

Propagation und Absorption
elektromagnetischer Wellen
bei Ionenzyklotronresonanzheizung
in Tokamakplasmen

Thomas Krücken

IPP 5/22

August 1988



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

ABSTRACT

We have simulated ICRF heating experiments in Tokamak plasmas. The model takes into account finite Larmor radius effects and kinetic damping in fully toroidal geometry. The wave equation for the electromagnetic field is then a linear partial integro-differential equation. To separate dissipative terms from kinetic flux terms in the power balance associated with the wave equation in a plasma with non-vanishing temperatures we derive a new expression for the local power absorption in arbitrary geometry^[1].

A one-dimensional code which is intended to be incorporated in a ray-tracing package to model the behaviour in the vicinity of a resonant layer, i.e. mode conversion and dissipation, is presented^[2].

The main part of this report is the description of a global code which solves the wave equation in full Tokamak geometry^[3]. It is capable to simulate mode conversion to ion Bernstein waves as well as ion cyclotron damping at the fundamental and second harmonic resonance. Electron magnetic pumping and Landau damping have also been included.

[1] This part has been accepted for publication in Plasma Physics and Controlled Fusion.

[2] Parts of this work have been published as IPP Report 5/9, May 1986.

[3] A shorter description of the underlying model and the code has been accepted for publication in Nuclear Fusion.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung.
2. Ausbreitung und Absorption von elektromagnetischen Wellen im Frequenzbereich der Ionenzyklotronfrequenz in Tokamakplasmen.
 - 2.1. Die Wellengleichung.
 - 2.1.1. Das "kalte" Plasma.
 - 2.1.2. Das "warme" Plasma.
 - 2.1.3. Das Modell des "warmen" Plasmas in vereinfachter Geometrie.
 - 2.2. Die Dispersionsrelation.
 - 2.3. Energierelationen.
3. ICRH im Tokamak.
 - 3.1. Mögliche Heizungsszenarien.
 - 3.2. Simulation von ICRH im Tokamak.
4. Ein eindimensionales Modell zur Simulation des single pass Verhaltens in großen Tokamaks.
 - 4.1. Eindimensionale Beschreibung der resonanten Schicht.
 - 4.2. Eine eindimensionale Wellengleichung.
 - 4.3. Numerische Lösung der Wellengleichung.
 - 4.3.1. Schwache variationelle Form und finite Elemente.
 - 4.3.2. Berechnung der Intervallgrenzen und des horizontalen Gitters.
 - 4.3.3. Implementierung der Randbedingungen.
 - 4.3.4. Die Energiebilanz.
 - 4.3.5. Konvergenzeigenschaften.
 - 4.4. Anwendungen und Vergleich mit analytischen Modellen.
 - 4.4.1. Heizung eines reinen D-Plasmas bei der harmonischen Ionenzyklotronfrequenz, $\nu=53.5$ MHz.

- 4.4.2. Heizung eines D-Plasmas mit einer H-Minorität bei $\omega \simeq 2\Omega_D = \Omega_H, \nu = 53.5$ MHz.
- 4.4.3. Minoritätsheizung von He₃ in Wasserstoff, $\omega \simeq \Omega_{He}, \nu = 35.6$ MHz.
- 4.4.4. Minoritätsheizung von He₃ in Deuterium, $\omega \simeq \Omega_{He}, \nu = 35.6$ MHz.
5. Ein 3-d Modell mit voller Tokamakgeometrie zur Lösung der Wellengleichung im "warmen" Plasma.
 - 5.1. Beschreibung des Plasmagleichgewichts.
 - 5.2. Rand- und Anschlußbedingungen.
 - 5.3. Spektrale Darstellung des elektromagnetischen Wellenfeldes und des H.F. Plasmastromes.
 - 5.4. Iterative Berechnung der parallelen Feldkomponente.
 - 5.5. "Stochastische" Dämpfung der Ionen- Bernsteinwelle.
 - 5.6. Numerische Lösung der Wellengleichung.
 - 5.6.1. Schwache variationelle Form.
 - 5.6.2. Radiale Diskretisierung
 - 5.6.3. Die räumliche Integration.
 - 5.6.4. Implementierung der Regularitäts-, Anschluß- und Randbedingungen.
 - 5.6.5. Lösung des linearen Gleichungssystems.
 - 5.7. Die Energiebilanz im spektralen Modell.
 - 5.8. Konvergenzeigenschaften.
 - 5.9. Anwendungen und Vergleich mit eindimensionalen Modellen und Ray-Tracing.
 - 5.9.1. Zwei Beispiele ohne Resonanz.
 - 5.9.2. Heizung eines D-Plasmas bei der harmonischen Zyklotronresonanz, $\nu = 33.5$ MHz.
 - 5.9.3. Heizung eines H/D-Plasmas bei der zweiten Harmonische von Wasserstoff, $\nu = 67$ MHz.

5.9.4. Minoritätsheizung von He₃ in Deuterium.

5.9.5. Ein Beispiel für JET.

6. Zusammenfassung der Ergebnisse, Vergleich mit dem Experiment und Ausblick.

Anhang A. Aufspaltung von $\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J})$ in Dissipations- und Flußterme.

Anhang B. Abspaltung eines kinetischen Flußterms in $\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}^*(\vartheta) \cdot \vec{J}_{\perp}^{(0)}(\vartheta))$.

1. Einleitung.

Bis auf die in Spaltungsreaktoren gewonnene Energie kann letztendlich alle den Menschen zur Verfügung stehende Energie auf Kernfusionsreaktionen leichter Elemente zurückgeführt werden, da diese Prozesse für die Energieumwandlung in der Sonne und anderen Sternen verantwortlich sind. Das legt die Bemühungen nahe, die Kernverschmelzung auch für die direkte Energieversorgung auf der Erde nutzbar zu machen. Dazu bietet sich nur die Verschmelzung von Wasserstoffisotopen zu Helium an. Eine ausführliche Diskussion der verschiedenen möglichen Reaktionen findet sich z.B. in Ref.1. Aussichtsreichster Kandidat ist die Reaktion



d.h. die Verschmelzung der Wasserstoffisotope Deuterium und Tritium zu einem Heliumkern (α -Teilchen) und einem Neutron. Während Deuterium in praktisch unbegrenzten Mengen zur Verfügung steht, kommt das radioaktive Tritium wegen seiner relativ kurzen Halbwertszeit von 12.3 Jahren nicht natürlich vor und soll mit Hilfe der in der Fusionsreaktion anfallenden Neutronen aus Lithium erbrütet werden. Wegen der mit der Radioaktivität verbundenen Probleme wurde in bisherigen Experimenten zur Kernfusion jedoch noch nicht mit Tritium gearbeitet.

Um in kontrolliertem Ablauf Fusionsenergie freizusetzen, müssen Bedingungen aufrecht erhalten werden, unter denen die Atomkerne, die sich wegen ihrer positiven Ladung abstoßen, nennenswert miteinander verschmelzen können. Eine Möglichkeit ist die thermonukleare Fusion: In einem vollständig ionisierten Plasma von Wasserstoffisotopen verfügen bei sehr hohen Temperaturen im Bereich von 100 Millionen Grad hinreichend viele Teilchen über genug kinetische Energie, um das abstoßende Coulombpotential zu durchdringen und miteinander zu reagieren. Aus der Leistungsbilanz für diese Prozesse kann man ein Zündkriterium ableiten. Es ergibt sich, daß das Produkt von Dichte n und Energieeinschlußzeit τ_E einen bestimmten Wert überschreiten muß, der nur noch eine Funktion der Temperatur ist². τ_E stellt ein Maß für die Isolationseigenschaften des Plasmas dar. In den bisherigen Experimenten, in denen die α -Teilchen-Heizung vernachlässigbar ist, ist diese Größe als der Quotient aus dem Energieinhalt des Plasmas und der von außen durch Heizung zugeführten Leistung definiert.

Nun gibt es kein Material, das etwa in einer Wand derartig hohen Temperaturen standhalten könnte. Man muß daher ein anderes Konzept finden, um das Plasma einzuschließen. Beim magnetischen Einschluß wird die Eigenschaft, daß sich elektrisch geladene Teilchen im wesentlichen nur längs von Magnetfeldlinien bewegen können, ausgenutzt, um das Plasma von den Wänden eines umgebenden Vakuumgefäßes fernzuhalten. Da Magnetfelder immer quellenfrei sind, stellt ein Torus die einfachste topologische Form dar, in der diese Idee realisiert werden kann. Auf diesem Prinzip beruhen mehrere Anlagentypen, von denen der Tokamak³ die am meisten fortgeschrittene Variante ist. In ihm wird die für das Plasmagleichgewicht notwendige Poloidalkomponente des Magnetfeldes durch einen in toroidaler Richtung fließenden elektrischen Plasmastrom erzeugt. Dieser Strom heizt bei endlichem Plasmawiderstand gleichzeitig das Plasma auf (Ohmsche Heizung). Nun ist es aber so, daß der Widerstand mit steigender Temperatur wie $\sim T^{-3/2}$ abnimmt. Die Ohmsche Heizung wird deshalb bei Temperaturen von etwa 1 keV, was ungefähr 10 Millionen Grad entspricht, ineffizient. Die α -Teilchen-Heizung gewinnt auf der anderen Seite erst bei Temperaturen von einigen keV an Bedeutung, wenn genug Ionen über ausreichend Energie verfügen, um miteinander verschmelzen zu können. Um diese Lücke zu schließen, müssen daher andere Heizmethoden angewandt werden. Die meist verbreiteten Verfahren sind dabei Neutralinjektion und die Wellenheizung.

Bei der Neutralinjektion wird ein Ionenstrahl zunächst auf sehr hohen Energie beschleunigt und dann neutralisiert und in das Plasma eingeschossen. Nachteil dieser Methode ist, daß die eingeschossenen Teilchen nur soweit eindringen können, bis sie ionisiert werden. Für eine Maschine von der Größe eines thermonuklearen Reaktors ist es fraglich, ob effiziente Neutralteilcheninjektoren entwickelt werden können, die die Teilchen mit genug Energie versorgen, um das Plasmazentrum zu erreichen.

Bei der Wellenheizung operiert man in verschiedenen Frequenzbereichen, die auf Resonanzen im Plasma abgestimmt sind (Alfvén-Heizung, Ionenzyklotronresonanzheizung, Lower-Hybrid-Heizung, Elektronenzyklotronresonanzheizung). Bei diesen Resonanzen kann Energie von den elektromagnetischen Wellen auf die Plasmateilchen übertragen werden. Der allgemeine experimentelle Aufbau enthält dabei immer folgende Bestandteile: Einen externen Hochfrequenzgenerator und eine

Fernleitung zu einer Antenne, die möglichst effizient an das Plasma koppelt. Von dort breitet sich die Energie dann als Welle (im Fall der konventionellen Ionenzyklotronheizung handelt es sich dabei um die schnelle magnetosonische Welle) zur Resonanzschicht aus, wo sie, eventuell in mehreren Durchgängen, absorbiert wird oder durch lineare Modenkonzersion eine andere, langsame Welle angeregt wird. Die genaue Position der Resonanz hängt dabei von Plasmaparametern und der Frequenz der eingestrahlten elektromagnetischen Welle ab. Das ermöglicht eine externe Kontrolle der Depositionsprofile.

Die Interpretation der experimentellen Ergebnisse erfordert das Verständnis von Propagation und Absorption der elektromagnetischen Wellen im Plasma. Diese Arbeit befasst sich mit der Simulation der gebräuchlichsten Hochfrequenz-Heizmethode, der Ionenzyklotronresonanzheizung (ICRH). Die ersten Versuche basierten auf eindimensionalen Modellen oder Methoden der geometrischen Optik (Ray-Tracing). Deren Grenzen sind offensichtlich: In eindimensionaler Geometrie ist es nicht möglich, die Gradienten in den Dichte- und Temperaturprofilen, die parallel zu dem kleinen Radius eines Tokamaks sind, und die horizontalen Gradienten des statischen Magnetfeldes, die beide einen großen Einfluß auf die Wellenpropagation haben und nur in unmittelbarer Nähe der Äquatorialebene des Tokamaks parallel sind, darzustellen. Ray-Tracing kann im Prinzip in jeder Geometrie angewandt werden. Wegen der teilweise relativ großen Wellenlängen ist diese Methode aber nur in den größten Maschinen gerechtfertigt. Außerdem kann die Anregung globaler Eigenmoden nicht simuliert werden, und die Eikonal-Approximation bricht in der Nähe einer Resonanz zusammen, so daß diese Modelle dort durch meist eindimensionale analytische oder numerische Rechnungen ergänzt werden müssen. Neben einem solchen Code, der die Wellengleichung in der Nähe einer Resonanz löst, beschäftigen wir uns auf Grund der oben beschriebenen Schwächen von eindimensionalen oder Ray-Tracing Modellen in der vorliegenden Dissertation hauptsächlich mit den Eigenschaften und der Lösung der vollen Wellengleichung im gesamten Tokamak.

Dazu stellen wir in Kapitel 2.1 zunächst die Wellengleichung für das elektromagnetische Feld in diesem Frequenzbereich in dem inhomogenen, anisotropen und dissipativen Medium Plasma im Rahmen der linearen Theorie auf. Das erste nichttriviale Problem ist die Herleitung einer Beziehung zwischen dem hochfre-

quenten elektrischen Feld \vec{E} und dem von ihm angetriebenen oszillierenden Plasmastrom \vec{J} . Das bekannte Konzept des dielektrischen Tensors kann dabei nur im kalten Plasma, d.h. unter Vernachlässigung thermischer Effekte, angewandt werden. Ansonsten wird der algebraische dielektrische Tensor durch einen Integraloperator ersetzt, den man durch Integration der linearisierten Vlasov Gleichungen entlang deren Charakteristiken, d.h. entlang ungestörter Teilchenbahnen, erhält. Ein thermisches Plasma ist daher zeitlich *und* räumlich dispersiv, d.h. \vec{J} hängt nicht nur von dem lokalen Wert von \vec{E} ab. In der Richtung senkrecht zum statischen Magnetfeld \vec{B}_0 ist diese Nichtlokalität jedoch durch den Ionen-Larmorradius $\rho_{L,i}$ begrenzt. Wenn die Wellenlänge wesentlich größer als $\rho_{L,i}$ ist, was bei den hier diskutierten Frequenzen meistens der Fall ist, ist es in dieser Richtung möglich, die Integraloperatoren durch Differentialoperatoren anzunähern (Entwicklung nach endlichem Larmorradius). Unseren Berechnungen liegt das Modell des sogenannten "warmen" Plasmas zu Grunde, in dem Terme bis zur zweiten Ordnung Larmorradius mitgenommen werden.

Parallel zu \vec{B}_0 existiert kein kleiner Parameter, der die Teilchenbahnen und damit die Nichtlokalität der Plasmaantwort begrenzt. Im Tokamak genügt daher das elektromagnetische Wellenfeld selbst in einem "warmen" Plasma einer partiellen Integrodifferentialgleichung.

Kapitel 2.2 enthält eine kurze Diskussion der zu dieser Gleichung korrespondierende Dispersionsrelation, aus der erste Aufschlüsse über die Eigenschaften der in typischen ICRH-Experimenten auftretenden Wellen gezogen werden können.

In Kapitel 2.3 leiten wir eine neue Formel für die Dissipation in einem beliebigen Plasma her, die unter anderem explizit zeigt, daß die Dämpfung in einem Plasma mit Maxwell'schen Verteilungsfunktionen überall positiv definit ist, d.h. Energie wird auch lokal ausschließlich von der Welle auf die Plasmateilchen übertragen. Auch hier kann eine Finite Larmorradius (FLR) Entwicklung gemacht werden, die die Identifikation verschiedener in diesem Frequenzbereich wichtiger Absorptionsmechanismen (Ionenzyklotrondämpfung bei der fundamentalen und harmonischen Resonanz, Elektronen Landaudämpfung und Elektronen "Transit Time Magnetic Pumping", TTMP) ermöglicht.

Mit Hilfe der in Kapitel 2 bereitgestellten allgemeinen theoretischen Grundla-

gen untersuchen wir in Kapitel 3 speziell die Ionenzyklotronresonanzheizung von Tokamakplasmen. Diskutiert werden die gebräuchlichsten Heizungsszenarien und die Möglichkeiten zur (numerischen) Simulation dieser Experimente.

In Kapitel 4 wird ein von uns entwickelter eindimensionaler Code beschrieben, der die Wellengleichung in unmittelbarer Nähe einer resonanten Schicht löst und mit dessen Hilfe die pro Durchgang absorbierte Energie (single pass Absorption) sowie die Modenkonzersion zu langsamen Wellen berechnet werden können. Dieses Programm ist für den Einbau in ein Ray-Tracing Paket gedacht. Verglichen mit anderen eindimensionalen Codes wird hier erstmals die Poloidalkomponente von \vec{B}_0 näherungsweise mitberücksichtigt.

Hauptbestandteil dieser Dissertation ist der in Kapitel 5 beschriebene Code, der erstmals die Integrodifferentialgleichung in voller Tokamakgeometrie für ein "warmes" Plasma löst: Dazu wurde zunächst ein lokales Koordinatensystem eingeführt, in dem eine Richtung immer parallel zu \vec{B}_0 ist, um dem stark anisotropen Charakter der Plasmaantwort Rechnung zu tragen. Die beiden senkrechten Komponenten des elektrischen Wellenfeldes treten als explizite Variable auf. Die Parallelkomponente wird durch die hohe Leitfähigkeit des Plasmas parallel zu magnetischen Feldlinien sehr stark abgeschirmt und kann daher iterativ berechnet werden. In toroidaler und poloidaler Richtung entwickeln wir nach Fouriermoden. Wegen der Axialsymmetrie eines Tokamaks sind die Toroidalmoden Eigenmoden und können separat behandelt werden. Das ist nicht einmal näherungsweise für die Poloidalmoden der Fall, so daß hier eine sehr breite Kopplung zwischen verschiedenen Moden auftritt. Die höchsten Moden, die angeregt werden können, sind aber aus physikalischen Gründen, nämlich durch die kürzesten von der Dispersionsrelation erlaubten Wellenlängen, begrenzt. Der Vorteil des spektralen Modells liegt darin, das es eine analytische Berechnung der Integraloperatoren ermöglicht und damit für jede Toroidalmode eine partielle Integrodifferentialgleichung in einen Satz von gekoppelten Differentialgleichungen für die Poloidalmoden umwandelt. In der verbleibenden radialen Richtung benutzen wir eine finite Elemente-Diskretisation mit kubischen hermiteschen interpolierenden Funktionen.

Der Code wurde für verschiedene typische ICRH-Szenarien angewandt und die Ergebnisse mit denen der oben beschriebenen, einfacheren Modelle verglichen.

Gegenüber anderen globalen Codes ermöglicht dieser Code eine realistischere Berechnung des elektromagnetischen Wellenfeldes und der Depositionprofile für die verschiedenen kinetischen Dämpfungsmechanismen (Ionenzyklotrongdämpfung bei der fundamentalen und harmonischen Resonanz, Elektronen "Transit Time Magnetic Pumping" und Landaudämpfung durch Elektronen), sowie erstmals eine gute Darstellung der Ionen-Bernsteinwelle.

Schwerpunkt dieser Arbeit sind die Prozesse, die bei ICRH im Inneren des Plasmas ablaufen, und deren Einfluß auf die Kopplung der Antennenleistung an das Plasma. Die hier dargestellten Modelle sind daher nicht dazu geeignet, die bei ICRH beobachtete erhöhte Produktion von Verunreinigungen zu erklären, die wahrscheinlich dafür verantwortlich sind, daß das H-Regime (darunter versteht man ein Regime verbesserten Einschlusses bei Zusatzheizung) bisher mit ICRH entweder überhaupt nicht (z.B. JET) oder nur transient (ASDEX) oder nur mit besonderer Einstrahlungsgeometrie (JFT-2M) erreicht werden konnte. Die Verunreinigungsproduktion findet nämlich in der Randschicht oder in unmittelbarer Nähe der Antennen statt. Deren Simulation würde wahrscheinlich eine wesentlich genauere Darstellung der Antenne und die Berücksichtigung nichtlinearer Effekte wie parametrische Zerfälle erfordern.

2. Ausbreitung und Absorption von elektromagnetischen Wellen im Frequenzbereich der Ionenzyklotronresonanz in Plasmen.

Dieses Kapitel enthält die zur Simulation von Ionenzyklotronresonanzheizung benötigten physikalischen Grundlagen der Wellenausbreitung und -absorption in Plasmen ohne direkten Bezug auf den Tokamak. Dazu leiten wir die Wellengleichung im Modell des "kalten" und "warmen" Plasmas her und diskutieren kurz die daraus resultierende Dispersionsrelation. Im letzten Unterkapitel wird schließlich die lineare Dissipation im Plasma im allgemeinen und speziell für den uns interessierenden Frequenzbereich behandelt.

2.1. DIE WELLENGLEICHUNG.

Bei der Beschreibung elektromagnetischer Wellen in Plasmen⁴ geht man von den Maxwell-Gleichungen für die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische Induktion \vec{B} aus :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (2.4)$$

wobei $\vec{J}(\vec{r}, t)$ und $\rho(\vec{r}, t)$ die lokalen Strom- und Ladungsdichten im Plasma sind. Aus Gl. (2.3) und Gl. (2.4) erhält man die Wellengleichung :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (2.5)$$

Wenn die Wellen von außen durch Ströme (z.B. in einer Antenne) oder Felder (z.B. aus einem Wellenleiter) mit einer gegebenen harmonischen Zeitabhängigkeit angeregt werden, d.h. $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$, ergibt sich :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\vec{E}(\vec{r}) + \frac{4\pi i}{\omega} \vec{J}(\vec{r}) \right) \quad (2.6)$$

Die vorliegende Dissertation behandelt im wesentlichen die Lösung dieser Gleichung in toroidaler Geometrie im Frequenzbereich der Ionenzyklotronresonanz

$$\omega \approx \Omega_{ci} = \frac{Z_i e |\vec{B}_0|}{m_i c} \quad (2.7)$$

\vec{B}_0 bezeichnet das statische Magnetfeld und m_i und Z_i die Masse und Ladungszahl der Ionen im Plasma. Für Protonen ergibt sich z.B.

$$\Omega_{cH} = 9.58 \cdot 10^3 \cdot |\vec{B}_0| \text{ s}^{-1}, \quad |\vec{B}_0| \text{ in Gauss}$$

Es ist zunächst nötig, eine in unserem Frequenzbereich gültige Beziehung $\vec{J}(\vec{E})$ zwischen der oszillierenden Plasmastromdichte und dem ihn antreibenden elektromagnetischen Wellenfeld herzuleiten.

2.1.1. DAS "KALTE" PLASMA⁴.

Vernachlässigt man die thermische Bewegung der Plasmateilchen (wann diese Näherung gerechtfertigt ist, wird am Ende des nächsten Unterkapitels diskutiert), kann $\vec{J}(\vec{E})$ unmittelbar aus der Lorentzkraft abgeleitet werden :

$$\vec{J} = \sum_s n_s Z_s e \vec{v}_s \quad (2.8)$$

wobei n_s die Dichte der Teilchen der Spezies s (Elektronen oder Ionen) mit der Ladung $Z_s e$, $Z_s = -1$ für Elektronen, bezeichnet, und \vec{v}_s ist die Geschwindigkeit, die sich aus der Bewegungsgleichung für ein einzelnes Teilchen ergibt :

$$m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = Z_s e \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{v}_s}{c} \times \vec{B}_0 \right) \quad (2.9)$$

Die Beiträge des magnetischen Anteils des Wellenfeldes sind höherer Ordnung in der Teilchengeschwindigkeit v_s und können deshalb vernachlässigt werden. Die rechte Seite von Gl. (2.6) kann dann zu dem bekannten dielektrischen Tensor des kalten Plasmas zusammengefaßt werden :

$$\frac{\omega^2}{c^2} \left(\vec{E}(\vec{r}) + \frac{4\pi i}{\omega} \vec{J}(\vec{r}) \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.10)$$

In einem kartesischen Koordinatensystem, in dem die z-Achse parallel zu \vec{B}_0 ausgerichtet ist, hat $\underline{\underline{\epsilon}}$ die Form :

$$\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} S_c & -iD_c & 0 \\ iD_c & S_c & 0 \\ 0 & 0 & P_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

wobei

$$S_c = \frac{R_c + L_c}{2} \quad ; \quad D_c = \frac{R_c - L_c}{2} \quad (2.12)$$

mit

$$R_c = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \Omega_{ce}} - \sum_{ions} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_{ci}} \quad (2.13)$$

$$L_c = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_{ce}} - \sum_{ions} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \Omega_{ci}} \quad (2.14)$$

$$P_c = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \quad (2.15)$$

und

$$\omega_{ps} = \sqrt{\frac{4\pi Z_s^2 e^2 n_s}{m_s}} \quad (2.16)$$

bezeichnet die Plasmalfrequenz einer Spezies und

$$\Omega_{ce} = \frac{e|\vec{B}_0|}{m_e c} = 1.76 \cdot 10^7 \cdot |\vec{B}_0| \text{ s}^{-1}, \quad |\vec{B}_0| \text{ in Gauss}, \quad (2.17)$$

die Elektronenzyklotronfrequenz. Für die Elektronen-Plasmalfrequenz erhält man z.B.

$$\omega_{pe} = 5.64 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{n_e} \text{ s}^{-1}, \quad n_e \text{ in cm}^{-3}$$

Durch Addition eines dissipativen Terms in Gl. (2.9) können Stöße simuliert werden. Dazu ersetzt man in Gln. (2.13–2.14) $\omega \pm \Omega_{ci}$ durch die komplexen Größen $\omega \pm \Omega_{ci} + i\nu$ und in Gl. (2.15) ω_{pe}^2/ω^2 durch $\omega_{pe}^2/\omega(\omega + i\nu)$ wobei ν eine mittlere Stoßfrequenz ist. Für typische Fusionsplasmen ist ν/ω von der Größenordnung 10^{-4} – 10^{-3} .

Wegen der hohen Elektronenleitfähigkeit des Plasmas parallel zu \vec{B}_0 ist außerhalb der unmittelbaren Nachbarschaft von Zyklotronresonanzen in unserem Frequenzbereich bei nicht zu niedrigen Dichten P_c um einen Faktor der Ordnung m_i/m_e grösser als die anderen Tensorelemente. Das bewirkt, daß E_z sehr stark abgeschirmt wird. Die z-Komponente von Gl. (2.6) kann daher dazu benutzt werden, E_z unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in m_e/m_i durch die senkrechten Feldkomponenten \vec{E}_\perp auszudrücken :

$$\frac{\omega^2}{c^2} E_z = \frac{1}{P_c} (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E})_z \simeq \frac{1}{P_c} (\partial_z \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\perp) \quad (2.18)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in die zwei anderen Komponenten von Gl. (2.6) kann E_z eliminiert werden.

2.1.2. DAS "WARME" PLASMA.

In einem Plasma endlicher Temperatur ist $\vec{J}(\vec{r}, t)$ ein Moment der Einzelteilchenverteilungsfunktionen $\tilde{f}_s(\vec{r}, \vec{v}, t)$:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_s Z_s e \int d\vec{v} \vec{v} \tilde{f}_s(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (2.19)$$

$\tilde{f}_s(\vec{r}, \vec{v}, t)$ kann als Summe der Gleichgewichtsverteilungsfunktion $F_s(\vec{r}, \vec{v})$ und einer oszillierenden Störung $f_s(\vec{r}, \vec{v}, t)$ dargestellt werden. In den meisten Fällen ist die Amplitude des Wellenfeldes so klein und die mittlere Stoßfrequenz so hoch, daß die Anzahl der im Wellenfeld eingeschlossenen Teilchen ("trapped particles") gering ist. Das ist aber gerade die Bedingung, unter der $f_s(\vec{r}, \vec{v}, t)$ der linearisierten Vlasov Gleichung genügt (das wurde z.B. in Ref.5 für den Fall der Elektronen Transit Time Magnetic Pumping untersucht) :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_s + \frac{eZ_s}{m_s} \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0 \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} = - \frac{eZ_s}{m_s} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial F_s}{\partial \vec{v}} \quad (2.20)$$

Die linke Seite ist entlang ungestörter Teilchenbahnen (darunter verstehen wir unbeeinflusst durch das Wellenfeld) ein totales Differential nach der Zeit. Gl. (2.20) kann dann mit Hilfe der Methode der Charakteristiken gelöst werden :

$$f_s(\vec{r}, \vec{v}, t) = - \frac{Z_s e}{m_s} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega t'} \left(\vec{E}(\vec{r}'_s) + \frac{\vec{v}'_s}{c} \times \vec{B}(\vec{r}'_s) \right) \cdot \frac{\partial F_s(\vec{r}'_{gs}, \vec{v})}{\partial \vec{v}'_s} \quad (2.21)$$

\vec{r}'_{gs} ist dabei die Position des Führungszentrums ("guiding center") eines Teilchens mit der Geschwindigkeit \vec{v} am Ort \vec{r} ,

$$\vec{r}'_{gs} = \vec{r} + \frac{\vec{v} \times \vec{u}_{\parallel}}{\Omega_{cs}}, \quad (2.22)$$

$\vec{u}_{\parallel} = \vec{B}_0 / |\vec{B}_0|$ und \vec{r}'_s, \vec{v}'_s sind die Lösungen der ungestörten Bewegungsgleichungen im statischen Magnetfeld \vec{B}_0 :

$$\frac{d\vec{r}'_s}{dt'} = \vec{v}'_s \quad ; \quad \frac{d\vec{v}'_s}{dt'} = \frac{eZ_s}{m_s c} \vec{v}'_s \times \vec{B}_0(\vec{r}'_s) \quad (2.23)$$

mit den "Endbedingungen" $\vec{r}'_s(t' = t) = \vec{r}$ und $\vec{v}'_s(t' = t) = \vec{v}$. Im folgenden nehmen wir an, daß die Gleichgewichtsverteilungsfunktionen F_s lokale Maxwell Verteilungen sind :

$$F_s \simeq F_{M,s} = \frac{1}{\sqrt{\pi^3} v_{ths}^3} e^{-\vec{v}^2/v_{ths}^2}, \quad v_{ths} = \sqrt{2kT_s/m_s} \quad (2.24)$$

\vec{r}_{gs} ist in der niedrigsten Ordnung der Driftapproximation eine Konstante der Bewegung. Diese Näherung ist gerechtfertigt, wenn der Ionen-Larmorradius $\rho_{L,i}$,

$$\rho_{L,i} = \frac{v_{thi}}{\Omega_{ci}} = 4.568 \cdot 10^3 \frac{\sqrt{kT_i[in keV]}}{|\vec{B}_0|[in Gauss]} \text{ cm} \quad \text{für Protonen,} \quad (2.25)$$

wesentlich kleiner als die Gradientenlänge des statischen Magnetfeldes ist, und wenn

$$|\vec{u}_{\parallel} \cdot grad|\vec{B}_0|| \ll |grad|\vec{B}_0|| \quad (2.26)$$

ist. Gl. (2.26) gilt nicht in Spiegelmaschinen. Dort haben die Verteilungsfunktionen durch den Verlust hochenergetischer Teilchen einen sogenannten Verlustkegel, und man muß eine allgemeinere Form für F_s , die nur von der Energie, dem magnetischen Moment und der dritten adiabatischen Invariante abhängt, benutzen⁶. Im Tokamak sind die hier gemachten Annahmen gerechtfertigt, wenn man sich im Pfirsch-Schlüter oder Plateau-Regime³ befindet, d.h. Teilchen, die im statischen Magnetfeld poloidal bzw. toroidal eingeschlossen sind, werden zwischen zwei Umkehrpunkten durch Stöße abgelenkt und können ihre "Bananebahnen" nicht vollenden. Diese Annahme stellt aber keine besondere Einschränkung dar.

Schließlich wurde in Gl. (2.21) noch angenommen, daß die Gradientenlängen der Temperatur- und Dichteprofile groß gegen $\rho_{L,i}$ sind, was aber immer der Fall ist.

In einigen ICRH Szenarien hat die Verteilungsfunktion einer Ionenspezies einen hochenergetischen Schwanz. Ein solches Verhalten kann als eine Summe von mehreren Maxwellverteilungen mit verschiedenen Temperaturen T_i dargestellt werden. Das ermöglicht eine bessere Beschreibung der Dämpfung während die genaue Form von $F_s(v^2, \vec{r})$ nur einen sehr geringen Einfluß auf die Propagation der Wellen hat.

Setzt man Gl. (2.21) mit Gl. (2.24) in Gl. (2.19) ein, erhält man für ein Maxwell-sches Plasma im Rahmen der linearen Theorie :

$$\frac{4\pi i}{\omega} \vec{J}(\vec{r}) = \sum_s 2 \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \int d\vec{v} \frac{\vec{v}}{v_{ths}} F_{M,s}(\vec{r}_{gs}, v^2) \cdot i\omega \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \left(\frac{\vec{v}'_s}{v_{ths}} - \frac{v_{ths}^2}{2\Omega_{cs}} \vec{u}_{\parallel} \times \vec{\nabla} \ln F_{M,s}(\vec{r}_{gs}, v^2) \right) \cdot \vec{E}(\vec{r}'_s) \quad (2.27)$$

wobei $\tau = t - t'$ ist. Der zweite Term in dem τ -Integral ist für Driftwelleninstabilitäten verantwortlich und spielt bei ICRH keine Rolle. Im Gegensatz zum dielektrischen Tensor des kalten Plasmas enthält Gl. (2.27) Integraloperatoren, d.h. bei nichtverschwindender Temperatur ist ein Plasma zeitlich *und* räumlich dispersiv: Die Plasmaantwort am Ort \vec{r} und zur Zeit t auf ein elektromagnetisches Feld hängt nicht nur von der Feldstärke an diesem Ort ab, sondern von dem Feld, das die Plasmateilchen, die zur Zeit t am Ort \vec{r} sind, während ihrer thermischen Bewegung durchlaufen haben. Senkrecht zu \vec{B}_0 ist diese Nichtlokalität durch den Ionen-Larmorradius $\rho_{L,i}$ begrenzt. In den meisten Fällen ist $\rho_{L,i}$ klein gegenüber der Wellenlänge,

$$\rho_{L,i} k_{\perp} < 1 \quad (2.28)$$

wobei k_{\perp} die senkrechte Wellenzahl bezeichnet. Das ermöglicht in der Richtung senkrecht zu \vec{B}_0 eine Finite Larmorradius (FLR) Entwicklung, wodurch Integral- in Differentialoperatoren umgewandelt werden^{7,8,9,10,11}. Wir wollen hier die in Ref.9 benutzte Methode kurz skizzieren, da sie auch in Plasmen mit nichtverschwindenden Gradienten entlang der magnetischen Feldlinien wie z.B. im Tokamak anwendbar ist. Man entwickelt zunächst $\vec{E}(\vec{r}'_s)$ in der Richtung senkrecht zu \vec{B}_0 in eine Taylor-Reihe um das Führungszentrum \vec{r}'_{gs} :

$$\vec{E}(\vec{r}'_s) \simeq [1 + (\vec{r}'_s - \vec{r}'_{gs}) \cdot \vec{\nabla} + \frac{1}{2} (\vec{r}'_s - \vec{r}'_{gs})(\vec{r}'_s - \vec{r}'_{gs}) : \vec{\nabla} \vec{\nabla} + \dots] \vec{E}(\vec{r}'_{gs}) \quad (2.29)$$

\vec{v}' wird dabei in der Driftapproximation berechnet. Schließlich entwickelt man den Integranden in Gl. (2.27), der jetzt nur eine Funktion von \vec{r}'_{gs} ist, in analoger Weise um \vec{r} und integriert über senkrechte Geschwindigkeiten. Damit sind die Integraloperatoren senkrecht zu \vec{B}_0 in Differentialoperatoren umgewandelt worden.

Parallel zu \vec{B}_0 ist ein analoges Vorgehen nicht möglich, da in dieser Richtung kein kleiner Parameter existiert, der die Teilchenbahnen und damit die Nichtlokalität begrenzt.

Um die resultierende Relation $\vec{J}(\vec{E})$ auszudrücken, führen wir zunächst ein lokales Koordinatensystem ein, in dem die Richtung des statischen Magnetfeldes ausgezeichnet ist ("Stix-frame"): $\vec{u}_{\parallel} = \vec{B}_0/|\vec{B}_0|$ und \vec{u}_{\pm} sind rotierende Einheitsvektoren, so daß

$$\vec{E} = E_{\parallel}\vec{u}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} = E_{\parallel}\vec{u}_{\parallel} + E_+\vec{u}_+ + E_-\vec{u}_- \quad (2.30)$$

wobei E_{\parallel} , E_+ und E_- die parallele, links- und rechtshändige senkrechte Feldkomponente bezeichnen. Unter Berücksichtigung von Termen bis zur zweiten Ordnung in der Finiten Larmorradius (FLR) Entwicklung (diese Näherung werden wir im folgenden "warmes" Plasma nennen), erhält man :

$$\vec{J} = \vec{J}^{(0)} + \sum_{\text{Ionen}} \vec{J}_i^{(2)} + \vec{J}_e^{(2)} \quad (2.31)$$

Hier sind in den Ionenstromdichten bereits FLR-Terme, die in der Nähe von $\omega = \Omega_{ci}$ resonant sind oder nicht resonant sind, vernachlässigt worden, da sie immer klein gegenüber den Termen nullter Ordnung sind. In den Elektronenstromdichten haben wir Terme, die Elektronenzyklotrondämpfung beschreiben und in unserem Frequenzbereich bedeutungslos sind, weggelassen. In nullter Ordnung Larmorradius ergibt sich :

$$\vec{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \vec{J}^{(0)} = \hat{L}E_+\vec{u}_+ + \hat{R}E_-\vec{u}_- + \hat{P}E_{\parallel}\vec{u}_{\parallel}$$

wobei

$$\hat{R}E_-(\vec{r}) = \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \Omega_{ce}} - \sum_{\text{ions}} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_{ci}} \right] E_-(\vec{r}) \quad (2.32)$$

und \hat{L} und \hat{P} sind Integraloperatoren :

$$\begin{aligned} \hat{L}E_+(\vec{r}) = & \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_{ce}} \right) E_+(\vec{r}) \\ & + \sum_{\text{ions}} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi}v_{thi}} \left[i\omega \int_0^{\infty} d\tau e^{i\int_0^{\tau}(\omega - \Omega_{ci}) d\tau'} E_+(\vec{r}'(\tau)) \right], \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\hat{P}E_{\parallel}(\vec{r}) = E_{\parallel}(\vec{r}) + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{the}^2}}{\sqrt{\pi}v_{the}} \frac{v_{\parallel}^2}{v_{the}^2} \left[i\omega \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} E_{\parallel}(\vec{r}'(\tau)) \right] \quad (2.34)$$

Hier und in den weiteren Gleichungen dieses Unterkapitels beschreibt $\vec{r}'(\tau) = \vec{r} - \int^{\tau} \vec{u}_{\parallel} v'_{\parallel} d\tau'$ nur noch die parallele Bewegung der Teilchen.

In unserem Modell enthalten die FLR-Korrekturen zum Ionenstrom nur Beiträge, die in der Nähe von $\omega = 2\Omega_{ci}$, wo die Terme nullter Ordnung endlich sind, resonant sind. Sie bewirken unter anderem Ionenzyklotrondämpfung bei der zweiten harmonischen Resonanz :

$$\frac{4\pi i}{\omega} \vec{J}_i^{(2)} = 2 \frac{c^2}{\omega^2} \vec{u}_+ (\vec{u}_+ \cdot \vec{\partial}) \left[\hat{\lambda}_{2,i} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_+^* E_+) \right] \quad (2.35)$$

mit

$$\hat{\lambda}_{n,s} \vec{E}_{\perp}(\vec{r}) = -\frac{1}{2} \frac{\omega_{ps}^2 v_{ths}^2}{\Omega_{cs}^2 c^2} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{ths}^2}}{\sqrt{\pi} v_{ths}} \left[i\omega \int_0^{\infty} d\tau e^{i \int_0^{\tau} (\omega - n\Omega_{cs}) d\tau'} \vec{E}_{\perp}(\vec{r}'(\tau)) \right] \quad (2.36)$$

Für die FLR-Korrekturen zum Elektronenstrom ergibt sich :

$$\begin{aligned} \frac{4\pi i}{\omega} \vec{J}_e^{(2)} = & -2 \frac{c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_{\perp} \times \hat{\lambda}_{0,e} (\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{E}_{\perp}) \\ & - i \frac{c^2}{\omega^2} \left[\partial_{\parallel} \hat{\xi} (\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{E}_{\perp}) + \vec{\nabla}_{\perp} \times \hat{\xi} (\partial_{\parallel} E_{\parallel} \vec{u}_{\parallel}) \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

wobei

$$\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{A} = \vec{u}_{\parallel} ((\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\perp}) \cdot \vec{u}_{\parallel}) + (\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\parallel})_{\perp} \quad (2.38)$$

und

$$\hat{\xi} E_{\parallel}(\vec{r}) \vec{u}_{\parallel} = \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2 v_{the}^2}{\omega \Omega_{ce} c^2} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{the}^2}}{\sqrt{\pi} v_{the}} \left[i\omega^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} E_{\parallel}(\vec{r}'(\tau)) \vec{u}_{\parallel} \right] \quad (2.39)$$

Auch hier können Stöße dadurch simuliert werden, daß man in den Exponenten in Gl. (2.33–2.34) und Gl. (2.36) ω durch $\omega + i\nu$ ersetzt.

Die Parallelkomponente von Gl. (2.6) kann, ähnlich wie im "kalten" Plasma, formell dazu benutzt werden, E_{\parallel} in erster Ordnung m_e/m_i durch die senkrechten Komponenten auszudrücken¹² :

$$\begin{aligned} E_{\parallel} = & \frac{c^2}{\omega^2} \hat{P}^{-1} \left\{ i\partial_{\parallel} \hat{\xi} (\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{E}_{\perp})_{\parallel} + \vec{u}_{\parallel} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} \right\} \\ \simeq & \frac{c^2}{\omega^2} \hat{P}^{-1} \left\{ i\partial_{\parallel} \hat{\xi} (\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{E}_{\perp})_{\parallel} + \partial_{\parallel} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\perp} \right\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

wobei die exakte Berechnung von \hat{P}^{-1} , d.h. die Inversion des Integraloperators \hat{P} , nicht trivial ist. In Kap. 4.2 bzw. 5.4 werden wir im Rahmen der dort beschriebenen Modelle approximative Ausdrücke für \hat{P}^{-1} herleiten.

2.1.3. DAS MODELL DES "WARMEN" PLASMAS IN VEREINFACHTER GEOMETRIE.

In den ersten (zumeist eindimensionalen) Modellen, die die FLR-Terme berücksichtigten^{13,8,10,14} ging man von Plasmen ohne Gradienten entlang magnetischer Feldlinien aus ("slab geometry"). Im Tokamak bedeutet das, daß die Poloidalkomponente des statischen Magnetfeldes vernachlässigt wird, was nicht immer gerechtfertigt ist, wie wir später zeigen werden. Die Felder können dann als Superposition von Partialwellen mit (durch die Periodizität der Randbedingungen) gegebenen parallelen Wellenzahlen k_{\parallel} dargestellt werden. Die Parallelgeschwindigkeit der Teilchen $\vec{u}_{\parallel} v_{\parallel}$ ist konstant, d.h. $\vec{r}'(\tau) = \vec{r} - \vec{u}_{\parallel} v_{\parallel} \tau$. Die Integrale können dann für jedes k_{\parallel} analytisch berechnet werden :

$$\hat{L}(\vec{r}, k_{\parallel}) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_{ce}} + \sum_{ions} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} x_{0,i} Z(x_{1,i}) \quad (2.41)$$

$$\hat{P}(\vec{r}, k_{\parallel}) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} x_{0,e}^2 Z'(x_{0,e}) \quad (2.42)$$

$$\hat{\lambda}_{n,s}(\vec{r}, k_{\parallel}) = -\frac{1}{2} \frac{\omega_{ps}^2}{\Omega_{cs}^2} \frac{v_{ths}^2}{c^2} x_{0,s} Z(x_{n,s}) \quad (2.43)$$

$$\hat{\xi}(\vec{r}, k_{\parallel}) = \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_{ce} \omega} \frac{v_{the}^2}{c^2} x_{0,e}^2 Z'(x_{0,e}) \quad (2.44)$$

Dabei ist

$$x_{n,s} = \frac{(\omega - n\Omega_{cs})}{k_{\parallel} v_{ths}}, \quad (2.45)$$

und

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{-u^2}}{u - x} \quad (2.46)$$

für $\text{Im}(x) > 0$ und die analytische Fortsetzung dieser Funktion für $\text{Im}(x) \leq 0$ bezeichnet die Fried-Conte Zeta Funktion oder Plasma Dispersionsfunktion¹⁵. Es gilt

$$Z'(x) = -2(1 + x \cdot Z(x)) \quad \text{und} \quad Z(x) \rightarrow -1/x \quad \text{wenn} \quad \text{Re}(x) \gg 1 \quad (2.47)$$

Im Grenzfall verschwindender Stöße, d.h. für $\text{Im}(x) \rightarrow 0$ ist

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} P \int du \frac{e^{-u^2}}{u-x} + i\sqrt{\pi} e^{-x^2}$$

Der Imaginärteil beschreibt die kinetische Absorption durch resonante Teilchen, d.h. durch Ionen, die die Zyklotronbedingung $\omega - n\Omega_{ci} - k_{\parallel}v_{\parallel i} = 0$, oder Elektronen, die die Cerenkov Bedingung $\omega - k_{\parallel}v_{\parallel e} = 0$, erfüllen. Durch die thermische Bewegung der Plasmateilchen wird die Phasenbeziehung zwischen dem hochfrequenten Plasmastrom und dem ihn antreibenden elektromagnetischen Wellenfeld zerstört und eine Dopplerverbreiterung der Resonanzen bewirkt. Diese Effekte können im "kalten" Plasma nicht beschrieben werden, da hier nur Stöße die Phasenbeziehung zerstören und damit zur Dissipation beitragen.

Für $k_{\perp}v_{th s}/\omega \rightarrow 0$ verschwinden die FLR-Korrekturen und für $1/x_{n,s} \rightarrow 0$ die räumliche Dispersion entlang magnetischer Feldlinien, so daß man wieder den dielektrischen Tensor des "kalten" Plasmas, Gln. (2.11–2.15), erhält. Diese Bedingungen sind jedoch in einem Fusionsplasma und insbesondere in der Nähe von Ionenzyklotronresonanzen nicht erfüllt. Daher kann man im "kalten Plasma" nicht die korrekten Leistungsdepositionsprofile für die verschiedenen kinetischen Dämpfungsmechanismen errechnen. Außerdem erhöht sich durch den Ionen FLR-Strom die Ordnung der Differentialgleichung. Das bewirkt, daß in einigen sehr wichtigen ICRH Szenarien die sogenannte Ionen-Bernsteinwelle (IBW) angeregt wird, die im "kalten" Plasma nicht existiert. Diese und andere Eigenschaften des "warmen" Plasmas werden im folgenden Unterkapitel diskutiert.

2.2. DIE DISPERSIONSRELATION.

Mit Hilfe der Dispersionsrelation kann man die Eigenschaften der verschiedenen Wellen, die Gl. (2.6) beschreibt, untersuchen. In einem räumlich uniformen oder schwach inhomogenen Plasma verhalten sich die Lösungen der Wellengleichung wie $\sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i\frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot\vec{r}}$ wobei \vec{n} den Brechungsindex bezeichnet. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann ein Koordinatensystem gewählt werden, in dem das statische Magnetfeld \vec{B}_0 parallel zur z-Achse ausgerichtet ist und \vec{n} in der xz-Ebene liegt :

$$\vec{n} = \vec{n}_{\perp} + n_{\parallel}\vec{u}_{\parallel} = n_x\vec{e}_x + n_z\vec{e}_z \quad (2.48)$$

Die Bedingung für nichttriviale Lösungen der Wellengleichung lautet dann :

$$H(n_x, n_z) = \det \begin{vmatrix} \hat{S} - n_z^2 - \hat{\lambda}_2 n_x^2/2 & -i\hat{D} - i\hat{\lambda}_2 n_x^2/2 & n_x n_z \\ i\hat{D} + i\hat{\lambda}_2 n_x^2/2 & \hat{S} - n_z^2 - n_x^2(1 + 2\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_2/2) & -in_x n_z \hat{\xi} \\ n_x n_z & in_x n_z \hat{\xi} & \hat{P} - n_x^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.49)$$

mit

$$\hat{\lambda}_2 = \sum_{ions} \hat{\lambda}_{2,i}(k_{\parallel}), \quad \hat{\lambda}_0 = \hat{\lambda}_{0,e}(k_{\parallel}) \quad (2.50)$$

und

$$\hat{S} = (\hat{R} + \hat{L}(k_{\parallel}))/2, \quad \hat{D} = (\hat{R} - \hat{L}(k_{\parallel}))/2 \quad (2.51)$$

Unter Berücksichtigung von Termen bis zur zweiten Ordnung in $k_{\perp} \rho_s$ ergibt sich folgende Dispersionsrelation :

$$H(n_x, n_z) = -\frac{\hat{\lambda}_2}{2} n_x^6 + A n_x^4 + B n_x^2 + C = 0 \quad (2.52)$$

mit den Koeffizienten :

$$A = \hat{S} + (\hat{S} - n_z^2)(2\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_2) + n_z^2(2\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_2/2) + \hat{P}\hat{\lambda}_2/2 + \hat{D}\hat{\lambda}_2 \quad (2.53)$$

$$B = -\hat{P}\hat{S} - \hat{R}\hat{L} + n_z^2(\hat{P} + \hat{S}) - \hat{P}((\hat{S} - n_z^2)(2\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_2) + \hat{D}\hat{\lambda}_2) - n_z^2 \hat{\xi}(2\hat{D} + (\hat{S} - n_z^2)\hat{\xi}) \quad (2.54)$$

$$C = \hat{P}(n_z^2 - \hat{R})(n_z^2 - \hat{L}) \quad (2.55)$$

Die Wurzeln von Gl. (2.52) werden z.B. in Ref.16 ausführlich diskutiert. Wir wollen hier nur die wichtigsten Ergebnisse für den uns interessierenden Parameterbereich zusammenfassen.

Die FLR-Korrekturen sind um einen Faktor der Größenordnung $\beta = \frac{\omega_p^2 v_{th}^2}{\Omega_c^2 c^2}$ (in typischen Fusionsplasmen ist $\beta \approx 1\%$) kleiner als die Terme, die den Elementen des dielektrischen Tensors im "kalten" Plasma entsprechen. Berücksichtigt man außerdem, daß \hat{P} um einen Faktor der Größenordnung m_i/m_e größer als \hat{S} und \hat{R} sind, ergeben sich für $m_e/m_i \lesssim \beta$, was in einem Tokamak mit Zentraltemperatur von einigen keV der Fall ist, folgende approximative Wurzeln der Dispersionsrelation :

a.) Die schnelle magnetoakustische Welle :

$$n_x^2 \simeq -\frac{(n_z^2 - \hat{R})(n_z^2 - \hat{L})}{(n_z^2 - \hat{S})} \quad (2.56)$$

Sie ist transversal polarisiert und propagiert senkrecht zu \vec{B}_0 und wird daher im allgemeinen von der Antenne angeregt. Sie hat cut offs ($n_x^2 \rightarrow 0$) für $n_z^2 = \hat{R}$ und $n_z^2 = \hat{L}$ sowie eine Wellenresonanz ($n_x^2 \rightarrow \infty$) wenn $n_z^2 = \hat{S}$. Im "kalten" Plasma wird das Auftreten dieser Singularität der Wellengleichung nur durch Stoßdämpfung vermieden, im "warmen" Plasma durch kinetische Dämpfung und FLR Korrekturen.

b.) Die Ionen-Bernsteinwelle (IBW) :

$$n_x^2 \simeq -\frac{(n_z^2 - \hat{S})}{\hat{\lambda}_2/2} \quad (2.57)$$

Die IBW ist für $\omega \lesssim 2\Omega_{ci}$ propagativ. Sie breitet sich hauptsächlich senkrecht zu \vec{B}_0 aus und hat praktisch keine Magnetfeldkomponente, so daß die Energie fast ausschließlich durch kinetischen Fluß, d.h. durch kohärente Mitbewegung der thermischen Ionen, transportiert wird. Energiefluß und Phasengeschwindigkeit sind entgegengesetzt, die Welle läuft "rückwärts". Die Wellenlänge ist proportional zur Iontemperatur, d.h. $k_{\perp} \rho_{L,i}$ hängt nicht von der Temperatur ab. Mit wachsendem $|\vec{B}_0|$ vergrößert sich der Brechungsindex sehr schnell. Dabei kann die Bedingung Gl. (2.28) verletzt werden und die Anwendbarkeit der FLR-Entwicklung und damit des "warmen" Plasmas wird fragwürdig (vgl. Kap. 2.1.2). Auf Grund ihrer kurzen Wellenlänge ist die IBW näherungsweise elektrostatisch polarisiert. Eine genauere Untersuchung^{17,18} zeigt jedoch, daß zwar die senkrechte Komponente des elektrischen Feldes parallel zu k_{\perp} ist, E_{\parallel} aber sehr klein ist ("quasistatische" Polarisation). Das bewirkt, daß die IBW nur sehr schwach durch Elektronen Landaudämpfung (vgl. nächstes Unterkapitel) absorbiert wird.

Die Wurzel

$$n_x^2 \simeq -(n_z^2 - \hat{S}) \frac{\hat{P}}{\hat{S}} \quad (2.58)$$

beschreibt je nach Szenario verschiedene Wellen :

c.) Die Ionenzyklotronwelle :

Außerhalb der Nachbarschaft der zweiten harmonischen Ionenzyklotronresonanz in Plasmen mit niedrigem β_i , $\beta_i = \frac{\omega_{pi}^2 v_{thi}^2}{\Omega_{ci}^2 c^2}$ beschreibt Gl. (2.58) die Ionenzyklotronwelle, die an die Stelle der Ionen-Bernsteinwelle tritt. Im Grenzfall $m_e/m_i \rightarrow 0$, d.h. $\hat{P} \rightarrow -\infty$ breitet sie sich parallel zu \vec{B}_0 aus :

$$n_z^2 \simeq \hat{S} \quad (2.59)$$

und ist elektrostatisch polarisiert, d.h. das elektrische Feld ist parallel zur Ausbreitungsrichtung.

Ansonsten kann Gl. (2.58) durch

$$n_x^2 \simeq \hat{P} \quad (2.60)$$

angenähert werden. Diese Gleichung beschreibt im allgemeinen die ordentliche Welle, die in unserem Frequenzbereich immer evaneszent ist. Lediglich wenn $\hat{P} > 0$, d.h. nur für $x_{0,e} \lesssim 0.9$, also für sehr große n_z oder sehr heiße Plasmen ist Gl. (2.60) die Dispersionsrelation einer propagativen Welle, der sogenannten kinetischen Alfvénwelle.

An Stellen, wo die Dispersionsrelation eine Doppelwurzel hat, findet Modenkonzersion zwischen den verschiedenen Lösungszweigen statt. Zu diesem Thema gibt es eine Fülle von Veröffentlichungen^{19,20,21,8,22,23}, von denen wir hier nur einige zitieren. Modenkonzersion tritt z.B. in der Nähe der Wellenresonanz der schnellen Welle $n_z^2 = \hat{S}$ (Hybrid Resonanzen) auf, wo je nach Plasmakomposition die Ionen-Bernsteinwelle oder die Ionenzyklotronwelle angeregt wird. Dieser Prozess ist sehr wichtig für die Plasmaheizung und wird in Kapitel 3.1 ausführlich für verschiedene Szenarien diskutiert. Er kann im "kalten" Plasma nicht richtig beschrieben werden. Die in die IBW konvertierte Energie erscheint dort als durch Stoßdämpfung absorbierte Energie^{24,25}.

