

**Analytische Lösungen
für die Feld-, Stromdichte-, Kraftdichte-
und die mechanische Spannungsverteilung
in toroidalen Spulensystemen**

E. Harmeyer

IPP 2/294

Mai 1988



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
Garching bei München

Analytische Lösungen
für die Feld-, Stromdichte-, Kraftdichte-
und die mechanische Spannungsverteilung
in toroidalen Spulensystemen

E. Harmeyer

IPP 2/294

Mai 1988

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die
Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

For a toroidal shell of finite wall thickness subjected to a given current distribution the related magnetic field distribution is obtained. This allows one to derive the stored magnetic energy of the system, and the distributions of the force density and the mechanical stresses in the shell. Furthermore, the mechanical stresses in the shell are determined for the force density distributions $f_\rho = \text{const.}$ and $f_\rho \sim \frac{1}{r}$. The virial theorem is applied to the configurations considered and is compared to results of the analytical solutions developed in this study.

These analytical solutions supplement the numerical calculations for the modular stellarator coil systems treated in IPP report 2/298.

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
2.	Magnetische Feldverteilung und magnetischer Energieinhalt	3
2.1.	Die Stromdichte- und die magnetische Feldverteilung in einem idealen Torus mit endlicher Wandstärke	3
2.2.	Die magnetische Feldverteilung einer diskreten Anzahl von axialsymmetrisch angeordneten Linienströmen	5
2.3.	Der Energieinhalt des magnetischen Feldes eines idealen Torus mit endlicher Wandstärke	6
3.	Magnetische Kräfte und mechanische Spannungen	9
3.1.	Die Kraftdichteverteilung in einem idealen Torus mit endlicher Wandstärke	9
3.2.	Die resultierende Kraft einer Spule	10
3.3.	Die mechanischen Spannungen in einer toroidalen Schale	12
3.4.	Die Verzerrungen	16
3.5.	Die Vergleichsspannung	17
4.	Das Virialtheorem	19
5.	Zusammenfassung	24
6.	Anhang	25
6.1.	Quasitoroidale Koordinaten	25
6.2.	Die Kraftdichteverteilungen $f_\rho = const.$ und $f_\rho \sim \frac{1}{r}$	28
7.	Literatur	30
8.	Symbolverzeichnis	31

1. Einleitung

Aus ökonomischen Gründen ist beim Fusionsreaktor eine hohe Fusions-Leistungsdichte p_f erwünscht. Da diese von den Plasmaparametern und dem Betrag der magnetischen Flußdichte im Plasma ($p_f \sim \beta^2 B^4$ [1]) abhängig ist, kommt es darauf an, die beiden Größen β und B so weit wie möglich zu steigern. Wegen der Gefahr von Plasmainstabilitäten ist β jedoch beschränkt. Beim Stellarator wird das Magnetfeld für den Einschluß eines heißen Plasmas ausschließlich durch externe Ströme erzeugt. Durch die Gestaltung des Spulensystems ist es möglich, die Topologie des Magnetfeldes in weiten Bereichen zu beeinflussen. Der Stellarator-Reaktor wird aus Wartungsgründen modular aufgebaut sein müssen. Bei modularen Stellarator-Spulensystemen, deren Prinzip erstmals in [2] dargestellt wurde, erhält man durch eine geschickte Formgebung der einzelnen Spulen optimierte Konfigurationen, in denen die sekundären Plasmaströme im Vergleich zum klassischen Stellarator reduziert sind und die Stabilität der Plasmasäule verbessert ist [3,4]. Eine weitere Erhöhung der β -Grenze ist in Konfigurationen mit einer leicht helikalen Achse (HELIAS [5]) möglich.

Das Einschlußvermögen des magnetischen Feldes kann gesteigert werden, wenn man, unabhängig von der speziellen Magnetfeldtopologie, den Betrag der magnetischen Flußdichte im Plasmabereich erhöht. Der Energieinhalt des magnetischen Feldes, die magnetischen Kräfte und die mechanischen Spannungen in den Spulen nehmen mit B_0^2 zu. Diese Größen sind jedoch durch die Grenzwerte und die zulässigen Beanspruchungen der verwendeten Materialien beschränkt. Es kommt also darauf an, daß diese Größen für einen festen Wert B_0 minimiert werden. Ein Optimum ist dann erreicht, wenn unter Beachtung der Randbedingungen und Bewertung der einzelnen Größen ein resultierendes Minimum erzielt wird.

Auf die stromtragenden Leiter eines Spulensystems wirken mechanische Kräfte. Die Spulen einer toroidalen Spulenanordnung benötigen eine mechanische Abstützung, sowohl gegeneinander als auch gegen die Torusachse. Für eine analytische Betrachtung kann man als erste Approximation das Spulensystem in der Weise abstützen, daß die Zwischenräume zwischen den Spulen durch materielle Elemente ausgefüllt werden. Auf diese Weise entsteht eine toroidale Schale, die an dem Ort der Spulen mit einer magnetischen Kraftdichteverteilung belegt ist. Die resultierenden Kräfte der einzelnen Spulen werden also durch gegenseitige Abstützung (Gewölbeabstützung) aufgefangen. Die Gesamtanordnung einer toroidalen stromtragenden Schale ist kraftfrei, d.h. sie muß nicht durch äußere Kräfte gehalten werden.

Analytische Lösungen sind für den betrachteten Problemkreis möglich, wenn man gewisse Idealisierungen vornimmt. Eine solche Idealisierung ist der "ideale Torus". Dieser ideale Torus wird hier in der Weise modifiziert, daß er mit einer *endlichen Wandstärke* ausgestattet wird. Auch dieses etwas komplexere Modell kann analytisch behandelt werden. Die gesamte Feldenergie ist im Innern des Torus bzw. in den Wänden lokalisiert, da außerhalb des Torus das magnetische Feld verschwindet. Der Einfluß des magnetischen Streufeldes von realen Systemen wird also vernachlässigt.

Der Vorteil dieses *idealen Torus mit endlicher Wandstärke* liegt darin, daß man neben der Feldverteilung auch die Stromdichte- und damit die Kraft- und die mechanische Spannungsverteilung in der Wandung betrachten kann. Die Anwendung analytischer Methoden gestattet es, Skalierungsgesetze abzuleiten.

Die Behandlung des Problems erfolgt zweckmäßigerweise in *quasitoroidalen Koordinaten* ρ, φ, ϑ , entsprechend Bild 1.

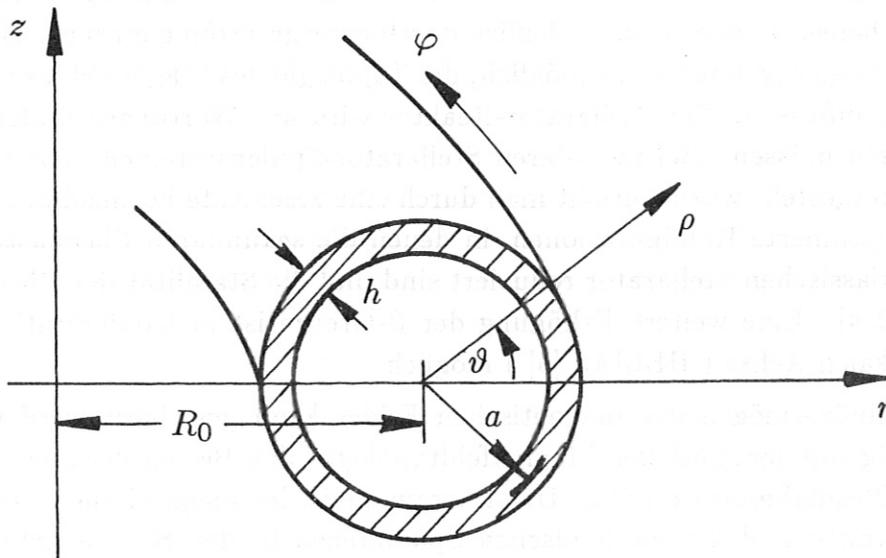


Bild 1: Idealer Torus mit endlicher Wandstärke h

In dieser Arbeit werden die Feld- und die Stromdichteverteilung und damit die Kraftdichten, die resultierenden Kräfte und die mechanische Spannungsverteilung in einer dünnen, stromtragenden toroidalen Schale mit analytischen Methoden berechnet. Die Untersuchung der Feldgrößen wird in Abhängigkeit von den geometrischen Parametern des Systems durchgeführt. Aus den erhaltenen Beziehungen wird der Zusammenhang zwischen dem magnetischen Energieinhalt des Spulensystems und den mechanischen Spannungen in den Spulen hergeleitet.

2. Magnetische Feldverteilung und magnetischer Energieinhalt

2.1. Die Stromdichte- und die magnetische Feldverteilung in einem idealen Torus mit endlicher Wandstärke

Nimmt man an, daß die Stromdichte nur die Komponente in ϑ - Richtung hat, so ergibt sich für die magnetische Feldverteilung im Torusinnern ($\rho \leq a - \frac{h}{2}$) mit dem Durchflutungsgesetz

$$I_{ges} = \oint \vec{H} d\vec{s} = \int_0^{2\pi} H_\varphi(r) r d\varphi. \quad (2,1)$$

Daraus folgt die $1/r$ -Abhängigkeit des magnetischen Feldes

$$H_\varphi(r) = \frac{I_{ges}}{2\pi r}. \quad (2,2)$$

Wählt man die Feldstärke auf der magnetischen Achse R_0 als Referenzgröße, so erhält man

$$H_\varphi(r) = \frac{H_\varphi(R_0) R_0}{r}. \quad (2,3)$$

Für die magnetische Flußdichte im Torusinnern kann man also schreiben

$$\vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi = B_0 \frac{R_0}{r} \vec{e}_\varphi, \quad (2,4)$$

mit

$$r = R_0 + \rho \cos\vartheta,$$

für

$$0 \leq \rho \leq a - \frac{h}{2}.$$

Dabei ist

$$B_0 = B_\varphi(R_0) = \frac{\mu_0 N I_c}{2\pi R_0}, \quad (2,5)$$

wenn man sich den Gesamtstrom aus N Linienströmen mit je I_c aufgebaut denkt.

