R_0 - a + \frac{h}{2}$. Für eine diskrete Anzahl von N Spulen beträgt die maximale magnetische Flußdichte an den Spulen näherungsweise [22]:

$$B_M = B_0 \frac{R_0}{R_0 - a + \frac{h}{2}} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{R_0 - a + \frac{h}{2}}{R_0 - a} \right)^N - 1} \right). \quad (3,5)$$

Diese Näherung kann für die Definition eines Feldüberhöhungsfaktors f'_B verwendet werden, der nur von geometrischen Parametern und von N abhängt:

$$f'_B = \frac{B_M}{B_0} = \frac{R_0}{R_0 - a + \frac{h}{2}} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{R_0 - a + \frac{h}{2}}{R_0 - a} \right)^N - 1} \right), \quad (3,6)$$

für $a + \frac{h}{2} < R_0$.

Der Energieinhalt des magnetischen Feldes eines idealen Torus mit endlicher Wandstärke beträgt näherungsweise [37]:

$$E_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2 R_0 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} + \frac{a^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \frac{h}{a} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (3,7)$$

Für eine Konfiguration mit unendlich dünner Wandstärke ($h = 0$) folgt:

$$E_{id} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} 4\pi^2 R_0^3 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}} \right) \quad (3,8)$$

Bezieht man die magnetische Energie des idealen Torus mit endlicher Wandstärke h auf die magnetische Energie des idealen Torus mit verschwindender Wandstärke, so

kann man einen Energieüberhöhungsfaktor f'_E definieren, der nur von geometrischen Parametern abhängt:

$$f'_E = \frac{E_m}{E_{id}} = \frac{1 - \frac{1}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} + \frac{a^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \frac{h}{a} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \right)}{1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{R_0^2}}. \quad (3,9)$$

Bei endlicher Wandstärke gilt im allgemeinen $f'_E < 1$.

Aus (3,8) läßt sich mit Hilfe der Beziehung $E_{id} = \frac{1}{2} L_{id} I_c^2$ die Induktivität des idealen Torus (mit N einwindigen Spulen) zu

$$L_{id} = \mu_0 N^2 (R_0 - \sqrt{R_0^2 - a^2}) \quad (3,10)$$

bestimmen.

3.3.2. Magnetische Kräfte

Die mittlere magnetische Kraftdichte in der Spule beträgt näherungsweise [37]:

$$\langle f_\rho \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0 h} \frac{2\pi R_0}{N d} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{h}{a} + \frac{a^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{h}{a} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (3,11)$$

Der mittlere Magnetfelddruck auf eine Spule ist

$$p_\rho = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{2\pi R_0}{N d} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{h}{a} + \frac{a^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{h}{a} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (3,12)$$

Bezieht man den mittleren Magnetfelddruck $p_\rho = \langle f_\rho \rangle \cdot h$ einer Spule mit endlicher Spulenhöhe h auf den Magnetfelddruck eines Segments des idealen Torus mit verschwindender Wandstärke, so kann man den Faktor f'_D definieren, der nur von geometrischen Parametern und von N abhängt:

$$f'_D = \frac{p_\rho}{\frac{B_0^2}{2\mu_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2} \right)} = \frac{2\pi R_0}{N d} \frac{1 - \frac{1}{6} \frac{h}{a} + \frac{a^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{h}{a} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \right)}{1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2}}. \quad (3,13)$$

Die resultierende Kraft, die an eine Spule angreift, ergibt sich angenähert zu:

$$F_r = - \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{2\pi^2 a^2}{N} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} + \frac{3}{4} \frac{a^2}{R_0^2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (3,14)$$

Für den ideale Torus mit $h \rightarrow 0$ erhält man

$$F_{r_{id}} = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{4\pi^2 R_0^2}{N} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}} - 1 \right). \quad (3, 15)$$

Bezieht man die resultierende Kraft einer Spule mit endlicher Spulenhöhe h auf diejenige des idealen Torus mit verschwindender Wandstärke, so kann man den nur von geometrischen Parametern abhängigen Faktor f'_F definieren:

$$f'_F = \frac{F_r}{F_{r_{id}}} = \frac{1 - \frac{1}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} + \frac{3}{4} \frac{a^2}{R_0^2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2}\right)}{\frac{2R_0^2}{a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}} - 1 \right)}. \quad (3, 16)$$

Für $h < a$ und $a < R_0$ gilt im allgemeinen $f'_F < 1$.

3.3.3. Mechanische Spannungen

Der mechanische Spannungszustand des axialsymmetrischen Problems einer dünnwandigen toroidalen Schale mit einer radialen magnetischen Kraftdichteverteilung kann vollständig bestimmt werden [37]. Die Spannungskomponenten lauten:

$$\sigma_\varphi = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{R_0^2}{ah} \frac{r \ln \left(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta\right) - a \cos \vartheta}{r \cos^2 \vartheta},$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{R_0^2}{h} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta\right)}{r \cos \vartheta}, \quad (3, 17)$$

mit $r = R_0 + a \cos \vartheta$.

Für $A_m = R_0/a \rightarrow \infty$ gelten die Näherungen

$$\sigma_\varphi = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta\right),$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{h} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta\right). \quad (3, 18)$$

Die betrachteten Spannungskomponenten sind also proportional dem Magnetfelddruck auf der Plasmaachse $B_0^2/2\mu_0$ und dem Verhältnis Spulenzradius a zu Spulenhöhe h . Für alle $\vartheta \in [0, 2\pi]$ und für alle $\frac{R_0}{a} \in (1, \infty)$ herrscht bei der gegebenen radialen Kraftdichte $f_\rho \sim \frac{1}{r^2}$ in toroidaler Richtung Druck ($\sigma_\varphi < 0$) und in poloidaler Richtung Zug ($\sigma_\vartheta > 0$) vor.

Nach dem Virialtheorem besteht gemäß (7,48) zwischen dem magnetischen Energieinhalt einer stromtragenden toroidalen Schale, an die keine äußeren Kräfte angreifen, und der Spur des mechanischen Spannungstensors dieser Schale der folgende einfache Zusammenhang

$$E_m = \int \int \int_V sp \mathbf{S} dV. \quad (3,19)$$

Dabei beträgt die Spur des Spannungstensors unter Verwendung von (3,17)

$$sp \mathbf{S} = \sigma_\varphi + \sigma_\vartheta = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{h} \frac{R_0^2}{a^2} \frac{\frac{a}{R_0} \cos \vartheta - \ln(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta)}{(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta) \cos^2 \vartheta}. \quad (3,20)$$

Die Spur des Spannungstensors $sp \mathbf{S} = \sigma_\varphi + \sigma_\vartheta$ ist für alle $\vartheta \in [0, 2\pi]$ und für alle $\frac{R_0}{a} \in (1, \infty)$ positiv, wie es sein muß. Führt man die Integration über das Volumen der toroidalen Schale $V_T = 4\pi^2 R_0 a h$, nachdem der Integrand in einer Reihe entwickelt wurde, aus, so folgt

$$E_m = \int \int \int_{V_T} sp \mathbf{S} dV = \frac{B_0^2}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2 R_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{1}{8} \frac{a^4}{R_0^4} + \dots \right\}. \quad (3,21)$$

Diese Gleichung stimmt mit (3,7) überein, wenn man dort $h \rightarrow 0$ gehen läßt. Die Virialspannung σ_V , d.h. der Mittelwert der Spur des Spannungstensors, beträgt

$$\sigma_V = \frac{1}{V_T} \int \int \int_{V_T} sp \mathbf{S} dV = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{1}{8} \frac{a^4}{R_0^4} + \dots \right\}. \quad (3,22)$$

Die Summe der Beträge der Mittelwerte der einzelnen Spannungskomponenten ist

$$\Sigma |\langle \sigma \rangle| = |\langle \sigma_\varphi \rangle| + |\langle \sigma_\vartheta \rangle| = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} 3 \left\{ 1 + \frac{5}{36} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{7}{120} \frac{a^4}{R_0^4} + \dots \right\}. \quad (3,23)$$

Wegen $\sigma_\varphi < 0$ und $\sigma_\vartheta > 0$ für alle $\vartheta \in [0, 2\pi]$ und für alle $\frac{R_0}{a} \in (1, \infty)$ gilt hier $\Sigma |\langle \sigma \rangle| = \langle \Sigma |\sigma| \rangle$. Bezieht man diese Summe der Beträge auf die Virialspannung nach (3,22), so kann man einen Faktor g'_σ definieren, der nur von geometrischen Parametern abhängt:

$$g'_\sigma = \frac{\Sigma |\langle \sigma \rangle|}{\sigma_V} \approx 3 \cdot \frac{1 + \frac{5}{36} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{7}{120} \frac{a^4}{R_0^4}}{1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{1}{8} \frac{a^4}{R_0^4}}. \quad (3,24)$$

Die Summe der Beträge der Mittelwerte der einzelnen Spannungskomponenten ist also unter den genannten Voraussetzungen etwa dreimal so groß wie die Virialspannung $\sigma_V = E_m/V_T$ des idealen, dünnwandigen Torus.

Für die Beurteilung der Festigkeit eines Bauteils ist es wichtig, den einachsigen Spannungszustand mit dem allgemeinen dreiachsigen Spannungszustand vergleichen zu können. Nach der Hypothese des VON MISES wird dabei für beide Zustände die gleiche Gestaltänderungsarbeit zugrundegelegt [41]. Die Definition der Vergleichsspannung (von Mises Spannung) lautet in kartesischen Koordinaten [42]

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{1}{2} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \} + 3 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (3,25)$$

Sie ist invariant gegenüber einer Koordinatentransformation. Für eine dünnwandige toroidale Schale, in der nur die Normalspannungskomponenten σ_φ und σ_θ auftreten, errechnet sich das Maximum der Vergleichsspannung näherungsweise zu [37]

$$\sigma_{vM_{Max}} \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \sqrt{7 \left(1 + 3 \frac{a}{R_0} + 5.6 \frac{a^2}{R_0^2} + 8.9 \frac{a^3}{R_0^3} \right)}, \quad (3,26)$$

für $h \ll a$ und $a \ll R_0$.

Für den Mittelwert der Vergleichsspannung $\langle \sigma_{vM} \rangle$ gilt:

$$\langle \sigma_{vM} \rangle \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \sqrt{7} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{a^2}{R_0^2} \right). \quad (3,27)$$

Normiert man die Summe der Beträge der Mittelwerte der einzelnen Spannungskomponenten nach (3,23) auf den Mittelwert der Vergleichsspannung nach (3,27), so ergibt sich eine Größe, die nur vom Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$ abhängt:

$$\frac{\Sigma |\langle \sigma \rangle|}{\langle \sigma_{vM} \rangle} \approx \frac{3}{\sqrt{7}} \frac{1 + \frac{5}{36} \frac{a^2}{R_0^2}}{1 + \frac{1}{8} \frac{a^2}{R_0^2}} = 1.134 \frac{1 + \frac{5}{36} \frac{a^2}{R_0^2}}{1 + \frac{1}{8} \frac{a^2}{R_0^2}}. \quad (3,28)$$

Die Summe der Beträge stimmt also in etwa mit dem Mittelwert der Vergleichsspannung überein. Folglich kann man mit Hilfe von g'_σ nach (3,24) von der Virialspannung $\sigma_V = E_m/V_T$ auf die mittlere Vergleichsspannung schließen. Normiert man das Maximum der Vergleichsspannung $\sigma_{vM_{Max}}$ auf den Magnetfelddruck $B_0^2/2\mu_0$ an der Plasmaachse, so kann man den Faktor f'_{VM} definieren, der nur von geometrischen Parametern abhängt:

$$f'_{VM} = \frac{\sigma_{vM_{Max}}}{B_0^2/2\mu_0} \approx \frac{a}{2h} \sqrt{7 \left(1 + 3 \frac{a}{R_0} + 5.6 \frac{a^2}{R_0^2} + 8.9 \frac{a^3}{R_0^3} \right)}. \quad (3,29)$$

3.3.4. Charakteristische Zahlenwerte der Referenzkonfiguration

Setzt man die genannten Zahlenwerte der Konfiguration von Abschnitt 3.2. in die Gleichungen ein, so kann man die Induktivität L_{id} des idealen Torus (für $N = 50$ einwindige Spulen) berechnen:

$$L_{id} = \mu_0 N^2 (R_0 - \sqrt{R_0^2 - a^2}) = 1.112 \text{ mH}.$$

Der Energieinhalt dieses idealen Torus ergibt sich zu:

$$E_{id} = \frac{1}{2} L_{id} I_c^2 = 64.88 \text{ GJ}.$$

Der Magnetfelddruck auf der Plasmaachse ist:

$$p_0 = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = 20.63 \text{ MPa}.$$

Für die mittlere Kraftdichte in der Spule (bei $N = 50$ Spulen) ergibt sich:

$$\langle f_\rho \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0 h} \frac{2\pi R_0}{Nd} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{h}{a} + \frac{a^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{h}{a} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \right) \right\} = 62.77 \text{ MN/m}^3.$$

Die resultierende Kraft auf eine Spule ist:

$$F_{r,id} = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{4\pi^2 R_0^2}{N} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}} - 1 \right) = -88.60 \text{ MN}.$$

Das Maximum der Vergleichsspannung ergibt sich zu:

$$\sigma_{vM_{Max}} \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \sqrt{7 \left(1 + 3 \frac{a}{R_0} + 5.6 \frac{a^2}{R_0^2} + 8.9 \frac{a^3}{R_0^3} \right)} = 125.60 \text{ MPa}.$$

Der Mittelwert der Vergleichsspannung $\langle \sigma_{vM} \rangle$ ist

$$\langle \sigma_{vM} \rangle \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \sqrt{7} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{a^2}{R_0^2} \right) = 88.90 \text{ MPa},$$

so daß das Verhältnis des Maximalwerts der Vergleichsspannung zu ihrem Mittelwert

$$\frac{\sigma_{vM_{Max}}}{\langle \sigma_{vM} \rangle} \approx 1.4$$

beträgt.

Wegen $E_{m,id} = 64.88 \text{ GJ}$ und $V_T = 4\pi^2 R_0 a h = 1918.7 \text{ m}^3$ folgt für die Virialspannung

$$\sigma_V = \frac{E_m}{V_T} = 33.82 \text{ MPa}$$

und für den Faktor

$$g'_\sigma = \frac{\Sigma |\langle \sigma \rangle|}{\sigma_V} = 2.98.$$

3.3.5. Kritik der analytischen Methode

Die Ergebnisse der analytischen Betrachtung gelten für die Geometrie des idealen Torus mit endlicher Wandstärke, also für eine toroidale Schale endlicher Dicke. Bei der Bestimmung des Maximalwertes der magnetischen Flußdichte benutzt man das Modell einer diskreten Anzahl von axialsymmetrisch angeordneten Linienströmen [22]. Für die Verteilung der Stromdichte und damit der magnetischen Flußdichte und der magnetischen Kraftdichte wird Axialsymmetrie vorausgesetzt ($\partial/\partial\varphi = 0$). Die Lösungen für die mechanischen Spannungskomponenten gelten zudem nur für eine dünnwandige Schale mit $h \ll a$ und $\partial/\partial\rho \approx 0$. Wegen der gleichmäßigen Stromdichteverteilung in toroidaler Richtung tritt in dem Modell kein Streufeld auf, d.h. das Magnetfeld ist ganz im Innern der toroidalen Schale und in den Wandungen lokalisiert. Aus diesem Grunde geben analytischen Lösungen die Verhältnisse in realen Systemen mit einer endlichen Spulenanzahl nur ungenau wieder. Der Einfluß des magnetischen Streufeldes in realen Systemen ist analytisch nicht zu bestimmen.

Für ein toroidales Spulensystem mit einer endlichen Anzahl nichtebener Spulen können bessere Ergebnisse nur erzielt werden, wenn man numerische Methoden anwendet. Numerische Berechnungen gestatten im Prinzip eine beliebig genaue Bestimmung der Ergebnisse.

3.4. Numerische Berechnungen

Die numerischen Berechnungen werden an modularen Spulensystemen des L2-Stellarators durchgeführt (siehe Bild 7). Ausgangspunkt der Berechnungen sind die Daten der im Abschnitt 3.2. genannten Referenzkonfiguration. Die Variationsparameter sind der große Torusradius R_0 , der Spulenradius a , die Spulenanzahl N , der Spulenquerschnitt A_c , das Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts A_q und die toroidale Spulenauslenkung c . Der Parameterbereich ist so gewählt, daß er die Parameter der Referenzkonfiguration einschließt und das Gebiet umfaßt, in dem die Daten eines zukünftigen Fusionsreaktors voraussichtlich liegen werden. Mit Hilfe des im Abschnitt 3.2. beschriebenen EFFI-Programmsystems [36] werden die maximale magnetische Flußdichte B_M an den Spulen und die Gesamtinduktivität L des Spulensystems und damit der Energieinhalt E_m des Magnetfeldes berechnet. Die maximale magnetische Flußdichte B_M wird auf die Flußdichte B_0 der magnetischen Achse bezogen; der Quotient ist der Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$. Die gespeicherte magnetische Energie E_m des Spulensystems wird auf den Energieinhalt E_{id} des zugehörigen idealen Torus bezogen; der Quotient wird als Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$ bezeichnet.

Die magnetische Kraftdichteverteilung in den Spulen und die resultierenden Kräfte der Spulen werden ebenfalls mit Hilfe des EFFI-Programmsystems bestimmt.

Zur Berechnung der mechanischen Spannungen in den Spulen wird das Programmsystem SAP V(2) [38] verwendet. Dieses Programmsystem benutzt als Eingangsgröße die berechnete magnetische Kraftdichteverteilung und berechnet mit Hilfe der Methode der finiten Elemente unter Zugrundelegung linear elastischer Materialdaten den Verschiebungsvektor \vec{u} der Knoten der Elemente und den mechanischen Spannungstensor \mathbf{S} für die Elemente.

In den numerischen Berechnungen werden die folgenden Größen in allen Fällen konstant gehalten:

- Magn. Flußdichte auf der Plasmaachse	B_0	7.2 T
- Zahl der toroidalen Feldperioden	M	5
- Zahl der poloidalen Feldperioden	L	2

Bei den Parameterstudien dieses Kapitels wird grundsätzlich jeweils nur ein Parameter variiert. Alle anderen werden konstant gehalten. Um aber die magnetische Flußdichte auf der Plasmaachse in allen Fällen konstant halten zu können, muß entsprechend (3,1) bei der Variation von R_0 oder N auch der Spulenstrom I_c variiert werden.

In den folgenden Abschnitten 3.4.1. bis 3.4.6. sind die Ergebnisse der numerischen Berechnungen graphisch dargestellt, und anschließend erfolgt die Diskussion.

3.4.1. Variation des großen Torusradius R_0

Der Variationsbereich von R_0 ist: $6.48 \text{ m} \leq R_0 \leq 22.68 \text{ m}$.

Das entspricht einem Spulen aspektverhältnis A_m von: $2.0 \leq R_0/a \leq 7.0$.

Zusätzlicher Variationsparameter ist die toroidale Spulenauslenkung c : Es werden Funktionswerte für ebene Spulen ($c=0$) und für nichtebene Spulen mit $c' = 0.6 \text{ m}$ und $c' = 1.2 \text{ m}$ ermittelt.

Wegen $B_0 = \text{const.}$ und $A_c = \text{const.}$ wird der Spulenstrom I_c und die Spulenstromdichte j_c und damit die Durchflutung proportional mit R_0 variiert. Die Spulenhöhe beträgt $h = 1.0 \text{ m}$, die Spulenbreite $d = 0.6 \text{ m}$ und der Spulenradius $a = 3.24 \text{ m}$. Die Gesamtanzahl der Spulen ist $N = 20$, d.h. pro toroidaler Feldperiode gibt es $n = 4$ Spulen.

In den Tabellen 1 und 2 und in den Bildern 11 bis 13 sind die Ergebnisse dargestellt.

	1	2	3	4	5	6	7	8
R_0 [m]	6.48	8.10	11.34	12.96	15.0	16.20	19.44	22.68
$A_m = R_0/a$	2.0	2.5	3.5	4.0	4.63	5.0	6.0	7.0
I_c [MA]	11.66	14.58	20.41	23.33	27.0	29.16	34.99	40.82
j_c [MA/m ²]	19.44	24.30	34.02	38.88	45.0	48.60	58.32	68.04
$c = 0$								
L [μ H]	417.0	343.0	271.0	252.1	235.0	227.6	214.2	205.5
E_m [GJ]	28.37	36.46	56.46	68.60	85.66	96.76	131.1	171.2
B_M [T]	13.66	13.53	15.21	16.41	18.08	19.12	22.08	25.15
E_m/E_{id}	0.955	1.010	1.141	1.219	1.320	1.383	1.567	1.758
B_M/B_0	1.897	1.879	2.113	2.279	2.511	2.655	3.066	3.493
$c' = 0.60 m$								
L [μ H]	436.9	355.6	278.7	258.5	241.1	233.6	218.9	210.4
E_m [GJ]	29.72	37.80	58.06	70.34	87.88	99.32	134.0	175.3
B_M [T]		14.51	15.44	16.58	18.21	19.26	22.17	25.18
E_m/E_{id}	1.001	1.046	1.173	1.249	1.355	1.420	1.601	1.800
B_M/B_0		2.015	2.144	2.302	2.529	2.675	3.079	3.497
$c' = 1.20 m$								
L [μ H]			302.5	277.8	258.1	249.3	233.3	224.0
E_m [GJ]			63.02	74.59	94.08	106.0	142.8	186.7
B_M [T]			16.62	17.35	18.78	19.66	22.55	25.50
E_m/E_{id}			1.273	1.343	1.450	1.515	1.707	1.916
B_M/B_0			2.308	2.409	2.607	2.730	3.132	3.542

Tabelle 1: Wertetabelle numerisch gewonnener Resultate in Abhängigkeit vom großen Torusradius R_0 . Es bedeuten: I_c = Gesamtspulenstrom, j_c = Mittlere Spulenstromdichte, $c = c'/R_0$ = Bezogene toroidale Spulenauslenkung, L = Gesamtinduktivität des Spulensystems, E_m = Gespeicherte magnetische Energie des Spulensystems, E_{id} = Magnetischer Energieinhalt des idealen Torus, B_M = Maximale magnetische Flußdichte an den Spulen, B_0 = Magnetische Flußdichte auf der magnetischen Achse. Die Spaltenziffern 1,...,8 nummerieren die berechneten Fälle.

	1	2	3	4	5	6	7	8
R_0 [m]	6.48	8.10	11.34	12.96	15.0	16.20	19.44	22.68
$A_m = R_0/a$	2.0	2.5	3.5	4.0	4.63	5.0	6.0	7.0
I_c [MA]	11.66	14.58	20.41	23.33	27.0	29.16	34.99	40.82
j_c [MA/m ²]	19.44	24.30	34.02	38.88	45.0	48.60	58.32	68.04
$c = 0$								
$\langle f \rangle$ [MN/m ³]	78.10	95.40	137.1	161.1	194.5	215.8	280.0	354.3
$F_{r_{Max}}$ [MN]	206.3	179.5	147.7	135.6	122.4	114.5	98.10	83.10
$\sigma_{vM_{Max}}$ [MPa]	250.1	204.3	181.4	161.7	157.1	156.1	156.5	161.8
f_D	3.786	4.625	6.647	7.810	9.429	10.46	13.57	17.18
f_F	0.965	0.840	0.691	0.635	0.573	0.536	0.459	0.389
f_{VM}	12.13	9.905	8.795	7.839	7.616	7.568	7.587	7.844
$c' = 0.60 m$								
$\langle f \rangle$ [MN/m ³]		97.20	136.9	160.3	192.9	213.9	277.0	350.1
$F_{r_{Max}}$ [MN]		198.1	155.4	142.9	128.6	122.0	104.3	88.00
$\sigma_{vM_{Max}}$ [MPa]		241.4	182.2	170.0	161.8	160.3	160.6	168.2
f_D		4.712	6.637	7.771	9.352	10.37	13.43	16.97
f_F		0.927	0.727	0.669	0.602	0.571	0.488	0.412
f_{VM}		11.70	8.833	8.242	7.844	7.772	7.786	8.155
$c' = 1.20 m$								
$\langle f \rangle$ [MN/m ³]			141.0	161.8	191.1	211.9	272.4	343.6
$F_{r_{Max}}$ [MN]			193.8	166.3	145.1	136.6	115.7	97.80
$\sigma_{vM_{Max}}$ [MPa]			210.9	186.6	173.3	171.3	174.4	184.5
f_D			6.836	7.844	9.265	10.27	13.21	16.66
f_F			0.907	0.778	0.679	0.639	0.541	0.458
f_{VM}			10.22	9.047	8.402	8.265	8.455	8.949

Tabelle 2: Wertetabelle numerisch gewonnener Resultate in Abhängigkeit vom großen Torusradius R_0 . Es bedeuten: I_c = Gesamtpulenstrom, j_c = Mittlere Spulenstromdichte, $c = c'/R_0$ = Bezogene toroidale Spulenauslenkung, $\langle f \rangle$ = Mittlere magnetische Kraftdichte, $F_{r_{Max}}$ = Maximale resultierende magnetische Kraft einer Spule, $\sigma_{vM_{Max}}$ = Maximale Vergleichsspannung, $f_D = \langle f \rangle h / ((B_0^2 / 2\mu_0)(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2}))$ = Relative mittlere magnetische Kraftdichte, $f_F = F_{r_{Max}} / F_{r_{id}}$ = Relative resultierende magnetische Kraft, $f_{VM} = \sigma_{vM_{Max}} / (B_0^2 / 2\mu_0)$ = Relative maximale Vergleichsspannung. Die Spaltenziffern 1,...,8 nummerieren die berechneten Fälle.

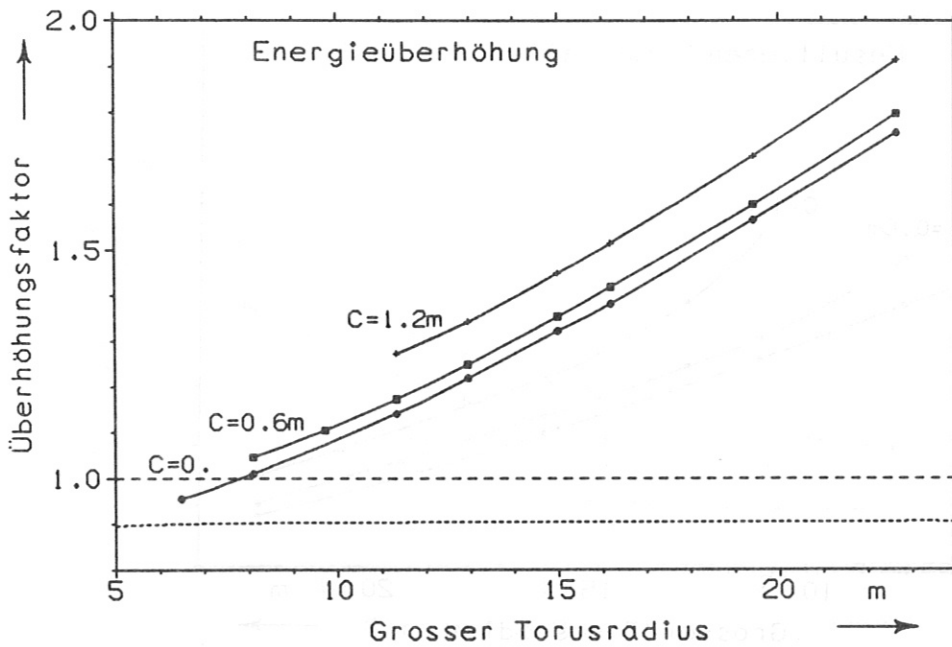
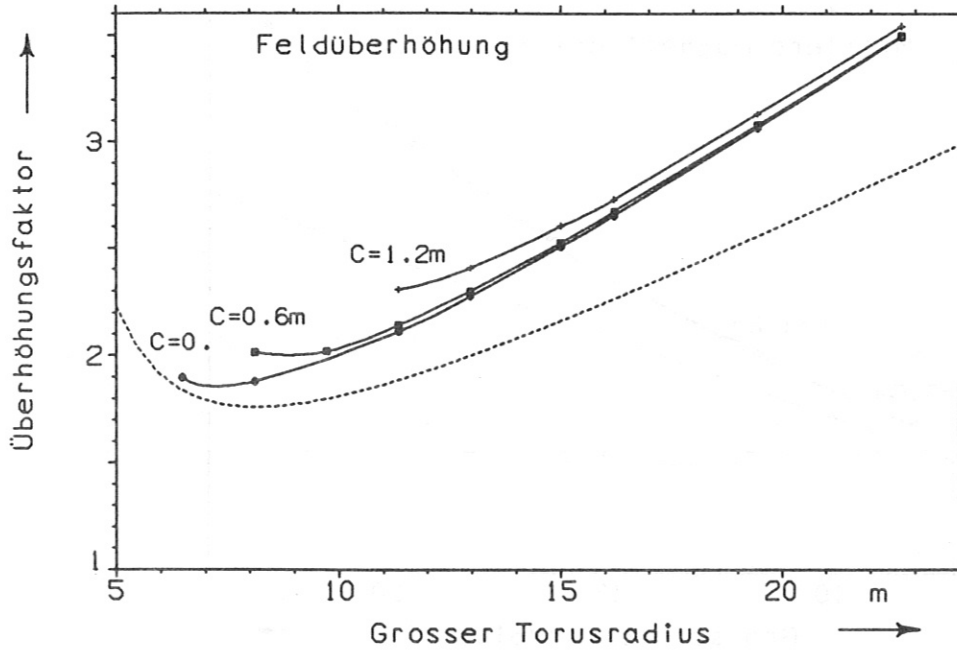


Bild 11: Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$ und Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$ in Abhängigkeit vom großen Torusradius R_0 . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_B nach (3,6), im unteren Bild die analytische Funktion f'_E nach (3,9).

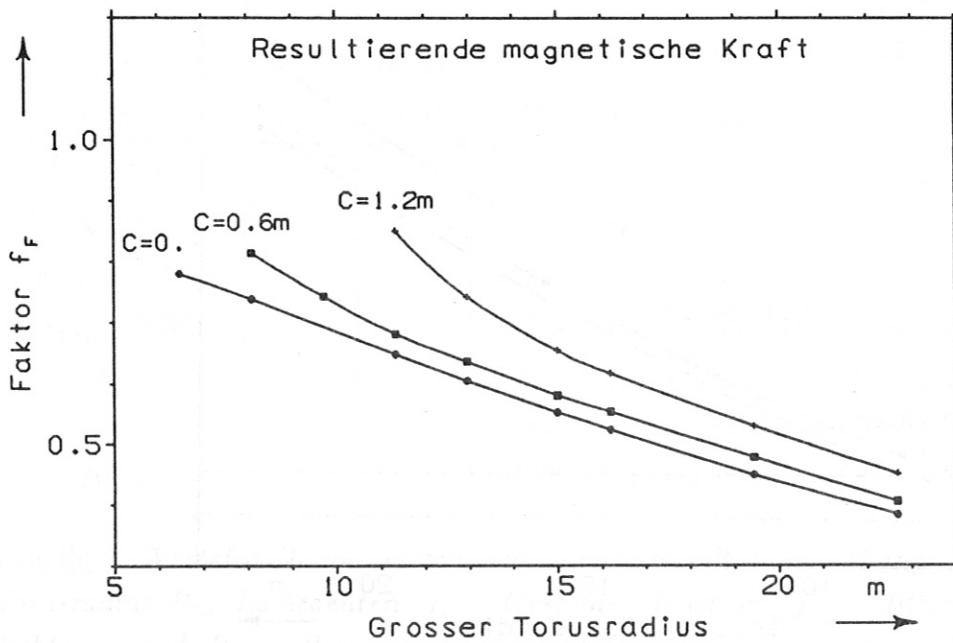
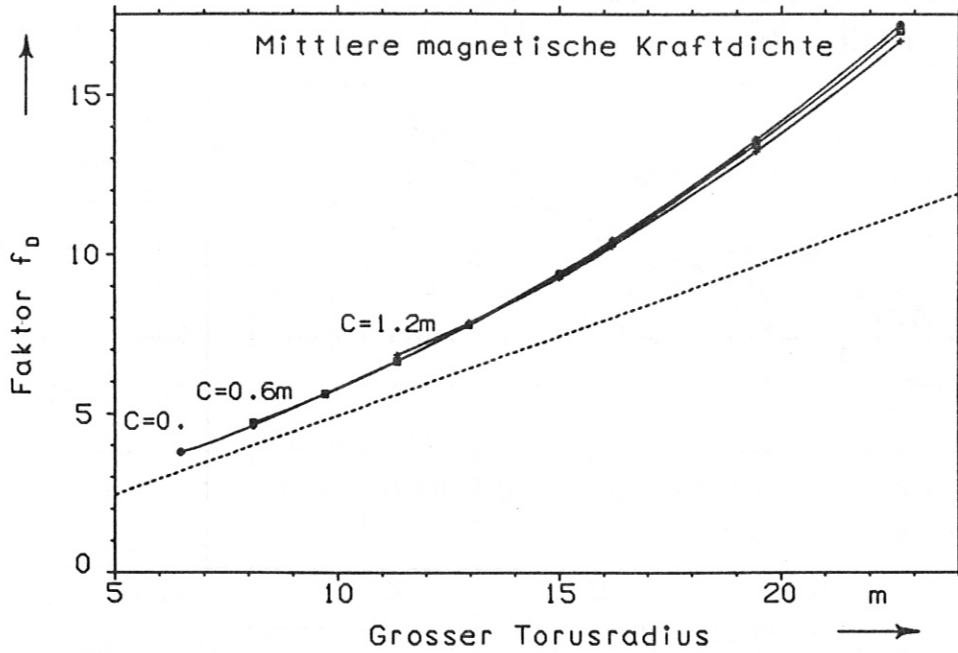


Bild 12: Relative mittlere magnetische Kraftdichte $f_D = \langle f \rangle h / ((B_0^2 / 2\mu_0)(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2}))$ und relative resultierende magnetische Kraft $f_F = F_{r_{Max}} / F_{r_{id}}$ mit $F_{r_{id}}$ nach (3,15) in Abhängigkeit vom grossen Torusradius R_0 . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f_D' nach (3,13).