2.3. ENERGIERELATIONEN.

Multipliziert man Gl. (2.6) mit \vec{E}^* erhält man nach einer partiellen Integration eine Gleichung, deren Realteil die Energieerhaltung für zeitgemittelte Größen beschreibt (Poynting Theorem) :

$$\frac{c}{8\pi} \operatorname{div} (\operatorname{Re} (\vec{E}^* \times \vec{B})) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{E}^* \cdot \vec{J}) = 0 \quad (2.61)$$

wobei

$$\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (\vec{E}^* \times \vec{B}) = \vec{S}_{em} \quad (2.62)$$

den bekannten elektromagnetischen Energiefluß repräsentiert. Im "kalten" Plasma kann $\frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{E}^* \cdot \vec{J})$ als die lokal von den Plasmateilchen absorbierte Leistung interpretiert werden. Das ist in einem thermischen Plasma nicht möglich, da $\frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{E}^* \cdot \vec{J})$ dann kinetische Flußterme enthält, die durch den kohärenten, reversiblen Anteil der thermischen Bewegung der Plasmateilchen hervorgerufen werden und nicht zur Dissipation beitragen^{10,26}. Um diese Flußterme abzuspalten und den korrekten Ausdruck für die lokale kinetische Absorption zu finden, muß man von fundamentalen Prinzipien ausgehen. Wir verallgemeinern hier²⁷ ein von Mc Vey et al.²⁸ für ein "warmes" Plasma ohne Gradienten entlang des statischen Magnetfelds beschriebenes Verfahren für beliebige Plasmen und Wellenfelder (vgl. auch Appert et al.²⁶; in dieser Arbeit wurden jedoch keine parallelen Gradienten berücksichtigt).

Die Energie Q , die die Plasmateilchen durch Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Wellenfeld während ihrer Bewegung entlang der ungestörten Teilchenbahnen $\vec{r}'_s(t')$, $\vec{v}'_s(t')$, Gl. (2.23), gewinnen, ist durch folgenden Ausdruck gegeben :

$$Q = \sum_s e Z_s \int d^3 v \left\langle \int_{-\infty}^t dt' \operatorname{Re} [\vec{E}(\vec{r}'_s) e^{-i\omega t'} \cdot \vec{v}'_s] \operatorname{Re} [f_{1,s}(\vec{v}'_s, \vec{r}'_s, t')] \right\rangle_t \quad (2.63)$$

Die stumpfwinklige Klammer bedeutet dabei Zeitmittelung bezüglich der schnellen Zeitskala ω^{-1} . Einsetzen der gestörten Verteilungsfunktion, Gl. (2.21), ergibt :

$$Q = e^{2\gamma t} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{8\pi} \int d^3 v F_{M,s}(v^2, \vec{r}_g) \int_0^\infty d\tau \left\{ e^{i\omega\tau} \frac{\vec{v}'_s}{v_{ths}} \cdot \vec{E}(\vec{r}'_s) \right. \\ \left. \cdot \int_\tau^\infty d\tau' e^{-i\omega^* \tau'} \frac{\vec{v}'_s}{v_{ths}} \cdot \vec{E}^*(\vec{r}'_s) + c.c. \right\} \quad (2.64)$$

wobei $\tau = t - t'$ und $\tau' = t - t''$. ω hat einen kleinen Imaginärteil $\text{Im}(\omega) = \gamma$, um Kausalität zu garantieren, d.h. wir nehmen an, daß die Welle zu einem Zeitpunkt in der Vergangenheit adiabatisch eingeschaltet wurde. Wir wollen zunächst den Fall verschwindender Stoßdämpfung betrachten. Die Gleichungen verstehen sich dann im Grenzfall $\gamma \rightarrow +0$. Das bedeutet, daß die Teilchen eine mittlere freie Weglänge haben, die wesentlich grösser als die Wellenlänge ist.

Durch partielle Integration des komplex konjugierten Terms in $d\tau$ und Differentiation nach der Zeit an einem festen Punkt erhält man dann folgenden Ausdruck für die lokal absorbierte Leistung dP_{abs}/dV ,

$$\frac{dP_{abs}}{dV} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} 2\gamma \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{8\pi} \int d^3v F_{M,s}(v^2, \vec{r}_g) \left| \int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \frac{\vec{v}'_s}{v_{ths}} \cdot \vec{E}(\vec{r}') \right|^2, \quad (2.65)$$

wobei wir wieder den für die Driftinstabilitäten verantwortlichen Term weggelassen haben (vgl. Kap. 2.1).

Bildet man dagegen die Zeitableitung in einem Bezugssystem, das sich mit den Teilchen bewegt, erhält man gerade $\text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J})/2$, also jenen Ausdruck, der auch den reversiblen kinetischen Fluß enthält.

Aus Gl. (2.65) ersieht man sofort, daß dP_{abs}/dV in einem Maxwell'schen Plasma überall positiv ist, d.h. Energie wird auch lokal ausschließlich von den Wellen auf die Teilchen übertragen. Dieses Ergebnis scheint im Widerspruch zu den Resultaten anderer Autoren^{29,30} zu stehen, die die Plasma-Dispersionsfunktion in Tokamakgeometrie unter Berücksichtigung paralleler Gradienten der Zyklotronfrequenz untersucht haben (vgl. Kap. 5.3). Die dort gefundenen lokal negativen Werte von $\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J})$ resultieren aber von Beiträgen des reversiblen kinetischen Flußes und nicht von der lokalen Dissipation.

Entwickelt man nun $\vec{E}(\vec{r}'_s)$ um das Führungszentrum \vec{r}_{gs} , Gl. (2.29), und integriert über senkrechte Geschwindigkeiten, wobei wir die gleichen Terme wie in der Herleitung der von $\vec{J}(\vec{E})$ im "warmen" Plasma berücksichtigen, ergibt sich :

$$\frac{dP_{abs}}{dV} = \frac{dP_{abs}^{i1}}{dV} + \frac{dP_{abs}^{i2}}{dV} + \frac{dP_{abs}^e}{dV} \quad (2.66)$$

Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite beschreiben die von Ionen bei der

Fundamental- und harmonischen Resonanz absorbierte Leistung,

$$\frac{dP_{abs}^{i1}}{dV} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} 2\gamma \sum_{Ionen} \frac{\omega_{pi}^2}{16\pi} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi}v_{thi}} \cdot \left| \int_0^{\infty} d\tau e^{i \int^{\tau} (\omega - \Omega_{ci}(\vec{r}''))} d\tau' E_{+}(\vec{r}') \right|^2 \quad (2.67)$$

$$\frac{dP_{abs}^{i2}}{dV} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} 2\gamma \frac{c^2}{16\pi} \sum_{Ionen} \beta_i \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi}v_{thi}} \cdot \left| \int_0^{\infty} d\tau e^{i \int^{\tau} (\omega - 2\Omega_{ci}(\vec{r}''))} d\tau' \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_{+}^* E_{+}(\vec{r}')) \right|^2 \quad (2.68)$$

und der letzte die von Elektronen absorbierte Leistung:

$$\frac{dP_{abs}^e}{dV} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} 2\gamma \frac{\omega_{pe}^2}{8\pi} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{the}^2}}{\sqrt{\pi}v_{the}} \left\{ \frac{1}{2} \left| \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \frac{v_{\parallel}}{v_{the}} \vec{u}_{\parallel} E_{\parallel}(\vec{r}') \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{the}} \vec{u}_{\parallel} E_{\parallel}(\vec{r}') - \frac{v_{the}}{\Omega_{ce}} \vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{E}_{\perp}(\vec{r}') \right) \right|^2 \right\} \quad (2.69)$$

Gl. (2.69) beschreibt Elektronen Landaudämpfung (ELD), ein Mechanismus, der hauptsächlich elektrostatische Wellen betrifft, Elektronen "Transit Time Magnetic Pumping" (TTMP), ein FLR-Effekt, der für die schnelle Welle bei Temperaturen von einigen keV wichtig wird, sowie einen Kreuzterm. Kapitel 3.1 enthält eine Diskussion der verschiedenen Dämpfungsprozesse unter den Bedingungen typischer ICRH-Experimente in Tokamakplasmen. In Gln. (2.67–2.69) ist $\vec{r}'(\tau) = \vec{r} - \int^{\tau} \vec{u}_{\parallel} v_{\parallel}' d\tau$, enthält also nur noch die parallele Bewegung der Teilchen.

Obwohl diese Ausdrücke und ihre Herleitung physikalisch plausibel sind, muß noch gezeigt werden, daß sie im Einklang mit dem aus der Wellengleichung abgeleiteten Poynting Theorem, Gl. (2.61), stehen. Dazu integrieren wir Gl. (2.64) über das Plasmavolumen :

$$\int d^3r \int_{-\infty}^t \frac{dP_{abs}}{dV} = \sum_s \int d^3r \int d^3v \frac{\omega_{ps}^2}{4\pi} F_{M,s}(v^2, \vec{r}_{gs}) \cdot \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega^* t'} \vec{E}^*(\vec{r}'_s) \cdot \frac{\vec{v}'_s}{v_{ths}} \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-i\omega t''} \vec{E}(\vec{r}''_s) \cdot \frac{\vec{v}''_s}{v_{ths}} \right\} \quad (2.70)$$

Unter Ausnutzung der Invarianz des Phasenraumvolumens, $d^3r d^3v = d^3r' d^3v'$ ist diese Gleichung nach Ausführung der Integration im Geschwindigkeitsraum und

Zeitdifferentiation äquivalent zu :

$$\int d^3r \frac{dP_{abs}}{dV} = \frac{1}{2} \int d^3r \operatorname{Re} (\vec{E}^*(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r})) \quad (2.71)$$

Die Differenz zwischen dP_{abs}/dV und $\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J})$ kann also nur die Divergenz eines Vektors sein.* In Anhang A wird ein anderer Beweis dargestellt, in dem auch die genaue Form dieses kinetischen Flußvektors im heißen Plasma hergeleitet wird²⁷.

In einem Plasma ohne Gradienten entlang magnetischer Feldlinien kann man das Wellenfeld als Superposition von Partialwellen mit gegebenen parallelen Wellenzahlen k_{\parallel} darstellen (vgl. Kapitel 2.) und Gln. (2.67–2.69) in algebraische Form bringen :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{abs}^{i1}}{dV} &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} 2\gamma \sum_{\text{Ionen}} \frac{\omega_{pi}^2}{16\pi} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi}v_{thi}} \left| \sum_{k_{\parallel}} \frac{E_+(k_{\parallel})}{\omega - \Omega_{ci} - k_{\parallel}v_{\parallel} + i\gamma} \right|^2 \\ &= \sum_{\text{Ionen}} \sum_{k_{\parallel}} \frac{\omega_{pi}^2}{8\pi\omega} \sqrt{\pi} x_{0,i} e^{-x_{1,i}^2} |E_+(k_{\parallel})|^2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{abs}^{i2}}{dV} &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} 2\gamma \frac{c^2}{16\pi} \sum_{\text{Ionen}} \beta_i \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi}v_{thi}} \left| \sum_{k_{\parallel}} \frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_+^* E_+(k_{\parallel}))}{\omega - 2\Omega_{ci} - k_{\parallel}v_{\parallel} + i\gamma} \right|^2 \\ &= \sum_{\text{Ionen}} \sum_{k_{\parallel}} \frac{c^2}{8\pi\omega} \beta_i \sqrt{\pi} x_{0,i} e^{-x_{2,i}^2} |\vec{\nabla}_{\perp} \cdot (\vec{u}_+^* E_+(k_{\parallel}))|^2 \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{abs}^e}{dV} &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} 2\gamma \frac{\omega_{pe}^2}{8\pi} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{the}^2}}{\sqrt{\pi}v_{the}} \left\{ \frac{1}{2} \left| \sum_{k_{\parallel}} \frac{v_{\parallel}}{v_{the}} \frac{E_{\parallel}(k_{\parallel})}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} + i\gamma} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left| \sum_{k_{\parallel}} \frac{v_{\parallel}}{v_{the}} \frac{\vec{u}_{\parallel} E_{\parallel}(k_{\parallel}) - \frac{v_{the}}{\Omega_{ce}} \vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{E}_{\perp}(k_{\parallel})}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} + i\gamma} \right|^2 \right\} \\ &= \sum_{k_{\parallel}} \frac{\omega_{pe}^2}{8\pi\omega} \sqrt{\pi} e^{-x_{0,e}^2} \left\{ x_{0,e}^3 |E_{\parallel}(k_{\parallel})|^2 \right. \\ &\quad \left. + x_{0,e} \left| x_{0,e} \vec{u}_{\parallel} E_{\parallel}(k_{\parallel}) - \frac{v_{the}}{\Omega_{ce}} \vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{E}_{\perp}(k_{\parallel}) \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.74)$$

*Für diese elegante Form des Beweises bin ich Herrn Prof. Pfirsch dankbar.

wobei die Identität

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{2\gamma}{\omega} \left\{ \frac{\omega}{\omega - n\Omega_{cs} - k_{\parallel} v_{ths} + i\gamma} \right\} \left\{ \frac{\omega}{\omega - n\Omega_{cs} - k'_{\parallel} v_{ths} - i\gamma} \right\} = \begin{cases} 2\pi\delta\left(\frac{\omega - n\Omega_{cs} - k_{\parallel} v_{ths}}{\omega}\right), & \text{wenn } k_{\parallel} = k'_{\parallel} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.75)$$

benutzt wurde. Gln.(2.72–2.74) enthalten keine Interferenzterme zwischen verschiedenen Partialwellen. Die Absorption entlang einer magnetischen Feldlinie ist daher in einem thermischen, stoßfreien Plasma ohne Gradienten entlang \vec{B}_0 konstant und hängt nicht von der lokalen Amplitude des Wellenfeldes ab.

Wenn die thermische Bewegung der Teilchen vernachlässigbar wird, ist der Grenzübergang $\gamma \rightarrow 0$ in Gln. (2.72–2.74) nicht mehr gerechtfertigt, da dann auch für beliebig kleine Stoßfrequenzen die mittlere freie Weglänge gegen null gehen würde. In diesem Fall muß ein kleines aber endliches γ angenommen werden, das eine effektive Stoßfrequenz repräsentiert. In den Nennern kann dann $k_{\parallel} v_{\parallel}$ gegen $i\gamma$ vernachlässigt werden, und die FLR-Terme verschwinden. In diesem Grenzfall erhält man :

$$\frac{dP_{abs}^i}{dV} = \sum_{\text{Ionen}} \frac{\omega_{pi}^2}{8\pi} \frac{\gamma |E_+|^2}{(\omega - \Omega_{ci})^2 + \gamma^2} \quad (2.76)$$

$$\frac{dP_{abs}^e}{dV} = \frac{\omega_{pe}^2}{8\pi} \frac{\gamma |E_{\parallel}|^2}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (2.77)$$

Das ist aber gerade $\frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J})$ in einem "kalten" Plasma mit Stoßdämpfung, also das erwartete Ergebnis. Es gilt allgemein, daß in Plasmen, in denen die mittlere freie Weglänge klein gegen die Wellenlänge ist, dP_{abs}/dV durch $\frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J})$ gegeben ist.

3. ICRH im Tokamak³¹

Das statische Magnetfeld \vec{B}_0 eines Tokamaks hat eine von den Strömen in den äußeren Spulen erzeugte Toroidalkomponente B_0^{tor} und eine im wesentlichen durch den Plasmastrom erzeugte Poloidalkomponente B_0^{pol} , die um einen Faktor der Größenordnung 10 kleiner als B_0^{tor} ist. Die Feldlinien winden sich also helikal auf magnetischen Flächen um die magnetische Achse des Tokamaks. Bei der Berechnung von B_0^{pol} wird angenommen, daß sich die Plasmastromdichte im Tokamak wie die Leitfähigkeit nach Spitzer, also proportional zu $T_e^{3/2}(r)$ bei gegebenem Temperaturprofil, verhält.

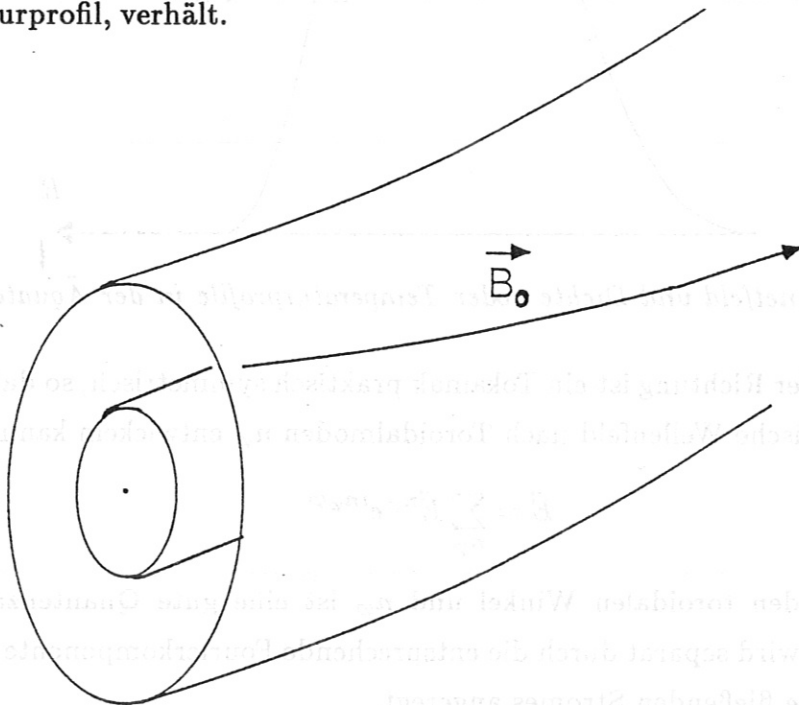


Fig. 3.1. Magnetische Flußflächen im Tokamak.

Die Anzahl der toroidalen Umläufe pro poloidalem Umlauf bezeichnet man dabei als den Sicherheitsfaktor q . Dichte und Temperatur sind auf einer Flußfläche näherungsweise konstant, haben also praktisch nur radiale Gradienten.

Dagegen verhält sich die Stärke des statischen Magnetfeldes wie

$$|\vec{B}_0| \sim 1/R, \quad (3.1)$$

wobei R den Abstand zur vertikalen Achse bezeichnet. $|\vec{B}_0|$ hat also hauptsächlich horizontale Gradienten.

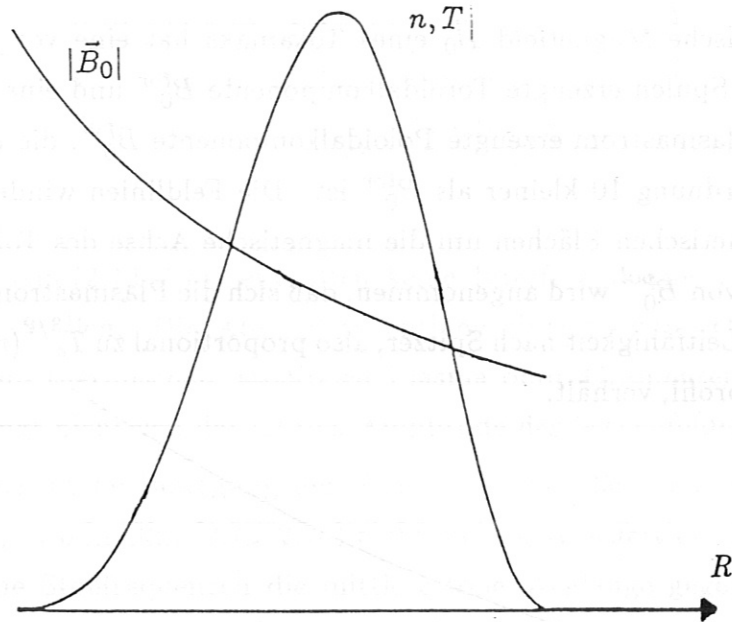


Fig. 3.2. Magnetfeld und Dichte- oder Temperaturprofile in der Äquatorialebene

In toroidaler Richtung ist ein Tokamak praktisch symmetrisch, so daß man das elektromagnetische Wellenfeld nach Toroidalmoden n_φ entwickeln kann :

$$\vec{E} = \sum_{n_\varphi} \vec{E}^{n_\varphi} e^{in_\varphi\varphi} \quad (3.2)$$

φ bezeichnet den toroidalen Winkel und n_φ ist eine gute Quantenzahl. Jede Toroidalmode wird separat durch die entsprechende Fourierkomponente des in der ICRH-Antenne fließenden Stromes angeregt.

In konventionellen ICRH-Experimenten ist die Antenne so konstruiert, daß die schnelle magnetoakustische Welle von außen angeregt wird. Der Strom fließt außer in den Zu- und Rückführungen ("feeders" und "shorts") in poloidaler Richtung, also näherungsweise in einer magnetischen Flußfläche senkrecht zu \vec{B}_0 . Das Stromprofil ist praktisch ausschließlich durch die Eigenschaften der Antenne und kaum durch die Antwort des Plasmas bestimmt, so daß eine selbstkonsistente Berechnung^{Jacant} nicht erforderlich ist. In einigen Experimenten (z.B. TEXTOR, JET, JFT-2M) hat die Antenne zwei Zentralleiter, in denen der Strom wahlweise parallel (Phase=0, Dipolantenne) oder antiparallel (Phase= π , Quadrupolantenne) fließen kann (In der Literatur werden für solche Antennen auch oft die

Bezeichnungen Monopol- bzw. Dipolantennen benutzt). Dadurch werden unterschiedliche n_φ -Spektren angeregt und man kann damit k_{\parallel} beeinflussen ("k_{||}-shaping"). Das ist insofern wichtig, als die Kopplung der Antennenleistung an das Plasma und die "single pass" Absorption, d.h. der Anteil der Energie einer Welle, der pro Durchgang durch eine Ionenzyklotronresonanz absorbiert wird, stark von k_{\parallel} abhängen. Das wird insbesondere in Kapitel 4 ausführlich diskutiert. Unmittelbar vor dem Zentralleiter ist ein Faradayschirm angebracht, der die Parallelkomponente des elektrischen Feldes abschirmt und damit die Anregung langsamer Wellen verhindert und gleichzeitig die Antenne vor dem Plasma schützt.

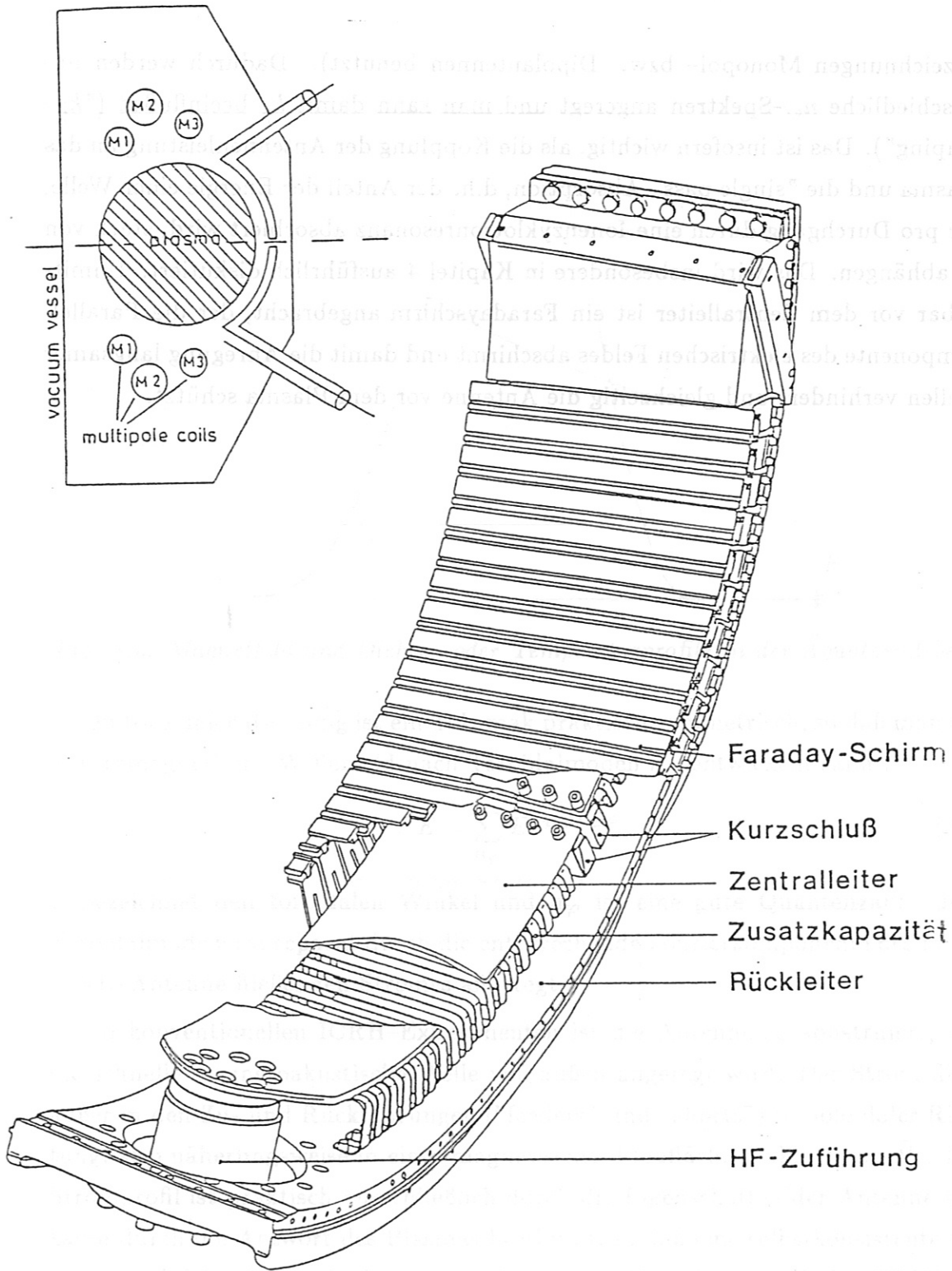


Fig. 3.3. Schematischer Aufbau einer ASDEX ICRH-Antenne.

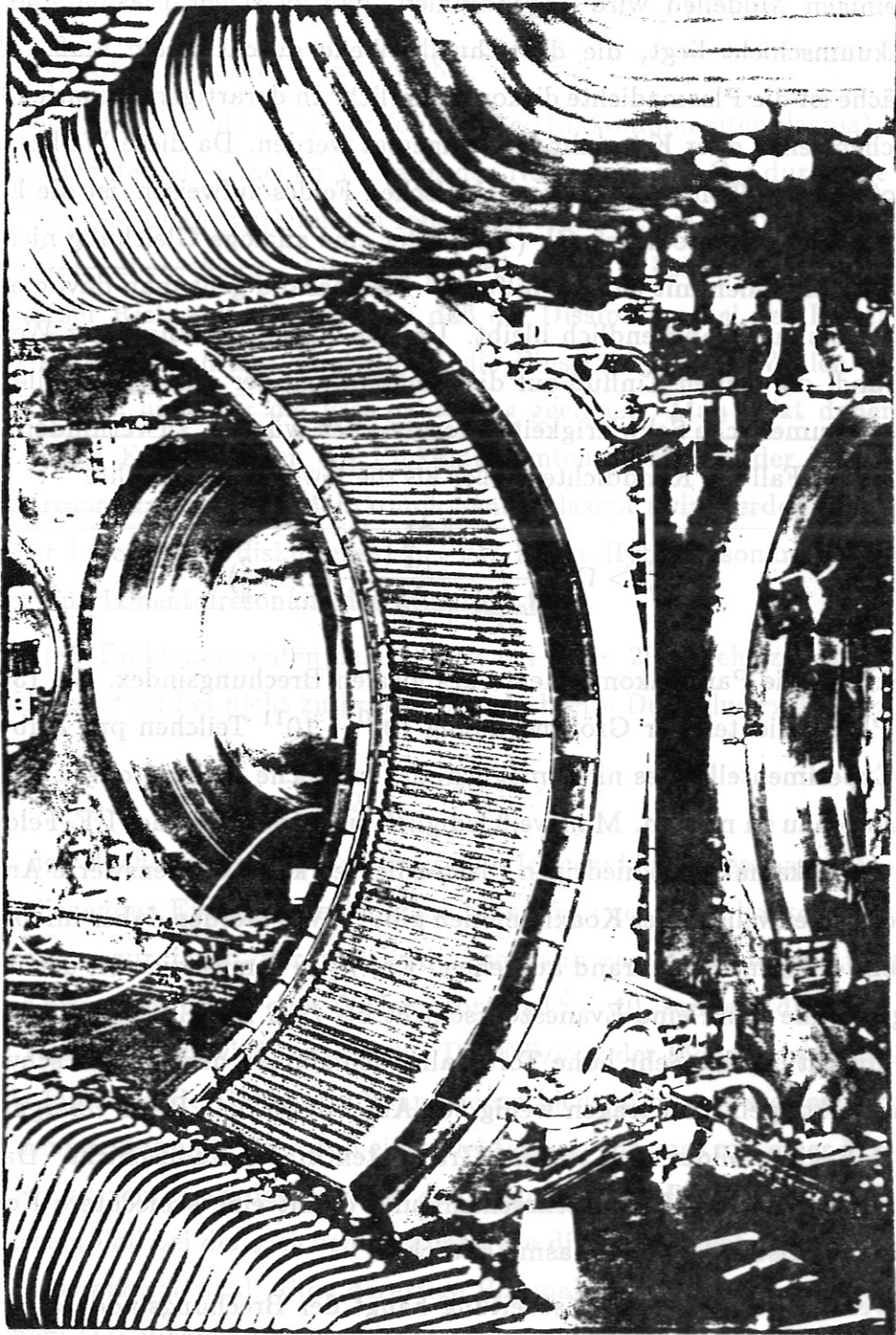


Fig. 3.4. Photographie einer eingebauten ICRH-Antenne in ASDEX.

In einigen Modellen wird angenommen, daß zwischen Plasma und Wand eine Vakuumschicht liegt, die die schnelle Welle durchtunneln muß. An der Grenzfläche ist die Plasmadichte diskontinuierlich. In derartigen Szenarien können Oberflächenwellen oder Koaxialmoden angeregt werden. Da diese Wellen eine relativ große Parallelkomponente des elektrischen Feldes aufweisen, ist die Elimination dieser Komponente durch Gl. (2.40) oder eine analoge Gleichung nicht mehr möglich. In Modellen mit einem "diffusen" Plasmarand geht man davon aus, daß die Dichte bis zur Wand endlich bleibt. Um die Anregung langsamer Wellen am Plasmarand, die keinen Einfluß auf die Einkopplung der schnellen Welle haben, aber große numerische Schwierigkeiten verursachen würden, zu verhindern, wählt man in jedem Fall die Randdichte größer als die lower hybrid Dichte³³ :

$$\omega_{pe}^2 > \Omega_{ce}^2 \frac{1 - \frac{\Omega_{ci}^2}{\omega^2}}{\frac{\Omega_{ci}\Omega_{ce}}{\omega^2} + \frac{\Omega_{ci}^2}{\omega^2} - 1} (1 - n_{\parallel}^2) \quad (3.3)$$

n_{\parallel} bezeichnet die Parallelkomponente des lokalen Brechungsindex. Gl. (3.3) entspricht Plasmadichten der Größenordnung $10^{10} - 10^{11}$ Teilchen pro Kubikzentimeter. Experimentell ist es nicht möglich, das wirkliche Dichteprofil in der Randschicht so genau zu messen. Man weiß lediglich aus Messungen des HF-Feldes, daß es selbst in Tokamaks mit niedrigen Plasmadichten keine nennenswerte Anregung von Oberflächenwellen oder Koaxialmoden gibt³⁴. Wir werden daher im folgenden von einem diffusen Plasmarand ausgehen. Für $n_{\parallel}^2 > 1$ muß die von der Antenne angeregte Welle dann eine Evaneszenzschicht bis zum niedrig-Dichte cut-off bei $n_{\parallel}^2 = \hat{R}$ durchtunneln. Sehr hohe Toroidalmoden können deshalb nur schwach an das Plasma koppeln und tragen wenig zur Absorption bei. Beim Übergang vom L- ins H-Regime bilden sich steilere Gradienten in der Randschicht. Das kann eine Verbreiterung der Evaneszenzschicht und damit eine schlechtere Kopplung der Antennenleistung an das Plasma bewirken.

Im Verlauf der weiteren Ausbreitung hängt der Brechungsindex der magnetoakustischen Welle, Gl. (2.56), dann außer in der unmittelbaren Umgebung einer Resonanz oder eines cut-offs, die im allgemeinen in der Nähe der magnetischen Achse liegen, im wesentlichen nur noch von der Dichte ab. Das bewirkt eine Fokussierung der schnellen Welle zum Plasmazentrum hin. (Dieser Effekt wird in der "Parabolischen" Näherung³⁵, die wir hier nicht näher diskutieren wollen,

ausgenutzt.)

3.1. MÖGLICHE HEIZUNGSSZENARIOEN.

In einem Plasma mit nur einer Ionensorte (Einkomponentenplasma) wird die E_+ -Komponente der schnellen Welle in der Nähe von $\omega = \Omega_{ci}$ durch die in gleicher Richtung resonant gyrierenden Ionen insbesondere bei niedrigen Temperaturen sehr stark abgeschirmt. Mit anderen Worten, die Leitfähigkeit des Plasmas wird in dieser Richtung sehr groß, so daß die Dissipation bei der Fundamentalresonanz sehr schwach ist. Deshalb ist die Einstrahlung von Wellen in diesem Frequenzbereich nicht für die Plasmaheizung geeignet. Man heizt daher in den meisten ICRH Experimenten ein Einkomponentenplasma bei der harmonischen Zyklotronresonanz oder ein Mehrkomponentenplasma (wir werden hier nur den Fall zweier Ionensorten diskutieren) bei der Ionen-Hybridresonanz¹², die in der Nähe der Fundamentalresonanz der Minorität liegt.

In einem Einkomponentenplasma, das bei $\omega \simeq 2\Omega_{ci}$ geheizt wird, hat die Dispersionsrelation bei nicht zu großer Dopplerbite Doppelwurzeln, wenn²⁰ :

$$1 - \frac{\omega}{2\Omega_{ci}} \simeq 2(2 \pm \sqrt{3})\beta_i \quad (3.4)$$

also auf der Hochfeldseite der harmonischen Ionenzyklotronresonanz. In der dazwischen liegenden Evaneszenzschicht sind die Lösungen komplex konjugiert. Modenkonzersion zur Ionen-Bernsteinwelle, die dann zur Hochfeldseite propagiert, wird hier also nicht durch eine Wellenresonanz ($\hat{S} = 0$), sondern dadurch, daß $\hat{\lambda}_2$ bei $\omega \simeq 2\Omega_{ci}$ resonant wird, verursacht. Die Effizienz der Modenkonzersion nimmt dabei als Funktion der Dicke der Evaneszenzschicht, d.h. mit steigendem β_i , ab. Dieses Szenario kann als Grenzfall eines Deuterium-Plasmas mit einer Wasserstoff Minorität betrachtet werden, das bei der harmonischen Resonanz der Majorität, die in diesem Fall bei der gleichen Frequenz wie die Fundamentalresonanz der Minorität liegt, geheizt wird. Eine derartige Plasmakomposition ist sehr realistisch, da in einem D^+ -Plasma praktisch immer Spuren von H^+ vorhanden sind.

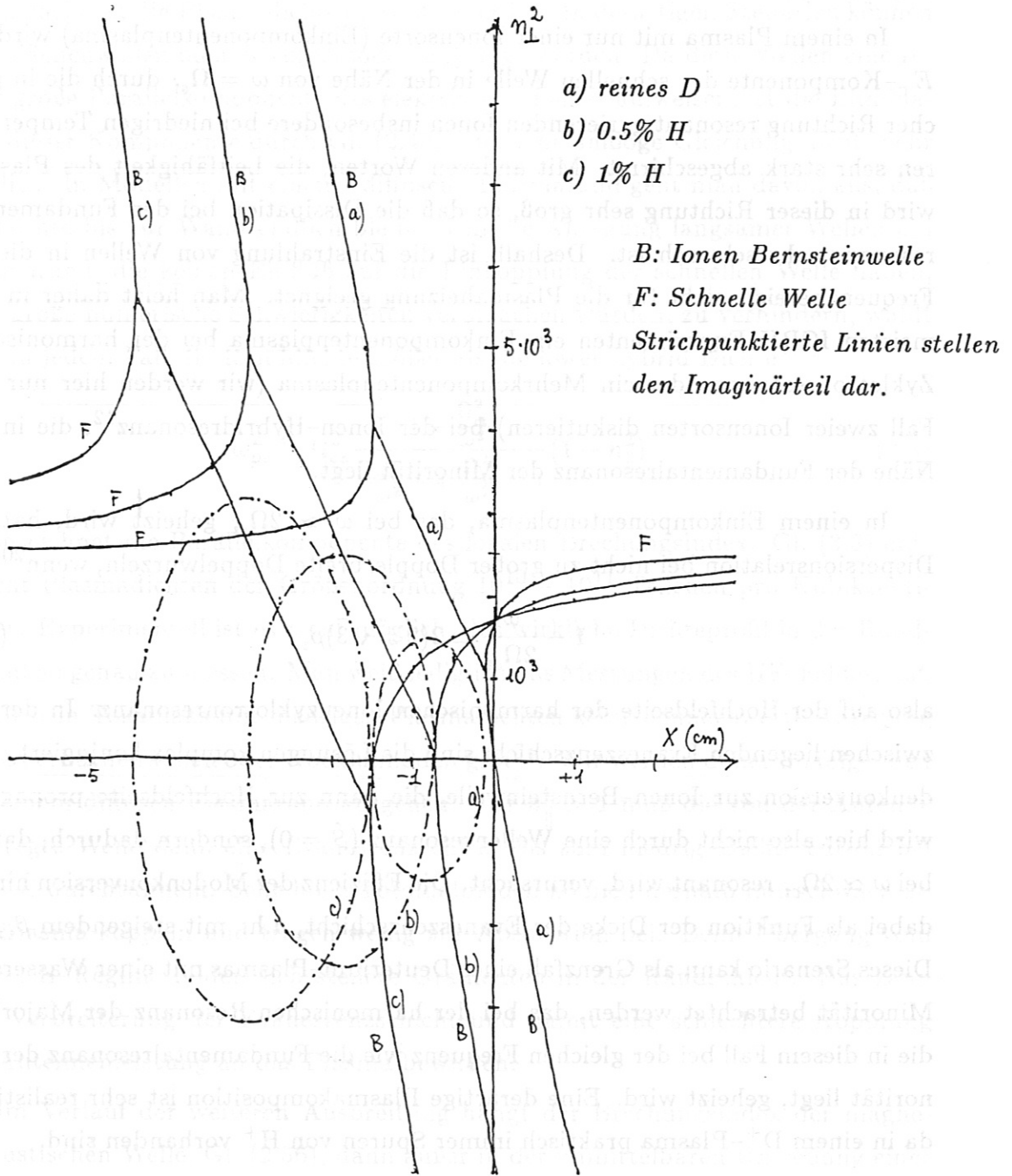


Fig. 3.5. Dispersionskurven für ein Deuteriumplasma mit einer Wasserstoffminorität für eine typische JET-Entladung bei verschiedenen Minoritätskonzentrationen.

In einem Plasma mit zwei Ionensorten gibt es eine Ion-Ion-Hybridresonanz und einen cut-off der schnellen Welle, dazwischen liegt eine Evaneszenzschicht³⁵. Für senkrechte Ausbreitung erhält man¹⁶ :

$$\left(\frac{\omega^2}{\Omega_{c2}^2}\right)_{Res} = \frac{1 + \nu_2 Z_2 \left(\frac{Z_1/A_1}{Z_2/A_2} - 1\right)}{1 + \nu_2 Z_2 \left(\frac{A_1/Z_1}{A_2/Z_2} - 1\right)} \quad (3.5)$$

und

$$\left(\frac{\omega}{\Omega_{c2}}\right)_{c.o.} = 1 + \nu_2 Z_2 \left(\frac{Z_1/A_1}{Z_2/A_2} - 1\right) \quad (3.6)$$

wobei $\nu_i = n_i/n_e$ die relativen Konzentrationen und A_i die Atommassen der Ionen bezeichnen. Wenn Spezies 2 die Minorität ist, d.h. $\nu_2 \ll \nu_1$, befindet sich das Resonanz-cut-off-Paar in der Nähe von $\omega = \Omega_{c2}$ und zwar für $Z_2/A_2 > Z_1/A_1$ auf der Hochfeldseite und für $Z_2/A_2 < Z_1/A_1$ auf der Niedrigfeldseite. Der cut-off liegt dabei immer bei niedrigerer Magnetfeldstärke als die Resonanz.

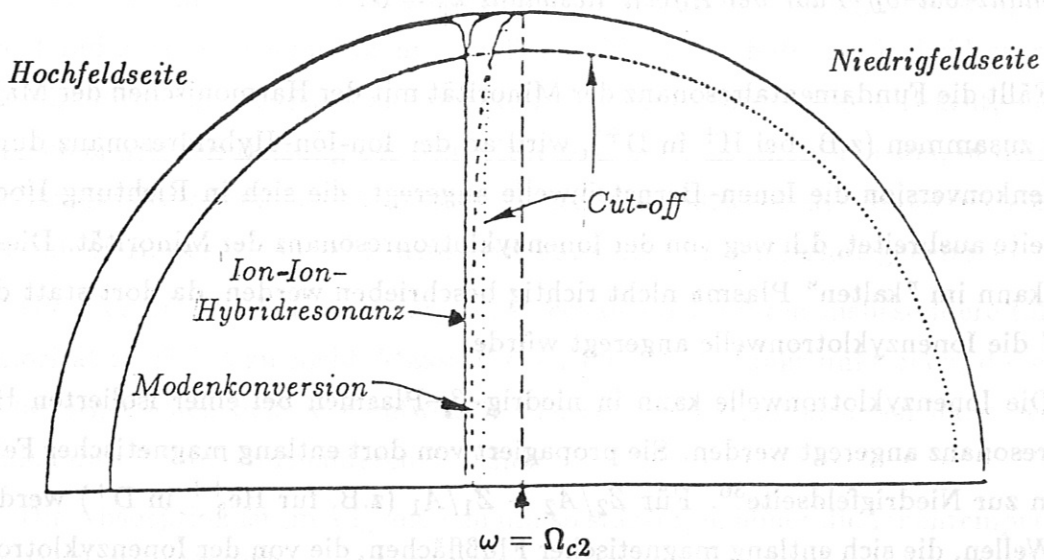


Fig. 3.6. Topologie kritischer Flächen für ein Minoritätsheizungszenario, in dem $Z_2/A_2 > Z_1/A_1$, $k_{\parallel} \neq 0$.

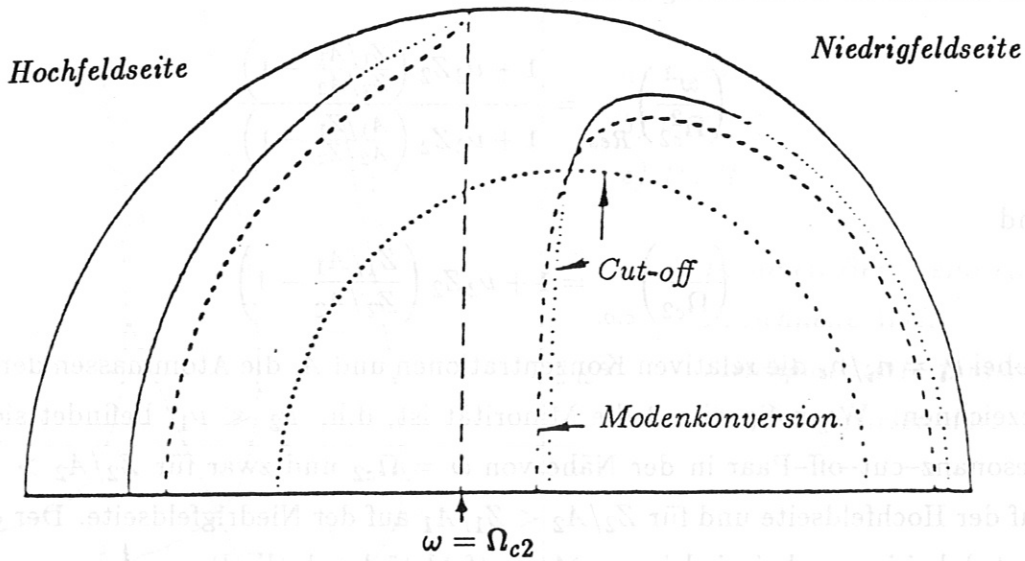


Fig. 3.7. Topologie kritischer Flächen für ein Minoritätsheizungszenario, in dem $Z^2/A_2 < Z_1/A_1$, $k_{\parallel} \neq 0$. Für niedrige Dichten am Plasmarand erkennt man das Resonanz-cut-off-Paar der Alfvén-Resonanz $k_{\parallel}^2 = \hat{S}$.

Fällt die Fundamentalresonanz der Minorität mit der Harmonischen der Majorität zusammen (z.B. bei H^+ in D^+), wird an der Ion-Ion-Hybridresonanz durch Modenkonzersion die Ionen-Bernsteinwelle angeregt, die sich in Richtung Hochfeldseite ausbreitet, d.h. weg von der Ionenzyklotronresonanz der Minorität. Dieser Fall kann im "kalten" Plasma nicht richtig beschrieben werden, da dort statt der IBW die Ionenzyklotronwelle angeregt würde.

Die Ionenzyklotronwelle kann in niedrig- β_i -Plasmen bei einer isolierten Hybridresonanz angeregt werden. Sie propagiert von dort entlang magnetischer Feldlinien zur Niedrigfeldseite³⁶. Für $Z_2/A_2 > Z_1/A_1$ (z.B. für He_3^{++} in D^+) werden die Wellen, die sich entlang magnetischer Flußflächen, die von der Ionenzyklotronresonanz der Minorität bzw. deren Dopplerbite geschnitten werden, ausbreiten, dort absorbiert. Lediglich die Wellen, die in unmittelbarer Nähe der magnetischen Achse angeregt werden, bilden auf diskreten magnetischen Flußflächen stehende Wellen. Wegen der großen parallelen Wellenzahl der Ionenzyklotronwelle und der damit verbundenen starken Dopplerverbreiterung der Zyklotronresonanzen treten

diese stehenden Wellen aber nur für relativ hohe Minoritätskonzentrationen auf und selbst dann können sie durch Elektronen Landaudämpfung unterdrückt werden.

Für $Z_2/A_2 > Z_1/A_1$ (z.B. für He_3^{++} in H^+) propagieren die Ionenzyklotronwellen von der Fundamentalresonanz der Minorität weg²² und können dann, falls die Elektronen Landaudämpfung nicht zu stark ist, stehende Wellen entlang magnetischer Flußflächen bilden.

In den hier diskutierten Heizungsszenarien gibt es folgende Absorptionsmechanismen : In einem elektromagnetischen Wellenfeld mit $k_{\perp} \neq 0$ und einer Frequenz, die dem doppelten (oder höheren, ganzzahligen Vielfachen) der Ionenzyklotronfrequenz entspricht, werden Ionen, deren Larmorradius endlich ist, mit jedem Umlauf um eine magnetische Feldlinie beschleunigt, d.h. sie absorbieren Energie. Die Dissipation bei höheren Harmonischen ist jeweils um einen Faktor β_i kleiner und daher für ICRH unbedeutend.

In der Nähe einer Ion-Ion-Hybridresonanz schwingen die verschiedenen Ionenwolken gegeneinander und erzeugen ein elektrostatisch polarisiertes Feld. Wenn die Minorität eine sehr kleine Konzentration hat (typisch einige Prozent), liegt ihre Fundamentalresonanz in unmittelbarer Nachbarschaft der Hybridresonanz. Die Abschirmung der E_+ -Komponente ist dann erheblich abgeschwächt, so daß es zu einer starken Heizung der Minorität kommt¹². In einem Plasma, in dem die Fundamentalresonanz der Minorität mit der Harmonischen der Majorität zusammenfällt (z.B. bei H^+ in D^+), wird dort außerdem die Majorität geheizt.

Die hier beschriebenen Absorptionsmechanismen führen insbesondere für die Minorität zunächst zu nicht-Maxwellschen Ionenverteilungsfunktionen, die einen hochenergetischen Schwanz aufweisen. Diese Ionen thermalisieren dann relativ schnell durch Stöße mit anderen Teilchen.

Die Absorption ist im allgemeinen um so stärker, je höher die Iontemperatur ist. Deshalb ist ICRH besonders wirkungsvoll, wenn sie auf ein durch Neutralinjektion vorgeheiztes Plasma angewandt wird.

Ionenzyklotroneindämpfung und Modenkonzersion sind konkurrierende Prozesse. Liegt der Konversionspunkt außerhalb der Dopplerbreite der Zyklotronresonanz, wird die Modenkonzersion nicht durch Ionenzyklotroneindämpfung unterdrückt

(Modenkonzersions-Regime). Ansonsten wird der größte Teil der Energie, die in Modellen ohne Dämpfung auf die langsame Welle übertragen würde, von Ionen absorbiert (Minoritätsregime). Schließlich werden die angeregten langsamen Wellen durch Elektronen Landaudämpfung, die aber insbesondere für niedrige Temperaturen recht schwach sein kann, bzw. in einigen Szenarien durch Ionen (vgl. Kap. 5.5) gedämpft. Die konvertierte Energie kann also als Energiesenke betrachtet werden.

Bei Elektronentemperaturen von einigen keV ist außerdem die direkte Dämpfung der schnellen Welle durch TTMP, ein FLR-Effekt, der durch die $\text{grad}|\vec{B}|$ -Drift der Elektronen im Magnetfeld der Welle verursacht wird, ein wichtiger Absorptionsmechanismus.

In kleineren Tokamaks können bei Szenarien mit wenig Absorption (d.h. niedrige Temperatur, kleines n_φ , wenig Modenkonzersion) die Randbedingungen, im allgemeinen nimmt man perfekt leitende Toruswände an, wichtig werden, so daß globale Eigenmoden der schnellen Welle angeregt werden.

3.2. SIMULATION VON ICRH IM TOKAMAK.

Die Struktur des statischen Magnetfeldes eines Tokamaks erlaubt es nicht, jedem n_φ eine parallele Wellenzahl k_{\parallel} zuzuordnen. Jede Toroidalmode des elektromagnetischen Wellenfeldes genügt daher einer partiellen Integrodifferentialgleichung in zwei Dimensionen.

In der Äquatorialebene sind Magnetfeld- und Dichtegradienten parallel (vgl. Fig. 3.1). Zur Lösung der Wellengleichung in dieser Region gibt es mehrere ein-dimensionale "slab"-Modelle^{8,10,38,39,40,41} in denen angenommen wird, daß sich $\vec{E}(\vec{r})$ in den ignorablen Vertikal- und Parallelkoordinaten wie $e^{i(k_y y + k_z z)}$ mit konstanten k_y und $k_z = n_\varphi/R$ verhält⁴². Außerdem vernachlässigt man B_0^{Pol} , so daß $k_{\parallel} = k_z$. In dieser vereinfachten Geometrie genügt das elektromagnetische Feld einer Differentialgleichung in der Horizontalkoordinate x . Die verschiedenen, oben zitierten Modellen unterscheiden sich meist in den numerischen Methoden und den berücksichtigten FLR-Termen. Mit ihrer Hilfe ist es näherungsweise möglich, globale Eigenmoden zu finden und die Kopplung der Antennenleistung an das Plasma zu berechnen. Die Grenzen dieser Modelle sind offensichtlich.

Die ersten Versuche, ICRH in voller Tokamakgeometrie zu simulieren, beruh-

ten darauf, die Wellengleichung in der WKB-Näherung zu lösen. In mehrdimensionaler Geometrie führt das zu "Ray-Tracing" (siehe z.B. Code "RAYIC" von M. Brambilla⁴³). Diese Techniken sind nur in größeren Tokamaks, in denen die Wellenlänge der magnetoakustischen Welle klein gegen den Plasmaradius ist, anwendbar. Außerdem bricht die WKB-Approximation in der Nähe von Resonanzen zusammen. Daher müssen diese Modelle dort durch meist eindimensionale analytische oder numerische Lösungen der vollen Wellengleichung ergänzt werden. Im nächsten Kapitel wird ein Code vorgestellt, mit dessen Hilfe berechnet werden kann, welcher Anteil der Energie einer auf eine Resonanzschicht einfallenden schnellen Welle absorbiert wird bzw. als schnelle oder langsame Welle transmittiert oder reflektiert wird. Ray tracing ist nur dann gerechtfertigt, wenn die Absorption pro Durchgang durch eine Ionenzyklotronresonanz ("single-pass Absorption") so groß ist, daß sich keine globalen Eigenmoden der schnellen Welle einstellen können. Das ist aber selbst in großen Tokamaks wie JET, wo die single-pass Absorption wegen der hohen Ionentemperaturen recht hoch sein sollte, nicht immer gegeben.

Diese Schwierigkeiten haben die Entwicklung von "full wave" codes motiviert, die die Wellengleichung in voller Tokamakgeometrie, d.h. für jede Toroidalmode in zwei Dimensionen, lösen. Um die mit dem nichtlokalen Charakter der Plasmaantwort verbundenen Probleme zu umgehen, wurde in den bisher existierenden Codes entweder ein "kaltes" Plasma benutzt^{44,45} (die Konsequenzen dieser Approximation haben wir in Kapitel 2 und 3.1 diskutiert), oder B_0^{Pol} vernachlässigt^{46,47}, so daß $k_{\parallel} = n_{\varphi}/R$ ist. In dieser Approximation wird aber die kinetische Absorption insbesondere langsamer Wellen nicht richtig beschrieben. Der in Kapitel 5 beschriebene Code löst erstmals die Integrodifferentialgleichung in voller Tokamakgeometrie für ein "warmes" Plasma und ermöglicht damit eine korrektere Berechnung der Leistungsdepositionsprofile und die Darstellung der Ionen-Bernsteinwelle. Ein weiteres Problem stellt die Auflösung der kurzen Wellenlängen dar. So ist in den von Fukayama et. al. veröffentlichten Fällen⁴⁶ die Darstellung der IBW recht schlecht. In dem Code von Smithe et al.⁴⁷ wird deshalb mit Hilfe von "order reduction"²¹ die Wellengleichung unter Ausnutzung der Lösungen der lokalen Dispersionsrelation so verändert, daß die IBW nicht mehr auftritt. Es ist aber möglich, die in diesen Zweig durch Modenkonzersion übertragene Energie abzuschätzen.

Unser Code erlaubt bei Maschinen der Größenordnung von ASDEX oder kleiner eine zufriedenstellende Auflösung der IBW innerhalb akzeptabler Rechenzeiten.

In dem Code von Edery et al. werden sämtliche langsamen Wellen numerisch unterdrückt. Dieses Verfahren führt zum gleichen Ziel wie die von Smithe et al.⁴⁷ angewandte Methode. Der Unterschied ist lediglich, daß physikalische bzw. numerische Überlegungen Ausgangspunkt sind.

In Kapitel 5. werden wir unter anderem die Ergebnisse unseres zweidimensionalen Codes mit denen des eindimensionalen Modells von M. Brambilla vergleichen, das sämtliche FLR-Korrekturen bis zur 2. Ordnung enthält und in dem die lokale Dissipation im Rahmen der slab-Geometrie richtig beschrieben wird.