Im Bereich der Toruswandungen $a - \frac{h}{2} \leq \rho \leq a + \frac{h}{2}$ kann man für die Stromdichte den Ansatz

$$\vec{j} = -j_0 \frac{R_0}{r} \vec{e}_\vartheta \quad (2,6)$$

machen. Benutzt man die Beziehung

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (2,7)$$

so kann im Bereich der Toruswandungen $a - \frac{h}{2} \leq \rho \leq a + \frac{h}{2}$ die magnetische Flußdichte bestimmt werden. Gleichzeitig wird auch die Bedingung $\text{div } \vec{j} = 0$ erfüllt. In quasitoroidalen Koordinaten kann man für (6,10)

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (r B_\varphi) \right) \quad (2,8)$$

schreiben, wenn \vec{B} nur eine Komponente in φ - Richtung hat. Damit folgt dort unter Berücksichtigung von (2,7) und (2,6)

$$B_\varphi = -\mu_0 j_0 R_0 \frac{\rho}{r} + \frac{C}{r}. \quad (2,9)$$

Die Integrationskonstante C erhält man, wenn man für die Torusaußenseite die Randbedingung $B_\varphi(\rho = a + \frac{h}{2}) = 0$ zugrunde legt, zu $C = \mu_0 j_0 R_0 (a + \frac{h}{2})$. Aus dem stetigem Übergang der magnetischen Flußdichte B_φ an der Stelle $\rho = a - \frac{h}{2}$ folgt:

$$B_0 = \mu_0 j_0 h. \quad (2,11)$$

Diese Gleichung ist identisch mit (2,5), wenn man berücksichtigt, daß

$$j_0 = \frac{N I_c}{2\pi R_0 h} \quad (2,12)$$

gilt. Dabei ist j_0 die mittlere Stromdichte in der Wandung.

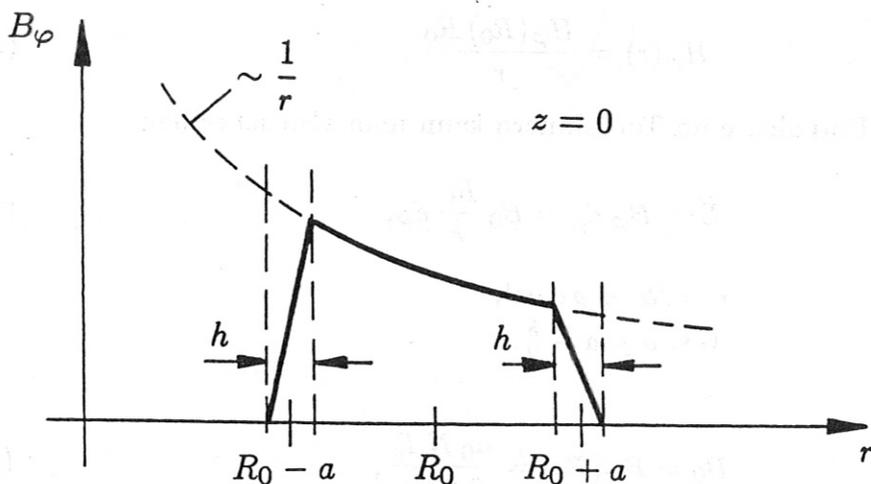


Bild 2: Magnetische Feldverteilung in der Ebene $z = 0$ für den idealen Torus mit endlicher Wandstärke h

Für die Stromdichte- und die magnetische Feldverteilung des idealen Torus mit endlicher Wandstärke h folgt schließlich:

$$j_\vartheta = -\frac{B_0}{\mu_0 h} \frac{R_0}{r} \quad \text{für} \quad a - \frac{h}{2} \leq \rho \leq a + \frac{h}{2}, \quad (2,13)$$

und

$$B_\varphi = \begin{cases} B_0 \frac{R_0}{r} & \text{für } 0 \leq \rho \leq a - \frac{h}{2}, \\ B_0 \frac{R_0}{r} \frac{a + \frac{h}{2} - \rho}{h} & \text{für } a - \frac{h}{2} \leq \rho \leq a + \frac{h}{2}, \end{cases} \quad (2,14)$$

mit

$$r = R_0 + \rho \cos\vartheta.$$

Die Bedingung $\text{div } \vec{B} = 0$ ist erfüllt, da die B_φ -Komponente nicht vom Winkel φ abhängt.

Der Maximalwert der magnetischen Flußdichte, der für die Auslegung von Spulen besonders interessant ist, tritt an der Innenseite, die der Torusachse zugewandt ist, auf, d.h. an der Stelle $\rho = a - \frac{h}{2}$, $\vartheta = \pi$. Dieser Maximalwert beträgt

$$B_M = B_0 \frac{R_0}{R_0 - a + \frac{h}{2}} \quad \text{für } a + \frac{h}{2} < R_0. \quad (2,15)$$

2.2. Die magnetische Feldverteilung einer diskreten Anzahl von axialsymmetrisch angeordneten Linienströmen

Neben der analytischen Lösung der Feldverteilung in einem idealen Torus existieren für eine toroidale Anordnung einer *diskreten* Anzahl von Spulen analytischen Näherungen. BORIS und KUCKES [6] haben 1966 geschlossene analytische Ausdrücke für das Vektorpotential und das magnetische Feld einer diskreten Anzahl von axialsymmetrisch angeordneten Linienströmen abgeleitet. Andere Autoren [7, 8] haben diese Lösungen benutzt, um die magnetische Feldverteilung von D-förmigen Tokamak-Spulen zu beschreiben. Die Lösung für die magnetische Flußdichte lautet in dieser Anordnung für die Ebene $z = 0$ [7]:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 N I_c}{2 \pi r} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{r}{R_1}\right)^N - 1} + \frac{1}{\left(\frac{R_2}{r}\right)^N - 1} \right) \quad (2,16)$$

für

$$R_1 < r < R_2.$$

Dabei ist N die Anzahl der Spulen, I_c ist der Spulenstrom; $R_1 = R_0 - a$ und $R_2 = R_0 + a$ sind geometrische Größen entsprechend Bild 2. Wegen (2,5) kann man

$$B_\varphi = B_0 \frac{R_0}{r} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{r}{R_1}\right)^N - 1} + \frac{1}{\left(\frac{R_2}{r}\right)^N - 1} \right) \quad (2,17)$$

schreiben. Gleichung (2,17) stellt eine Erweiterung von (2,4) dar: Sie enthält zwei additive Terme, die die endliche Spulenanzahl N enthalten. Für $N \rightarrow \infty$ erhält man die Lösung für den idealen Torus nach (2,4). Das Maximum tritt wiederum an der Stelle $\rho = a - \frac{h}{2}$, $\vartheta = \pi$, also bei $r = R_0 - a + \frac{h}{2}$ auf. Dafür gilt, wenn man berücksichtigt, daß der dritte additive Term wegen $\left(\frac{R_0+a}{r}\right)^N \gg \left(\frac{r}{R_0-a}\right)^N$ sehr klein und deshalb zu vernachlässigen ist:

$$B_M = B_0 \frac{R_0}{R_0 - a + \frac{h}{2}} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{R_0 - a + \frac{h}{2}}{R_0 - a}\right)^N - 1} \right), \quad \text{für } a + \frac{h}{2} < R_0. \quad (2,18)$$

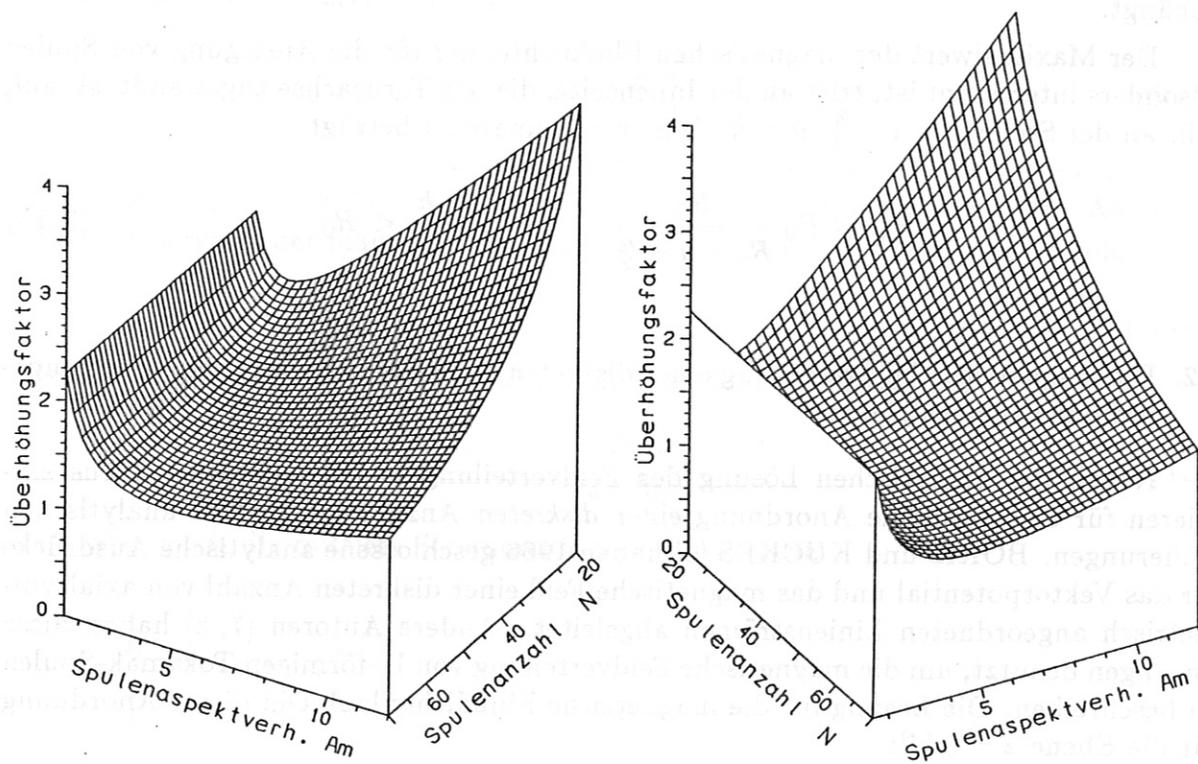


Bild 3: Feldüberhöhung B_M/B_0 an den Spulen als Funktion des Spulenaspektverhältnisses $A_m = R_0/a$ und der Spulenzahl N für $a/h = 3 = \text{const.}$.

2.3. Der Energieinhalt des magnetischen Feldes eines idealen Torus mit endlicher Wandstärke

Für den Energieinhalt des magnetischen Feldes gilt:

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} \int \int \int_V B^2 dV. \quad (2,19)$$

Setzt man $B^2 = B_\varphi^2$ nach (2,14) ein und verwendet gemäß (6,7) das Volumenelement $dV = r \rho d\rho d\varphi d\vartheta$, so folgt,

$$E_m = \frac{B_0^2 R_0^2}{2\mu_0} 2\pi \int_0^{a-\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{r} \rho d\rho + \frac{B_0^2 R_0^2}{2\mu_0 h^2} 2\pi \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{r} (a + \frac{h}{2} - \rho)^2 \rho d\rho \quad (2,20)$$

mit $r = R_0 + \rho \cos\vartheta$.