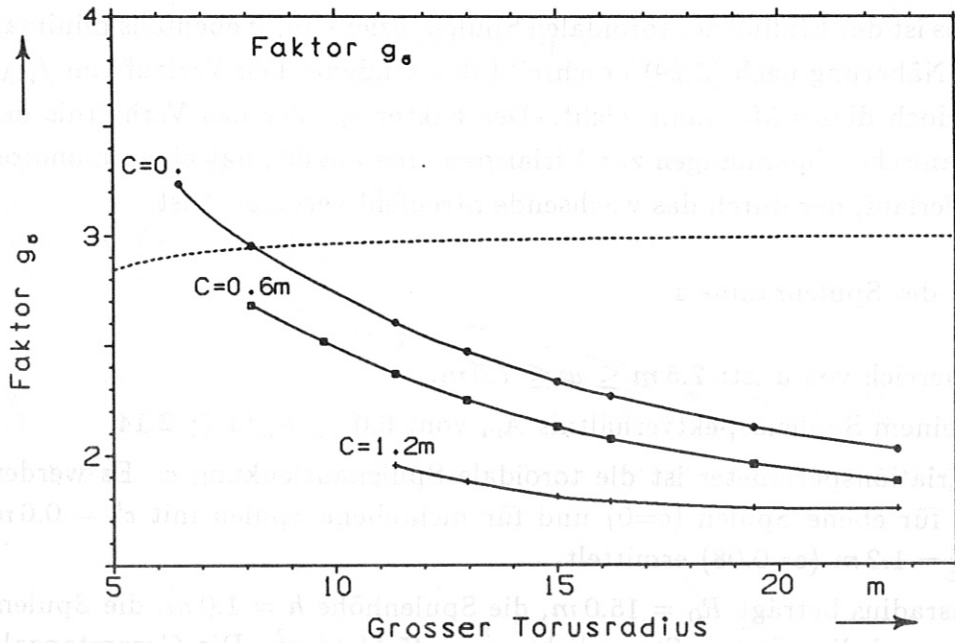
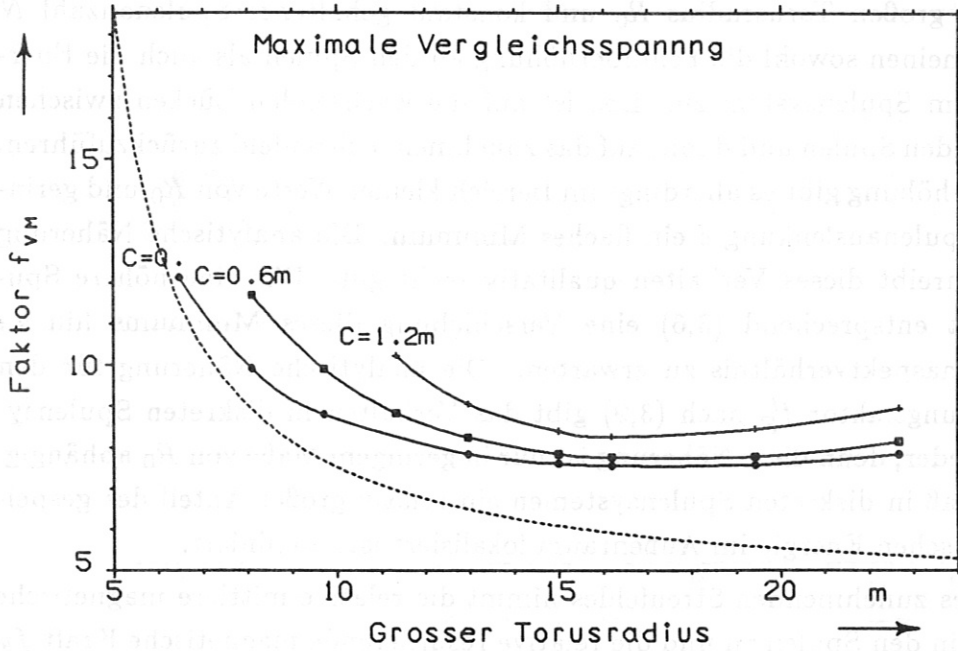


Bild 13: Relative maximale Vergleichsspannung $f_{VM} = \sigma_{vM_{Max}} / (B_0^2 / 2\mu_0)$ und Faktor $g_{\sigma} = (\Sigma |\sigma|) / \sigma_V$ mit $\sigma_V = E_m / V_T$ (Virialspannung) in Abhängigkeit vom grossen Torusradius R_0 . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_{VM} nach (3,29), im unteren Bild die analytische Funktion g'_{σ} nach (3,24).

Diskussion der Ergebnisse (Bilder 11 bis 13):

Mit steigendem großen Torusradius R_0 und konstant gehaltener Spulenanzahl N nimmt im allgemeinen sowohl die Feldüberhöhung an den Spulen als auch die Energieüberhöhung im Spulensystem zu. Das ist auf die wachsenden Lücken zwischen den stromführenden Spulen und damit auf das zunehmende Streufeld zurückzuführen. Bei der Feldüberhöhung gibt es allerdings im Bereich kleiner Werte von R_0 und geringer toroidaler Spulenauslenkung c ein flaches Minimum. Die analytische Näherung nach (3,6) beschreibt dieses Verhalten qualitativ recht gut. Für eine höhere Spulenanzahl N ist entsprechend (3,6) eine Verschiebung dieses Minimums hin zu größerem Spulenaspektverhältnis zu erwarten. Die analytische Näherung für den Energieüberhöhungsfaktor f'_E nach (3,9) gibt das Verhalten in diskreten Spulensystemen nicht wieder, denn diese Näherung ist nur in geringem Maße von R_0 abhängig. Die Tatsache, daß in diskreten Spulensystemen ein relativ großer Anteil der gespeicherten magnetischen Energie im Außenraum lokalisiert ist, dominiert.

Wegen des zunehmenden Streufeldes nimmt die relative mittlere magnetische Kraftdichte f_D in den Spulen zu und die relative resultierende magnetische Kraft f_F der Spulen ab. Die Zunahme von f_D wird durch die analytische Näherung nach (3,13) tendenziell richtig wiedergegeben. Die relative maximale Vergleichsspannung f_{VM} in den Spulen zeigt bei mittleren Werten von R_0 ein flaches Minimum. Im Bereich dieses Minimums ist der Einfluß der toroidalen Spulenauslenkung c ebenfalls minimal. Die analytische Näherung nach (3,29) beschreibt den tendenziellen Verlauf von f_{VM} richtig, zeigt jedoch dieses Minimum nicht. Der Faktor g_σ , der das Verhältnis der mittleren mechanischen Spannungen zur Virialspannung angibt, hat einen monoton abnehmenden Verlauf, der durch das wachsende Streufeld verursacht ist.

3.4.2. Variation des Spulenradius a

Der Variationsbereich von a ist: $2.5\text{ m} \leq a \leq 7.0\text{ m}$.

Das entspricht einem Spulenaspektverhältnis A_m von: $6.0 \geq R_0/a \geq 2.14$.

Zusätzlicher Variationsparameter ist die toroidale Spulenauslenkung c : Es werden Funktionswerte für ebene Spulen ($c=0$) und für nichtebene Spulen mit $c' = 0.6\text{ m}$ ($c=0.04$) und $c' = 1.2\text{ m}$ ($c=0.08$) ermittelt.

Der große Torusradius beträgt $R_0 = 15.0\text{ m}$, die Spulenhöhe $h = 1.0\text{ m}$, die Spulenbreite $d = 0.6\text{ m}$ und die mittlere Stromdichte $j_c = 45\text{ MA/m}^2$. Die Gesamtanzahl der Spulen ist $N = 20$, d.h. pro toroidaler Feldperiode gibt es $n = 4$ Spulen.

In den Bildern 14 bis 16 sind die Ergebnisse dargestellt.

In den Abschnitten 3.4.2. bis 3.4.6. wird auf die Präsentation der Wertetabelle der numerisch gewonnenen Resultate verzichtet, da die Ergebnisse der numerischen Berechnungen in den Abbildungen eindeutig dargestellt sind.

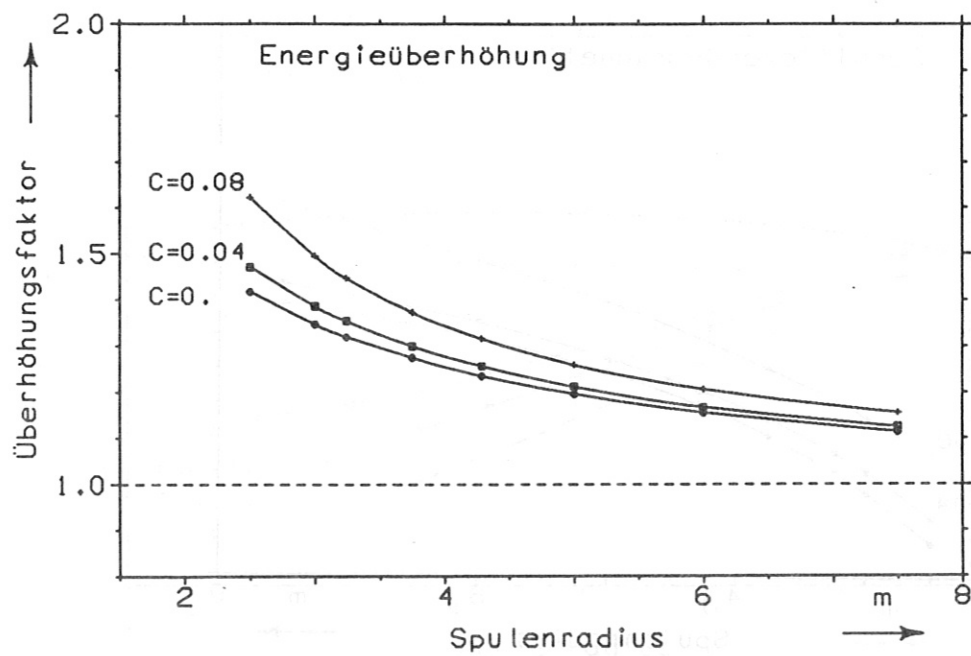
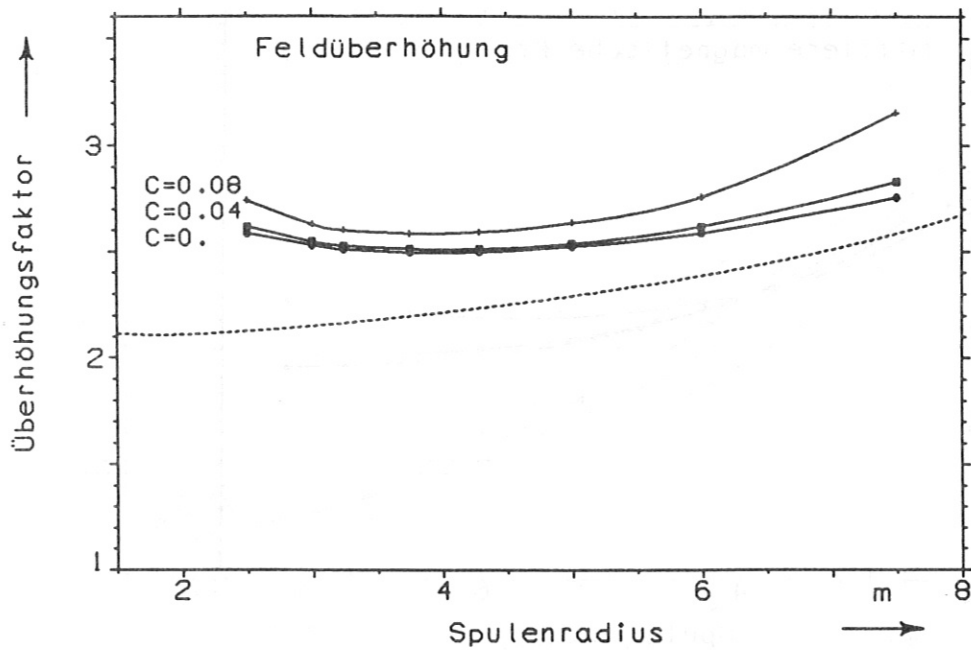


Bild 14: Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$ und Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$ in Abhängigkeit vom Spulenradius a . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f_B^l nach (9,6).

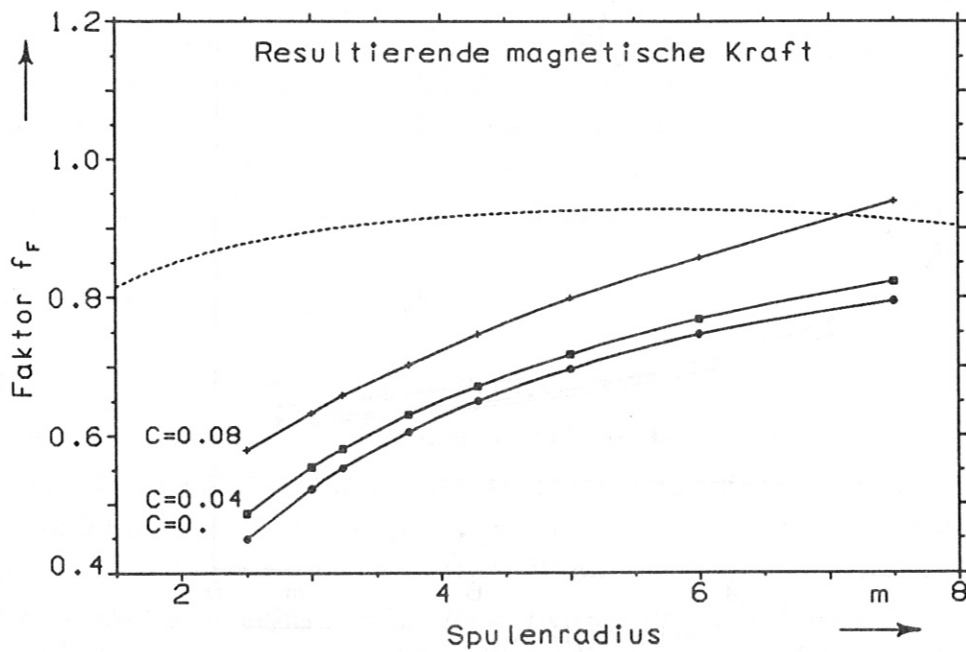
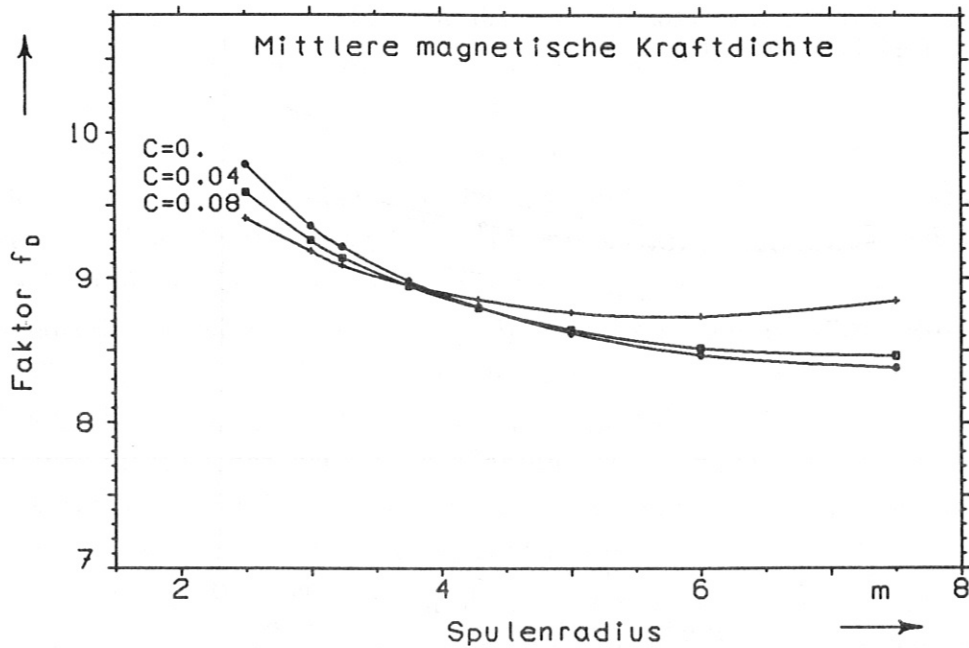


Bild 15: Relative mittlere magnetische Kraftdichte $f_D = \langle f \rangle h / ((B_0^2 / 2\mu_0)(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2}))$ und relative resultierende magnetische Kraft $f_F = F_{r_{Maz}} / F_{r_{id}}$ mit $F_{r_{id}}$ nach (3,15) in Abhängigkeit vom Spulenradius a . Die punktierte Linie im unteren Bild zeigt die analytische Näherung f'_F nach (3,16).

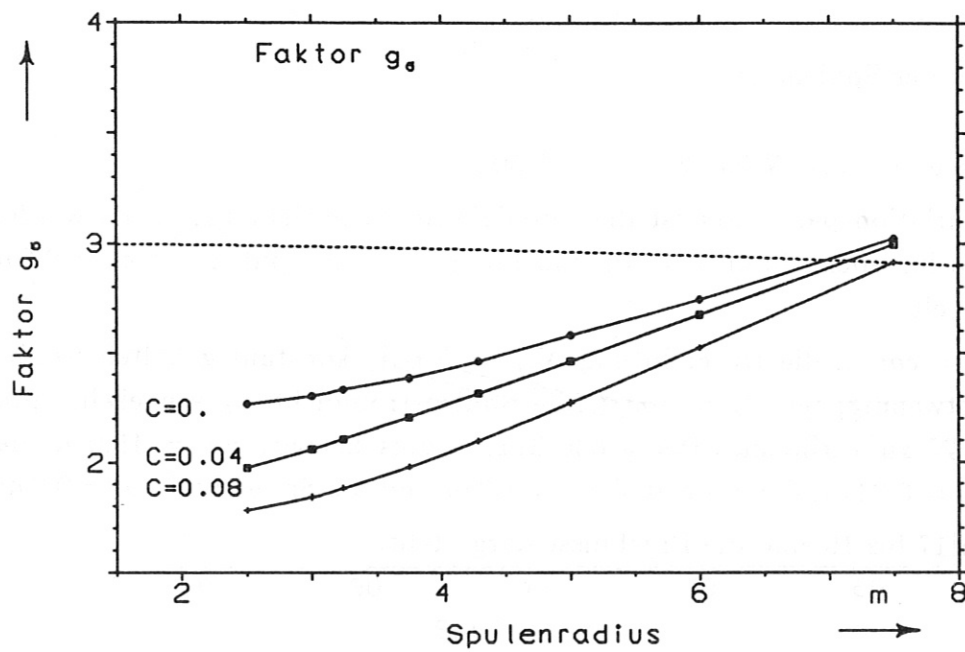
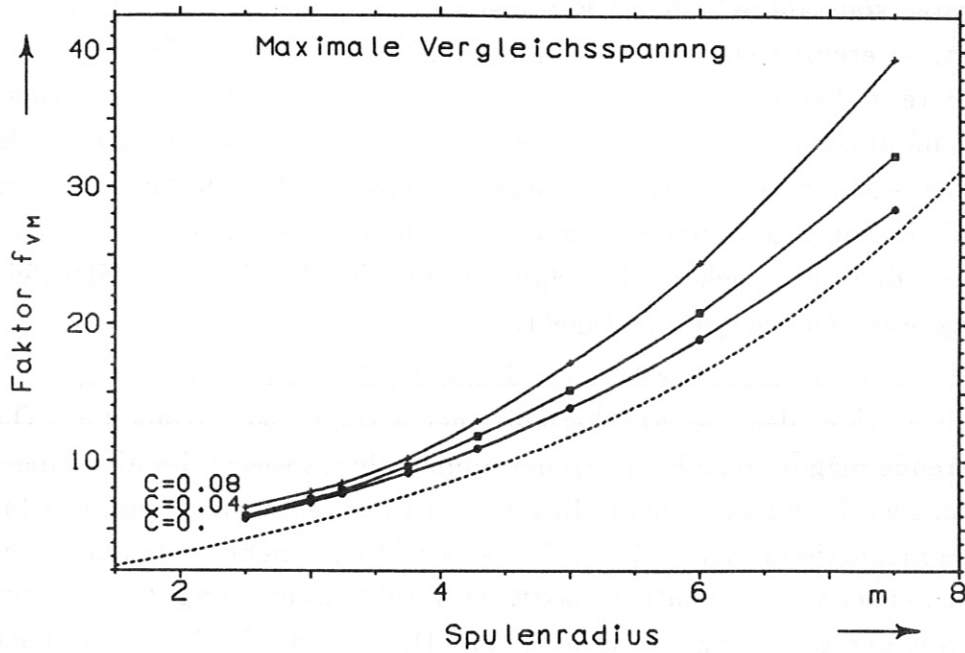


Bild 16: Relative maximale Vergleichsspannung $f_{VM} = \sigma_{vM_{Max}} / (B_0^2 / 2\mu_0)$ und Faktor $g_{\sigma} = \langle \Sigma |\sigma| \rangle / \sigma_V$ mit $\sigma_V = E_m / V_T$ (Virialspannung) in Abhängigkeit vom Spulenradius a . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_{VM} nach (3,29), im unteren Bild die analytische Näherung g'_{σ} nach (3,24).

Diskussion der Ergebnisse (Bilder 14 bis 16):

Wird bei ansonsten konstant gehaltenen Parametern des Spulensystems der Spulenradius a variiert, so ergibt sich bei der Feldüberhöhung an den Spulen ein flaches Minimum. Im Bereich dieses Minimums ist der Einfluß der toroidalen Spulenauslenkung c ebenfalls minimal. Die analytische Näherung nach (3,6) zeigt in dem betrachteten Bereich dieses Minimum nicht; sie ist eine monoton wachsende Funktion von a . Die Energieüberhöhung im Spulensystem nimmt mit wachsendem Spulenradius a ab. Das bedeutet, daß mit zunehmendem Spulenradius der Anteil der im Streufeld lokalisierten magnetischen Energie zurückgeht.

Die relative mittlere magnetische Kraftdichte f_D der Spulen zeigt wegen des abnehmenden Streufeldes den gleichen Verlauf einer geringfügigen Abnahme. Die relative resultierende magnetische Kraft f_F der Spulen nimmt wegen des abnehmenden Streufelds mit wachsendem Spulenradius a zu. Das bedeutet, daß wegen (3,14) die resultierende magnetische Kraft F_r der Spulen selbst eine mehr als quadratische Zunahme mit a aufweist. Die relative maximale Vergleichsspannung f_{VM} in den Spulen nimmt mit der Erhöhung von a stark zu. Die analytische Näherung nach (3,29) gibt dieses Verhalten tendenziell richtig wieder. Der Faktor g_σ ist wegen des abnehmenden Streufeldes eine monoton wachsende Funktion des Spulenradius a .

3.4.3. Variation der Spulenzahl N

Der Variationsbereich von N ist: $20 \leq N \leq 60$.

Zusätzlicher Variationsparameter ist die toroidale Spulenauslenkung c : Es werden Funktionswerte für ebene Spulen ($c=0$) und für nichtebene Spulen mit $c' = 0.6 m$ ($c=0.04$) ermittelt.

Da wegen $B_0 = const.$ die Durchflutung $NI_c = Nj_c A_c$ konstant gehalten werden muß, ist es notwendig, bei $A_c = const.$ die Spulenstromdichte j_c umgekehrt proportional mit N zu variieren. Der große Torusradius beträgt $R_0 = 15.0 m$, der Spulenradius $a = 3.24 m$, die Spulenhöhe $h = 1.0 m$ und die Spulenbreite $d = 0.6 m$.

In den Bildern 17 bis 19 sind die Ergebnisse dargestellt.

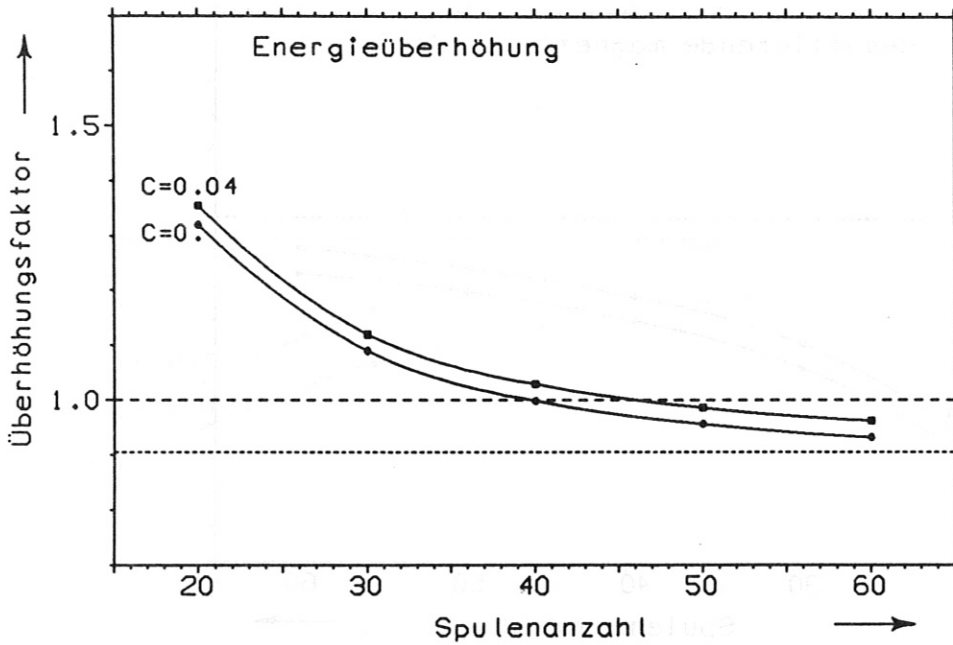
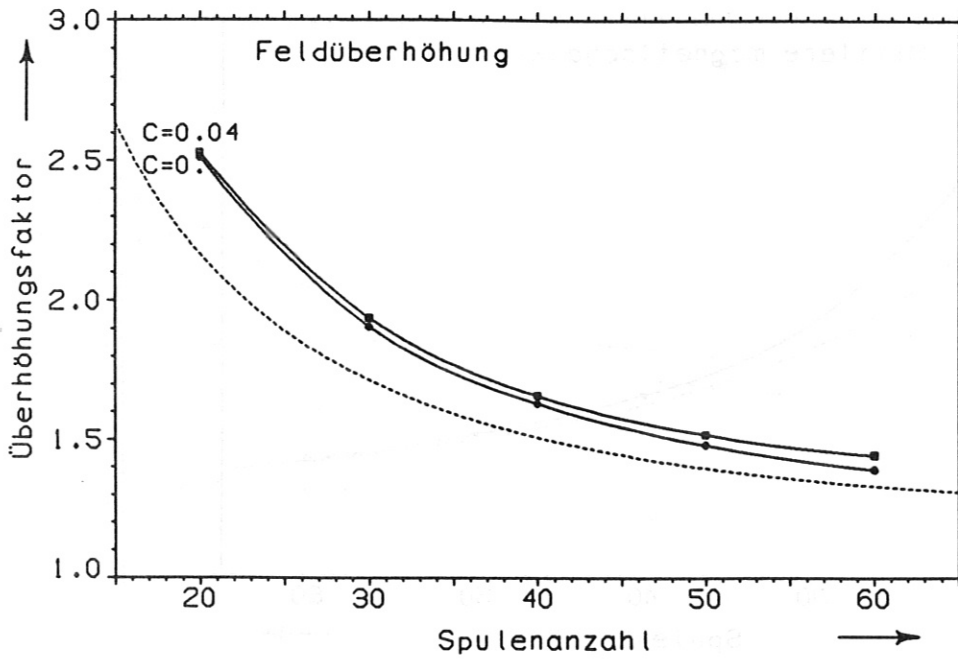


Bild 17: Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$ und Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$ in Abhängigkeit von der Spulenanzahl N . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_B nach (3,6), im unteren Bild die nicht von N abhängige analytische Funktion f'_E nach (3,9).

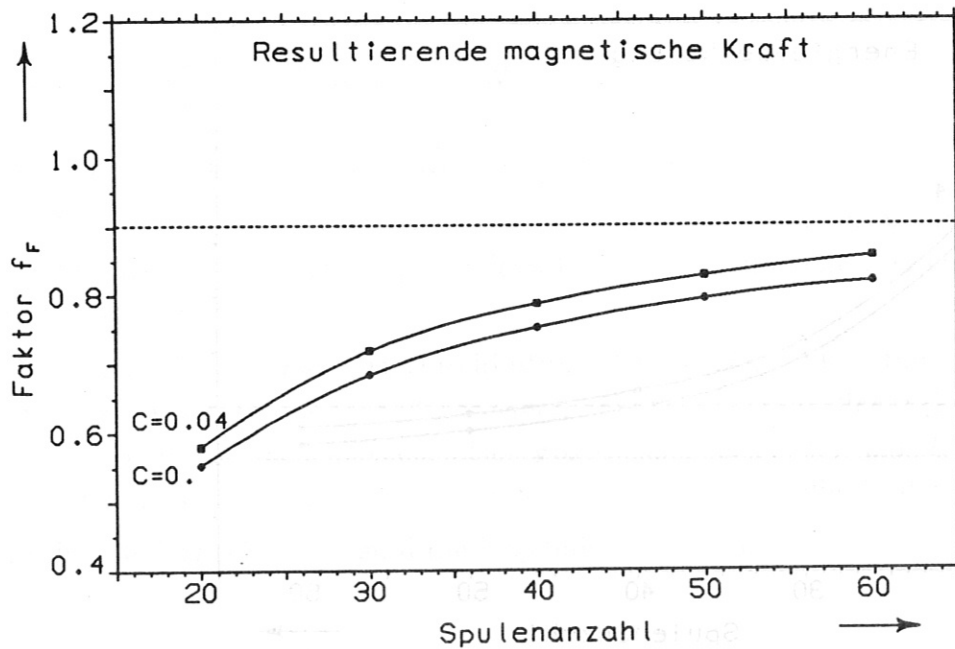
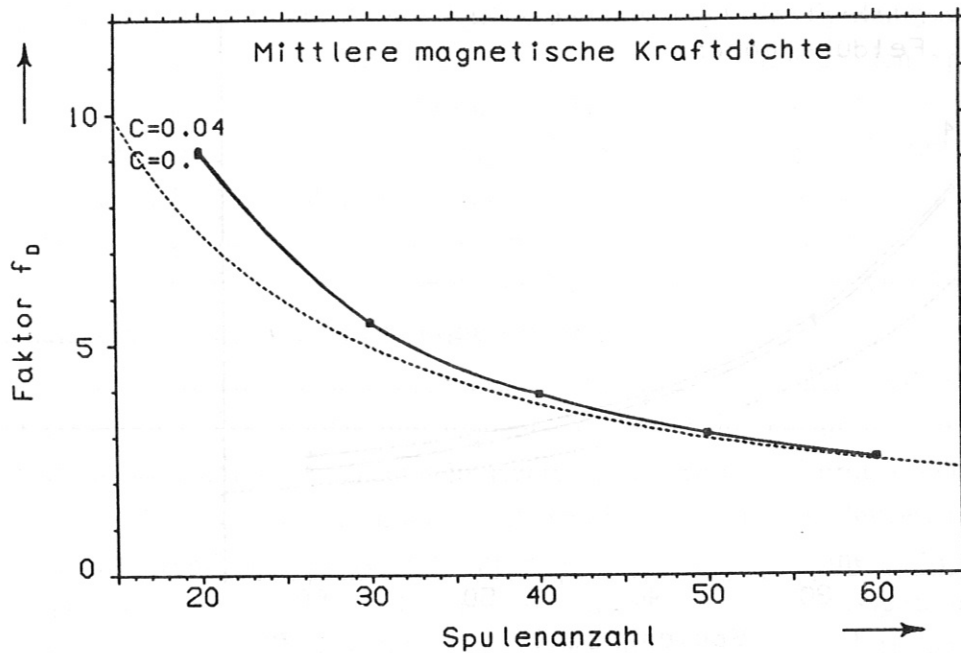


Bild 18: Relative mittlere magnetische Kraftdichte $f_D = \langle f \rangle h / ((B_0^2 / 2\mu_0)(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2}))$ und relative resultierende magnetische Kraft $f_F = F_{r_{Max}} / F_{r_{id}}$ mit $F_{r_{id}}$ nach (3,15) in Abhängigkeit von der Spulenanzahl N . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_D nach (3,13), im unteren Bild die analytische Näherung f'_F nach (3,16).