4. Ein eindimensionales Modell zur Simulation des single pass Verhaltens in großen Tokamaks⁴⁸.

In diesem Kapitel wird ein eindimensionaler Code vorgestellt, der mit Hilfe von finiten Elementen die Wellengleichung in der Nähe einer resonanten Schicht löst. Grundlage ist ein von M. Brambilla und M. Ottaviani entwickeltes Modell²². Die Dicke der Schicht ist so gewählt, daß an den Rändern X_A und X_B die WKB-Approximation gültig ist. Als Randbedingung nehmen wir an, daß die schnelle Welle unter einem durch Ray-Tracing gegebenen Winkel von der Hoch- oder Niedrigfeldseite einfällt. Berechnet werden die Transmissions- bzw. Reflektionskoeffizienten der schnellen Welle, die Energie, die durch Modenkonversion auf langsame Wellen übertragen wird sowie die von den Ionen und Elektronen absorbierte Energie. Dabei gehen wir von einem "warmen" Plasma aus, das Ionenzyklotrondämpfung bei der fundamentalen und harmonischen Resonanz sowie Elektronen TTMP und Landaudämpfung bis zur ersten Ordnung m_e/m_i enthält. Im Gegensatz zu anderen uns bekannten eindimensionalen Modellen^{8,10,14,40,49,41} berücksichtigen wir außerdem noch die Poloidalkomponente des statischen Magnetfelds \vec{B}_0 .

4.1. EINDIMENSIONALE BESCHREIBUNG DER RESONANTEN SCHICHT

In der Nähe einer Ionenzyklotronresonanz ändert sich wegen der Variation von $|\vec{B}_0|$ die Plasmaantwort sehr schnell als Funktion der Horizontalen koordinate x (x bezeichnet hier den Abstand von der Vertikalachse des Tokamaks), während sie nur relativ schwach von der Vertikal koordinate y abhängt. Wir machen daher folgenden Ansatz^{42,22}:

$$\vec{E}(\vec{r}) \simeq \vec{E}(x) \cdot e^{i(n_\varphi \varphi + k_y y)} \quad (4.1)$$

mit $k_y = \text{konst.}$ Die schnelle Welle fällt also bei gegebener Toroidal mode unter dem Winkel $\tan \phi = k_y/k_x$ in der Poloidalebene, wobei k_x Lösung der Dispersionsrelation am Rand der resonanten Schicht ist, ein. Die Lage des Intervalls innerhalb der Poloidalebene wird durch den Winkel τ , der in Fig. 4.1 dargestellt ist, festgelegt. Bei kreisförmigen Flußflächen ist τ gleich dem Poloidalwinkel. Die Einheitsvektoren $\vec{u}_\parallel, \vec{u}_\pm$ haben dann die Form:

$$\vec{u}_\parallel = \cos \Theta \vec{e}_\varphi + \sin \Theta (\cos \tau \vec{e}_y - \sin \tau \vec{e}_x) \quad (4.2)$$

$$\vec{u}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\cos \tau \vec{e}_x + \sin \tau \vec{e}_y) \mp i(-\cos \Theta \sin \tau \vec{e}_x + \cos \Theta \cos \tau \vec{e}_y - \sin \Theta \vec{e}_\varphi) \right\} \quad (4.3)$$

wobei $\tan \Theta = B_0^{pol}/B_0^{tor}$ ist. Wir nehmen an, daß alle Terme außer denen, die bei $\omega = \Omega_{ci}$ bzw. $\omega = 2\Omega_{ci}$ resonant sind, innerhalb des Intervalls, in dem wir die Wellengleichung lösen, konstant sind. Die grösste Näherung ist dabei wahrscheinlich die Annahme $\tau = konst.$, d.h. die Vernachlässigung der Krümmung von magnetischen Flußflächen, die eine Beugung insbesondere der Ionenzyklotronwelle bewirkt. Für grössere Tokamaks wie z.B. JET, in denen die uns interessierende Schicht klein gegen die Grösse des Experiments ist, ist diese Approximation aber sicher gerechtfertigt.

4.2. EINE EINDIMENSIONALE WELLENGLEICHUNG.

Mit Hilfe der Operatoren

$$\partial_{\parallel} = \vec{u}_{\parallel} \cdot \vec{\partial} = i \cos \Theta \frac{n_\varphi}{R_0} + i \sin \Theta \cos \tau k_y - \sin \Theta \sin \tau \frac{d}{dx} \quad (4.4)$$

$$\partial_+ = (\vec{u}_+ \cdot \vec{\partial}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u \frac{d}{dx} + iv \right) \quad (4.5)$$

$$\partial_- = (\vec{u}_- \cdot \vec{\partial}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u^* \frac{d}{dx} + iv^* \right) \quad (4.6)$$

wobei

$$\begin{aligned} u &= \cos \tau - i \cos \Theta \sin \tau, \\ v &= \sin \tau k_y + i(\cos \Theta \cos \tau k_y - \sin \Theta \frac{n_\varphi}{R_0}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

und R_0 den Abstand der Mitte der Schicht von der Vertikalachse des Tokamaks bezeichnet, ergibt sich für $rot \ rot \vec{E}$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= [-(\partial_+ \partial_- + \partial_{\parallel}^2) E_+ + \partial_+ \partial_+ E_- + \partial_+ \partial_{\parallel} E_{\parallel}] \vec{u}_+ \\ &+ [(-\partial_+ \partial_- + \partial_{\parallel}^2) E_- + \partial_- \partial_- E_+ + \partial_- \partial_{\parallel} E_{\parallel}] \vec{u}_- \\ &+ [-2\partial_+ \partial_- E_{\parallel} + \partial_{\parallel} (\partial_+ E_- + \partial_- E_+)] \vec{u}_{\parallel} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Unter Vernachlässigung des Kreuzterms zwischen TTMP und ELD erhält man für $\vec{J}(\vec{E})$ im "warmen" Plasma:

$$\begin{aligned} \left(\vec{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \vec{J} \right) &= \hat{L}(E_+) \vec{u}_+ + \hat{R} E_- \vec{u}_- + \hat{P}(E_{\parallel}) \vec{u}_{\parallel} \\ &+ (2\partial_- \hat{\lambda}_2 (\partial_+ E_+) + 2\partial_+ \hat{\lambda}_0 (\partial_- E_+ - \partial_+ E_-)) \vec{u}_+ \\ &+ 2\partial_- \hat{\lambda}_0 (\partial_+ E_- - \partial_- E_+) \vec{u}_- \end{aligned} \quad (4.9)$$

Außerhalb der Äquatorialebene, d.h. für $\tau \neq 0$, hat \vec{B}_0 eine nichtverschwindende Horizontalkomponente und $\hat{L}, \hat{P}, \hat{\lambda}_2$ und $\hat{\lambda}_0$ sind Integraloperatoren. Im Fall der schnellen magnetoakustischen Welle ist die horizontale Nichtlokalität wegen der relativ großen Wellenlänge zumindest für große Toroidalmoden vernachlässigbar. Da TTMP wegen der Polarisierung nur die schnelle Welle dämpft und wenn \hat{L} und $\hat{\lambda}_2$ in den Bereichen, wo die langsame Welle auftritt, bereits asymptotisch, d.h. lokale Operatoren sind, kann bei der Berechnung dieser Terme folgende approximative konstante parallele Wellenzahl der schnellen Welle angenommen werden :

$$k_{\parallel} \simeq k_{\parallel,F} \simeq \cos \Theta \frac{n\varphi}{R_0} + \sin \Theta \cos \tau k_y \quad (4.10)$$

Mit der zusätzlichen Näherung

$$\int^{\tau} d\tau (\omega - n\Omega_{ci}) \simeq (\omega - n\Omega_{ci}) \cdot \tau$$

kann man dann Gln. (2.41–2.43) benutzen um $\hat{L}, \hat{\lambda}_2$ und $\hat{\lambda}_0$ durch algebraische Funktionen auszudrücken. Unter welchen Voraussetzungen diese Approximation gerechtfertigt ist, wird in Kapitel 5.3 ausführlich diskutiert. Der Imaginärteil von \hat{P} beschreibt ELD, ein Mechanismus, der praktisch nur langsame, elektrostatische Wellen betrifft. Wegen der kurzen Wellenlängen können die Beiträge der Horizontalkomponente des Wellenvektors zu k_{\parallel} in diesen Termen nicht vernachlässigt werden. Wir substituieren deshalb in Gl. (2.42)

$$k_{\parallel} \simeq k_{\parallel,S} \simeq \cos \Theta \frac{n\varphi}{R_0} + \sin \Theta \cos \tau k_y - \sin \Theta \sin \tau k_{x,S} \quad (4.11)$$

wobei

$$k_{x,S} = \pm \sqrt{\frac{\hat{S}}{\hat{\lambda}_2/2 + \sin^2 \Theta \sin^2 \tau}} \quad (4.12)$$

eine approximative Wurzel der Dispersionsrelation ist, die je nach Szenario die Ionen-Bernsteinwelle bzw. die Ionenzyklotronwelle beschreibt. Wir werden in diesem Kapitel diese Welle allgemein langsame Welle nennen. $k_{x,S}$ wird an den Intervallgrenzen berechnet. Wenn die langsame Welle bei X_A oder X_B evaneszent ist, setzen wir auf der entsprechenden Seite der Resonanz $k_{\parallel,S} = k_{\parallel,F}$. (In Kapitel 4.3.2 wird beschrieben, wie das Intervall $[X_A, X_B]$, in dem wir die Wellengleichung lösen wollen, bestimmt wird. Hier sei nur soviel gesagt, daß immer eine

fundamentale oder harmonische Ionenzyklotronresonanz in der Mitte des Intervalls liegt.) Das Vorzeichen ist so zu wählen, daß es einer vom Modenkonzentrationspunkt weglaufenden Welle entspricht. Dabei muß berücksichtigt werden, daß die IBW rückwärts läuft.

Schließlich eliminieren wir mit Hilfe von Gl. (2.40) in nullter Ordnung Larmorradius die Parallelkomponente des elektrischen Feldes, indem wir

$$E_{\parallel} \simeq \frac{1}{\hat{P}} \partial_{\parallel} (\partial_{+} E_{-} + \partial_{-} E_{+}) \quad (4.13)$$

in die beiden senkrechten Komponenten der Wellengleichung einsetzen. Dadurch erhöht sich formell die Ordnung der Differentialgleichung. Da die resultierende neue Welle, die kinetische Alfvén Welle, aber praktisch immer evaneszent ist, und dieser Term wegen der Polarisation nur die langsame Welle betrifft, ist es gerechtfertigt, in Gl. (4.13) ∂_{\parallel} durch $ik_{\parallel,S}$ zu ersetzen. Das resultierende System von zwei gekoppelten eindimensionalen Differentialgleichungen enthält damit auch Elektronen Landaudämpfung in erster Ordnung m_e/m_i und nullter Ordnung Elektron Larmorradius :

$$\begin{aligned} -(\partial_{+}\partial_{-} + \partial_{\parallel}^2)E_{+} + \partial_{+}\partial_{+}E_{-} - \partial_{+}\frac{k_{\parallel,S}^2}{\hat{P}}(\partial_{+}E_{-} + \partial_{-}E_{+}) = \\ \hat{L}E_{+} + 2\partial_{-}\hat{\lambda}_2(\partial_{+}E_{+}) + 2\partial_{+}\hat{\lambda}_0(\partial_{-}E_{+} - \partial_{+}E_{-}); \\ -(\partial_{+}\partial_{-} + \partial_{\parallel}^2)E_{-} + \partial_{-}\partial_{-}E_{+} - \partial_{-}\frac{k_{\parallel,S}^2}{\hat{P}}(\partial_{+}E_{-} + \partial_{-}E_{+}) = \\ \hat{R}E_{-} + 2\partial_{-}\hat{\lambda}_0(\partial_{+}E_{-} - \partial_{-}E_{+}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dabei hängen in unserem eindimensionalen Modell lediglich die Koeffizienten \hat{L} und $\hat{\lambda}_2$ von x ab.

4.3. NUMERISCHE LÖSUNG DER WELLENGLEICHUNG.

Zur Lösung von Gl. (4.14) eignet sich am besten die finite Elemente Methode^{50,51,14}. Sie ermöglicht eine übersichtliche Diskretisierung der Differentialgleichung und eine relativ einfache Implementierung der Randbedingungen. Insbesondere treten keine Schwierigkeiten mit evaneszenten Wellen auf, d.h. der Code findet automatisch die richtigen, exponentiell abfallenden Lösungen. Das ist zum Beispiel bei "shooting" Methoden nicht immer der Fall.

4.3.1. SCHWACHE VARIATIONELLE FORM UND FINITE ELEMENTE.

Bei der Anwendung der finiten Elemente Methode geht man von einem Variationsprinzip aus. Da Gl. (4.14) nichthermitesche Operatoren enthält, kann sie nur in eine schwache variationelle Form gebracht werden. Dazu multipliziert man Gl. (4.14) mit den Testfunktionen

$$\begin{pmatrix} F_+^*(x) \\ F_-^*(x) \end{pmatrix} e^{-i(n_\varphi \varphi + k_y y)}, \quad (4.15)$$

wobei $F_\pm^*(x)$ einem kompletten Funktionenraum angehören, und integriert über das Intervall $[X_A, X_B]$, in dem die Dgl. gelöst werden soll. Nach partieller Integration von Termen, die zweite Ableitungen enthalten, erhält man :

$$\begin{aligned} & \int dx \left\{ (\partial_+ F_+)^* \left(1 + 2\lambda_0 + \frac{k_{\parallel, S}^2}{\hat{P}} + 2\lambda_2 \right) (\partial_+ E_+) \right. \\ & \quad \left. - (\partial_- F_+)^* \left(1 + 2\lambda_0 - \frac{k_{\parallel, S}^2}{\hat{P}} \right) (\partial_+ E_-) + (\partial_{\parallel} F_+)^* (\partial_{\parallel} E_+) - F_+^* \hat{L} E_+ \right\} \\ & = \left[F_+^* \left\{ \left(1 + 2\lambda_0 + \frac{k_{\parallel, S}^2}{\hat{P}} + 2\lambda_2 \right) \frac{u^*}{\sqrt{2}} (\partial_+ E_+) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(1 + 2\lambda_0 - \frac{k_{\parallel, S}^2}{\hat{P}} \right) \frac{u}{\sqrt{2}} (\partial_+ E_-) - \sin \Theta \sin \tau (\partial_{\parallel} E_+) \right\} \right]_{X_A}^{X_B} \end{aligned} \quad (4.16)$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \int dx \left\{ (\partial_- F_-)^* \left(1 + 2\lambda_0 + \frac{k_{\parallel, S}^2}{\hat{P}} \right) (\partial_- E_-) \right. \\ & \quad \left. - (\partial_+ F_-)^* \left(1 + 2\lambda_0 - \frac{k_{\parallel, S}^2}{\hat{P}} \right) (\partial_- E_+) + (\partial_{\parallel} F_-)^* (\partial_{\parallel} E_-) - F_-^* \hat{R} E_- \right\} \\ & = \left[F_-^* \left\{ \left(1 + 2\lambda_0 + \frac{k_{\parallel, S}^2}{\hat{P}} \right) \frac{u}{\sqrt{2}} (\partial_- E_-) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(1 + 2\lambda_0 - \frac{k_{\parallel, S}^2}{\hat{P}} \right) \frac{u^*}{\sqrt{2}} (\partial_- E_+) - \sin \Theta \sin \tau (\partial_{\parallel} E_-) \right\} \right]_{X_A}^{X_B} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Als Testfunktionen $F_\pm(x)$ benutzen wir einen vollständigen Satz von lokalisierten interpolierenden Funktionen (finite Elemente). Die besten Konvergenzeigenschaften haben kubische hermitesche finite Elemente. Jeder horizontale Gitterpunkt x_i , $i = 1 \dots N$; $x(1) = X_A$, $x(N) = X_B$ (nach welchen Kriterien das Gitter

bestimmt wird, wird im nächsten Unterkapitel behandelt) ist Stützstelle für zwei Testfunktionen $h_{k,i}(x)$, $k = 1, 2$:

$$h_{1,i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq x_{i-1} \\ (|\xi| - 1)^2(2|\xi| + 1), & \text{if } x_{i-1} < x < x_{i+1} \\ 0, & \text{if } x_{i+1} \leq x \end{cases} \quad (4.18)$$

$$h_{2,i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq x_{i-1} \\ (|\xi| - 1)^2(x - x_i), & \text{if } x_{i-1} < x < x_{i+1} \\ 0, & \text{if } x_{i+1} \leq x \end{cases} \quad (4.19)$$

wobei

$$\xi = \begin{cases} \frac{x-x_i}{x_i-x_{i-1}}, & \text{if } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}, & \text{if } x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \quad (4.20)$$

so daß

$$\begin{aligned} h_{1,j}(x_i) = \delta_{i,j} & ; \quad \frac{dh_{1,j}}{dx} \Big|_{x_i} \equiv 0 \\ h_{2,j}(x_i) \equiv 0 & ; \quad \frac{dh_{2,j}}{dx} \Big|_{x_i} = \delta_{i,j} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nach diesen Funktionen wird auch $E_{\pm}(x)$ entwickelt (Galerkin-Methode) :

$$E_{\pm}(x) = \sum_{\substack{l=1,2 \\ j=1,N}} E_{\pm}^{l,j} h_{l,j}(x) \quad (4.22)$$

Die Gln. (4.21) garantieren, daß sowohl $E_{\pm}(x)$ als auch $dE_{\pm}(x)/dx$ kontinuierlich sind, d.h. die Lösung ist stetig differenzierbar. Schließlich verwenden wir die Funktionen $h_{k,i}(x)$ in unserem eindimensionalen Code noch, um bei gegebenen $L(x_i)$, $\lambda_2(x_i)$ und $\frac{dL}{dx} \Big|_{x_i}$, $\frac{d\lambda_2}{dx} \Big|_{x_i}$ $L(x)$ und $\lambda_2(x)$ zwischen den Gitterpunkten zu interpolieren. Die Integranden auf der linken Seite von Gln. (4.16–4.17) sind dann einfache Polynome, so daß die Integrale analytisch berechnet werden können. Da die Variablen an einem Gitterpunkt x_i nur mit ihren nächsten Nachbarn wechselwirken, ist die resultierende Steifigkeitsmatrix blocktridiagonal. Jeder Block besteht aus 4×4 komplexen Matricelementen. Die rechte Seite von Gln. (4.16–4.17) verschwindet für alle Testfunktionen außer wenn $F_{\pm} = h_{1,1}$ oder $h_{1,N}$. Diese Terme enthalten die Randbedingungen, deren Implementierung im übernächsten Kapitel beschrieben wird.

4.3.2. BERECHNUNG DER INTERVALLGRENZEN UND DES HORIZONTALLEN GITTERS.

Da der Code mit einem Ray-Tracing Code gekoppelt werden soll, um das single pass Verhalten in der Nähe einer Resonanz zu berechnen, muß außerhalb der Intervallgrenzen die WKB-Approximation gültig sein.

Im Falle eines Einkomponentenplasmas, das bei $\omega \approx 2\Omega_{ci}$ geheizt werden soll, findet Modenkonzersion bei den durch Gl. (3.4) gegebenen Parametern statt. In einem Tokamak entspricht das den Stellen

$$X_{Mc} = \beta_i X_{Res} (1 \pm \sqrt{3}/2) \quad (4.23)$$

X_{Res} bezeichnet die Position der harmonischen Ionenzyklotronresonanz, die in diesem Fall auch die Mitte des Intervalls ist. Als Intervallgrenzen wählen wir

$$X_{A,B} = X_{Res} \pm 6(X_{Mc} - X_{Res}) \quad (4.24)$$

wobei wir den weiter von der Resonanz entfernten Konversionspunkt einsetzen.

Im Fall eines Zweikomponentenplasmas liegt die Mitte des Intervalls bei der Fundamentalresonanz der Minoritätsspezies, $R_0 = X_{Res} = x(\omega = \Omega_{c,Min})$. Zur Bestimmung der Intervallgrenzen wird verlangt, daß

$$|X_A - X_{Res}| = |X_B - X_{Res}| > 3|X_{hyb} - X_{Res}| \quad (4.25)$$

wobei

$$X_{hyb} = X_{Res} \sqrt{\frac{1 + \nu_2 Z_2 \left(\frac{Z_1/A_1}{Z_2/A_2} - 1 \right)}{1 + \nu_2 Z_2 \left(\frac{A_1/Z_1}{A_2/Z_2} - 1 \right)}} \quad (4.26)$$

die Position der Ion-Ion Hybridresonanz bezeichnet, Spezies 2 ist die Minorität und $\nu_2 = n_2/n_e$ ihre relative Konzentration (vgl. Gl. (3.5)). Außerdem soll bei $X_{A,B}$

$$\frac{\text{Im}\hat{L}}{\text{Re}\hat{L}} < 10^{-20} \quad (4.27)$$

sein.

Ein weiterer Vorteil der finiten Elemente Methode ist, daß sie kein äquidistantes Gitter erfordert. Die Diskretisation sollte fein genug sein, um die

Koeffizienten der Differentialgleichung *und* die Lösung aufzulösen. Um das erste Kriterium zu erfüllen verlangen wir :

$$\left| \frac{\hat{L}(x_{i+1}) - \hat{L}(x_i)}{\hat{L}(x_{i+1}) + \hat{L}(x_i)} \right| < 0.1 \quad \text{und} \quad (4.28)$$

$$\left| \frac{\hat{\lambda}_2(x_{i+1}) - \hat{\lambda}_2(x_i)}{\hat{\lambda}_2(x_{i+1}) + \hat{\lambda}_2(x_i)} \right| < 0.1$$

Um die kürzesten Wellenlängen auflösen zu können, werden folgende Bedingungen gestellt :

$$|x_{i+1} - x_i| < \frac{c}{\omega} \frac{1}{5\sqrt{\hat{R}}}, \quad (4.29)$$

$\sqrt{\hat{R}}$ ist eine grobe Abschätzung für den Brechungsindex der schnellen Welle, und

$$|x_{i+1} - x_i| < \frac{1}{k_{x,S}}, \quad (4.30)$$

wo die langsame Welle nicht evaneszent ist. Die Bedingungen Gl. (4.28) können in der Nähe von Ionenzyklotronresonanzen unverhältnismäßig streng werden. Daher begrenzen wir den Abstand zwischen zwei Gitterpunkten nach unten durch

$$|x_{i+1} - x_i| > dx_{min} = \frac{c}{\omega} \frac{\pi}{10} \sqrt{\frac{k_{\parallel,F} v_{thi}}{2\omega \hat{R}}} \quad (4.31)$$

$2\pi \sqrt{\frac{k_{\parallel,F} v_{thi}}{2\omega \hat{R}}}$ ist eine Abschätzung der minimalen Wellenlänge der schnellen Welle in der Nähe einer Resonanz.

4.3.3. IMPLEMENTIERUNG DER RANDBEDINGUNGEN.

Um die Radiationsbedingungen zu implementieren, ist es zunächst nötig, alle Lösungen der zur Wellengleichung Gl. (4.14) korrespondierenden Dispersionsrelation an den Intervallgrenzen X_A , X_B zu berechnen. Das geschieht numerisch mit Hilfe eines Newton Verfahrens wobei die approximativen Wurzeln Gl. (2.56) und Gl. (4.12) als Startwerte benutzt werden. An jeder Seite gibt es eine ein- und auslaufende schnelle und langsame Welle (die auch evaneszent sein können). Die x-Komponenten der korrespondierenden Wellenvektoren bezeichnen wir mit $k_{x,F}^{in}$, $k_{x,F}^{out}$, $k_{x,S}^{in}$ und $k_{x,S}^{out}$. Bei der Identifikation von ein- und auslaufenden Wellen muß beachtet werden, daß die Ionen-Bernsteinwelle rückwärts läuft, d.h. k_x und der Energiefluß sind entgegengesetzt.

Durch Substitution von ik_x für d/dx in einer der zwei Gln. (4.14) können dann die Polarisierungen $W = E_-/E_+$ der verschiedenen Wellen bei $x = X_A, X_B$ berechnet werden. Damit sind die zur Implementierung der Randbedingungen nötigen Größen bekannt.

Die E_+ -Komponente der einfallenden schnellen Welle sei zu 1 normiert. Ihre E_- -Komponente ist dann W_F^{in} . Die E_+ -Komponenten der reflektierten bzw. transmittierten schnellen und langsamen Wellen, die wir ρ_F, ρ_S bzw. τ_F und τ_S nennen, sind unbekannt. An der Seite, von der die schnelle Welle einfallen soll gelten dann folgende zusätzliche Gleichungen :

$$\begin{aligned} E_+ &= 1 + \rho_F + \rho_S, \\ E_- &= W_F^{in} + W_F^{out} \rho_F + W_S^{out} \rho_S \end{aligned} \quad (4.32)$$

An der anderen Seite ergibt sich analog :

$$\begin{aligned} E_+ &= \tau_F + \tau_S, \\ E_- &= W_F^{out} \tau_F + W_S^{out} \tau_S \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die Randterme von Gln. (4.16—4.17) werden durch die komplexen Variablen ρ_F, ρ_S, τ_F und τ_S und durch die dazugehörigen k_x und W 's ausgedrückt. Wenn die schnelle Welle von der Seite X_A einfällt, ergibt sich z.B. für $\frac{dE_-}{dx}|_{X_A}$:

$$\frac{dE_-}{dx}|_{X_A} = ik_{x,F}^{in} W_F^{in} + ik_{x,F}^{out} W_F^{out} \rho_F + ik_{x,S}^{out} W_S^{out} \rho_S \quad (4.34)$$

Die Beiträge von der einfallenden schnellen Welle bilden die rechte Seite des linearen Gleichungssystem während die anderen Terme zu der um Gln. (4.32—4.33) vergrößerten Steifigkeitsmatrix addiert werden. Die Lösung des linearen Systems erfolgt mit Hilfe einer Routine für Bandmatrizen aus der NAG-Bibliothek und liefert die Entwicklungskoeffizienten $E_{\pm}^{l,j}$ sowie die Amplituden ρ_F, ρ_S bzw. τ_F, τ_S der reflektierten bzw. transmittierten Wellen. Damit können dann Leistungsdepositionsprofile und die mit den verschiedenen Wellen verbundenen Energieflüsse berechnet werden.

4.3.4. DIE ENERGIEBILANZ.

Durch Substitution von $E_{\pm}^*(x)$ für $F_{\pm}^*(x)$ in Gl. (4.16) und Gl. (4.17) und Addition dieser beiden Gleichungen, erhält man eine Gleichung, deren Imaginärteil die Energieerhaltung für zeitgemittelte Größen beschreibt¹⁴ :

$$\int_{X_A}^{X_B} \frac{dP_{abs}(x)}{dx} dx = S \Big|_{X_A}^{X_B} \quad (4.35)$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{dP_{abs}}{dx} = & \text{Im}(\hat{L})|E_+|^2 + 2\text{Im}(\lambda_2)|\partial_+ E_+|^2 \\ & + 2\text{Im}(\lambda_0)|\partial_- E_+ - \partial_+ E_-|^2 + \text{Im}\left(\frac{k_{\parallel,S}^2}{\hat{P}}\right)|\partial_- E_+ + \partial_+ E_-|^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

die von Ionen bei der fundamentalen und harmonischen Zyklotronresonanz sowie von Elektronen durch TTMP und Landaudämpfung pro Längeneinheit absorbierte Leistung bezeichnet. Auf der rechten Seite von Gl. (4.35) steht der Energiefluß der sich aus den Beiträgen der einfallenden schnellen und reflektierten langsamen und schnellen Welle bzw. der transmittierten langsamen und schnellen Welle zusammensetzt :

$$\begin{aligned} S = & \text{Im} \left[E_+^* \left\{ \left(1 + 2\lambda_0 + \frac{k_{\parallel,S}^2}{\hat{P}} + 2\lambda_2 \right) \frac{u^*}{\sqrt{2}} (\partial_+ E_+) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(1 + 2\lambda_0 - \frac{k_{\parallel,S}^2}{\hat{P}} \right) \frac{u}{\sqrt{2}} (\partial_+ E_-) - \sin \Theta \sin \tau (\partial_{\parallel} E_+) \right\} \right. \\ & \left. + E_-^* \left\{ \left(1 + 2\lambda_0 + \frac{k_{\parallel,S}^2}{\hat{P}} \right) \frac{u}{\sqrt{2}} (\partial_- E_-) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(1 + 2\lambda_0 - \frac{k_{\parallel,S}^2}{\hat{P}} \right) \frac{u^*}{\sqrt{2}} (\partial_- E_+) - \sin \Theta \sin \tau (\partial_{\parallel} E_+) \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Mit Hilfe von $\rho_{F,S}$ und $\tau_{F,S}$ und der entsprechenden W 's und k_x können die Anteile der verschiedenen Wellen am Gesamtfluß berechnet werden. Energieerhaltung bedeutet dann, daß der Energiefluß der einfallenden schnellen Welle gleich der Summe aus den Energieflüssen der reflektierten und transmittierten Wellen sowie der vom Plasma absorbierten Leistung ist. In dieser Form ist Gl. (4.35), zusammen mit der Annahme, daß die WKB-Approximation an den Intervallgrenzen gültig ist, eine Konsequenz des Modells und kann als erster Konsistenztest des Codes

benutzt werden. Die Genauigkeit, mit der Gl. (4.35) erfüllt ist, war bei den von uns durchgeführten Rechnungen immer besser als 1%. Gl. (4.35) kann aber keine Auskunft über die Konvergenzeigenschaften der Lösung geben.

4.3.5. KONVERGENZEIGENSCHAFTEN.

Um die Konvergenzeigenschaften der numerischen Methode zu untersuchen, haben wir Testläufe mit verschiedener Anzahl von Gitterpunkten durchgeführt. Das Gitter wurde dabei verfeinert, indem wir die Breite aller finiten Elemente gleichmäßig verringert haben.

Als Szenario haben wir ein H^+ -Plasma mit einer He_3^{++} Minorität gewählt, das bei der Fundamentalresonanz der Minorität geheizt wird. Dieser Fall erfordert besonders gute Auflösung, da außerhalb der Äquatorialebene durch Modenkonzersion die Ionenzyklotronwelle angeregt wird, die dann mit sehr kurzer Wellenlänge zur Niedrigfeldseite propagiert.

Als Testparameter benutzen wir das Absolutquadrat der E_+ -Komponente an zwei Stellen, eine , an der die langsame Welle evaneszent ist (Hochfeldseite) und eine wo sie propagativ ist (Niedrigfeldseite), sowie die maximale von den Ionen lokal absorbierte Leistung (vgl.Ref.14). Der "wahre" Wert dieser Größen wird durch Extrapolation abgeschätzt.

Fig. 4.2 zeigt doppellogarithmische Plots der relativen Abweichungen Δ von diesem Wert als Funktion der Anzahl der Gitterpunkte N . Die Konvergenz von $|E_+|^2$ skaliert wie N^{-5} , die von der maximalen lokal deponierten Leistung wie N^{-3} . Diese Ergebnisse stimmen mit denen anderer Autoren¹⁴ überein.

4.4. ANWENDUNGEN UND VERGLEICH MIT ANALYTISCHEN MODELLEN.

Obwohl der Code schnell genug ist, um den Einbau in ein Ray-Tracing Paket zu ermöglichen, haben wir ihn bisher meist nur separat angewandt. In den hier beschriebenen Beispielen entsprechen Plasma- und Tokamakparameter denen von typischen JET-Entladungen. Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, haben wir folgende Werte eingesetzt :

$ \vec{B}_0 $	3.5 Tesla
B_0^{Pol}/B_0^{Tor}	0.1
R_T	300 cm
n_e	$8 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}$
T_i	2 keV
T_e	2 keV

Die schnelle Welle fällt von der Niedrigfeldseite ein.

In drei der in diesem Kapitel behandelten vier Fälle ist ein Vergleich mit den Ergebnissen analytischer Rechnungen von M. Brambilla und M. Ottaviani²² möglich. In diesen Modellen wird, ausgehend von einem (verallgemeinerten) Budden Problem²⁴, nur die Modenkonzersion unter Vernachlässigung von Dissipation betrachtet. Berechnet werden die Transmissions- bzw. Reflektionskoeffizienten der schnellen und langsamen Welle (Ionen-Bernsteinwelle oder Ionenzyklotronwelle), die wir im folgenden T_F bzw. R_F und T_S bzw. R_S nennen werden. Streng genommen ist diese Methode nur bei verschwindendem $k_{||}$ oder für $T_i=0$ exakt. Im Modenkonzersionsregime, d.h. wenn der Konversionspunkt außerhalb der Dopplerbite der Ionenzyklotronresonanz liegt, ist sie näherungsweise gültig. Bei Berücksichtigung von Dissipation wird ein Teil der (im Minoritäts-Regime sogar die gesamte) Energie, die sonst der langsamen Welle zugeschrieben würde, durch Ionenzyklotroneindämpfung absorbiert, während die transmittierte schnelle Welle weitgehend unbeeinflusst bleibt. Die Ionenzyklotronwelle wird außerdem durch Elektron Landaudämpfung gedämpft, während die Ionen-Bernsteinwelle in den hier untersuchten Beispielen davon praktisch unbeeinflusst bleibt (vgl. Kap. 4.4.1).

Daher kann man immer T_S bzw. R_S aus den analytischen Rechnungen mit den

numerischen Ergebnissen für die Summe von P_{abs} und T_S bzw. R_S vergleichen.

4.4.1. HEIZUNG EINES REINEN D-PLASMAS BEI DER HARMONISCHEN IONENZYKLOTRONFREQUENZ, $\nu = 53.5$ MHz.

In den in diesem und im nächsten Unterkapitel diskutierten Beispielen haben wir $\tau=0$ gesetzt, d.h. wir untersuchen das Verhalten in der Nähe Äquatorialebene. Im allgemeinen ist $k_y = 0$, die schnelle Welle fällt also waagrecht ein. Fig. 4.3a,b zeigt Plots der elektrischen Feldkomponenten E_+ und E_- für $n_\varphi = 6$. Die harmonische Ionenzyklotronresonanz liegt in diesem Fall bei $x=299.3$ cm, der Modenkonzentrationspunkt, Gl. (3.4), bei $x=296.4$ cm. Man erkennt auf der linken Seite (Hochfeldseite) deutlich die Ionen-Bernsteinwelle. Ihre Wellenlänge ist in der Nähe der Konfluenz etwa so groß wie die der schnellen Welle und verringert sich dann im Verlauf der weiteren Ausbreitung mit wachsendem $|\vec{B}_0|$. Vergleicht man Real- und Imaginärteil, sieht man, daß die IBW "rückwärts" läuft. Sie weist eine relativ wesentlich größere E_+ -Komponente als die schnelle Welle auf. Auf Grund ihrer Polarisation transportiert sie trotz ihrer relativ großen Amplitude nur recht wenig Energie (in diesem Fall 15% der einfallenden Energie).

Um die numerische mit der analytischen Lösung zu vergleichen, haben wir einen Fall mit $k_y = 0$ und $n_\varphi = 0$ untersucht. In dem hier benutzten Modell ist dann $k_{\parallel,F} = 0$, Gl. (4.10), und Ionenzyklotroneindämpfung und Elektron TTMP verschwinden. Für $\tau = 0$ ist dann außerdem $k_{\parallel,S} = 0$, Gl. (4.11), so daß Elektronen Landaudämpfung ebenfalls verschwindet. Die numerischen und analytischen Rechnungen sollten dann die selben Resultate ergeben. Fig. 4.4ab zeigt links die numerisch und rechts die analytisch berechneten Transmissions- und Reflektionskoeffizienten als Funktion der Plasmadichte. Die Übereinstimmung ist exzellent. In Fig. 4.5ab sind die beiden Energiebilanzen als Funktion der Toroidalmode n_φ für $n_e = 8 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}$ aufgetragen. Während der Transmissionskoeffizient der schnelle Welle nur sehr wenig durch die Dissipation verändert wird, wird die Energie, die in dem Modell ohne Dämpfung der Ionen-Bernsteinwelle und der reflektierten schnelle Welle zugeschrieben wird, für höhere Toroidalmoden vollständig durch Ionenzyklotroneindämpfung bei der zweiten harmonischen absorbiert (Minoritäts-Regime). Der Code enthält zwar auch kinetische Dämpfung durch Elektronen. Sie macht aber selbst für die größten n_φ , die von der Antenne an das

Plasma koppeln können (bei der JET-Dipolantenne ist $n_\varphi \lesssim 35$, bei der Quadrupolantenne ist $n_\varphi \lesssim 70$), kaum mehr als 1% aus. Insbesondere die Elektronen Landaudämpfung der IBW ist wegen deren "quasielektrostatischer" Polarisation (vgl. Kap. 2.2) sehr gering. Sie würde nur für höhere n_φ wichtig werden. Für derartige Toroidalmoden ist das Plasma jedoch im Minority-Regime, wo Modenkonzersion zu langsamen Wellen unterdrückt ist, d.h. die IBW wird erst gar nicht angeregt.

Fig. 4.6ab und Fig. 4.7ab zeigen Vergleiche der numerischen und analytischen Ergebnisse für $n_\varphi = 6$ als Funktion der Elektronendichte bzw. der Iontemperatur. Auch hier wird die transmittierte schnelle Welle nur wenig durch die Dissipation beeinflusst. Eine Abgrenzung zwischen Modenkonzersions- und Minoritäts-Regime ist aber nicht mehr so eindeutig wie in Fig. 4.5a, da auch in dem Modell ohne Absorption die Dicke der Evaneszenzschicht und damit die Modenkonzersion wesentlich stärker von n_e bzw. T_i als von n_φ abhängen.

4.4.2. HEIZUNG EINES D-PLASMAS MIT EINER H-MINORITÄT BEI $\omega \simeq 2\Omega_D = \Omega_H$, $\nu = 53.5$ MHz.

Bei dieser Plasmakomposition wird neben dem Deuterium die Wasserstoffminorität besonders stark geheizt. Selbst bei Vernachlässigung der Dissipation gibt es nur heuristische analytische Modelle zur Berechnung der Transmissions- und Reflektionskoeffizienten, deren Richtigkeit nicht exakt bewiesen ist. Ihre Ergebnisse stimmen allerdings in diesem Fall mit denen numerischer Rechnungen überein.

Fig. 4.8ab zeigt die senkrechten Komponenten des elektrischen Wellenfeldes für $n_{H^+}/n_e = 3\%$, ansonsten die gleichen Parameter wie in Fig. 4.3ab. In diesem Fall findet Modenkonzersion zur Ionen-Bernsteinwelle bei der Ion-Ion-Hybridresonanz statt, Gl. (3.5), die bei $x=292.7$ cm liegt, also wesentlich weiter links als bei einem reinen Deuterium-Plasma. Die Evaneszenzschicht wird also breiter was eine schwächere Anregung der IBW bewirkt. Außerdem wird die E_+ -Komponente bei $\omega = 2\Omega_{cD} = \Omega_{cH}$ stärker abgeschirmt.

Um den Einfluß der Minorität quantitativer zu untersuchen, haben wir in Fig. 4.9 das Ergebnis der Energiebilanz für $n_\varphi = 6$ als Funktion der Minoritätskonzentration aufgetragen. Der erste Punkt, d.h. ein reines D^+ -Plasma, wurde dabei vom vorherigen Unterkapitel übernommen. Die Minoritätsheizung

zeigt einen sehr steilen Anstieg und überwiegt schon bei recht geringen Konzentrationen die Absorption durch die Majorität bei deren harmonischer Zyklotronresonanz. Die totale single pass Absorption ist für $n_{H^+}/n_e \lesssim 3.2\%$ (teilweise wesentlich) höher als für ein Einkomponentenplasma. Mit steigender H^+ -Konzentration wird die Evaneszenzschicht immer breiter, so daß die einfallende schnelle Welle hauptsächlich reflektiert wird. Bei kleineren Tokamaks verschiebt sich das Bild zu höheren Minoritätskonzentrationen, da die Dicke der Evaneszenzschicht proportional zu R_T ist, vgl. Kap. 3., Gl. (3.5).

In Fig. 4.10 wurde für eine Minoritätskonzentration von 2% k_y , d.h. der Winkel ϕ unter dem die schnelle Welle einfällt, variiert. $k_y = -0.37\text{cm}^{-1}$ entspricht dabei etwa $\phi \simeq 45^\circ$, und für $k_y = -0.2\text{cm}^{-1}$ ist wegen der Rotationstransformation bei den hier gewählten Parametern $k_{\parallel} \simeq 0$. Die Absorption bei der harmonischen wird dort sehr klein, während die Dämpfung bei der Fundamentalresonanz der Minorität (falls diese räumlich aufgelöst werden kann) ein lokales Maximum hat. Ansonsten steigt die pro Transit absorbierte Energie mit wachsendem $|k_{\parallel}|$.

Schließlich haben wir die single pass Absorption in der Äquatorialebene für die JET Dipol- und Quadrupolantenne berechnet. Das n_φ -Spektrum der einfallenden schnellen Welle wurde dabei jeweils durch Ray Tracing zwischen Antenne und resonanter Schicht ermittelt. Fig. 4.11ab zeigt die sich ergebenden Depositionsprofile. Für die Quadrupolantenne ist die Absorption stärker und die Profile sind breiter. Quantitativ ergibt sich :

	Dipolantenne	Quadrupolantenne
P_{abs}^H	42.14%	72.63%
P_{abs}^D	7.64%	8.91%
P_{abs}^{ELD}	< 0.01%	0.15%
P_{abs}^{TTMP}	0.57%	3.36%
R_F	46.86%	5.34%
T_F	1.81%	9.37%
T_S	0.97%	0.24%

Die wesentlich geringer single pass Absorption ist wahrscheinlich der Grund dafür, daß in JET nur bei der Benutzung der Dipolantenne globale Eigenmoden

auftreten⁵².

4.4.3. MINORITÄTSHEIZUNG VON He₃ IN WASSERSTOFF, $\omega \simeq \Omega_{He}$, $\nu = 35.6$ MHz.

Im Gegensatz zu dem im vorherigen Kapitel diskutierten Szenario spielt hier die harmonische Ionenzyklotronresonanz keine Rolle und die Ion-Ion Hybridresonanz befindet sich auf der Niedrigfeldseite der Fundamentalresonanz der Minorität. Für $\tau \neq 0$, d.h. außerhalb der Äquatorialebene, hat \vec{B}_0 eine nichtverschwindende Horizontalkomponente und an der Ion-Ion-Hybridresonanz kann die Ionenzyklotronwelle angeregt werden, die dann entlang magnetischer Flußflächen zur Niedrigfeldseite propagiert. Fig. 4.12ab zeigt das elektrische Wellenfeld für eine He₃⁺⁺-Konzentration von 3% der Elektronendichte und $\tau = 1.5$ rad, $k_y = 0$, $n_\varphi = 6$. Die Ion-Ion-Hybridresonanz liegt bei $x=304$ cm, die Fundamentalresonanz der Minorität bei $x=292$ cm. Dort wird die E_+ -Komponente sehr stark abgeschirmt. Auf der Niedrigfeldseite sieht man die Ionenzyklotronwelle, die durch ELD gedämpft wird. Fig. 4.13ab zeigt einen Vergleich der numerisch und analytisch berechneten Energiebilanz als Funktion der Minoritätskonzentration. Die in dem Modell ohne Dissipation der Ionenzyklotronwelle zugeschriebene Energie wird für sehr niedrige Konzentrationen von der Minorität (Minoritäts-Regime) und für höhere Konzentrationen (Modenkonversions-Regime) durch ELD absorbiert. Da wir in den Termen, die Ionenzyklotroneindämpfung beschreiben, $k_{||} = k_{||,F}$ einsetzen, wird die Absorption der Ionenzyklotronwelle, für die $k_{||} \gg k_{||,F}$ sein kann, durch die Minorität in diesem Modell unterschätzt.

Unsere Rechnungen zeigen aber, daß diese Welle in jedem Fall sehr schnell durch Elektronen Landaudämpfung absorbiert wird. Es erscheint daher unwahrscheinlich, daß sich in einem solchen Szenario auf der Niedrigfeldseite stehende Wellen entlang magnetischer Flußflächen bilden können, vgl. Kap. 3.1. Ein solches Verhalten könnte in unserem eindimensionalen Modell, in dem die globale Struktur der Flußflächen nicht berücksichtigt wird, nicht simuliert werden.

4.4.4. MINORITÄTSHEIZUNG VON He₃ IN DEUTERIUM, $\omega \simeq \Omega_{He}$, $\nu = 35.6$ MHz.

Dieser Fall ist analog zu dem im vorherigen Unterkapitel diskutierten, mit der Ausnahme, daß hier die Ion Ion-Hybridresonanz auf der Hochfeldseite der Ionenzyklotronresonanz der Minorität liegt. Die von dort zur Niedrigfeldseite propagierende Ionenzyklotronwelle läuft daher in die Fundamentalresonanz der Minorität und wird dort sofort absorbiert. Die langsame Welle ist an beiden Intervallenden evaneszent.

Fig. 4.14ab zeigt das elektrische Wellenfeld für eine He₃⁺⁺-Konzentration von 3% der Elektronendichte und $\tau = 1.5$ rad, $n_\varphi = 6$, $k_y = 0$. Man erkennt deutlich die Modenkonzersion zur Ionenzyklotronwelle bei der Ion Ion-Hybridresonanz, die sich in diesem Beispiel bei $x = 287.5$ cm befindet. In der Nähe der Fundamentalresonanz der Minorität wird diese Welle dann sofort absorbiert. Welcher Anteil schon vorher durch ELD absorbiert worden ist, kann nur sehr schwer abgeschätzt werden, da wir hier in den Termen, die ELD und in den Termen, die Ionenzyklotrondämpfung beschreiben, $k_{\parallel} = k_{\parallel,F}$ einsetzen, was zu einer Unterschätzung von ELD und der Dopplerbreite der Ionenzyklotronresonanz führt.

In Fig. 4.15ab werden die numerischen Ergebnisse der Energiebilanz mit den aus analytischen Modellrechnungen folgenden als Funktion der Minoritätskonzentration verglichen. Berücksichtigt man, daß die analytischen Rechnungen nur die Modenkonzersion an der Ion Ion-Hybridresonanz und keine keine Dissipation enthalten, d.h. die in die Ionenzyklotronwelle konvertierte Energie wird nicht absorbiert sondern erscheint als reflektierter Energiefluß, so ist die Übereinstimmung insbesondere für kleine Konzentrationen sehr gut.

Fig. 4.1. Eindimensionales Modell für die resonante Schicht

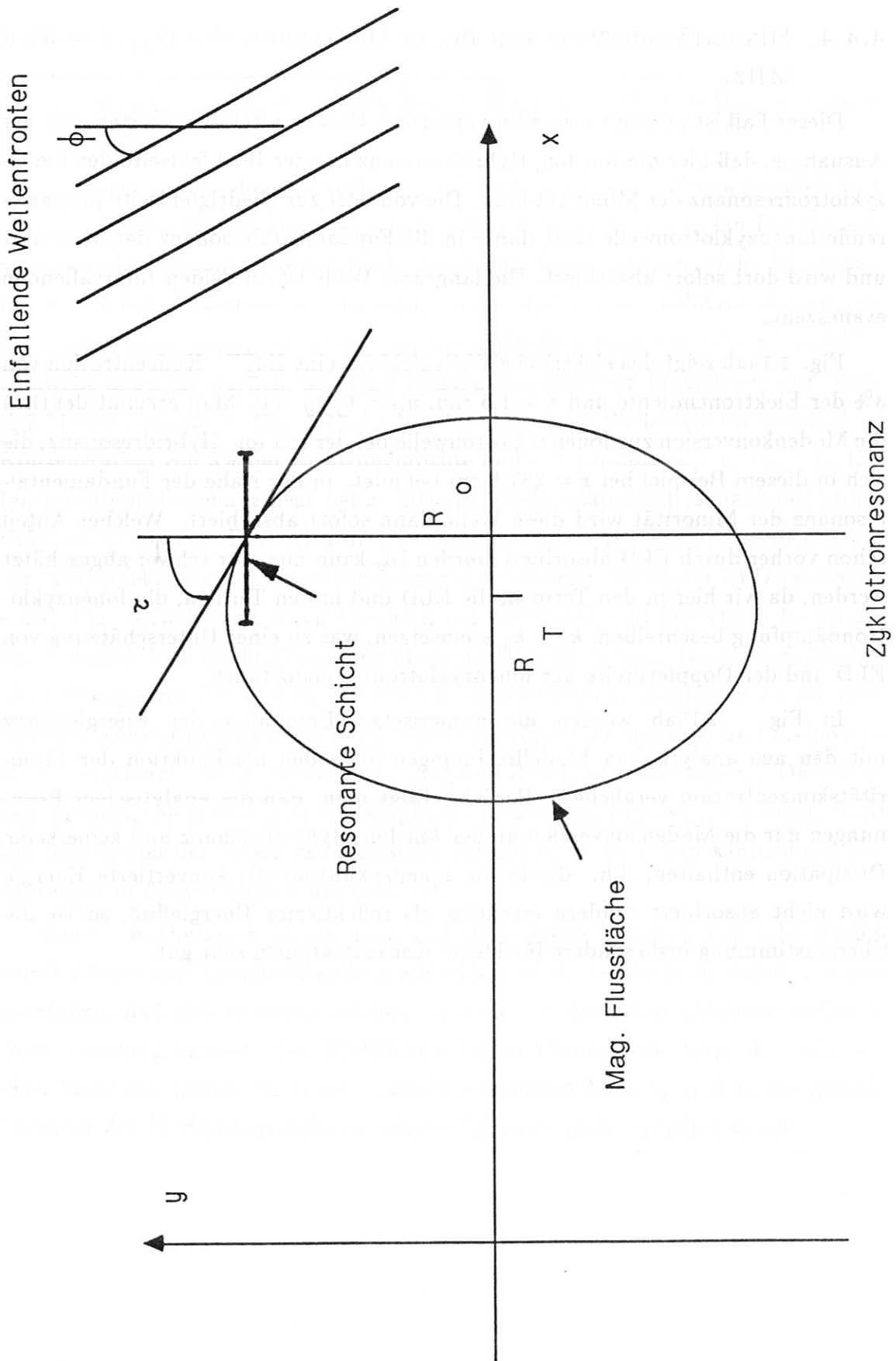


Fig. 4.2. Konvergenzeigenschaften

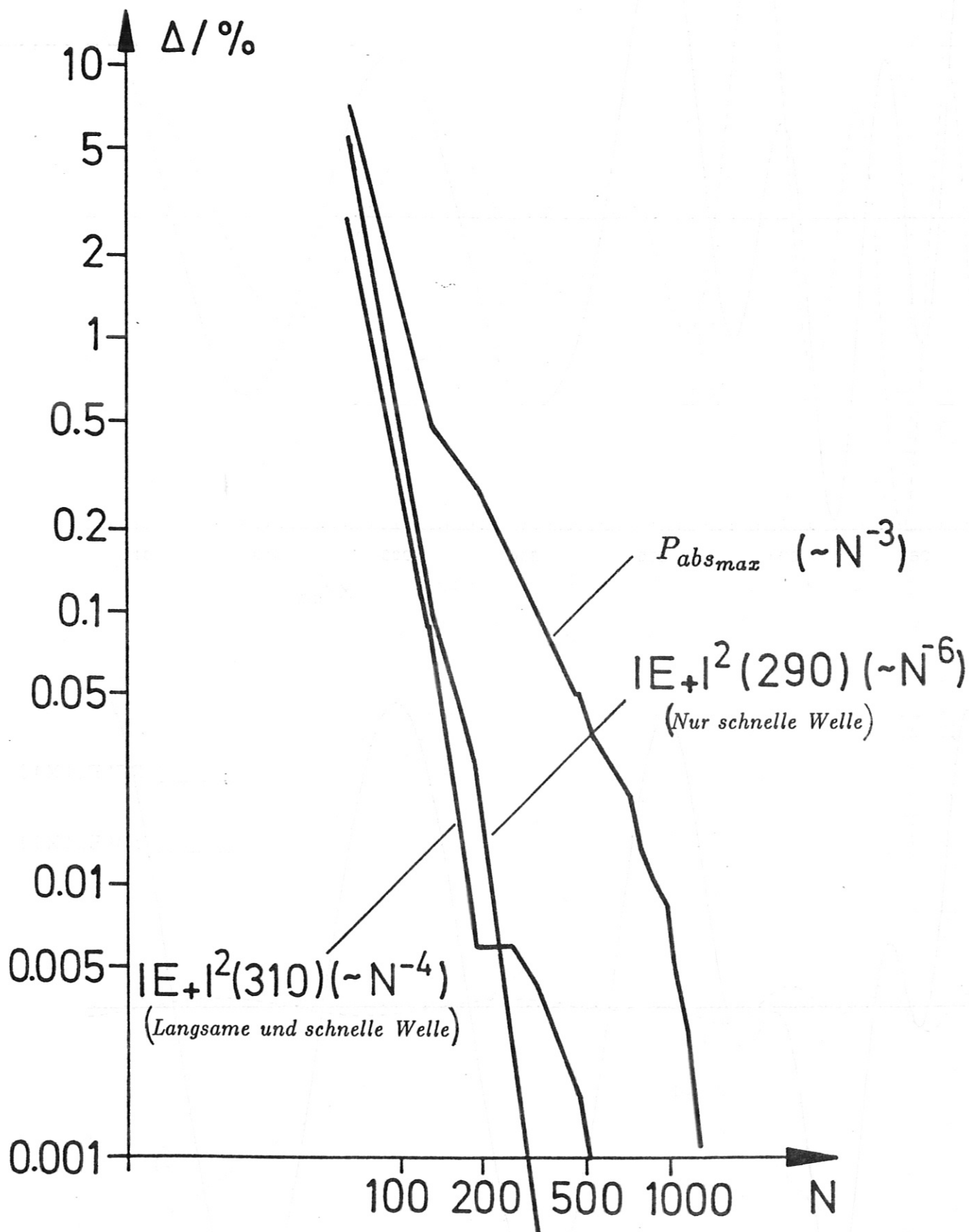


Fig. 4.3ab.