Wegen [9]

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{r} = \frac{2\pi}{\sqrt{R_0^2 - \rho^2}} \quad \text{für } \rho < R_0 \quad (2,21)$$

folgt

$$E_m = \frac{B_0^2 R_0^2}{2 \mu_0} 4 \pi^2 \int_0^{a-\frac{h}{2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R_0^2 - \rho^2}} + \frac{B_0^2 R_0^2}{2 \mu_0 h^2} 4 \pi^2 \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \frac{(a + \frac{h}{2} - \rho)^2}{\sqrt{R_0^2 - \rho^2}} \rho d\rho. \quad (2,22)$$

Die Auswertung des ersten Integrals ergibt

$$\int_0^{a-\frac{h}{2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R_0^2 - \rho^2}} = R_0 (1 - \sqrt{1 - \xi^2}). \quad (2,23)$$

Für das zweite Integral erhält man, nachdem man es in drei Einzelintegrale aufgespalten hat:

$$\begin{aligned} \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \frac{(a + \frac{h}{2} - \rho)^2}{\sqrt{R_0^2 - \rho^2}} \rho d\rho &= R_0^3 \{ -\eta (\arcsin \eta - \arcsin \xi) \\ &+ \frac{1}{3} ((2 + \xi^2) \sqrt{1 - \xi^2} - (2 + \eta^2) \sqrt{1 - \eta^2}) \\ &+ \frac{h}{R_0} \eta \sqrt{1 - \xi^2} \} \end{aligned} \quad (2,24)$$

mit

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a - \frac{h}{2}}{R_0}, \\ \eta &= \frac{a + \frac{h}{2}}{R_0}. \end{aligned} \quad (2,25)$$

Wenn man (2,23) und (2,24) in (2,22) einsetzt, erhält man eine explizite Formel für die magnetische Energie. Zur besseren Übersicht ist es aber sinnvoll, eine Reihenentwicklung für die einzelnen Funktionen in (2,24) und (2,23) durchzuführen. Das ist zulässig, da im allgemeinen $h/a < 1$ und $a/R_0 < 1$ gilt. Auf diese Weise ergibt sich schließlich für den idealen Torus mit endlicher Wandstärke h , wenn man Reihenglieder bis zur zweiten Potenz von $\frac{h}{a}$ und $\frac{a}{R_0}$ berücksichtigt:

$$E_m = \frac{B_0^2}{2 \mu_0} 2 \pi^2 a^2 R_0 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} + \frac{a^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \frac{h}{a} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (2,26)$$

Für eine unendlich dünne Wandstärke ($h = 0$) folgt mit (2,25) $\xi = \eta = \frac{a}{R_0} = \frac{1}{A_m}$. Damit verschwindet das Integral (2,24) und für (2,23) ergibt sich

$$\int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R_0^2 - \rho^2}} = R_0 (1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}), \quad (2,27)$$

so daß man für den magnetischen Energieinhalt des idealen Torus mit $h \rightarrow 0$ unter Verwendung von (2,22)

$$E_{id} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} 4\pi^2 R_0^3 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}\right) \quad (2,28)$$

erhält. Gleichung (2,28) stimmt für ein großes Spulenaspectverhältnis A_m und verschwindende Wandstärke h mit (2,26) überein, denn für $a \ll R_0$ gilt

$$R_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}\right) \approx \frac{a^2}{2R_0} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{1}{8} \frac{a^4}{R_0^4}\right). \quad (2,29)$$

Im Grenzfall $A_m = R_0/a \rightarrow \infty$ ergibt sich die magnetische Feldenergie einer idealen Zylinderspule (ohne Einfluß der Enden) mit dem Radius a und der Länge $2\pi R_0$:

$$E_{id_{zyl}} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2 R_0. \quad (2,30)$$

Aus (2,28) läßt sich mit Hilfe der Beziehung $E_{id} = \frac{1}{2} L_{id} I_c^2$ die Induktivität des idealen Torus zu

$$L_{id} = \mu_0 N^2 R_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}\right) \quad (2,32)$$

bestimmen, wenn man (2,5) sowie die Relation $I_{ges} = N I_c$ berücksichtigt, d.h. wenn man sich den Gesamtstrom aus N Einzelströmen mit je I_c aufgebaut denkt. Für den idealen Torus mit endlicher Wandstärke h ergibt sich entsprechend:

$$L_{id_h} = \mu_0 N^2 \frac{a^2}{2R_0} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} + \frac{a^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \frac{h}{a} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (2,33)$$

3. Magnetische Kräfte und mechanische Spannungen

3.1. Die Kraftdichteverteilung in einem idealen Torus mit endlicher Wandstärke

Die magnetische Kraftdichteverteilung in der Wandung des idealen Torus ist bestimmt durch

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}. \quad (3,1)$$

Durch Einsetzen der Stromdichte- und der magnetischen Feldverteilung gemäß (2,13) und (2,14) erhält man

$$f_\rho = \frac{B_0^2 R_0^2}{\mu_0 h^2} \frac{a + \frac{h}{2} - \rho}{(R_0 + \rho \cos \vartheta)^2}, \quad (3,2)$$

für $a - \frac{h}{2} \leq \rho \leq a + \frac{h}{2}$.

Für die beiden anderen Kraftdichtekomponenten gilt in diesem Falle: $f_\varphi = 0$ und $f_\vartheta = 0$.

Das Maximum der magnetischen Kraftdichte tritt an der Innenseite, die der Torusachse zugewandt ist, auf, d.h. an der Stelle $\rho = a - \frac{h}{2}$, $\vartheta = \pi$. Es beträgt

$$f_{\rho Max} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{2}{h \left(1 - \frac{a - \frac{h}{2}}{R_0}\right)^2}. \quad (3,3)$$

Für ein großes Spulenaspektverhältnis ($A_m = R_0/a \rightarrow \infty$) und eine dünne Schale ($h \ll a$) ergibt sich die mittlere magnetische Kraftdichte von

$$f_\rho(\rho = a) \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{1}{h}. \quad (3,4)$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß unter den genannten Voraussetzungen der Magnetfelddruck auf der Plasmaachse $B_0^2/2\mu_0$ mit dem mittleren Druck auf die Wandung des Torus $p_\rho = f_\rho h$ ungefähr übereinstimmt. Will man jedoch das endliche Spulenaspektverhältnis A_m , die endliche Wandstärke h (Spulenhöhe), sowie die endliche Spulenzahl N berücksichtigen, dann ist die mittlere magnetische Kraftdichte $\langle f_\rho \rangle$ mit

$$\langle f_\rho \rangle = \frac{1}{V_{Sp}} \int \int \int_{V_{TS}} f_\rho dV \quad (3,5)$$

zu ermitteln. Dabei ist $V_{Sp} = 2\pi a h d$ das Volumen einer Spule mit dem Radius a , der Spulenhöhe h und der Spulbreite d . Das Volumen $V_{TS} = 4\pi^2 R_0 a h / N$ ist das Segmentvolumen des Torus, das einer Spule zugeordnet ist. Das Verhältnis von Torusvolumen V_{TS} zu Spulenvolumen V_{Sp} ist

$$V_{TS}/V_{Sp} = \frac{2\pi R_0}{N d} \geq 1, \quad (3,6)$$

wobei das Gleichheitszeichen für den idealen Torus mit endlicher Wandstärke und axialsymmetrischer Stromdichteverteilung gilt. In quasitoroidalen Koordinaten lautet (3,5), wenn man die Kraftdichte nach (3,2) einsetzt und das Volumenelement $dV = r \rho d\rho d\vartheta$ benutzt,

$$\langle f_\rho \rangle = \frac{B_0^2 R_0^2}{\mu_0 h^3 N a d} \int_0^{2\pi} \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \frac{a + \frac{h}{2} - \rho}{R_0 + \rho \cos \vartheta} \rho d\rho d\vartheta. \quad (3,7)$$

Mit (2,21) und wegen

$$\int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \frac{(a + \frac{h}{2} - \rho)}{\sqrt{R_0^2 - \rho^2}} \rho d\rho = \frac{R_0^2}{2} \left\{ -2\eta(\sqrt{1-\eta^2} - \sqrt{1-\xi^2}) - (\arcsin \eta - \arcsin \xi - \eta\sqrt{1-\eta^2} + \xi\sqrt{1-\xi^2}) \right\} \quad (3,8)$$

mit ξ, η entsprechend (2,25) erhält man die explizite Formel für die mittlere Kraftdichte in einer Spule. Zur besseren Übersicht kann man wiederum eine Reihenentwicklung der einzelnen Funktionen in (3,8) durchführen. Wenn man Reihenglieder bis zur zweiten Potenz von $\frac{h}{a}$ und $\frac{a}{R_0}$ berücksichtigt, erhält man schließlich für die mittlere Kraftdichte in der Spule

$$\langle f_\rho \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu_0 h} \frac{2\pi R_0}{N d} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{h}{a} + \frac{a^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{h}{a} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (3,9)$$

Der mittlere Magnetfelddruck auf eine Spule ist

$$p_\rho = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{2\pi R_0}{N d} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{h}{a} + \frac{a^2}{R_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{h}{a} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (3,10)$$

3.2. Die resultierende Kraft einer Spule

Die resultierende Kraft auf ein Volumen, das mit einer Kraftdichteverteilung belegt ist, ergibt sich durch Summation der Kraftdichtekomponenten. Dabei müssen die jeweils addierten Komponenten im Raum konstante Richtung haben, d.h. die Berechnung kann nur in raumfesten (kartesischen) Koordinaten erfolgen. Um die resultierende Kraft auf das Segmentvolumen $V_{TS} = 4\pi^2 R_0 a h / N$ des Torus, d.h. auf eine Spule, zu bestimmen, genügt es wegen der Axialsymmetrie und der Symmetrie bezüglich der Ebene $z = 0$, die Kraftkomponente in x-Richtung zu berechnen:

$$F_x = \int \int_{V_{TS}} \int f_\rho \cos \vartheta \cos \varphi dV. \quad (3,11)$$

In quasitoroidalen Koordinaten lautet diese Gleichung, wenn man wiederum die Kraftdichte nach (3,2) einsetzt und das Volumenelement $dV = r \rho d\rho d\varphi d\vartheta$ benutzt,

$$F_x = \frac{B_0^2 R_0^2}{\mu_0 h^2} \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} (a + \frac{h}{2} - \rho) \rho \int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{R_0 + \rho \cos \vartheta} d\vartheta d\rho \int_{-\frac{\pi}{N}}^{+\frac{\pi}{N}} \cos \varphi d\varphi. \quad (3,12)$$

Nun gilt

$$\int_{-\frac{\pi}{N}}^{+\frac{\pi}{N}} \cos \varphi d\varphi = 2 \sin \frac{\pi}{N} \approx \frac{2\pi}{N} \quad (3,13)$$

für $N \geq 10$, d.h. die φ -Abhängigkeit spielt bei den hier betrachteten Systemen praktisch keine Rolle. Man kann deshalb die Kraftkomponente F_x aus Gründen der Anschaulichkeit in die radiale Kraftkomponente F_r umbenennen. Andererseits erkennt man, daß für $N = 1$, d.h. für den Fall der Identifikation des Gesamttorus mit einer Spule, die resultierende Kraft verschwindet. Das bedeutet, die Gesamtkonfiguration ist kraftfrei.