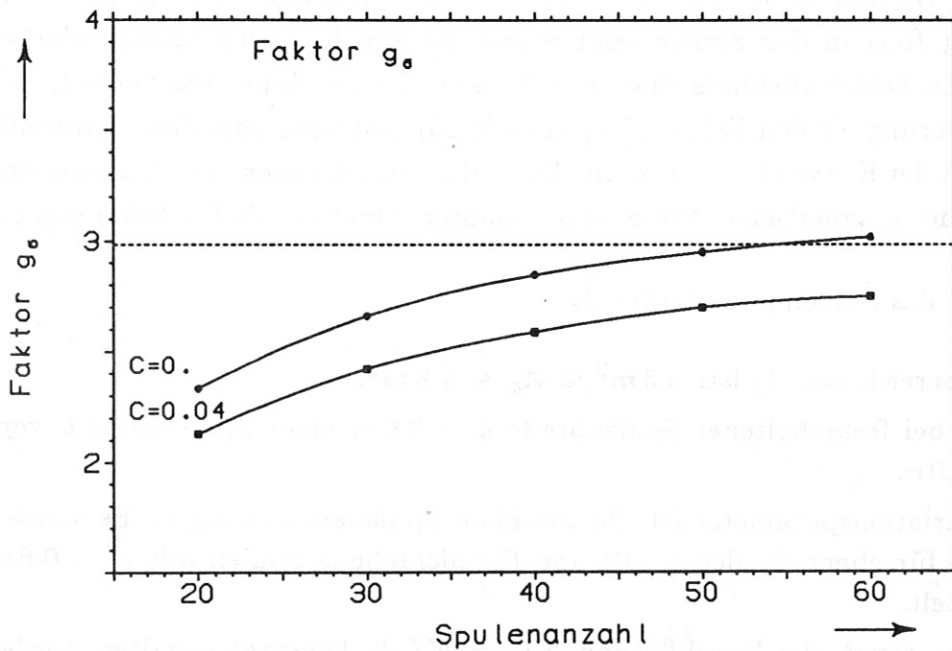
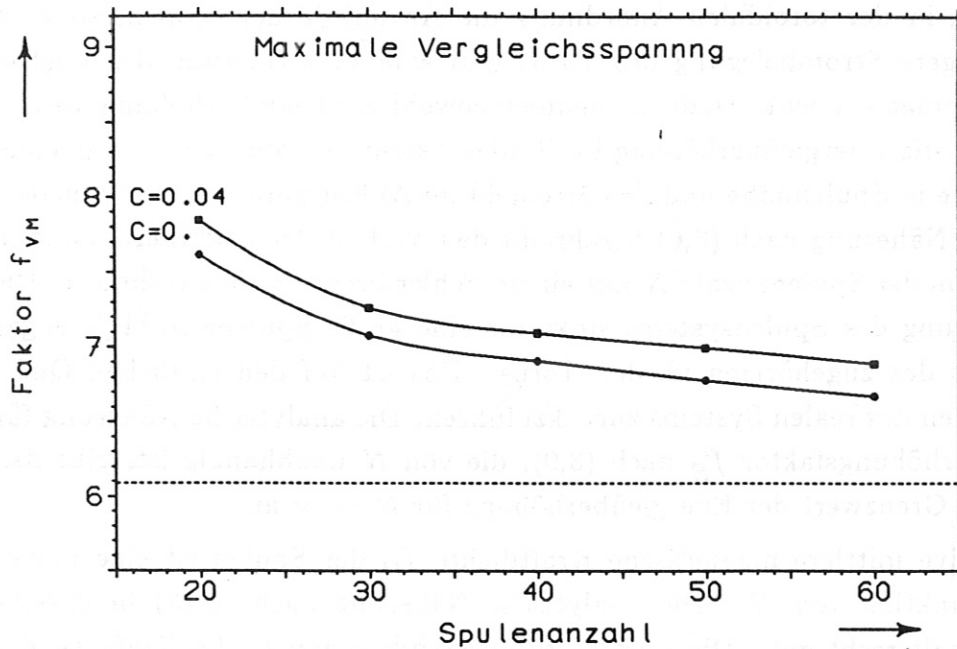


Bild 19: Relative maximale Vergleichsspannung $f_{VM} = \sigma_{vM_{Max}} / (B_0^2 / 2\mu_0)$ und Faktor $g_{\sigma} = \langle \Sigma |\sigma| \rangle / \sigma_V$ mit $\sigma_V = E_m / V_T$ (Virialspannung) in Abhängigkeit von der Spulenanzahl N . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f_{VM}^l nach (3,29), im unteren Bild die analytische Näherung g_{σ}^l nach (3,24). Diese sind nicht von N abhängig.

Diskussion der Ergebnisse (Bilder 17 bis 19):

Vergrößert man in der toroidalen Anordnung die Anzahl N der Spulen, so wird eine gleichmäßigere Strombelegung des Torus und eine Verkleinerung der Lücken zwischen den Spulen erreicht. Dadurch nehmen sowohl die Feldüberhöhung an den Spulen als auch die Energieüberhöhung im Spulensystem monoton ab. Die magnetische Flußdichte in Spulennähe und das Streufeld im Außenraum werden reduziert. Die analytische Näherung nach (3,6) beschreibt den Verlauf der Feldüberhöhung in Abhängigkeit von der Spulenanzahl N mit einem Fehler bis zu $\approx 15\%$ recht gut. Die Energieüberhöhung des Spulensystems sinkt für eine große Spulenanzahl N sogar unter den Wert des zugehörigen idealen Torus. Das ist auf den endlichen Querschnitt der Spulen des realen Systems zurückzuführen. Die analytische Näherung für den Energieüberhöhungsfaktor f'_E nach (3,9), die von N unabhängig ist, gibt den asymptotischen Grenzwert der Energieüberhöhung für $N \rightarrow \infty$ an.

Die relative mittlere magnetische Kraftdichte f_D der Spulen ist eine monoton fallende Funktion von N . Die analytische Näherung nach (3,13) beschreibt diesen Sachverhalt recht gut. Die relative resultierende magnetische Kraft f_F der Spulen steigt wegen des abnehmenden Streufelds monoton mit N an. Die analytische Näherung für den Faktor f'_F nach (3,16), die von N unabhängig ist, gibt den asymptotischen Grenzwert der Kurve für $N \rightarrow \infty$ an. Die relative maximale Vergleichsspannung f_{VM} in den Spulen zeigt wegen des abnehmenden Energieinhaltes des magnetischen Feldes ebenfalls einen mit N monoton abnehmenden Verlauf. Die analytische Näherung für den Faktor f'_{VM} nach (3,29) gibt wiederum den asymptotischen Grenzwert der Kurve für $N \rightarrow \infty$ an. Der Faktor g_σ ist wegen des abnehmenden Energieinhalts des magnetischen Feldes eine monoton zunehmende Funktion von N .

3.4.4. Variation des Spulenquerschnitts A_c

Der Variationsbereich von A_c ist: $0.3 m^2 \leq A_c \leq 1.8 m^2$.

Das entspricht bei festgehaltener Spulenbreite $d = 0.6 m$ einer Spulenhöhe h von: $0.5 m \leq h \leq 3.0 m$.

Zusätzlicher Variationsparameter ist die toroidale Spulenauslenkung c : Es werden Funktionswerte für ebene Spulen ($c=0$) und für nichtebene Spulen mit $c' = 0.6 m$ ($c=0.04$) ermittelt.

Da wegen $B_0 = const.$ die Durchflutung $NI_c = Nj_c A_c$ konstant gehalten werden muß, ist es notwendig, bei $N = const.$ die Spulenstromdichte j_c umgekehrt proportional mit A_c zu variieren. Der große Torusradius beträgt $R_0 = 15.0 m$, der Spulenradius $a = 3.24 m$ und der Spulenstrom $10.8 MA/m^2$. Die Gesamtanzahl der Spulen ist $N = 50$, d.h. pro Feldperiode gibt es $n = 10$ Spulen.

In den Bildern 20 bis 22 sind die Ergebnisse dargestellt.

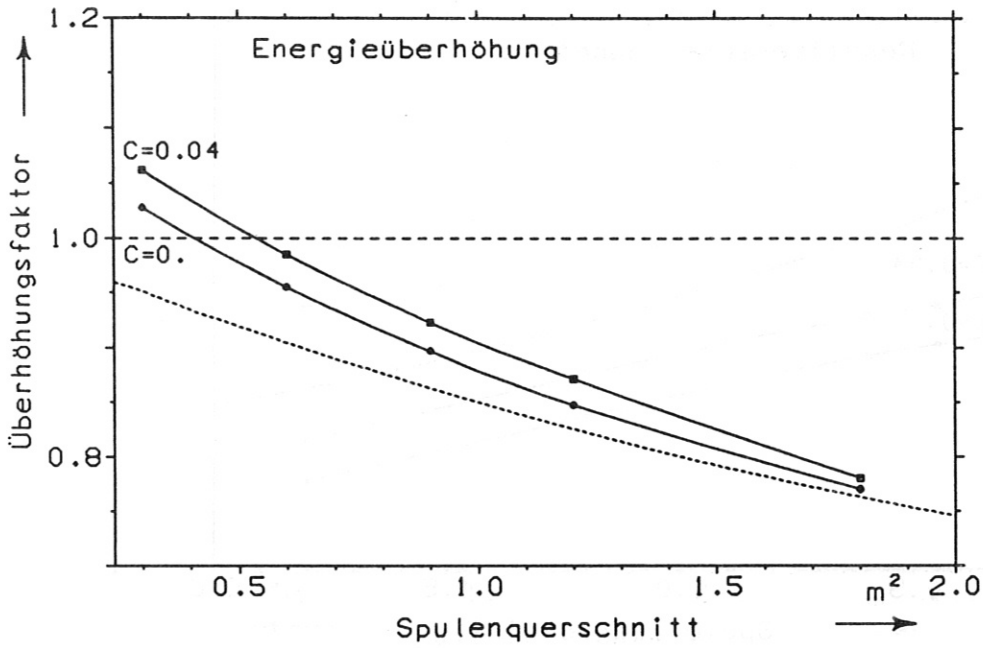
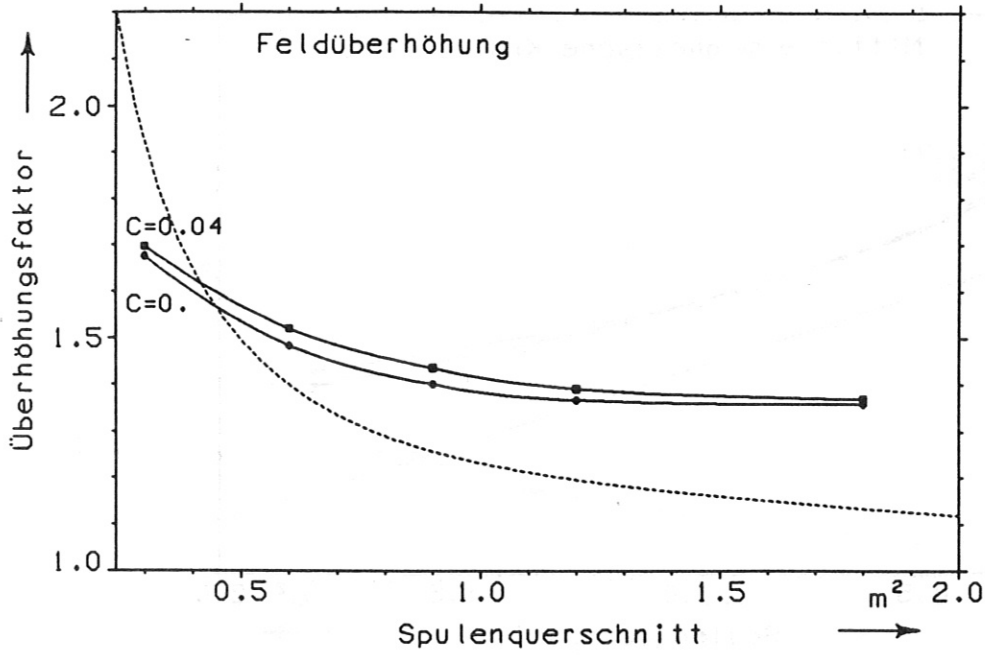


Bild 20: Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$ und Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$ in Abhängigkeit vom Spulenquerschnitt A_c . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_B nach (3,6), im unteren Bild die analytische Näherung f'_E nach (3,9).

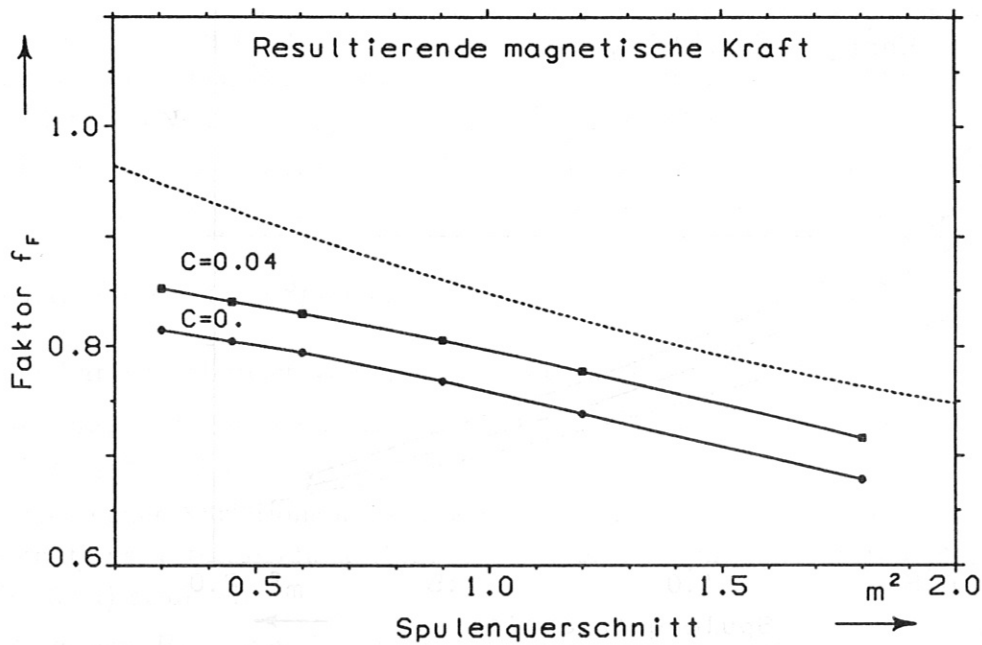
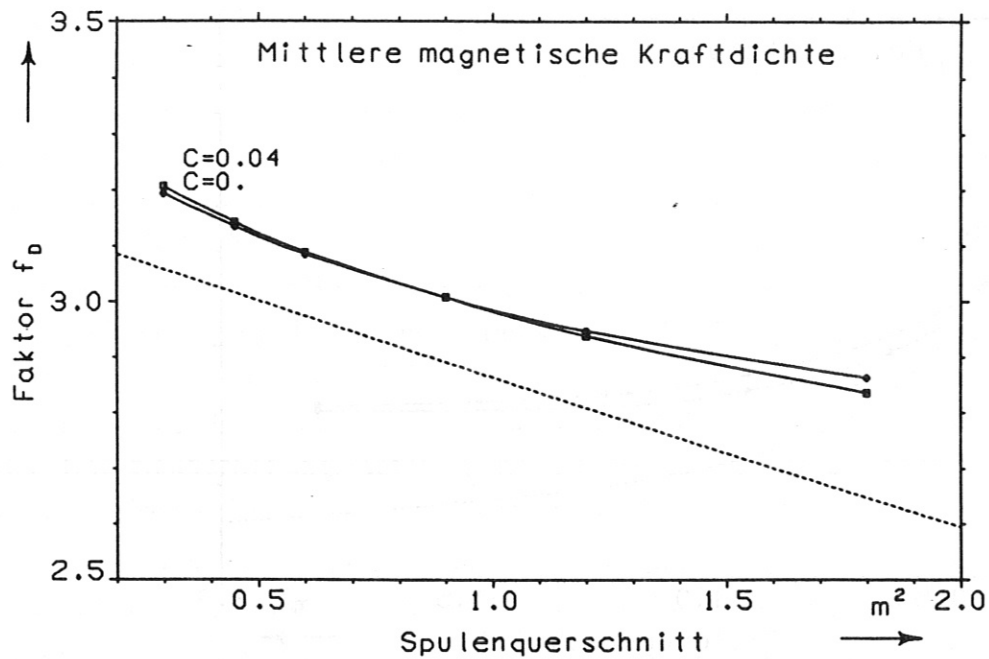


Bild 21: Relative mittlere magnetische Kraftdichte $f_D = \langle f \rangle h / ((B_0^2 / 2\mu_0)(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2}))$ und relative resultierende magnetische Kraft $f_F = F_{r_{Max}} / F_{r_{id}}$ mit $F_{r_{id}}$ nach (3,15) in Abhängigkeit vom Spulenquerschnitt $A_c = h \cdot d$. Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_D nach (3,13), im unteren Bild die analytische Näherung f'_F nach (3,16).

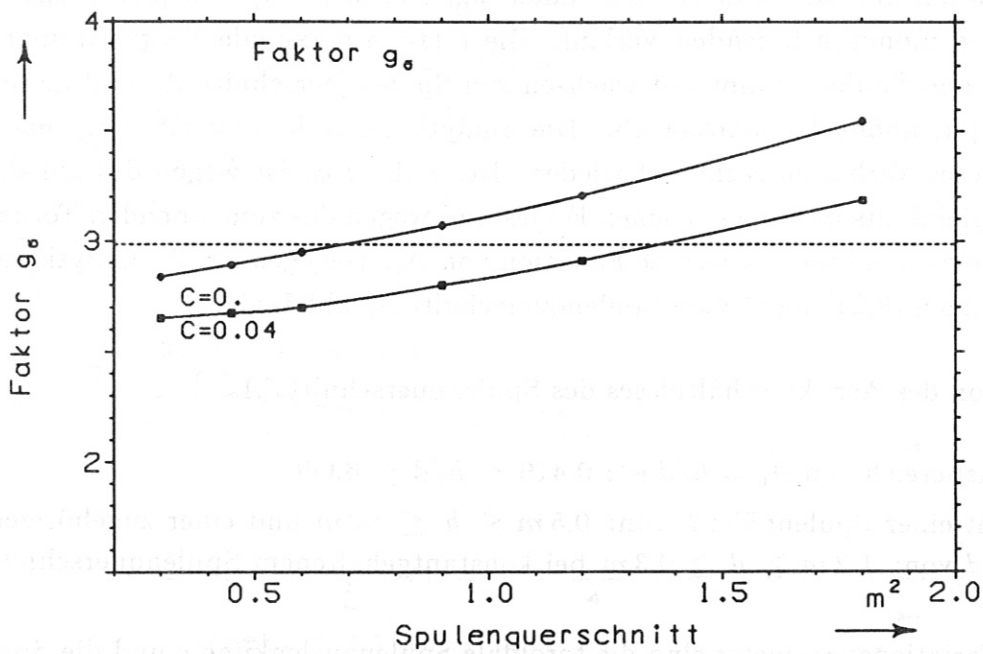
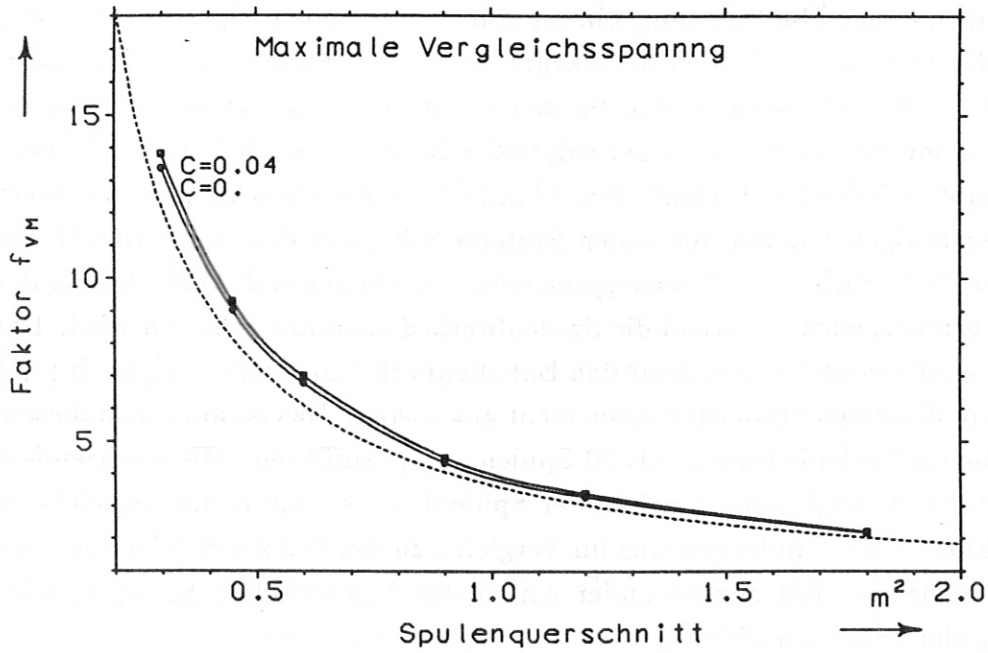


Bild 22: Relative maximale Vergleichsspannung $f_{VM} = \sigma_{vM_{Max}} / (B_0^2 / 2\mu_0)$ und Faktor $g_{\sigma} = \langle \Sigma |\sigma| \rangle / \sigma_V$ mit $\sigma_V = E_m / V_T$ (Virialspannung) in Abhängigkeit vom Spulenquerschnitt $A_c = h \cdot d$. Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_{VM} nach (3,29), im unteren Bild die analytische Näherung g'_{σ} nach (3,24). Letztere ist nicht von A_c abhängig.

Diskussion der Ergebnisse (Bilder 20 bis 22):

Bei konstant gehaltener Durchflutung nimmt mit ansteigendem Spulenquerschnitt A_c die Stromdichte j_c in den Spulen umgekehrt proportional ab. Das hat zur Folge, daß sowohl die Feldüberhöhung an den Spulen als auch die Energieüberhöhung im Spulensystem monoton abnehmen. Die analytische Näherung nach (3,6) zeigt ebenfalls einen monoton fallenden Verlauf. Der Abfall dieser Funktion ist jedoch stärker als bei den zugehörigen Kurven der realen Systeme mit einer diskreten Anzahl von Spulen, da hier die Variation des Spulenquerschnitts A_c allein durch Veränderung der Spulenhöhe h erreicht wird, während die Spulenbreite d konstant gehalten wird. Dagegen gibt die analytische Näherung für den Energieüberhöhungsfaktor f'_E nach (3,9) das Verhalten in diskreten Spulensystemen recht gut wieder. Das ist auf die in diesem Falle relativ dichte Spulenbelegung mit 50 Spulen zurückzuführen. Mit wachsendem Spulenquerschnitt A_c und damit wachsender Spulenhöhe h nimmt die gespeicherte magnetische Energie des Spulensystems im Vergleich zu der des zugehörigen idealen Torus immer mehr ab. Ein zunehmender Anteil der magnetischen Energie ist im Bereich der Spulen selbst lokalisiert.

Die relative mittlere magnetische Kraftdichte f_D als auch die relative resultierende magnetische Kraft f_F der Spulen nehmen wegen der kleiner werdenden Stromdichte j_c monoton ab. Die analytischen Näherungen nach (3,13) und (3,16) zeigen ebenfalls diesen monoton fallenden Verlauf. Die relative maximale Vergleichsspannung f_{VM} in den Spulen nimmt mit wachsendem Spulenquerschnitt A_c und damit wachsender Spulenhöhe h monoton ab. Die analytische Näherung für f'_{VM} nach (3,29) gibt dieses Verhalten recht gut wieder. Der Faktor g_σ ist wegen des abnehmenden Energieinhalts des magnetischen Feldes und wegen des zunehmenden Torusvolumens V_T eine monoton wachsende Funktion von A_c . Dagegen ist die analytische Näherung g'_σ nach (3,24) nicht vom Spulenquerschnitt A_c abhängig.

3.4.5. Variation des Aspektverhältnisses des Spulenquerschnitts A_q

Der Variationsbereich von $A_q = h/d$ ist: $0.416 \leq h/d \leq 6.666$.

Das entspricht einer Spulenhöhe h von: $0.5 \text{ m} \leq h \leq 2.0 \text{ m}$ und einer zugehörigen Spulenbreite d von: $1.2 \text{ m} \geq d \geq 0.3 \text{ m}$ bei konstant gehaltenem Spulenquerschnitt $A_c = 0.6 \text{ m}^2$.

Zusätzliche Variationsparameter sind die toroidale Spulenauslenkung c und die Spulenanzahl N : Es werden Funktionswerte für ebene Spulen ($c=0$) und für nichtebene Spulen mit $c' = 0.6 \text{ m}$ ($c=0.04$) sowohl für eine Anordnung von $N = 20$ als auch von $N = 50$ Spulen ermittelt. Der große Torusradius beträgt $R_0 = 15.0 \text{ m}$, der Spulenradius $a = 3.24 \text{ m}$ und der Spulenquerschnitt $A_c = 0.6 \text{ m}^2$.

In den Bildern 23 bis 25 sind die Ergebnisse dargestellt.

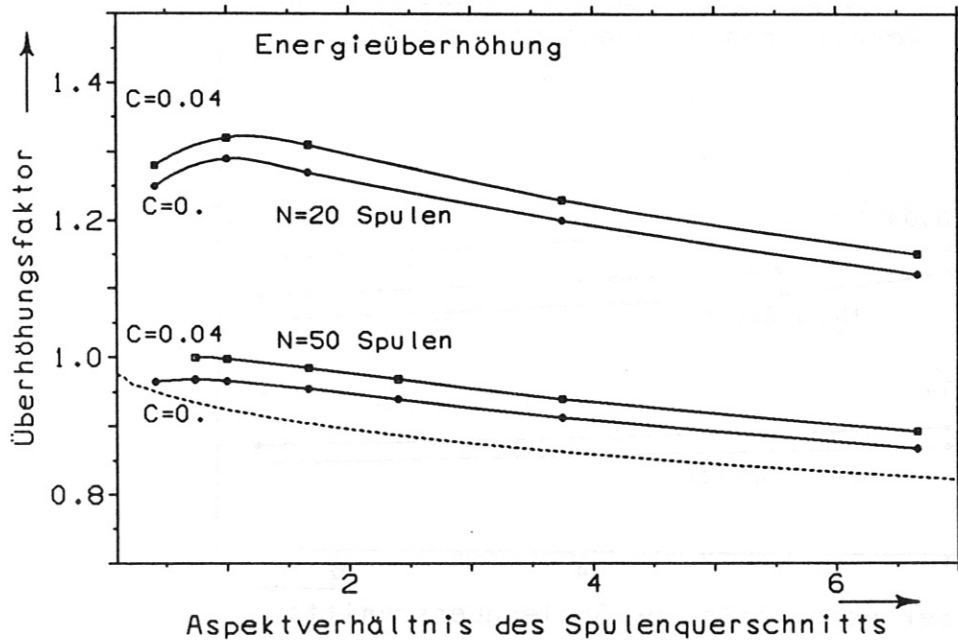
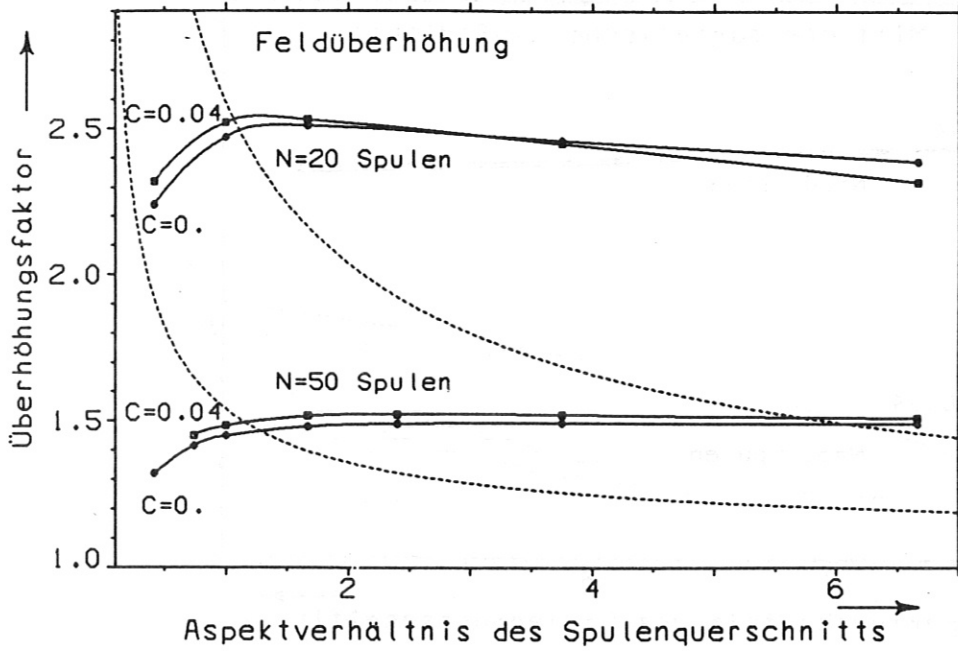


Bild 23: Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$ und Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$ in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts $A_q = h/d$. Die punktierten Linien im oberen Bild zeigen die analytischen Näherungen f'_B nach (3,6), im unteren Bild die analytische Näherung f'_E nach (3,9).