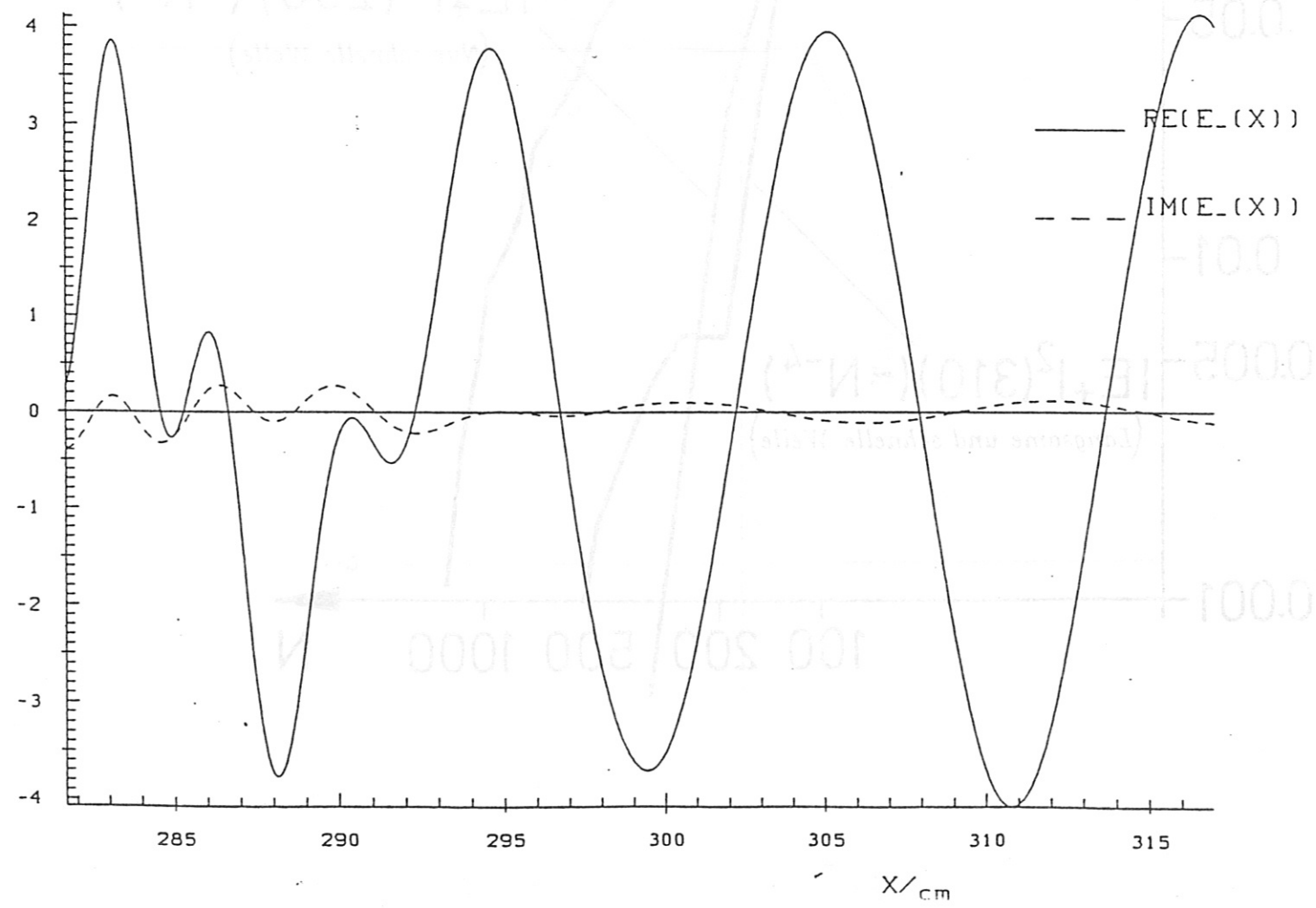
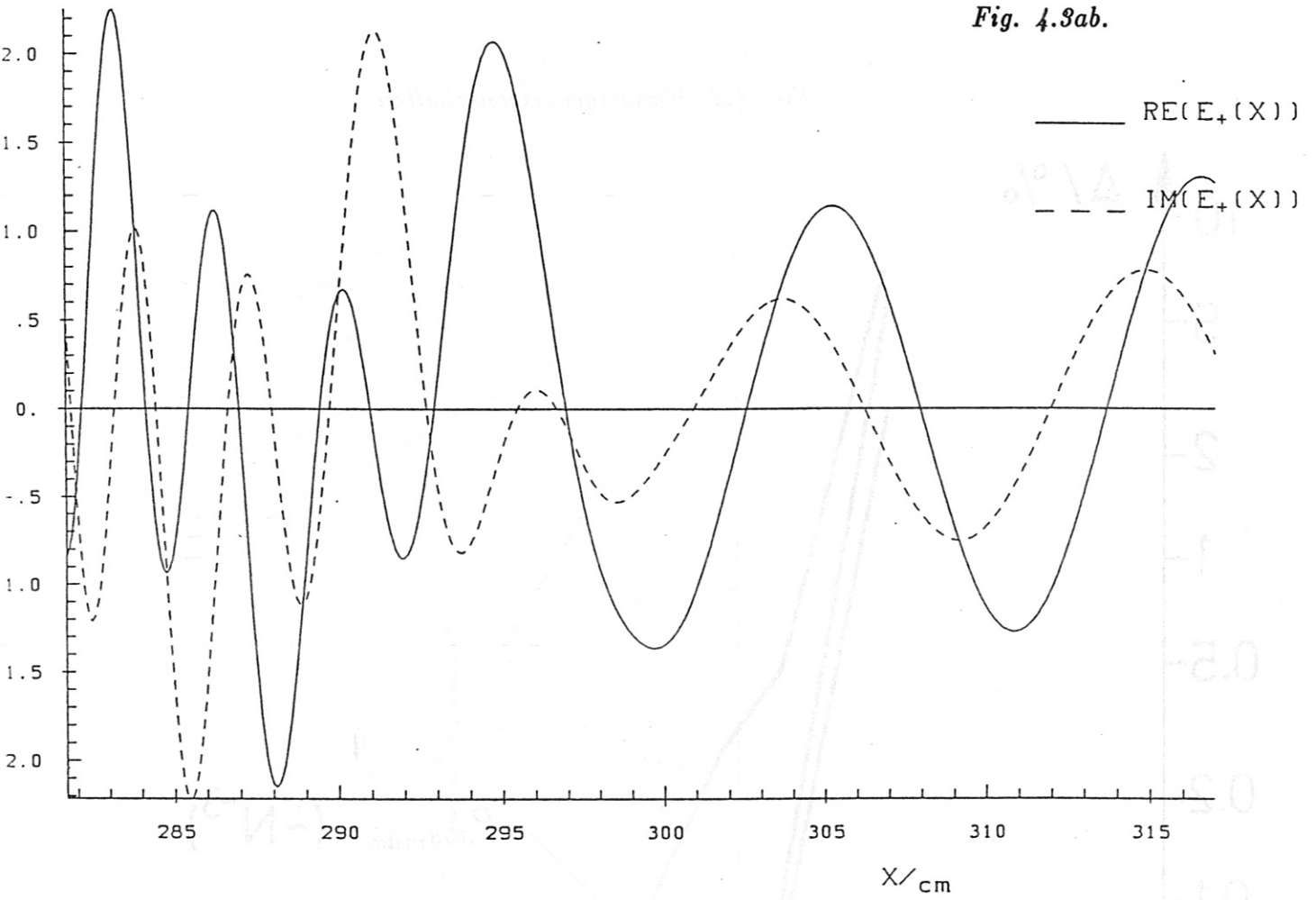


Fig. 4.4ab.

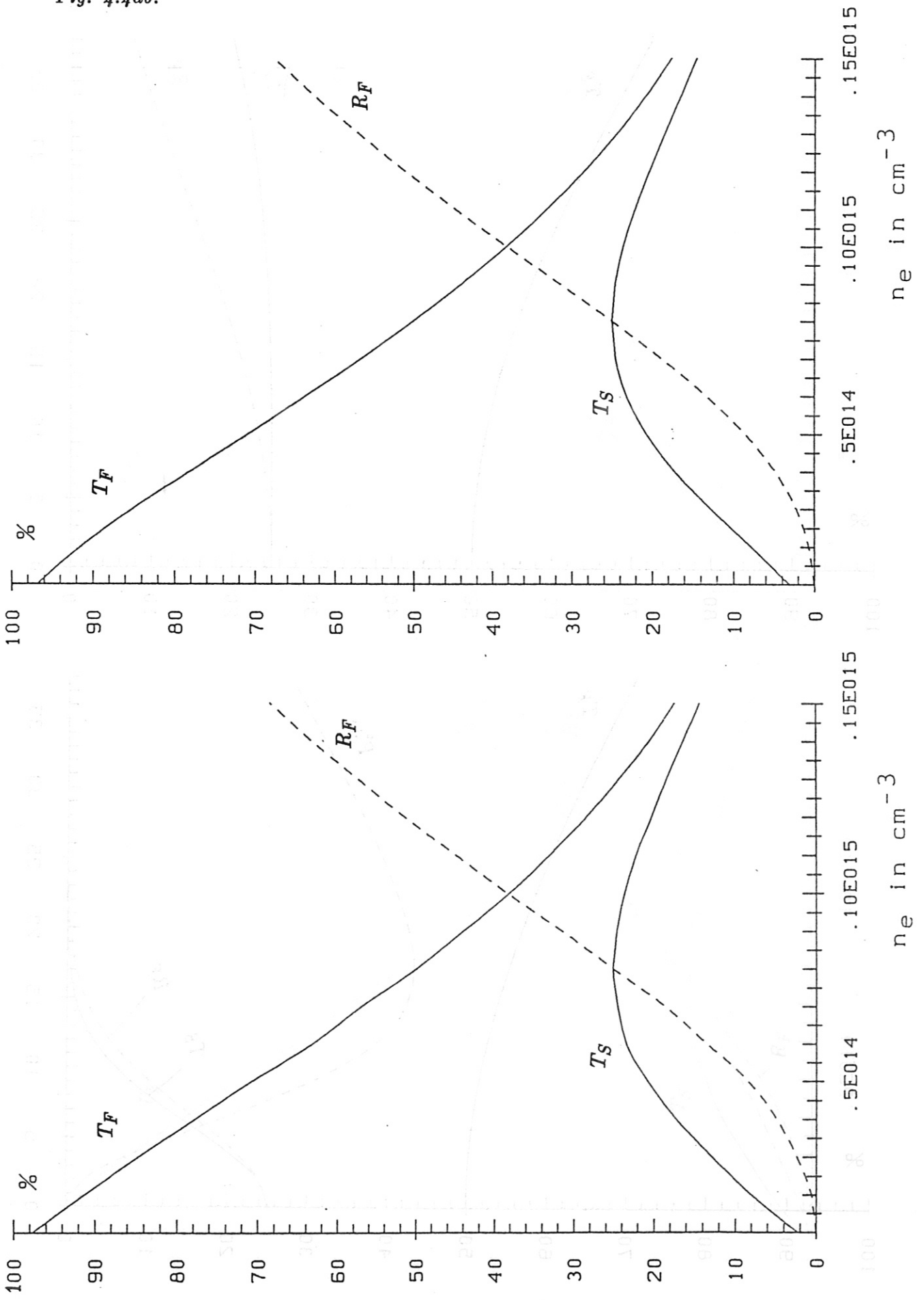


Fig. 4.5ab.

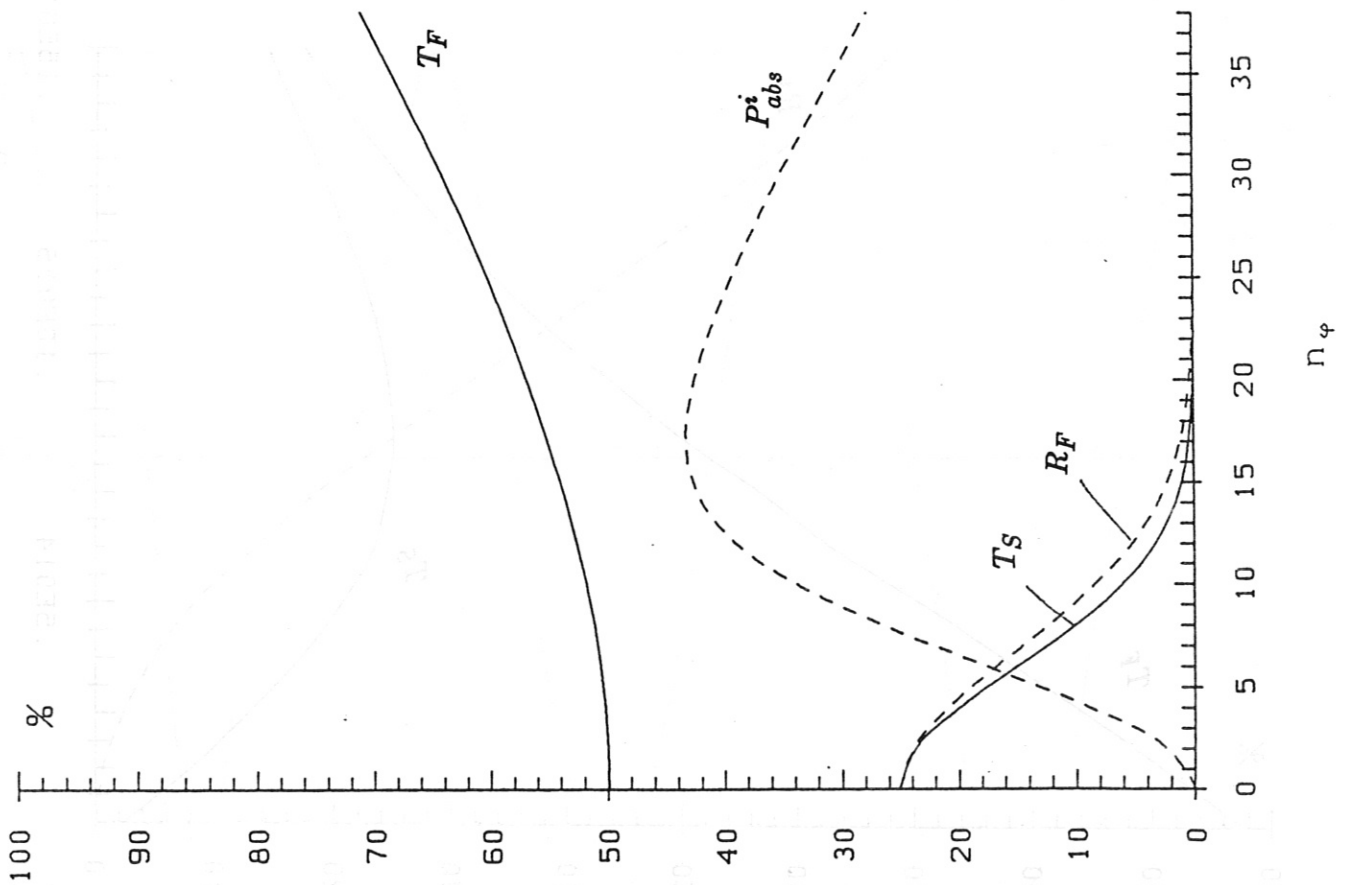
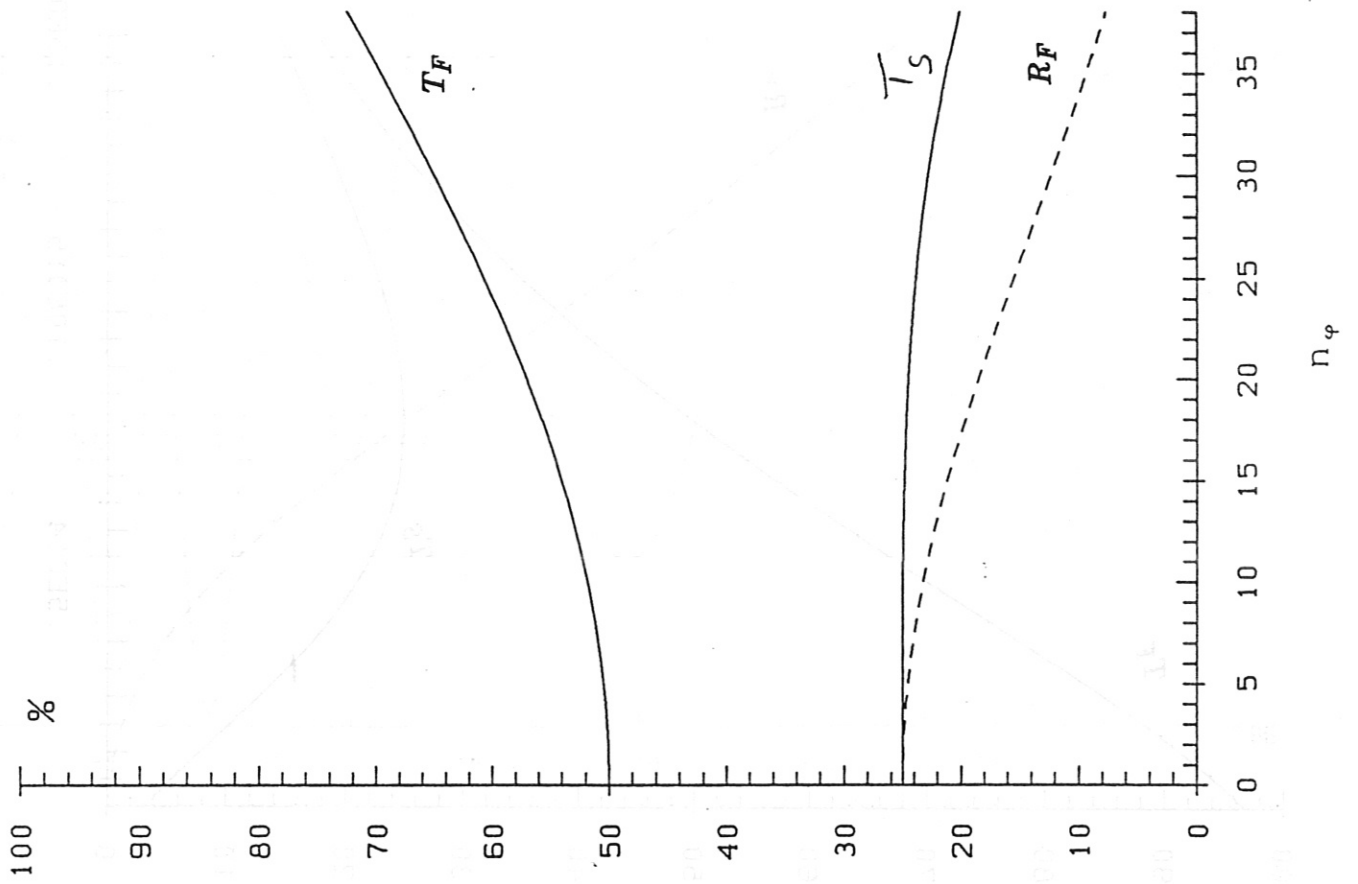


Fig. 4.6ab.

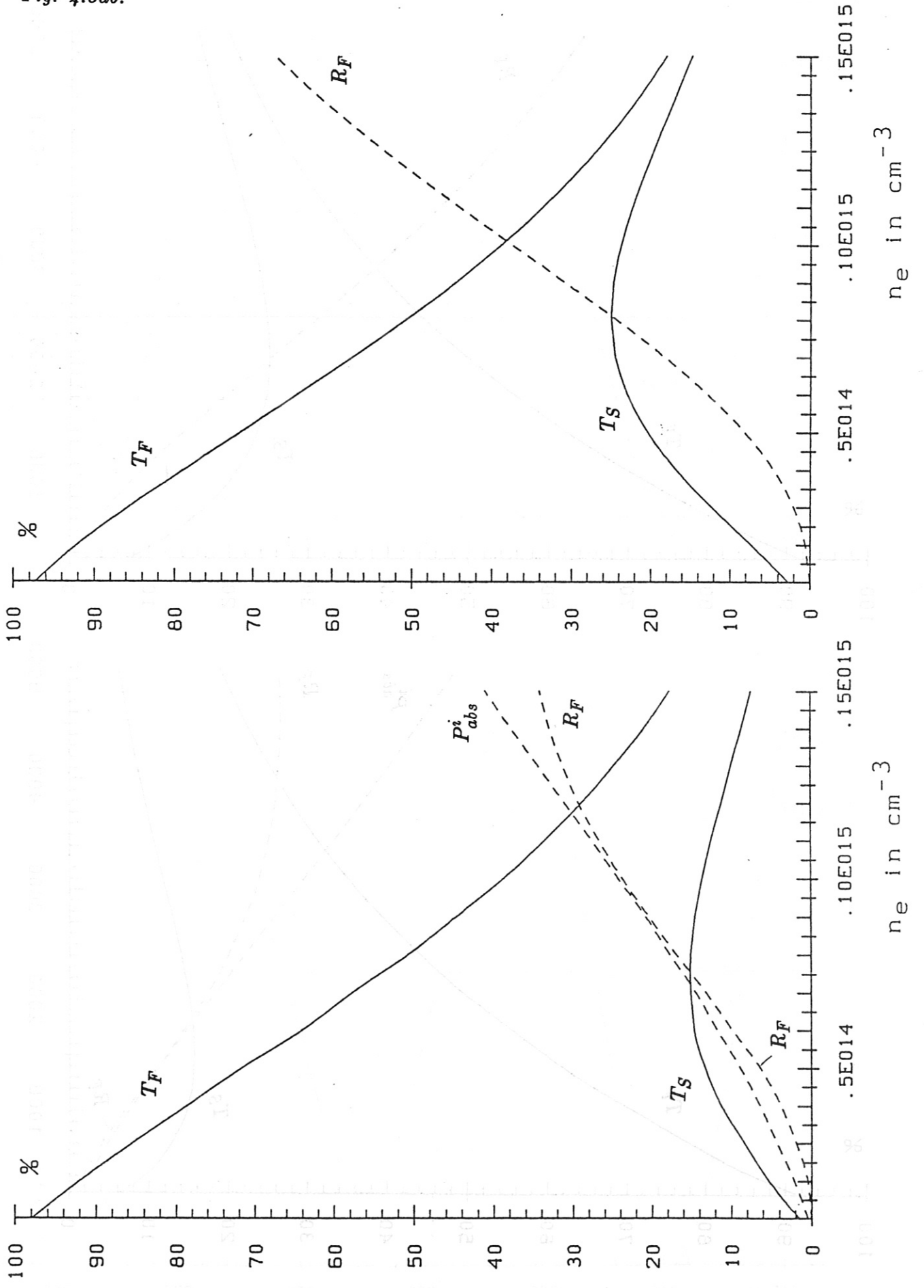


Fig. 4.7ab.

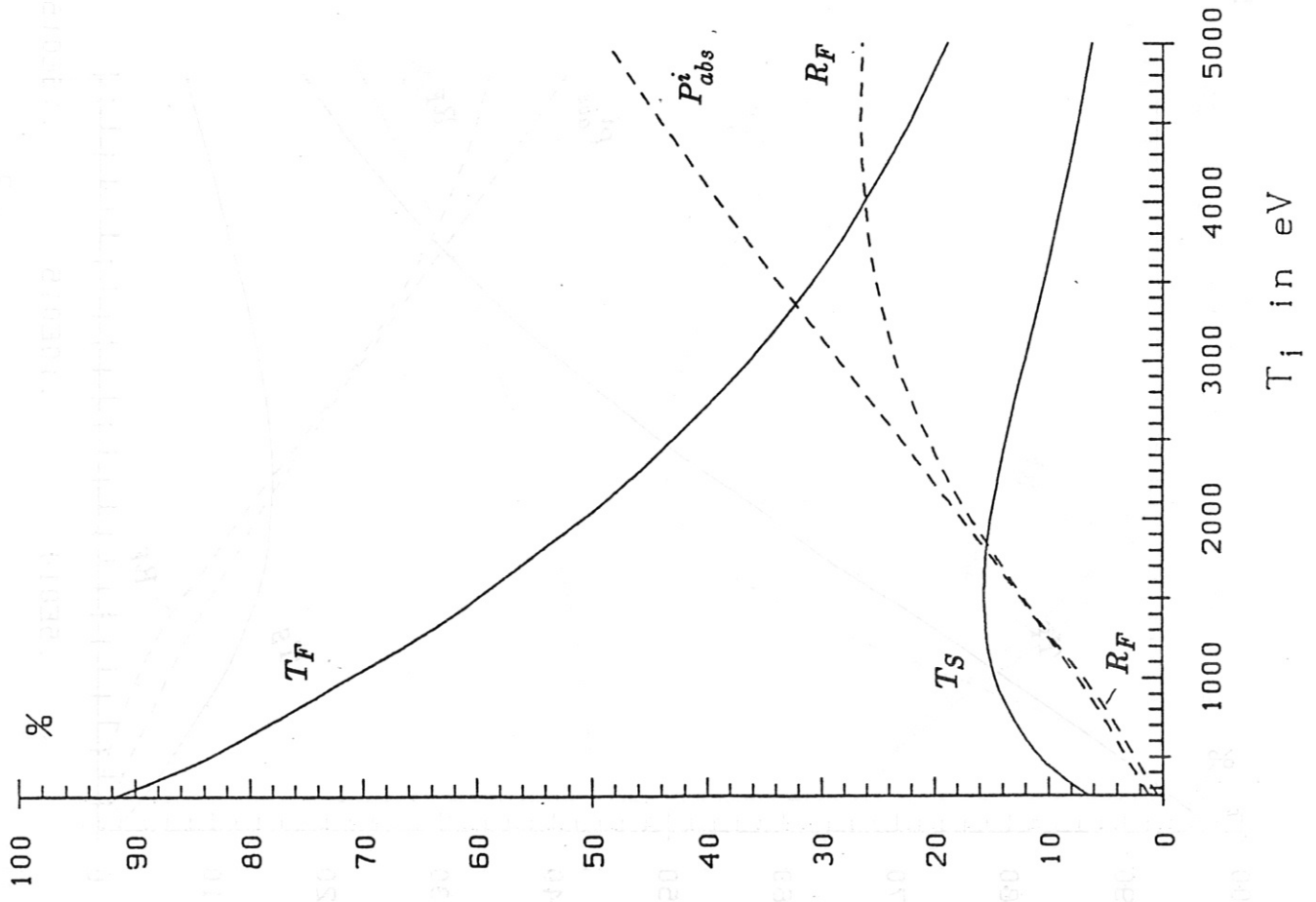
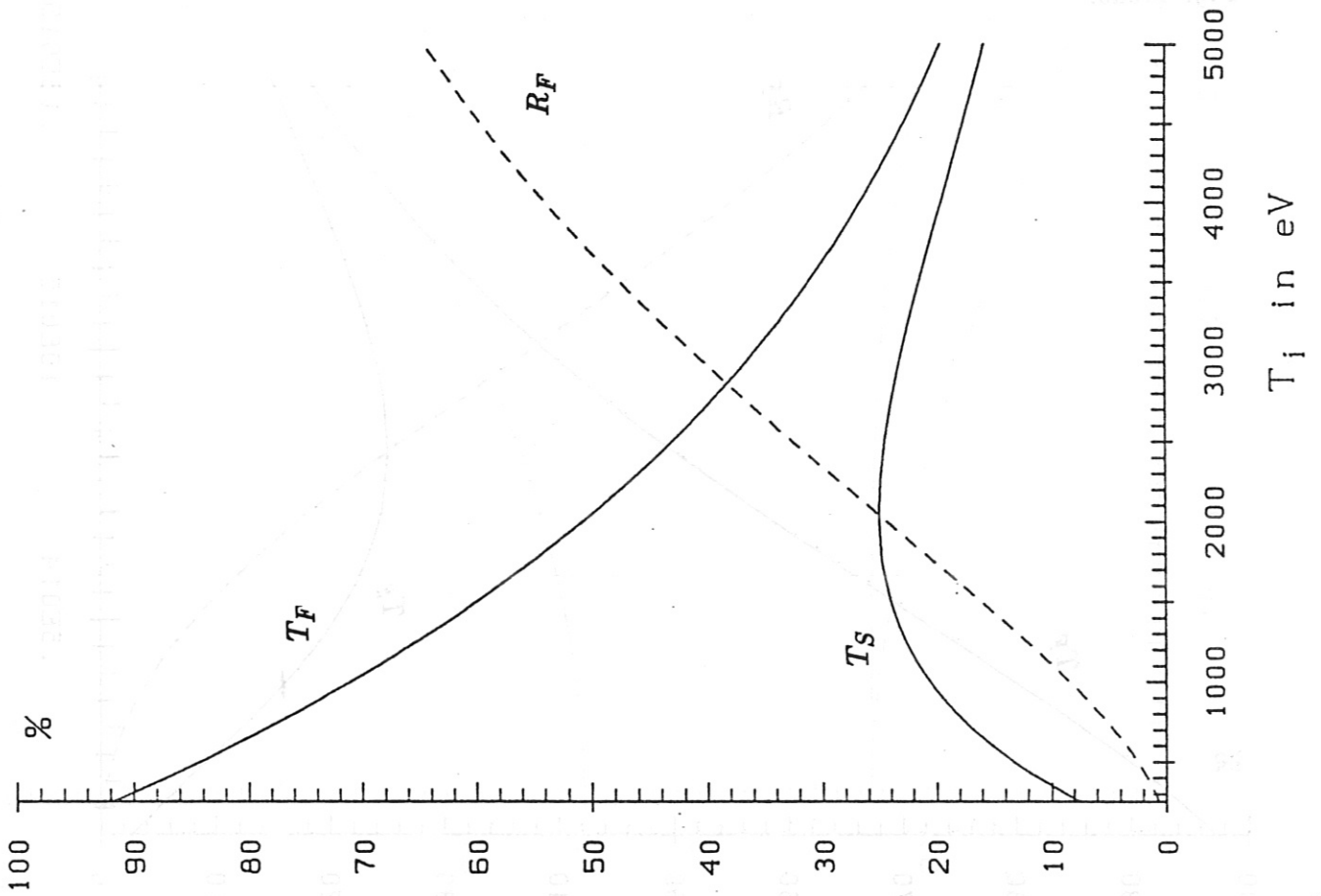


Fig. 4.8ab.

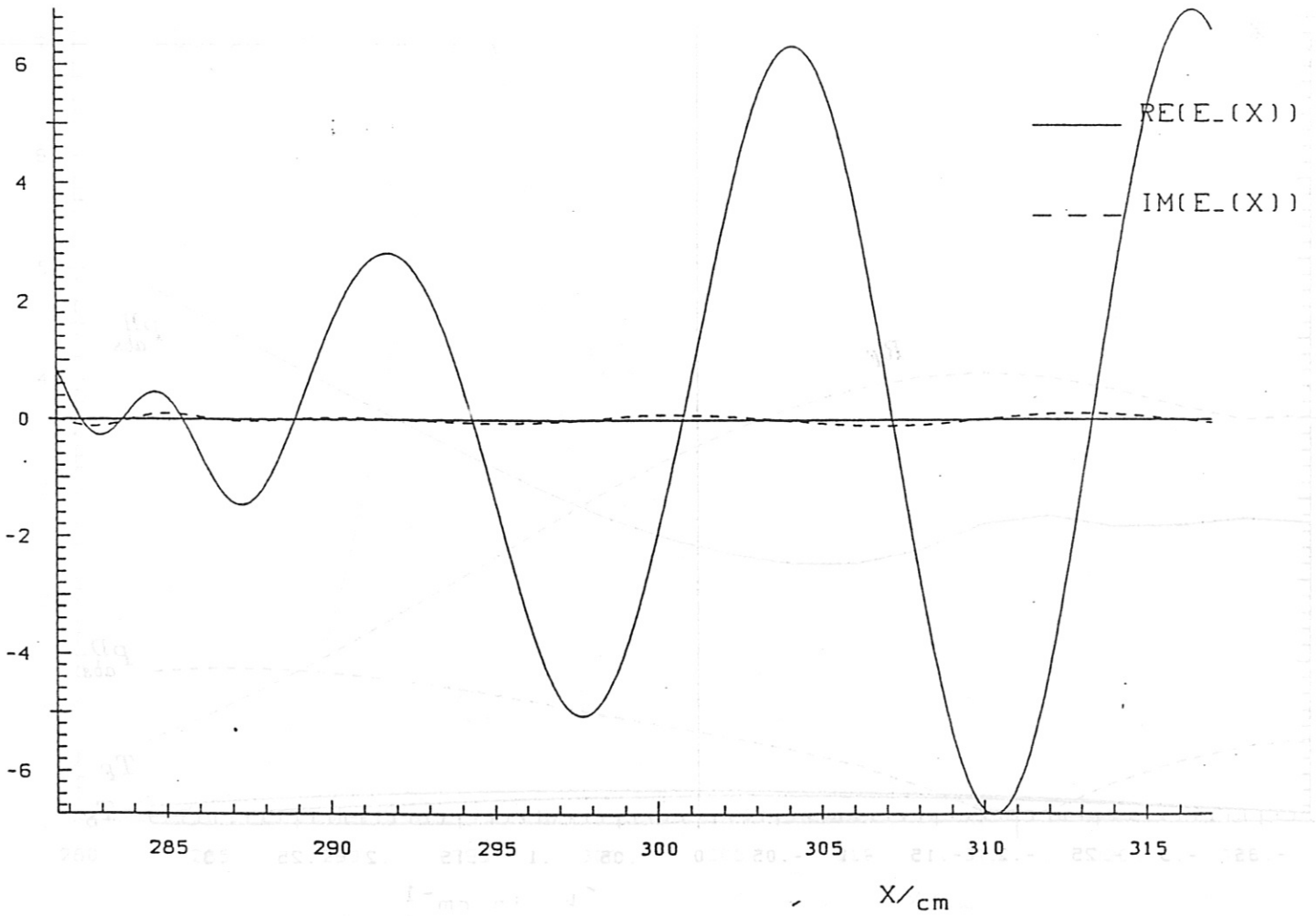
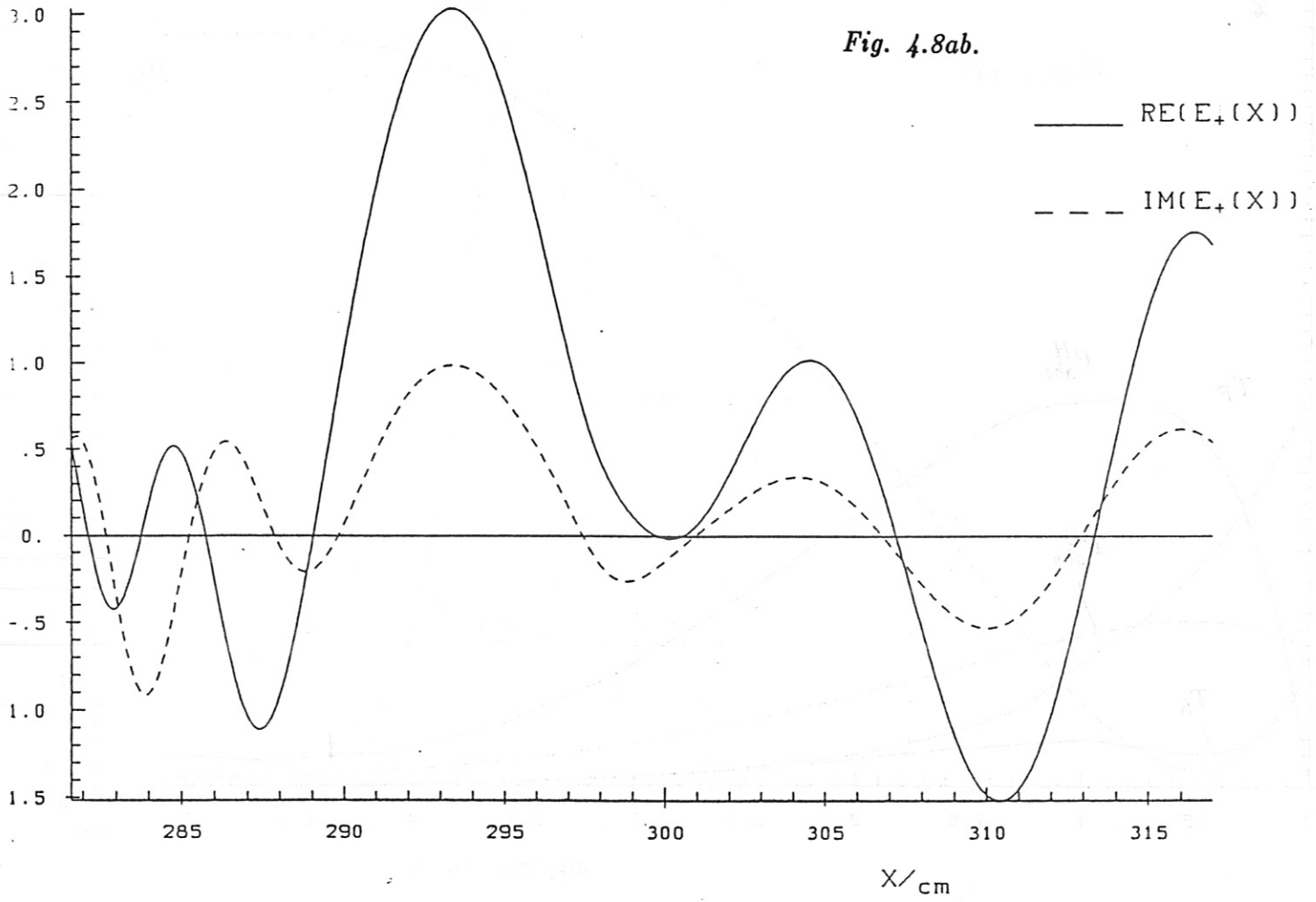


Fig. 4.9.

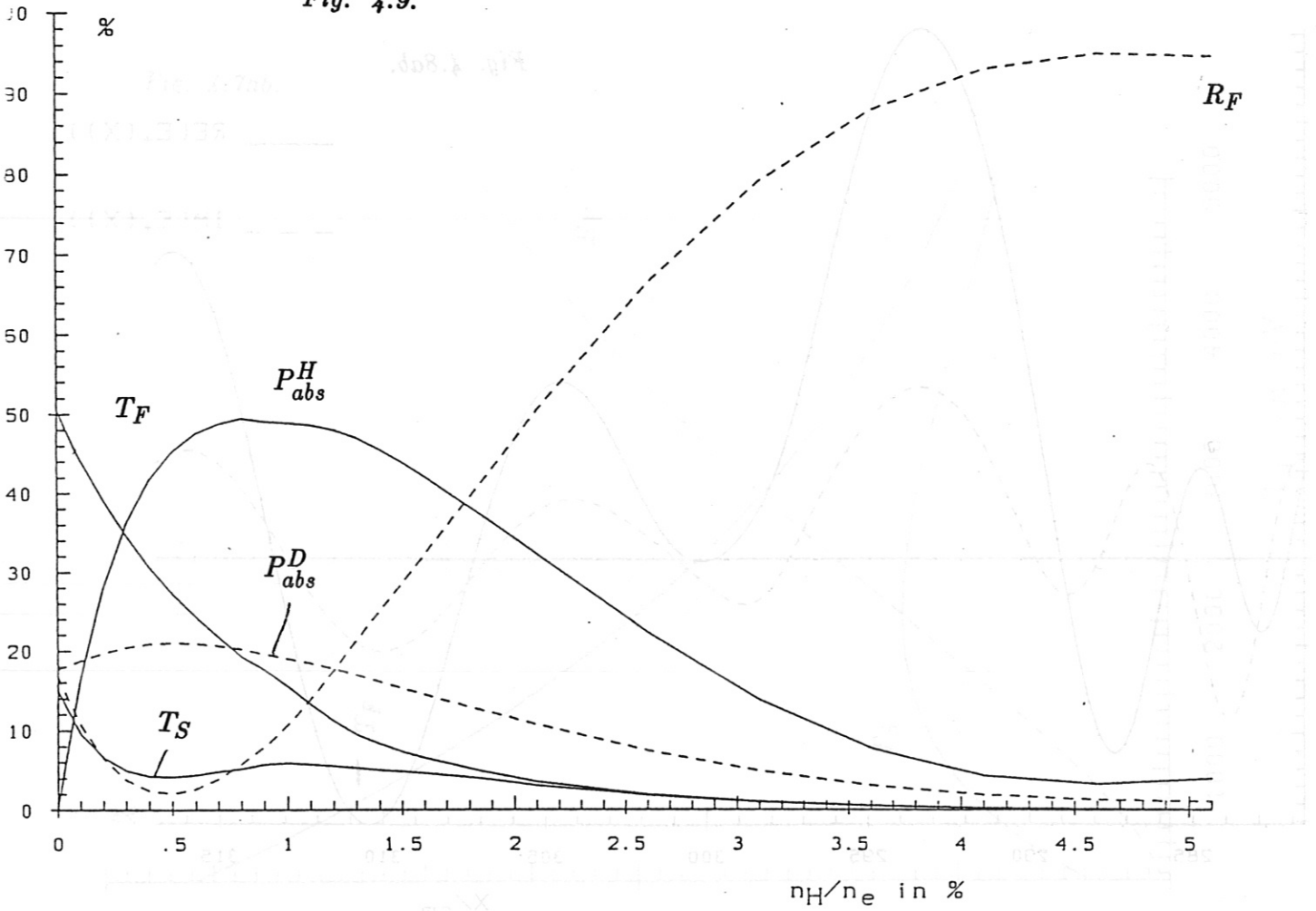


Fig. 4.10.

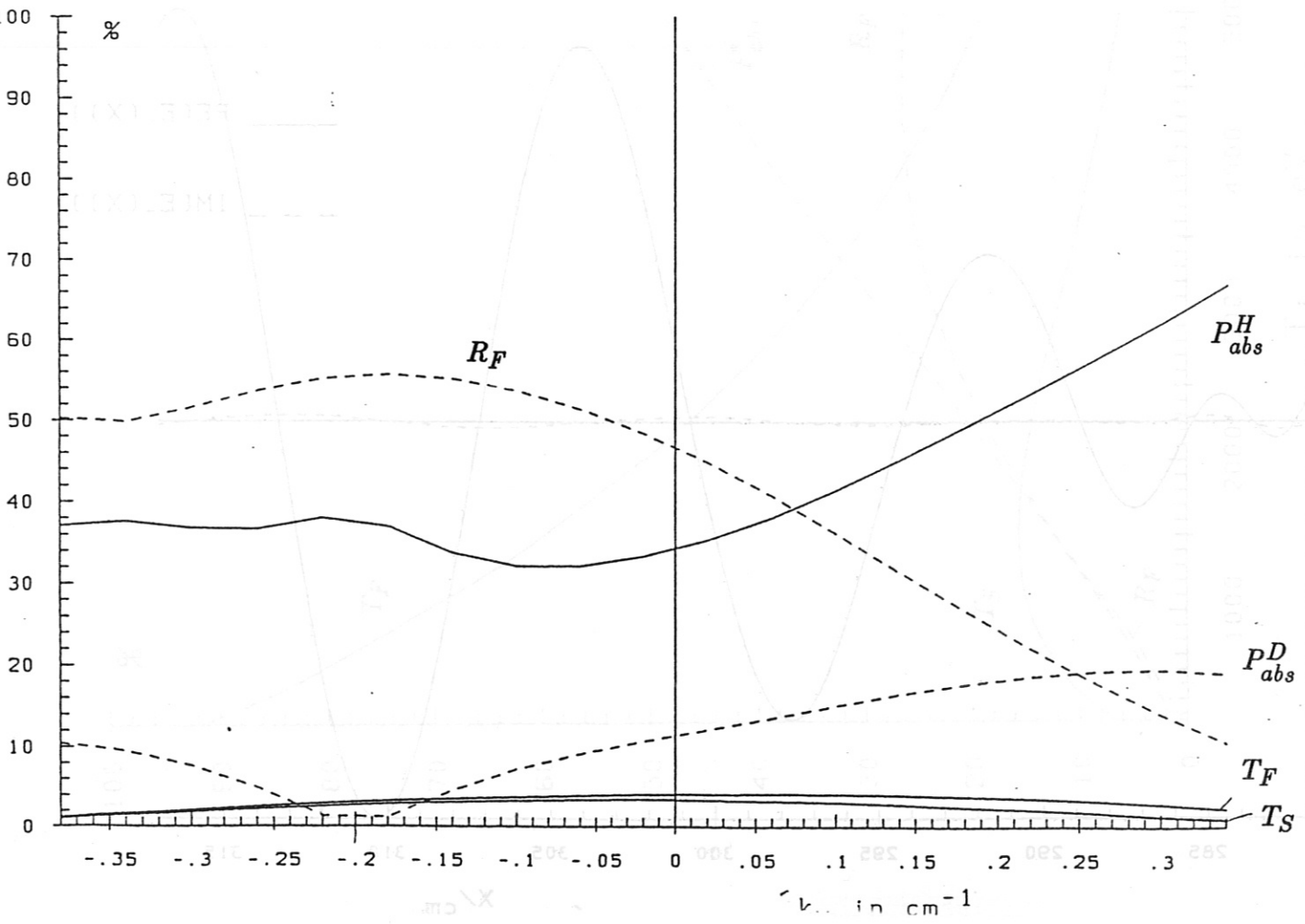


Fig. 4.11ab.

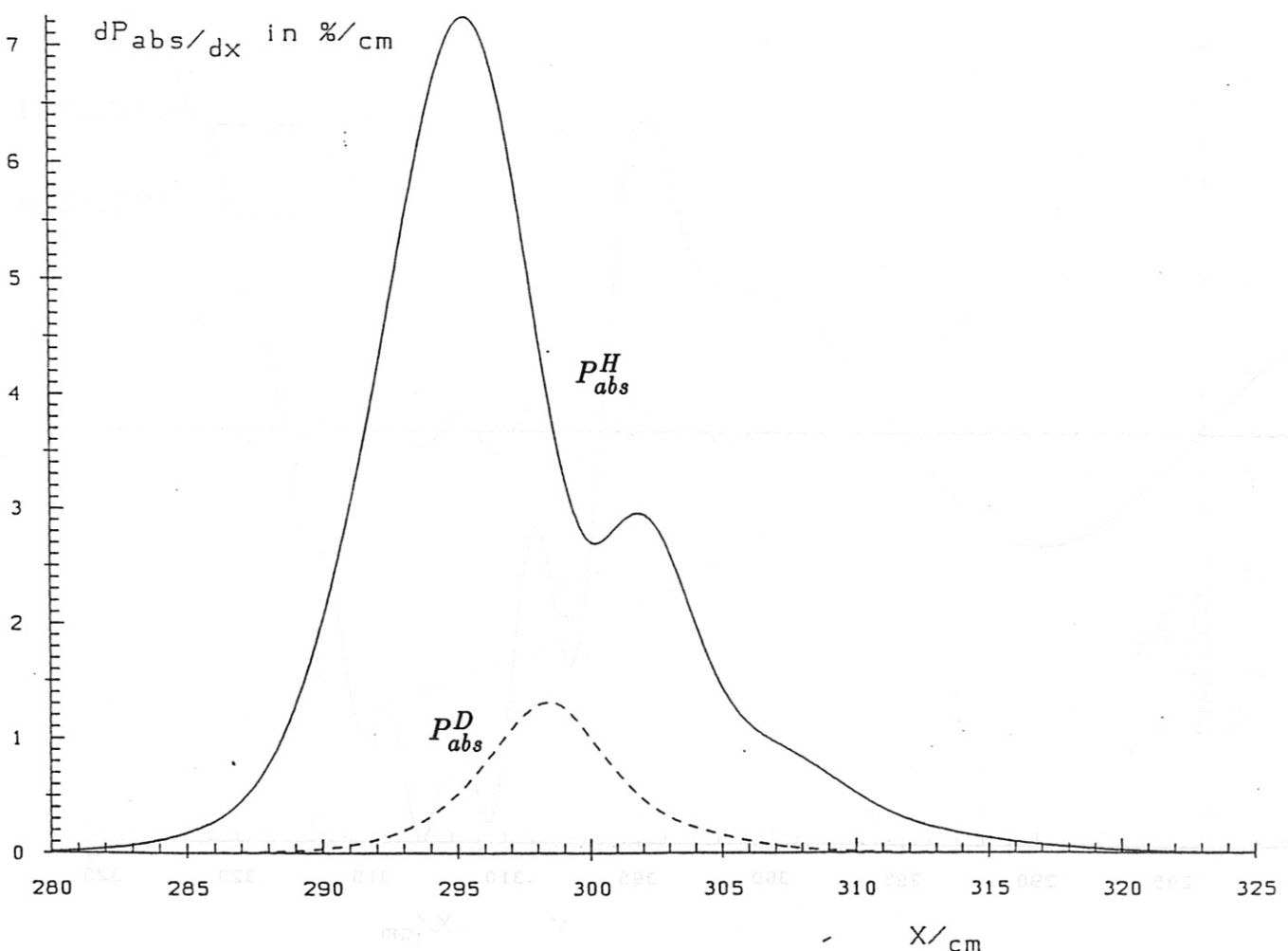
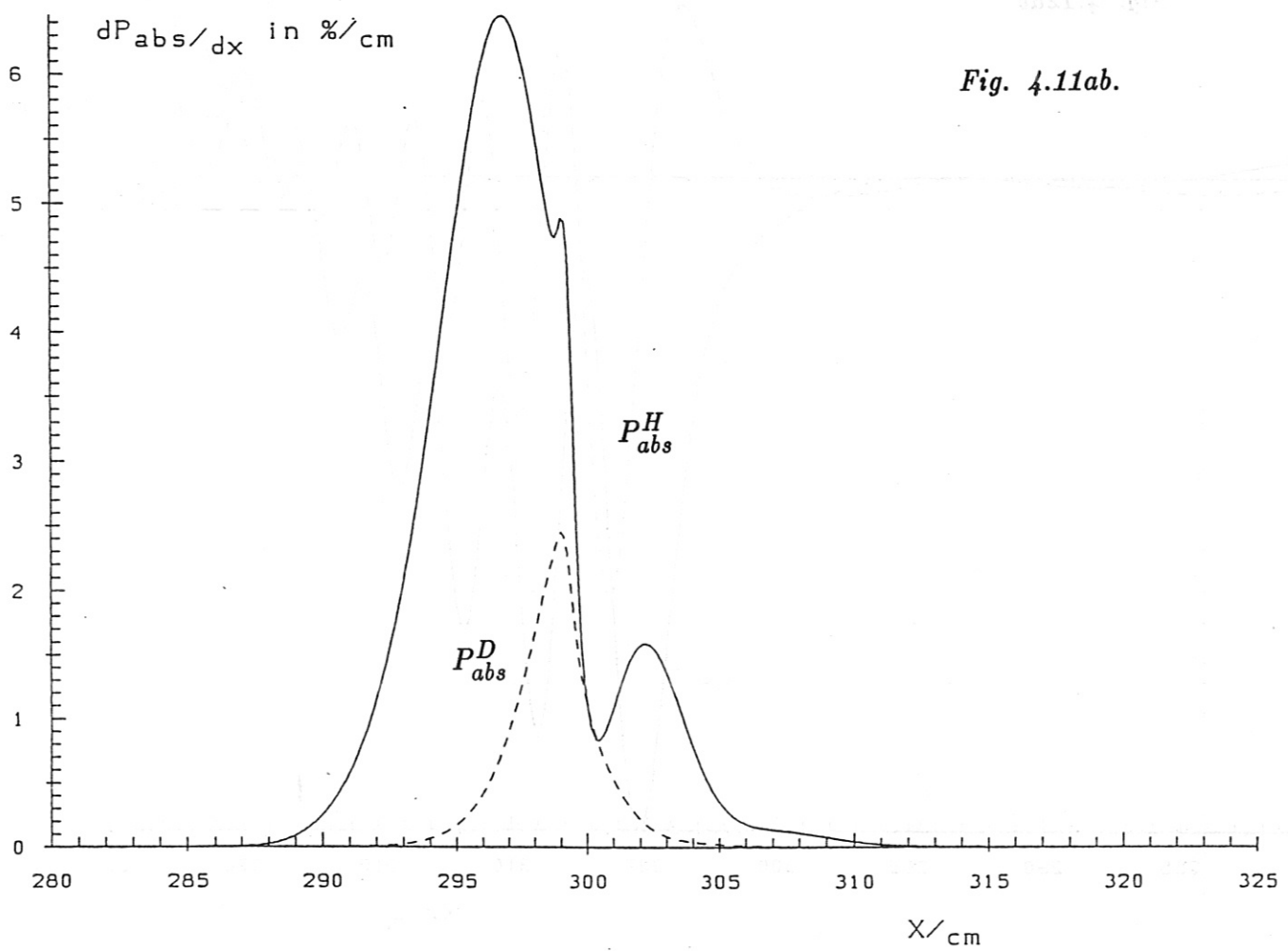


Fig. 4.12ab

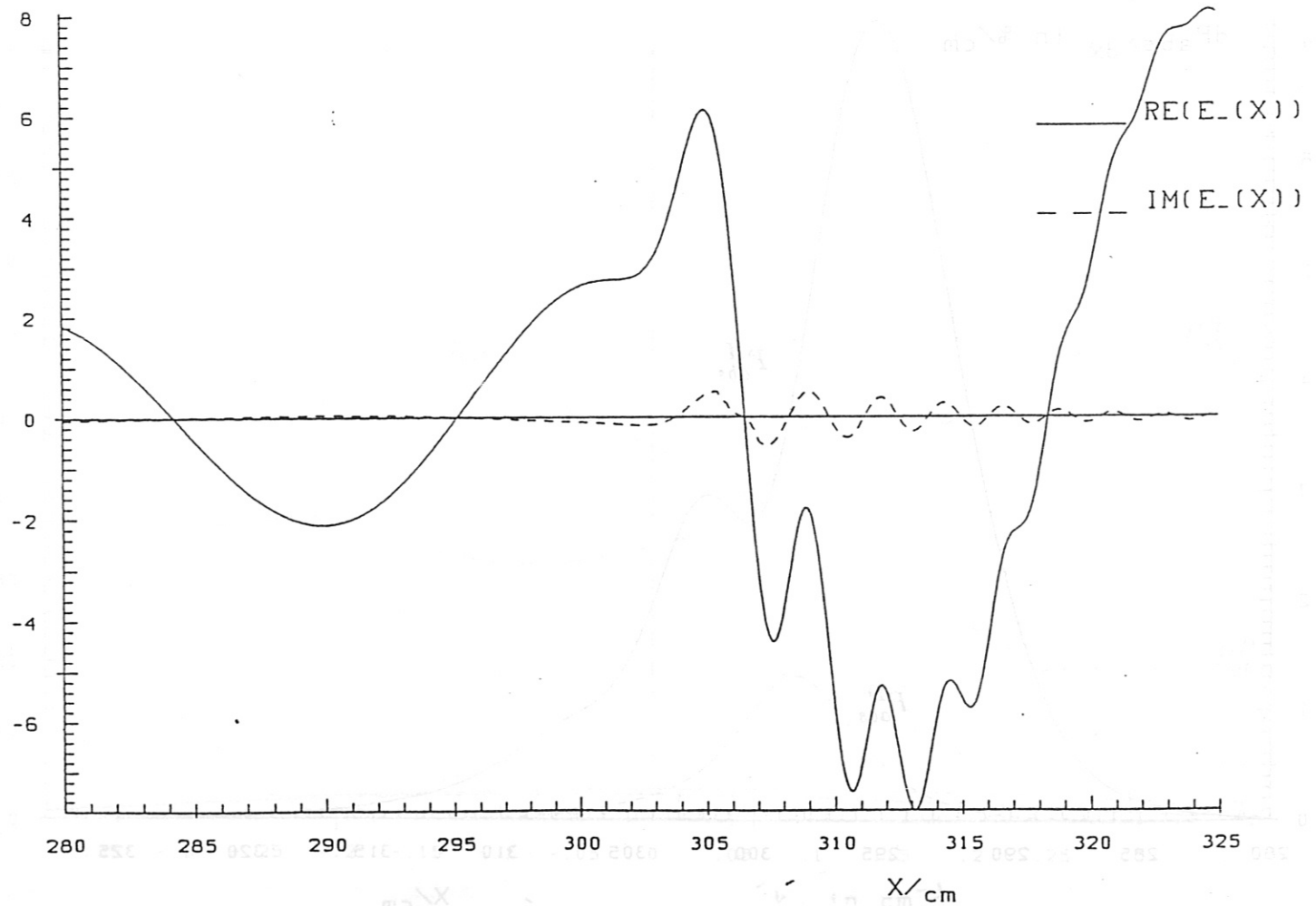
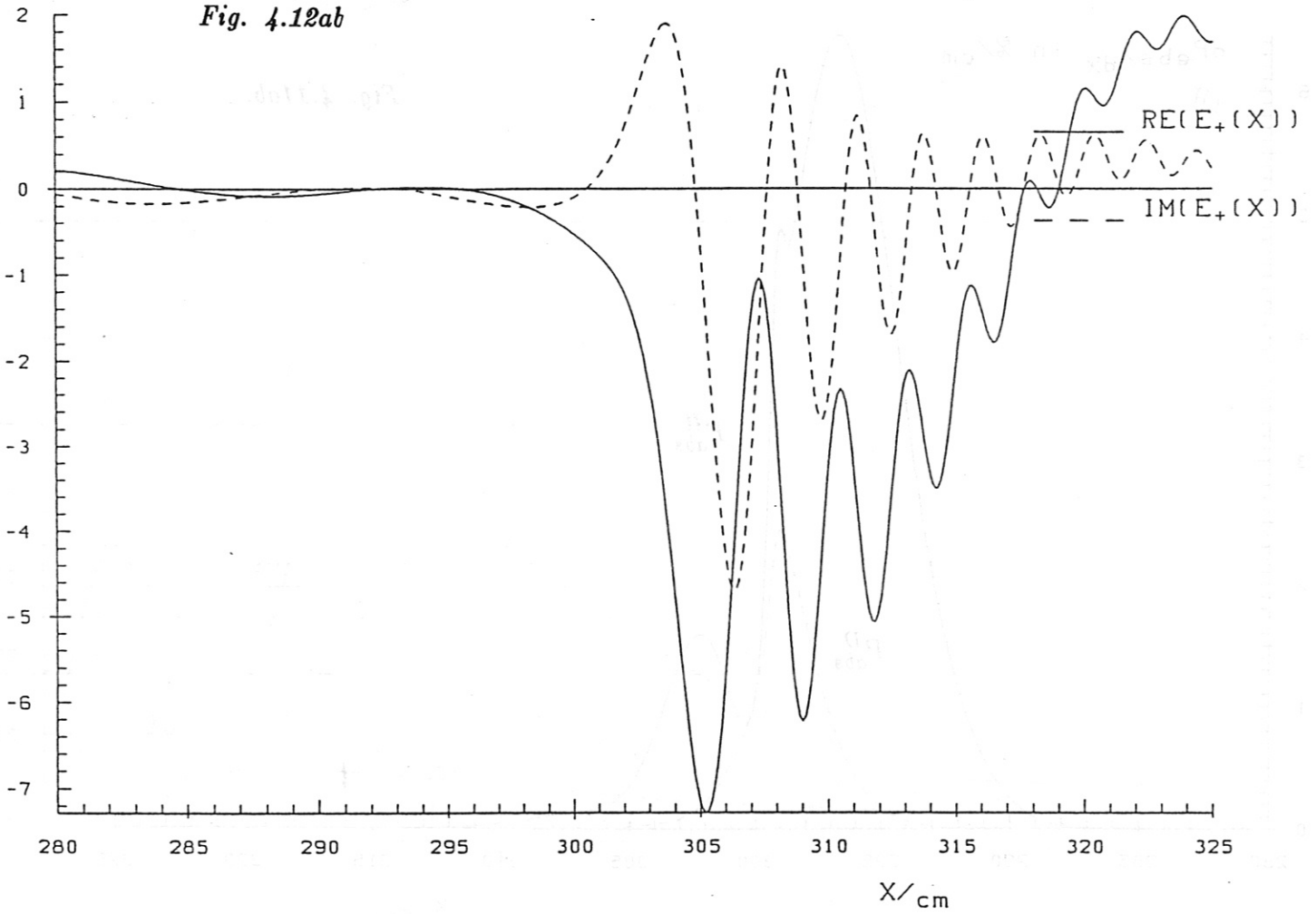


Fig. 4.13ab.