Wegen [9]

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{R_0 + \rho \cos \vartheta} = \frac{2\pi}{\rho} - \frac{R_0}{\rho} \frac{2\pi}{\sqrt{R_0^2 - \rho^2}} \quad \text{für } \rho < R_0 \quad (3,14)$$

folgt

$$F_r = \frac{B_0^2 R_0^2}{\mu_0 h^2} \frac{4\pi^2}{N} \left\{ \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} (a + \frac{h}{2} - \rho) d\rho - R_0 \int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \frac{a + \frac{h}{2} - \rho}{\sqrt{R_0^2 - \rho^2}} d\rho \right\}. \quad (3,15)$$

Die Auswertung der Integrale ergibt (mit ξ, η entsprechend (2,25)):

$$\int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} (a + \frac{h}{2} - \rho) d\rho = \frac{h^2}{2},$$

$$\int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} \frac{(a + \frac{h}{2} - \rho)}{\sqrt{R_0^2 - \rho^2}} d\rho = R_0 \{ \eta(\arcsin \eta - \arcsin \xi) - \sqrt{1 - \xi^2} + \sqrt{1 - \eta^2} \}. \quad (3,16)$$

Führt man wiederum eine Reihenentwicklung der einzelnen Funktionen in (3,16) durch, und berücksichtigt man Reihenglieder bis zur zweiten Potenz von $\frac{h}{a}$ und $\frac{a}{R_0}$, dann lautet die resultierende Kraft, die an eine Spule angreift

$$F_r = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{2\pi^2 a^2}{N} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} + \frac{3}{4} \frac{a^2}{R_0^2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (3,17)$$

für $h < a$ und $N \geq 10$.

Für den ideale Torus mit $h \rightarrow 0$ erhält man durch direkte Integration

$$F_{r_{id}} = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{4\pi^2 R_0^2}{N} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}} - 1 \right). \quad (3,18)$$

Gleichung (3,18) stimmt für großes Spulenaspektverhältnis A_m und verschwindende Wandstärke h mit (3,17) überein, denn für $a \ll R_0$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{a^2}{R_0^2} \right). \quad (3,19)$$

3.3. Die mechanischen Spannungen in einer toroidalen Schale

Das lineare elastostatische Problem wird bei kleinen Verformungen durch die Gleichgewichtsbedingung

$$S^{ij}|_i + f^j = 0, \quad (3,20)$$

das HOOKE'sche Gesetz

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{G}, \quad (3,21)$$

und die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i}) \quad (3,22)$$

vollständig beschrieben. Dabei ist \mathbf{S} bzw. S^{ij} der mechanische Spannungstensor, \vec{f} bzw. f^j der Kraftdichtevektor, \mathbf{E} der Elastizitätstensor, \mathbf{G} bzw. γ_{ij} der Verzerrungstensor und \vec{u} der Verschiebungsvektor. Der Strich in den Gleichungen bedeutet die kovariante Ableitung [10].

Mit Hilfe der Tensoranalysis und -algebra kann man diese Gleichungen unter Verwendung der CHRISTOFFEL-Symbole nach (6,4) in Koordinatenschreibweise entwickeln. In quasitoroidalen Koordinaten lauten sie:

a.) die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} - \tau_{\rho\vartheta} \sin \vartheta + (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \cos \vartheta \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{\rho\vartheta}}{\partial \vartheta} + \sigma_\rho - \sigma_\vartheta \right) + f_\rho = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + 2(\tau_{\rho\varphi} \cos \vartheta - \tau_{\varphi\vartheta} \sin \vartheta) \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} + \tau_{\rho\varphi} \right) + f_\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\vartheta}}{\partial \rho} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} + \tau_{\rho\vartheta} \cos \vartheta + (\sigma_\varphi - \sigma_\vartheta) \sin \vartheta \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + 2\tau_{\rho\vartheta} \right) + f_\vartheta = 0, \quad (3,23)$$

mit $r = R_0 + \rho \cos \vartheta$, für $a - \frac{h}{2} \leq \rho \leq a + \frac{h}{2}$.

b.) das HOOKE'sche Gesetz (für isotropes Material)

$$\sigma_{\rho} = 2G \left(\epsilon_{\rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{\rho} + \epsilon_{\varphi} + \epsilon_{\vartheta}) \right),$$

$$\sigma_{\varphi} = 2G \left(\epsilon_{\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{\rho} + \epsilon_{\varphi} + \epsilon_{\vartheta}) \right),$$

$$\sigma_{\vartheta} = 2G \left(\epsilon_{\vartheta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{\rho} + \epsilon_{\varphi} + \epsilon_{\vartheta}) \right),$$

$$\tau_{\rho\varphi} = 2G \gamma_{\rho\varphi},$$

$$\tau_{\rho\vartheta} = 2G \gamma_{\rho\vartheta},$$

$$\tau_{\varphi\vartheta} = 2G \gamma_{\varphi\vartheta}, \quad (3,24)$$

mit dem Schubmodul $G = E / (2(1 + \nu))$.

c.) die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung

$$\epsilon_{\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho},$$

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \vartheta - \frac{w}{r} \sin \vartheta,$$

$$\epsilon_{\vartheta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \frac{u}{\rho},$$

$$\gamma_{\rho\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{r} \cos \vartheta \right),$$

$$\gamma_{\rho\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{w}{\rho} \right),$$

$$\gamma_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{r} \sin \vartheta \right). \quad (3,25)$$

Dabei bezeichnen u, v, w die Komponenten des Verschiebungsvektors \vec{u} , die den Koordinaten ρ, φ, ϑ zugeordnet sind.

Die Gleichungen (3,23-25) bilden ein Differentialgleichungssystem für die Komponenten des Spannungstensors \mathbf{S} , des Verzerrungstensors \mathbf{G} und des Verschiebungsvektors \vec{u} . Dieses Differentialgleichungssystem ist in der dargestellten Allgemeinheit analytisch nicht lösbar. Setzt man jedoch Rotationssymmetrie voraus und betrachtet eine *dünnwandige Schale*, dann gilt: $\partial/\partial\varphi = 0$ und $h \ll a$. Wegen der Dünnwandigkeit

des Torus ist die Abhängigkeit von der Koordinate ρ sehr klein, d.h. es gilt: $\partial/\partial\rho \approx 0$. Weiterhin gilt

$$|\sigma_\rho| \ll |\sigma_\varphi|, |\sigma_\vartheta|,$$

$$|\tau_{\rho\vartheta}| \ll |\sigma_\varphi|, |\sigma_\vartheta|,$$

$$|\tau_{\rho\varphi}| \ll |\sigma_\varphi|, |\sigma_\vartheta|,$$

sowie

$$|\gamma_{\rho\vartheta}| \ll |\epsilon_\varphi|, |\epsilon_\vartheta|,$$

$$|\gamma_{\rho\varphi}| \ll |\epsilon_\varphi|, |\epsilon_\vartheta|. \quad (3,26)$$

Es folgt aber auch

$$\gamma_{\varphi\vartheta} \neq 0,$$

$$\tau_{\varphi\vartheta} \neq 0,$$

$$\epsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho} \neq 0. \quad (3,27)$$

Der mechanische Spannungszustand des axialsymmetrischen Problems einer dünnwandigen toroidalen Schale mit beliebiger Kraftdichteverteilung wird demnach *näherungsweise* durch die folgenden 10 Gleichungen beschrieben:

a.) die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\cos \vartheta}{r} \sigma_\varphi + \frac{1}{a} \sigma_\vartheta - f_\rho = 0,$$

$$\frac{2 \sin \vartheta}{r} \tau_{\varphi\vartheta} - \frac{1}{a} \frac{\partial \tau_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} - f_\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\sin \vartheta}{r} (\sigma_\varphi - \sigma_\vartheta) + f_\vartheta = 0, \quad (3,28)$$

b.) das HOOKE'sche Gesetz

$$\sigma_\rho \approx 0 = \epsilon_\rho + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_\rho + \epsilon_\varphi + \epsilon_\vartheta),$$

$$\sigma_\varphi = 2G \left(\epsilon_\varphi + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_\rho + \epsilon_\varphi + \epsilon_\vartheta) \right),$$

$$\sigma_\vartheta = 2G \left(\epsilon_\vartheta + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_\rho + \epsilon_\varphi + \epsilon_\vartheta) \right),$$

$$\tau_{\varphi\vartheta} = 2G \gamma_{\varphi\vartheta}, \quad (3,29)$$

c.) die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung

$$\begin{aligned}\epsilon_{\varphi} &= \frac{1}{r} (u \cos \vartheta - w \sin \vartheta), \\ \epsilon_{\vartheta} &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta} + u \right), \\ \gamma_{\varphi\vartheta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{v}{r} \sin \vartheta \right),\end{aligned}\quad (3,30)$$

mit $r = R_0 + a \cos \vartheta$.

Die Gleichungen des Differentialgleichungssystems sind nun so entkoppelt, daß mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung die toroidale und die poloidale Normalspannungskomponenten σ_{φ} und σ_{ϑ} berechnet werden können. Mit der Kraftdichtekomponente f_{ρ} folgt als allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi} &= \frac{r}{\cos \vartheta} f_{\rho} - \frac{r}{a \cos \vartheta} \sigma_{\vartheta}, \\ \sigma_{\vartheta} &= \frac{C_1}{r \cos \vartheta} - \frac{a}{r \cos \vartheta} \int f_{\rho} r \sin \vartheta d\vartheta,\end{aligned}\quad (3,31)$$

Für die Berechnung der beiden Normalspannungskomponenten σ_{φ} und σ_{ϑ} legt man die Kraftdichtekomponente f_{ρ} gemäß (3,2) für eine dünne Schale mit $\rho = a$ zugrunde. Dann kann die Integration ausgeführt werden* und man erhält

$$\int f_{\rho} r \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{R_0^2}{ah} \ln \left(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta \right).\quad (3,32)$$

Die Konstante C_1 ergibt sich wegen der Endlichkeit der Spannungskomponenten $\forall \vartheta \in [0, 2\pi]$ zu $C_1 = 0$. Damit sind die Spannungskomponenten vollständig bestimmt und lauten:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi} &= -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{R_0^2}{ah} \frac{r \ln \left(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta \right) - a \cos \vartheta}{r \cos^2 \vartheta}, \\ \sigma_{\vartheta} &= \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{R_0^2}{h} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta \right)}{r \cos \vartheta}.\end{aligned}\quad (3,33)$$

mit $r = R_0 + a \cos \vartheta$, für $h/a \ll 1$.