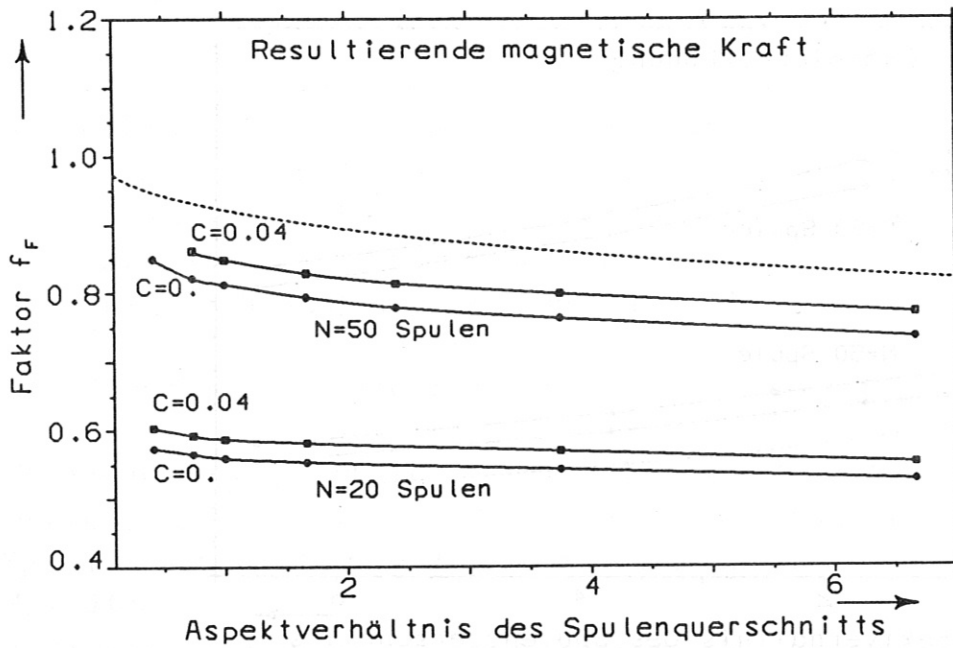
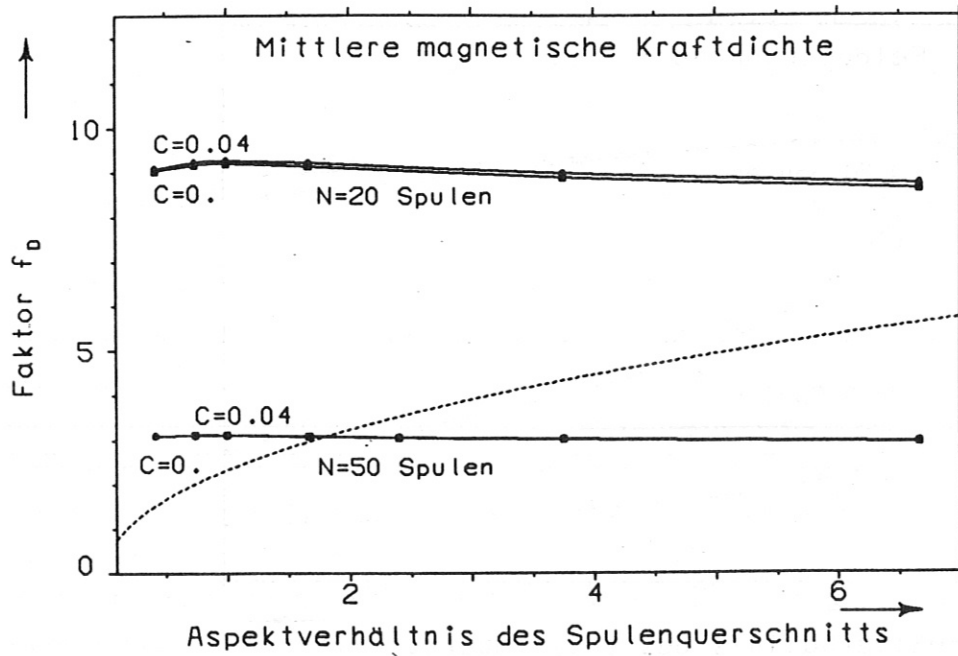


Bild 24: Relative mittlere magnetische Kraftdichte $f_D = \langle f \rangle h / ((B_0^2 / 2\mu_0) (1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2}))$ und relative resultierende magnetische Kraft $f_F = F_{r_{Max}} / F_{r_{id}}$ mit $F_{r_{id}}$ nach (3,15) in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts $A_q = h/d$. Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_D nach (3,19), im unteren Bild die analytische Näherung f'_F nach (3,16).

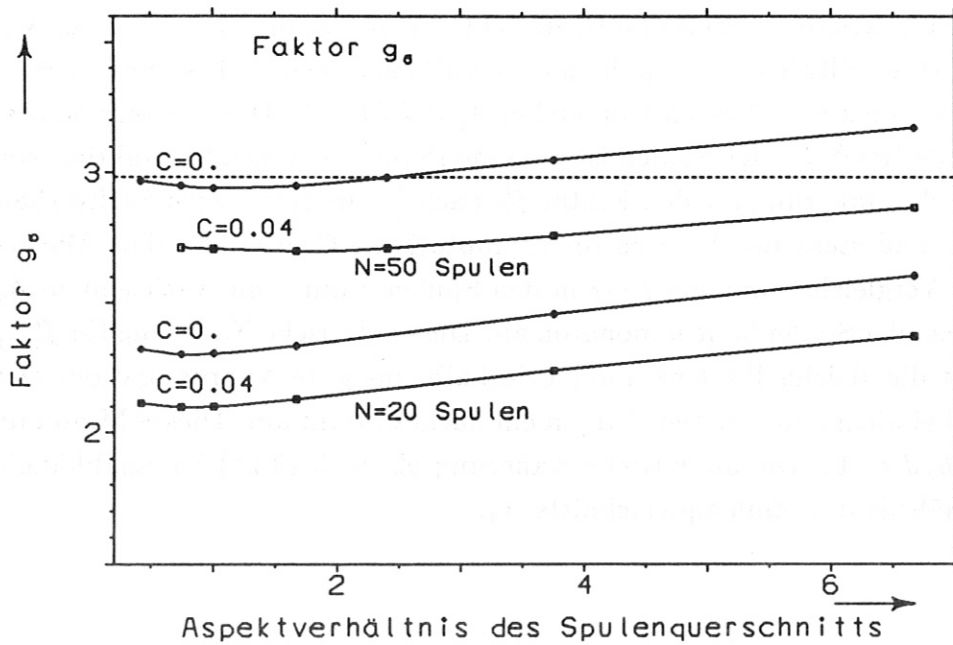
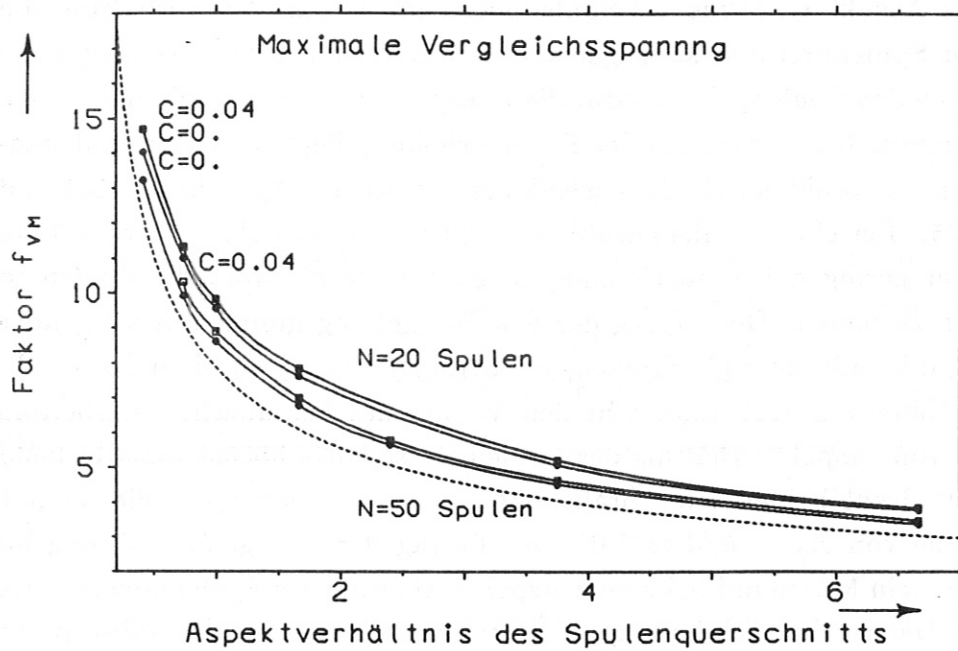


Bild 25: Relative maximale Vergleichsspannung $f_{VM} = \sigma_{vM_{Max}} / (B_0^2 / 2\mu_0)$ und Faktor $g_\sigma = \langle \Sigma |\sigma| \rangle / \sigma_V$ mit $\sigma_V = E_m / V_T$ (Virialspannung) in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts $A_q = h/d$. Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_{VM} nach (3,29), im unteren Bild die analytische Näherung g'_σ nach (3,24).

Diskussion der Ergebnisse (Bilder 23 bis 25):

Variiert man das Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts, d.h. das Verhältnis von Spulenhöhe h zu Spulenbreite d , so zeigen die berechneten Kurven sowohl für die Feldüberhöhung an den Spulen, als auch für die Energieüberhöhung im Spulensystem ein flaches Maximum. Das Maximum der Feldüberhöhung liegt bei einer Spulenzahl $N = 50$ je nach toroidaler Spulenauslenkung c zwischen $A_q = h/d \approx 2.4$ und $A_q = h/d \approx 3.75$. Bei einer Spulenzahl $N = 20$ liegt es bei $A_q = h/d \approx 1.66$. Im Interesse einer geringen Feldüberhöhung ist es deshalb sinnvoll, die Spulen so breit wie möglich zu bauen. Der Betrag der Feldüberhöhung nimmt mit steigender Spulenzahl N , d.h. mit einer gleichmäßigeren Stromverteilung auf dem Torus, ab. Die analytische Näherung nach (3,6) gibt den Verlauf des Feldüberhöhungsfaktors in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts höchst unzureichend wieder und stellt deshalb hier keine brauchbare Approximation dar. Sie ist nur gültig in der Nähe von $A_q = h/d \approx 1.0$. Der Betrag der Energieüberhöhung im Spulensystem hat sein Maximum bei einem Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts $A_q = h/d \approx 1.0$. Das ist dadurch bedingt, das bei einer Einzelspule die Induktivität ihr Maximum mit einem quadratischen Spulenquerschnitt erreicht. Die analytische Näherung für den Energieüberhöhungsfaktor f'_E nach (3,9) stellt die asymptotische Grenzkurve für $N \rightarrow \infty$ dar.

Die relative mittlere magnetische Kraftdichte f_D der Spulen zeigt bei der Variation des Aspektverhältnisses des Spulenquerschnitts ein flaches Maximum. Dieses Maximum liegt bei allen berechneten Kurven bei $A_q = h/d \approx 1$. Die relative resultierende magnetische Kraft f_F der Spulen ist eine monoton abnehmende Funktion von A_q . Die analytische Näherung für den Faktor f'_F nach (3,16) gibt diesen Sachverhalt recht gut wieder und stellt für $N \rightarrow \infty$ die asymptotische Grenzkurve dar. Die relative maximale Vergleichsspannung f_{VM} in den Spulen nimmt mit wachsendem A_q und damit wachsender Spulenhöhe h monoton ab. Die analytische Näherung für f'_{VM} nach (3,29) zeigt die gleiche Tendenz und ist deshalb eine gute Approximation. Der Faktor g_σ zeigt bei allen berechneten Kurven ein flaches Minimum. Dieses Minimum liegt bei $A_q = h/d \approx 1$. Die analytische Näherung g'_σ nach (3,24) ist unabhängig vom Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts A_q .

3.4.6. Variation der toroidalen Spulenauslenkung c

Der Variationsbereich von c' ist: $0.0\text{ m} \leq c' \leq 1.8\text{ m}$.

Das entspricht einer bezogenen Spulenauslenkung $c = c'/R_0$ von: $0.0 \leq c \leq 0.12$.

Zusätzlicher Variationsparameter ist die Spulenzahl N : Es werden Funktionswerte für $N = 20$ Spulen und für $N = 50$ Spulen ermittelt.

Wegen $B_0 = \text{const.}$ muß die Durchflutung $NI_c = Nj_c A_c$ konstant gehalten werden. Mit konstantem Spulenquerschnitt $A_c = 0.6\text{ m}^2$ beträgt deshalb bei $N = 50$ die Spulenstromdichte $j_c = 18\text{ MA/m}^2$ und bei $N = 20$ $j_c = 45\text{ MA/m}^2$. Der große Torusradius beträgt $R_0 = 15.0\text{ m}$ und der Spulenradius $a = 3.24\text{ m}$.

Die toroidale Spulenauslenkung $c = c'/R_0$ ist das wesentlichste Merkmal nicht-ebener Spulen. Aus diesem Grunde sollen in diesem Abschnitt weitere Größen in Abhängigkeit von c betrachtet werden. Im einzelnen sind dies die Normalspannungskomponenten σ_S und σ_T , die Schubspannungskomponente τ_{ST} (Indizes S und T wie in Abschnitt 3.2. erläutert) und die Virialspannung $\sigma_V = E_m/V_T$.

In den Bildern 26 bis 30 sind die Ergebnisse dargestellt.

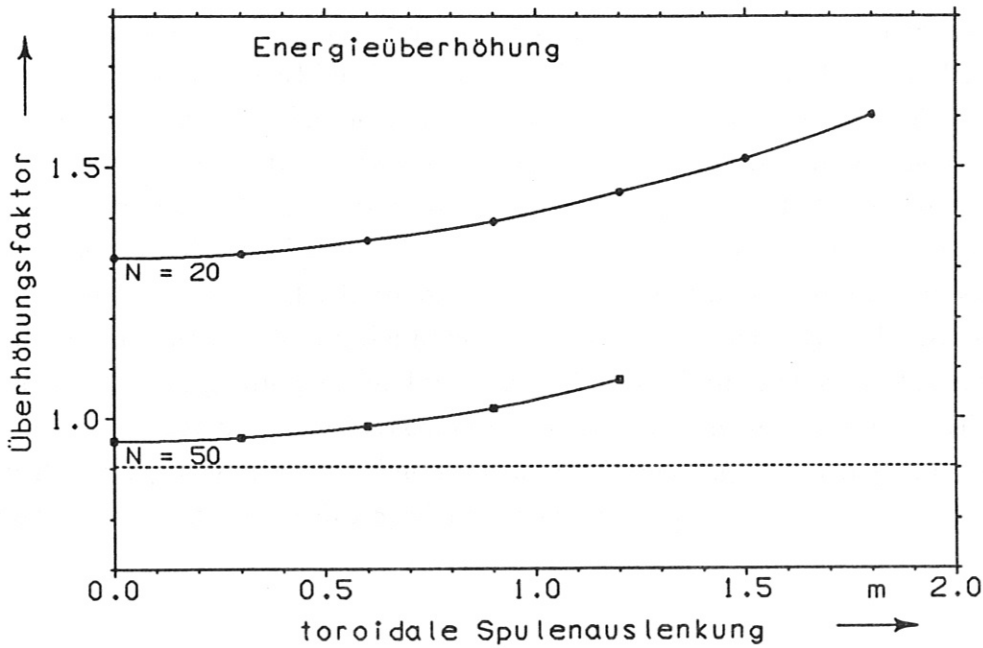
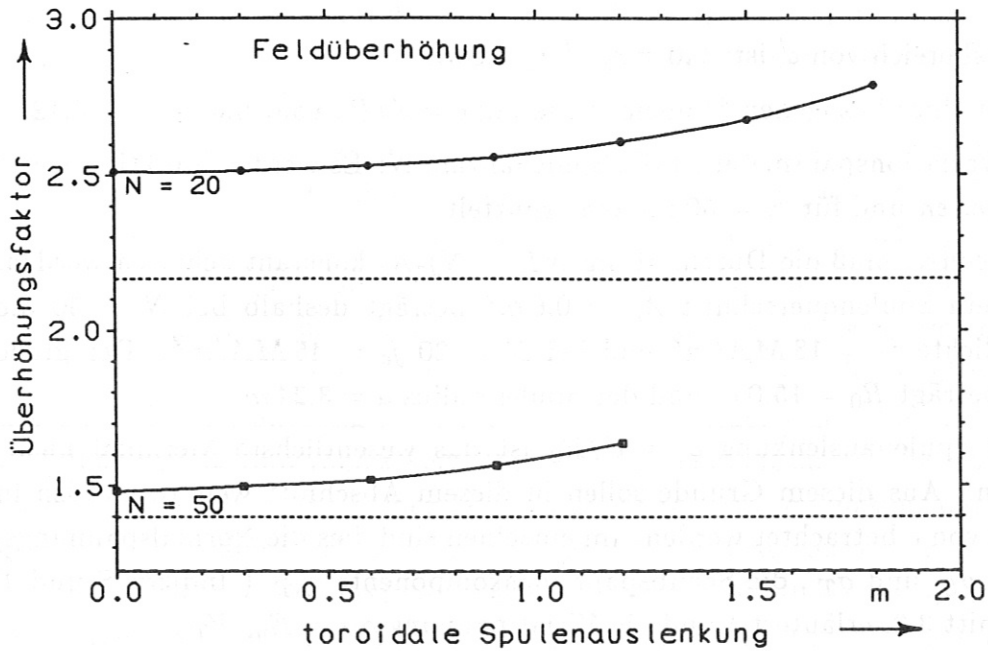


Bild 26: Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$ und Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$ in Abhängigkeit von der toroidalen Spulenauslenkung c' . Die punktierten Linien im oberen Bild zeigen die analytischen Näherungen f_B' nach (3,6), im unteren Bild die analytische Näherung f_E' nach (3,9). Diese sind nicht von c' abhängig.

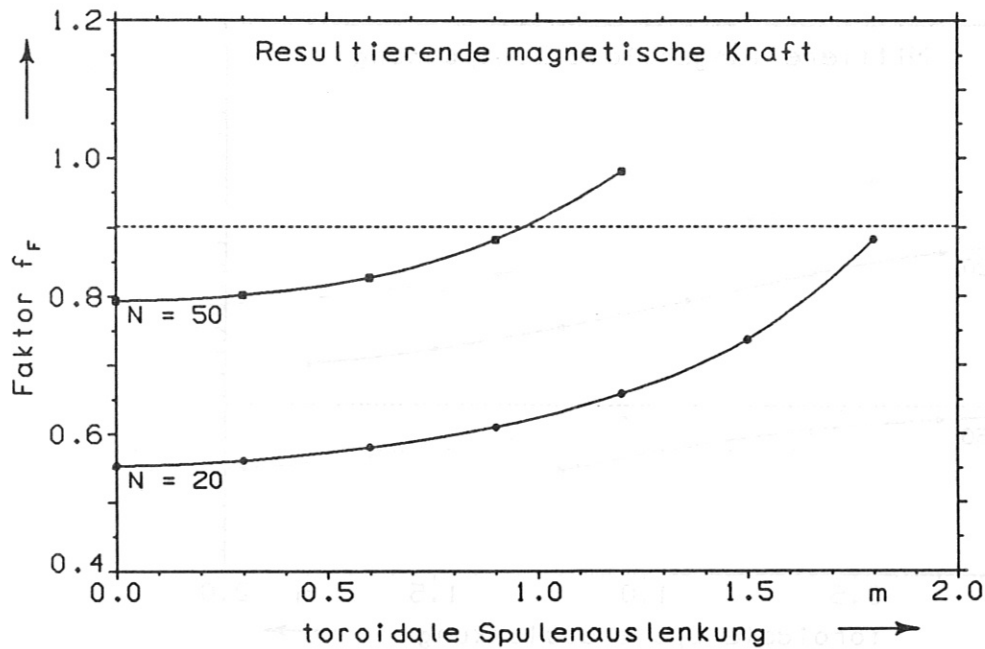
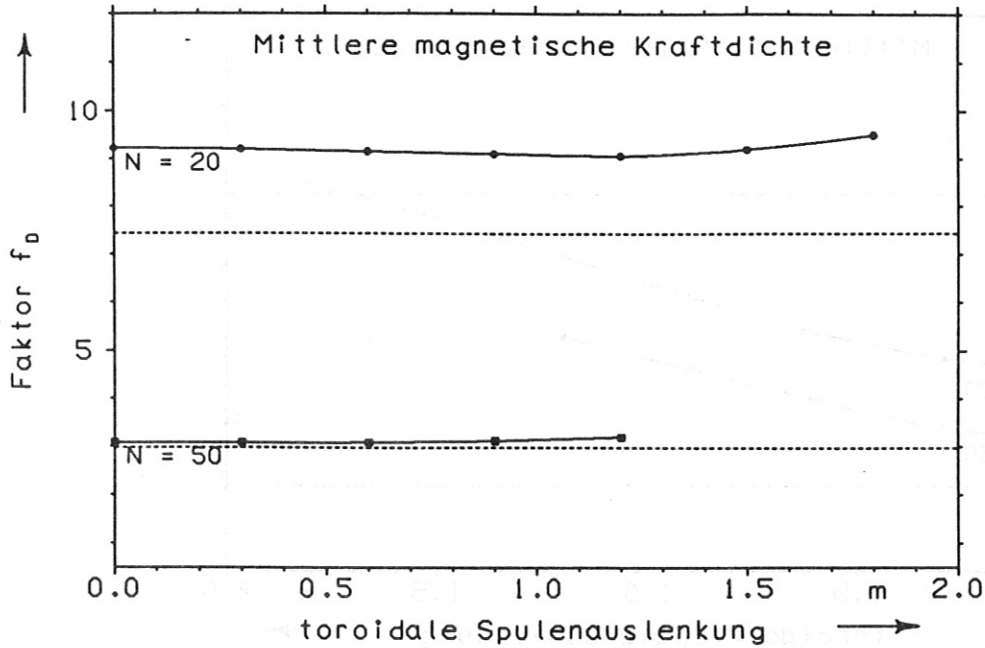


Bild 27: Relative mittlere magnetische Kraftdichte $f_D = \langle f \rangle h / ((B_0^2 / 2\mu_0)(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2}))$ und relative resultierende magnetische Kraft $f_F = F_{r_{Max}} / F_{r_{id}}$ mit $F_{r_{id}}$ nach (3,15) in Abhängigkeit von der toroidalen Spulenauslenkung c' . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_D nach (3,19), im unteren Bild die analytische Näherung f'_F nach (3,16). Diese sind nicht von c' abhängig.

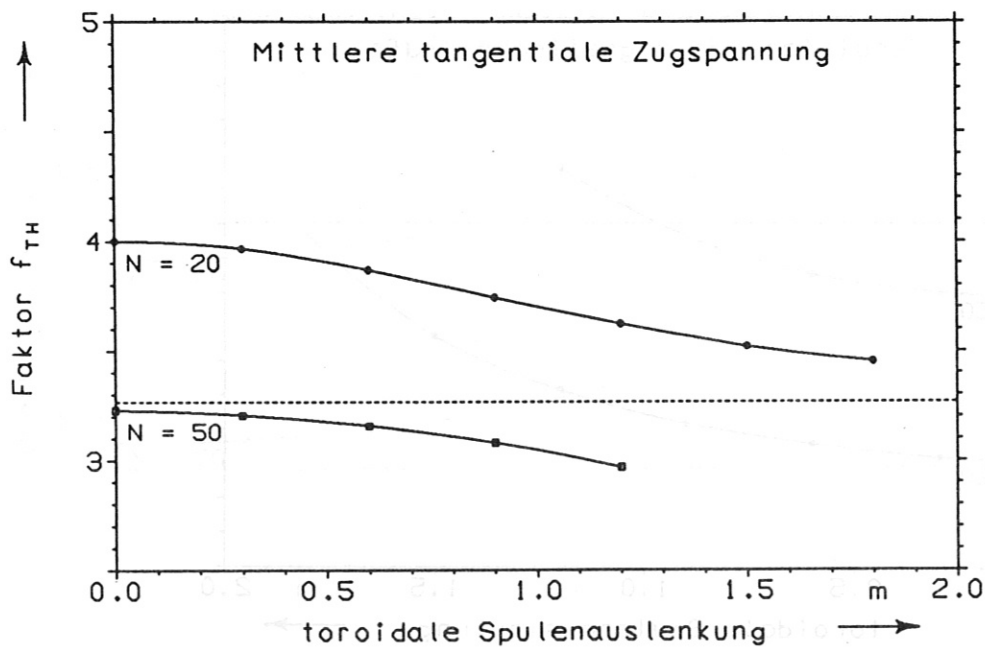
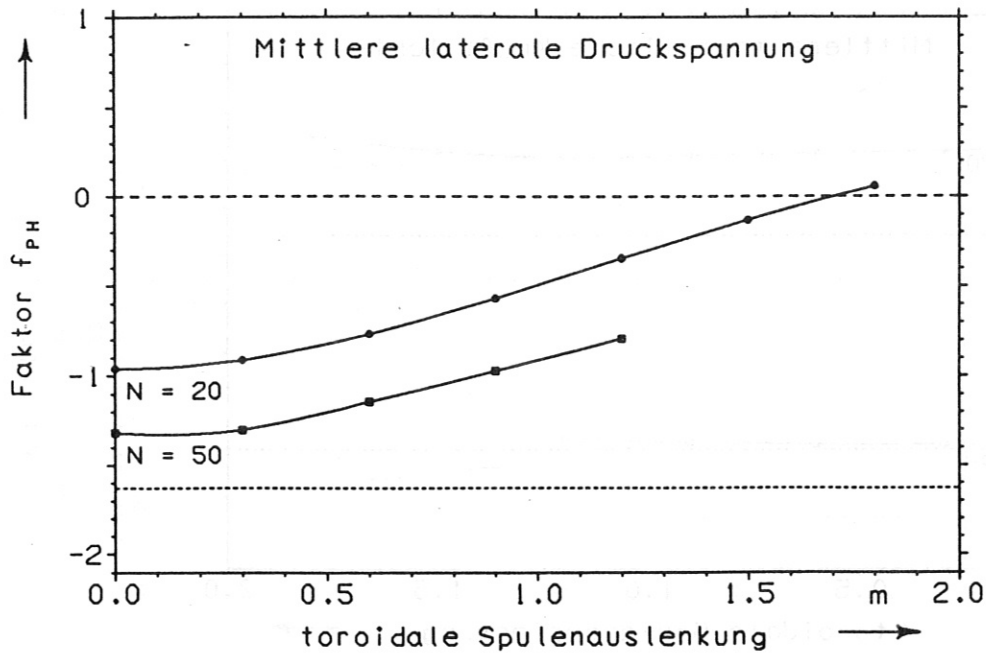


Bild 28: Relative mittlere laterale Druckspannung $f_{PH} = \langle \sigma_S \rangle / (B_0^2 / 2\mu_0)$ und relative mittlere tangentielle Zugspannung $f_{TH} = \langle \sigma_T \rangle / (B_0^2 / 2\mu_0)$ in Abhängigkeit von der toroidalen Spulenauslenkung c' . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung $\langle \sigma_\varphi \rangle / (B_0^2 / 2\mu_0)$, im unteren Bild die analytische Näherung $\langle \sigma_\theta \rangle / (B_0^2 / 2\mu_0)$. Sie sind nicht von c' abhängig.

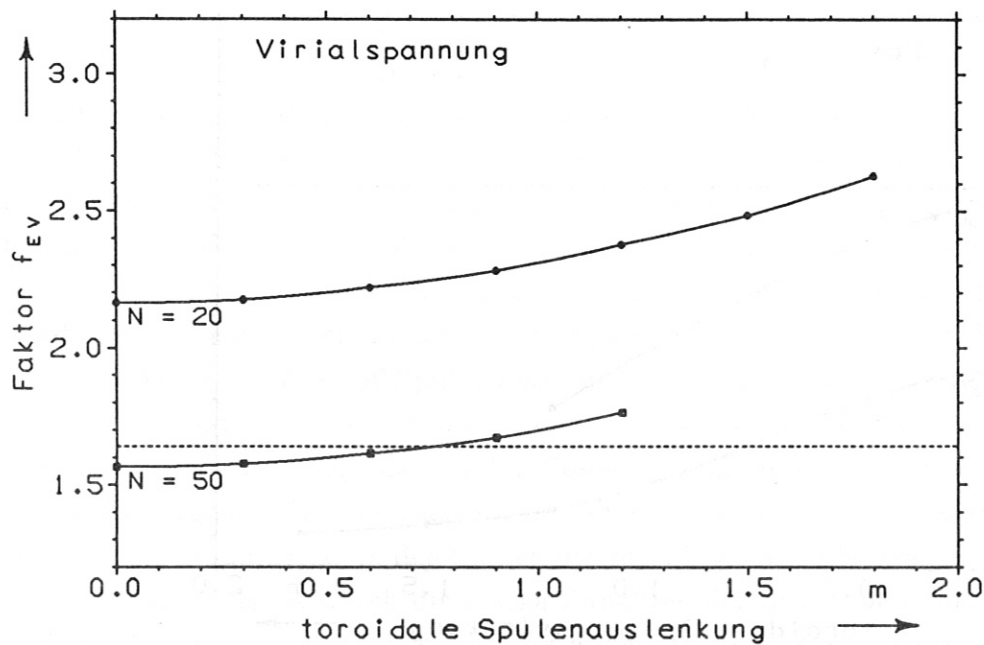
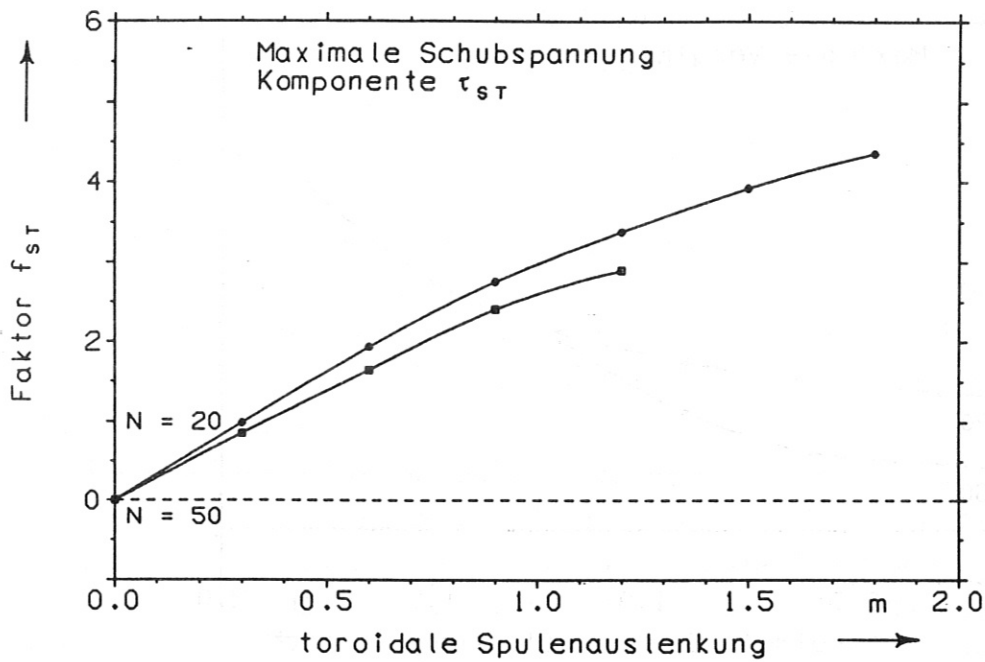


Bild 29: Relative maximale Schubspannung $f_{ST} = \tau_{ST_{Max}} / (B_0^2 / 2\mu_0)$ und relative Virialspannung $f_{EV} = (E_m / V_T) / (B_0^2 / 2\mu_0)$ in Abhängigkeit von der toroidalen Spulenauslenkung c' . Die punktierte Linie im unteren Bild zeigt die analytische Näherung $\sigma_V / (B_0^2 / 2\mu_0)$ mit σ_V nach (3,22). Sie ist nicht von c' abhängig.