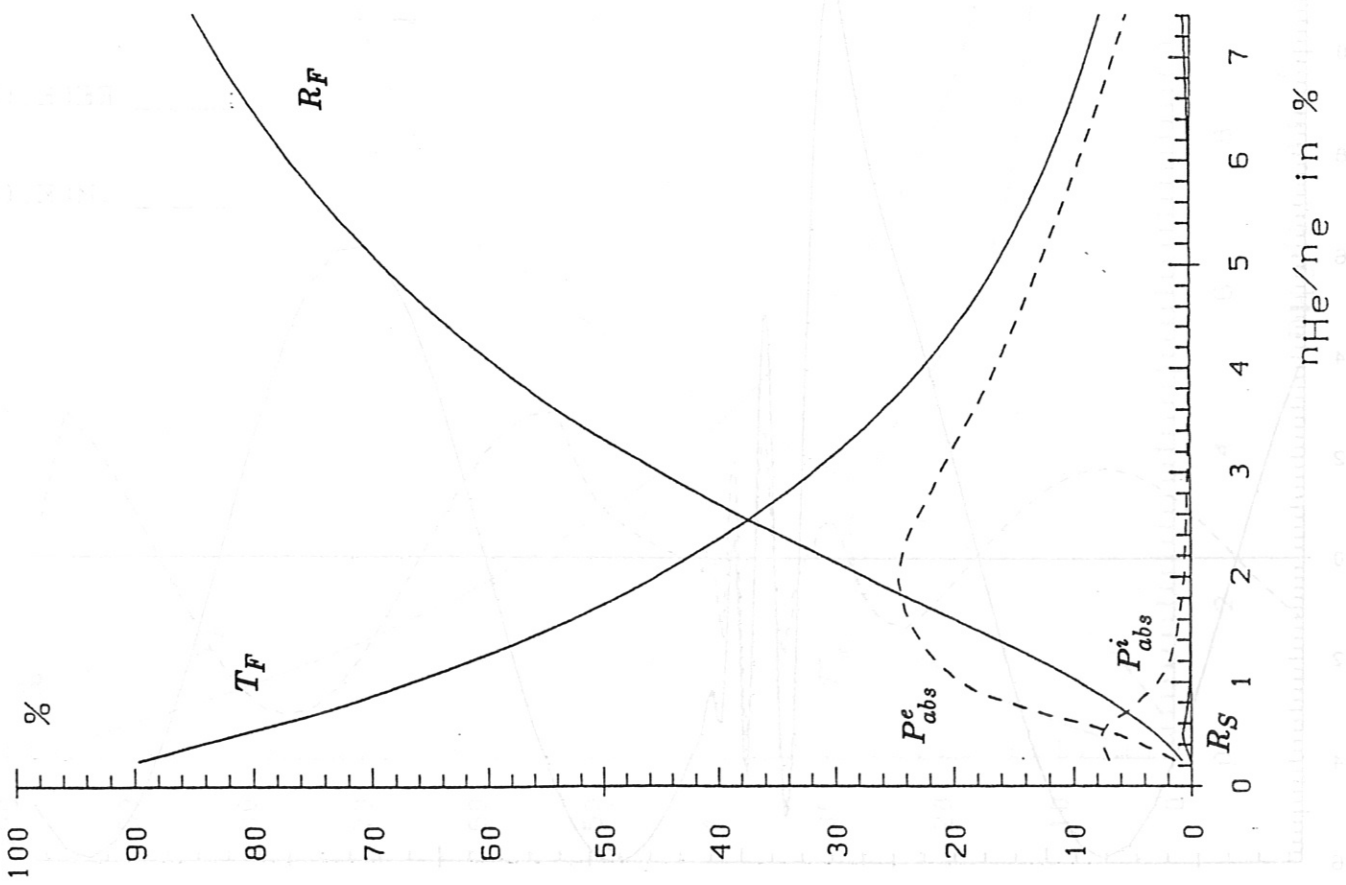
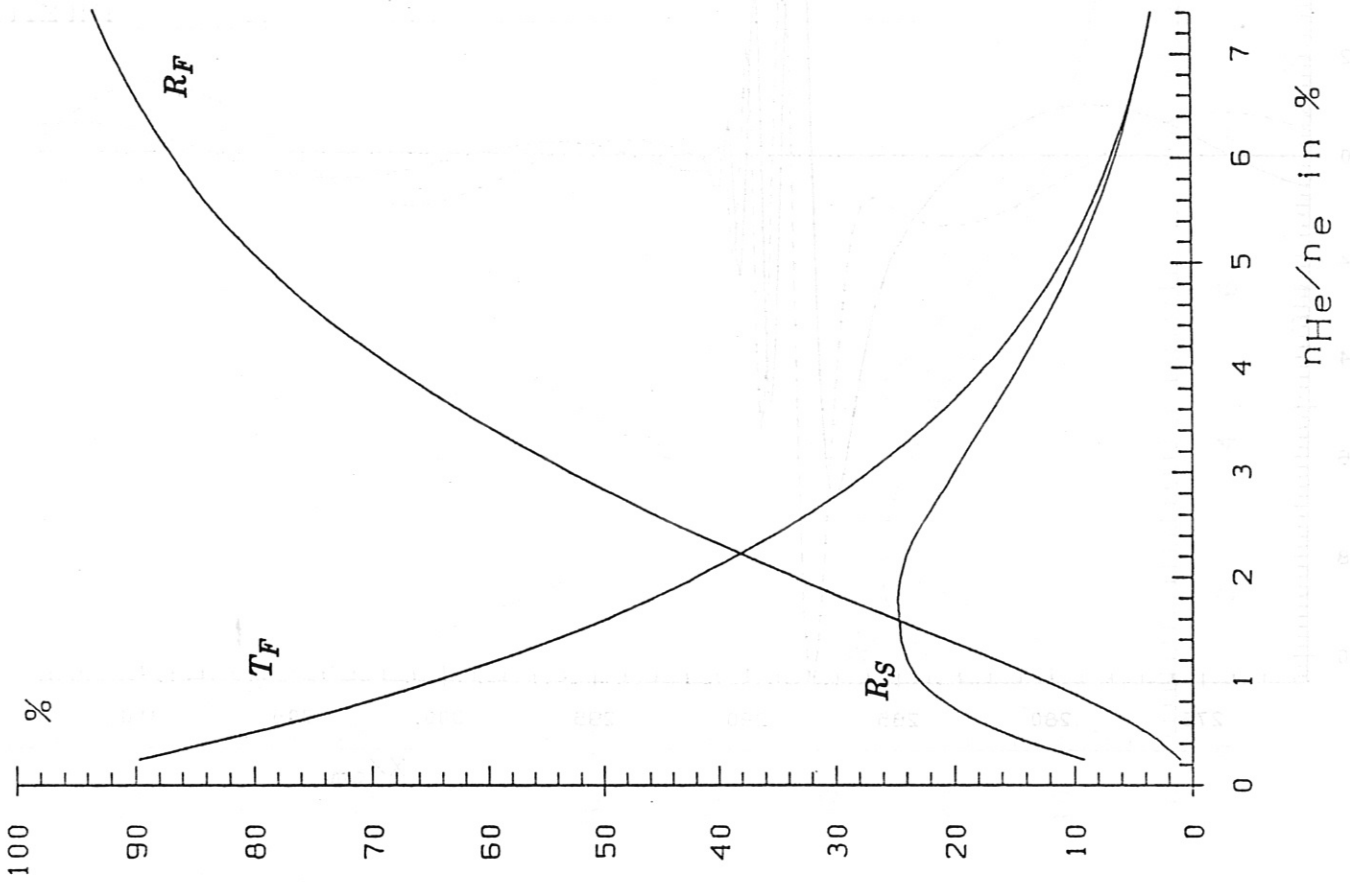


Fig. 4.14ab.

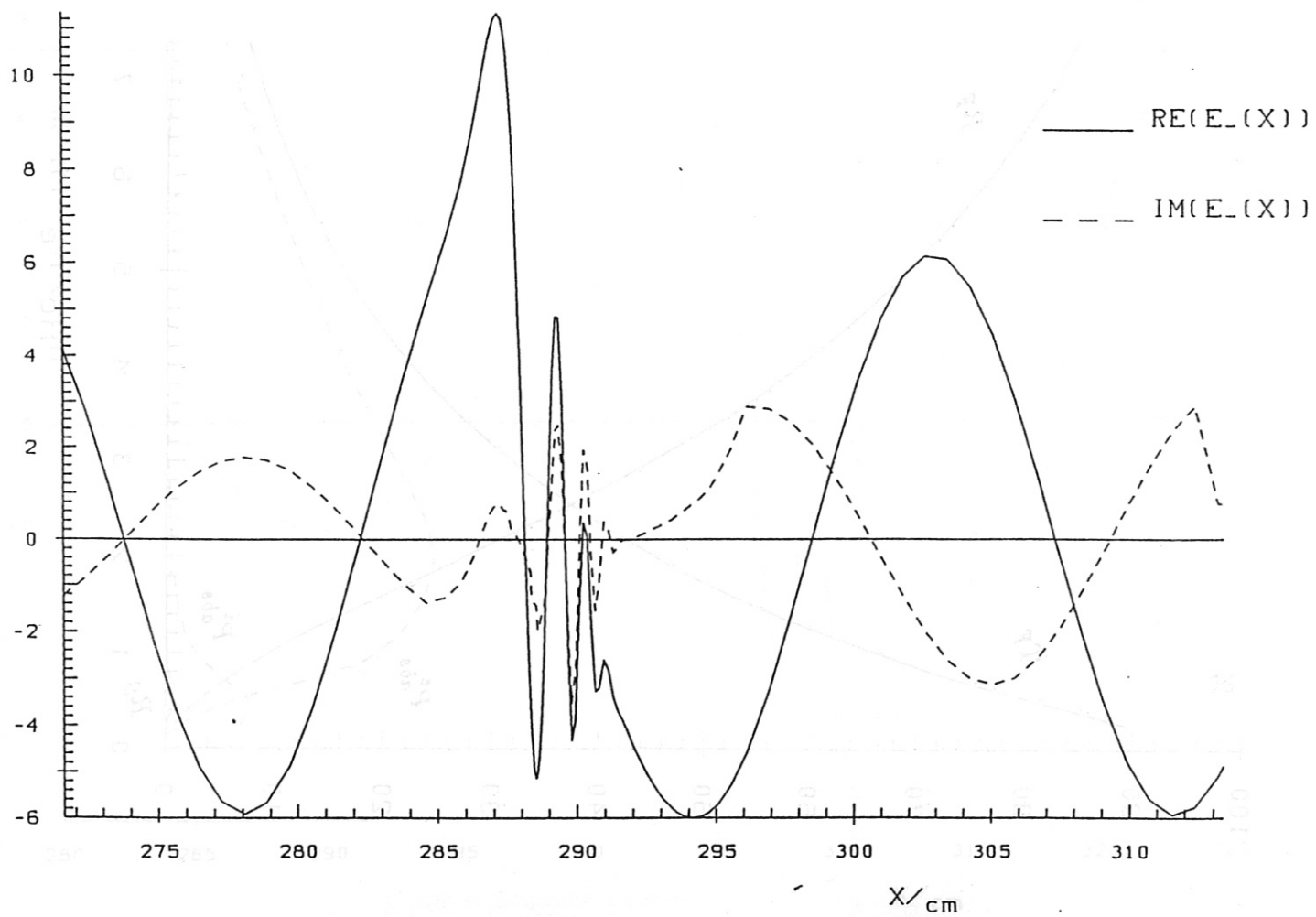
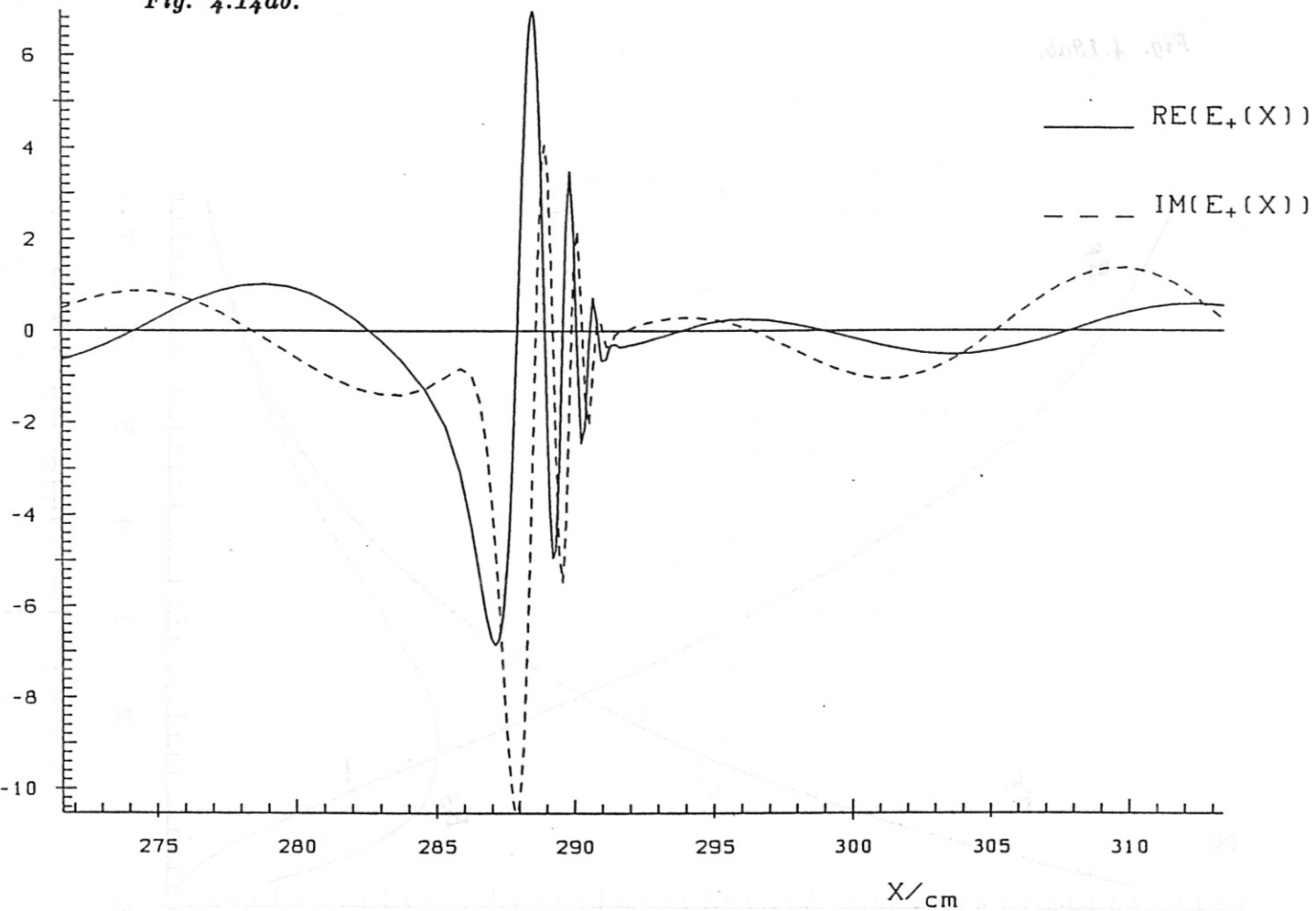
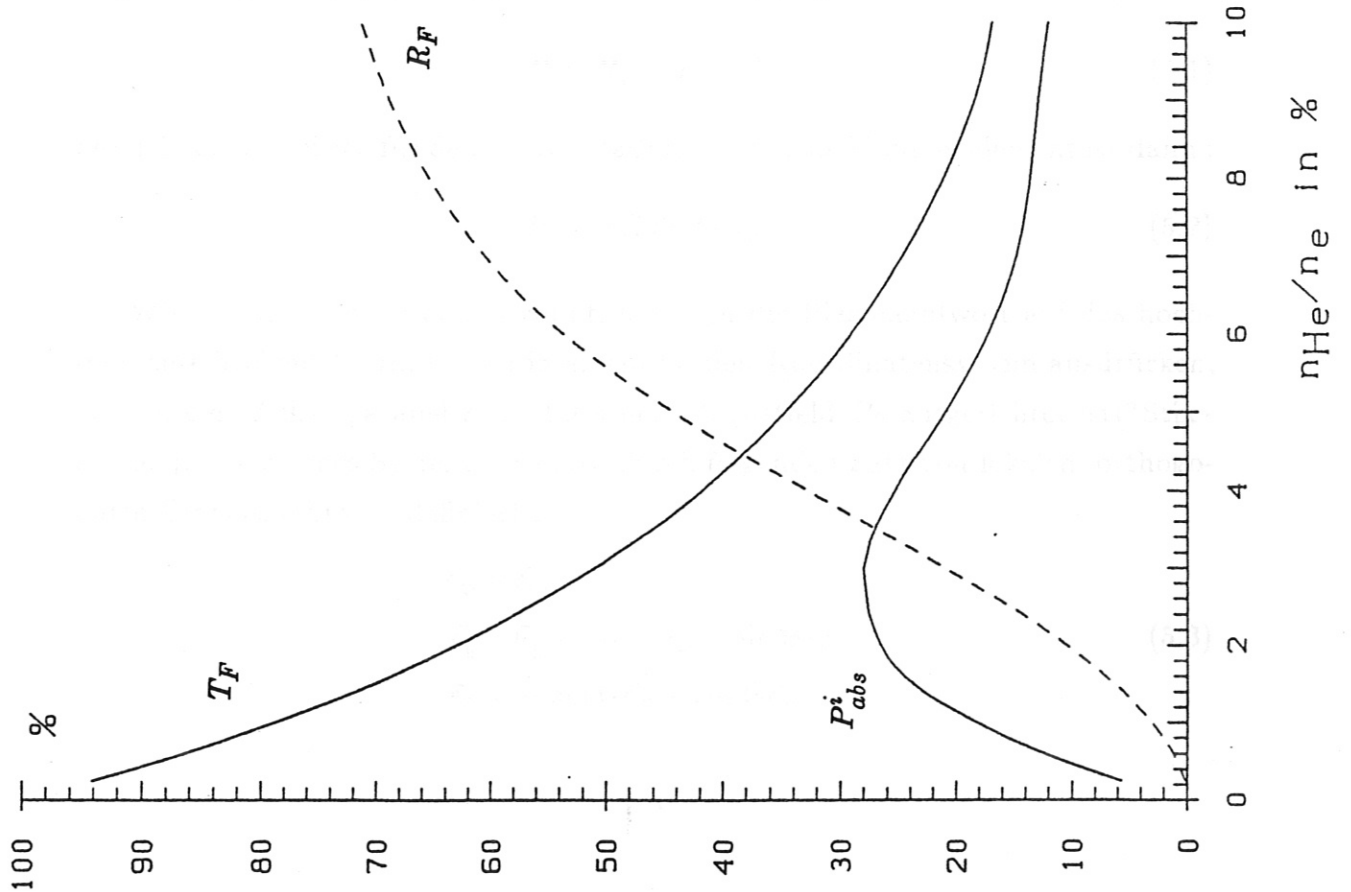
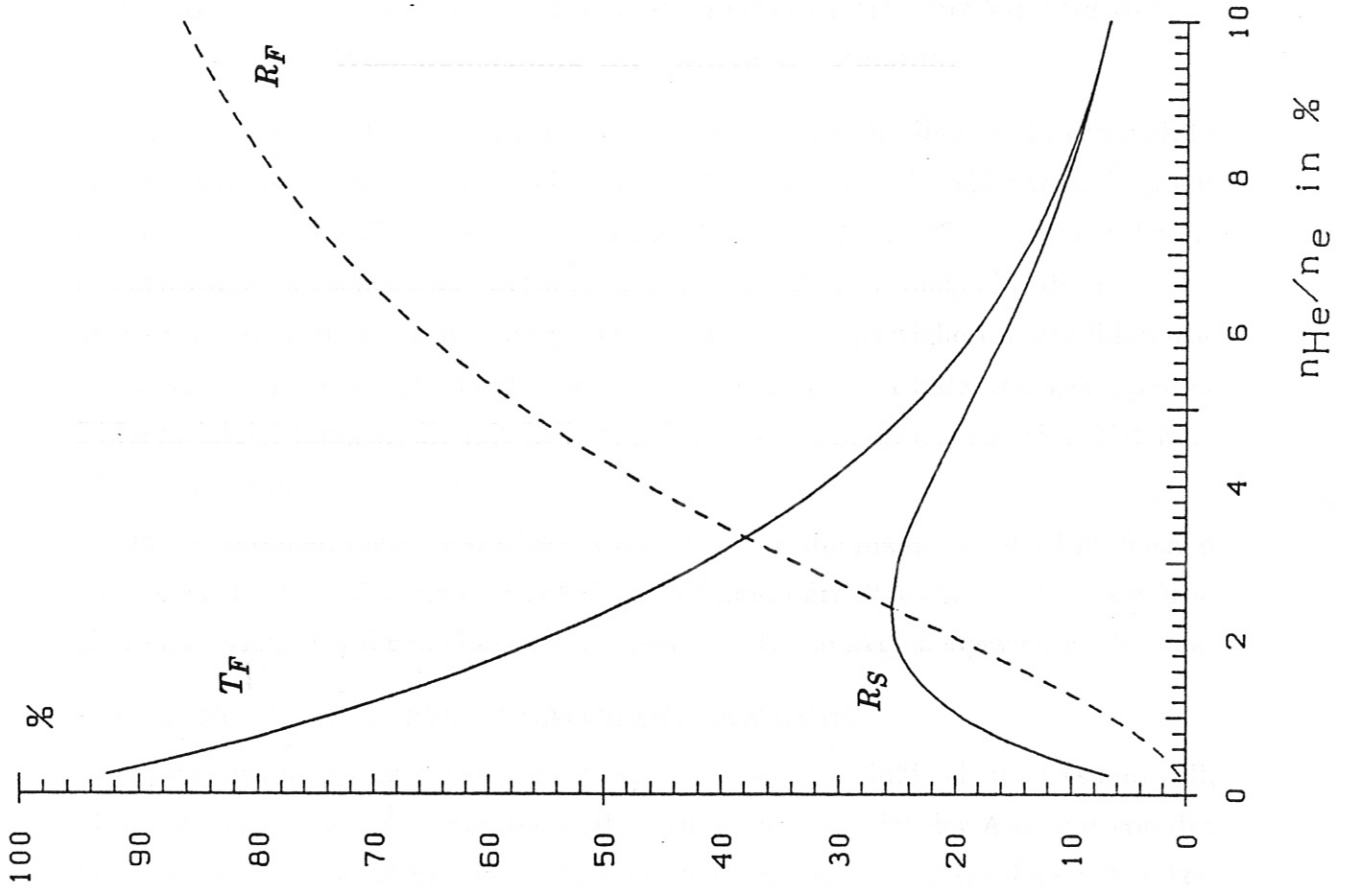


Fig. 4.15ab



5. Ein 3-d Modell mit voller Tokamakgeometrie zur Lösung der Wellengleichung im "warmen" Plasma.

In diesem Kapitel werden wir einen Algorithmus beschreiben, mit dessen Hilfe Gl. (2.6) für ein "warmes" Plasma in voller Tokamakgeometrie gelöst wird⁵³. Dazu haben wir eine von P. Colestock³¹ vorgeschlagene und von M. Brambilla⁵⁴ weiterentwickelte semispektrale Methode angewandt, die es ermöglicht, die Integraloperatoren analytisch zu berechnen. Dadurch wird die partielle Integrodifferentialgleichung für das elektromagnetische Wellenfeld in einen Satz von gekoppelten Differentialgleichungen, die mit Hilfe von finiten Elementen numerisch gelöst werden, umgewandelt.

In der momentanen Version des Modells haben die magnetischen Flußflächen konzentrische, kreisförmige Querschnitte. Die moduläre Struktur des Codes würde aber eine rasche Verallgemeinerung für beliebige Tokamakgleichgewichte erlauben.

5.1. BESCHREIBUNG DES PLASMAGLEICHGEWICHTS.

In einem Modell mit konzentrischen, kreisförmigen Flußflächen ist es sinnvoll, die pseudotoroidalen Koordinaten r, ϑ, φ zu benutzen. r ist der Anstand von der magnetischen Achse, ϑ und φ bezeichnen den poloidalen und toroidalen Winkel. Der Abstand zur Vertikalachse des Tokamaks wird mit

$$R = R_T + r \cos \vartheta \quad (5.1)$$

bezeichnet, wobei R_T für den großen Radius steht. Das Volumenelement ist dann :

$$dV = rR dr d\vartheta d\varphi \quad (5.2)$$

Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, läßt sich die Plasmaantwort auf das hochfrequente Wellenfeld am besten in einem lokalen Koordinatensystem ausdrücken, in dem eine Achse parallel zum statischen Magnetfeld \vec{B}_0 ausgerichtet ist ("Stix-frame"). Ein solches System wird z.B. durch folgenden Satz von lokalen, orthogonalen Einheitsvektoren definiert :

$$\begin{aligned} \vec{e}_\psi &= \vec{e}_r, \\ \vec{e}_\parallel &= \vec{u}_\parallel = \cos \Theta \vec{e}_\varphi + \sin \Theta \vec{e}_\vartheta, \\ \vec{e}_\eta &= -\sin \Theta \vec{e}_\varphi + \cos \Theta \vec{e}_\vartheta \end{aligned} \quad (5.3)$$

wobei

$$\tan \Theta = B_0^{pol} / B_0^{tor} \quad (5.4)$$

der Steigungswinkel der magnetischen Feldlinien ist. Da $B_0^{tor} \sim 1/R$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$, ist Θ eine Oberflächengröße, $\Theta = \Theta(r)$. Der lokale Sicherheitsfaktor q ist durch

$$q = \frac{B_0^{tor} r}{B_0^{pol} R} = \frac{r}{R \tan \Theta} \approx \frac{r}{R\Theta} \quad (5.5)$$

gegeben.

\vec{e}_ψ und \vec{e}_η sind an der magnetischen Achse, $r = 0$, nicht definiert. Daher muß man in den Gl. (2.35) für den Ionen FLR-Strom die rotierenden Einheitsvektoren

$$\vec{u}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\psi \mp i\vec{e}_\eta)e^{\mp i\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \mp i\vec{e}_y) \quad (5.6)$$

benutzen, wobei

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos \vartheta \vec{e}_\psi - \sin \vartheta \vec{e}_\eta, \\ \vec{e}_y &= \sin \vartheta \vec{e}_\psi + \cos \vartheta \vec{e}_\eta \end{aligned} \quad (5.7)$$

und

$$E_\pm = (\vec{u}_\pm \cdot \vec{E})$$

überall definiert sind. Mit Hilfe von Gl. (5.3) können die Differentialoperatoren $\text{grad } \phi$, $\text{div } \vec{E}$, $\text{rot } \vec{E}$ und $\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp$ in eine Form gebracht werden, in der explizit zwischen senkrechten und parallelen Komponenten unterschieden wird :

$$\text{grad } \phi = \vec{e}_\psi \frac{\partial}{\partial r} \phi + \vec{e}_\eta \left(\frac{\cos \Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \phi + \vec{e}_\parallel \left(\frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \phi \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_\psi}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \right) E_\psi \\ &+ \left(\frac{\cos \Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) E_\eta + \frac{\cos \Theta}{rR} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} E_\eta \\ &+ \left(\frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) E_\parallel + \frac{\sin \Theta}{rR} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} E_\parallel \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{e}_\psi \cdot & \left[- \left(\frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) E_\eta - \frac{\sin \Theta}{rR} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} E_\eta \right. \\
& \left. + \left(\frac{\cos \Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) E_\parallel + \frac{\cos \Theta}{rR} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} E_\parallel \right] \\
+ \vec{e}_\eta \cdot & \left[\left(\frac{\sin \Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) E_\psi \right. \\
& + \left(\sin \Theta \cos \Theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) E_\eta \\
& \left. - \frac{\partial E_\parallel}{\partial r} - \left(\frac{\cos^2 \Theta}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\sin^2 \Theta}{r} \right) E_\parallel \right] \\
+ \vec{e}_\parallel \cdot & \left[- \left(\frac{\cos \Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) E_\psi \right. \\
& + \frac{\partial E_\eta}{\partial r} + \left(\frac{\sin^2 \Theta}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\cos^2 \Theta}{r} \right) E_\eta \\
& \left. - \left(\sin \Theta \cos \Theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) E_\parallel \right]
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp = \vec{u}_\parallel \left((\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp) \cdot \vec{u}_\parallel \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{E}_\parallel)_\perp = \\
\vec{e}_\psi \cdot & \left[\left(\frac{\cos \Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) E_\parallel + \frac{\cos \Theta}{rR} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} E_\parallel \right] \\
+ \vec{e}_\eta \cdot & \left[- \frac{\partial E_\parallel}{\partial r} - \left(\frac{\cos^2 \Theta}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\sin^2 \Theta}{r} \right) E_\parallel \right] \\
+ \vec{e}_\parallel \cdot & \left[- \left(\frac{\cos \Theta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) E_\psi \right. \\
& \left. + \frac{\partial E_\eta}{\partial r} + \left(\frac{\sin^2 \Theta}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\cos^2 \Theta}{r} \right) E_\eta \right]
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Diese Gleichungen sind ein Sonderfall der in Ref. 54 für beliebige Flußflächen angegebenen Ausdrücke.

5.2. RAND- UND ANSCHLUSSBEDINGUNGEN.

In einem Modell mit diffusem Plasmarand, d.h. das Plasma erstreckt sich bis zur perfekt leitenden Gefäßwand bei $r = r_W$, ergeben sich folgende Randbedingungen :

$$E_\parallel = 0 \quad ; \quad E_\eta = 0 \tag{5.12}$$

Da die FLR-Terme die Ordnung der Differentialgleichung erhöhen, muß noch eine

zusätzliche Bedingung gestellt werden :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_+ E_+) = 0 \quad (5.13)$$

Dadurch wird erzwungen, daß der kinetische Fluß an der Wand verschwindet (wobei wir die extrem kleinen Beiträge durch $\vec{J}_e^{(2)}$ vernachlässigt haben).

Der Faraday Schirm befindet sich unmittelbar vor dem Antennenrückleiter. Wir nehmen an, daß sie in der selben magnetischen Flußfläche bei $r = r_A$ liegen. Da die schnelle Welle angeregt werden soll, fließt der Strom senkrecht zu \vec{B}_0 :

$$\vec{J}_A = \vec{e}_\eta \delta(r - r_A) \cdot J_A(\vartheta, \varphi) = \vec{e}_\eta \delta(r - r_A) \cdot \sum_{n_\varphi} J_A^{n_\varphi}(\vartheta) e^{in_\varphi \varphi} \quad (5.14)$$

Wir können insbesondere nicht die radialen Ströme in den Zu- und Rückführungen berücksichtigen. Wegen der Toroidalsymmetrie eines Tokamaks wird jede Toroidalmode des elektrischen Wellenfeldes separat durch die entsprechende Mode des Antennen Oberflächenstromes $J_A^{n_\varphi}(\vartheta)$ angeregt. Für eine Dipolantenne mit einem einzigen Zentralleiter mit einer toroidalen Breite w_A , $x = \frac{w_A}{2(R_T + r_A)}$,

$$J_A(\vartheta, \varphi) = J_A(\vartheta) \begin{cases} \pi/x, & \text{if } -x \leq \varphi \leq x \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5.15)$$

erhält man z.B. folgendes Spektrum :

$$J_A^{n_\varphi}(\vartheta) = J_A(\vartheta) \begin{cases} \frac{\sin n_\varphi x}{n_\varphi x}, & \text{for } n_\varphi \neq 0 \\ 1, & \text{for } n_\varphi = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

wobei wir annehmen, daß die poloidale Stromverteilung $J_A(\vartheta)$ durch die Antenneneigenschaften (LC-Konstante, Position von Zu- und Rückführungen) gegeben ist, d.h. es wird kein Versuch gemacht, $J_A(\vartheta)$ selbstkonsistent zu berechnen. (Eine solche Berechnung wurde z.B. in Ref.32 für slab-Geometrie durchgeführt) Die Anschlußbedingungen bei $r = r_A$ lauten dann für jede Toroidalmode :

$$[B_\parallel] = \frac{4\pi}{c} J_A^{n_\varphi}(\vartheta) \quad (5.17)$$

$$[E_\eta] = 0 \quad (5.18)$$

$$[\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_+ E_+)] = 0 \quad (5.19)$$

$$E_{\parallel} = 0 \quad (5.20)$$

Die letzte Bedingung wird auf der ganzen Flußfläche gestellt (complete screen), und die rechteckige Klammer steht für einen Sprung von der Innen- zur Außenseite der Antenne.

Außer diesen Rand- und Anschlußbedingungen müssen an der magnetischen Achse noch Regularitätsbedingungen gestellt werden, die in Kapitel 5.7 behandelt werden.

5.3. SPEKTRALE DARSTELLUNG DES ELEKTRISCHEN WELLENFELDES UND DES H.F. PLASMASTROMS.

Um das gekoppelte System von partiellen Integrodifferentialgleichungen zu lösen, entwickeln wir die Komponenten des elektrischen Wellenfeldes nach poloidalen und toroidalen Fouriermoden :

$$\vec{E} = \sum_{m, n_{\varphi}} \vec{E}^{m, n_{\varphi}}(r) e^{i(m\vartheta + n_{\varphi}\varphi)} \quad (5.21)$$

Jede Toroidalmode wird separat behandelt, da das Wellenfeld und die Leistungsdepositionsprofile additiv in n_{φ} sind. Wir werden daher in den folgenden Ausdrücken die ignorable Koordinate φ bzw. die gute Quantenzahl n_{φ} nur dann hinschreiben, wenn es zum Verständnis erforderlich ist.

Im Gegensatz dazu gibt es eine starke Kopplung zwischen den poloidalen Fouriermoden, die nicht einmal näherungsweise Eigenmoden sind. Eine zufriedenstellende Auflösung des Wellenfeldes erfordert eine große Anzahl von poloidalen Moden. Das größte $|m|$ ist dabei durch die kürzeste von der Dispersionsrelation zugelassene Wellenlänge gegeben. Der Vorteil der spektralen Methode ist, daß sie eine (näherungsweise) analytische Berechnung der im "warmen" Plasma in Tokamakgeometrie vorkommenden Integrale ermöglicht: Jede Mode korrespondiert zu einer parallelen Wellenzahl

$$k_{\parallel}^{m, n_{\varphi}}(r, \vartheta) = m \frac{\sin \Theta}{r} + n_{\varphi} \frac{\cos \Theta}{R} \simeq \frac{(n_{\varphi} + m/q)}{R}. \quad (5.22)$$

Als nächstes nehmen wir in den Integralen entlang ungestörter Teilchenbahnen an, daß $v_{\parallel} = konst.$ ist (ballistische Approximation). Das ist gerechtfertigt, da die Beiträge von eingeschlossenen Teilchen, deren Reflektionspunkt in der Nähe einer

Zyklotronresonanz liegt, sehr gering sind, und für durchlaufende Teilchen ist die durch die Variation des statischen Magnetfeldes hervorgerufene Modulation von v_{\parallel} ,

$$\frac{\Delta v_{\parallel}}{v_{\parallel}} \simeq \frac{v_{\perp}^2}{2v_{\parallel}} \sqrt{\frac{\pi \sin \Theta}{\Omega_{ci} v_{\parallel} R_T}} \ll 1, \quad (5.23)$$

sehr klein. Eine allgemeine Methode zur Berechnung der Plasmaantwort unter Berücksichtigung beliebiger Teilchenbahnen im Tokamakgeometrie wird in Ref.55 diskutiert.

In Termen, die Ionenzyklotrondämpfung beschreiben, müssen dann noch die Integrale

$$\begin{aligned} \hat{Z}_i^n(r, \vartheta; m) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi} v_{thi}} \left\{ i\omega \int_0^{\infty} d\tau e^{i \int_0^{\tau} (\omega - n\Omega_{ci}(r, \vartheta') - k_{\parallel}^m(r, \vartheta') v_{\parallel}) dr'} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi} v_{thi}} \left\{ i\omega \int_0^{\infty} d\tau e^{i\Psi(r, \vartheta; m; \tau)} \right\} \end{aligned} \quad (5.24)$$

berechnet werden. In erster Ordnung im inversen Aspektverhältnis r/R erhält man für den Exponenten in Gl. (5.24)⁵⁶ :

$$\begin{aligned} \Psi(r, \vartheta; m; \tau) &\simeq (\omega - n\Omega_{ci}(r, \vartheta) - k_{\parallel}^m(r, \vartheta) v_{\parallel}) \tau \\ &+ \frac{r}{R} n\Omega_{ci} \left\{ \cos \vartheta \cdot \tau + \frac{r}{v_{\parallel} \sin \Theta} \left[\sin \left(\vartheta - \frac{v_{\parallel}}{r} \sin \Theta \cdot \tau \right) - \sin \vartheta \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Bei Berücksichtigung von Beiträgen höherer Ordnung in r/R würden Terme höherer Periodizität, d.h. $\sim (\sin k\vartheta' - \sin k\vartheta)$ mit $k \geq 2$, mit schnell abnehmenden Koeffizienten dazukommen, die vernachlässigt werden können. Aber selbst in dieser Näherung ist die Berechnung von Gl. (5.24) nicht trivial. Im allgemeinen nimmt man an, daß die Phasenbeziehung zwischen dem elektromagnetischen Wellenfeld und der Bewegung eines Teilchens zwischen zwei Durchläufen durch eine Zyklotronresonanz durch Stöße oder durch Stochastisierung der Bahn im k_{\parallel} -Spektrum (siehe dazu z.B. einen Review von T. Stix⁵⁷) zerstört wird. Die Phase kann dann um $\tau = 0$ in eine Taylor-Reihe entwickelt werden:

$$\Psi \simeq (\omega - n\Omega_{ci}(r, \vartheta) - k_{\parallel}^m(r, \vartheta) v_{\parallel}) \tau + \delta v_{\parallel} \tau^2 + \dots \quad (5.26)$$

wobei

$$\delta = -n\Omega_{ci} \frac{\sin \Theta \sin \vartheta}{2R} \quad (5.27)$$

Das ist selbstverständlich auch für eingeschlossene Teilchen, deren Reflektionspunkt nicht zu nahe bei einer resonanten Schicht liegt, gerechtfertigt. Die resultierende Approximation für $\hat{Z}_i^n(r, \vartheta; m)$,

$$\hat{Z}_i^n(r, \vartheta; m) \simeq i\omega \int_0^\infty d\tau e^{[i(\omega - n\Omega_{ci}) - (k_{\parallel} v_{thi} \tau + \delta v_{thi} \tau^2)/4]} \quad (5.28)$$

ist in der Literatur sowohl analytisch als auch numerisch untersucht worden^{56,30,29,58,59}. Unter den zusätzlichen Bedingungen

$$\frac{\nu_{eff}}{\Omega_{ci}} \gtrsim \frac{\rho_{L,i}}{qR}, \quad (5.29)$$

wobei ν_{eff} für eine mittlere Stoßfrequenz, d.h. für den Imaginärteil von ω , steht, und

$$\left| \frac{\omega - n\Omega_{ci} - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\Omega_{ci}} \right| \gg \left(\frac{\rho_{L,i} r}{qR^2} \right)^{1/2} \quad (5.30)$$

kann der quadratische Term in Ψ vernachlässigt werden und \hat{Z}_i^n durch die Fried-Conte Zetafunktion ausgedrückt werden :

$$\hat{Z}_i^n \simeq -x_0 Z(x_{n,i}) \quad (5.31)$$

Um Rechenzeit zu sparen, benutzen wir in der momentanen Version des Codes diese Approximation für \hat{Z}_i^n . Die moduläre Struktur des Codes würde den raschen Einbau einer genaueren Berechnung von \hat{Z}_n^i ermöglichen, sobald ein schneller Algorithmus zur Verfügung steht. Dadurch würden sich die Resonanzen etwas verbreitern, was zu einer schwächeren Anregung langsamer Wellen durch Modenkonzersion führen würde⁵⁹.

Für die Beiträge $\vec{J}^{(0)}$ in nullter Ordnung Larmorradius ergibt sich damit z.B. :

$$\vec{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \vec{J}^{(0)} \simeq \sum_m \left\{ \vec{u}_+ \hat{L}(r, \vartheta; k_{\parallel}^m) E_+^m + \vec{u}_- \hat{R}(r, \vartheta) E_-^m + \vec{u}_{\parallel} \hat{P}(r; k_{\parallel}^m) E_{\parallel}^m \right\} e^{im\vartheta} \quad (5.32)$$

$\hat{L}(r, \vartheta; k_{\parallel}^m)$ und $\hat{P}(r; k_{\parallel}^m)$ haben für jede Poloidalmode die gleiche Form, wie die Ausdrücke, die in Kapitel 2 für Magnetfelder mit $\vec{B}_0 \cdot \vec{\partial} |\vec{B}_0| = 0$, Gln. (2.41–2.42),

hergeleitet wurden wobei $x_{n,s} = x_{n,s}^m = (\omega - n\Omega_{c,s}(\vartheta)) / k_{\parallel}^m v_{ths}$. Der einzige Unterschied ist, daß \hat{L} noch explizit von ϑ abhängt. Die Ausdrücke für die FLR-Korrekturen zum h.f. Plasmastrom sind analog.

Durch Substitution von im für $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ und in_{φ} für $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ in den verschiedenen Differentialoperatoren wird schließlich eine partielle Integrodifferentialgleichung in einen Satz von gekoppelten Differentialgleichungen für die Moden $\vec{E}^m(r)$ umgewandelt.

5.4. ITERATIVE BERECHNUNG DER PARALLELEN FELDKOMPONENTE.

Um die Anzahl der Variablen und damit die CPU-Zeit und den benötigten Speicherplatz zu reduzieren, drücken wir E_{\parallel} mit Hilfe von Gl. (2.40) in erster Ordnung m_e/m_i durch die senkrechten Komponenten aus. Im Rahmen des spektralen Modells erhält man in nullter Ordnung Larmorradius :

$$E_{\parallel}^m \simeq \frac{c^2}{\omega^2} \frac{ik_{\parallel}^m}{\hat{P}(r; k_{\parallel}^m)} \vec{\nabla}^m \cdot \vec{E}_{\perp}^m(r) \quad (5.33)$$

wobei wir das poloidale Spektrum von $\partial_{\parallel}(\text{div} \vec{E}_{\perp})$ und $\text{div} \vec{E}_{\perp}$ durch das von \vec{E}_{\perp} angenähert haben, mit anderen Worten, wir nehmen an, daß $k_{\perp} r > 1$ und $k_{\perp} R > 1$ ist. Diese Methode ermöglicht die Simulation von Elektronen Landaudämpfung, ein für elektrostatische Wellen sehr wichtiger Absorptionsmechanismus, in nullter Ordnung Larmorradius und erster Ordnung m_e/m_i , ohne daß E_{\parallel} explizit berechnet werden muß. In einem eindimensionalen Modell⁴⁰, in dem E_{\parallel} wahlweise als explizite Variable auftritt oder iterativ berechnet werden kann, ergeben sich keine signifikanten Unterschiede für die von Elektronen absorbierten Leistung.

5.5. "STOCHASTISCHE" DÄMPFUNG DER IONEN-BERNSTEINWELLE.

Die aus der lokalen Dispersionsrelation des "warmen" Plasmas folgende senkrechte Wellenzahl der Ionen-Bernsteinwelle (IBW), Gl. (2.57), wird im Verlauf der Ausbreitung dieser Welle zur Hochfeldseite so groß, daß die Wellenlänge kleiner als der Ionen Larmorradius würde. Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, ist die FLR-Entwicklung dann nicht mehr anwendbar. Außerdem würde der Code nicht konvergieren, wenn so kurze Wellenlängen auftreten. Die IBW muß daher ausreichend gedämpft werden, bevor sie diese Regionen erreicht. Elektronen Landaudämpfung ist ein Mechanismus, der langsame, elektrostatische Wellen dämpft, aber es stellt

sich heraus, daß er zu schwach ist, um die quasiolektrostatische IBW zu absorbieren (vgl. auch Kapitel 4.3.6). Das gilt insbesondere, wenn sie sich senkrecht zu \vec{B}_0 ausbreitet, d.h. wenn poloidale Moden, die zu $k_{\parallel}^m = 0$ korrespondieren, von der lokalen Dispersionsrelation erlaubt sind. Unter Berücksichtigung experimenteller Ergebnisse, die nahelegen, daß die IBW durch stochastische Dämpfung oder andere nichtlineare Prozesse absorbiert wird, bevor $k_{\perp} \cdot \rho_i \gtrsim 1$ wird^{60,61}, führen wir daher eine etwas artifizielle Dämpfung ein, indem wir $\hat{\lambda}_2$ mit dem Faktor

$$1 + i e^{-1/\epsilon(k_{\perp B} \rho_i)^2} \quad (5.34)$$

multiplizieren. ϵ ist dabei ein Parameter der Ordnung 1 und $k_{\perp B}$ wird durch die approximative Wurzel der lokalen Dispersionsrelation für die IBW, Gl. (2.57), abgeschätzt. Im Frequenzbereich der lower hybrid Resonanz existiert eine quantitative Theorie der stochastischen Dämpfung, wonach Wellen mit Wellenlängen im Bereich des Ionengyroradius stark absorbiert werden⁶². Gl. (5.34) würde eine qualitative Fortsetzung dieser Theorie für den uns interessierenden Frequenzbereich darstellen.

Dieser Term hat keinen Einfluß auf die schnelle magnetosonische Welle oder auf die Anregung der IBW durch Modenkonversion. Er wird in Regionen, wo die IBW evaneszent ist, weggelassen.

5.6. NUMERISCHE LÖSUNG DER WELLENGLEICHUNG.

Zur Lösung des Randwertproblems für das System von gekoppelten Differentialgleichungen eignet sich am besten die finite Elemente Methode (vg. Kap. 4.3). Dazu müssen die Gleichungen zunächst als Variationsprinzip formuliert werden. Da das Problem nichthermitesche Operatoren enthält, kann nur eine schwache (Galerkin-) Form konstruiert werden.

5.6.1. SCHWACHE VARIATIONELLE FORM.

Um das System von gekoppelten Differentialgleichungen für die poloidalen Fouriermoden $\vec{E}^m(r)$ zu lösen, multiplizieren wir es mit dem vollständigen Satz von Testfunktionen

$$\left(\vec{F}^m(r)\right)^* = e^{-im'\vartheta} \vec{G}^*(r) \left(\cdot e^{-in\varphi}\varphi\right) \quad (5.35)$$

und integrieren über das Plasmavolumen. Partielle Integration der Terme, die

zweite Ableitungen enthalten, mit Hilfe des Gauß'schen Satzes und der Vektoreidentitäten

$$\vec{F}^* \cdot \text{rot rot } \vec{E} = \text{rot } \vec{F}^* \cdot \text{rot } \vec{E} - \text{div} (\vec{F}^* \times \text{rot } \vec{E}) \quad (5.36)$$

und

$$\vec{F}_\perp^* \cdot [\vec{\nabla}_\perp \times (\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp)] = (\vec{\nabla}_\perp \times \vec{F}_\perp^*) \cdot (\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp) - \vec{\nabla}_\perp \cdot (\vec{F}_\perp^* \times (\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp)) \quad (5.37)$$

ergibt dann

$$\begin{aligned} & \sum_m \int dV e^{i(m-m')\vartheta} \left\{ (\vec{\nabla}^{m'} \times \vec{G})^* \cdot (\vec{\nabla}^m \times \vec{E}^m) \right. \\ & \quad - \frac{\omega^2}{c^2} \begin{pmatrix} G_+^* \\ G_-^* \\ G_\parallel^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{L}(r, \vartheta; k_\parallel^m) & 0 & 0 \\ 0 & \hat{R}(r, \vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \hat{P}(r; k_\parallel^m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+^m \\ E_-^m \\ E_\parallel^m \end{pmatrix} \\ & \quad + 2 [\vec{\nabla}^{m'} \cdot (\vec{u}_+^* G_+)]^* \hat{\lambda}_2(r, \vartheta; k_\parallel^m) \vec{\nabla}^m \cdot (\vec{u}_+^* E_+^m) \\ & \quad \left. + 2 (\vec{\nabla}_\perp^{m'} \times \vec{G}_\perp)^* \hat{\lambda}_0(r, \vartheta; k_\parallel^m) (\vec{\nabla}_\perp^m \times \vec{E}_\perp^m) \right\} \\ & = \sum_m \int d\vec{S} e^{i(m-m')\vartheta} \left\{ \vec{G}_\perp^* \times (\vec{\nabla}_\perp^m \times \vec{E}_\perp^m) + 2 \vec{u}_+ G_+^* \lambda_2(r, \vartheta; k_\parallel^m) \vec{\nabla}^m \cdot (\vec{u}_+^* E_+^m) \right\}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

In den Randtermen der rechten Seite haben wir die Beiträge von den FLR-Korrekturen zum Elektronenstrom vernachlässigt, da sie bei so niedrigen Temperaturen überall sehr klein sind. Außerdem haben wir auf der linken Seite von Gl. (5.38), die wir im folgenden Steifigkeitsmatrix nennen werden, jene FLR-Korrekturen zum Elektronenstrom, deren antihermitescher Teil den Kreuzterm zwischen TTMP und ELD beschreibt, nicht berücksichtigt. Das ist aber konsistent mit den Voraussetzungen, unter denen Gl. (5.33) hergeleitet wurde. Mit Hilfe dieser Gleichung drücken wir in Gl. (5.38) E_\parallel^m durch die senkrechten Komponenten aus. Für G_\parallel^* substituieren wir in analoger Weise

$$G_\parallel^* \simeq -\frac{c^2}{\omega^2} \left(\frac{ik_\parallel^m}{\hat{P}(r; k_\parallel^m)} \vec{\nabla}^{m'} \cdot \vec{G}_\perp \right)^*. \quad (5.39)$$

Im Rahmen unseres Codes wird es nicht möglich sein, die extrem langsame kinetische Alfvén Welle, die nur für $\text{Re}(\hat{P}(r; k_\parallel^m)) > 0$, d.h. $|x_{0,e}^m| < 0.9$, propagativ ist, numerisch aufzulösen. Diese Welle hat keinen Einfluß auf Absorption und Modenkonzersion. Wir eliminieren sie daher, indem wir in Gl. (5.38)

nach Substitution von Gl. (5.33) und Gl. (5.39) nur den antihermiteschen Teil von $\hat{P}(r; k_{\parallel}^m)/|\hat{P}(r; k_{\parallel}^m)|^2$ einsetzen.

5.6.2. RADIALE DISKRETISIERUNG.

In radialer Richtung benutzen wir eine finite Elemente Diskretisierung für die verbleibenden senkrechten Feldkomponenten $E_{\alpha}^m(r)$, $\alpha = \psi, \eta$, wobei wir die bereits in Kapitel 4.3.1, Gln. (4.18–4.21), definierten kubischen hermiteschen interpolierenden Funktionen $h_{k,j}(r)$ verwenden :

$$\vec{E}_{\perp}(\vec{r}) = \sum_{m,\alpha,l,i} E_{\alpha,l,i}^m e^{im\vartheta} h_{l,i}(r) \vec{e}_{\alpha} \quad (5.40)$$

Diese Funktionen stellen auch einen vollständigen Satz von radialen Testfunktionen

$$\vec{G}^*(r) = \vec{e}_{\beta} h_{k,j}(r), \quad \beta = \psi, \eta \quad (5.41)$$

dar.

Das radiale Gitter r_i , $i = 1 \dots N_r$, $r(1) = 0$, $r(N_r) = r_W$ muß dicht genug sein um

a.) die Koeffizienten der Differentialgleichung aufzulösen; die strengsten Bedingungen kommen hier von den resonanten Termen $\hat{L}(r, \vartheta; k_{\parallel}^{min})$ und $\hat{\lambda}_2(r, \vartheta; k_{\parallel}^{min})$ wobei $k_{\parallel}^{min} = \min_m |k_{\parallel}^m|$ ist. Bei der Berechnung des Gitters verlangen wir daher, daß

$$\max_{\vartheta} \left(\frac{|\hat{L}(r_{i+1}, \vartheta; k_{\parallel}^{min}) - \hat{L}(r_i, \vartheta; k_{\parallel}^{min})|}{|\hat{L}(r_{i+1}, \vartheta; k_{\parallel}^{min}) + \hat{L}(r_i, \vartheta; k_{\parallel}^{min})|} \right) \leq \epsilon_M \quad (5.42)$$

und ein analoger Ausdruck für $\hat{\lambda}_2$. ϵ_M ist ein Parameter der Ordnung 1.

b.) die Lösung aufzulösen. Die kürzeste Wellenlänge wird mit Hilfe der lokalen Dispersionsrelation abgeschätzt. In Szenarien mit einer Ionen-Bernsteinwelle verlangen wir z.B. :

$$r_{i+1} - r_i \leq \frac{\pi}{\sqrt{k_{\perp B}^2}} = \frac{\lambda_B}{2} \quad (5.43)$$

$k_{\perp B}^2$ ist durch Gl. (2.57) gegeben und wird auf der Hochfeldseite ($\vartheta = \pi$) für $k_{\parallel} = n_{\varphi}/(R_T - r_i)$ berechnet. Wo die IBW evaneszent ist oder wo sie bereits durch die stochastische Dämpfung absorbiert worden ist (d.h. für $\epsilon k_{\perp B}^2 \rho_i^2 > 1.3$, vgl. Kapitel 5.3), wird dieses Kriterium nicht angewandt.