Für ein großes Spulenaspectverhältnis, d.h. für $A_m = R_0/a \rightarrow \infty$ gelten wegen

$$\ln \left(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta \right) \approx \frac{a}{R_0} \cos \vartheta \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta \right),\quad (3,34)$$

*Im Anhang 6.2. sind die beiden interessanten Fälle $f_{\rho} = \text{const.}$ und $f_{\rho} \sim \frac{1}{r}$ behandelt.

$$\frac{r \ln \left(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta \right) - a \cos \vartheta}{r \cos^2 \vartheta} \approx \frac{1}{2} \frac{a^2}{R_0^2} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta \right), \quad (3,35)$$

die Näherungen

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta \right), \\ \sigma_\vartheta &= \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{h} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta \right). \end{aligned} \quad (3,36)$$

Das Maximum des Betrages tritt für die Normalspannungskomponenten bei $\vartheta = \pi$ (Torusinnenseite) auf und beträgt

$$\begin{aligned} |\sigma_\varphi|_{Max} &= \left| -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \right| \frac{a}{h} \frac{R_0^2}{a^2} \frac{\left(1 - \frac{a}{R_0} \right) \ln \left(1 - \frac{a}{R_0} \right) + \frac{a}{R_0}}{1 - \frac{a}{R_0}}, \\ |\sigma_\vartheta|_{Max} &= \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{h} \frac{R_0}{a} \frac{-\ln \left(1 - \frac{a}{R_0} \right)}{1 - \frac{a}{R_0}}. \end{aligned} \quad (3,37)$$

Für ein kleines Spulenaspectverhältnis, d.h. für $A_m = R_0/a \rightarrow 1$ tritt an der Torusinnenseite bei $\vartheta = \pi$ eine starke Überhöhung der mechanischen Spannungen auf. Für den Grenzfall $R_0/a \rightarrow 1$ folgt an dieser Stelle

$$\lim_{\frac{a}{R_0} \rightarrow 1} \sigma_\varphi \rightarrow \infty, \quad \lim_{\frac{a}{R_0} \rightarrow 1} \sigma_\vartheta \rightarrow \infty. \quad (3,38)$$

Als wichtigste Ergebnisse der analytischen Behandlung des axialsymmetrischen elastostatischen Problems einer dünnwandigen toroidalen Schale mit radialer Kraftdichteverteilung kann man festhalten: Die betrachteten Spannungskomponenten sind proportional dem Magnetfelddruck auf der Plasmaachse $B_0^2/2\mu_0$ und dem Verhältnis a zu h . Für alle $\vartheta \in [0, 2\pi]$ und für alle $\frac{R_0}{a} \in (1, \infty)$ herrscht bei der gegebenen radialen Kraftdichte $f_\rho \sim 1/r^2$ in toroidaler Richtung Druck ($\sigma_\varphi < 0$) und in poloidaler Richtung Zug ($\sigma_\vartheta > 0$) vor. Für $R_0/a \rightarrow 1$ treten an der Seite, die der Torusachse zugewandt ist (Torusinnenseite), starke Spannungsüberhöhungen auf, weil dort in diesem Fall eine Stromkonzentration erfolgt.

3.4. Die Verzerrungen

Für die Normalverzerrungen folgt aus (3,29)

$$\begin{aligned} \epsilon_\rho &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_\varphi + \sigma_\vartheta), \\ \epsilon_\varphi &= \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_\vartheta), \\ \epsilon_\vartheta &= \frac{1}{E} (\sigma_\vartheta - \nu \sigma_\varphi). \end{aligned} \quad (3,39)$$

Für ein großes Spulenaspektverhältnis, d.h. für $A_m = R_0/a \rightarrow \infty$ gilt mit den Näherungen (3,36)

$$\begin{aligned}\epsilon_\rho &= -\frac{\nu}{E} \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta\right), \\ \epsilon_\varphi &= -\frac{1}{E} \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta + \nu \left(2 - 3 \frac{a}{R_0} \cos \vartheta\right)\right), \\ \epsilon_\vartheta &= \frac{1}{E} \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \left(2 - 3 \frac{a}{R_0} \cos \vartheta + \nu \left(1 - \frac{4}{3} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta\right)\right).\end{aligned}\quad (3,40)$$

Die beiden Komponenten ϵ_ρ und ϵ_φ sind negativ, die Komponente ϵ_ϑ ist positiv für alle $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Den relativen Volumenzuwachs eines Volumenelements bei der Deformation erhält man, wie in [11] gezeigt wird, durch Bildung der Divergenz des Verschiebungsvektors \vec{u} entsprechend (6,9):

$$\frac{\Delta V}{V} = \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{r\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (r\rho u) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r w) \right).\quad (3,41)$$

Man kann zeigen, daß die Volumendilatation gleich der Spur des Verzerrungstensor \mathbf{G} ist. Es gilt also:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{sp} \mathbf{G} = \epsilon_\rho + \epsilon_\varphi + \epsilon_\vartheta.\quad (3,42)$$

Einsetzen von (3,40) ergibt

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1 - 2\nu}{E} \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta\right).\quad (3,43)$$

Die Volumendilatation ist positiv für alle $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Das Maximum der Volumendilatation beträgt

$$|\operatorname{div} \vec{u}|_{\operatorname{Max}} = \frac{1 - 2\nu}{E} \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{4}{3} \frac{a}{h}.\quad (3,44)$$

3.5. Die Vergleichsspannung

Für die Beurteilung der Festigkeit eines Bauteils ist die höchste auftretende mechanische Spannung maßgebend. Da das Verhalten der Werkstoffe unter Belastung meist in eindimensionalen Werkstoffprüfversuchen ermittelt wird, ist es notwendig, den einachsigen Spannungszustand mit dem allgemeinen dreiachsigen Spannungszustand vergleichen zu können. Nach der Hypothese des VON MISES wird dabei für beide Zustände die gleiche Gestaltänderungsarbeit zugrundegelegt [12]. Die Definition der Vergleichsspannung (von Mises Spannung) lautet in kartesischen Koordinaten [13]

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{1}{2} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \} + 3 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.\quad (3,45)$$

Sie ist invariant gegenüber einer Koordinatentransformation. Für eine dünne toroidale Schale, in der nur die Normalspannungskomponenten σ_φ und σ_ϑ auftreten, errechnet sich die Vergleichsspannung zu

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \sigma_\vartheta^2 - \sigma_\varphi \sigma_\vartheta}. \quad (3,46)$$

Das Maximum tritt für beide Spannungskomponenten bei $\vartheta = \pi$ an der Torusinnenseite auf. Also gilt

$$\sigma_{vM_{Max}} = \sqrt{\sigma_{\varphi_{Max}}^2 + \sigma_{\vartheta_{Max}}^2 - \sigma_{\varphi_{Max}} \sigma_{\vartheta_{Max}}}. \quad (3,47)$$

Setzt man (3,37) in (3,47) ein und führt eine Reihenentwicklung für die transzendenten Funktionen durch, so erhält man schließlich, wenn man Reihenglieder bis zur dritten Potenz berücksichtigt, näherungsweise

$$\sigma_{vM_{Max}} \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \sqrt{7 \left(1 + 3 \frac{a}{R_0} + 5.6 \frac{a^2}{R_0^2} + 8.9 \frac{a^3}{R_0^3} \right)}, \quad (3,48)$$

für $h \ll a$ und $a \ll R_0$.

Mit Hilfe der Beziehung

$$\langle \sigma_{vM} \rangle = \frac{1}{V_T} \int \int \int_{V_T} \sigma_{vM} dV. \quad (3,49)$$

kann man den Mittelwert der Vergleichsspannung $\langle \sigma_{vM} \rangle$ errechnen. Setzt man (3,46) unter Verwendung von (3,33) in (3,49) ein und führt die Volumenintegration aus, erhält man schließlich

$$\langle \sigma_{vM} \rangle \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \sqrt{7} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{a^2}{R_0^2} \right). \quad (3,50)$$

Normiert man die Summe der Beträge der Mittelwerte der einzelnen Spannungskomponenten nach (3,33) auf den Mittelwert der Vergleichsspannung nach (3,50), so ergibt sich eine Größe, die nur vom Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$ abhängt:

$$\frac{\Sigma |\langle \sigma \rangle|}{\langle \sigma_{vM} \rangle} \approx \frac{3}{\sqrt{7}} \frac{1 + \frac{5}{36} \frac{a^2}{R_0^2}}{1 + \frac{1}{8} \frac{a^2}{R_0^2}} = 1.134 \frac{1 + \frac{5}{36} \frac{a^2}{R_0^2}}{1 + \frac{1}{8} \frac{a^2}{R_0^2}}. \quad (3,51)$$

Für die maximale Vergleichsspannung bezogen auf den Mittelwert ergibt sich:

$$\frac{\sigma_{vM_{Max}}}{\langle \sigma_{vM} \rangle} \approx \frac{\sqrt{1 + 3 \frac{a}{R_0} + 5.6 \frac{a^2}{R_0^2} + 8.9 \frac{a^3}{R_0^3}}}{1 + \frac{1}{8} \frac{a^2}{R_0^2}}. \quad (3,52)$$

4. Das Virialtheorem

Damit eine stromdurchflossene Spule im statischen Gleichgewicht bleibt, muß sie eine bestimmte Menge von Strukturmaterial enthalten. Das gleiche gilt für eine stromtragende toroidale Schale. Die mechanischen Kräfte, die zu mechanischen Spannungen und zu Verformungen führen, müssen den magnetischen Kräften das Gleichgewicht halten. Setzt man in die Gleichgewichtsbedingung (3,20) die magnetischen Kraftdichten $\vec{f} = \text{div } \mathbf{T}$ ein, so erhält man

$$\text{div } \mathbf{S} + \text{div } \mathbf{T} = 0. \quad (4,1)$$

Dabei ist \mathbf{S} der mechanische Spannungstensor und \mathbf{T} der MAXWELLSche Spannungstensor.