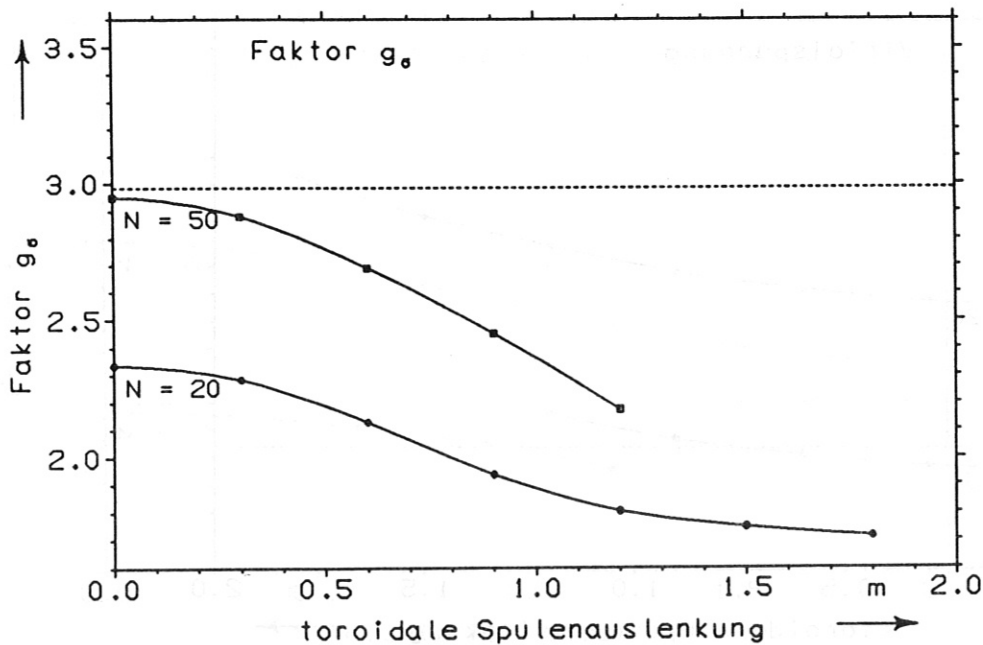
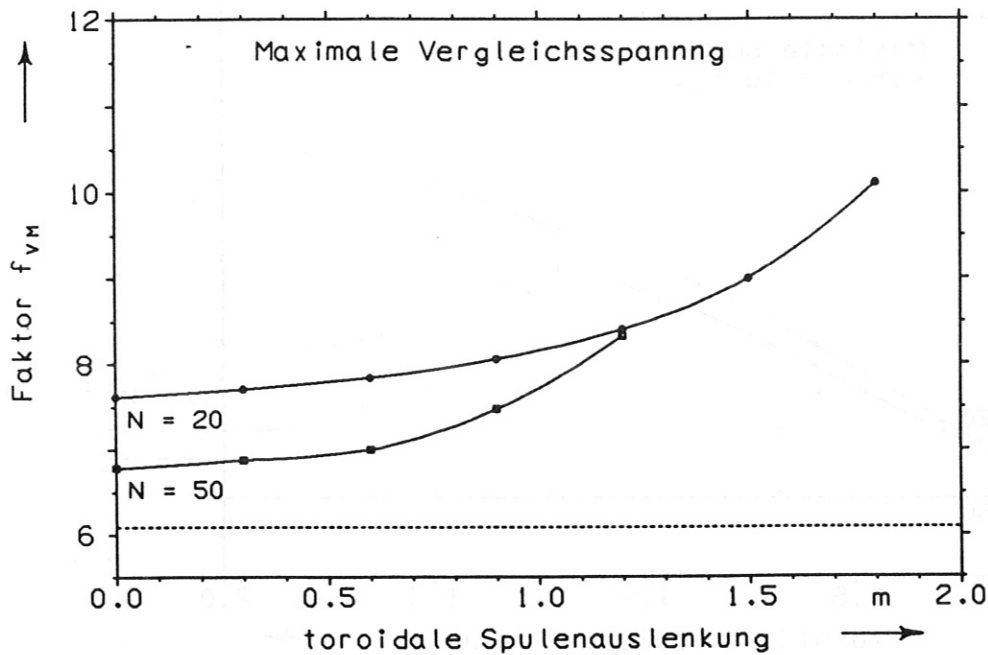


Bild 30: Relative maximale Vergleichsspannung $f_{VM} = \sigma_{vM_{Max}} / (B_0^2 / 2\mu_0)$ und Faktor $g_{\sigma} = \langle \Sigma |\sigma| \rangle / \sigma_V$ mit $\sigma_V = E_m / V_T$ (Virialspannung) in Abhängigkeit von der toroidalen Spulenauslenkung c' . Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung f'_{VM} nach (3,29), im unteren Bild die analytische Näherung g'_{σ} nach (3,24). Diese sind nicht von c' abhängig.

Diskussion der Ergebnisse (Bilder 26 bis 30):

Mit steigender toroidaler Spulenauslenkung c der Spulen nehmen sowohl die Feldüberhöhung an den Spulen als auch die Energieüberhöhung im Spulensystem monoton zu. Das liegt daran, daß Spulensysteme mit nichtebenen Spulen neben der toroidalen Feldkomponente B_φ zusätzlich eine poloidale Feldkomponente B_θ erzeugen. Die Selbstinduktivitäten der Spulen und die Induktivität des Gesamtsystems und damit die Konzentration der Energiedichte in Spulennähe wachsen mit zunehmender toroidaler Spulenauslenkung. Die analytische Näherungen für den Feldüberhöhungsfaktor nach (3,6) und für den Energieüberhöhungsfaktor nach (3,9) sind von c unabhängig. Gleichung (3,9) gibt den asymptotischen Grenzwert der Energieüberhöhung für $N \rightarrow \infty$ und $c \rightarrow 0$ an.

Die relative mittlere magnetische Kraftdichte f_D in den Spulen als auch die relative resultierende magnetische Kraft f_F der Spulen nehmen mit steigender toroidaler Spulenauslenkung c der Spulen monoton zu. Die Zunahme von f_D ist jedoch minimal, weil mit steigender toroidaler Spulenauslenkung c auch das Spulenvolumen V_{Sp} zunimmt. Die relative mittlere laterale Normalspannungskomponente f_{PH} ist eine monoton abnehmende Funktion von c . In einer dünnen toroidalen Schale mit axialsymmetrischer Stromverteilung herrscht, wie (3,17) zeigt, in toroidaler Richtung überall Druck vor. Enthält die toroidale Schale jedoch diskrete nichtebene Spulen, dann ist die Axialsymmetrie gestört und es kann lokal in lateraler Richtung Zug auftreten. Bei sehr starker toroidaler Spulenauslenkung c der Spulen kann sogar im Mittel in lateraler Richtung Zugspannung vorherrschen ($\langle \sigma_S \rangle > 0$, siehe Bild 28). Auch die relative mittlere tangentielle Normalspannungskomponente f_{TH} ist eine monoton abnehmende Funktion von c . Die relative maximale Schubspannungskomponente f_{ST} hingegen nimmt mit steigender toroidaler Spulenauslenkung c der Spulen stark zu. Es kommt also bei dem Konzept der gegenseitigen Abstützung der Spulen mit zunehmendem c zu einer ungünstigeren Spannungsverteilung in den Spulen. Dabei zeigt eine Anordnung mit 50 Spulen insgesamt niedrigere Spannungswerte als eine solche mit 20 Spulen. Die Virialspannung $\sigma_V = E_m/V_T$ ist eine monoton zunehmende Funktion von c . Das liegt daran, daß Spulensysteme mit nichtebenen Spulen einen höheren Energieinhalt haben als solche mit ebenen Spulen. Die relative maximale Vergleichsspannung f_{VM} in den Spulen nimmt mit wachsender toroidaler Spulenauslenkung c zu. Das ist durch die starke Zunahme der Schubspannungskomponenten bedingt. Der Faktor g_σ zeigt wegen der abnehmenden Normalspannungskomponenten in den Spulen und des zunehmenden Energieinhaltes des magnetischen Feldes mit steigender toroidaler Spulenauslenkung c der Spulen einen monoton abnehmenden Verlauf.

3.5. Zusammenfassung der Ergebnisse der Parameterstudien

Die *magnetische Flußdichte* im Spulenbereich ist vor allem für den Aufbau der supraleitenden Spulen und für die Auswahl des Supraleitermaterials von Bedeutung. Die Feldüberhöhung nimmt zu, wenn man die Lücken zwischen den Spulen vergrößert. Folglich steigt sie im allgemeinen mit zunehmendem großen Torusradius R_0 , mit abnehmender Spulenanzahl N und mit abnehmendem Spulenquerschnitt A_c . Sie nimmt auch bei sehr klein werdendem Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$ zu, denn wegen des Toruseffekts kommt es in diesem Falle an der Seite, die der Torusachse zugewandt ist, zu einer starken Feldüberhöhung. Beide Effekte zusammen führen dazu, daß es ein Minimum, d.h. für jede Konfiguration ein günstigstes Spulenaspektverhältnis A_m , gibt. Dieses Minimum für die Feldüberhöhung ist sehr flach und liegt je nach Spulenanzahl bei etwa $A_m = 3, \dots, 5$. Die toroidale Spulenauslenkung der Spulen sorgt dafür, daß eine poloidale Feldkomponente B_θ entsteht. Diese führt ebenfalls zur Steigerung der Feldüberhöhung. Die Feldüberhöhung ist am niedrigsten bei einer möglichst gleichmäßigen Stromdichteverteilung auf dem Torus.

Der *magnetische Energieinhalt* im Spulensystem ist für die Dimensionierung des Spulenverbandes maßgebend. Nach dem Virialtheorem skaliert das Materialvolumen des Spulensystems mit dem Energieinhalt, wenn man ein bestimmtes zulässiges Niveau der mechanischen Spannungen in der stromtragenden toroidalen Schale zugrundelegt. Der magnetische Energieinhalt skaliert mit dem Quadrat der magnetischen Flußdichte B_0 auf der magnetischen Achse. Die Energieüberhöhung in der stromtragenden toroidalen Schale nimmt wie die Feldüberhöhung bei größer werdenden Lücken zwischen den Spulen zu. In diesem Falle vergrößert sich auch das Streufeld der Konfiguration. Die magnetische Energie des Streufeldes erreicht in den Parameterstudien maximale Werte von bis zu 90 % der Energie des zugehörigen idealen Torus; in realistischen Konfigurationen mit optimierten Parametern liegt sie im Bereich von 20 % oder darunter. (Im Gegensatz dazu können sich beim "Torsatron" [8] mehr als vier Fünftel der gespeicherten magnetischen Energie im Streufeld befinden.) Der magnetische Energieinhalt des Spulensystems kann auch unter den Wert des zugehörigen idealen Torus absinken. Das ist auf den endlichen Querschnitt der Spulen des realen Systems zurückzuführen. Mit zunehmender toroidaler Spulenauslenkung nimmt die Energieüberhöhung wegen der wachsenden poloidalen Feldkomponente B_θ monoton zu.

Die *magnetischen Kräfte* in den Spulen sind eine Folge der Energiespeicherung im magnetischen Feld und belasten das Material. Sie skalieren mit dem Quadrat der magnetischen Flußdichte B_0 auf der magnetischen Achse. Neben der magnetischen Kraftdichteverteilung $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$, die die Eingangsgröße für die mechanische Spannungsanalyse bildet, ist die resultierende Kraft auf die Einzelspule des Systems

von Bedeutung. Diese resultierende Kraft ist im wesentlichen auf die Torusachse hin gerichtet. Die resultierende Kraft auf ein Spulensegment der toroidalen Schale des idealen Torus skaliert wie der magnetische Energieinhalt mit a^2 . In einem System diskreter Spulen mit endlichen Abmessungen wächst die resultierende Kraft auf die Einzelspule sogar stärker (etwa mit $a^{2.6}$ für $c = 0.08$ und $N = 20$ Spulen, siehe Bild 15) an. Bezieht man die resultierende Kraft einer Einzelspule auf die eines Spulensegments des idealen Torus, so nimmt sie mit wachsendem Streufeld, d.h. mit zunehmendem großen Torusradius R_0 und mit abnehmender Spulenzahl N , ab. Mit zunehmender toroidaler Spulenauslenkung c der Spulen nimmt die resultierende Kraft auf die Einzelspule des Systems mit kontinuierlich ansteigendem Gradienten $\frac{\partial}{\partial c}$ monoton zu.

Die *mechanischen Spannungen* in den Spulen eines toroidal angeordneten Spulensystems skalieren wie die magnetischen Kräfte mit dem Quadrat der magnetischen Flußdichte B_0 auf der magnetischen Achse. Die Maximalwerte der mechanischen Spannungen, d.h. die der Vergleichsspannung σ_{vM} und vor allem die der Schubspannungskomponenten, dürfen die zulässigen Werte nicht überschreiten. Die maximale Vergleichsspannung $\sigma_{vM_{Max}}$ der toroidalen Schale steigt mit zunehmendem Spulenzahl a besonders stark an (durchschnittlich etwa mit $a^{1.7}$ für die Kurven in Bild 16). Die analytische Näherung nach (3,29) gibt dieses Verhalten qualitativ richtig wieder. Die maximale Vergleichsspannung $\sigma_{vM_{Max}}$ steigt ebenfalls mit zunehmender toroidaler Spulenauslenkung der Spulen, abnehmender Spulenhöhe h und abnehmender Spulenzahl N an. Für ein bestimmtes Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$ wird die Vergleichsspannung σ_{vM} minimal. Dieses sehr flache Minimum liegt für $N = 20$ Spulen bei etwa $A_m = 5$. Für $N > 20$ Spulen verschiebt sich das Minimum zu höheren Werten für das Spulenaspektverhältnis A_m hin. Als besonderes Merkmal von Spulensystemen mit nichtebenen Spulen nimmt die größte Schubspannungskomponente τ_{ST} mit wachsender toroidaler Spulenauslenkung c der Spulen stark zu (in erster Näherung linear mit c , siehe Bild 29).

Zusammengefaßt gilt, daß die Feldüberhöhung und die Energieüberhöhung im Spulensystem um so größer sind, je konzentrierter die Stromverteilung ist, d.h.

- je weniger Spulen das Spulensystem bilden,
- je größer die Lücken zwischen den Spulen sind,
- je kleiner der Spulenquerschnitt ist,
- je mehr der Spulenquerschnitt zum Quadrat wird.

Außerdem nehmen die beiden genannten Systemgrößen mit steigender toroidaler Spulenauslenkung c der Spulen wegen der zusätzlichen poloidalen Feldkomponente B_ϑ zu. Das ist im Einklang mit der Beziehung $E_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$.

Für das Konzept der *gegenseitigen Abstützung* einer toroidalen Anordnung von Spulen durch Bildung einer vollständigen *toroidalen Schale* mit konstanter Flußdichte B_0 auf der magnetischen Achse gilt: Die mittlere magnetische Kraftdichte in den Spulen nimmt im allgemeinen mit wachsendem magnetischen Streufeld zu, wohingegen die resultierende magnetische Kraft der Spulen im allgemeinen um so größer ist, je kleiner das magnetische Streufeld ist. Außerdem steigt die resultierende magnetische Kraft mit wachsender toroidaler Spulenauslenkung c der Spulen an. Die maximale Vergleichsspannung $\sigma_{vM_{Max}}$ in den Spulen nimmt um so mehr zu, je größer das Verhältnis von Spulenradius a zu Spulenhöhe h und die toroidale Spulenauslenkung c sind. Ein besonderes Merkmal von Systemen mit nichtebenen Spulen ist die starke Zunahme der Schubspannungen bei wachsender toroidaler Spulenauslenkung der Spulen.

Nachzutragen bleibt noch, daß die Ergebnisse der Spannungsanalyse, die mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FE) ermittelt werden, einer kritischen Bewertung bedürfen. Es gibt mehrere Faktoren, die die Rechengenauigkeit beeinflussen. Zunächst ist das verwendete FE-Modell trotz der großen Elementanzahl ziemlich grob, denn es gibt z.B. in radialer Richtung keine Unterteilung. Außerdem sind die Elemente im allgemeinen Quader mit unterschiedlichen Seitenabmessungen. Das kann bei den gegebenen Aspektverhältnissen der Abmessungen zu Fehlern bis zu etwa 15 % führen [43]. Die Spannungswerte auf den Randflächen werden durch Interpolation bestimmt, so daß hier weitere Fehler entstehen können. Die ermittelten maximalen Spannungswerte sind Maxima an den Rechenpunkten und nicht unbedingt die absoluten Maximalwerte. Zur Ermittlung der absoluten Maximalwerte wäre für jeden Einzelfall eine Detailstudie erforderlich. Die Ergebnisse werden ferner dadurch beeinflußt, daß die Kraftdichteverteilung über dem Spulenradius nicht berücksichtigt ist, sondern daß mit Mittelwerten der Kraftdichte gemäß (3,2) gerechnet wird. Das ist jedoch von geringerer Bedeutung, da die mechanischen Spannungen integrale Größen der Kraftdichten sind [44]. Trotz der dargelegten Einschränkungen hinsichtlich der Genauigkeit haben die Ergebnisse ihre Bedeutung, da es bei den Parameterstudien in erster Linie auf die relative Abhängigkeit von den Variationsparametern ankommt. Für die genaue Ermittlung lokaler Spannungswerte, insbesondere von Spannungsmaxima, sind jeweils Detailstudien erforderlich, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen.

4. Simultane Parametervariation in toroidalen Spulensystemen

4.1. Allgemeines

In diesem Kapitel werden die Systemgrößen einer toroidalen Spulenanordnung mit ebenen und nichtebenen Spulen unter der Voraussetzung, daß die geometrischen Parameter einer simultanen Variation unterzogen werden, betrachtet. Dabei werden der große Torusradius R_0 , der Spulenzradius a und die Spulenhöhe h gleichzeitig in der Weise variiert, daß das Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$ und das Verhältnis a/h von Spulenzradius und Spulenhöhe konstant bleiben. Die analytischen Näherungen für den Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$ und den Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$, sowie für die relative Virialspannung f_{EV} und die relative maximale Vergleichsspannung f_{VM} des idealen Torus mit endlicher Wandstärke h sind unter diesen Voraussetzungen konstante Größen, da sie nur von den obengenannten dimensionslosen Verhältnissen abhängen, wie die Gleichungen (3,6), (3,9), (3,22) und (3,26) zeigen.

Bei der Variation wird eine konstante magnetische Flußdichte auf der magnetischen Achse B_0 vorausgesetzt. Der Zusammenhang mit der mittleren Stromdichte j_0 in der Wandung ist

$$B_0 = \mu_0 j_0 h. \quad (4,1)$$

Betrachtet man ein System aus N diskreten Spulen mit der Spulenhöhe h und der Spulenbreite d , gespeist mit der Stromdichte j_c , so folgt

$$B_0 = \mu_0 j_c h \frac{N d}{2 \pi R_0} = \mu_0 j_c d \frac{N}{2 \pi} \frac{h}{a} \frac{a}{R_0}. \quad (4,2)$$

Bei konstanter magnetischer Flußdichte B_0 auf der magnetischen Achse und konstanter Spulenzahl N muß also bei der obengenannten Variation das Produkt $\mu_0 j_c d$ konstant sein. Das bedeutet, daß mit zunehmenden geometrischen Dimensionen entweder bei konstanter Stromdichte j_c und konstanter Spulenbreite d das Verhältnis h/d von Spulenhöhe zu Spulenbreite immer größer und damit die einzelne Spule zunehmend scheibenförmiger wird oder daß bei konstantem Verhältnis h/d die Stromdichte j_c linear mit $1/d$ abnehmen muß.

Bei Spulensystemen in Reaktordimensionen mit supraleitenden Spulen strebt man an, die Stromtragfähigkeit des Supraleiters auszunutzen. Man wird deshalb eine Stromdichte oberhalb eines gewissen Wertes wählen. Das führt bei wachsenden geometrischen Dimensionen tendenziell zu Konfigurationen mit zunehmend filigranen Einzelspulen und zu steigender Virialspannung σ_V , da bei $j_c = \text{const.}$ der Spulenquerschnitt $A_c = h \cdot d$ wegen $B_0 \sim j_c A_c/R_0$ nur linear mit R_0 ansteigen muß.

4.2. Numerische Berechnungen

Die numerischen Berechnungen werden wiederum an einem modularen Spulensystem des L2-Stellarators durchgeführt (siehe Bild 7). Dabei werden der große Torusradius R_0 , der Spulenradius a und die Spulenhöhe h in der Weise variiert, daß das Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$ und das Verhältnis a/h von Spulenradius und Spulenhöhe konstant bleiben. Mit Hilfe des erwähnten EFFI-Programmsystems [36] werden die maximale magnetische Flußdichte an den Spulen, die Gesamtinduktivität des Spulensystems und damit der Energieinhalt des Magnetfeldes sowie die magnetische Kraftdichteverteilung in den Spulen bestimmt. Zur Berechnung der mechanischen Spannungen in den Spulen wird das Programmsystem SAP V(2) [38] benutzt. Dieses Programmsystem berechnet mit Hilfe der Methode der finiten Elemente unter Zugrundelegung linear elastischer Materialdaten und der zuvor berechneten magnetischen Kraftdichteverteilung als Eingangsgröße den mechanischen Spannungstensor S für die Elemente.

Der Variationsbereich von R_0 ist: $6.0\text{ m} \leq R_0 \leq 24.0\text{ m}$.

Der Variationsbereich von a ist: $1.296\text{ m} \leq a \leq 5.184\text{ m}$.

Der Variationsbereich von h ist: $0.4\text{ m} \leq h \leq 1.6\text{ m}$.

Dabei ist das Spulenaspektverhältnis mit $A_m = 4.63$ und das Verhältnis von Spulenradius und Spulenhöhe mit $a/h = 3.24$ konstant. Das Volumen der toroidalen Schale variiert entsprechend $V_T = 4\pi^2 R_0 a h$ zwischen der minimalen Größe $V_T = 122.8\text{ m}^3$ und der maximalen Größe $V_T = 7858.8\text{ m}^3$, d.h. es wächst mit der dritten Potenz von R_0 an.

Außerdem sind die folgenden Größen bei den Berechnungen konstant:

- Magn. Flußdichte auf der Plasmaachse	B_0	7.2 T
- Spulenstromdichte	j_c	45 MA/m ²
- Spulenbreite	d	0.6 m
- Zahl der toroidalen Feldperioden	M	5
- Spulenanzahl pro Feldperiode	n	4
- Gesamtanzahl der Spulen	N	20
- Zahl der poloidalen Feldperioden	L	2

Zusätzlicher Variationsparameter ist die toroidale Spulenauslenkung c : Es werden Funktionswerte für ebene Spulen ($c = 0$) und für nichtebene Spulen mit $c = 0.04$ ermittelt.

Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen sind in den folgenden Bildern 31 und 32 dargestellt, ihre Diskussion erfolgt in Abschnitt 4.3.

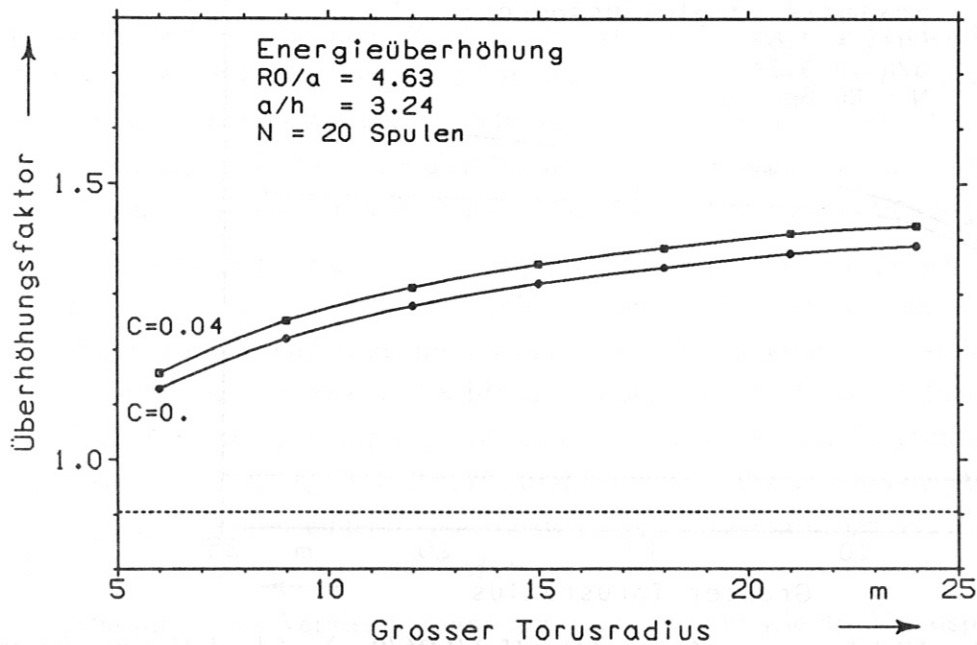
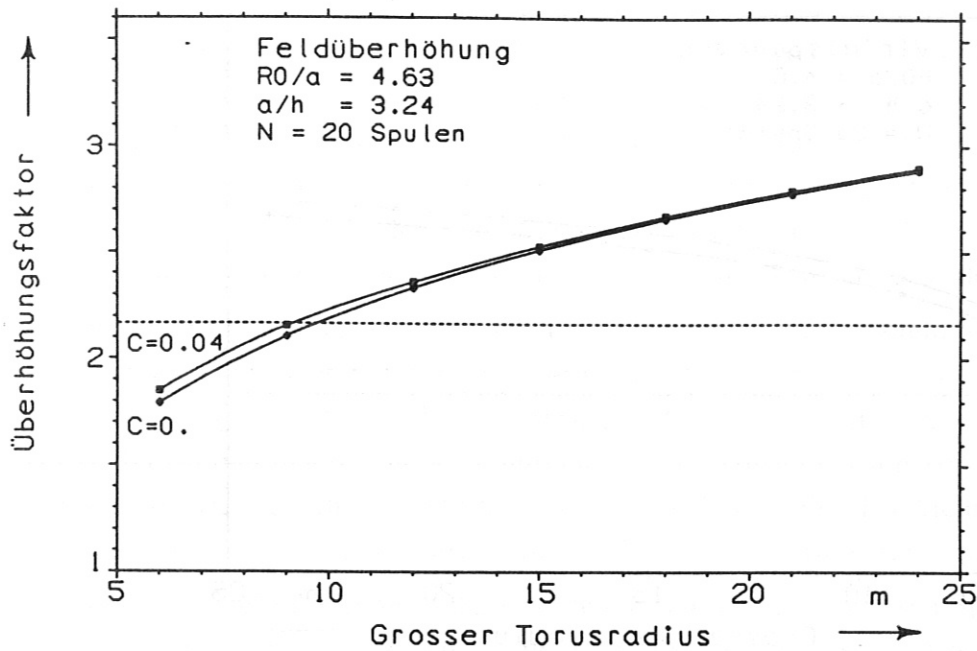


Bild 31: Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$ und Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$ in Abhängigkeit vom grossen Torusradius R_0 unter der Voraussetzung $A_m = R_0/a = 4.63 = \text{const.}$ und $a/h = 3.24 = \text{const.}$. Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Funktion f'_B nach (3,6), im unteren Bild die analytische Funktion f'_E nach (3,9).

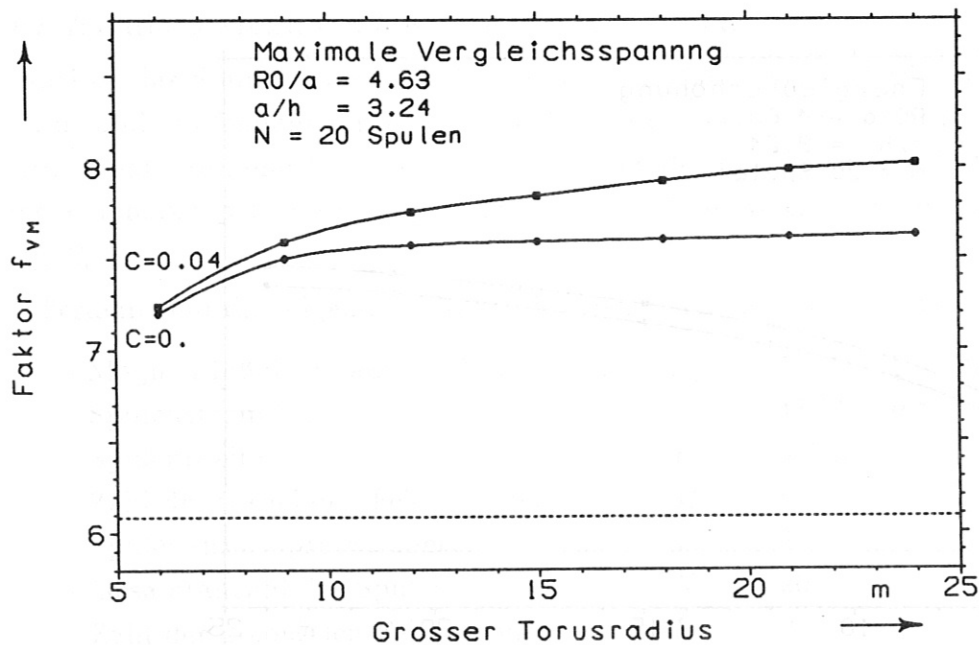
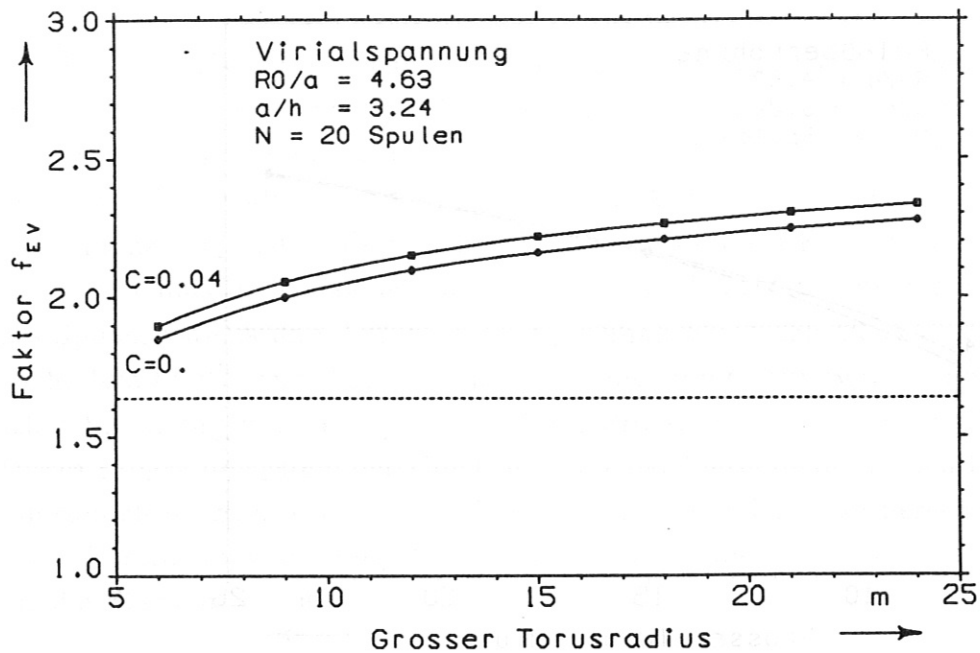


Bild 32: Relative Virialspannung $f_{EV} = (E_m/V_T)/(B_0^2/2\mu_0)$ und relative maximale Vergleichsspannung $f_{VM} = \sigma_{vM_{Max}}/(B_0^2/2\mu_0)$ in Abhängigkeit vom grossen Torusradius R_0 unter der Voraussetzung $A_m = R_0/a = 4.63 = \text{const.}$ und $a/h = 3.24 = \text{const.}$. Die punktierte Linie im oberen Bild zeigt die analytische Näherung $\sigma_V/(B_0^2/2\mu_0)$ mit σ_V nach (3,22), im unteren Bild die analytische Näherung f'_{VM} nach (3,29).

4.3. Diskussion der Ergebnisse

Wenn man die geometrischen Parameter einer toroidalen Konfiguration in der Weise variiert, daß das Spulen aspektverhältnis $A_m = R_0/a$ und das Verhältnis a/h von Spulenradius und Spulenhöhe konstant bleiben, dann sind für den "idealen Torus" die betrachteten Systemgrößen ebenfalls konstant. Bei einer Anordnung von N diskreten Spulen ergeben sich jedoch gewisse Variationen der Systemgrößen, die in den Bildern 31 und 32 dargestellt und im folgenden diskutiert werden:

Die Feldüberhöhung an den diskreten Spulen nimmt mit zunehmenden geometrischen Dimensionen wegen der größer werdenden Lücken zwischen den Spulen und des damit anwachsenden Streufeldes monoton zu. Die bei der Variation festgehaltene Anzahl N der Spulen bewirkt eine zunehmende Stromkonzentration am Ort der Spulen. Bemerkenswert ist, daß die Feldüberhöhung an den Spulen für kleine geometrische Dimensionen den Wert der analytischen Näherung nach (3,6) unterschreitet.

Die Energieüberhöhung in dem Spulensystem mit N diskreten Spulen steigt mit zunehmenden geometrischen Dimensionen wegen des wachsenden Streufeldes ebenfalls monoton an. Sie ist hier generell höher als der Wert, der durch die analytische Näherung nach (3,9) errechnet wird. Das Bild 32 zeigt, daß der magnetische Energieinhalt wegen des relativ großen Streufeldes etwa um den Faktor 1.1 bis 1.4 größer ist als der des zugehörigen idealen Torus. Der magnetische Energieinhalt des idealen Torus skaliert mit R_0^3 , folglich ergibt sich im Fall diskreter Spulen ein noch stärkerer Anstieg (etwa mit $R_0^{3.1}$ für $c = 0.04$ und $N = 20$ Spulen). Der Betrag des magnetischen Energieinhalts ergibt sich für die Konfiguration mit $R_0 = 4 m$ und $c = 0.04$ etwa zu $E_m = 4.8 GJ$ und wächst für $R_0 = 24 m$ auf $E_m = 378.5 GJ$ an.