Schließlich führen wir noch eine maximale Intervallbreite Δr_0 ein, die zum Beispiel durch $\Delta r_0 = r_W/50$ gegeben sein kann.

Um die Anschlußbedingungen an der Antenne implementieren zu können, benötigen wir bei $r = r_A$ zwei Sätze von Variablen, einen für die Innen- und einen für die Außenseite, d.h. $r(i_A) = r(i_A + 1) = r_A$.

5.6.3. DIE RÄUMLICHE INTEGRATION.

Die verschiedenen in der Steifigkeitsmatrix vorkommenden Terme haben alle die Form :

$$\int dV e^{i(m-m')\vartheta} (D^{m'} \vec{G})^* \hat{f}(r, \vartheta; k_{\parallel}^{m'}) (D^m \vec{E}^m) \quad (5.44)$$

wobei D^m für einen Differentialoperator erster Ordnung steht, der immer wie folgt geschrieben werden kann :

$$D^m \vec{E}^m = \sum_{\alpha=\psi, \eta} \left(a_{\alpha}(r, \vartheta) E_{\alpha}^m + i m b_{\alpha}(r, \vartheta) E_{\alpha}^m + c_{\alpha}(r, \vartheta) \frac{d}{dr} E_{\alpha}^m \right) \quad (5.45)$$

Um das ϑ -Integral in der Steifigkeitsmatrix zu berechnen, bilden wir zunächst für jeden Term das "dyadische" Produkt der in Gl. (5.45) vorkommenden Koeffizienten $a_{\alpha}, b_{\alpha}, c_{\alpha}$ mit den komplex konjugierten Koeffizienten, die in der analogen Darstellung von $(D^{m'} \vec{G})^*$ auftreten. Anschließend wird jedes Element der resultierenden Dyade mit dem Produkt aus $\hat{f}(r, \vartheta; k_{\parallel}^{m'})$ und der Jakobi-Determinante multipliziert. Die ϑ Integration wird dann mit Hilfe der schnellen Fourier Transformation⁶³ (FFT, Cray-Routine) auf einem äquidistanten poloidalen Gitter ausgeführt. Für Terme, die nichtlokale Operatoren enthalten, d.h. wenn f von m bzw. k_{\parallel}^m abhängt, geschieht das für jede Poloidalmode. Danach werden die verschiedenen Beiträge zusammengefaßt und nach radialen Ableitungen geordnet, so daß die Steifigkeitsmatrix in folgende Form gebracht werden kann :

$$S(m', \beta, k, j; m, \alpha, l, i) = \int dr \left\{ h_{k,j}(r) S_1(r; m', \beta; m, \alpha) h_{l,i}(r) \right. \\ + h_{k,j}(r) S_2(r; m', \beta; m, \alpha) \frac{dh_{l,i}(r)}{dr} \\ + \frac{dh_{k,j}(r)}{dr} S_3(r; m', \beta; m, \alpha) h_{l,i}(r) \\ \left. + \frac{dh_{k,j}(r)}{dr} S_4(r; m', \beta; m, \alpha) \frac{dh_{l,i}(r)}{dr} \right\} \quad (5.46)$$

Die Beiträge zu $S_2(r; m', \psi; m, \eta)$ sind z.B.:

$$\int d\vartheta r R e^{i(m-m')\vartheta} (a_{\psi}^*(r, \vartheta) - im'b_{\psi}^*(r, \vartheta)) \hat{f}(r, \vartheta; k_{\parallel}^m) c_{\eta}(r, \vartheta)$$

Die FFT ist am effizientesten wenn die Anzahl der Gitterpunkte eine Potenz von 2 ist. Terme, die nur Differentialoperatoren enthalten oder nichtresonante (z.B. Elektronen-)Ströme beschreiben, sind recht glatte Funktionen von ϑ . In diesen Fällen ist es ausreichend, die FFT auf einem Gitter von 8 Punkten auszuführen, so daß die von diesen Termen verursachte Kopplung, die hauptsächlich durch die Torodizität bewirkt wird, auf $-4 \leq m - m' \leq 3$ beschränkt ist.

Im Gegensatz dazu sind $\hat{\lambda}_2$ und \hat{L} in der Nähe ihrer Resonanzen sehr schnell variierende Funktionen von ϑ , deren Auflösung im allgemeinen ein feineres Gitter als die Auflösung des Wellenfeldes erfordert. Deshalb benutzen wir für die poloidale Integration dieser Terme mindestens doppelt so viele Gitterpunkte wie poloidale Moden. Für $k_{\parallel}^m \simeq 0$, d.h. wenn Poloidalmoden, für die $n_{\varphi} + m/q \simeq 0$ ist, im Bereich der möglichen m liegen, ist die Breite der Ionenzyklotronresonanzen nur durch Stöße begrenzt (wie im "kalten" Plasma). Um auch in diesen Fällen eine ausreichende Auflösung zu garantieren, benutzen wir folgende effektive Stoßfrequenzen :

$$\frac{\nu}{\omega} = \frac{\chi 2\pi r}{N_T R_T}, \quad (5.47)$$

wobei N_T die Anzahl von poloidalen Gitterpunkten bezeichnet. Dieses Kriterium bewirkt, daß mindestens χ Gitterpunkte in der Halbwertsbreite der Imaginärteile von $\hat{L}(r, \vartheta; k_{\parallel} = 0)$ bzw. $\hat{\lambda}(r, \vartheta; k_{\parallel} = 0)$ liegen. $\chi \approx 1$ sollte ausreichen, um das Entstehen größerer Fehler durch die poloidale Integration zu vermeiden. In einem typischen ASDEX-Fall mit $N_T = 128$ entspricht das einer effektiven Stoßfrequenz von $\nu/\omega \simeq 6 \cdot 10^{-3} \cdot r/r_a$ was durchaus im Bereich der üblicherweise angenommenen Werte liegt.

Die verbleibenden radialen Integrale in Gl. (5.46) werden mit Hilfe des Gauß'schen Verfahrens, wobei wir im allgemeinen drei Punkte pro Intervall benutzen, numerisch gelöst. Die Matrizen $S1 - S4$ sowie die interpolierenden Funktionen und ihre Ableitungen müssen also an den für die Gauß-Integration benötigten Stellen berechnet werden.

Nach Ausführung der räumlichen Integration erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $E_{\alpha,l,i}^m$. Jede Reihe der Steifigkeitsmatrix entspricht einer Testfunktion $\vec{F}^*(\vec{r}) = e^{-im'\vartheta} \vec{e}_\beta h_{k,j}(r) (\cdot e^{-in\varphi})$.

5.6.4. IMPLEMENTIERUNG DER REGULARITÄTS-, ANSCHLUSS- UND RANDBEDINGUNGEN.

Nach Berechnung der räumlichen Integrale müssen Teile der Steifigkeitsmatrix verändert werden um die Regularitätsbedingungen an der magnetischen Achse, die Anschlußbedingungen an der Antenne und die Randbedingungen an der Wand zu implementieren. An der magnetischen Achse, $r = 0$, haben die Gleichungen die übliche Singularität zylindrischer (und toroidaler) Geometrie. Aus physikalischen Gründen muß die Lösung regulär sein. Die Regularitätsbedingungen folgen aus der Eindeutigkeit der Feldkomponenten E_x und E_y ,

$$\begin{aligned} E_x &= E_\psi \cos \vartheta - E_\eta \sin \vartheta \\ \text{und } E_y &= E_\psi \sin \vartheta + E_\eta \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (5.48)$$

bei $r = 0$:

$$\begin{aligned} E_{\psi,1,1}^{m=1} + iE_{\eta,1,1}^{m=1} &= 0 \\ E_{\psi,1,1}^{m=-1} - iE_{\eta,1,1}^{m=-1} &= 0 \\ E_{\alpha,1,1}^m &\equiv 0 \quad \text{for } m \neq \pm 1 \end{aligned} \quad (5.49)$$

Diese Bedingungen erniedrigen die Anzahl der Freiheitsgrade am ersten radialen Gitterpunkt ("essentielle Bedingungen"). Sie werden daher explizit gestellt indem die zu $\beta = \psi; m' = \pm 1; k = 1; j = 1$ und $\beta = \psi, \eta; m' \neq \pm 1; k = 1; j = 1$ korrespondierenden Gleichungen durch Gln. (5.49) ersetzt werden.

An der Antenne gibt es zwei Sätze von Variablen, E_{α,l,i_A}^m und E_{α,l,i_A+1}^m , die durch die Anschlußbedingungen Gln. (5.17–5.20) verbunden sind. Teilt man das Integrationsgebiet in zwei Teile auf, einen von $r = 0$ bis $r = r_A$ und den anderen von $r = r_A$ bis $r = r_W$, erhält man für jedes m' nichtverschwindende Randterme, wenn $k = 1, j = i_A$ und, mit entgegengesetztem Vorzeichen, wenn $k = 1, j = i_A + 1$. Da die parallele Komponente des elektrischen Feldes E_{\parallel} eliminiert wurde, kann Gl. (5.20) nicht mehr exakt implementiert werden. Die Beiträge, die von dem iterativ berechneten E_{\parallel} herrühren würden, sind aber bei der Antenne in jedem Fall vernachlässigbar, da ELD bei solch niedrigen Temperaturen unbedeutend wird.

Gl. (5.19) ist eine "natürliche" Anschlußbedingung, die dadurch implementiert wird, daß man in den Randtermen an der Innenseite $\hat{\lambda}_2(r_A, \vartheta; k_{\parallel}^m) \vec{\nabla}^m \cdot (\vec{u}_+^* E_+^m)$ durch die Variablen an der Außenseite ausdrückt und umgekehrt. Gl. (5.17) ist eine weitere natürliche Anschlußbedingung. In der zu $k = 1; j = i_A; \beta = \eta$ korrespondierenden Gleichung substituieren wir im Randterm für $\sum_m (\vec{\nabla}_{\perp}^m \times \vec{E}_{\perp}^m) e^{im\vartheta}$:

$$\sum_m e^{im\vartheta} (\vec{\nabla}_{\perp}^m \times \vec{E}_{\perp}^m) = \sum_m e^{im\vartheta} \left\{ E_{\eta,2,i_A+1}^m + \left(-im \frac{\cos \Theta}{r_A} + in_{\varphi} \frac{\sin \Theta}{R} \right) E_{\psi,1,i_A+1}^m + \left(\frac{\sin^2 \Theta}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\cos^2 \Theta}{r_A} \right) E_{\eta,1,i_A+1}^m + \frac{4\pi i}{\omega} J_A^{n_{\varphi}}(\vartheta) \right\} \quad (5.50)$$

wobei der Term, der den Oberflächenstrom $J_A^{n_{\varphi}}(\vartheta)$ in der Antenne enthält, die rechte Seite des linearen Gleichungssystems darstellt.

Gl. (5.18) ist eine "essentielle" Anschlußbedingung. Sie wird explizit implementiert, indem wir die zu $\beta = \eta; m'; k = 1; j = i_A + 1$ korrespondierenden Gleichungen durch

$$E_{\eta,1,i_A}^m = E_{\eta,1,i_A+1}^m \quad (5.51)$$

ersetzen. Gl. (5.50) und Gl. (5.51) enthalten die Verbindung zwischen den Variablen an der Innen- und Außenseite der Antenna.

Die Oberflächenterme an der Gefäßwand, $r = r_W$, haben die gleiche Form wie die an der Innenseite der Antenne. Die Implementierung der Randbedingungen, Gln. (5.12–5.13), ist analog zu der oben für die Anschlußbedingungen an der Antenne beschriebenen Methode.

5.6.5. LÖSUNG DES LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMS.

Das hier beschriebene Verfahren, die Regularitäts-, Anschluß- und Randbedingungen zu implementieren, erhält die Blocktridiagonalität der resultierenden Steifigkeitsmatrix: Sowohl an der Antenne als auch im Plasma wechselwirken Variable an einem radialen Gitterpunkt r_i nur mit den Variablen bei r_{i-1}, r_i und r_{i+1} . Jeder Block enthält $(N_m \cdot 2 \cdot 2)^2$ im allgemeinen nichtverschwindende komplexe Matrixelemente, wobei N_m die Anzahl der poloidalen Moden bezeichnet. In den meisten Szenarien erfordert die Auflösung relativ kurzer Wellenlängen ein großes N_m und ein dichtes radiales Gitter. Die gesamte Steifigkeitsmatrix ist dann viel zu groß für den Kernspeicher der Cray-XMP. Wir benutzen daher eine "fron-

tale" Methode, bei der die Berechnung der Steifigkeitsmatrix und die Lösung des linearen Systems kombiniert werden. Nachdem eine Blockreihe berechnet worden ist, wird deren LU-Zerlegung gebildet und extern gespeichert. Das geschieht mit Hilfe eines Codes von Dr. W. Kerner⁶⁴, der Input/Output-Zeit spart, indem die LU-Zerlegung einer Blockreihe und I/O einer anderen gleichzeitig behandelt werden. Trotzdem ist die CPU-Zeit hauptsächlich durch die für die Inversion des linearen Systems benötigte Zeit, die proportional zu $N_r \cdot N_m^3$ ist, bestimmt, während die zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix benötigte Zeit nur wie $N_R \cdot N_m \cdot N_T \cdot \ln N_T$ skaliert. Schnellere, voll vektorisierbare, iterative Solver können nicht benutzt werden, da diese Methode bei nicht hermiteschen Matrizen nicht immer konvergiert.

Nach der Lösung des linearen Systems werden die resultierenden Koeffizienten $E_{\alpha,l,i}^m$ extern gespeichert. Dann wird ein separater Satz von Routinen angewandt, um das Wellenfeld zu rekonstruieren, Gl. (5.40), und die Leistungsdepositionsprofile sowie den Antennenwiderstand zu berechnen.

5.7. DIE ENERGIEBILANZ IM SPEKTRALEN MODELL.

Ersetzt man in Gl. (5.38) die Testfunktionen $(\vec{F}^{m'}(\vec{r}))^*$ durch das komplex konjugierte der Lösung $\vec{E}^{m'}(\vec{r})$ und summiert über m' , so stellt der Imaginärteil der resultierenden Gleichung einen Erhaltungssatz dar, der eine direkte Konsequenz der Wellengleichung ist. Die linke Seite, die wir im folgenden dW_{abs}/dV nennen wollen, ist dabei bis auf die Poloidalkomponente des parallelen kinetischen Energieflusses die vom Plasma lokal absorbierte Leistung, Gl. (2.65). In Anhang B werden wir das noch einmal für die Ionenzyklotrondämpfung in nullter Ordnung Larmorradius zeigen. Der für diesen Fall in Tokamak-Geometrie hergeleitete Ausdruck für den kinetischen Fluß ist ein Spezialfall des in Anhang A gefundenen allgemeinen Ausdrucks. Bei der Herleitung dieser Formeln wurde davon ausgegangen, daß die Integrale entlang ungestörter Teilchenbahnen, Gl. (5.24), exakt berechnet worden sind. Da das aber im Rahmen unseres Modells mit den in Kapitel 5.3 beschriebenen Approximationen nicht der Fall ist, ist eine eindeutige Identifikation der Poloidalkomponente des parallelen kinetischen Flusses nicht mehr möglich. Auf der anderen Seite ist es sehr schwierig, die in den Formeln für die lokal absorbierte Leistung dP_{abs}/dV , Gln. (2.67–2.69), vorkommenden Integrale in Tokamak-Geometrie zu berechnen. Für realistische Stoßfrequenzen sind

die Unterschiede zwischen dP_{abs}/dV und dW_{abs}/dV ohnehin sehr gering²⁷ (vgl. Kapitel 2.3). Es ist daher gerechtfertigt die Depositionsprofile durch dW_{abs}/dV anzunähern. In der Praxis ist die Differenz zwischen dP_{abs}/dV und dW_{abs}/dV , die nach Integration über ϑ keinen Beitrag liefert, sowieso unbedeutend, da es innerhalb magnetischer Flußflächen zu einem beinahe instantanen Temperatenausgleich kommt.

Da wir eine perfekt leitende Gefäßwand annehmen, kann keine Energie aus dem Torus entkommen. Die Energieerhaltung kann dann als erster Konsistenztest dienen. Wenn der Code konvergiert, stimmt die gesamte vom Plasma absorbierte Leistung für ICRH-Szenarien besser als 1% mit der von der Antenne abgestrahlten Leistung P_A ,

$$P_A = \frac{1}{2} \int dV \operatorname{Re} [\vec{E}^*(\vec{r}) \cdot \vec{J}_A(\vec{r})] \quad (5.52)$$

überein. Schließlich kann noch der Strahlungswiderstand R_A der Antenne berechnet werden :

$$R_A = \frac{P_A}{|I_{max}|^2} \quad (5.53)$$

wobei $|I_{max}|$ den maximalen in der Antenne fließenden Strom bezeichnet (an den "shorts"). Für den durch Gl. (5.14) gegebenen Oberflächenstrom ergibt sich zum Beispiel :

$$I(\vartheta) = \int \vec{J}_A(\varphi, \vartheta) \cdot d\vec{s} \simeq \int |\vec{J}_A(\varphi, \vartheta)| R d\varphi dr = J_A(\vartheta) \cdot 2\pi R(r_A, \vartheta) \quad (5.54)$$

so daß

$$I_{max} = 2\pi \max_{\vartheta} J_A(\vartheta) \cdot R(r_A, \vartheta).$$

R_A ist, wie die Depositionsprofile und das Wellenfeld, additiv in den Toroidalmoden.

5.8. KONVERGENZEIGENSCHAFTEN.

Wie bereits im vorherigen Unterkapitel erwähnt, ist die Energieerhaltung in der von uns benutzten Form eine direkte Konsequenz der Wellengleichung und stellt einen ersten Konsistenztest des Codes dar. Sie kann aber nicht als Kriterium für die Konvergenz der Lösung dienen.

Die hervorragenden Konvergenzeigenschaften der kubischen hermiteschen finiten Elemente sind allgemein bekannt und wurden außerdem in Kapitel 4.5 für das eindimensionale Modell untersucht. Da die Einschränkungen für die Anzahl N_r der radialen Gitterpunkte nicht sehr restriktiv sind (die CPU-Zeit wächst nur linear mit N_r , der benötigte Kernspeicherplatz ist unabhängig von N_r) kann praktisch immer ein Gitter benutzt werden, das fein genug ist, um die Konvergenz in der radialen Richtung sicherzustellen. Im Gegensatz dazu stößt man bei der Anzahl der poloidalen Moden sehr schnell an Grenzen. Der Speicherplatz der Cray-XMP läßt zwar prinzipiell bis zu $N_m=108$ Moden zu, die Rechenzeit würde dann aber für jede Toroidalmode mehrere Stunden betragen.

N_m muß groß genug sein, um das Wellenfeld im gesamten Plasma poloidal aufzulösen. Aus geometrischen Gründen können nur dann Schwierigkeiten auftreten, wenn eine langsame Welle bei relativ großen Radien (also nur in größeren Maschinen) in poloidaler Richtung propagiert. Das ist mit Sicherheit nicht für die schnelle magnetosonische Welle der Fall. Die Ionen-Bernsteinwelle hingegen wird entlang einer (vertikalen) $|\vec{B}_0|=\text{konst.}$ -Ebene angeregt und breitet sich dann mit vertikalen Wellenfronten zur Hochfeldseite hin aus. Ihre Wellenlänge ist proportional zur Ionentemperatur. Außer in der Nähe der Äquatorialebene muß diese Welle durch die poloidalen Fouriermoden dargestellt werden. Für größere Radien kann das insbesondere bei geringeren Temperaturen (z.B. in ohmschen Entladungen ohne andere Zusatzheizung) hohe $|m|$ erfordern. Wenn diese Moden kleinen k_{\parallel}^m entsprechen, werden sie außerdem stark durch Modenkonversion angeregt und anschließend nur sehr schwach durch TTMP oder ELD gedämpft. Da $k_{\perp,B} \cdot \rho_{L,i}$ praktisch temperaturunabhängig ist, absorbiert die stochastische Dämpfung die IBW erst, wenn sie Regionen mit höherem $|\vec{B}_0|$ erreicht.

Wir haben die Konvergenzeigenschaften an Hand eines ASDEX-Falles untersucht. Als Szenario haben wir ein Deuterium Plasma mit einer Wasserstoff

Minorität gewählt, das bei $\omega \simeq \Omega_{cH} = 2\Omega_{cD}$ geheizt wird. Die Temperaturen und die behandelte Toroidalmode, $n_\varphi = 8$, wurden so gewählt, daß sich das Plasma an der Grenze zwischen Modenkonzersions- und Minoritäts-Regime befindet. Die Plasmaeigenschaften sind in Spalte 1 von Tabelle 1 aufgelistet. Für eine ausführliche Beschreibung der ASDEX- und Antennenparameter sowie die benutzten Temperatur- und Dichteprofile sei der Leser auf den Beginn des nächsten Unterkapitels verwiesen.

Das Wellenfeld wurde mit $N_m=19, 39$ und 75 poloidalen Moden berechnet. Als erstes Konvergenzkriterium haben wir die Spektren von $E_+(m)$ (diese Komponente verdeutlicht am besten das Verhalten der IBW) bei verschiedenen Radien untersucht. Fig 5.1 zeigt die Ergebnisse bei $r=24$ cm, wo in diesem Beispiel die höchste Auflösung erforderlich ist. Die Konvergenz ist schlecht für $N_m = 19$ und akzeptabel für $N_m = 39$. $N_m = 75$ Moden reichen zur Darstellung des Wellenfeldes überall aus. Bei kleinerem N_m ändern sich die Amplituden der niedrigen Moden, die für die Darstellung der schnellen Welle verantwortlich sind, nur sehr wenig. Die höheren Moden zeigen eine auffallende Asymmetrie zwischen positiven und negativen Moden. Das kommt daher, daß für $n_\varphi = 8$ negative m 's wesentlich kleinere k_{\parallel}^m ergeben und damit schwächer absorbiert werden als positive. Die in Fig.5.2abc dargestellten Plots des Wellenfeldes $E_+(\vartheta)$ für die verschiedenen N_m 's bei $r=16$ cm zeigen deutlich, daß diese Moden zur Auflösung der IBW bei grösseren Radien außerhalb der Äquatorialebene benötigt werden. Wenn N_m nicht groß genug ist, errechnet der Code ein Wellenfeld, das Aliasing zeigt und in dem die Wellenfronten der IBW entlang magnetischer Flußflächen verbogen sind. Das illustrieren Fig. 5.3abc, in denen für die verschiedenen N_m 's Höhenlinien in einem Ausschnitt, in dem die IBW das Bild dominiert, dargestellt sind.

Da die mit der IBW verbundene Energie aber proportional zu β_i ist und die Temperatur bei grösseren Radien bereits recht klein ist, enthalten diese hohen Moden auch bei relativ grossen Amplituden nur sehr wenig Energie. Um das zu verdeutlichen, haben wir die Ergebnisse der Energiebilanzen für die verschiedenen N_m 's zusammengefaßt :

N_m	19	39	75
R_A in Ω	0.0440726	0.0442457	0.0442241
P_{abs}^H in %	86.2981	86.1110	86.0939
P_{abs}^D in %	11.7496	11.7651	11.7461
P_{abs}^{TTMP} in %	1.51083	1.50433	1.50360
P_{abs}^{ELD} in %	0.01733	0.02211	0.02565
P_{abs}^{Stoc} in %	0.60513	0.77540	0.83017

Die durch Ionenzyklotrondämpfung oder Elektron TTMP absorbierte Leistung ändert sich kaum und der Strahlungswiderstand der Antenne konvergiert sehr schnell. Lediglich die durch ELD und stochastische Dämpfung absorbierte Leistung zeigt einen, wenn auch kleinen, systematischen Anstieg mit wachsendem N_m , da diese Terme hauptsächlich die IBW betreffen. Bei nicht ausreichender Auflösung wird die IBW numerisch gedämpft. Eigenschaften, die durch das Verhalten der schnellen Welle bestimmt sind, werden davon kaum beeinflusst.

Im Minoritäts-Regime, d.h. für heißere Plasmen oder höhere Toroidalmoden, konvergiert der Code für ein Szenario mit einer IBW und einen Tokamak der Größe von ASDEX überall mit $N_m=33$ Moden. Für derartige Fälle können auch JET-Entladungen in angemessener Rechenzeit simuliert werden.

Szenarien, in denen die Ionenzyklotronwelle, die sich mit sehr kurzen Wellenlängen entlang magnetischer Feldlinien und damit auch in poloidaler Richtung ausbreitet (vgl. Kapitel 3.1), angeregt wird, können hingegen wahrscheinlich nur in bestimmten Fällen, in denen diese Welle sehr schnell gedämpft wird, simuliert werden (vgl. Kap. 5.9.4).

5.9. ANWENDUNGEN UND VERGLEICH MIT EINDIMENSIONALEN MODELLEN UND RAY-TRACING.

Da ein globaler Code recht schwerfällig ist und die komplette Simulation eines ICRH-Experiments die Berechnung mehrerer Toroidalmoden erfordert, würden Parameterstudien sehr viel Rechenzeit erfordern. Die Interpretation der Ergebnisse ist auf Grund der Komplexheit des Problems wesentlich schwieriger als im Fall eindimensionaler Modelle.

In diesem Kapitel haben wir den Code daher nur in zwei Fällen (ein Beispiel mit schwacher, eins mit starker single pass Absorption) für ein ganzes von der Antenne angeregtes Spektrum von Toroidalmoden angewandt. Den sich ergebenden Strahlungswiderstand der Antenne bzw. die Beiträge der einzelnen n_φ 's haben wir dann mit den Resultaten eines Codes in slab-Geometrie⁴⁰ verglichen. In dem Szenario mit starker Absorption haben wir das Wellenfeld und die Leistungsdepositionsprofile außerdem mit Ray-Tracing Rechnungen verglichen, was in dem anderen Fall nicht sinnvoll ist, da sich dort, wie erwartet, globale Eigenmoden einstellen. In den weiteren hier untersuchten Fällen haben wir den Code jeweils nur für eine Toroidalmode angewandt.

Bis auf das letzte Beispiel, in dem ein JET-Fall untersucht wird, wurden die hier präsentierten Rechnungen für ASDEX durchgeführt, da dieser Tokamak wegen seiner Größe und nahezu kreisförmigen Flußflächen sehr gut für die Anwendung unseres Codes geeignet ist.

In den hier diskutierten Fällen haben wir innerhalb des Plasmas, d.h. für $r < a$, parabolische Dichte- und Temperaturprofile $f(r)$ angenommen :

$$f(r) = f(0) - (f(0) - f(a)) (r/a)^2$$

Im "scrape-off-layer", $r > a$, haben wir folgende Form benutzt :

$$f(r) = f(r_W) + \left(\frac{r_W - r}{r_W - a} \right)^\nu (f(a) - f(r_W))$$

wobei ν so bestimmt wird, daß die Profile bei $r = a$ stetig differenzierbar sind und für $f(r_W)$ haben wir den Wert eingesetzt, der sich bei exponentiellen Verhalten mit gegebener Abfalllänge ergeben würde. Es ist selbstverständlich ohne weiteres möglich, beliebige (stetig differenzierbare) Profile einzusetzen.

In der Formel für die effektive Stoßfrequenz, Gl. (5.47), haben wir immer $\chi = 1$ und in dem Dämpfungsterm für die Ionen-Bernsteinwelle, Gl. (5.34), $\epsilon = 1$ gesetzt. Für die poloidale Integration (FFT) der resonanten Terme haben wir ein äquidistantes Gitter mit $N_T = 128$ Punkten benutzt.

Die ICRH-Antennen von ASDEX (vgl. Fig. 3.3 und 3.4) sind Dipolantennen und befinden sich auf der Niedrigfeldseite. Die h.f. Zuführungen ("feeders") sind oben und unten an den Enden, die Rückführungen ("shorts") in der Mitte, also in der Äquatorialebene (T-Antennen). Die Antennen werden in "push-pull" betrieben, d.h. das poloidale Stromprofil ist symmetrisch bezüglich der Äquatorialebene. Der Strom hat dort sein Maximum. Die Antenne ist so konstruiert, daß sie bei einer Frequenz von $\nu \simeq 65$ MHz, die typisch für die Heizung von H^+ bei der harmonische Ionenzyklotronfrequenz ist, resonant ist. Die LC-Konstante ist dann gerade so groß, daß bei den feeders kein Strom fließt. Weitere Eigenschaften des ICRH-Systems bzw. von ASDEX sind :

(Toroidale) Breite der Antenne:	$w_A = 18$ cm
Pol. Ausdehnung der Antenne:	$\vartheta = \pm 50^\circ$
LC-Konstante:	$\sqrt{LC} = 2.8$
Großer Radius:	$R_T = 168$ cm
Plasmaradius:	$a = 40$ cm
Abstand Antenne-mag. Achse:	$r_A = 44.5$ cm
Abstand Gefäßwand-mag. Achse:	$r_W = 50.5$ cm

Für die zentrale Elektronendichte haben wir jeweils $n_e(0) = 6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ eingesetzt, für die Dichte an der Separatrix $n_e(a) = 0.9 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ und die Abfalllänge der Dichte zwischen $r = a$ und $r = r_W$ soll 6 cm betragen.

Die weiteren Plasmaparameter für das zum Studium der Konvergenzeigenschaften in Kap. 5.8 benutzten Beispiels und der verschiedenen in Kapitel 5.9.1 bis 5.9.4 behandelten Fälle sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

5.9.1. ZWEI BEISPIELE OHNE RESONANZ.

Zunächst haben wir den Code für zwei Fälle, in denen keine fundamentale oder harmonische Ionenzyklotronresonanz im Tokamak liegt, angewandt. Da es sich um keine typischen ICRH-Szenarien handelt, haben wir jeweils nur eine Toroidalmode untersucht. In diesen Beispielen wird nur die schnelle Welle angeregt, so daß $N_m=39$ Moden ausreichen sollten, um die Konvergenz zu garantieren.

Der erste Fall ist ein reines Deuteriumplasma. Die Frequenz und die Stärke des statischen Magnetfeldes wurden so gewählt, daß sowohl die fundamentale als auch die harmonische Ionenzyklotronresonanz auf der Hochfeldseite außerhalb des Plasmas liegen. Weitere Parameter sind in Spalte 2 von Tabelle 1 zusammengefaßt.

Fig. 5.4ab und 5.5ab zeigen Höhengichtlinien von E_x und E_y . (Obwohl E_y bzw. E_x senkrecht zu \vec{B}_0 sind und daher im allgemeinen nicht exakt vertikal bzw. horizontal sind, wollen wir sie im folgenden aus Gründen der Einfachheit Vertikal- bzw. Horizontalkomponente nennen). Positiven Werten entsprechen durchgezogene, negativen gestrichelte Linien. Durch die Antenne werden wegen der geringen Dämpfung und der daraus resultierenden sehr kleinen Phasendifferenz zwischen Antennenstrom und Wellenfeld hauptsächlich die Realteile angeregt. $\text{Re}(E_x)$ und $\text{Im}(E_y)$ sind oben-unten-antisymmetrisch, $\text{Im}(E_x)$ und $\text{Re}(E_y)$ symmetrisch. Da die Absorption sehr schwach ist, bilden sich stehende Wellen, die in diesem Fall teilweise höhere Poloidalmoden als sonst für die schnelle Welle typisch sind, erzwingen. Fig. 5.6ab zeigt E_{\pm} in der Äquatorialebene. In diesem und den analogen Plots in den nächsten Unterkapiteln ist die elektrische Feldstärke in V/cm angegeben, wobei der in der Antenne fließende Strom auf ein Ampere normiert ist. Man erkennt die stehenden Wellen daran, daß der Realteil jeweils wesentlich kleiner als der Imaginärteil ist. Die etwas ungewöhnliche Form der Realteile resultiert dabei daher, daß sehr hohe Poloidalmoden angeregt sind. Die Amplitude von E_+ ist ungefähr um einen Faktor zwei kleiner als die von E_- , was in etwa dem Verhältnis von \hat{R}/\hat{L} entspricht (die FLR-Korrekturen sind in diesem Beispiel ohne Bedeutung). Ein ähnliches Verhältnis besteht auch zwischen $\text{Re}(E_y)$ und $\text{Im}(E_x)$, während $\text{Re}(E_x)$ und $\text{Im}(E_y)$ wesentlich kleiner sind.

Für den Beitrag der hier diskutierten Toroidalmode $n_{\varphi} = 10$ zum Antennenwiderstand ergibt sich etwa 0.0032 Ohm, ein vergleichsweise sehr niedriger Wert.

Die Energie wird hauptsächlich durch Stoßdämpfung absorbiert.

Das andere in diesem Unterkapitel diskutierte Beispiel ist ein reines Wasserstoffplasma. Die Frequenz der elektromagnetischen Wellen ist 25 MHz, also niedriger als die Ionenzyklotronfrequenz. Um zu vermeiden, daß am Plasmarand bei niedrigen Dichten eine Alfvén-Resonanz, d.h. $k_{\parallel}^2 = \hat{S}$, auftritt, haben wir nur die Toroidalmode $n_{\varphi} = 0$ betrachtet. Die kinetische Dämpfung durch Elektronen ist dann sehr schwach und Kollisionen stellen den bei weitem wichtigsten Absorptionsmechanismus dar. Die genauen Plasmaparameter stehen in Spalte 3 von Tabelle 1.

Fig. 5.7ab zeigt Höhenschichtlinien des Real- und Imaginärteils der Horizontalkomponente. Wegen der niedrigeren Frequenz und der daraus resultierenden größeren Wellenlänge ergibt sich ein wesentlich einfacheres Bild als im vorigen Fall. Die Symmetrieeigenschaften sind jedoch die gleichen. Für den Beitrag zum Antennenwiderstand durch diese Toroidalmode erhält man $R_A = 0.004$ Ohm.

Da in den hier diskutierten Szenarien keine (harmonische) Ionenzyklotronresonanz im Plasma liegt, ist die Dissipation sehr schwach. Die Inversion des linearen Gleichungssystems ist daher recht ungenau. Deshalb stimmen die von der Antenne abgestrahlte und die vom Plasma absorbierte Energie für diese Fälle nur mit einer Genauigkeit von einigen Prozent überein (vgl. Kap. 5.7).

5.9.2. HEIZUNG EINES D-PLASMAS BEI DER HARMONISCHEN ZYKLOTRON- RESONANZ, $\nu = 33.5$ MHz

In diesem Beispiel nehmen wir eine zentrale Iontemperatur von nur $T_D = 2$ keV an, wie sie etwa bei Entladungen ohne oder mit schwacher Vorheizung durch Neutralinjektion typisch ist (weitere Parameter sind in Spalte 4 von Tabelle 1 aufgelistet). Wir erwarten daher eine relativ niedrige single pass Absorption, starke Modenkonzersion zur Ionen-Bernsteinwelle und die Anregung von globalen Eigenmoden. Die Auflösung dieser Kavitätsresonanzen erfordert die Berechnung eines relativ dichten Spektrums von Toroidalmoden. Wir haben den Code für $n_{\varphi} = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$ und 16 mit jeweils 33 Poloidalmoden, die eine zufriedenstellende Konvergenz innerhalb akzeptabler Rechenzeit ermöglichen, laufen lassen und die Ergebnisse mit denen aus eindimensionalen Rechnungen verglichen. Fig. 5.8 zeigt dazu die Beiträge der einzelnen Toroidalmoden zum Strahlungswiderstand

der Antenne. Das in dem globalen Modell errechnete Spektrum hat deutliche Maxima bei $n_\varphi = 6$ und $n_\varphi = 14$, die zu Eigenmoden korrespondieren. Berücksichtigt man die unterschiedliche Geometrie, die den beiden Modellen zu Grunde liegt, ist die Übereinstimmung mit den im slab-Modell resonanten Toroidalmoden zufriedenstellend.

Fig. 5.9 und Fig. 5.10 zeigen Höhenschichtlinien vom Realteil der Horizontalkomponente des elektrischen Wellenfeldes für die resonanten Toroidalmoden $n_\varphi = 6$ und $n_\varphi = 14$. Für $n_\varphi = 6$ ist die radiale Wellenlänge der schnellen Welle etwas kürzer, so daß eine weitere halbe Wellenlänge ins Plasma paßt. In beiden Fällen ist das Feld auf der Antennenseite kaum größer als auf der anderen Seite und wird für $n_\varphi = 6$ von den Poloidalmoden $m = \pm 1$ dominiert. Diese letzte Eigenschaft wird noch von den in Fig. 5.11ab für $n_\varphi = 6$ dargestellten Spektren illustriert. Die im ersten Beispiel gefundene oben-unten Symmetrie geht bei stärkerer kinetischer Dämpfung verloren, da dann Poloidalmoden, die zu einem grösseren k_{\parallel}^m korrespondieren, stärker unterdrückt werden. Zum Vergleich zeigt Fig. 5.12ab Höhenschichtlinien von $\text{Re}(E_x)$ für die nicht resonante Mode $n_\varphi = 0$. Die Struktur des Feldes ist wesentlich subtiler als in den resonanten Fällen. Wegen der niedrigen single pass Absorption ist auch hier die Feldstärke auf der Antennenseite kaum grösser als auf der anderen Seite. Bei dem Modenkonversionspunkt, der in diesem Fall bei $x=3.25$ cm liegt (die harmonische Ionenzyklotronresonanz befindet sich bei $x=3.31$ cm) wird die Ionen-Bernsteinwelle angeregt. Insbesondere in dem in Fig. 5.12b dargestellten Ausschnitt erkennt man, daß sich die IBW mit vertikalen Wellenfronten zur Hochfeldseite hin ausbreitet. Fig. 5.13ab ist ein Schnitt des Feldes in der Äquatorialebene. Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil sieht man, daß sich die IBW rückwärts ausbreitet. Fig. 5.14ab zeigt einen analogen Plot für $n_\varphi = 14$. Da diese Mode resonant ist, ist der Anteil stehender Wellen auf der Niedrigfeldseite, also auf der Antennenseite, wesentlich größer als für $n_\varphi = 0$. Auf der Hochfeldseite bilden sich in jedem Fall stehende Wellen. Die Phasendifferenz zwischen Real- und Imaginärteil der schnellen Welle verschwindet dabei für nicht-resonanten Moden, während sie bei resonanten Moden π ist. Wegen der höheren Toroidalmode und der damit verbundenen größeren Dopplerbreit ist in Fig. 5.14 außerdem die Anregung der IBW wesentlich schwächer als in Fig. 5.13.

Fig. 5.15 – Fig. 5.17 zeigen die über magnetische Flußflächen gemittelten Depositsprofile für $n_\varphi = 0,6$ und 14. Man erkennt deutlich daß die durch IBW-Dämpfung absorbierte Leistung, d.h. die Modenkonzersion zur IBW, mit wachsender Toroidalmode abnimmt und der TTMP zunimmt. Da der TTMP hauptsächlich die schnelle Welle dämpft und nur von Temperatur, Dichte und Stärke des magnetischen Anteils des Wellenfeldes abhängt, zeigt das entsprechende Depositsprofile für $n_\varphi = 14$ besonders gut die stehende radiale Welle. Die über die Moden $-17 \leq n_\varphi \leq +17$ gewichtete "totale" Energiebilanz ergibt, daß 81.3% der eingestrahnten Leistung von den Ionen, 4.4% durch Elektron TTMP, 0.1% durch ELD und 15% durch IBW-Dämpfung absorbiert werden. Die letzte Zahl stellt dabei ein Maß für den Anteil der in die IBW durch Modenkonzersion übertragenen Energie dar. Für den Strahlungswiderstand der Antenne ergibt sich $R_A = 2.36$ Ohm.

In slab Geometrie ergibt sich unter Berücksichtigung der Toroidalmoden $-40 \leq n_\varphi \leq +40$ $R_A = 7.58$ Ohm. Neben dem breiteren Spektrum von Toroidalmoden, das in einem eindimensionalen Modell innerhalb vernünftiger Rechenzeit behandelt werden kann, gibt es für den erhöhten Wert für R_A weitere Gründe: Zu sehr kleinen n_φ gehört in dem slab-Modell ein sehr niedriges $k_{||}$, was eine starke Modenkonzersion (62.2% der eingestrahnten Energie wird hier in Ionen-Bernsteinwellen konvertiert!) und damit große Absorption bewirkt. Das ist aber im Tokamak und damit in dem toroidalen Modell, in dem zu einem n_φ ein ganzes Spektrum von verschiedenen $k_{||}$'s korrespondiert, nicht der Fall. Dadurch erklärt sich auch das in slab-Geometrie gefundene Maximum der Antennenkopplung für kleine n_φ , das in den Ergebnissen des globalen Codes nicht auftritt, vgl. Fig. 5.8. Außerdem behandelt ein slab-Modell nur das Verhalten in der Äquatorialebene, wo die Temperatur höher und damit die Dämpfung stärker als in anderen horizontalen Ebenen ist. Das kann zu einer Überschätzung des Antennenwiderstands führen.

Der gemessene Antennenwiderstand betrug für die hier diskutierte Entladung 10 Ohm, was eher dem eindimensionalen Ergebnis entspricht. Dazu muß gesagt werden, das R_A sehr stark von den Plasmaeigenschaften unmittelbar vor der Antenne (insbesondere der Dichte) abhängt, die experimentell nur schwer zugänglich sind und in dem globalen Code nicht immer dargestellt werden können. So ist es

z.B. nicht möglich, eine Vakuumschicht zwischen Antenne und Plasma zu simulieren. Aus diesen und aus Gründen der Handlichkeit sind eindimensionale Modelle sicher wesentlich besser dazu geeignet, die Antennenkopplung an das Plasma zu berechnen.

5.9.3. HEIZUNG EINES H/D-PLASMAS BEI DER ZWEITEN HARMONISCHEN VON WASSERSTOFF, $\nu=67$ MHZ.

In diesem Beispiel wird ein ASDEX-Schuß simuliert, in dem transient das H-Regime erreicht wurde. Das Plasma besteht aus 75% D⁺ und 25% H⁺ und wurde durch Neutralinjektion von Wasserstoff auf Zentraltemperaturen von 4.4 bzw. 8.8 keV vorgeheizt. Weitere Parameter sind in Spalte 5 von Tabelle 1 aufgeführt. In diesem Fall ist die single pass Absorption selbst für niedrige Toroidalmoden sehr groß so daß die Anregung der Ionen-Bernsteinwelle unterdrückt wird. Der in Kapitel 4. beschriebene Code ergab z.B. für $n_\varphi = 4$, daß 84.3% der einfallenden Strahlung durch Ionenzyklotrongdämpfung von den Protonen absorbiert wird und nur 2.4% werden in die Ionen-Bernsteinwelle konvertiert. Anregung von globalen Eigenmoden wird daher nicht erwartet. Wir haben deshalb ein gröberes toroidales Spektrum, nämlich die Moden $n_\varphi = 0, 4, 8, 12, 16, 20$ und 24 berechnet. Fig. 5.18 und 5.19 zeigen Höhenschichtlinien von $\text{Im}(E_x)$ für $n_\varphi = 4$ und 16. Wegen der höheren Frequenz ist die Wellenlänge der schnellen Welle etwa halb so groß wie in dem im vorigen Kapitel beschriebenen Fall. Auf Grund der hohen single pass Absorption die Feldstärke auf der Antennenseite wesentlich größer als auf der anderen Seite und die Ionen-Bernsteinwelle wird wie erwartet nur sehr schwach angeregt. In einem solchen Szenario ist ein Vergleich mit Ray Tracing möglich. Fig. 5.20 zeigt dazu die sich in dieser Approximation ergebenden Strahlen und Wellenfronten für $n_\varphi = 16$. Die Übereinstimmung mit Fig. 5.19 ist sehr gut.

Fig. 5.21ab ist ein Plot des Wellenfeldes in der Äquatorialebene für $n_\varphi = 4$. Wegen der hohen single pass Absorption und schwachen Reflektion bei der resonanten Schicht ist die Phasendifferenz zwischen Real- und Imaginärteil der schnellen Welle auf der Antennenseite $\simeq \pi/2$, d.h. es gibt dort praktisch keine stehenden Wellen (vgl. dazu Fig. 5.6ab und 5.14ab). Die Anregung der IBW ist relativ schwach. Auf der Hochfeldseite bilden die dorthin durchgetunnelten schnellen Wellen stehende Wellen.

In Fig. 5.22 haben wir die mit dem globalen Wellencode berechneten Beiträge der verschiedenen Toroidalmoden zu R_A zusammen mit den Resultaten des eindimensionalen slab-models aufgetragen. Die Übereinstimmung ist sehr gut, lediglich für $n_\varphi = 0$ erhält man in voller toroidaler Geometrie einen signifikant größeren Wert. Das kommt daher, daß dieser Mode in slab-Geometrie nur die parallele Wellenzahl $k_{\parallel} = 0$ entspricht. Modenkonzersion zur Ionen-Bernsteinwelle, ein Prozess, der bei dem hier angenommenen hohen β_i recht uneffizient ist, und deren anschließende Absorption stellt in diesem Modell für $n_\varphi = 0$ den einzigen Dämpfungsmechanismus dar. Da diese Mode auch nicht resonant ist, ergibt sich eine sehr schwache Kopplung. In toroidaler Geometrie bewirkt die Rotations-transformation eine Verbreiterung des k_{\parallel} -Spektrums für jedes n_φ , wodurch dieses Minimum fast ganz verschwindet.

Die eingestrahelte Leistung wird insgesamt fast ausschließlich durch Ionenzyklotrondämpfung bei der harmonischen Resonanz der Protonen absorbiert (98.3%). Die restliche Energie geht in Elektron TTMP (0.9%) und Bernsteinwellendämpfung (0.8%). Fig. 5.23 und Fig. 5.24 zeigen 3-d Plots der Leistungsdepositionsprofile für die Ionenzyklotrondämpfung und Bernsteinwellendämpfung. Man erkennt deutlich, daß der letzte Mechanismus nur die IBW betrifft. In Fig. 5.25ab haben wir die über ϑ integrierten Depositionsprofile mit den Ray-Tracing Ergebnissen, bei deren Berechnung nur ein einziger Durchgang durch Ionenzyklotronresonanz betrachtet wird, verglichen. Die Übereinstimmung ist sehr gut, wobei allerdings berücksichtigt werden muß, daß die Form dieser Kurven weitgehend durch die Geometrie vorbestimmt ist. Für den Strahlungswiderstand ergibt sich $R_A = 8.19$ Ohm, in dem slab-Modell erhält man 10.2 Ohm.

5.9.4. MINORITÄTSHEIZUNG VON He_3 IN DEUTERIUM.

Die genauen Parameter für dieses Beispiel sind in Spalte 6 von Tabelle 1 zusammengestellt. Sie sind so gewählt, daß die (isolierte) Ion Ion-Hybridresonanz etwa in der Mitte des Plasmas liegt (bei $x=-0.6$ cm). Die Fundamentalresonanz der He_3^{++} -Minorität befindet sich auf der Niedrigfeldseite 5.9 cm von der magnetischen Achse entfernt. Außerdem ist noch die Fundamentalresonanz der Majorität innerhalb des Plasmas (bei $x=-37.6$ cm), was aber hier eine untergeordnete Rolle spielt. Nach dem Modell von Hellsten und Tennfors³⁷ würde in einem "kalten" Plasma in einem solchen Szenario bei der Ion Ion-Hybridresonanz die Ionenzyklotronwelle angeregt werden, die sich dann entlang magnetischer Flußflächen zur Niedrigfeldseite hin ausbreitet. In der Nähe der magnetischen Achse könnten sich sogar stehende Wellen bilden (vgl. auch Kap. 3.1). Um endgültig entscheiden zu können, ob dieses Bild in einem Plasma mit endlichen Temperaturen richtig ist, müsste man wahrscheinlich einen Code entwickeln, in dem neben den in diesem Modell enthaltenen Termen noch FLR-Korrekturen berücksichtigt werden, die bei $\omega \simeq \Omega_{ci}$ resonant sind. Unser Code ergibt außerdem zumindest in dem hier diskutierten Beispiel keine konvergente Lösung.

Da die Ionenzyklotronwelle eine sehr kurze Wellenlänge hat, haben wir $N_m = 75$ Poloidalmoden benutzt. Wegen der langen Rechenzeit (ca. 45 Minuten auf der Cray X-MP) konnte nur eine Toroidalmoden, $n_\varphi = 10$, untersucht werden.

Die in Fig. 5.26ab dargestellten Höhenlinien zeigen sehr steile Gradienten in der Nähe der Ion Ion-Hybridresonanz und kurze Wellenlängen auf der Hochfeldseite. Dieses Bild wird in dem in Fig. 5.27ab geplotteten Schnitt in der Äquatorialebene bestätigt. Man sieht außerdem, daß die E_+ -Komponente bei der Fundamentalresonanz der Majorität praktisch verschwindet. Man erkennt aber auch, daß die kurzen Wellenlängen auf Grund unzureichender Konvergenz in abgeschwächter Form auf die rechte Seite durchschlagen. Diese kleinen Zacken als Ionenzyklotronwelle zu interpretieren wäre falsch, da sie auch in unmittelbarer Nähe der Fundamentalresonanz des He_3^{++} auftreten. Es scheint vielmehr so zu sein, daß bei den hier angenommenen Temperaturen unter Berücksichtigung von FLR-Termen andere Wellen angeregt werden. Der in Kapitel 4 beschriebene ein-dimensionale Code, der die gleichen Terme enthält wie der globale Code, ergibt

in der Nähe der Äquatorialebene ein ähnliches Bild. Die Ionenzyklotronwelle wird nur in Regionen außerhalb der Äquatorialebene, wo \vec{B}_0 eine größere Horizontalkomponente, d.h. senkrecht zur resonante Schicht, aufweist, angeregt. In diesem Gebiet wird aber in dem eindimensionalen Modell die Ionenzyklotrondämpfung nicht richtig beschrieben, vgl. Kap. 4.4.4. Außerdem können globale Effekte nicht berücksichtigt werden.

Die in dem hier diskutierten Fall unzureichende Konvergenz der globalen Lösung wird besonders deutlich, wenn man sich die in Fig. 5.28ab dargestellten poloidalen Spektren ansieht. Auf der Seite negativer m 's, die für $n_\varphi = 10$ ein kleineres k_{\parallel}^m und damit schwächere Dämpfung ergeben, sind nicht genug Moden vorhanden. Deshalb stimmen eingestrahlte und absorbierte Leistung nur mit einer "Genauigkeit" von 14% überein. Der mit Abstand wichtigste Absorptionsmechanismus ist dabei Ionenzyklotrondämpfung durch die Minorität.

5.9.5. EIN BEISPIEL FÜR JET.

Auch wenn JET auf Grund seiner stark elliptischen Flußflächen nicht optimal für die Anwendung der momentanen Version unseres Codes geeignet ist, sollten die wesentlichen Eigenschaften von ICRH auch in vereinfachter Geometrie richtig dargestellt werden. Wir haben dazu folgende Maschinen- und Antennenparameter verwandt:

Großer Radius:	$R_T = 300 \text{ cm}$
Plasmaradius:	$a = 120 \text{ cm}$
Abstand Antenne-mag. Achse:	$r_A = 125 \text{ cm}$
Abstand Gefäßwand-mag. Achse:	$r_W = 135 \text{ cm}$
B_0 (bei $r=0$):	3.45 T
I_{Tor} :	3.5 MA
(Toroidale) Breite der Antenne:	$w_A = 40 \text{ cm}$
Pol. Ausdehnung der Antenne:	$\vartheta = \pm 40^\circ$
LC-Konstante:	$\sqrt{LC} = 1.8$

Kurze Wellenlängen können in derartig großen Tokamaks innerhalb vernünftiger Rechenzeiten nur in unmittelbarer Nähe der magnetischen Achse auf-

gelöst werden. Deshalb haben wir die Heizung eines Deuteriumplasma mit einer Wasserstoffminorität bei $\omega \simeq \Omega_{cH} = 2\Omega_{cD}$ simuliert und die Plasmaparameter so gewählt, daß die Modenkonzersion zur Ionen-Bernsteinwelle schwach ist (Minoritätsregime) :

ν	50 MHz
n_φ	18
Elektronen:	
$n_e(0)$	$6 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}$
$n_e(a)$	$0.9 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}$
Abfalllänge scrape-off	10 cm
$T_e(0)$	3 keV
$T_e(a)$	0.6
Abfalllänge scrape-off	8 cm
Ionen:	"3" Spezies
	98% D^+ mit
$T_i(0)$	3 keV
$T_i(a)$	0.6 keV
Abfalllänge scrape-off	8 cm
	1.5% H^+ mit
$T_i(0)$	6 keV
$T_i(a)$	0.6 keV
Abfalllänge scrape-off	8 cm
	0.5% H^+ mit
$T_i(0)$	18 keV
$T_i(a)$	0.6 keV
Abfalllänge scrape-off	8 cm

Die Ion Ion-Hybridresonanz liegt bei $x=11$ cm, die Fundamentalresonanz des H^+ und die harmonische des D^+ sind bei $x=15.7$ cm.