Nun soll der Zusammenhang zwischen dem Energieinhalt des magnetischen Feldes und den Komponenten des Spannungstensors \mathbf{T} bzw. \mathbf{S} abgeleitet werden. Nach [14] ist die negative Spur von \mathbf{T} gleich der Energiedichte des magnetischen Feldes. Es gilt also:

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} \int \int \int_V B^2 dV = - \int \int \int_V sp \mathbf{T} dV. \quad (4,2)$$

Dabei ist über den gesamten Raum zu integrieren. Um zu einer Darstellung durch die Funktion $\text{div } \mathbf{T} = \vec{j} \times \vec{B}$ zu gelangen, d.h. um nur über das stromführende Volumen integrieren zu müssen, verwendet man die Relation

$$\text{div}(\mathbf{T} \vec{r}) = \vec{r} \cdot \text{div } \mathbf{T} + sp \mathbf{T}, \quad (4,3)$$

wobei \vec{r} der Ortsvektor des jeweiligen Volumenelementes ist. Gleichung (4,3) gilt unabhängig vom Koordinatensystem. Setzt man (4,3) in (4,2) ein, so erhält man

$$E_m = - \int \int \int_V sp \mathbf{T} dV = \int \int \int_V \vec{r} \cdot \text{div } \mathbf{T} dV - \int \int \int_V \text{div}(\mathbf{T} \vec{r}) dV. \quad (4,4)$$

Das letzte Integral kann mit Hilfe des GAUSSschen Satzes in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden, das für $r \rightarrow \infty$ verschwindet,* also

$$\int \int \int_V \text{div}(\mathbf{T} \vec{r}) dV = \oint_{A_H} (\mathbf{T} \vec{r}) d\vec{A}_H = 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Die Energiegleichung (4,4) lautet damit

$$E_m = \int \int \int_V \vec{r} \cdot \text{div } \mathbf{T} dV, \quad (4,5)$$

* Das gilt unter der Voraussetzung, daß sich keine ferromagnetischen Stoffe und keine beweglichen Ladungen in dem betrachteten Raumgebiet befinden.

wobei nur die stromtragenden Volumenelemente einen Beitrag zum Integral liefern.

Setzt man nun die Gleichgewichtsbedingung (4,1) in (4,5) ein, so folgt

$$E_m = - \int \int \int_V \vec{r} \cdot \text{div } \mathbf{S} dV. \quad (4,6)$$

Für den mechanische Spannungstensor \mathbf{S} kann man die gleichen Überlegungen anstellen wie für den MAXWELLSchen Spannungstensor \mathbf{T} . Es gilt analog zu (4,3):

$$\text{div}(\mathbf{S} \vec{r}) = \vec{r} \cdot \text{div } \mathbf{S} + sp \mathbf{S}. \quad (4,7)$$

Setzt man (4,7) in (4,6) ein und wendet wiederum den GAUSSschen Satz an, so folgt

$$E_m = \int \int \int_V sp \mathbf{S} dV - \oint_{A_H} (\mathbf{S} \vec{r}) d\vec{A}_H. \quad (4,8)$$

Dabei hat sich die Integration über das Volumen der stromtragenden toroidalen Schale bzw. deren Oberfläche zu erstrecken.

Das Oberflächenintegral in (4,8) verschwindet, wenn keine äußeren Kräfte an der Oberfläche angreifen. Das Kräftegleichgewicht an der Oberfläche lautet nämlich in diesem Fall für jedes Flächenelement

$$d\vec{F} = dF_n \vec{n} + dF_t \vec{t} = \mathbf{S} d\vec{A}_H = \mathbf{S} \vec{n} dA_{H_n} = 0,$$

wenn der Index n die Normale und t die Tangentiale bezeichnet [15]. Mit den Rechenregeln der Tensoralgebra erhält man

$$\mathbf{S} \vec{n} = \sigma_{nn} \vec{n} + \tau_{tn} \vec{t},$$

und folglich ergibt sich wegen $dA_H \neq 0$

$$\sigma_{nn} = 0,$$

$$\tau_{tn} = 0 \quad (4,9)$$

an der Oberfläche. Es gibt also in diesem Fall auf der Randfläche keine Normalspannungen in Richtung der Flächennormalen und keine Schubspannungen senkrecht dazu. Wegen der Symmetrie von \mathbf{S} kann man $\mathbf{S} \vec{r} = \vec{r} \mathbf{S}$ schreiben [10]. Damit folgt für das Oberflächenintegral

$$\oint_{A_H} (\mathbf{S} \vec{r}) d\vec{A}_H = \oint_{A_H} (\vec{r} \mathbf{S} \vec{n}) dA_{H_n} = \oint_{A_H} (r_n \sigma_{nn} + r_t \tau_{nt}) dA_{H_n} = 0.$$

Für eine stromtragende toroidale Schale bzw. eine toroidale Anordnung von N Spulen, die sich gegenseitig abstützen und keine äußere Abstützung erfahren, gilt also das Virialtheorem [16]:

$$E_m = \int \int \int_V sp \mathbf{S} dV = \int \int \int_V (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) dV. \quad (4,10)$$

Dabei ist über das Volumen der Spulen und der Abstützstruktur zu integrieren, d.h. über die gesamte toroidale Schale.

Aus (4,10) kann man folgern, daß

- 1.) die Energiespeicherung im Magnetfeld mit mechanischen Spannungen in dem zugehörigen stromtragenden Spulensystem verbunden ist,
- 2.) die gespeicherte magnetische Energie dem Volumen bzw. der Masse des Systems proportional ist und
- 3.) der ungünstigste Fall dann vorliegt, wenn die drei Normalspannungen sowohl positives als auch negatives Vorzeichen haben (Zug oder Druck).

Ist die stromtragende toroidale Schale aus N Spulen aufgebaut, so kann man zwischen Spulenvolumen und Strukturvolumen unterscheiden und deshalb

$$E_m = \int_{V_{spulen}} \int \int sp \mathbf{S} dV + \int_{V_{struktur}} \int \int sp \mathbf{S} dV \quad (4,11)$$

schreiben.

Bezieht man die gespeicherte magnetische Energie auf die mittleren Normalspannungen in den Spulen, kann ein Faktor g_1 so definiert werden, daß

$$E_m = \frac{1}{g_1} \frac{V}{V_{sp}} \int \int \int_{V_{spulen}} sp \mathbf{S} dV \quad (4,12)$$

gilt. Der Faktor g_1 hängt dabei vom Verhältnis der Volumina von Spulen und Struktur ab. Durch den Faktor g_1 wird der Aufbau des Spulensystems aus diskreten Spulen endlichen Querschnitts berücksichtigt. Beim "idealen Torus" würde $g_1 = 1$ gelten.

Führt man die Integration in (4,12) aus, so erhält man den Mittelwert der Summe der Normalspannungen $\langle \sum_i \sigma_{ii} \rangle_{sp}$ in den Spulen, und es folgt

$$g_1 = \frac{\langle \sum_i \sigma_{ii} \rangle_{sp} V}{E_m}. \quad (4,13)$$

Die Volumenelemente der toroidalen Schale, aufgebaut aus N Spulen und zusätzlichem Strukturmaterial, können in den 3 Richtungen unter Zug oder unter Druck stehen. Wie in [17] beschrieben, ist in jeder Richtung i des Volumenelementes ein minimales Volumen $(|\sigma_{ii}|/\sigma_{zul})dV$ erforderlich, wenn σ_{zul} die maximal zulässige Spannung ist. Das gesamte minimale Volumen der toroidalen Schale ist dann V_{min} .

Es gilt:

$$\sigma_{zul} \cdot V_{min} = \int \int \int_V (|\sigma_{11}| + |\sigma_{22}| + |\sigma_{33}|) dV \geq \int \int \int_V |\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}| dV = E_m.$$

Betrachtet man nur die Spannungen in den Spulen, so gilt analog und unter Berücksichtigung von (4,12)

$$\begin{aligned} \sigma_{zul_{sp}} \cdot V_{min_{sp}} &= \int \int \int_{V_{spulen}} (|\sigma_{11}| + |\sigma_{22}| + |\sigma_{33}|) dV \\ &\geq \int \int \int_{V_{spulen}} (|\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}|) dV = g_1 E_m \frac{V_{sp}}{V}. \end{aligned} \quad (4,14)$$

Definiert man einen Faktor g_2 so, daß

$$g_2 = \frac{\int \int \int_{V_{spulen}} (|\sigma_{11}| + |\sigma_{22}| + |\sigma_{33}|) dV}{\int \int \int_{V_{spulen}} |\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}| dV} \quad (4,15)$$

gilt, so folgt unter Verwendung von (4,14) und (4,12)

$$g_1 g_2 \frac{E_m}{V} = \frac{\sigma_{zul_{sp}} \cdot V_{min_{sp}}}{V_{sp}}.$$

Wenn $V_{min_{sp}} = V_{sp}$ als Mittelwert der Volumina gesetzt wird, folgt für

$$\sigma_{zul_{sp}} = \langle \Sigma |\sigma| \rangle.$$

Damit ergibt sich für den Mittelwert der Summe der Beträge der Normalspannungen in den Spulen

$$\langle \Sigma |\sigma| \rangle = g_\sigma \frac{E_m}{V} \geq \frac{E_m}{V}, \quad (4,16)$$

mit $g_\sigma = g_1 \cdot g_2$.

Der Faktor g_σ stellt ein charakterisches Maß für ein aus diskreten Spulen aufgebautes Spulensystem dar. Wegen der speziellen Kraftdichteverteilung der toroidal angeordneten Spulen gilt: $g_\sigma \approx 3$.

Das Virialtheorem gemäß (4,10) soll nun auf eine stromtragende toroidale Schale angewandt werden. Die Spur des Spannungstensors für diese toroidale Schale beträgt unter Verwendung von (3,33) bei Berücksichtigung der ersten Relation von (3,26)

$$sp \mathbf{S} = \sigma_\varphi + \sigma_\vartheta = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{h} \frac{R_0^2}{a^2} \frac{\frac{a}{R_0} \cos \vartheta - \ln(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta)}{(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta) \cos^2 \vartheta}. \quad (4,17)$$

Die Spur des Spannungstensors $sp \mathbf{S} = \sigma_\varphi + \sigma_\vartheta$ ist für alle $\vartheta \in [0, 2\pi]$ und für alle $\frac{R_0}{a} \in (1, \infty)$ positiv, wie es sein muß. Setzt man (4,17) in (4,10) ein und führt die Integration über das Volumen der toroidalen Schale $V_T = 4\pi^2 R_0 a h$, nachdem der Integrand in einer Reihe entwickelt wurde, aus, so folgt

$$E_m = \int \int \int_{V_T} sp \mathbf{S} dV = \frac{B_0^2}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2 R_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{1}{8} \frac{a^4}{R_0^4} + \dots \right\}. \quad (4,18)$$

Diese Gleichung stimmt mit (2,26) überein, wenn man dort $h \rightarrow 0$ gehen läßt. Damit ist die Richtigkeit des Virialtheorems in diesem speziellen Fall bestätigt. Die Virialspannung σ_V , d.h. der Mittelwert der Spur des Spannungstensors, beträgt

$$\sigma_V = \frac{1}{V_T} \int \int \int_{V_T} sp \mathbf{S} dV = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{1}{8} \frac{a^4}{R_0^4} + \dots \right\}. \quad (4,19)$$

Für die Mittelwerte der einzelnen Spannungskomponenten* erhält man

$$\langle \sigma_\varphi \rangle = \frac{1}{V_T} \int \int \int_{V_T} \sigma_\varphi dV = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{1}{40} \frac{a^4}{R_0^4} + \dots \right\},$$

$$\langle \sigma_\vartheta \rangle = \frac{1}{V_T} \int \int \int_{V_T} \sigma_\vartheta dV = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{h} \frac{R_0}{a} \arcsin \frac{a}{R_0}. \quad (4,20)$$

Bildet man die Summe der Beträge der Mittelwerte der einzelnen Spannungskomponenten und berücksichtigt die Relation

$$\arcsin \frac{a}{R_0} = \frac{a}{R_0} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{3}{40} \frac{a^4}{R_0^4} + \dots \right\}, \quad (4,21)$$

so ergibt sich

$$\Sigma |\langle \sigma \rangle| = |\langle \sigma_\varphi \rangle| + |\langle \sigma_\vartheta \rangle| = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h} 3 \left\{ 1 + \frac{5}{36} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{7}{120} \frac{a^4}{R_0^4} + \dots \right\}. \quad (4,22)$$

* Interessant ist in diesem Zusammenhang der Vergleich der mittleren poloidalen Spannungskomponente $\langle \sigma_\vartheta \rangle$ einer stromtragenden toroidalen Schale mit der aus der Literatur bekannten mittleren Zugspannung einer biegemomentfreien D - Spule. Berücksichtigt man, daß $B_0 R_0 = B_M R_1$ und $B_0 = \mu_0 j_0 h$ gilt, und daß man bei kleinen Argumenten der transzendenten Funktionen $\arcsin \frac{a}{R_0} \approx \text{Artanh} \frac{a}{R_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$ mit $R_1 = R_0 - a$ und $R_2 = R_0 + a$ setzen kann, so findet man eine gute Übereinstimmung für ein Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a \geq 2.0$. Vgl. dazu die Gleichung (2.6-12) in [1].