Die Virialspannung $\sigma_V = E_m/V_T$, d.h. das Verhältnis von gespeicherter magnetischer Energie zum Volumen der toroidalen Schale, zeigt ebenso wie der Energieinhalt selbst mit zunehmenden geometrischen Dimensionen eine leicht steigende Tendenz. Sie ist etwa um den Faktor 1.8 bis 2.3 größer als der Magnetfelddruck $B_0^2/2\mu_0$ auf der Plasmaachse. Die Virialspannung beträgt also bei der betrachteten Konfiguration etwa zwischen $\sigma_V = 38.2 MPa$ und $\sigma_V = 48.2 MPa$. Die analytische Näherung nach (3,22) für den zugehörigen idealen Torus mit endlicher Wandstärke h ergibt einen Wert von etwa $\sigma_V = 30.5 MPa$.

Die maximale Vergleichsspannung $\sigma_{vM_{Max}}$ zeigt wie die Virialspannung σ_V mit zunehmenden geometrischen Dimensionen eine leicht steigende Tendenz. Sie ist etwa um den Faktor 7.2 bis 8.0 größer als der Magnetfelddruck $B_0^2/2\mu_0$ auf der Plasmaachse. Die maximale Vergleichsspannung wirkt an der Innenseite der Spulen in dem Bereich, der der Torusachse zugewandt ist und liegt zwischen $\sigma_{vM_{Max}} = 148.5 MPa$ und $\sigma_{vM_{Max}} = 165.5 MPa$. Die analytische Näherung nach (3,26) ergibt einen Wert von etwa $\sigma_{vM_{Max}} = 125.6 MPa$.

Zusammengefaßt gilt für eine toroidale Anordnung von Spulen, die zu einer vollständigen toroidalen Schale mit konstanter Flußdichte B_0 auf der magnetischen Achse ausgebildet ist, wenn die geometrischen Parameter dieser Schale einer simultanen Variation in der Weise unterzogen werden, daß das Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$ und das Verhältnis a/h von Spulenzradius und Spulenhöhe konstant bleiben: Der Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$, die Virialspannung σ_V und die maximale Vergleichsspannung $\sigma_{vM_{Max}}$ in den Spulen nehmen trotz erheblicher Zunahme der geometrischen Dimensionen und der gespeicherten magnetischen Energie nur geringfügig zu. Die Zunahme ist durch die größer werdenden Lücken zwischen den Spulen und des damit verbundenen Anwachsens des Streufeldes verursacht. Die maximale Vergleichsspannung $\sigma_{vM_{Max}}$ zeigt die gleiche, mit zunehmenden geometrischen Dimensionen leicht steigende Tendenz wie die Virialspannung σ_V , so daß man aus der gespeicherten magnetischen Energie und den Volumina der Anordnung die maximale Vergleichsspannung in den Spulen (zumindestens für kleine toroidale Spulenauslenkungen) abschätzen kann. Näherungsweise können die betrachteten Systemgrößen sogar als konstant ansehen werden.

5. Optimierung eines modularen Stellarator-Spulensystems

5.1. Allgemeines

Zur Grundlage der folgenden Betrachtungen wird eine Konfiguration des “Advanced Stellarator” [9] vom W7AS-Typ [12] gewählt, die die Bezeichnung ASRA6C trägt. Diese Konfiguration ist die Referenzkonfiguration der Studie [45], in der Fragen zur Physik und zur Technologie modularer Stellarator-Reaktoren behandelt sind. Die Bezeichnung ASRA6C bedeutet: “Advanced Stellarator Reactor” mit Spulen, beschrieben durch ein “Anytisches Windungsgesetz” und 6 Spulen pro Feldperiode, Version C. Die zentralen Fäden der Spulen folgen analytischen Gleichungen, wie sie in [46] beschrieben sind. Im Vergleich zu den in den Kapiteln 3. und 4. behandelten Konfigurationen mit Spulen kreisförmiger Apertur ist das Spulensystem ASRA6C komplizierter: Die Spulen sind in der Projektion auf die Ebene $\varphi = \text{const.}$ elliptisch geformt. Die Ellipsen haben für alle Spulen das gleiche Achsenverhältnis von 1.17 und stehen aufrecht. Sie sind auf dem großen Radius $R_0 = 20\text{ m}$ mit einer leichten Oszillation in der Ebene $z = \text{const.}$ entsprechend $R(\varphi) = R_0(1 - k \cos(5\varphi))$ angeordnet, wobei $k = 0.016$ und φ der toroidale Winkel ist. Bild 33 zeigt die Aufsicht von ASRA6C.

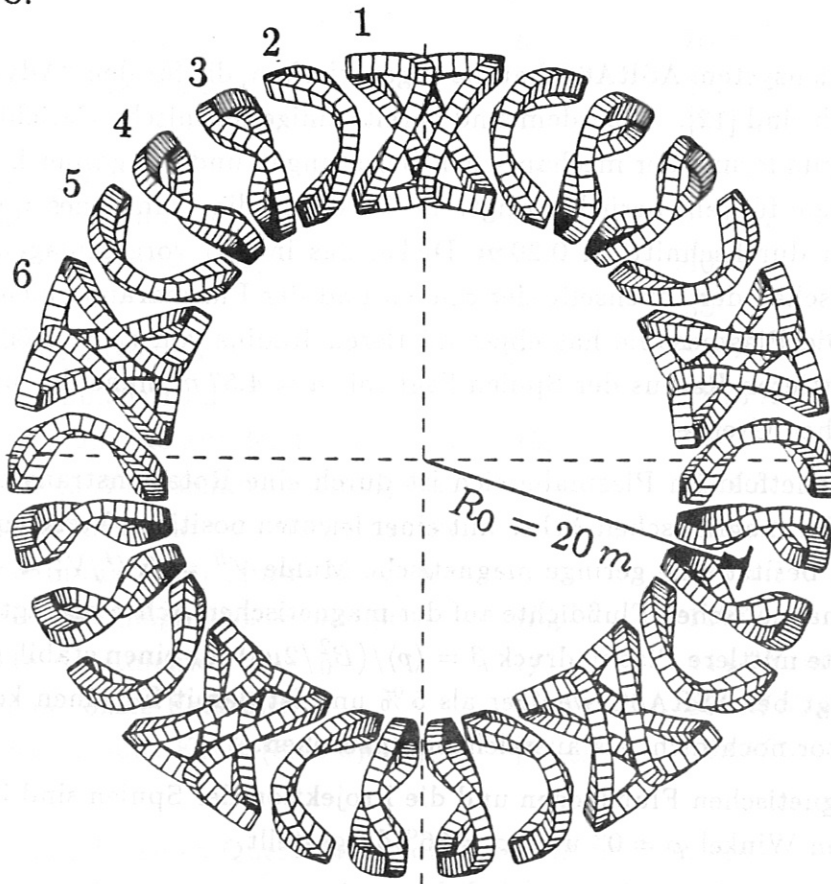


Bild 33: Spulensystem ASRA6C

Die Raumkurve der Spulen von ASRA6C enthält die poloidalen FOURIERkomponenten $\ell = 1$, $\ell = 2$ und $\ell = 3$. Das Spulensystem besteht aus 5 toroidalen Feldperioden mit je 6 Spulen. Es gibt im Gesamtsystem 3 verschieden geformte Spulentypen. Die Spule 1 bzw. die Spule 6 weist eine besonders große toroidale Auslenkung aus der Ebene $\varphi = \text{const.}$ auf; der maximale Wert beträgt etwa $c' = 2.4 \text{ m}$. Das entspricht $c = c'/R_0 = 0.12$.

Im folgenden werden die Eigenschaften des Spulensystems ASRA6C beschrieben, die elektromagnetischen Kräfte in den Spulen berechnet, die mechanischen Spannungen analysiert und das Spulensystem optimiert. Dabei werden der Torusradius R_0 , der Spulenradius a , die Anzahl N der Spulen des Systems und die toroidale Spulenauslenkung c nicht verändert. Variationsparameter sind der Spulenquerschnitt A_c und das Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts A_q . Ziele der Optimierung sind minimale magnetische Flußdichten an den Spulen, minimaler magnetischer Energieinhalt des Spulensystems, minimale Massen des Systems und minimale mechanische Spannungen in den Spulen.

5.2. Die Eigenschaften des Spulensystems ASRA6C

Das Spulensystem ASRA6C hat die Eigenschaften, die für den "Advanced Stellarator" typisch sind [12]. Außerdem sind bereits einige technische Gesichtspunkte, die zu einer Verminderung der mechanischen Belastungen und der gespeicherten magnetischen Energie führen, berücksichtigt. So ist durch die Wahl eines relativ dünnen Blankets von durchschnittlich 0.20 m Dicke, das in [47] vorgeschlagen wurde, der Abstand zwischen der Innenseite der Spulen und der Plasmarandschicht auf 1.20 m reduziert. Die Plasmasäule hat einen mittleren Radius von $r_p = 1.60 \text{ m}$, und der Wert des mittleren Radius der Spulen liegt mit $a = 4.57 \text{ m}$ nahe der unteren, technisch möglichen Grenze.

Das Magnetfeld im Plasmabereich ist durch eine Rotationstransformation $\iota = 2\pi 0.47$ auf der magnetischen Achse mit einer leichten positiven Verscherung gekennzeichnet. Es besitzt eine geringe magnetische Mulde $V'' = \Delta V'/V' \approx -0.5\%$. Der Betrag der magnetischen Flußdichte auf der magnetischen Achse beträgt $B_0 = 5.4 \text{ T}$. Der normierte mittlere Plasmadruck $\beta = \langle p \rangle / (B_0^2 / 2\mu_0)$ für einen stabilen Plasmaein-schluß beträgt bei ASRA6C weniger als 5% und ist damit für einen kommerziellen Fusionsreaktor noch nicht als ausreichend anzusehen.

Die magnetischen Flußflächen und die Projektion der Spulen sind in Bild 34 für die toroidalen Winkel $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 36^\circ$ dargestellt.

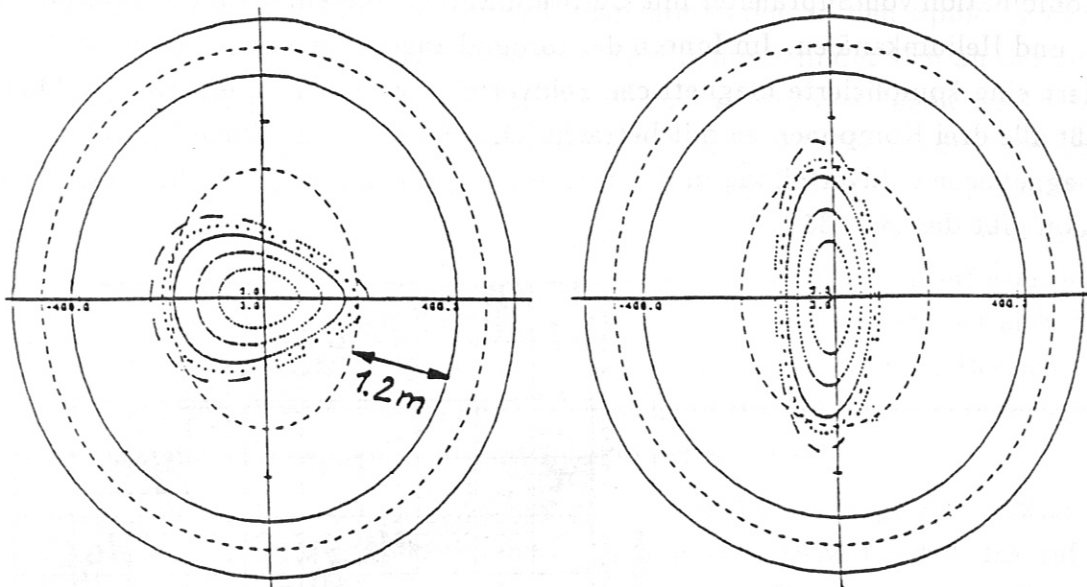


Bild 34: Magnetische Flußflächen und Spulen von ASRA6C bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 36^\circ$

Die charakteristischen Dimensionen und die Werte des magnetischen Feldes sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

- Großer Torusradius	R_0	20 m
- Mittlerer Plasmaradius	r_p	1.6 m
- Mittlerer Spulenradius	a	4.57 m
- Radiale Spulenhöhe	h	1.20 m
- Laterale Spulenbreite	d	1.00 m
- Mittleres Spulenvolumen	V_c	40 m ³
- Spulenanzahl	N	30
- Gemittelte Stromdichte	j_c	15 MA/m ²
- Gesamt-Spulenstrom	I_c	18 MA
- Magn. Flußdichte auf der Plasmaachse	B_0	5.4 T
- Max. magn. Flußdichte an den Spulen	B_M	10.4 T
- Magnetfelddruck auf der Plasmaachse	$B_0^2/2\mu_0$	11.6 MPa
- Gesamt-Induktivität (einwind. Spulen)	L	722 μ H
- Gespeicherte magnetische Energie	E_m	117 GJ
- Mittlere Kraftdichte	$\langle f \rangle$	44 MN/m ³
- Maximale lokale Kraftdichte	$ f _M$	155 MN/m ³
- Maximale result. Kraft (eine Spule)	$ F _{res}$	168 MN

Die Spulen, die einen Querschnitt von $A_c = 1.2 \text{ m}^2$ besitzen, werden mit einem Spulenstrom von $I_c = 18 \text{ MA}$ gespeist, so daß sich eine Stromdichte $j_c = 15 \text{ MA/m}^2$ ergibt. Diese Stromdichte ist ein Mittelwert über den Windungsquerschnitt, d.h. über

die Kombination von Supraleiter mit Cu-Stabilisator, innerem Strukturmaterial, Isolation und Heliumkanälen. Im Innern der toroidal angeordneten, nichtebenen Spulen existiert eine komplizierte magnetische Feldverteilung. Die magnetische Flußdichte umfaßt alle drei Komponenten mit beträchtlichen Gradienten. Einen Überblick über die magnetische Feldverteilung in der Ebene $z = 0$ im ersten Quadranten der Konfiguration gibt das Bild 35.

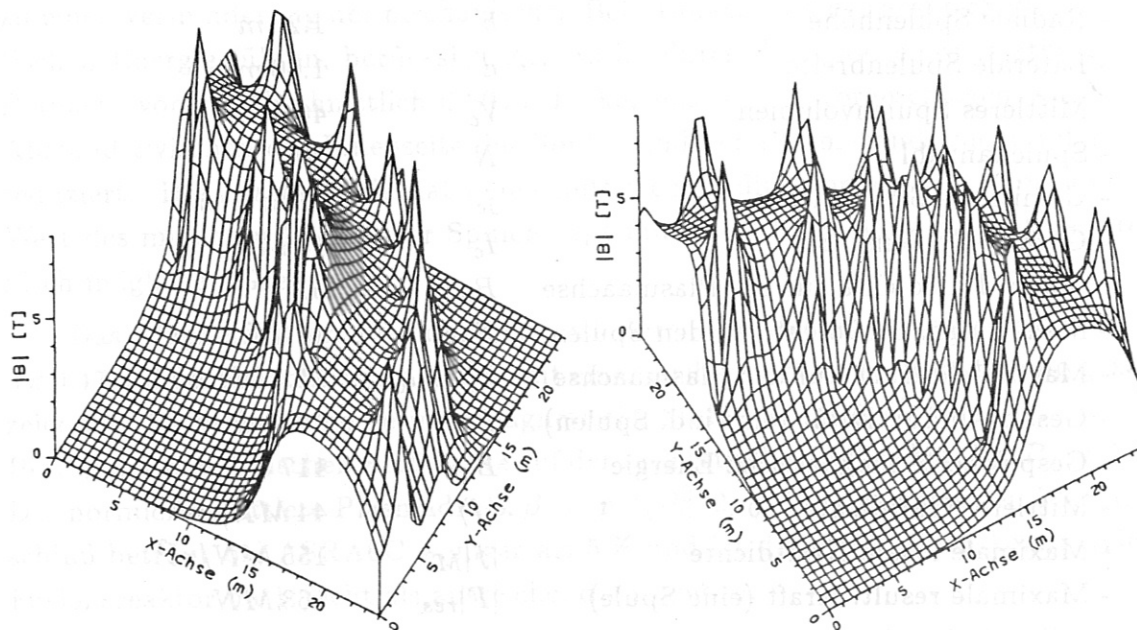
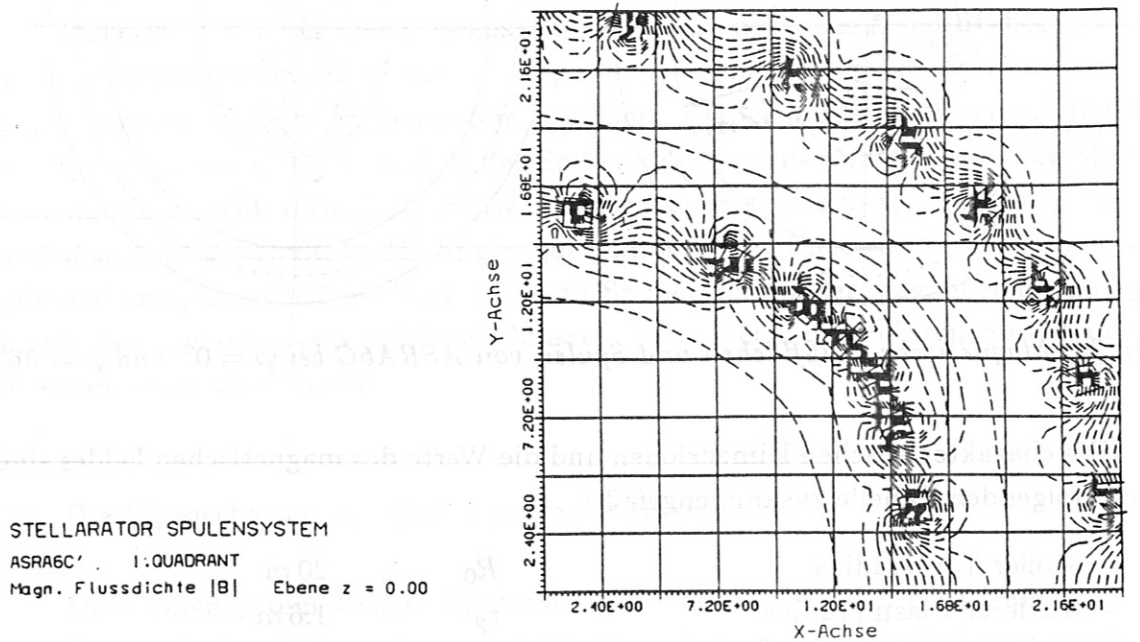


Bild 35: Betrag der magnetischen Flußdichte im ersten Quadranten des Spulensystems ASRA6C

Die Spitzenwerte der magnetischen Flußdichte treten an den Spulen auf. Der Maximalwert des Betrages der magnetischen Flußdichte befindet sich an der Innenseite der Spulen. Wegen der unterschiedlichen Form und der verschiedenen Abstände der Spulen differiert das Maximum der magnetischen Flußdichte an den drei unterschiedlichen Spulen einer Feldperiode und liegt nicht unbedingt in der Ebene $z = 0$. Das absolute Maximum befindet sich an Spule 2 und beträgt $B_M = 10.4 T$, siehe Bild 36. Dieser Wert zeigt, daß Nb_3Sn als supraleitendes Material erforderlich ist [3]. Das Spulenaspektverhältnis beträgt $A_m = R_0/a = 4.38$ und befindet sich damit im Bereich minimaler Feldüberhöhung entsprechend Bild 11 und im Bereich minimaler mechanischer Vergleichsspannung entsprechend Bild 13, wenn man jeweils auf Konfigurationen mit einer Spulenzahl $N = 30$ extrapoliert.

Die Gesamt-Induktivität des Spulensystems ASRA6C beträgt $L = 722 \mu H$ für 30 einwindige Spulen. Mit einem Spulenstrom von $I_c = 18 MA$ führt das auf eine gespeicherte magnetische Energie im Spulensystem von $E_m = 117 GJ$. Man kann diese Zahlenwerte mit denen des "idealen Torus" gleichen Volumens vergleichen: $L_{id} = \mu_0 N^2 (R_0 - \sqrt{R_0^2 - a^2}) = 598 \mu H$ und somit $E_{id} = 97 GJ$. Die Energie des realen Systems ASRA6C ist also um den Faktor 1.21 höher als die des "idealen Torus". Das bedeutet, daß etwa 21 % der Energie des magnetischen Feldes im Streufeld lokalisiert sind.

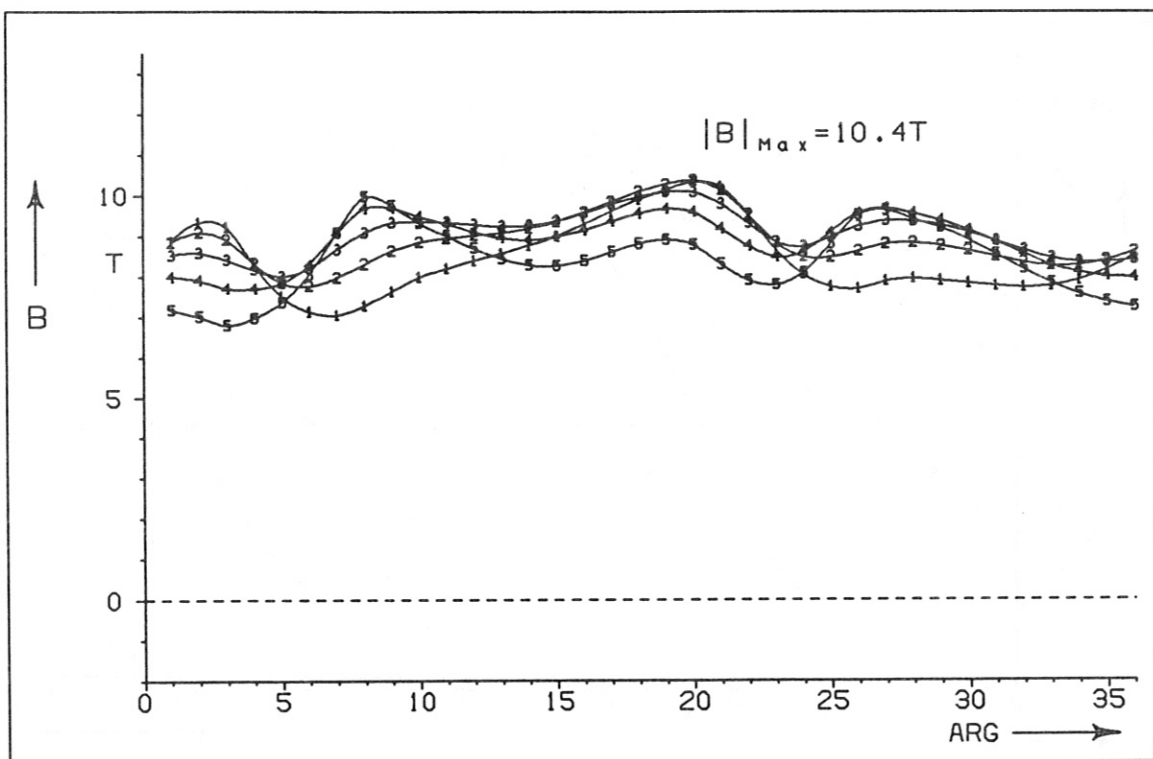


Bild 36: Magnetische Flußdichte an der Innenseite von Spule 2. Die Werte sind an 5 Konturen entlang des inneren Umfangs der Spule berechnet.

5.3. Magnetische Kräfte

Die magnetischen Kräfte, die an den nichtebenen Spulen angreifen, wirken sowohl in radialer als auch in lateraler Richtung. Um die Kraftdichteverteilung zu beschreiben, wird das in Abschnitt 3.2. genannte natürliche, lokale Koordinatensystem R, S, T benutzt. Da in diesem Koordinatensystem die Stromdichte nur die Komponente j_T hat, ergeben sich wegen $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$ für die Kraftdichte die beiden Komponenten f_R und f_S in radialer und in lateraler Richtung. Die Bilder 37 bis 39 zeigen die über dem Spulenquerschnitt gemittelten Kraftdichten der Spulen 1 bis 3 in lokalen Koordinaten. Es wird deutlich, daß die laterale Kraftdichtekomponente f_S bei Spulen mit starker toroidaler Auslenkung (Spule 1 und Spule 6) die gleiche Größenordnung erreicht wie die radiale Kraftdichtekomponente f_R .

Summiert man die laterale Kraftdichtekomponente f_S der Spulen auf, so stellt man fest, daß diese sich über eine Feldperiode zu Null addiert, d.h. es gibt kein Drehmoment in Bezug auf die Torusachse. Die mittlere Kraftdichte in den Spulen beträgt etwa 44 MN/m^3 . An der Fußfläche von Spule 2 tritt das lokale Maximum der Kraftdichte auf. Dieses beträgt etwa $|f|_M = 155 \text{ MN/m}^3$. Das Maximum ist also wegen der starken Gradienten innerhalb der Spule mehr als dreimal so groß wie die mittlere Kraftdichte in den Spulen.

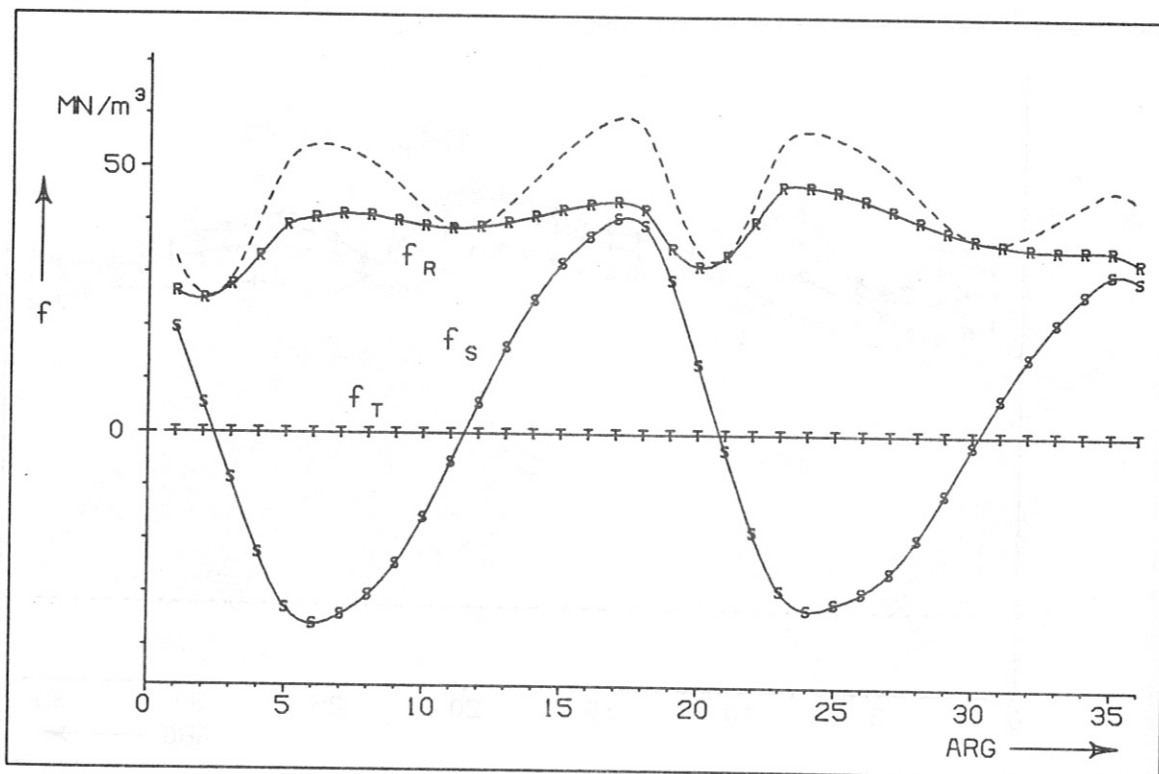


Bild 37: Magnetische Kraftdichtekomponenten der Spule 1 in Abhängigkeit von der Längskoordinate der Spule. Die gestrichelte Linie stellt den Betrag dar.

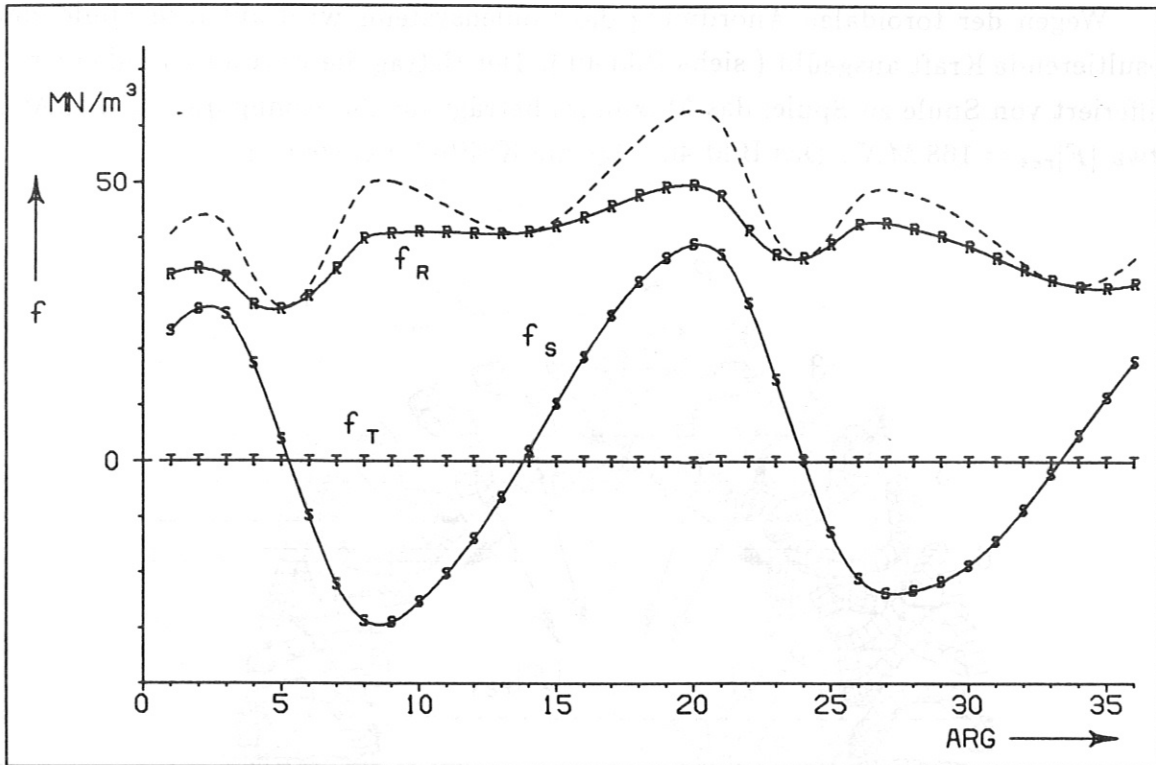


Bild 38: Magnetische Kraftdichtekomponenten der Spule 2 in Abhängigkeit von der Längskoordinate der Spule. Die gestrichelte Linie stellt den Betrag dar.

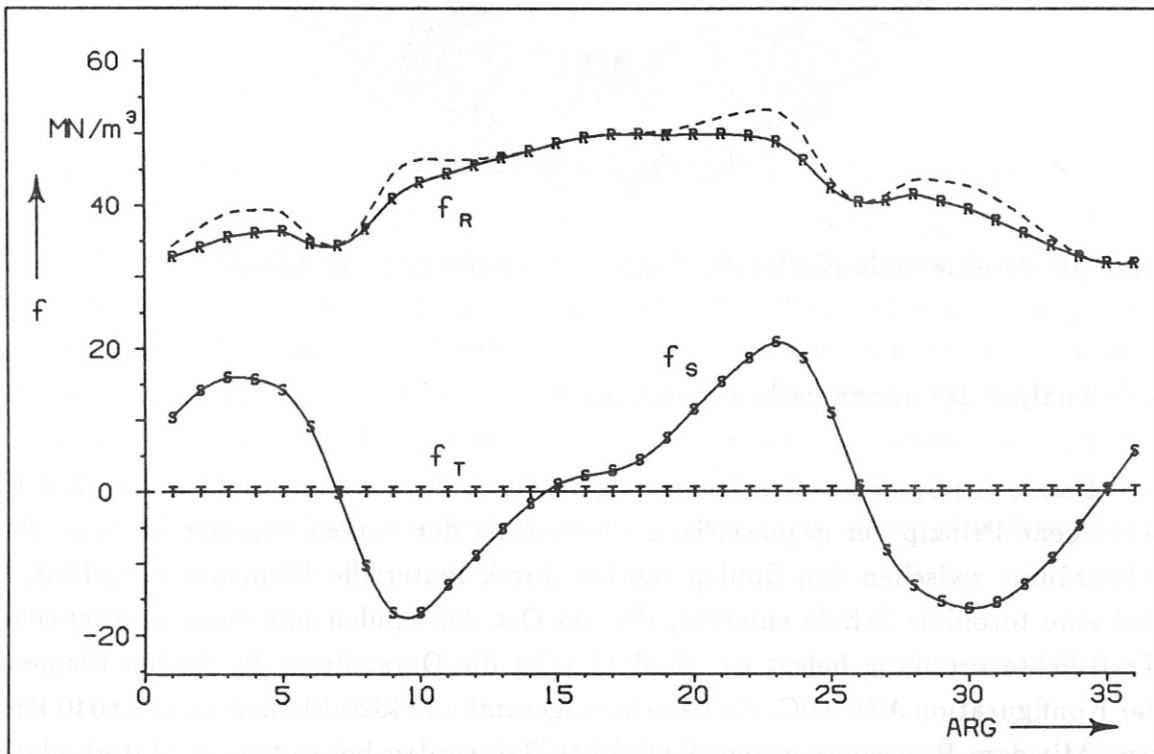


Bild 39: Magnetische Kraftdichtekomponenten der Spule 3 in Abhängigkeit von der Längskoordinate der Spule. Die gestrichelte Linie stellt den Betrag dar.