Fig. 5.29ab zeigt Höhengschichtlinien der Horizontalkomponente des elektrischen Wellenfeldes und Fig. 5.30ab einen Schnitt in der Horizontalebene. Man erkennt hauptsächlich die schnelle Welle, die IBW wird kaum angeregt. Daher

reichen in diesem Fall selbst für ein so großes Plasma $N_m = 42$ Moden aus, um zufriedenstellende Konvergenz zu erhalten (siehe Fig. 5.31ab). Die Energiebilanz ergibt für die hier untersuchte Toroidalmode $n_\varphi = 18$:

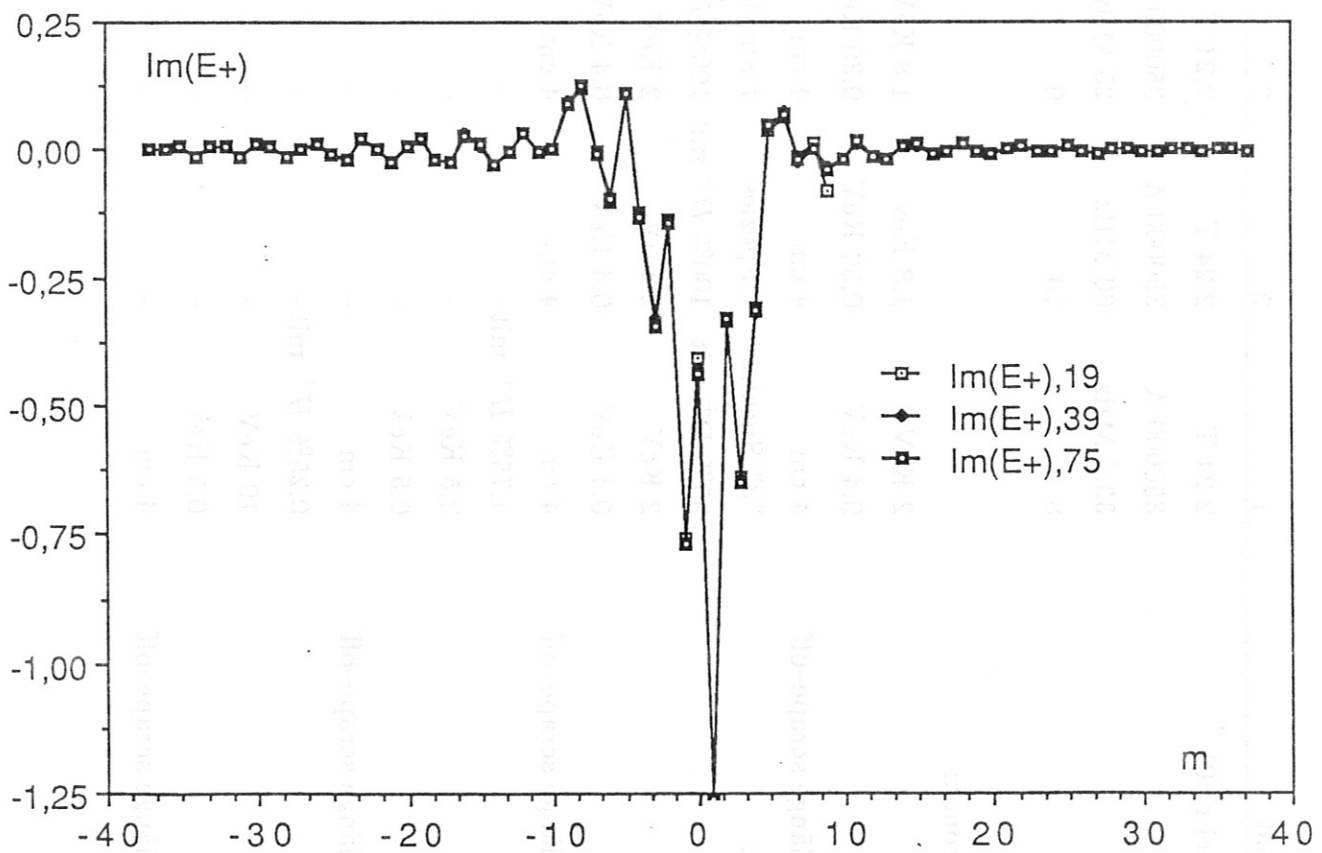
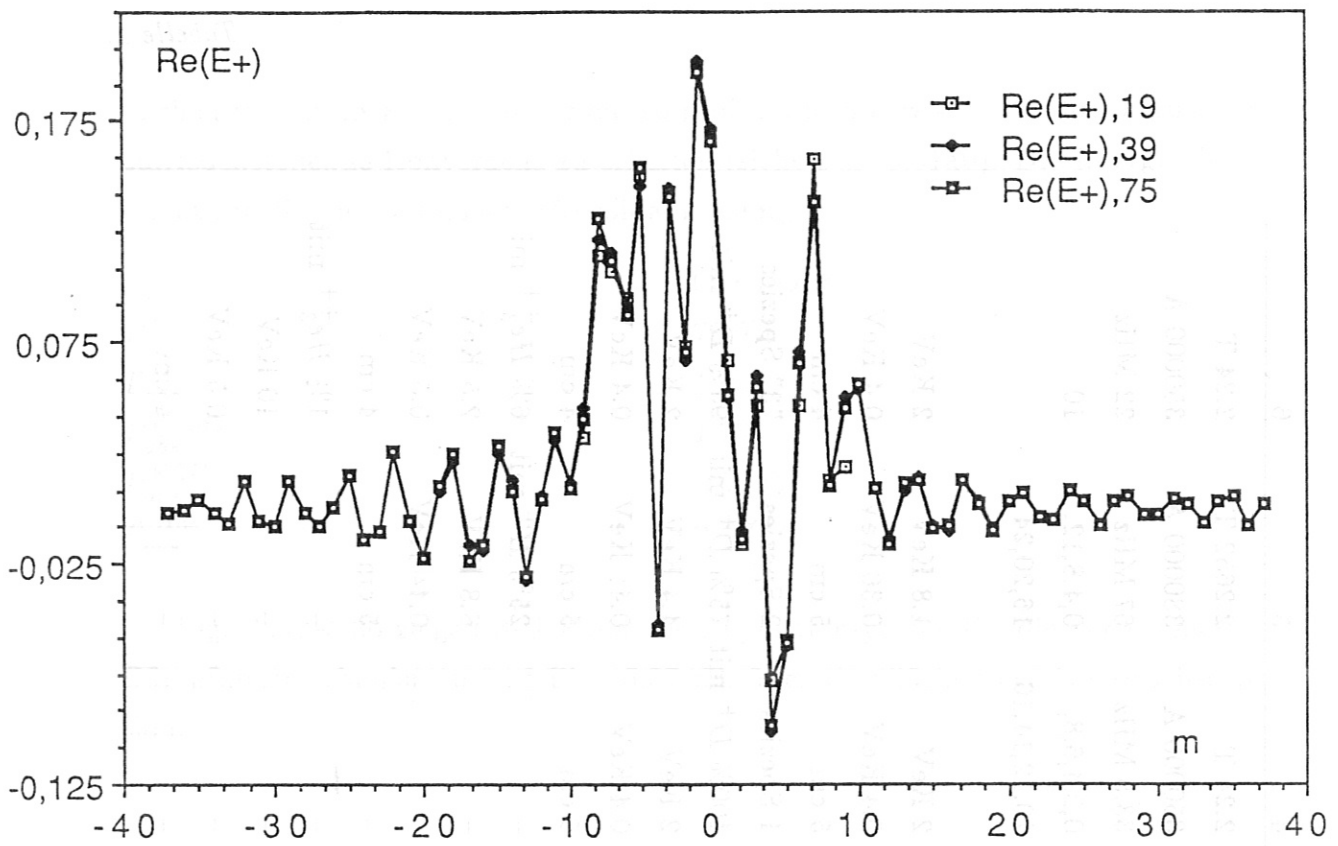
R_A	0.264 Ohm
P_{abs}^H	79.9%
P_{abs}^D	18.3%
P_{abs}^{TTMP}	1.7%
P_{abs}^{ELD}	<0.1%
P_{abs}^{Stoc}	0.4%

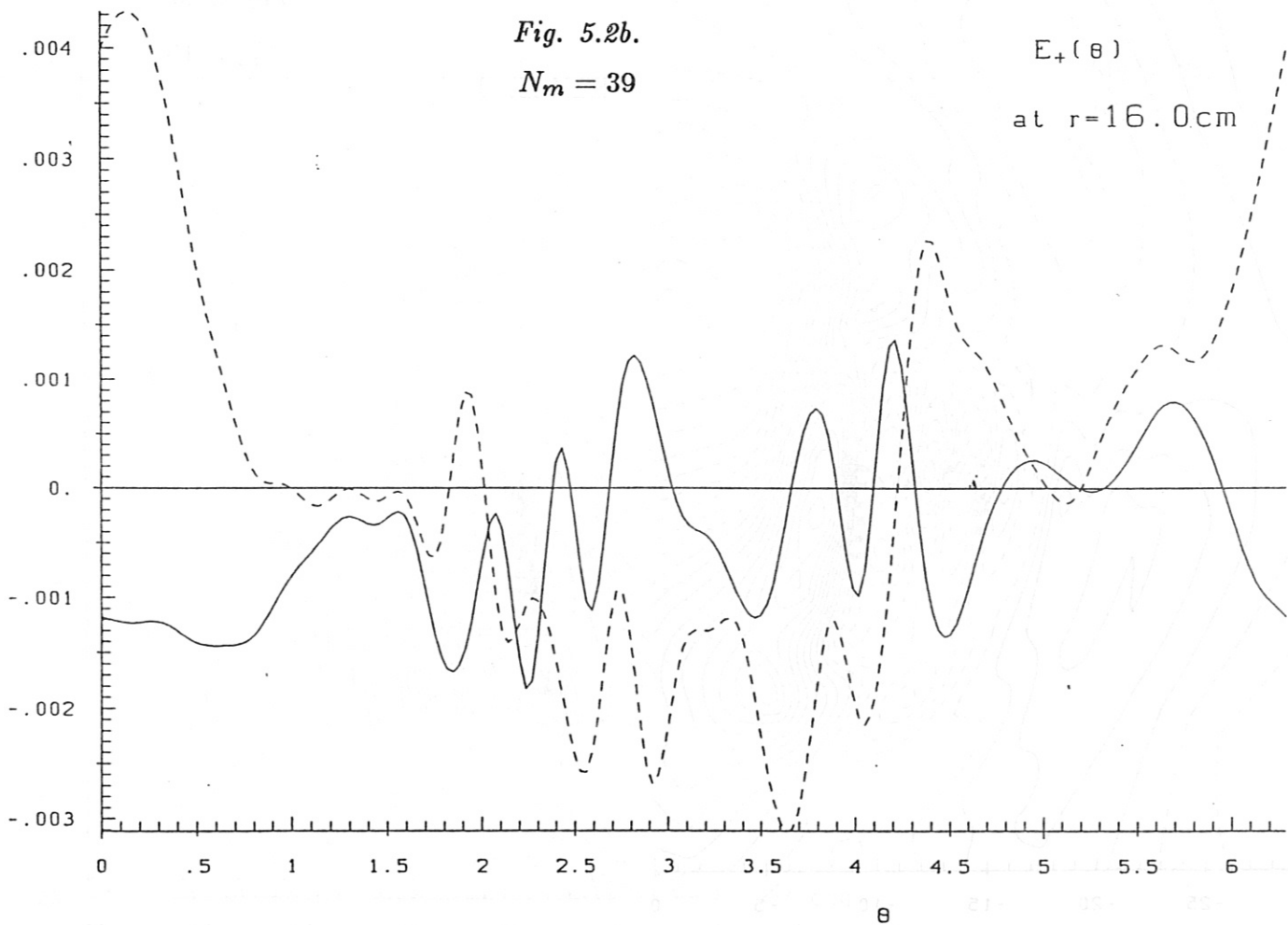
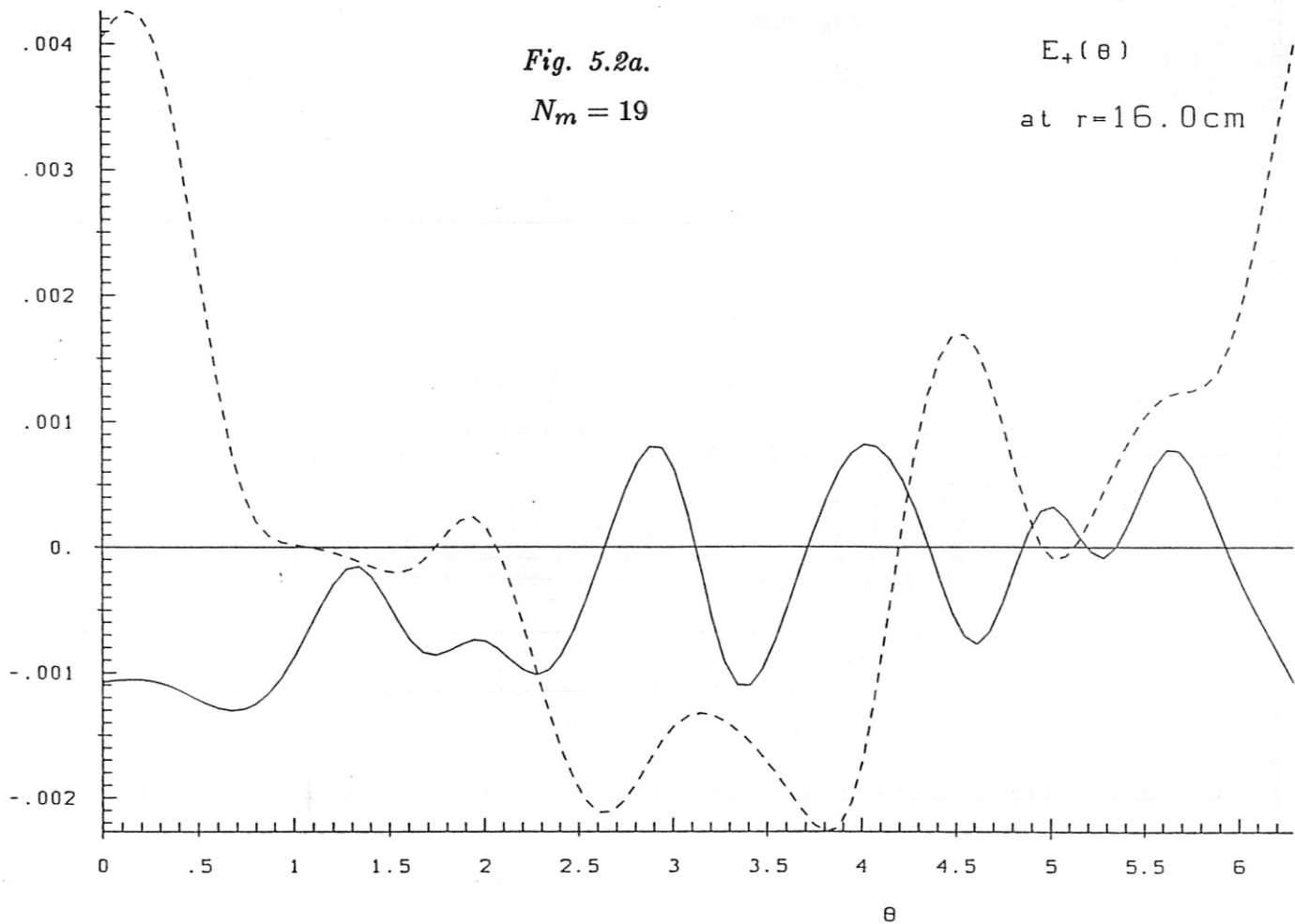
Fig. 5.32–5.36 zeigen 3-d Plots der Depositionprofile für die verschiedenen Dämpfungsmechanismen und Fig. 5.37 die über Flußflächen gemittelte Absorption.

Tabelle 1.

Beispiel	1	2	3	4	5	6
B_0 (bei $r=0$)	2.24 T	2.24 T	2.24 T	2.24 T	2.2652 T	2.24 T
I_{Tor}	350000 A	350000 A	350000 A	350000 A	380000 A	350000 A
ν	33.5 MHz	60 MHz	25 MHz	33.5 MHz	67 MHz	22 MHz
n_φ	8	10	0	0,2,4,6,8, 10,12,14,16	0,4,8,12, 16,20,24	10
Elektronen:						
$T_e(0)$	2 KeV	1.8 KeV	1.8 KeV	2 KeV	1.8 KeV	2 KeV
$T_e(a)$	0.4 KeV	0.36 KeV	0.36 KeV	0.4 KeV	0.36 KeV	0.4 KeV
Abfalllänge scrape-off	4 cm	4 cm	4 cm	5 cm	5 cm	4 cm
Ionen:						
	"3" Spezies	1 Spezies	1 Spezies	1 Spezies	2 Spezies	"3" Spezies
	95% D^+ mit	100% D^+ mit	100% H^+ mit	100% D^+ mit	75% D^+ mit	93% D^+ mit
$T_i(0)$	2 KeV	2 KeV	2 KeV	2 KeV	4.4 KeV	2 KeV
$T_i(a)$	0.4 KeV	0.4 KeV	0.4 KeV	0.4 KeV	0.44 KeV	0.4 KeV
Abfalllänge scrape-off	4 cm	4 cm	4 cm	5 cm	5 cm	4 cm
	4.75% H^+ mit-	-	-	-	25% H^+ mit	6% He_3^{++} mit
$T_i(0)$	2.5 KeV	-	-	-	8.8 KeV	2.5 KeV
$T_i(a)$	0.5 KeV	-	-	-	0.44 KeV	0.5 KeV
Abfalllänge scrape-off	4 cm	-	-	-	5 cm	4 cm
	0.25% H^+ mit-	-	-	-	-	1% He_3^{++} mit
$T_i(0)$	10 KeV	-	-	-	-	10 KeV
$T_i(a)$	0.5 KeV	-	-	-	-	0.5 KeV
Abfalllänge scrape-off	4 cm	-	-	-	-	4 cm

Fig. 5.1ab.





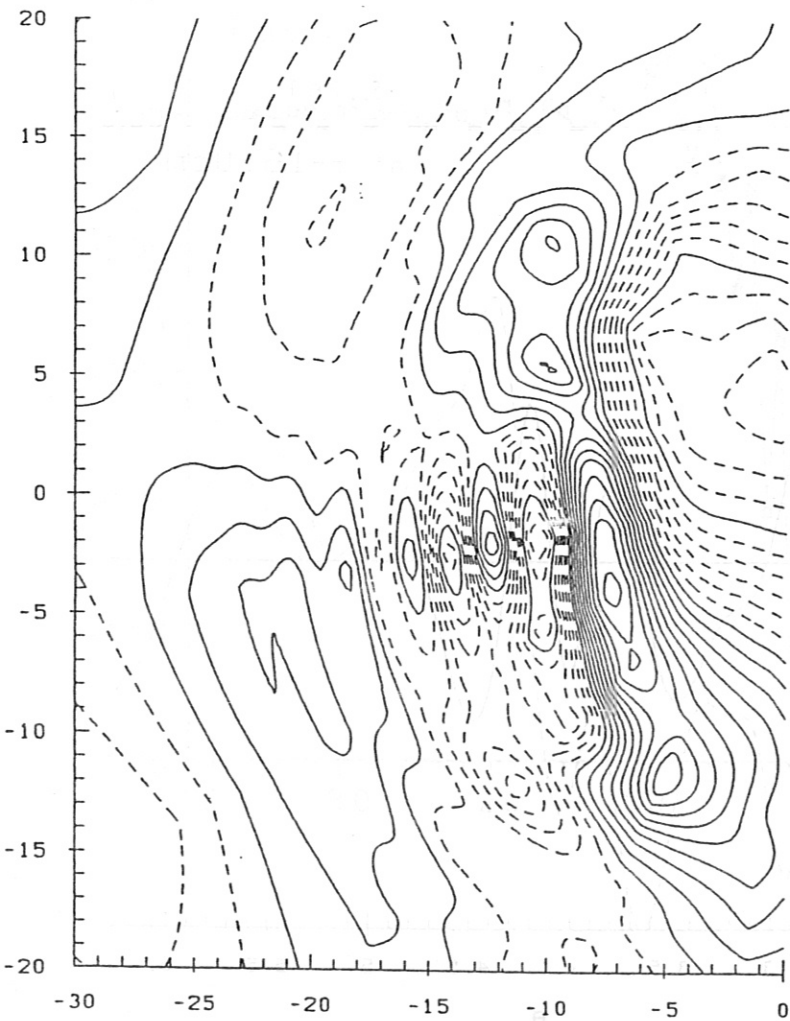
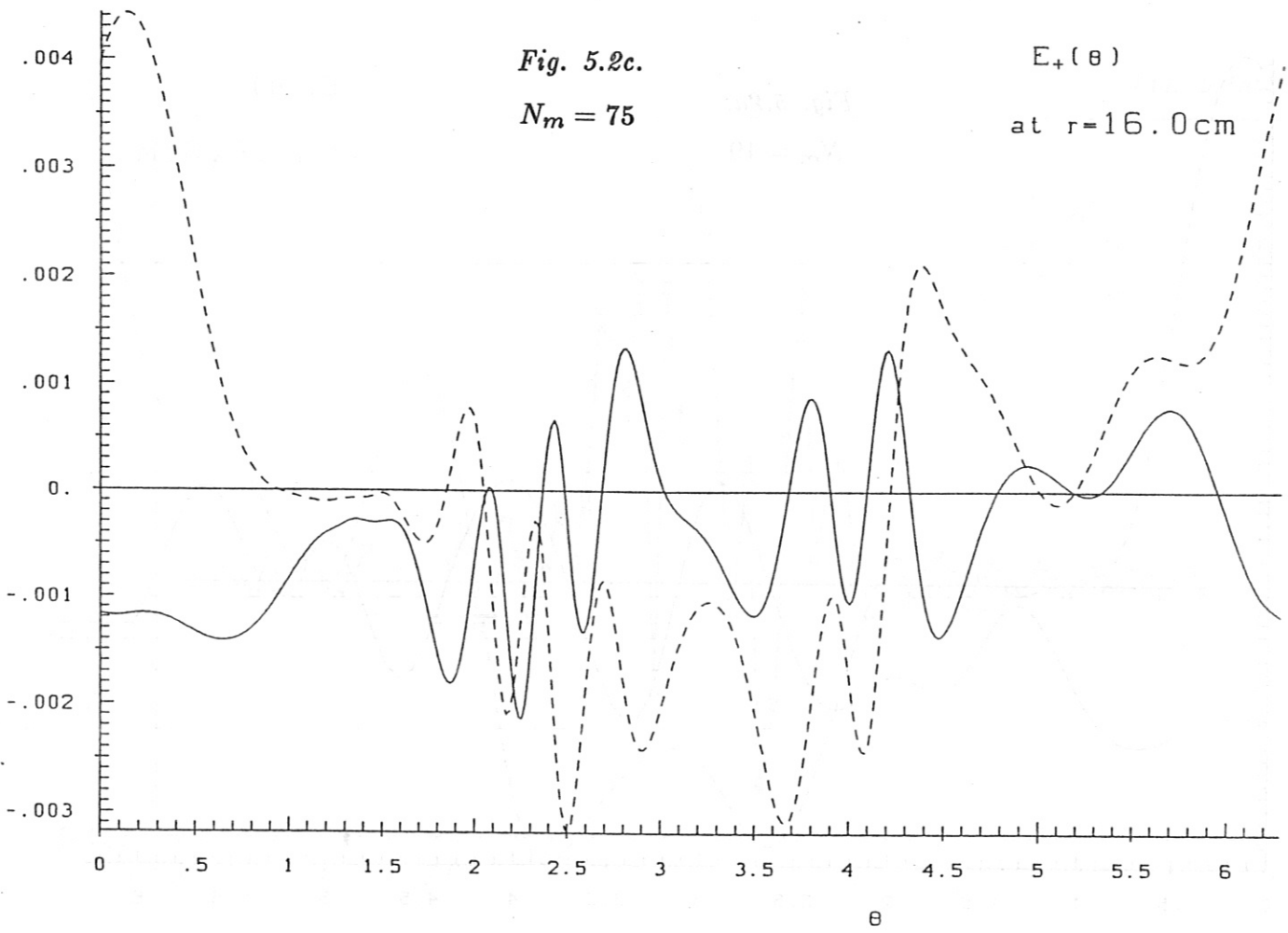
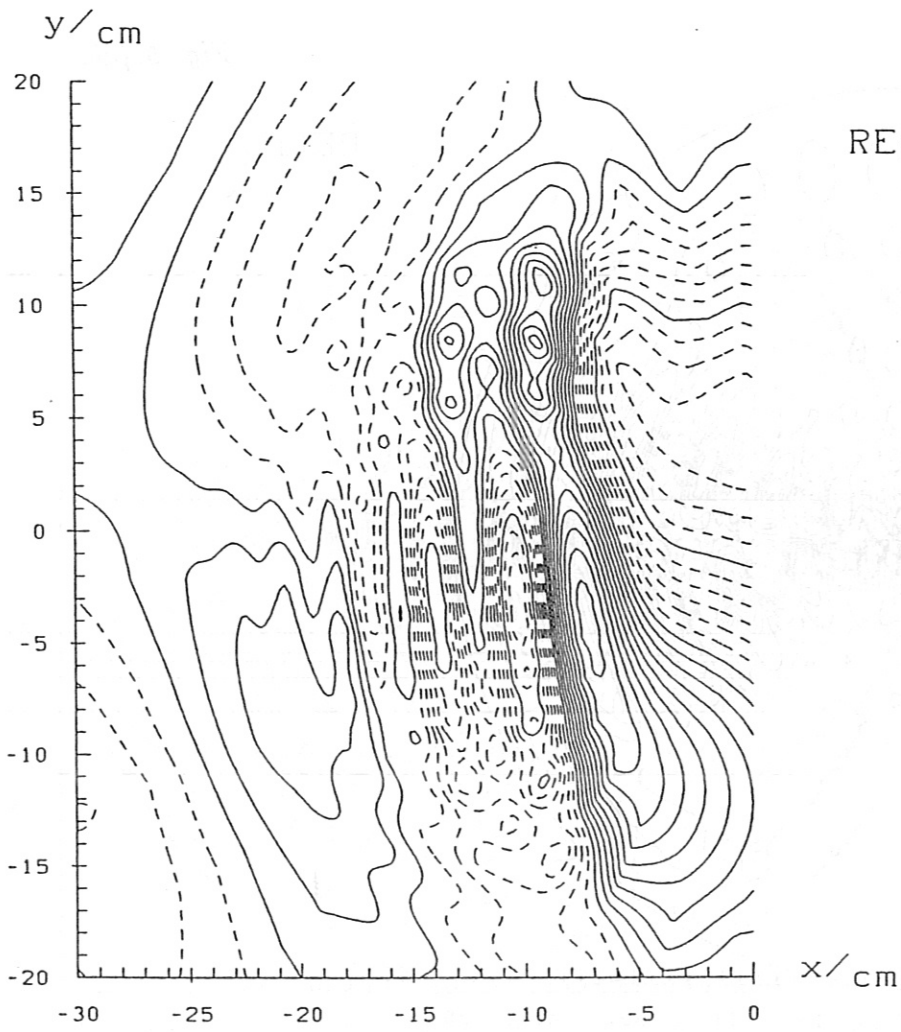


Fig. 5.3a.

$N_m = 19$

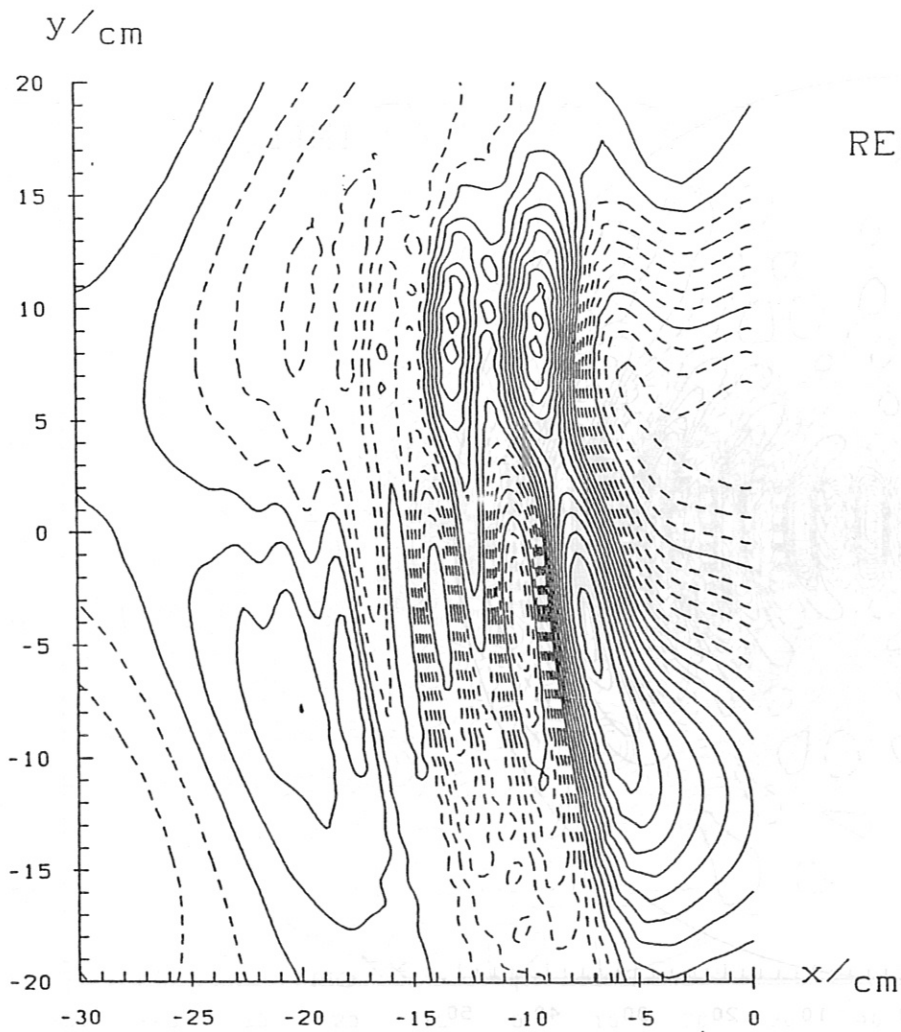
$RE(E_+)$



$RE(E_+)$

Fig. 5.3b.

$N_m = 39$



$RE(E_+)$

Fig. 5.3c.

$N_m = 75$

Fig. 5.4ab.

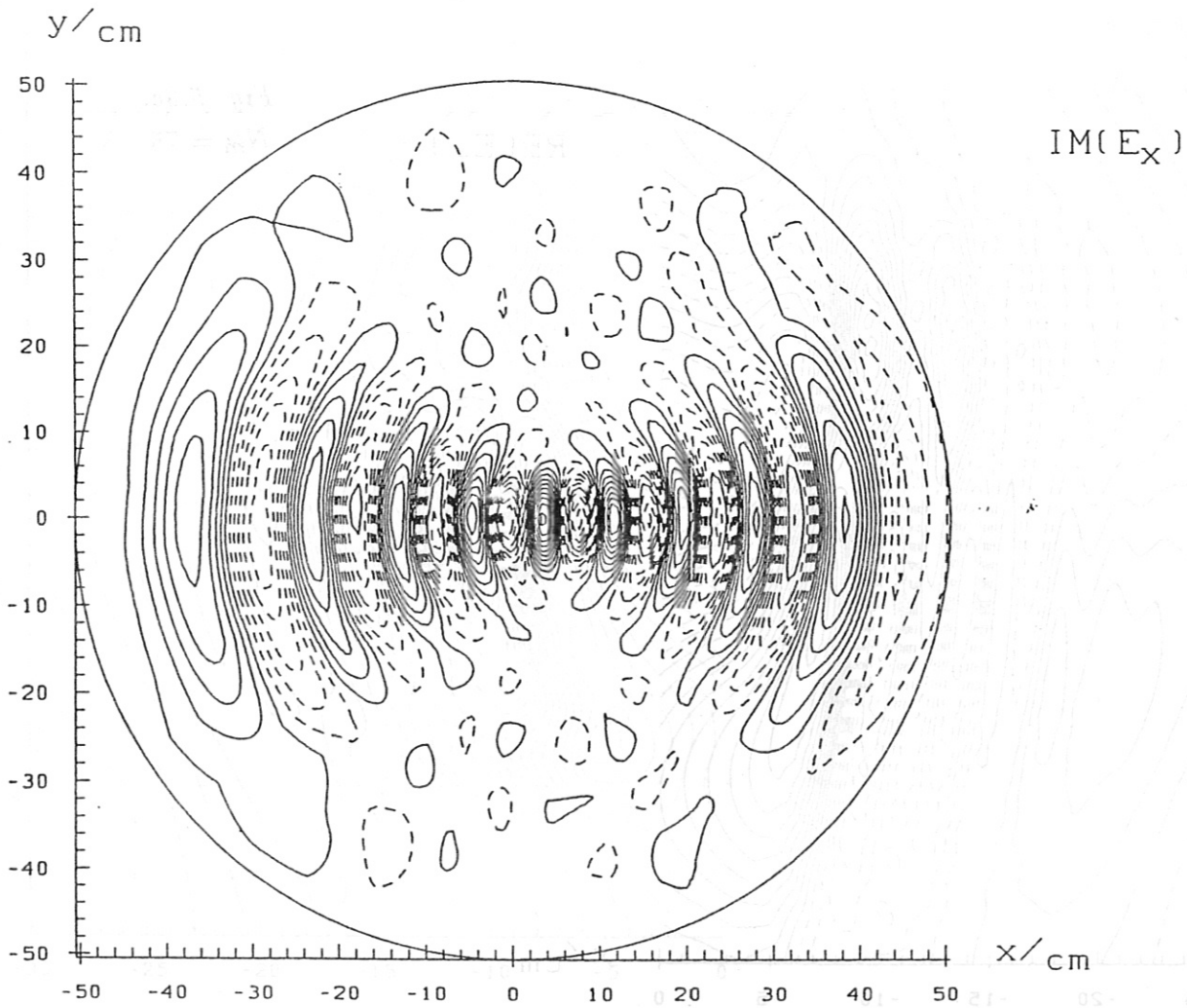
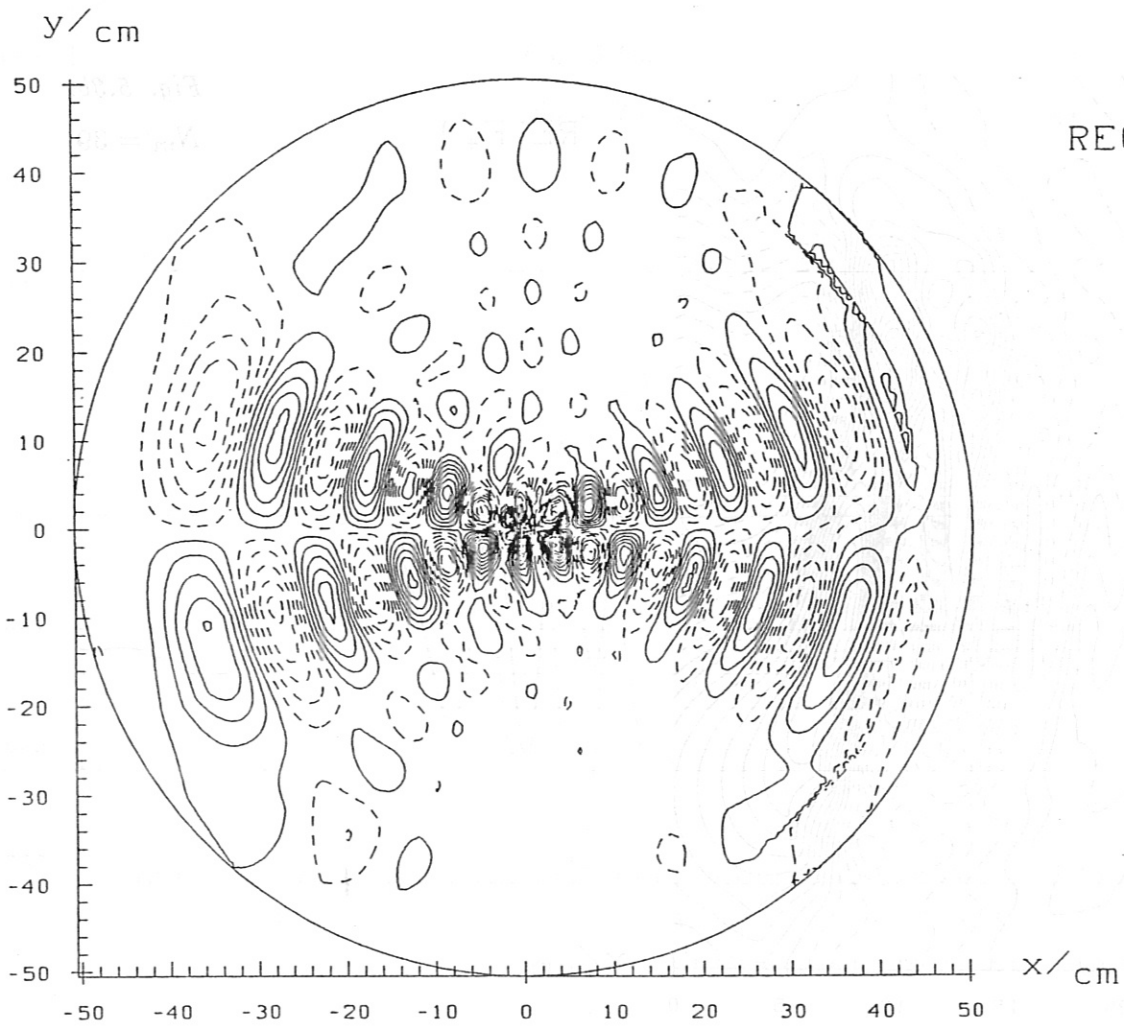


Fig. 5.5ab.

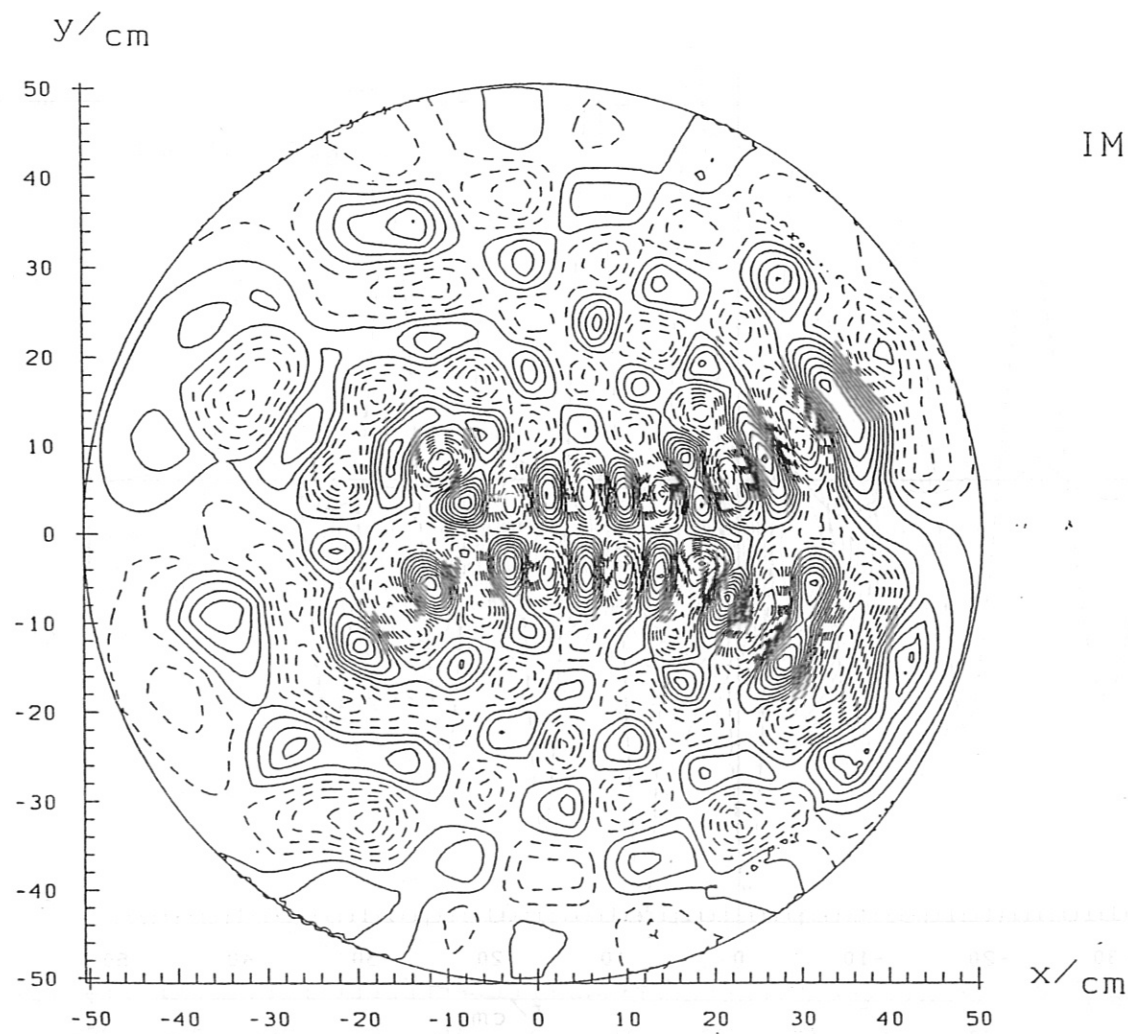
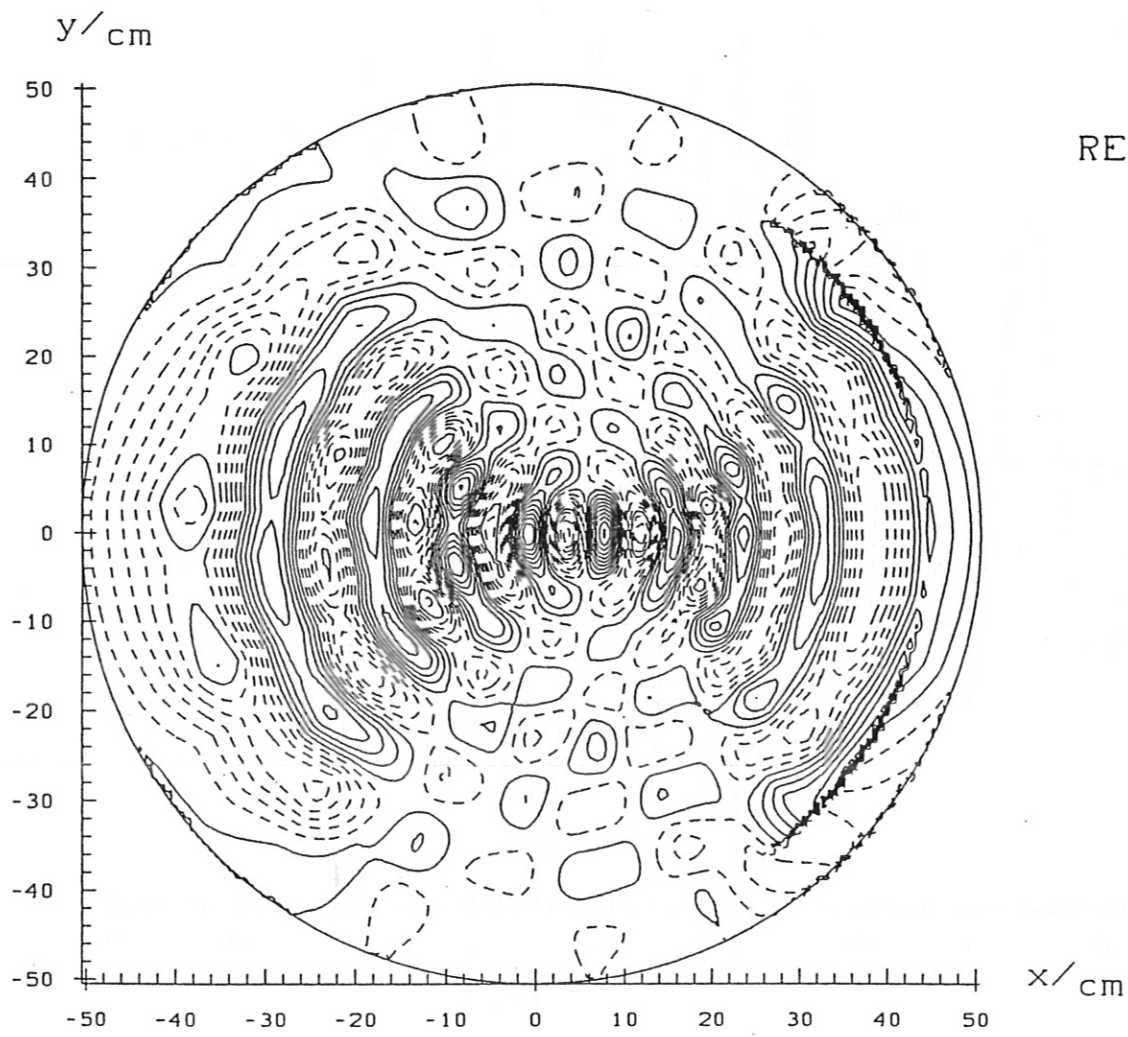


Fig. 5.6ab.

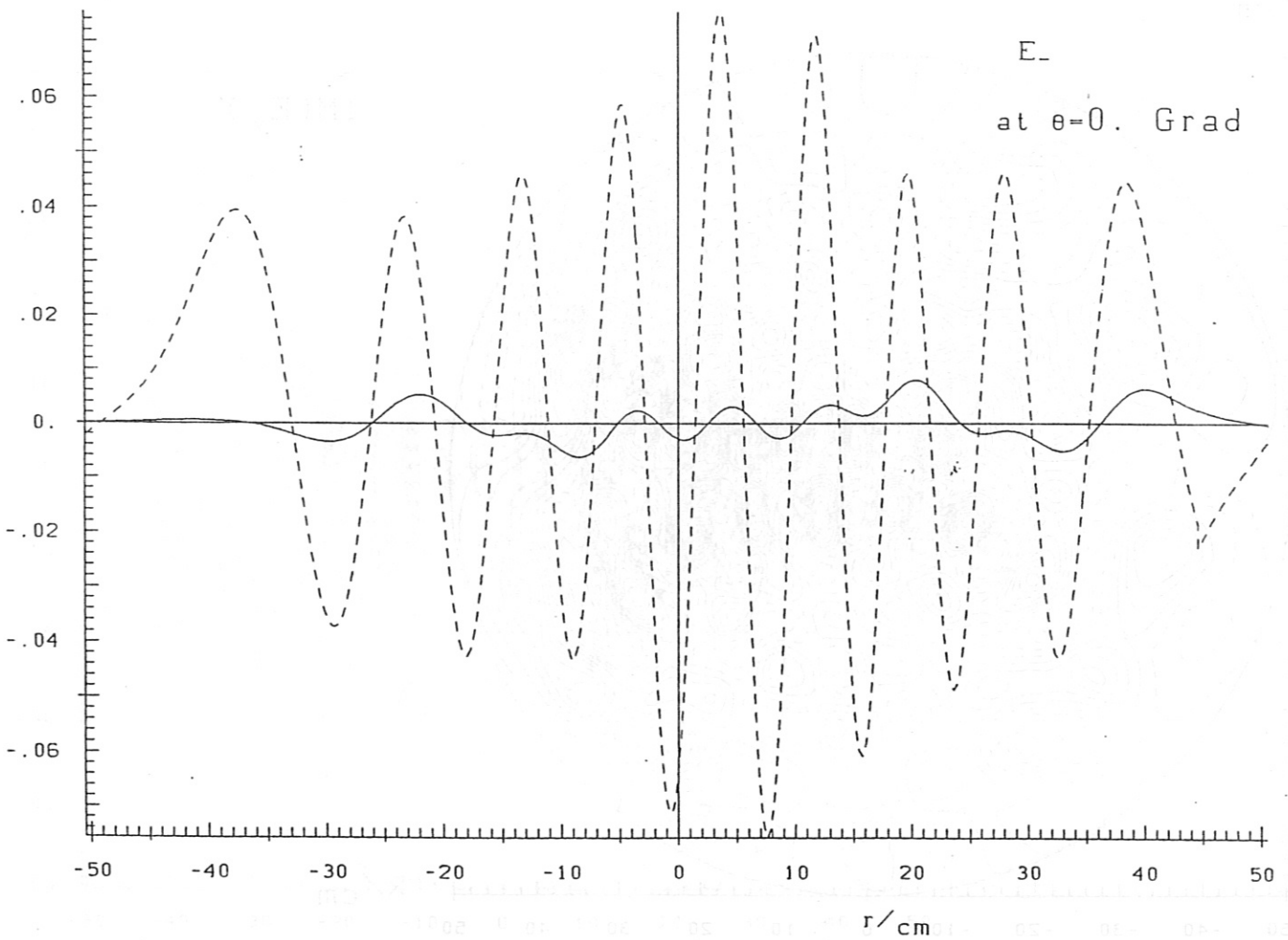
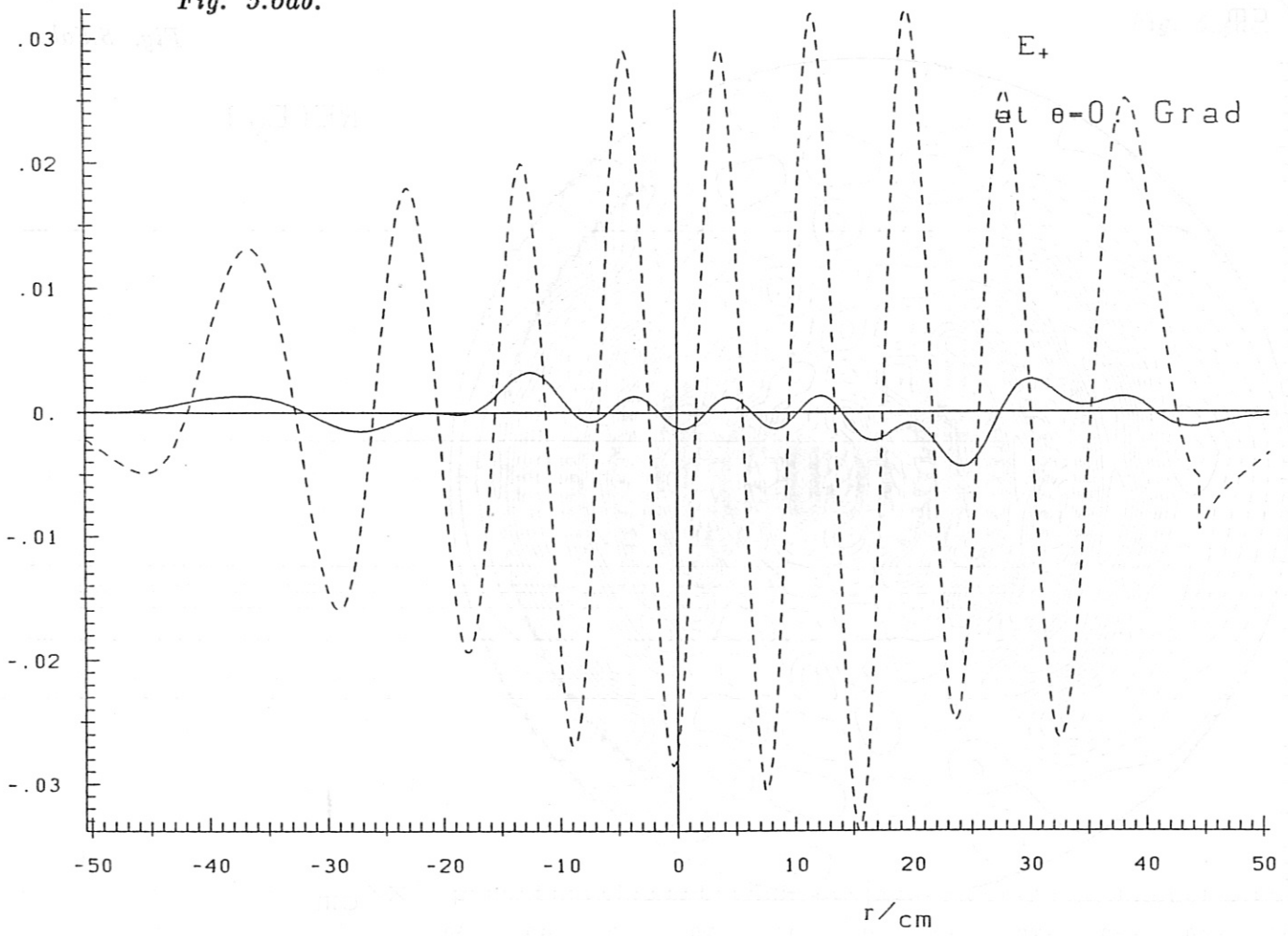


Fig. 5.7ab.