Wegen $\sigma_\varphi < 0$ und $\sigma_\vartheta > 0$ für alle $\vartheta \in [0, 2\pi]$ und für alle $\frac{R_0}{a} \in (1, \infty)$ gilt hier $\Sigma|\langle\sigma\rangle| = \langle\Sigma|\sigma|\rangle$. Bezieht man diese Summe der Beträge auf die Virialspannung nach (4,19), so kann man entsprechend (4,16) einen Faktor g'_σ definieren, der nur vom Spulenaspektverhältnis abhängt:

$$g'_\sigma = \frac{\Sigma|\langle\sigma\rangle|}{\sigma_V} \approx 3 \cdot \frac{1 + \frac{5}{36} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{7}{120} \frac{a^4}{R_0^4}}{1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{R_0^2} + \frac{1}{8} \frac{a^4}{R_0^4}}. \quad (4,23)$$

Die Summe der Beträge der Mittelwerte der einzelnen Spannungskomponenten ist also unter den genannten Voraussetzungen etwa dreimal so groß wie die Virialspannung $\sigma_V = E_m/V_T$ des idealen Torus mit endlicher Wandstärke.

5. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden analytische Lösungen für die *magnetische Flußdichte*, den *magnetischen Energieinhalt*, die *magnetischen Kräfte* und die *mechanischen Spannungen* in Abhängigkeit von den geometrischen Parametern des Systems hergeleitet. Den Berechnungen liegt das Modell des idealen Torus mit endlicher Wandstärke, d.h. einer toroidalen Schale, zugrunde.

Die wichtigsten Resultate der analytischen Betrachtung sind:

- Für ein festes B_0 hängt die maximale Flußdichte B_M an den Spulen nur vom Spulenaspektverhältnis $A_m = R_0/a$, dem Verhältnis von Spulenradius zu Spulenhöhe a/h und von der Spulenzahl N , nicht jedoch von der absoluten Größe der Konfiguration, ab.
- Der magnetische Energieinhalt skaliert mit dem Quadrat der magnetischen Flußdichte B_0 auf der magnetischen Achse und dem Magnetfeldvolumen. Außerdem hängt er von Korrekturtermen ab, die die Verhältnismerte $A_m = R_0/a$ und a/h enthalten.
- Die resultierende magnetische Kraft der Spulen skaliert mit dem Quadrat der magnetischen Flußdichte B_0 , mit dem Quadrat des Radius a und mit $1/N$, sowie mit Korrekturtermen, die von den Verhältnismerten $A_m = R_0/a$ und a/h abhängen.
- Die mechanischen Spannungen in der betrachteten dünnwandigen toroidalen Schale skalieren mit dem Quadrat der magnetischen Flußdichte B_0 und hängen außerdem von $A_m = R_0/a$ und a/h , nicht jedoch von der absoluten Größe der Konfiguration, ab. Bei der gegebenen radialen Kraftdichte $f_\rho \sim 1/r^2$ herrscht für alle $\vartheta \in [0, 2\pi]$ und für alle $R_0/a \in (1, \infty)$ in toroidaler Richtung Druck ($\sigma_\varphi < 0$) und in poloidaler Richtung Zug ($\sigma_\vartheta > 0$) vor. Folglich ist der Mittelwert der Summe der Beträge der Normalspannungen etwa dreimal so groß wie die Virialspannung $\sigma_V = E_m/V_T$, wobei $V_T = 4\pi^2 R_0 a h$ das Volumen der toroidalen Schale ist. Dieser Mittelwert stimmt in etwa mit der mittleren Vergleichsspannung überein.

6. Anhang

6.1. Quasitoroidale Koordinaten

Während die üblichen Toruskoordinaten [18] im gesamten dreidimensionalen Raum definiert sind, beschreiben die *quasitoroidalen Koordinaten* ρ, φ, ϑ , nur einen kleinen Teil des xyz -Raumes. Sie bieten jedoch dann Vorteile, wenn sich physikalische Vorgänge in toroidalen Anordnungen auf konzentrischen Kreisen in der Poloidalebene $\varphi = \text{const.}$ und $\rho < R_0$ abspielen. Die *quasitoroidalen Koordinaten* ρ, φ, ϑ , bilden ein krummliniges, orthogonales Koordinatensystem, und es gilt: $\vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi$; siehe Bild 1. Dabei beschreibt ρ die radiale, φ die toroidale und ϑ die poloidale Richtung.

Die Transformationsgleichungen zwischen den kartesischen und den quasitoroidalen Koordinaten lauten:

$$\begin{aligned}x &= (R_0 + \rho \cos \vartheta) \cos \varphi, \\y &= (R_0 + \rho \cos \vartheta) \sin \varphi, \\z &= \rho \sin \vartheta,\end{aligned}\tag{6,1}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} - R_0)^2 + z^2}, \\ \vartheta &= \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2} - R_0}, \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x}.\end{aligned}\tag{6,2}$$

Wertebereich der Transformation:

$$0 \leq \rho < R_0,$$

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Für die Bestimmung der Metrikkoeffizienten gilt:

$$h_\rho^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2,$$

$$h_\varphi^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2,$$

$$h_\vartheta^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta} \right)^2,$$

und folglich

$$g_{11} = h_\rho^2 = 1,$$

$$g_{22} = h_\varphi^2 = (R_0 + \rho \cos \vartheta)^2 = r^2,$$

$$g_{33} = h_\vartheta^2 = \rho^2.$$

Damit lauten der kovariante und der kontravariante Metriktensor [10]:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix},$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}. \quad (6,3)$$

Die CHRISTOFFEL-Symbole [10] lauten:

$$\Gamma_{22}^1 = -r \cos \vartheta,$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\rho,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos \vartheta}{r},$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = -\frac{\rho \sin \vartheta}{r},$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{\rho},$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{r \sin \vartheta}{\rho}. \quad (6,4)$$

Dabei ist: $r = R_0 + \rho \cos \vartheta$.

Alle übrigen CHRISTOFFEL-Symbole sind gleich Null.

Das Linienelement ergibt sich zu:

$$d\vec{s} = d\rho \vec{e}_\rho + r d\varphi \vec{e}_\varphi + \rho d\vartheta \vec{e}_\vartheta. \quad (6,5)$$

Die Flächenelemente lauten:

$$dA_\rho = r \rho d\varphi d\vartheta,$$

$$dA_\varphi = \rho d\rho d\vartheta,$$

$$dA_{\vartheta} = r \, d\rho \, d\varphi. \quad (6,6)$$

Das Volumenelement lautet:

$$dV = r \, \rho \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta. \quad (6,7)$$

Dabei ist wiederum: $r = R_0 + \rho \cos \vartheta$.

Die räumlichen Ableitungen eines Skalarfeldes Φ bzw. eines Vektorfeldes \vec{B} ergeben sich in quasitoroidalen Koordinaten zu:

Gradient eines Skalarfeldes Φ :

$$\text{grad } \Phi = \vec{e}_{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \vec{e}_{\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \vec{e}_{\vartheta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}. \quad (6,8)$$

Divergenz eines Vektorfeldes \vec{B} :

$$\text{div } \vec{B} = \frac{1}{r\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (r\rho B_{\rho}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho B_{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r B_{\vartheta}) \right). \quad (6,9)$$

Rotation eines Vektorfeldes \vec{B} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \vec{e}_{\rho} \frac{1}{r\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho B_{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r B_{\varphi}) \right) \\ &+ \vec{e}_{\varphi} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (B_{\rho}) - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_{\vartheta}) \right) \\ &+ \vec{e}_{\vartheta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (r B_{\varphi}) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_{\rho}) \right). \end{aligned} \quad (6,10)$$

Delta-Operator:

$$\Delta \Phi = \text{div grad } \Phi = \frac{1}{r\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (r\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{r}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) \right). \quad (6,11)$$

Mit: $r = R_0 + \rho \cos \vartheta$.

Dabei wird vorausgesetzt, daß Φ und \vec{B} für $\rho \geq R_0$ verschwinden.

Für die Transformations eines Vektors \vec{v} gilt:

$$\begin{pmatrix} v_{\rho} \\ v_{\varphi} \\ v_{\vartheta} \end{pmatrix} = \tau \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (6,12)$$

mit

$$\tau = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\sin \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (6,13)$$

Die Transformationsmatrix τ ist eine orthogonale Matrix, d.h. es gilt:

$$\tau^T = \tau^{-1} \quad (6,14)$$

6.2. Die Kraftdichteverteilungen $f_\rho = \text{const.}$ und $f_\rho \sim \frac{1}{r}$

Der ideale Torus mit endlicher Wandstärke und mit einer axialsymmetrischen Stromdichtebelegung hat eine radiale Kraftdichteverteilung, die proportional $\frac{1}{r^2}$ ist. Bei einer Anordnung von diskreten Spule ist wegen des Streufeldes die Potenz von r kleiner als 2. Im folgenden werden die beiden interessanten Fälle $f_\rho = \text{const.}$ und $f_\rho \sim \frac{1}{r}$, für die keine erzeugenden Stromdichteverteilungen angegeben werden können, behandelt.

a.) $f_\rho = \text{const.}$:

Es sei

$$f_\rho = \frac{B_0^2}{2\mu_0 h}. \quad (6,15)$$

Damit folgt:

$$\int f_\rho r \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{R_0}{h} (\cos \vartheta + \frac{1}{2} \frac{a}{R_0} \sin^2 \vartheta). \quad (6,16)$$

Wegen der Endlichkeit der Spannungskomponenten $\forall \vartheta \in [0, 2\pi]$ folgt für die Konstante $C_1 = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a^2}{2h}$, so daß die Spannungskomponenten lauten:

$$\sigma_\vartheta = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{h} \frac{(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{R_0} \cos \vartheta)}{(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta)},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{2h}. \quad (6,17)$$

Beide Spannungskomponenten sind positiv $\forall \vartheta \in [0, 2\pi]$; σ_φ ist eine Konstante.