Wegen der toroidalen Anordnung des Spulensystems wird auf jede Spule eine resultierende Kraft ausgeübt (siehe Bild 40). Der Betrag dieser resultierenden Kraft differiert von Spule zu Spule; das Maximum beträgt für die Konfiguration ASRA6C etwa $|F|_{res} = 168 MN$. Das Bild 40 zeigt die Kräfte im einzelnen.

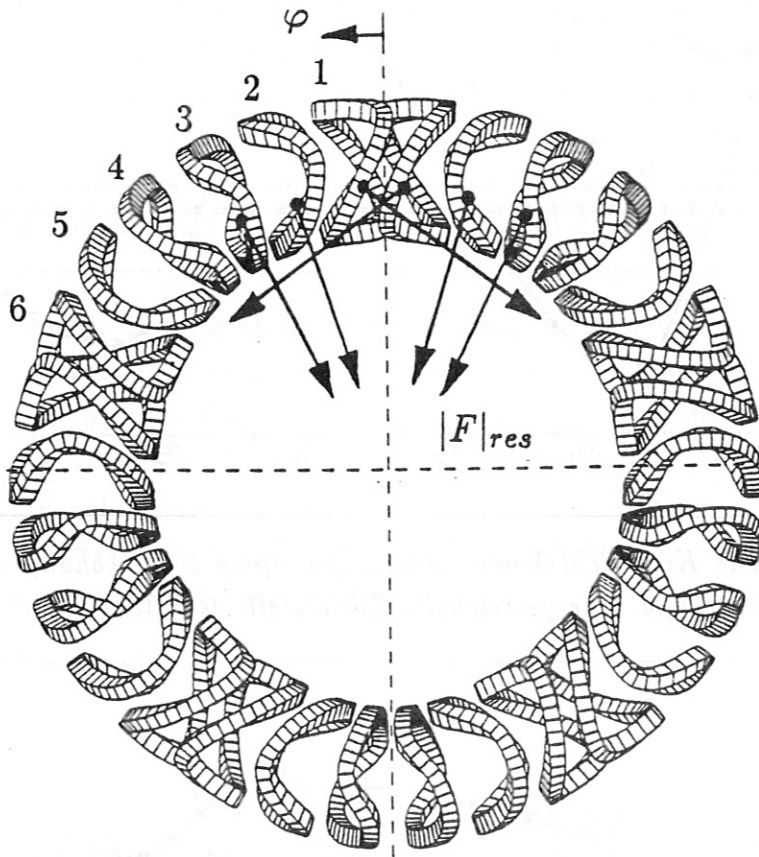


Bild 40: Resultierende Kräfte der Spulen des Spulensystems ASRA6C

5.4. Analyse der mechanischen Spannungen

Damit das Spulensystem im Gleichgewicht bleibt, wird das in Abschnitt 3.2. beschriebene Prinzip der gegenseitigen Abstützung der Spulen angewendet: Die Zwischenräume zwischen den Spulen werden durch materielle Elemente ausgefüllt, so daß eine toroidale Schale entsteht, die am Ort der Spulen mit einer magnetischen Kraftdichteverteilung belegt ist. Bild 41 zeigt die Darstellung der finiten Elemente der Konfiguration ASRA6C. Sie besteht insgesamt aus 4320 Elementen mit 8640 Knoten. Mit dem Programmsystem SAP V(2) [38] werden bei isotropen Materialdaten ($E = 150 GPa, \nu = 0.3$) die mechanischen Spannungen in den Spulen errechnet.

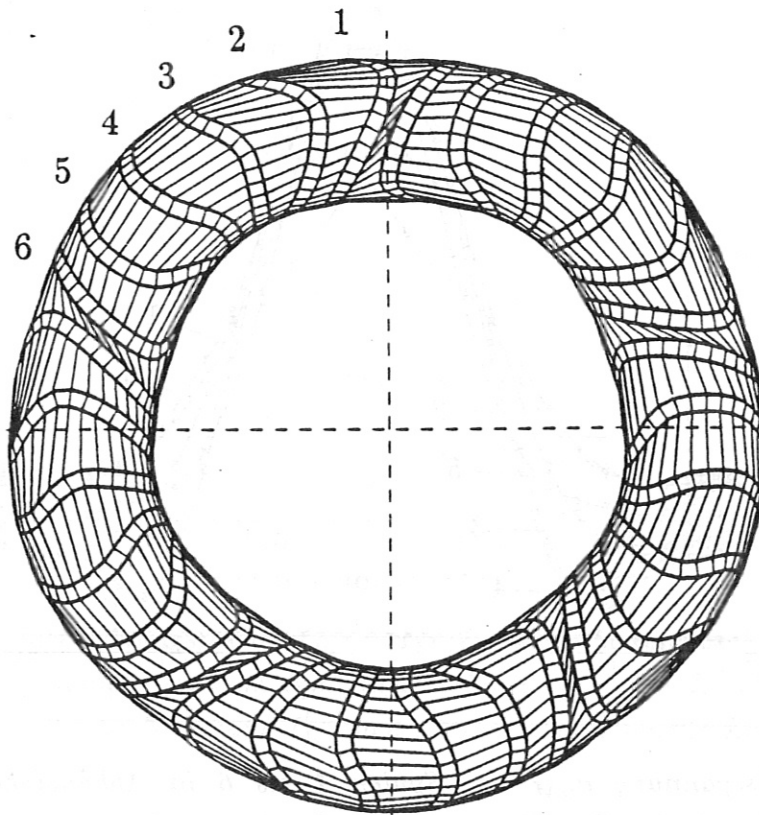


Bild 41: Konfiguration ASRA6C als toroidale Schale.

Als Ergebnis der numerischen Berechnungen erhält man für die Vergleichsspannung (VON MISES Spannung) einen maximalen Wert von $\sigma_{vM_{Max}} = 160 \text{ MPa}$. Dieser wirkt auf die Spulen 3 und 4 an der Innenseite der Spulen in dem Bereich , der der Torusachse zugewandt ist (siehe Bild 42). Die Vergleichsspannung enthält einen beträchtlichen Anteil an Schubspannungen. Die größte Schubspannungskomponente tritt an den Spulen 1 und 6 auf, da diese Spulen die stärksten toroidalen Auslenkungen aufweisen. Das Maximum der Schubspannungskomponente τ_{ST} erreicht nahezu 60 MPa . Die errechneten Werte für die Schubspannungen erscheinen nicht akzeptabel; die Spulen müssen verstärkt werden, z.B. durch eine Armierung aus Stahl.

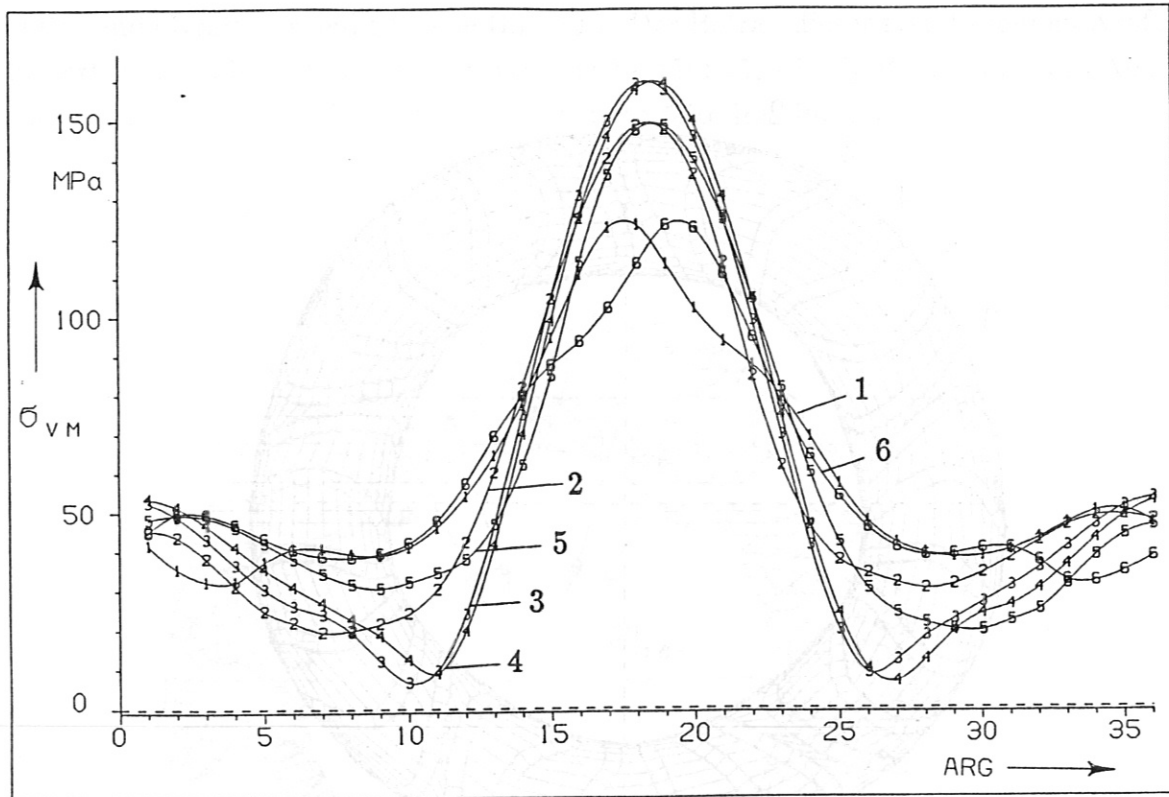


Bild 42: Vergleichsspannung σ_{vM} der Spulen 1 bis 6 in Abhängigkeit von der Längskoordinate der Spule. Die Werte sind an den Innenseiten der Spulen entlang des inneren Umfangs berechnet.

5.5. Optimierung des Spulensystems

Die Optimierung des Spulensystems wird auf die Variation des Spulenquerschnitts bzw. die des Aspektverhältnisses des Spulenquerschnitts beschränkt. Ziele der Optimierung sind minimale magnetische Flußdichten an den Spulen, minimaler magnetischer Energieinhalt des Spulensystems, minimale Massen des Systems und minimale mechanische Spannungen in den Spulen. Variationsparameter sind der Spulenquerschnitt A_c bei konstantem Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts ($A_q = h/d = 1.2$) und das Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts A_q bei konstantem Spulenquerschnitt ($A_c = h \cdot d = 1.2 \text{ m}^2$). Alle übrigen geometrischen Parameter und die Spulenzahl werden nicht variiert.

Die Ergebnisse sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. Bild 43 und Bild 44 zeigen die Abhängigkeit der Systemgrößen vom Spulenquerschnitt A_c , Bild 45 und Bild 46 die vom Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts A_q .

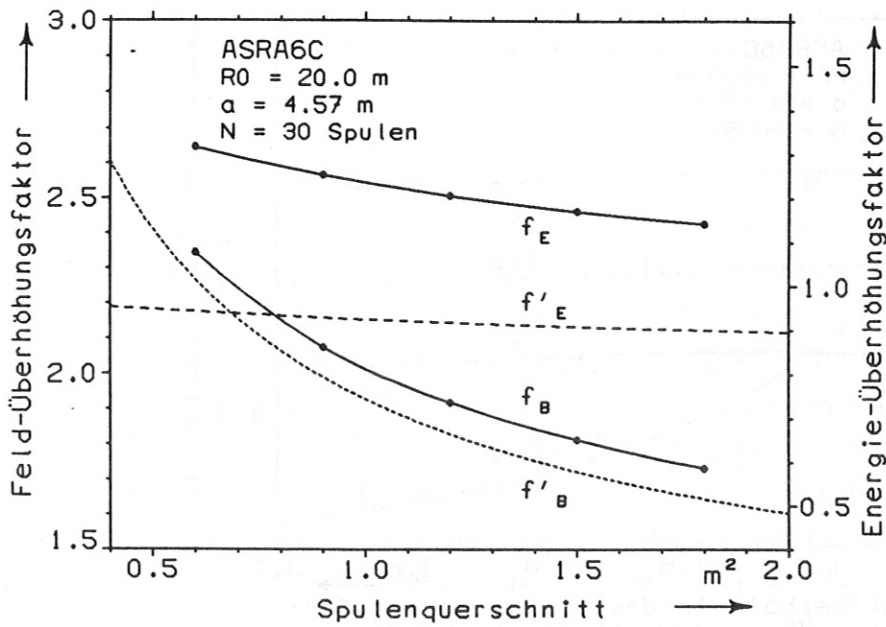


Bild 43: Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$ und Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$ in Abhängigkeit vom Spulenquerschnitt $A_c = h \cdot d$. Die punktierte Linie zeigt die analytische Näherung f'_B nach (3,6), die gestrichelte Linie f'_E nach (3,9).

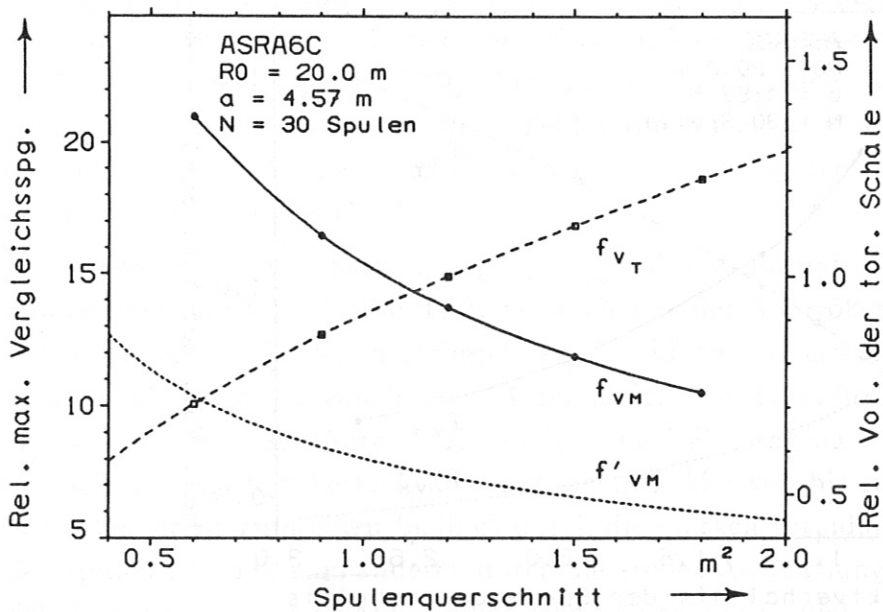


Bild 44: Relative maximale Vergleichsspannung $f_{VM} = \sigma_{vM_{Max}}/(B_0^2/2\mu_0)$ und relatives Volumen der toroidalen Schale f_{VT} in Abhängigkeit vom Spulenquerschnitt $A_c = h \cdot d$. Die punktierte Linie zeigt f'_{VM} nach (3,29). Die gestrichelte Linie zeigt $V_T = 4\pi^2 R_0 a h$, normiert auf das Volumen der Ausgangskonfiguration.

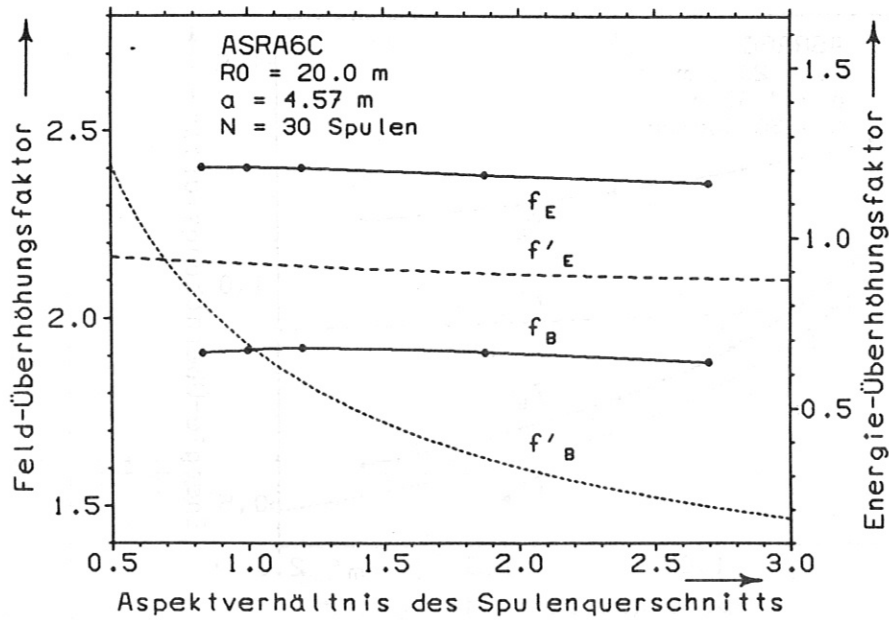


Bild 45: Feldüberhöhungsfaktor $f_B = B_M/B_0$ und Energieüberhöhungsfaktor $f_E = E_m/E_{id}$ in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts $A_q = h/d$. Die punktierte Linie zeigt f'_B nach (3,6), die gestrichelte Linie f'_E nach (3,9).

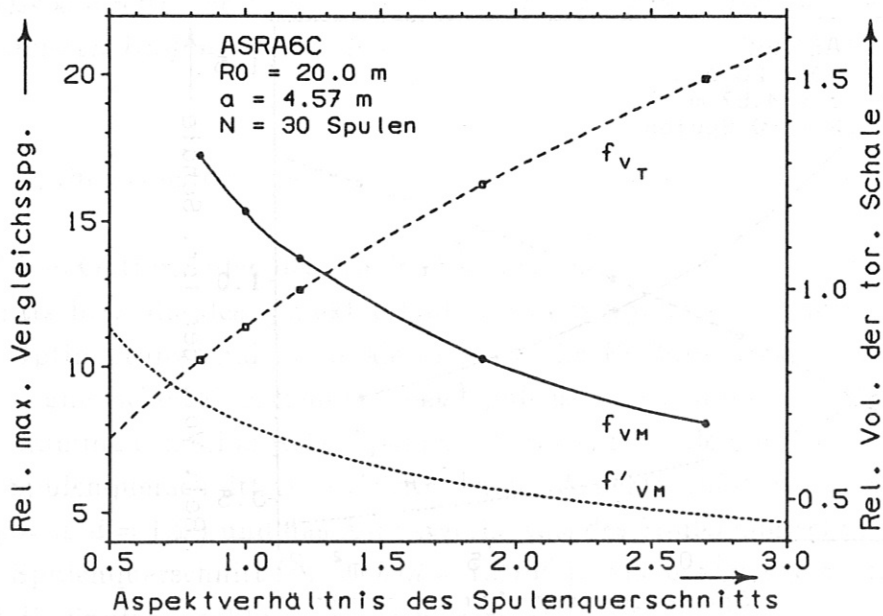


Bild 46: Relative maximale Vergleichsspannung $f_{VM} = \sigma_{VM_{max}}/(B_0^2/2\mu_0)$ und relatives Volumen der toroidalen Schale f_{VT} in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts $A_q = h/d$. Die punktierte Linie zeigt f'_{VM} nach (3,29). Die gestrichelte Linie zeigt $V_T = 4\pi^2 R_0 a h$, normiert auf das Volumen der Ausgangskonfiguration.

5.6. Beschreibung und Bewertung der Ergebnisse

Vergleicht man die Ergebnisse der Optimierungsrechnungen für ASRA6C mit den Resultaten der Parameterstudien nach Kapitel 3., so stellt man, wie nicht anders zu erwarten, die gleiche Tendenz der Kurvenverläufe fest. Damit ist gezeigt, daß die Ergebnisse der Parameterstudien für L2-Spulensysteme auf kompliziertere Konfigurationen zumindestens für die Systemgrößen *maximale magnetische Flußdichte* und *magnetischer Energieinhalt* in weiten Bereichen übertragbar sind. Lediglich für die mechanischen Spannungen erhält man abweichende Resultate.

- Die Feldüberhöhung an den Spulen nimmt mit wachsendem Spulenquerschnitt A_c (Bild 43) immer mehr ab, da wegen der konstanten Durchflutung die Stromdichte abnimmt. Die analytische Näherung nach (3,6) gibt diesen monoton abfallenden Verlauf recht gut wieder. Dagegen zeigt die Feldüberhöhung an den Spulen in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts A_q (Bild 45) ein flaches Maximum. Dieses liegt etwa bei $A_q = h/d = 2.0$. Da das Maximum aber sehr flach ist, ist die Feldüberhöhung in dem betrachteten Bereich kaum von A_q abhängig und praktisch konstant.
- Die Energieüberhöhung im Spulensystem nimmt ebenfalls mit zunehmendem Spulenquerschnitt A_c (Bild 43) monoton ab. In Abhängigkeit vom Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts A_q (Bild 45) zeigt sie ein flaches Maximum bei $A_q \approx 1.0$. Insgesamt hängt der Kurvenverlauf aber kaum von A_q ab und kann in dem betrachteten Bereich praktisch als konstant angesehen werden. Die analytische Näherung nach (3,9) gibt in beiden Fällen den Verlauf tendenziell richtig wieder, allerdings mit einem Fehler von bis zu $\approx 35\%$. Das ist auf die relativ großen Lücken zwischen den Spulen ($N = 30$ Spulen) und das dadurch bedingte Streufeld zurückzuführen.
- Die maximale Vergleichsspannung $\sigma_{vM_{Max}}$ nimmt sowohl mit zunehmendem Spulenquerschnitt A_c (Bild 44), als auch mit der Vergrößerung des Aspektverhältnisses des Spulenquerschnitts A_q (Bild 46) monoton ab. Das ist in beiden Fällen auf die zunehmende Höhe h der toroidalen Schale ($A_c = h \cdot d$, $A_q = h/d$) zurückzuführen. Die analytische Näherung nach (3,29) zeigt tendenziell den gleichen Verlauf, aber mit einem Fehler von bis zu $\approx 100\%$. Dieser große Fehler ist zum einen bedingt durch die starken toroidalen Auslenkungen der Spulen 1 und 6, zum anderen durch die großen Abweichungen der toroidalen Schale des Systems ASRA6C (elliptische Spulenkontur, nicht ganz kreisförmige Anordnung der Spulen etc.) vom Modell der Parameterstudien.
- Das Volumen der toroidalen Schale V_T hat die gegenläufige Tendenz und wächst mit ansteigendem Spulenquerschnitt A_c und zunehmendem Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts A_q wegen der zunehmenden Höhe h der toroidalen Schale in beiden Fällen kontinuierlich an.

Man kann also die Feldüberhöhung an den Spulen, die Energieüberhöhung im Spulensystem und die mechanischen Spannungen in den Spulen durch eine Querschnittsvergrößerung der Spulen (Abnahme der Stromdichte) vermindern bzw. dadurch, daß man die Spulen zunehmend scheibenförmig baut. Beides bedeutet eine Vergrößerung der Spulenhöhe h . Ein Nachteil dieser Methode ist die Tatsache, daß dadurch auch das Volumen des Torusinnenraumes verringert wird. Dieses Verfahren kann also nur soweit angewendet werden, wie die Platzverhältnisse es zulassen. Es besteht jedoch die Möglichkeit, den Spulenradius a zu erhöhen. Das führt aber tendenziell zu höheren magnetischen Flußdichten an den Spulen und zu höheren mechanischen Spannungen, wie in Kapitel 3. gezeigt wurde.

Will man die Massen bzw. die Volumina der Anordnung reduzieren, so führt dies zu einer Erhöhung der magnetischen Flußdichte an den Spulen und zu höheren mechanischen Spannungen in den Spulen. Diese Reduktion kann so weit erfolgen, bis die maximal zulässigen Werte für die magnetische Flußdichte und die mechanischen Spannungen in den Spulen erreicht werden.

Als Ergebnis der Optimierungsrechnungen dieses Kapitels kann man feststellen, daß das betrachtete Spulensystem ASRA6C bereits eine nahezu optimale Konfiguration darstellt. Einerseits erfüllt es die Eigenschaften, die für den "Advanced Stellarator" typisch sind. Andererseits stellt das Spulensystem ein im Sinne dieser Arbeit weitgehend technologisches Optimum dar. Das Spulen aspektverhältnis liegt mit $A_m = 4.38$ im optimalen Bereich. Der mittlere Radius der Spulen liegt mit $a = 4.57 m$ an der unteren, möglichen Grenze. Wünschenswert erscheint eine weitere Optimierung im Hinblick auf eine dichtere Spulenbelegung des Torus, z.B. durch den Übergang zu einem System mit 40 Spulen. Damit könnte eine zusätzliche Reduktion der Feldüberhöhung, der Energieüberhöhung, der magnetischen Kräfte und der mechanischen Spannungen erzielt werden.

Die hier betrachtete Abstützung der Spulen in Form einer vollständigen toroidalen Schale ist in der Praxis nicht möglich, da der Platz zwischen den Spulen nicht völlig mit Strukturelementen ausgefüllt werden kann. Das Plasmagefäß muß für die Startheizung, für Brennstoffnachfüllung, für Pumpen etc. zugänglich sein. Man wird also den Raum zwischen den Spulen nur teilweise mit Strukturelementen belegen können. Diese müssen so angeordnet sein, daß die mechanischen Spannungen in den Spulen so gering wie möglich sind. In der Studie [45] ist eine mögliche Ausführung dieses Abstützkzeptes für das Spulensystem ASRA6C gezeigt: Die Spulen sind zur Verstärkung mit einem Gehäuse aus Stahl umgeben, und der Raum zwischen den Spulen ist zu etwa 50 % mit Strukturmaterial ausgefüllt. Auf diese Weise werden die mechanischen Spannungen innerhalb zulässiger Grenzen gehalten.

6. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden modulare Stellarator-Spulensysteme mit nichtebenen Spulen in Reaktordimensionen untersucht. Die Untersuchung umfaßt die Abhängigkeit der vier Systemgrößen *maximale magnetische Flußdichte*, *magnetischer Energieinhalt*, *magnetische Kräfte* und *mechanischen Spannungen* von den geometrischen Parametern und von der Anzahl N der Spulen des Spulensystems. Die Parameterstudien werden am L2-Stellarator durchgeführt. Dabei werden die Parameter sowohl einzeln als auch simultan unter Konstanthaltung des Spulen aspektverhältnisses $A_m = R_0/a$ und des Verhältnisses a/h der Spulen variiert. Außerdem wird ein konkretes Stellarator-Spulensystem vom W7AS-Typ analysiert und optimiert. Die Systemgrößen werden mit numerischen Methoden in dem genannten Parameterraum berechnet. Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen werden mit analytischen Näherungsformeln verglichen.

Im folgenden werden die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit beschrieben und bewertet. Bei der Bewertung liegt die Annahme zugrunde, daß die technologische Optimierung mit der Minimierung der betrachteten Systemgrößen einhergeht, wobei die Randbedingungen zu beachten sind und zwischen den einzelnen Systemgrößen im Wege des Kompromisses das resultierende Minimum gefunden werden muß. Die plasmaphysikalische Optimierung, die eine ausreichend hohe β -Grenze für den stabilen Plasmaeinschluß zum Ziele hat, wird hier nicht betrachtet.

- Als Ergebnis der Parameterstudien bezüglich der Feldüberhöhung und der Energieüberhöhung ist festzustellen, daß diese Größen um so mehr zunehmen, je konzentrierter die Stromverteilung auf dem Torus ist. Im Interesse einer Minimierung dieser Systemgrößen sollte also die *Stromverteilung* auf dem Torus *so gleichmäßig wie möglich* sein. Das bedeutet eine relativ dichte Belegung des Torus mit Spulen. Diese Tendenz kann natürlich nur so weit verfolgt werden, wie die Platzverhältnisse es zulassen. Die Spulen dürfen sich nicht gegenseitig überlappen, und die Zugänglichkeit des Plasmagefäßes muß gewährleistet sein.
- Alle Systemgrößen nehmen mit wachsender toroidaler Spulenauslenkung zu. Aus diesem Grunde sollte eine möglichst geringe toroidale Spulenauslenkung angestrebt werden. Diese kann um so geringer sein, je näher die Spulen am Plasma angeordnet sind, d.h. je kleiner der Spulenradius a ist und je mehr die Spulenform der Gestalt der letzten magnetischen Flußfläche folgt [27]. Wenn von seiten der Plasmaphysik eine starke toroidale Spulenauslenkung verlangt wird [9], so liegt ein typischer Zielkonflikt vor, der bei der Festlegung der endgültigen Parameter eines konkreten Spulensystems im Wege des Kompromisses gelöst werden muß. Ein kleiner Spulenradius hat den Vorteil, daß die magnetischen Kräfte in den Spulen und damit die mechanischen Spannungen tendenziell sinken, da

diese in Spulensystemen mit diskreten Spulen besonders stark vom Spulenradius a abhängig sind. Geringe toroidale Spulenauslenkungen haben außerdem relativ große lokale Krümmungsradien zur Folge, so daß die Spulenfertigung erleichtert wird.

- Die Ergebnisse von Kapitel 4. zeigen, daß die Systemgrößen nicht so sehr von den absoluten geometrischen Abmessungen abhängen, sondern vom Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$ und dem Verhältnis von Spulenradius zu Spulenhöhe a/h , wenn man die Spulenbreite d konstant hält. Die absoluten geometrischen Dimensionen und damit der magnetische Energieinhalt und das Volumen der toroidalen Schale können in erheblichem Umfang variieren, ohne daß die Systemgrößen sich wesentlich ändern, wenn man die genannten Verhältniszahlen und die Spulenbreite d konstant hält. Dieses Ergebnis wird bereits durch die abgeleiteten analytischen Gleichungen für die relativen Systemgrößen gemäß (3,6), (3,9), (3,16) und (3,29) impliziert. Bei nicht zu großen toroidalen Spulenauslenkungen kann in diesem Falle die maximale Vergleichsspannung in den Spulen näherungsweise sogar als konstant angesehen werden.
- Für das Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$ gibt es einen optimalen Bereich für die Feldüberhöhung in dem Parameterraum, der je nach Spulenzahl bei etwa $A_m = 3, \dots, 5$ liegt. Die maximale Vergleichsspannung zeigt ebenfalls ein flaches Minimum, das etwa bei $A_m = 5$ und darüber liegt. Für beide Systemgrößen verschiebt sich das optimale A_m hin zu höheren Werten, wenn die Spulenzahl zunimmt. Die Verhältniszahl a/h sollte im Interesse der Verminderung der magnetischen Kräfte und der mechanischen Spannungen so klein wie möglich sein.
- Das Virialtheorem beschreibt den Zusammenhang zwischen der gespeicherten magnetischen Energie und den mittleren mechanischen Spannungen in der toroidalen Schale. Für ein System diskreter Spulen mit endlichen Abmessungen wird ein Faktor g_σ definiert, der das Verhältnis zwischen dem Mittelwert der Summe der Beträge der Normalspannungen $\langle \Sigma |\sigma| \rangle$ in den Spulen und der Virialspannung $\sigma_V = E_m/V_T$ mit $V_T = 4\pi^2 R_0 a h$ angibt. Dieser Faktor beträgt in Spulensystemen mit dichter Spulenbelegung und nicht zu großen toroidalen Spulenauslenkungen $g_\sigma \approx 3$. Die mittlere Vergleichsspannung $\langle \sigma_{vM} \rangle$ stimmt ungefähr (bis auf $\approx \pm 10\%$) mit $\langle \Sigma |\sigma| \rangle$ überein, vgl. (3,28). Für die toroidale Schale ist die maximale Vergleichsspannung verglichen mit der mittleren Vergleichsspannung im allgemeinen noch um einen Faktor bis zu 2 und sogar darüber erhöht.
- Vergleicht man die Ergebnisse von Kapitel 5. mit denen der Parameterstudien am L2-Stellarator, so stellt man fest, daß die Ergebnisse zumindest für die Systemgrößen *maximale magnetische Flußdichte* und *magnetischer Energieinhalt*

übertragbar sind. Für die mechanischen Spannungen erhält man hinsichtlich des Betrages abweichende Resultate, sie weisen aber in Abhängigkeit von den betrachteten Parametern das gleiche tendenzielle Verhalten auf.