Die resultierende Kraft auf ein Segment der Größe $2\pi/N$ lautet analog zu Abschnitt 3.2.:

$$F_r = \int \int \int_{V_{TS}} f_\rho \cos \vartheta \cos \varphi dV. \quad (6,18)$$

Die Auswertung des Integrals ergibt

$$F_r = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{2\pi^2 a^2}{N}. \quad (6,19)$$

Die resultierende Kraft ist nach außen gerichtet.

b.) $f_\rho \sim \frac{1}{r}$:

Es sei

$$f_\rho = \frac{B_0^2}{2\mu_0 h} \frac{R_0}{r}. \quad (6,20)$$

Damit folgt:

$$\int f_{\rho} r \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{R_0}{h} \cos \vartheta. \quad (6,21)$$

Wegen der Endlichkeit der Spannungskomponenten $\forall \vartheta \in [0, 2\pi]$ folgt für die Konstante $C_1 = 0$, so daß die Spannungskomponenten lauten:

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{a}{h} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{R_0} \cos \vartheta\right)},$$

$$\sigma_{\varphi} = 0. \quad (6,22)$$

Die resultierende Kraft auf ein Segment der Größe $2\pi/N$ ist:

$$F_r = 0. \quad (6,23)$$

Als Ergebnis dieser Betrachtung kann man festhalten, daß im Falle $f_{\rho} = \text{const.}$ die beiden Normalspannungskomponenten positiv sind, d.h. die einzelnen Schalelemente sind sowohl in toroidaler als auch in poloidaler Richtung auf Zug belastet. Die resultierende Kraft ist ebenfalls positiv, d.h. sie ist nach außen gerichtet. Dieser Fall ist mit dem in der Literatur behandelten Fall des Torus unter konstantem Druck (Autoschlauch) vergleichbar.

Skaliert die Kraftdichte $f_{\rho} \sim \frac{1}{r}$, so tritt nur die Normalspannungskomponente σ_{ϑ} in poloidaler Richtung auf. Die Normalspannungskomponente σ_{φ} in toroidaler Richtung verschwindet ebenso wie die resultierende Kraft.

Mit Hilfe des Virialtheorems können die betrachteten Fälle bewertet werden. Das Verhältnis der gespeicherten magnetischen (oder sonstigen) Energien verhält sich für die Fälle $f_{\rho} = \text{const.} : f_{\rho} \sim \frac{1}{r} : f_{\rho} \sim \frac{1}{r^2}$ etwa wie 3 : 2 : 1. Wären also die genannten radialen Kraftdichteverteilungen in einem Spulensystem möglich, so würde mit $f_{\rho} = \text{const.}$ der günstigste Fall vorliegen. Die in realen Spulensystemen vorhandene radiale Kraftdichteverteilung von ungefähr $f_{\rho} \sim \frac{1}{r^2}$ stellt den ungünstigsten Fall dar.

7. Literatur

- [1] Raeder, J., et al., *Kontrollierte Kernfusion*, Teubner Verlag Stuttgart (1981)
- [2] Rehker, S., Wobig, H., *Stellarator Fields with Twisted Coils*, Report IPP 2/215 August 1973
- [3] Chodura, R., et al., *Theoretical Optimization of Stellarators*, IEEE Transactions on Plasma Science, Vol. PS-9, No.4, December 1981, 221-227.
- [4] Brossmann, U., et al., *Concept of an Advanced Stellarator*, Proceedings of the 9th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Baltimore, MD, 1982, Vol.III, 141-156.
- [5] Nührenberg, J., Zille, R., *Stable Stellarators with Medium β and Aspect Ratio*, Physics Letters 114A, 129 (1986)
- [6] Boris, J.P., Kuckes, A.F., *Closed Expressions for the Magnetic Field in Two-Dimensional Multipole Configurations*, Princeton Plasma Physics Laboratory, Report MATT-473, September 1966
- [7] File, J., Mills, R.G., Sheffield, G.V., *Large Superconducting Magnet Design for Fusion Reactors*, Princeton Plasma Physics Laboratory, Report MATT-848, June 1971
- [8] Moses, R.W., Jr., Young, W.C., *Analytic Expressions for Magnet Forces on Sectorized Toroidal Coils*, Proceedings of the 6th Symposium on Engineering Problems of Fusion Research, San Diego, CA, 1975, Vol.II, 917-921.
- [9] Ryshik, I.M., Gradstein, I.S., *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1957)
- [10] Klingbeil, E., *Tensorrechnung für Ingenieure*, Bibliographisches Institut, Mannheim (1966)
- [11] Landau, L.D., Lifschitz, E.M., *Elastizitätstheorie*, Akademie Verlag, Berlin (1983)
- [12] *DUBBEL, Taschenbuch für den Maschinenbau, Band 1*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1974)
- [13] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd Edition, Mc Graw-Hill International Book Company, Singapore (1982)
- [14] Simonyi, K., *Theoretische Elektrotechnik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1977)
- [15] Szabo, I., *Höhere Technische Mechanik*, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1964)
- [16] Longmire, C.L., *Elementary Plasma Physics*, John Wiley and Sons, Inc. (1963)
- [17] Levy, R.H., *Comments on Radiation Shielding of Space Vehicles by Means of Superconducting Coils*, ASR Journal, June 1962.
- [18] Rottmann, K., *Mathematische Formelsammlung*, Bibliographisches Institut, Mannheim (1960)

8. Symbolverzeichnis

Aufstellung der wichtigsten verwendeten Symbole:

Tensoren

E	Elastizitätstensor
G	Verzerrungstensor
S	mechanischer Spannungstensor
T	MAXWELLScher Spannungstensor

Vektoren

\vec{B}	Magnetische Flußdichte
$d\vec{A}_H$	Hüllflächenelement
$d\vec{F}$	Kraftelement
$d\vec{s}$	Linienelement
\vec{f}	Magnetische Kraftdichte
\vec{H}	Magnetische Feldstärke
\vec{j}	Stromdichte
\vec{n}	Normaleneinheitsvektor
\vec{r}	Radiusvektor
\vec{t}	Tangentialeneinheitsvektor
\vec{u}	Verschiebungsvektor

Skalare

A_m	Spulenaspektverhältnis
a	Radius der toroidalen Schale, bzw. Spulenzradius
$B_\rho, B_\varphi, B_\vartheta$	Magnetische Flußdichtekomponenten in quasitor. Koordinaten
B_0	Magnetische Flußdichte auf der magnetischen Achse
B_M	Maximale magnetische Flußdichte
c_ℓ	Toroidale Spulenauslenkung
d	Spulenbreite
E	Elastizitätsmodul
E_m	Gespeicherte magnetische Energie
E_{id}	Magnetische Energie des idealen Torus
f_x, f_y, f_z	Magnetische Kraftdichtekomponenten in kartesischen Koordinaten
$f_\rho, f_\varphi, f_\vartheta$	Magnetische Kraftdichtekomponenten in quasitor. Koordinaten
$\langle f_\rho \rangle$	Mittlere Kraftdichtekomponente
F_x, F_y, F_z	Magnetische Kraftkomponenten in kartesischen Koordinaten
$F_\rho, F_\varphi, F_\vartheta$	Magnetische Kraftkomponenten in quasitoroidalen Koordinaten
F_r	Magnetische Kraftkomponente in radialer Richtung
$F_{r,id}$	Radiale magnetische Kraftkomponente des idealen Torus
G	Schubmodul
g_{ij}	Metrikoeffizienten
h	Wandstärke der toroidalen Schale, bzw. Spulenhöhe
$H_\rho, H_\varphi, H_\vartheta$	Magnetische Feldstärkekomponenten in quasitor. Koordinaten

I_c	Gesamt-Spulenstrom
j_0	Mittlere Stromdichte in der toroidalen Schale
$j_\rho, j_\varphi, j_\vartheta$	Stromdichtekomponenten in quasitoroidalen Koordinaten
L	Induktivität
L_{id}	Induktivität des idealen Torus
ℓ	Laufindex, poloidal
m	Laufindex, toroidal
M	Zahl der toroidalen Feldperioden
N	Gesamtanzahl der Spulen
p_ρ	Mittlerer Magnetfelddruck auf eine Spule
r	Radiale Koordinate
R_0	Großer Torusradius
$sp \mathbf{G}$	Spur des Verzerrungstensors
$sp \mathbf{S}$	Spur des mechanischen Spannungstensors
$sp \mathbf{T}$	Spur des MAXWELLSchen Spannungstensors
u, v, w	Komponenten des Verschiebungsvektors in quasitor. Koordinaten
V	Volumen
V_T	Volumen der toroidalen Schale
V_{TS}	Volumen eines Spulensegmentes der toroidalen Schale
V_{Sp}	Volumen einer Spule
x, y, z	kartesische Koordinaten
Γ_{ij}^k	CHRISTOFFEL-Symbol
$\gamma_{\rho\varphi}, \gamma_{\rho\vartheta}, \gamma_{\varphi\vartheta}$	Gleitungskomponenten in quasitoroidalen Koordinaten
δ_{ij}	KRONECKER-Symbol
$\epsilon_\rho, \epsilon_\varphi, \epsilon_\vartheta$	Dehnungskomponenten in quasitoroidalen Koordinaten
μ_0	Permeabilität des Vakuums
ν	Querdehnungszahl
ρ, φ, ϑ	Quasitoroidale Koordinaten
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannungskomponenten in kartesischen Koordinaten
$\sigma_\rho, \sigma_\varphi, \sigma_\vartheta$	Normalspannungskomponenten in quasitoroidalen Koordinaten
σ_{nn}	Normalspannungskomponente in Normalenrichtung
$\langle \sigma_\varphi \rangle, \langle \sigma_\vartheta \rangle$	Mittlere Normalspannungskomponenten
σ_{vM}	Vergleichsspannung
$\langle \sigma_{vM} \rangle$	Mittlere Vergleichsspannung
σ_V	Virialspannung
$\Sigma \langle \sigma \rangle $	Summe der Beträge der mittleren Normalspannungen
$\langle \Sigma \sigma \rangle$	Mittelwert der Summe der Beträge der Normalspannungen
$\tau_{\rho\varphi}, \tau_{\rho\vartheta}, \tau_{\varphi\vartheta}$	Schubspannungskomponenten in quasitoroidalen Koordinaten
τ_{nt}	Schubspannungskomponente