- Untersucht man die Frage, in welchem Maße die maximale magnetische Flußdichte B_M an den Spulen vom Spulenquerschnitt bzw. von der Stromdichte abhängt, so zeigen die Bilder 20 und 43 eine schwache Abhängigkeit. Sie beträgt bei konstantem Aspektverhältnis des Spulenquerschnitts etwa $B_M \sim j_c^{0.26}$, d.h. bei einer Verdoppelung der Stromdichte steigt die maximale magnetische Flußdichte B_M an den Spulen etwa um 20 % an.

Bei der kritischen Bewertung der Ergebnisse der Parameterstudien hinsichtlich der mechanischen Spannungen muß man berücksichtigen, daß die Abstützung der Spulen einer realistischen Konfiguration nicht in Form einer vollständigen toroidalen Schale ausgeführt werden kann. Der Raum zwischen den Spulen kann nur teilweise mit Strukturelementen belegt werden. Zur Erhöhung der mechanischen Stabilität wird man die Spulen mit einer Stahlarmierung im Spuleninnern oder außen mit einem Stahlgehäuse verstärken. Das führt im allgemeinen zu einer starken Veränderung der *mechanische Spannungsverteilung im Spulensystem* im Vergleich zu der in der hier betrachteten toroidalen Schale. Aus diesem Grunde sind für die genaue Ermittlung lokaler Spannungswerte in den Spulen, insbesondere von Spannungsmaxima, jeweils Detailstudien erforderlich. Das dürfte jedoch nicht die Aussagekraft der vorliegenden Resultate mindern, da es bei ihnen in erster Linie auf die tendenzielle Abhängigkeit von den Variationsparametern ankommt.

Kritisch bleibt anzumerken, daß bei den Parameterstudien der Parameterraum trotz der großen Anzahl der berechneten Fälle bei weitem nicht ausgeschöpft ist. Die gleichmäßige Untersuchung des gesamten sechsdimensionalen Parameterraums ist wegen des damit verbundenen hohen Rechenaufwands nicht zu rechtfertigen. Es erscheint jedoch in den meisten Fällen möglich, durch Interpolation die Zwischenwerte zu erhalten.

7. Anhang: Theoretische Grundlagen

7.1. Magnetostatik

7.1.1. Strom- und Feldverteilung

Die MAXWELLSchen Gleichungen lauten für das magnetostatische Problem

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (7,1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (7,2)$$

Aus (7,1) ergibt sich durch Divergenzbildung

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (7,3)$$

Der Zusammenhang zwischen \vec{B} und \vec{H} ist bei Abwesenheit von ferromagnetischen Stoffen* durch die isotrope Permeabilitätskonstante μ_0 gegeben

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (7,4)$$

Der Vektor der magnetischen Flußdichte \vec{B} kann wegen (7,2) durch die Rotation des Vektorpotentials \vec{A} ausgedrückt werden

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (7,5)$$

Damit folgt $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$, und wegen $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}$, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, gilt

$$\nabla^2 \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = 0. \quad (7,6)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_V \frac{\vec{j}}{|\vec{r}'|} dV, \quad (7,7)$$

wobei $|\vec{r}'|$ der Abstand zwischen Quell- und Aufpunkt ist.

*Die Anwesenheit von ferromagnetischen Stoffen ist beim Fusionsreaktor nicht ausgeschlossen. In dem Report [45] wurde beispielsweise aus Gründen der mechanischen Festigkeit ein Blanket mit ferritischem Stahl vorgeschlagen. Außerdem könnte man ferromagnetische Stoffe ganz gezielt zur Erzeugung einer bestimmten Feldtopologie einsetzen. In diesen Fällen sind zur Feldberechnung Programmsysteme anzuwenden, die das nichtlineare magnetische Materialverhalten berücksichtigen [48].

Setzt man (7,7) in (7,5) ein, so erhält man (für $|\vec{j}| = const.$) das allgemeine BIOT-SAVARTsche Gesetz

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} dV. \quad (7,8)$$

Die Integration hat sich dabei über alle stromführenden Spulen bzw. über den gesamten Raum zu erstrecken. Der Beitrag der i-ten Spule zum Vektorpotential bzw. zur magnetischen Flußdichte lautet

$$\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_{V_i} \frac{\vec{j}_i}{|\vec{r}_i|} dV_i, \quad (7,9)$$

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_{V_i} \frac{\vec{j}_i \times \vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} dV_i. \quad (7,10)$$

7.1.2. Der Energieinhalt des magnetischen Feldes

Die Energiedichte des magnetischen Feldes ist

$$w = \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B}. \quad (7,11)$$

Diese Beziehung gilt für ein Feld beliebiger Form und bei Anwesenheit beliebiger Materialien. Wenn keine ferromagnetischen Stoffe im Feldbereich vorhanden sind, gilt (7,4). Dann kann die Integration ausgeführt werden, und es ergibt sich für die Energiedichte

$$w = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (7,12)$$

Die Gesamtenergie des magnetischen Feldes erhält man durch Integration der Beiträge der einzelnen Volumenelemente

$$E_m = \int \int \int_V w dV = \frac{1}{2\mu_0} \int \int \int_V B^2 dV. \quad (7,13)$$

Bei der Berechnung des Energieinhalts eines magnetischen Feldes mit Hilfe von (7,13) ist über den gesamten Raum zu integrieren. Das ist für numerische Berechnungen ungünstig. Aus diesem Grunde führt man (7,5) in die Energiebeziehung ein und erhält schließlich die Gleichung für die magnetische Feldenergie in der Form

$$E_m = \frac{1}{2} \int \int \int_V \vec{j} \cdot \vec{A} dV. \quad (7,14)$$

Die Gleichung (7,14) gestattet es, die Integration lediglich über das stromführende Spulenvolumen zu erstrecken. Hat man ein Spulensystem mit N Spulen endlicher Dimension, so liefert jede Spule ihren Beitrag zum gesamten Energieinhalt. Man kann schreiben:

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int \int \int_{V_k} \vec{j}_k \cdot \vec{A}_i dV_k \quad (7,15)$$

oder unter Verwendung von (7,9)

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int \int \int_{V_i} \int \int \int_{V_k} \frac{\vec{j}_i \cdot \vec{j}_k}{r_{ik}} dV_i dV_k. \quad (7,16)$$

Andererseits gilt per Definition

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik} I_i I_k, \quad (7,17)$$

so daß für die Induktionskoeffizienten

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_{V_i} \int \int \int_{V_k} \frac{\vec{j}_i \cdot \vec{j}_k}{I_i I_k r_{ik}} dV_i dV_k \quad (7,18)$$

folgt.

Für Spulen mit einem sehr kleinen stromführenden Querschnitt und konstanter Stromdichte gilt näherungsweise

$$\frac{\vec{j}_i dV_i}{I_i} \approx \frac{I_i d\vec{s}_i}{I_i} = d\vec{s}_i.$$

Damit folgt für die Induktionskoeffizienten

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{s_i} \oint_{s_k} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{r_{ik}}. \quad (7,19)$$

Diese Gleichung entspricht einer Approximation des Spulenstroms durch einen in der Mitte des leitenden Querschnitts liegenden Stromfaden. Sie eignet sich deshalb zur Berechnung der Gegeninduktivitäten ($i \neq k$) und der äußeren Selbstinduktivitäten des Spulensystems. Die Spulenvolumina müssen wegen $r_{ik} \rightarrow 0$ für $i = k$ bei der Rechnung ausgespart bleiben. Die innere Induktivität einer Spule kann nur durch eine Volumenintegration gemäß (7,18) gewonnen werden.

7.1.3. Die Kraftverteilung in den Spulen

Für die magnetische Kraft, die auf ein stromführendes Volumenelement im magnetischen Feld wirkt, gilt

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}. \quad (7,20)$$

Unter Verwendung von (7,1) und (7,4) kann man schreiben

$$\vec{f} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}. \quad (7,21)$$

Anstelle von (7,20) kann auch die Divergenz des MAXWELLSchen Spannungstensors \mathbf{T} zur Darstellung der Kraftdichte \vec{f} dienen:

$$\vec{f} = \operatorname{div} \mathbf{T}. \quad (7,22)$$

Die Komponenten des Spannungstensors können mit Hilfe der Tensoranalysis aus (7,21) und (7,22) berechnet werden. In einem allgemeinen, orthogonalen Koordinatensystem hat \mathbf{T} die Darstellung [49]

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_{11} - \frac{1}{2}B^2 & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - \frac{1}{2}B^2 & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \frac{1}{2}B^2 \end{pmatrix}, \quad (7,23)$$

mit $B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$ und $B_{ij} = B_i \cdot B_j$, $i, j=1, \dots, 3$.

Man erkennt, daß der MAXWELLSche Spannungstensor symmetrisch ist. Die Spur des Spannungstensors ist eine Invariante, d.h. sie ist unabhängig vom Koordinatensystem. Sie ist gleich der negativen Energiedichte des magnetischen Feldes gemäß (7,12):

$$\operatorname{sp} \mathbf{T} = -\frac{1}{2\mu_0} B^2 = -w. \quad (7,24)$$

Die resultierende magnetische Kraft im Spulensystem verschwindet,* da die Komponenten des Spannungstensors $T_{ij} \sim B_i B_j$ mit $(1/r^2)^2$ abfallen, die Oberfläche aber nur mit r^2 ansteigt. Es gilt also

$$\vec{F}_{res} = \int \int \int_V \vec{f} dV = \oint_{A_H} \mathbf{T} d\vec{A}_H = 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (7,25)$$

Es wird also auf das Spulensystem keine translatorische Kraft und kein Drehmoment ausgeübt.

* Das gilt unter der Voraussetzung, daß sich keine ferromagnetischen Stoffe und keine beweglichen Ladungen in dem betrachteten Raumgebiet befinden.

7.2. Elastomechanik

7.2.1. Der Verzerrungstensor

Unter der Einwirkung von Kräften erfahren feste Körper eine Deformation, da sie bis zu einem gewissen Grade elastisch sind. Sie ändern dabei sowohl ihre Form als auch ihr Volumen. Beschreibt man einen bestimmten Körperpunkt (in geradlinigen, orthogonalen Koordinaten x_i) mit dem Radiusvektor $\vec{r}(x_i)$, so hat er nach der Deformation den Wert $\vec{r}'(x_i)$. Die Verschiebung des Körperpunktes infolge der Deformation wird dann durch den Verschiebungsvektor $\vec{u} = \vec{r}'(x_i) - \vec{r}(x_i)$ dargestellt.

In Komponentenschreibweise gilt also

$$u_i = x'_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7, 26)$$

Der Verschiebungsvektor \vec{u} ist eine Funktion seiner Koordinaten x_i vor der Verschiebung. Betrachtet man zwei infinitesimal benachbarte Punkte, so ist der Abstandsvektor zwischen ihnen vor der Deformation dx_i und hat nach der Deformation den Wert $dx'_i = dx_i + du_i$. Man kann damit den Abstand der Punkte vor der Deformation mit $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$ und nach der Deformation mit $ds' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$ bestimmen. Als Differenz der Abstandsquadrate erhält man

$$ds'^2 - ds^2 = 2 \gamma_{ij} dx_i dx_j, \quad (7, 27)$$

wobei mit

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (7, 28)$$

der Verzerrungstensor \mathbf{G} definiert ist [50]. In (7,28) ist dabei über den Index k zu summieren.

Es ist ersichtlich, daß der Verzerrungstensor symmetrisch ist, d.h. es gilt

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}. \quad (7, 29)$$

In der linearen Theorie geht man davon aus, daß die Deformationen so klein sind, daß man das letzte Glied in (7,28) als Größe zweiter Ordnung vernachlässigen kann. Der Verzerrungstensor für kleine Deformationen ist also durch

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7, 30)$$

gegeben.* In Matrixform hat der Verzerrungstensor \mathbf{G} die Darstellung

$$\mathbf{G} = \gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \epsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (7, 31)$$

* Bei Verwendung von krummlinigen, orthogonalen Koordinaten θ_i ist die Metrik des Koordinatensystems zu berücksichtigen. Die äquivalente Darstellung von

Die Elemente der Hauptdiagonalen werden als Dehnungen, die übrigen als Gleitungen bezeichnet.

Den relativen Volumenzuwachs eines Volumenelements bei der Deformation erhält man, wie in [50] gezeigt wird, durch Bildung der Divergenz des Verschiebungsvektors \vec{u} :

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (7,32)$$

Durch Vergleich mit (7,30) erkennt man, daß der relative Volumenzuwachs gleich der Spur des Verzerrungstensor \mathbf{G} ist. Es gilt also:

$$\frac{\Delta V}{V} = \operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{sp} \mathbf{G} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}. \quad (7,33)$$

Die Komponenten des Verzerrungstensors \mathbf{G} sind nicht unabhängig voneinander, sondern hängen, wie (7,30) zeigt, über den Verschiebungsvektor \vec{u} voneinander ab. Sie müssen die Kompatibilitätsbedingung von SAINT-VENANT erfüllen [51]. Diese lautet:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \gamma_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \gamma_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad (7,34)$$

mit $i \neq k, j \neq l, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Diese Bedingung bedeutet mathematisch die stetige Differenzierbarkeit des Verschiebungsvektors und physikalisch, daß vor und nach der Deformation die benachbarten Elemente fugenlos zusammenpassen.

7.2.2. Der Spannungstensor und die Gleichgewichtsbedingung

Bei der Deformation eines elastischen Körpers treten in ihm innere Kräfte auf, die man Spannungen nennt. Diese Kräfte werden im allgemeinen durch äußere

(7,30) lautet dann

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i}).$$

Dabei bedeutet der Strich die kovariante Ableitung [52]. Die kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors \vec{u} ist definiert durch

$$u_{i|j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \Gamma_{ij}^k u_k,$$

wobei über den Index k zu summieren ist. Die Γ_{ij}^k sind die CHRISTOFFEL-Symbole, die von der Metrik des verwendeten Koordinatensystems abhängen. Die CHRISTOFFEL-Symbole sind bezüglich ihrer unteren Indizes i, j symmetrisch, so daß die Symmetrie des Verzerrungstensors erhalten bleibt [52].

Belastungen verursacht. Betrachtet man ein Volumenelement, so greifen die Spannungen an der Oberfläche des Elementes an, d.h. die Kräfte sind flächenproportional. Daneben gibt es im allgemeinen volumenproportionale Kräfte (basierend auf Volumenkräftedichten \vec{f}), die im Schwerpunkt des Volumenelementes angreifen.

Damit der elastische Körper im Gleichgewicht ist, muß für jedes Volumenelement das Kräftegleichgewicht $\sum_i \vec{F}_i = 0$ und das Momentengleichgewicht $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$ erfüllt sein. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt, wenn an das Volumenelement Spannungen und Volumenkräftedichten angreifen,

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \vec{f} = 0 \quad (7,35)$$

oder in Komponentenschreibweise*

$$\frac{S_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0,$$

wobei über den Index j zu summieren ist. Dabei ist \mathbf{S} der Spannungstensor:

$$\mathbf{S} = S_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (7,36)$$

Aus dem Momentengleichgewicht folgt

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad (7,37)$$

d.h. der mechanische Spannungstensor ist symmetrisch. Die Elemente der Hauptdiagonalen werden als Normalspannungen, die übrigen als Schubspannungen bezeichnet.

* Bei Verwendung von krummlinigen, orthogonalen Koordinaten θ_i ist wiederum die Metrik des Koordinatensystems zu berücksichtigen, so daß die äquivalente Darstellung von (7,35) dann

$$S^{ij}{}_{|i} + f^j = 0$$

lautet. Der Strich bedeutet die kovariante Ableitung des kontravarianten Spannungstensors und ist definiert durch

$$S^{ij}{}_{|k} = \frac{\partial S^{ij}}{\partial \theta^k} + \Gamma_{km}^i S^{mj} + \Gamma_{km}^j S^{im},$$

wobei über den Index m zu summieren ist. Die Γ_{ik}^λ sind wiederum die CHRISTOFFEL-Symbole [52].

7.2.3. Das Elastizitätsgesetz

Das Elastizitätsgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Verzerrungstensor. In der physikalisch linearen Theorie gilt als Elastizitätsgesetz das HOOKEsche Gesetz, das den Spannungstensor linear mit dem Verzerrungstensor verknüpft. Man kann schreiben:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}, \quad (7,38)$$

oder in Komponentenschreibweise

$$S_{ij} = E_{ijkl} \cdot \gamma_{kl},$$

wobei über die Indizes k und l zu summieren ist. Der in (7,38) definierte Elastizitätstensor \mathbf{E} ist ein Tensor 4. Stufe. Ein Tensor 4. Stufe hat im allgemeinen $3^4 = 81$ Komponenten. Da jedoch der Spannungstensor und der Verzerrungstensor symmetrisch sind und \mathbf{E} selbst bezüglich der Indizes i, j und k, l eine Symmetrie aufweist [51], reduziert sich die Zahl auf 21 für einen allgemeinen anisotropen Körper (z.B. einen Kristall). Liegt jedoch ein isotropes Material vor, d.h. gibt es in den Elastizitätseigenschaften keinerlei ausgezeichnete Richtung, so gibt es nur 2 wesentliche Konstanten: Den Elastizitätsmodul E und die Querdehnungszahl ν . Außerdem wird noch der Schubmodul G verwendet, der von E und ν abhängt:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (7,39)$$

Das HOOKEsche Gesetz lautet für isotrope Körper in Komponentendarstellung

$$\sigma_{11} = 2G \left(\epsilon_{11} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right),$$

$$\sigma_{22} = 2G \left(\epsilon_{22} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right),$$

$$\sigma_{33} = 2G \left(\epsilon_{33} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right),$$

$$\tau_{12} = 2G \gamma_{12},$$

$$\tau_{13} = 2G \gamma_{13},$$

$$\tau_{23} = 2G \gamma_{23}. \quad (7,40)$$

Umgekehrt ergibt sich (in Kurzschreibweise):

$$\gamma_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} S_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (7,41)$$

mit $i, j = 1, 2, 3$.

Der Wert der Querdehnungszahl (POISSONsche Zahl) ν kann zwischen 0 und 0.5 liegen. Bei $\nu = 0.5$ liegt Inkompressibilität vor. Für Metalle gilt etwa $\nu = 0.3$.

Die Gleichgewichtsbedingung nach (7,35), das HOOKESche Gesetz nach (7,38) und die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung nach (7,30) bilden das Gleichungssystem der linearen Elastizitätstheorie. Setzt man γ_{ij} aus (7,30) in (7,40) ein und dann S_{ij} in die Gleichgewichtsbedingung (7,35), so erhält man 3 partielle Differentialgleichungen für den Verschiebungsvektor \vec{u} . Es gilt unabhängig vom Koordinatensystem für isotrope Körper [50]

$$(2\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \vec{f} = 0. \quad (7,42)$$

Dabei sind μ und λ die LAMÉschen Elastizitätskoeffizienten. Sie hängen mit E und ν zusammen. Es gilt:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (7,43)$$

$$\mu = G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1 + \nu)}. \quad (7,44)$$

Bei gegebener Belastung \vec{f} und gegebenen zulässigen Randbedingungen kann das elastostatische Problem mit Hilfe von (7,42) gelöst werden.

8. Literatur

- [1] Lehner, G., Schlüter, A., *Plasmaphysik und Fusionsreaktor*, ETZ-A Bd.92 H.5 (1971) 249ff.
- [2] Pinkau, K., Schumacher, U., *Kernfusion mit magnetisch eingeschlossenen Plasmen*, Physik in unserer Zeit, 13. Jahrg. Nr. 5 (1982) 138-154.
- [3] Raeder, J., et al., *Kontrollierte Kernfusion*, Teubner Verlag Stuttgart (1981)
- [4] Remsen, H., Reihlein, G., Rienäcker, H., *Einleitung in das Studium der Chemie*, Verlag Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig (1963)
- [5] Wobig, H., *Wege zur kontrollierten Kernfusion*, Die Naturwissenschaften 61 (1974) 97-106.
- [6] Artsimovich, L.A., *Tokamak Devices*, Nuclear Fusion 12 (1972) 215-252.
- [7] *INTOR, International Tokamak Reactor, Phase One*, Report of the International Tokamak Reactor Workshop, IAEA, Vienna (1982)
- [8] *STELLARATORS, Status and Future Directions*, Joint US-Euratom Report (ed. by F. Rau), Report IPP 2/254, July 1981.
- [9] Chodura, R., Dommaschk, W., Herrnegger, F., Lotz, W., Nührenberg, J., Schlüter, A., *Theoretical Optimization of Stellarators*, IEEE Transactions on Plasma Science, Vol. PS-9, No.4, December 1981, 221-227.
- [10] Boozer, A.H., Chu, T.K., Dewar, R.L., Furth, H.P., Goree, J.A., Johnson, J.L., Kulsrud, R.M., Monticello, D.A., Kuo-Petravic, G., Sheffield, G.V., Yoshikawa, S., Betancourt, O., *Two High-Beta Toroidal Configurations: A Stellarator and a Tokamak-Torsatron Hybrid*, Proceedings of the 9th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Baltimore, MD, 1982, Vol.III, 129-139.
- [11] Harmeyer, E., Kisslinger, J., Rau, F., Wobig, H., *On Conventional and Modular Heliaes*, Proceedings of the 12th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Budapest, 1985, Vol.II, 449-452.
- [12] Brossmann, U., Dommaschk, W., Herrnegger, F., Grieger, G., Kisslinger, J., Lotz, W., Nührenberg, J., Rau, F., Renner, H., Ringler, H., Sapper, J., Schlüter, A., Wobig, H., *Concept of an Advanced Stellarator*, Proceedings of the 9th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Baltimore, MD, 1982, Vol.III, 141-156.
- [13] Nührenberg, J., Zille, R., *Stable Stellarators with Medium β and Aspect Ratio*, Physics Letters 114A, 129 (1986)
- [14] Herrnegger, F., Rau, F., *Bean-shaped Advanced Stellarators with Modular Coil Systems*, Proceedings of the 13th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Heating, Schliersee, FRG, 1986, 307-310.

- [15] Popov, S.N., Popryadukhin, A.P., *Production of a Helical Magnetic Field*, Soviet Physics - Technical Physics, Vol.11, No.2, Aug. 1966, 284.
- [16] Rehker, S., Wobig, H., *Stellarator Fields with Twisted Coils*, Report IPP 2/215, August 1973.
- [17] Spitzer, L., Jr., *The Stellarator Concept*, Physics of Fluids 1, July-August 1958, 253-264.
- [18] Harmeyer, E., Brossmann, U., Gorenflo, H., Kisslinger, J., Mukherjee, S., Raeder, J., Rau, F., Wobig, H., *On Modular Coil Systems of the WENDELSTEIN VII-AS Type with Reactor Dimensions*, Report IPP 2/269, August 1983.
- [19] Sviatoslavsky, N.I., Van Sciver, S.W., Kulcinski, G.L., Anderson, D.T., Bailey, A.W., Callen, J.D., Derr, J.A., Emmert, G.A., El-Guebaly, L., Khalil, A., Shohet, J.L., Sze, D.K., Sanders, R.C., Tataronis, J., Yuan, K., *UWTOR-M, A Stellarator Power Reactor Utilizing Modular Coils*, Proceedings of the 3rd Technical Committee Meeting and Workshop on Fusion Reactor Design and Technology, Tokyo, October 1981, Vol.I, 327-342.
- [20] Henning, C.H., Hodges, A.J., Van Sant, J.H., Hinkle, R.E., Horvath, J.A., Hintz, R.E., Dalder, E., Baldi, R., Tatro, R., *Mirror Fusion Test Facility Magnet*, Proceedings of the 8th Symposium on Engineering Problems of Fusion Research, San Francisco, CA, 1979, Vol.II, 739-743.
- [21] File, J., Mills, R.G., Sheffield, G.V., *Large Superconducting Magnet Design for Fusion Reactors*, Princeton Plasma Physics Laboratory, Report MATT-848, June 1971.
- [22] Moses, R.W., Jr., Young, W.C., *Analytic Expressions for Magnet Forces on Sectorized Toroidal Coils*, Proceedings of the 6th Symposium on Engineering Problems of Fusion Research, San Diego, CA, 1975, Vol.II, 917-921.
- [23] File, J., Sheffield, G.V., *A Large Superconducting Magnet for Fusion Research*, Proceedings of the 4th International Conference on Magnet Technology, Springfield, VA, 1972, 240-243.
- [24] Raeder, J., *Some analytical results for toroidal magnetic field coils with elongated minor cross-section*, Report IPP 4/141, September 1976.
- [25] Komarek, P., Krauth H., *Der "Large Coil Task", ein internationaler Beitrag zur Entwicklung supraleitender Magnete für die Fusion*, Kerntechnik, 20. Jahrgang, Nr.6 (1978) 274ff.
- [26] Miyamoto, K., *Recent Stellarator Research*, Nuclear Fusion 18, No.2, (1978) 243-284.
- [27] Rau, F., Kisslinger, J., Wobig, H., *Vacuum Magnetic Field and Modular Coil System of the Advanced Stellarator WENDELSTEIN VII-AS*, Report IPP 2/259, June 1982.

- [28] Sapper, J., Brossmann, U., Grieger, G., *Modular Design of the Advanced Stellarator WVII-AS, -Overview-*, Proceedings of the 10th Symposium on Fusion Engineering, Philadelphia, PE, 1983, Vol.II, 2091-2095.
- [29] Harmeyer, E., Kisslinger, J., Rau, F., Wobig, H., *On Modular Stellarator Coils of the W VII-AS Type with Reactor Dimensions*, Proceedings of the 13th Symposium on Fusion Technology, Varese, Italy, 1984, Vol.2, 1599-1605.
- [30] Harmeyer, E., Kisslinger, J., Rau, F., Wobig, H., *On Modular Coils of a Stellarator Reactor*, Proceedings of the 11th Symposium on Fusion Engineering, Austin, TX, 1985, Vol.II, 182-185.
- [31] Miller, R.L., Krakovski, R.A., *The Modular Stellarator Fusion Reactor (MSR) Concept*, Proceedings of the 3rd Technical Committee Meeting and Workshop on Fusion Reactor Design and Technology, Tokyo, October 1981, Vol.I, 343-357.
- [32] Harmeyer, E., Kisslinger, J., Rau, F., Wobig, H., *Heating and Burn Scenarios for ASR and ASB*, Proceedings of the 4th Technical Committee Meeting and Workshop on Fusion Reactor Design and Technology, Yalta, USSR, 1986, IAEA, Vienna 1987, Vol.2, 37-48.
- [33] Miyamoto, K., *Plasma Physics for Nuclear Fusion*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England (1980)
- [34] Morozov, A.I., Solov'ev, L.S., *Reviews of Plasma Physics 2*, (ed. by M.A. Leontovich), Consultants Bureau, New York (1966)
- [35] Abramovich, M., Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Inc., New York (1972)
- [36] Sackett, S.J., *EFFI - A code for calculating the electromagnetic field, force, and inductance in coil systems for arbitrary geometry*, Lawrence Livermore National Laboratory, Report UCRL-52402, March 1978.
- [37] Harmeyer, E., *Analytische Lösungen für die Feld-, Stromdichte-, Kraftdichte- und mechanische Spannungsverteilung in toroidalen Spulensystemen*, Report IPP 2/294, Mai 1988.
- [38] *SAP - A general structural analysis program*, Structural and Materials Research Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA, Report Ucsesm 70-20, October 1977.
- [39] Zienkiewicz, O.C., *Methoden der finiten Elemente*, Carl Hanser Verlag, München, Wien (1975)
- [40] Gorenflo, H., Jandl, O., *Calculation of the Nodal Forces in the 20-node Isoparametric Three-Dimensional Solid Element by the SHAPE Computer Program*, Report IPP 4/167, March 1978.
- [41] *DUBBEL, Taschenbuch für den Maschinenbau, Band 1*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1974)

- [42] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd Edition, Mc Graw-Hill International Book Company, Singapore (1982)
- [43] Desai, C.S., Abel, J.F., *Introduction to the Finite Element Method for Engineering Analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1982)
- [44] Szabo, I., *Höhere Technische Mechanik*, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1964)
- [45] Böhme, G., et al., *Studies of a Modular Advanced Stellarator Reactor ASRA6C*, Report IPP 2/285, Mai 1987.
- [46] Harmeyer, E., Kisslinger, J., Rau, F., Wobig, H., *A General Winding Law of Modular Stellarator Coils*, Report IPP 2/274, March 1985.
- [47] Badger, B., El-Guebaly, L.A., Emmert, G.A., Kulcinski, G.L., Larsen, E.M., Santarius, J.F., Sawan, M.E., Scharer, J.E., Sviatoslavsky, I.N., Vogelsang, W.F., Walstrom, P.L., Wittenberg, L.J., *Annual Report on Contributions to ASRA6C - A Commercial Stellarator Fusion Reactor*, Report FPA-85-4, December 1985, Fusion Power Associates, Madison, WI
- [48] Müller, W., Krueger, J., Jacobus, A., Winz, R., Weiland, T., Euler, H., Hamm, U., Novender, W.R., *Numerical Solution of 2- or 3-Dimensional Non-linear Field Problems by Means of the Computer Program PROF1*, Archiv für Elektrotechnik 65 (1982) 299-307.
- [49] Simonyi, K., *Theoretische Elektrotechnik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1977)
- [50] Landau, L.D., Lifschitz, E.M., *Elastizitätstheorie*, Akademie Verlag, Berlin (1983)
- [51] Macke, W., *Mechanik der Teilchen, Systeme und Kontinua*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1962)
- [52] Klingbeil, E., *Tensorrechnung für Ingenieure*, Bibliographisches Institut, Mannheim (1966)

Danksagung

Die vorliegende Arbeit habe ich im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching angefertigt. Sie wurde als Dissertation an der Technischen Hochschule Darmstadt im Fachbereich Elektrische Energietechnik eingereicht. Dem Direktorium des Max-Planck-Instituts für Plasmaphysik danke ich für die Befürwortung dieser Arbeit und für die Möglichkeit, das Rechenzentrum des IPP in Anspruch zu nehmen.

Herrn Professor Dr. W. Müller von der Technischen Hochschule Darmstadt danke ich herzlich für die intensive Betreuung und die Förderung dieser Arbeit, für die stete Bereitschaft zum klärenden Gespräch und für die Übernahme des Referats. Herrn Professor Dr. J. Raeder von der Technischen Universität München, der in seiner Eigenschaft als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching diese Arbeit betreut hat, danke ich besonders für die intensive Förderung dieser Arbeit, für die genaue Durchsicht des Manuskripts und für viele wertvolle Anregungen. Außerdem möchte ich mich bei ihm für die Übernahme eines Korreferats bedanken. Herrn Professor Dr. J. Wissmann von der Technischen Hochschule Darmstadt möchte ich für die Betreuung des elastomechanischen Teils dieser Arbeit und für die Übernahme eines Korreferats danken.

Mein besonderer Dank gilt posthum meinem leider inzwischen verstorbenen Kollegen Herrn Dr. H. Preis, der mich zu der vorliegenden Arbeit entscheidend angeregt und motiviert hat. Herrn Dr. G. Grieger, danke ich für das stete Interesse für diese Arbeit und die Ermöglichung der numerischen Rechnungen. Herrn Dr. H. Wobig, Herrn Dr. F. Rau und Herrn Dipl.-Ing. J. Kißlinger, möchte ich für die zahlreichen Diskussionen zum Umfeld dieser Arbeit meinen Dank aussprechen. Herrn Dipl.-Ing. S. Mukherjee danke ich besonders für die Diskussionen und die wertvollen Hinweise zum Gebiet der Elastomechanik. Für die Programmierung bzw. die Überlassung verschiedener verwendeter Fortran-Routinen danke ich Frau I. Ott und Herrn H. Gorenflo. Für ihre Unterstützung bei der Anwendung des Textverarbeitungssystems T_EX möchte ich mich besonders bei Frau K. O'Shea bedanken.