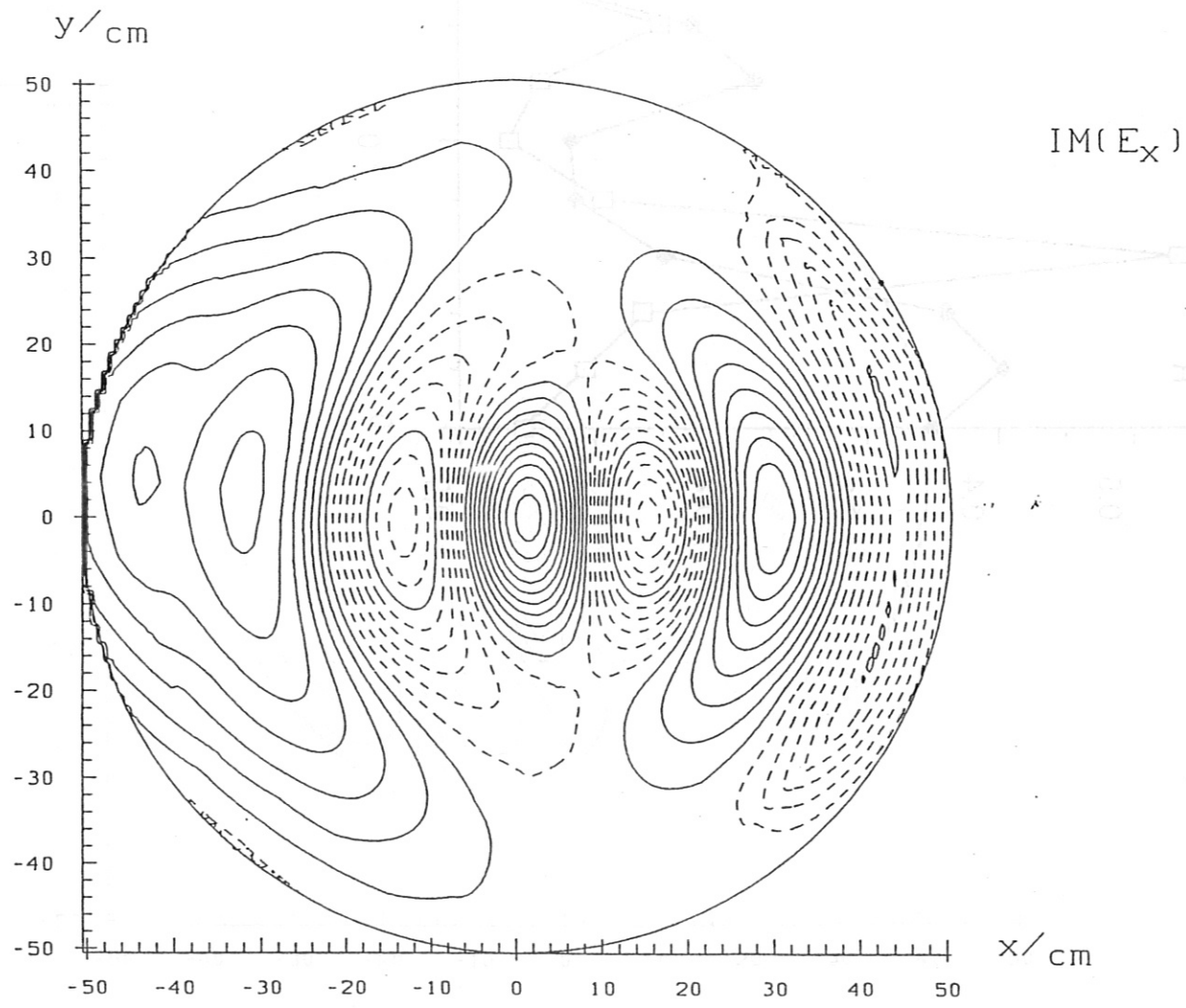
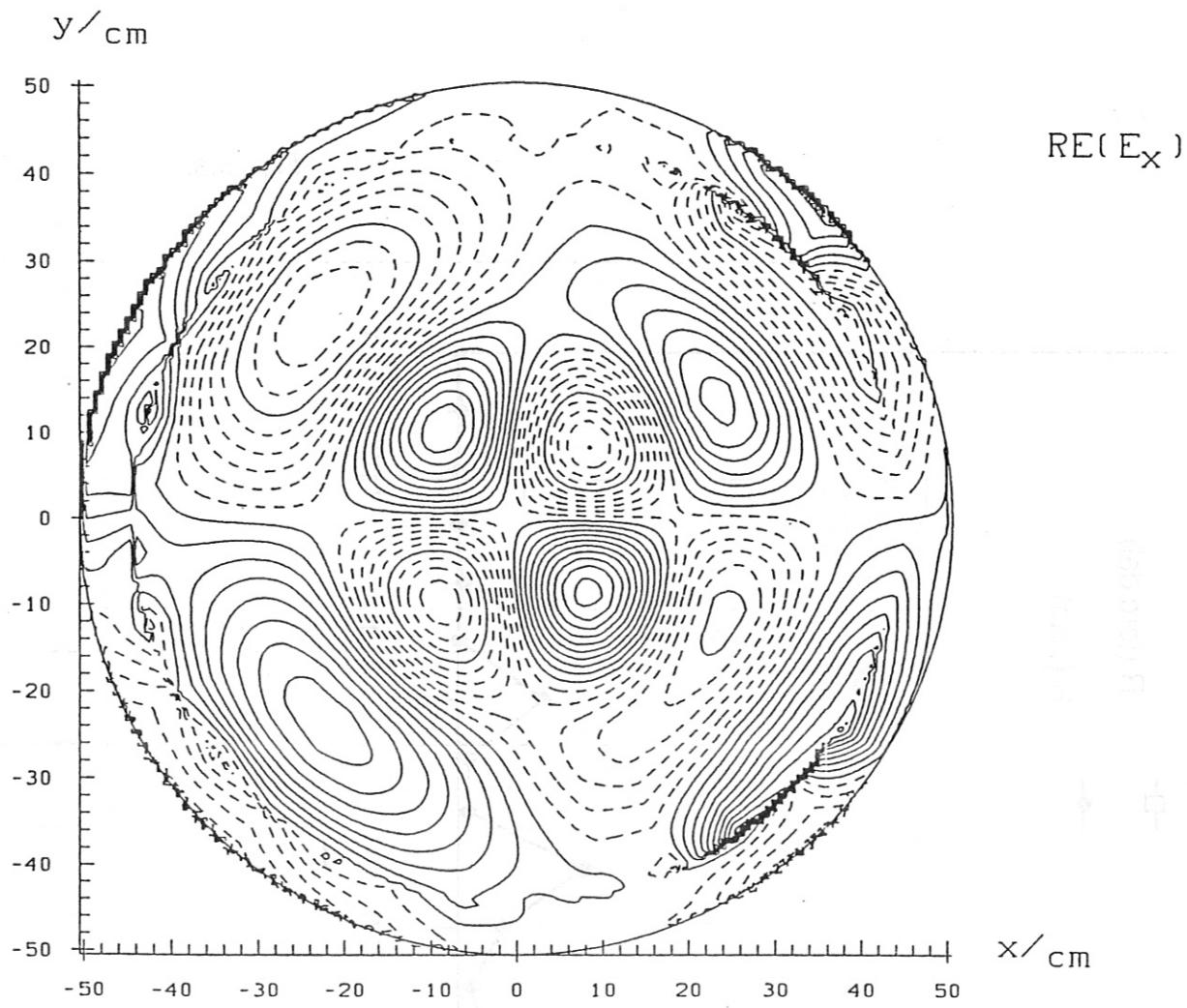
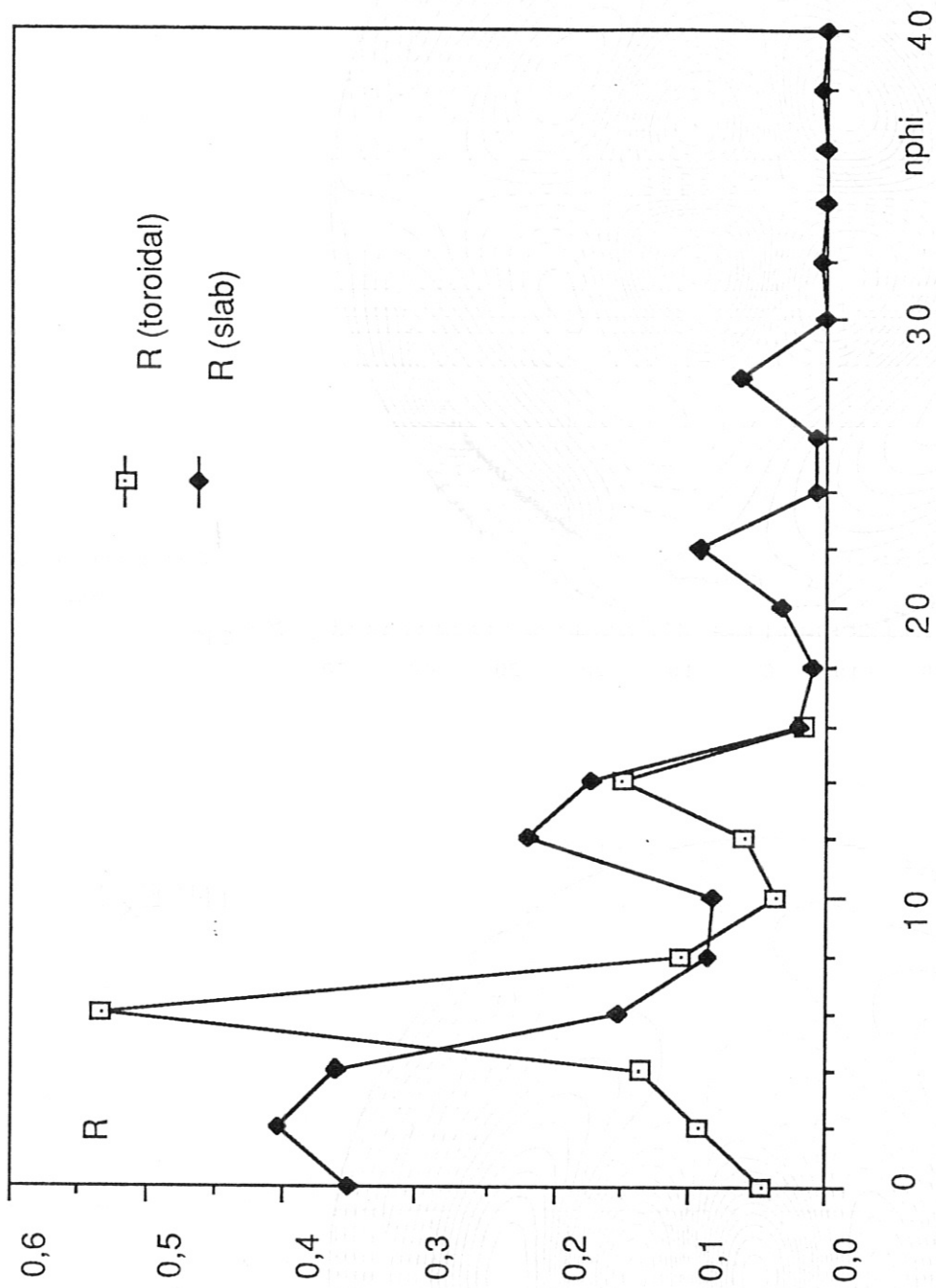


Fig. 5.8.



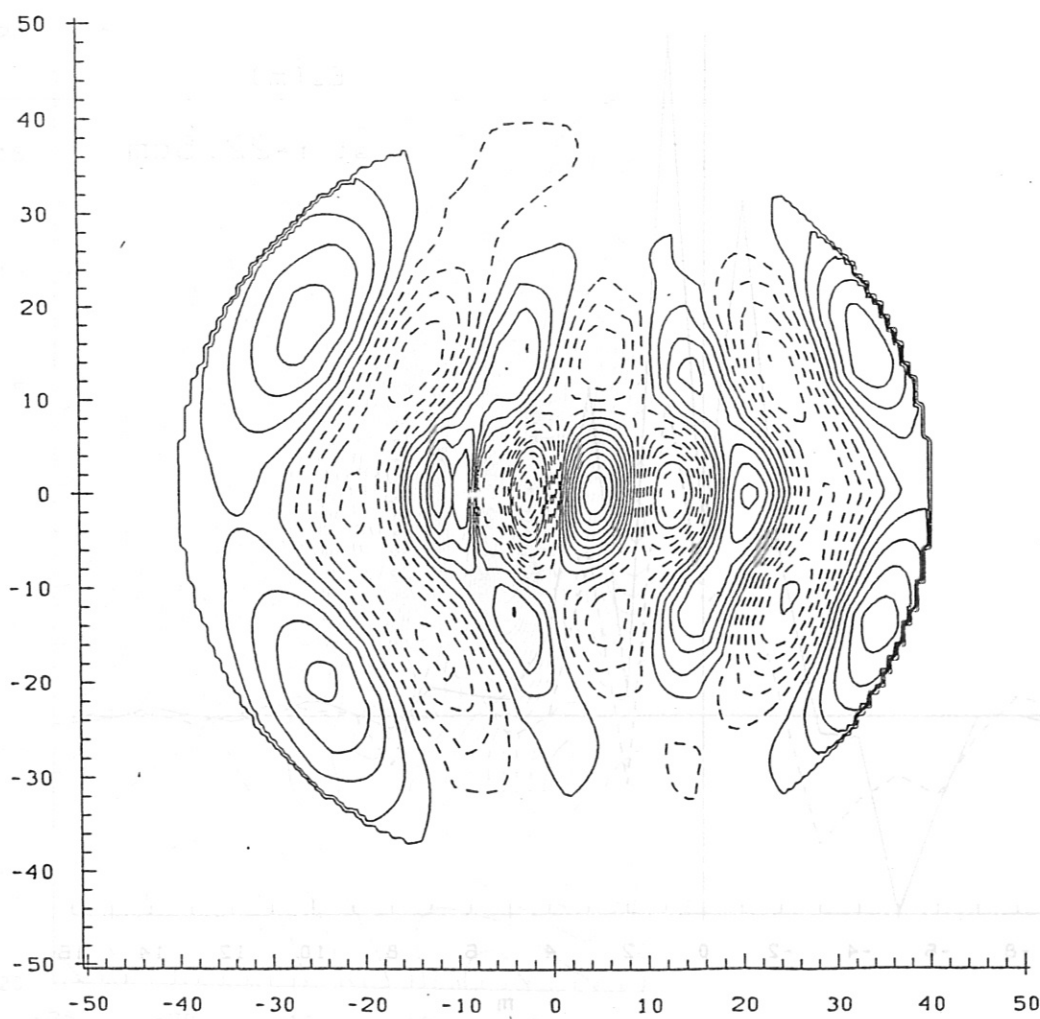
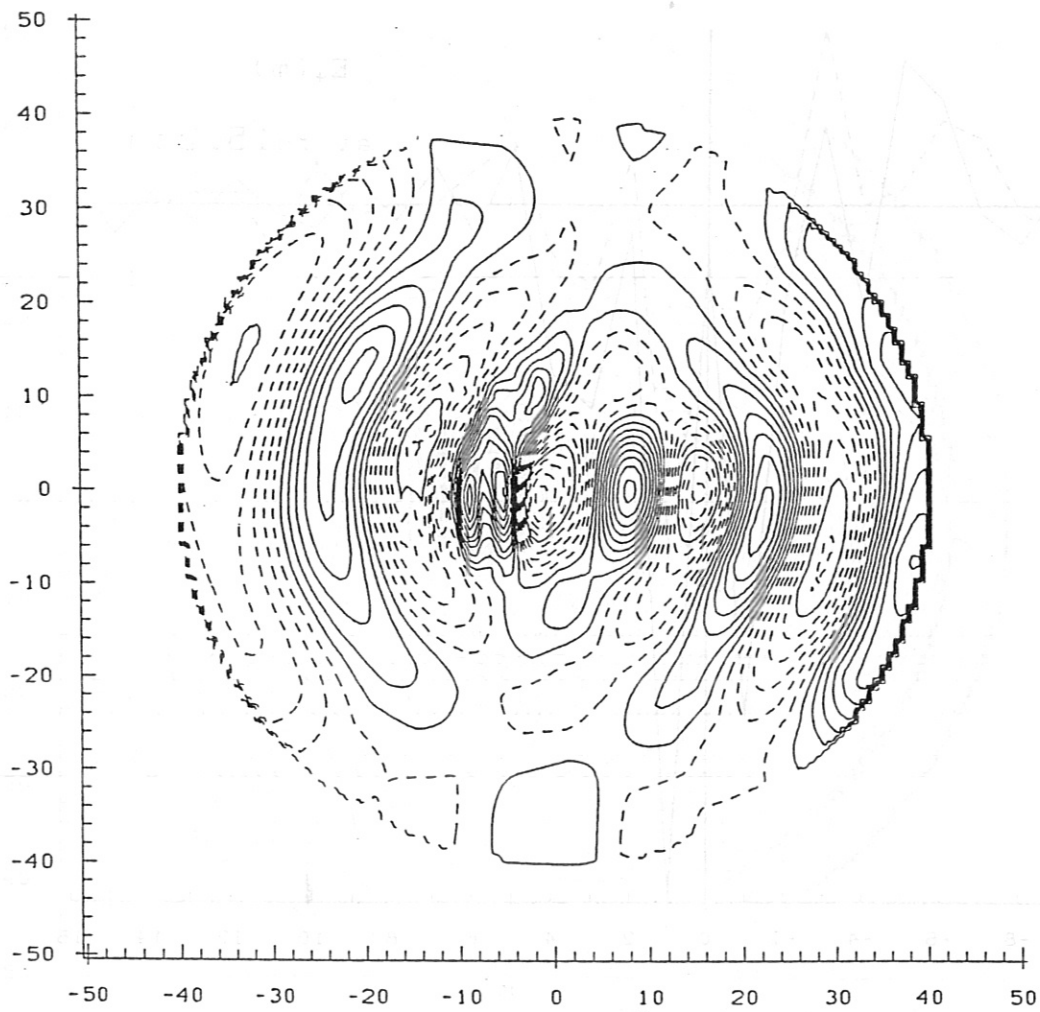


Fig. 5.11ab.

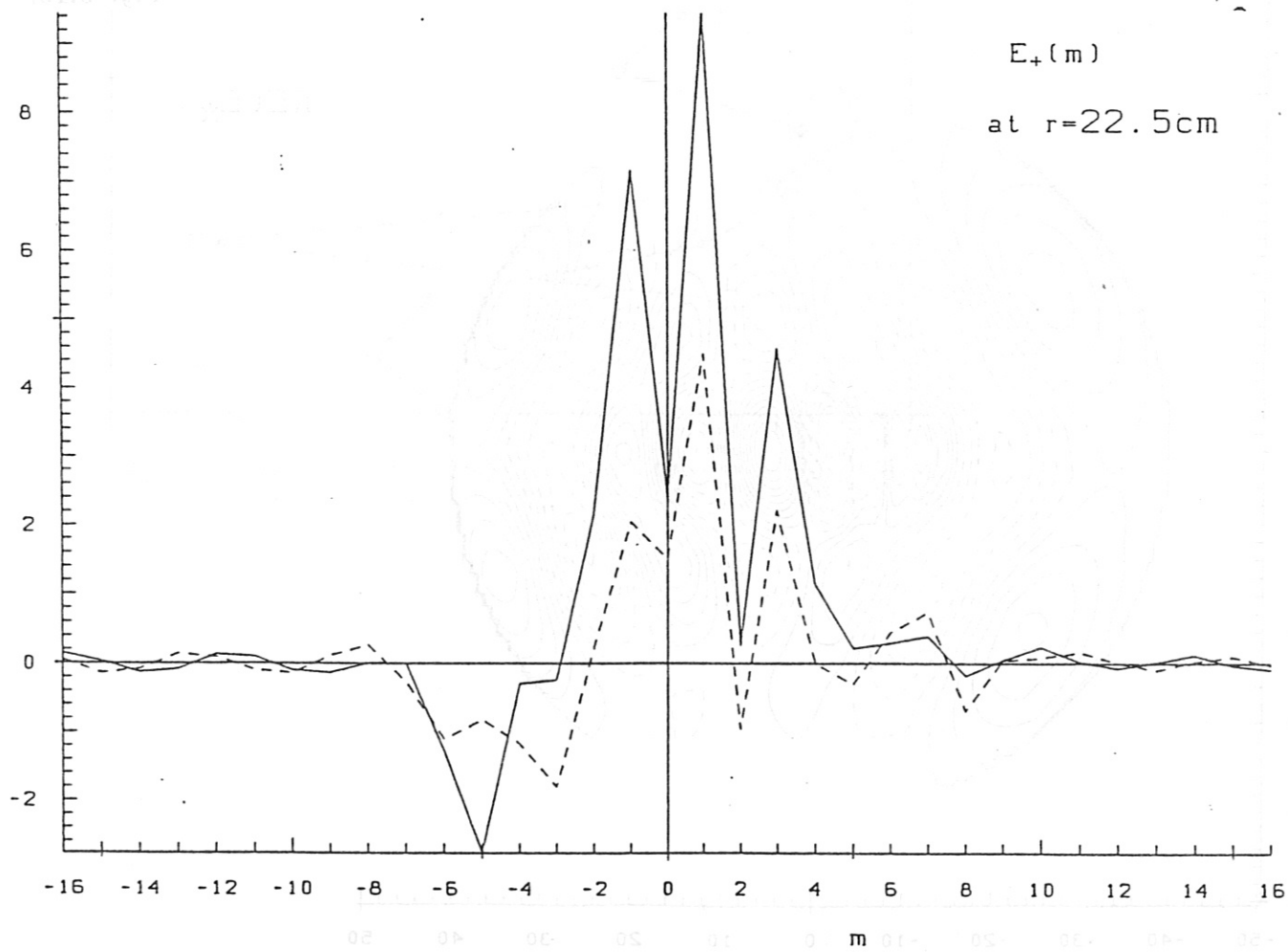
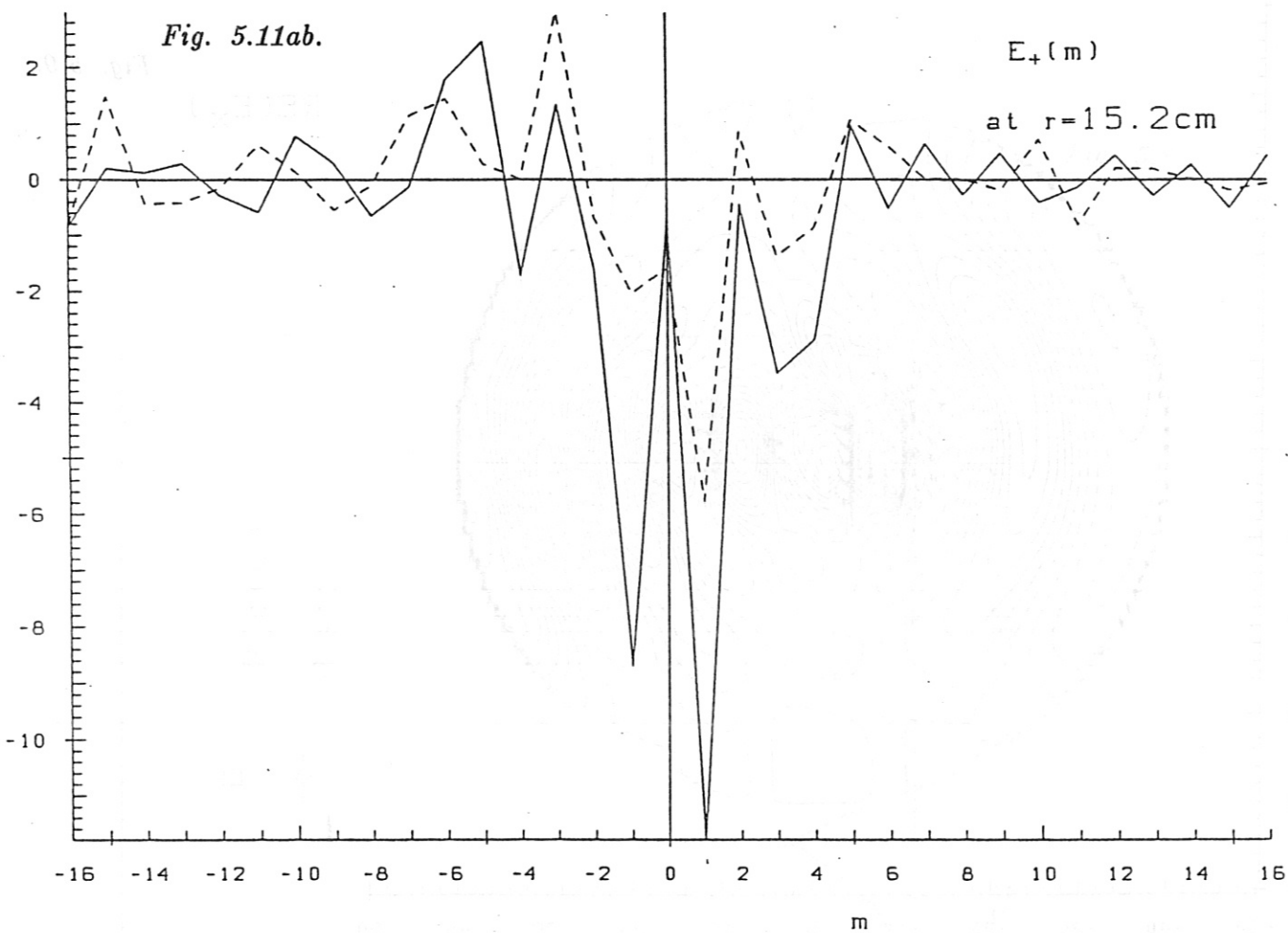
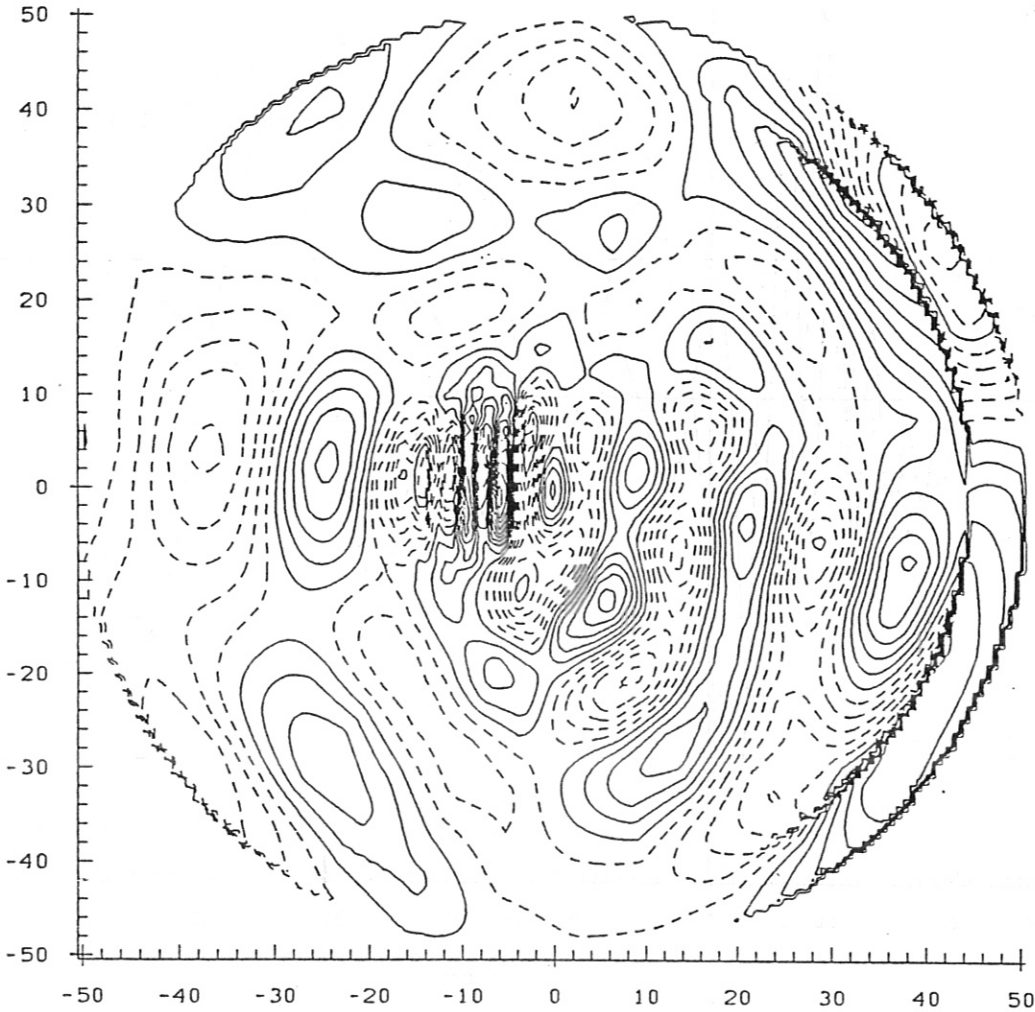


Fig. 5.12ab.

RE(E_x)



RE(E_x)

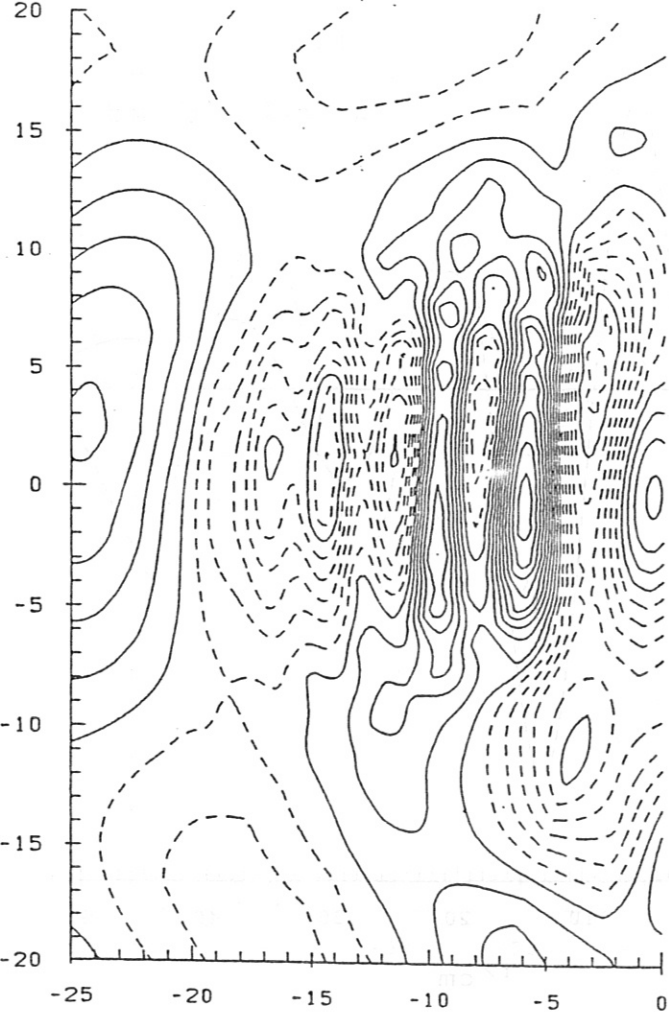


Fig. 5.13ab.

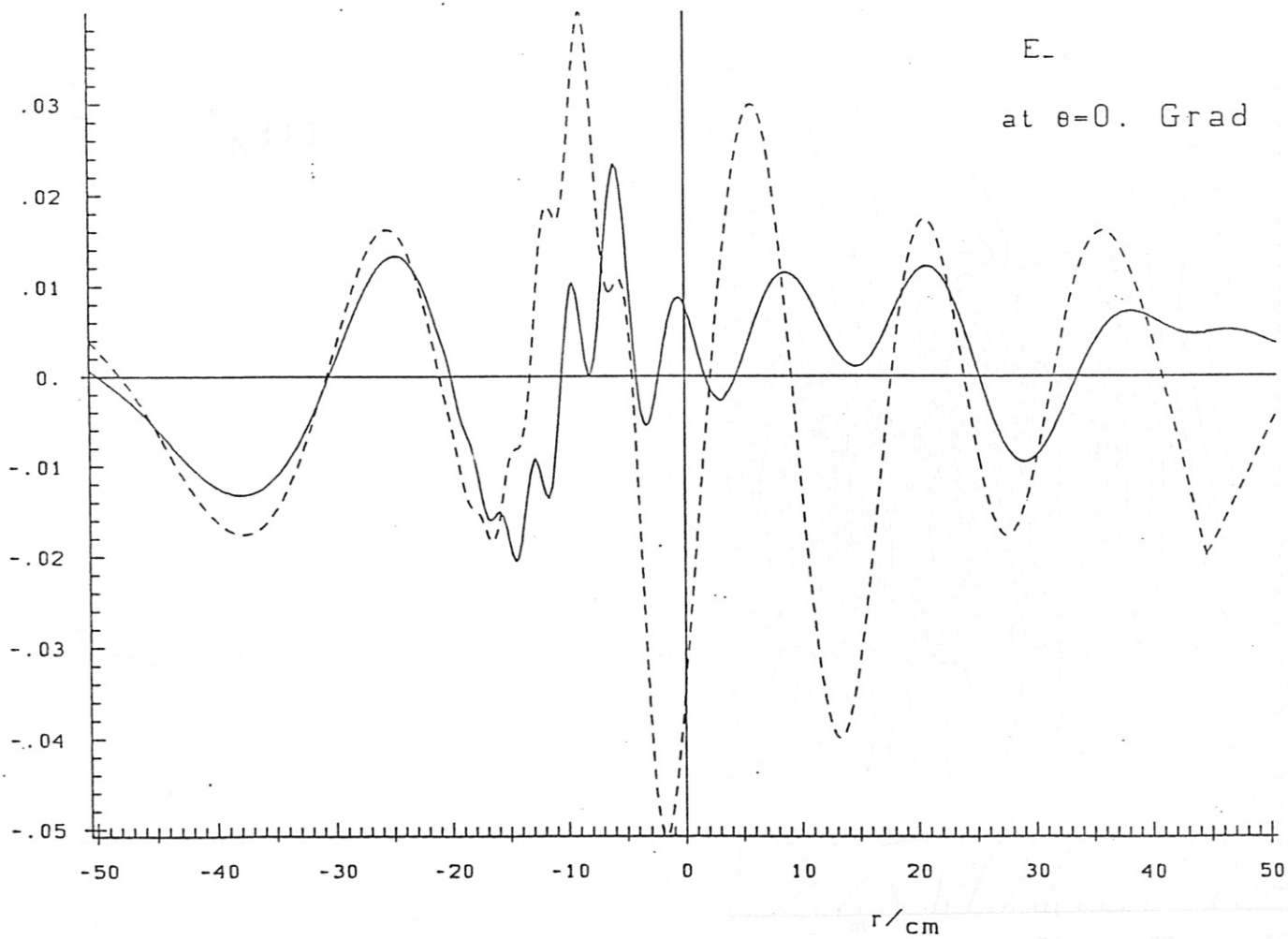
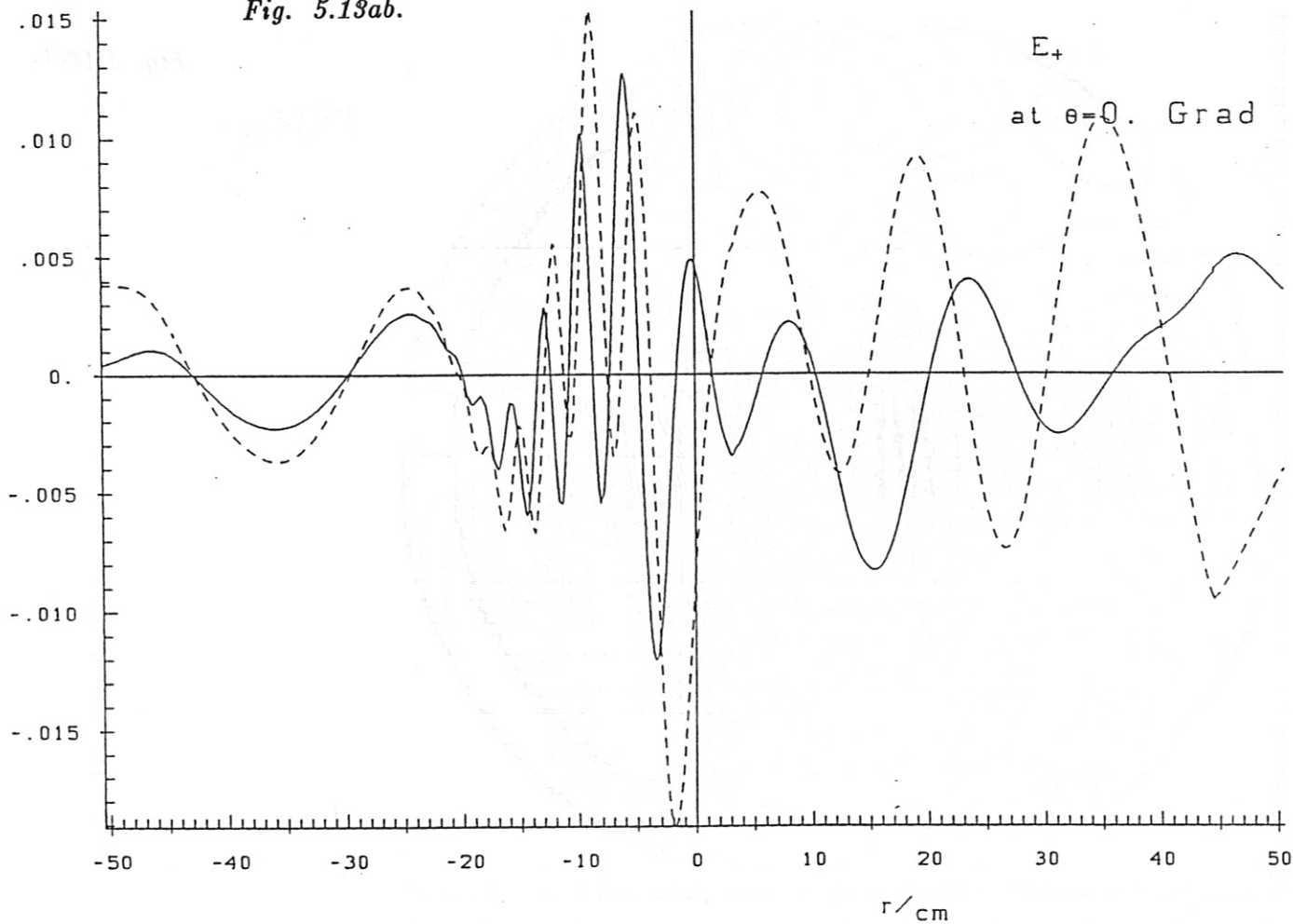


Fig. 5.14ab.

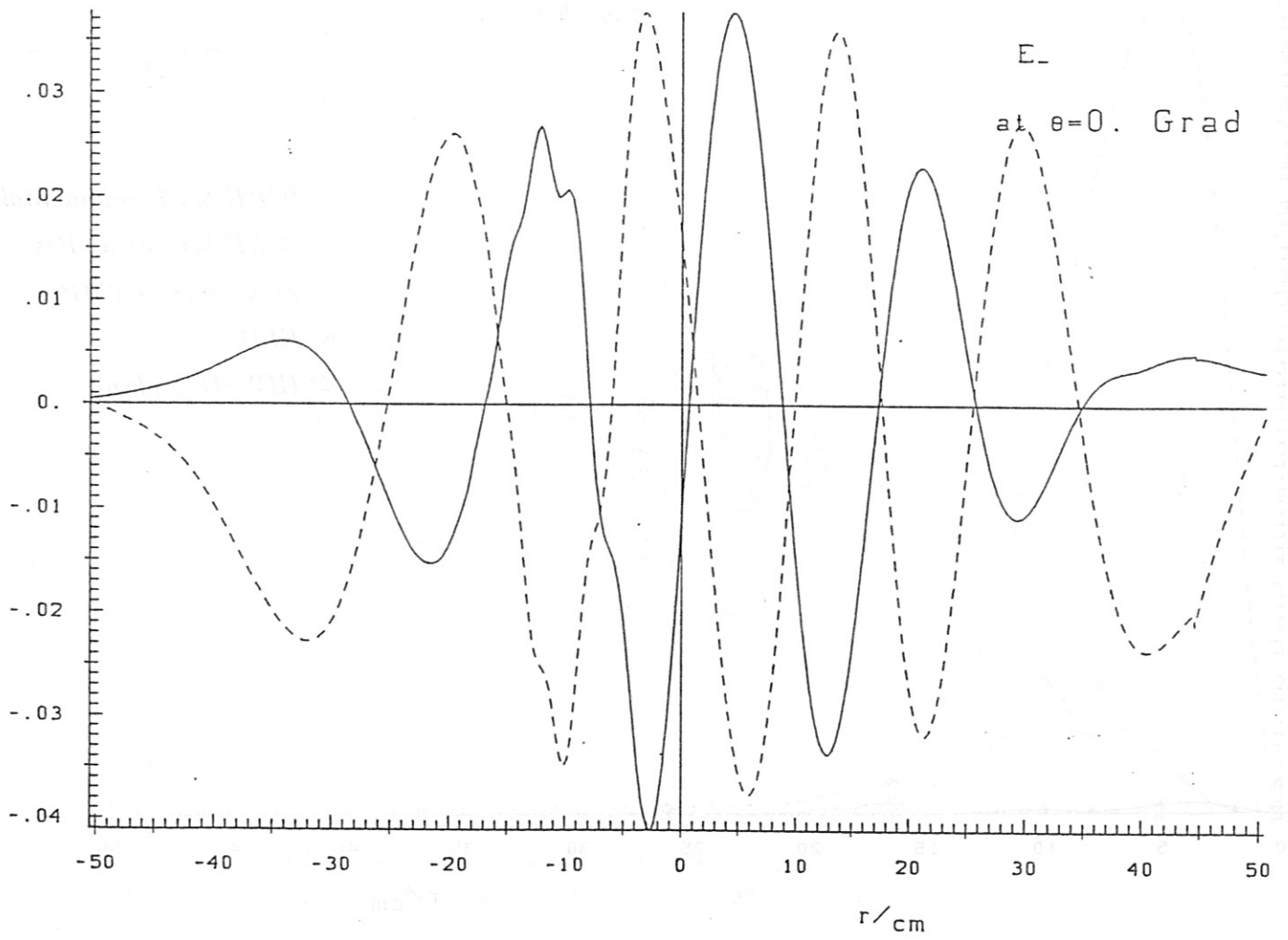
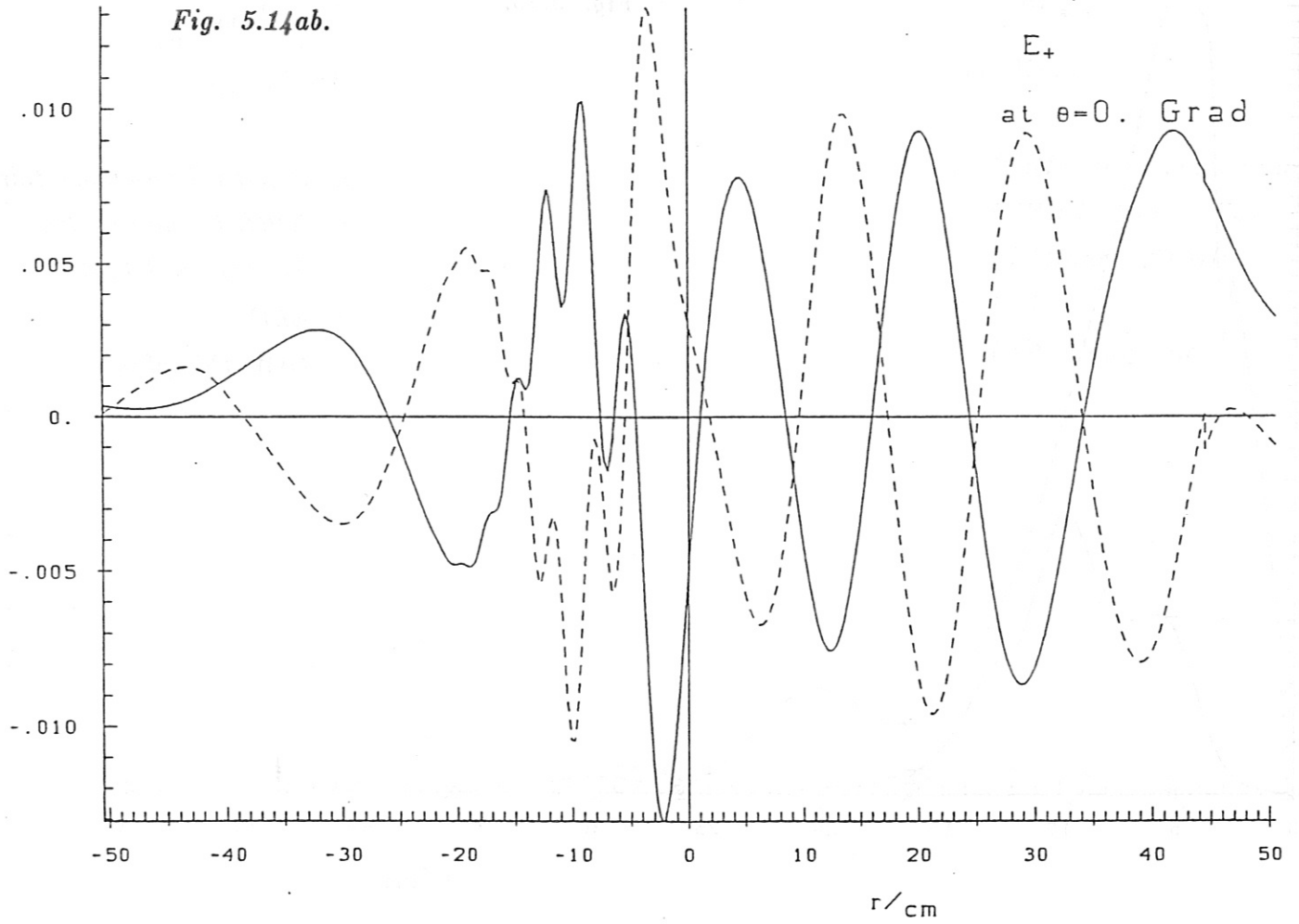


Fig. 5.15.

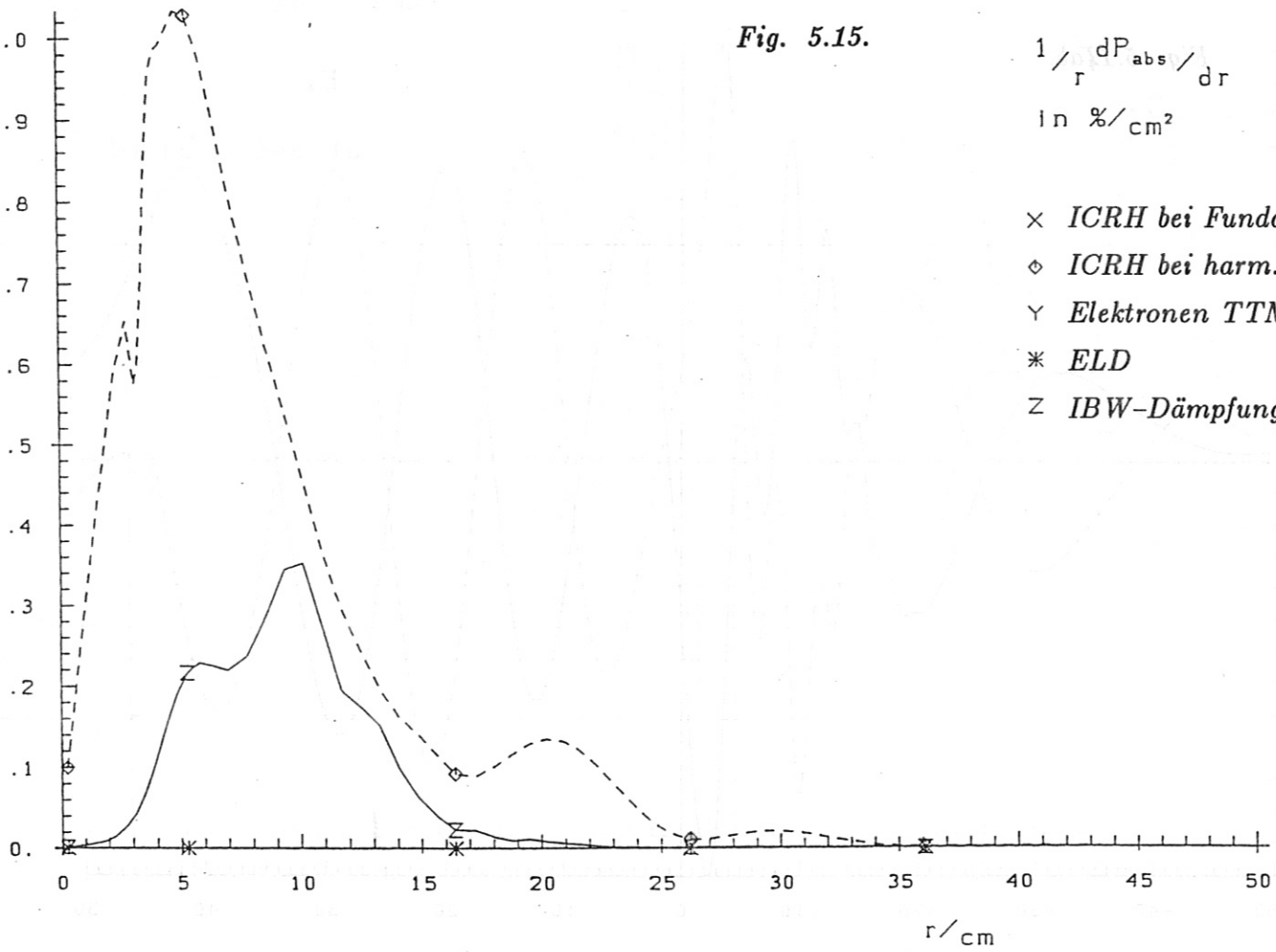


Fig. 5.16.

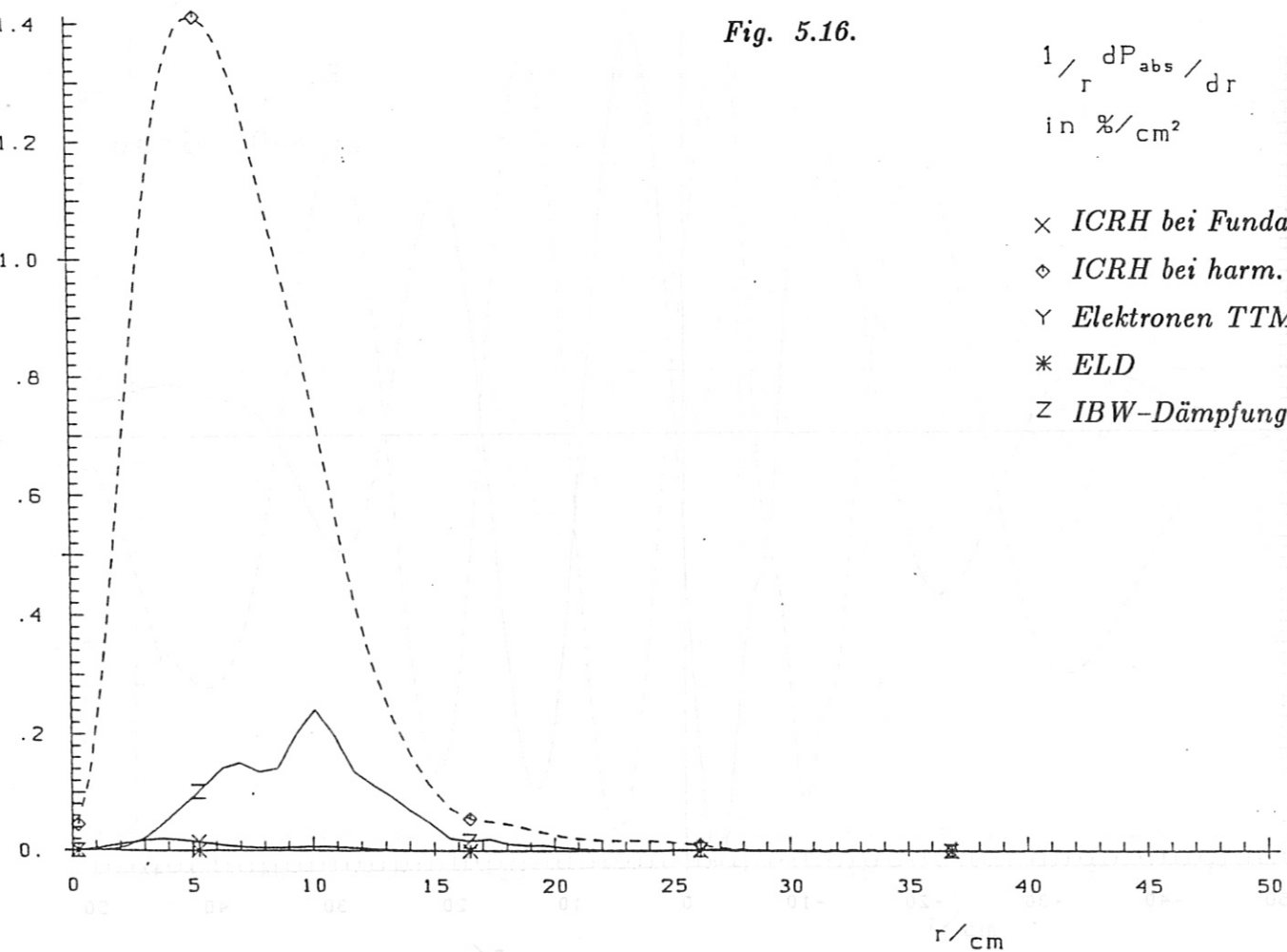


Fig. 5.17.

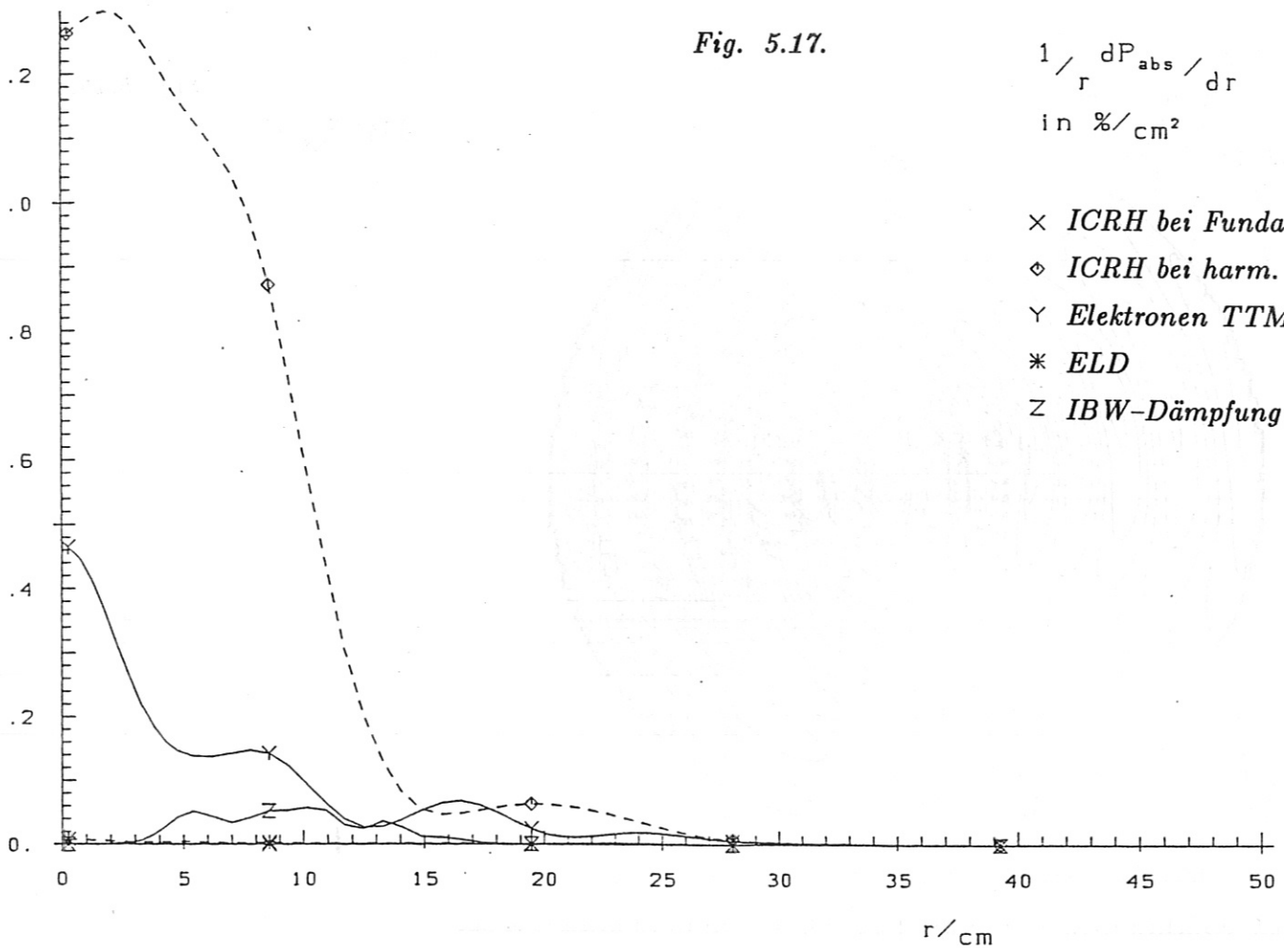
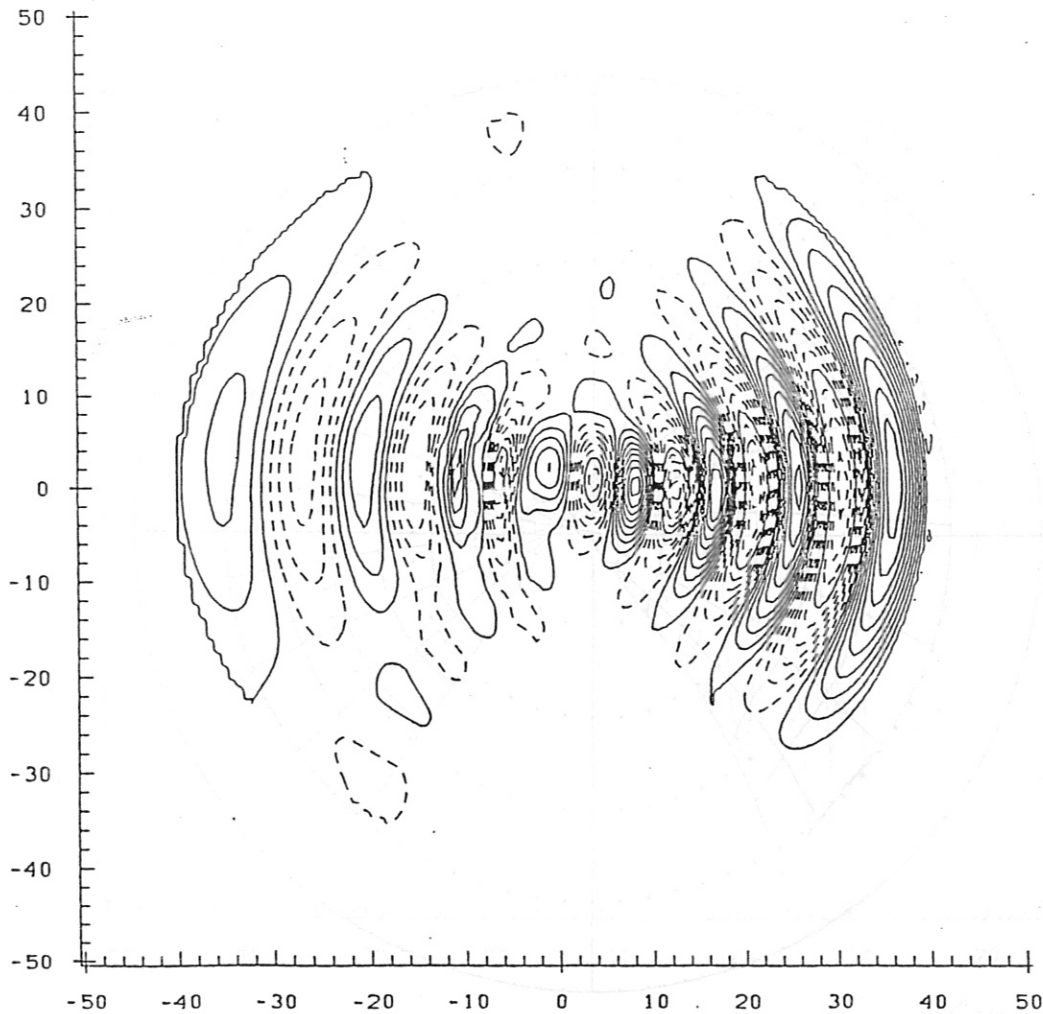


Fig. 5.18.



$00.81 = \mu$
 $12.00 = \nu$
 $02.0 = \Delta$

Fig. 5.19.

$\text{IM}(E_x)$

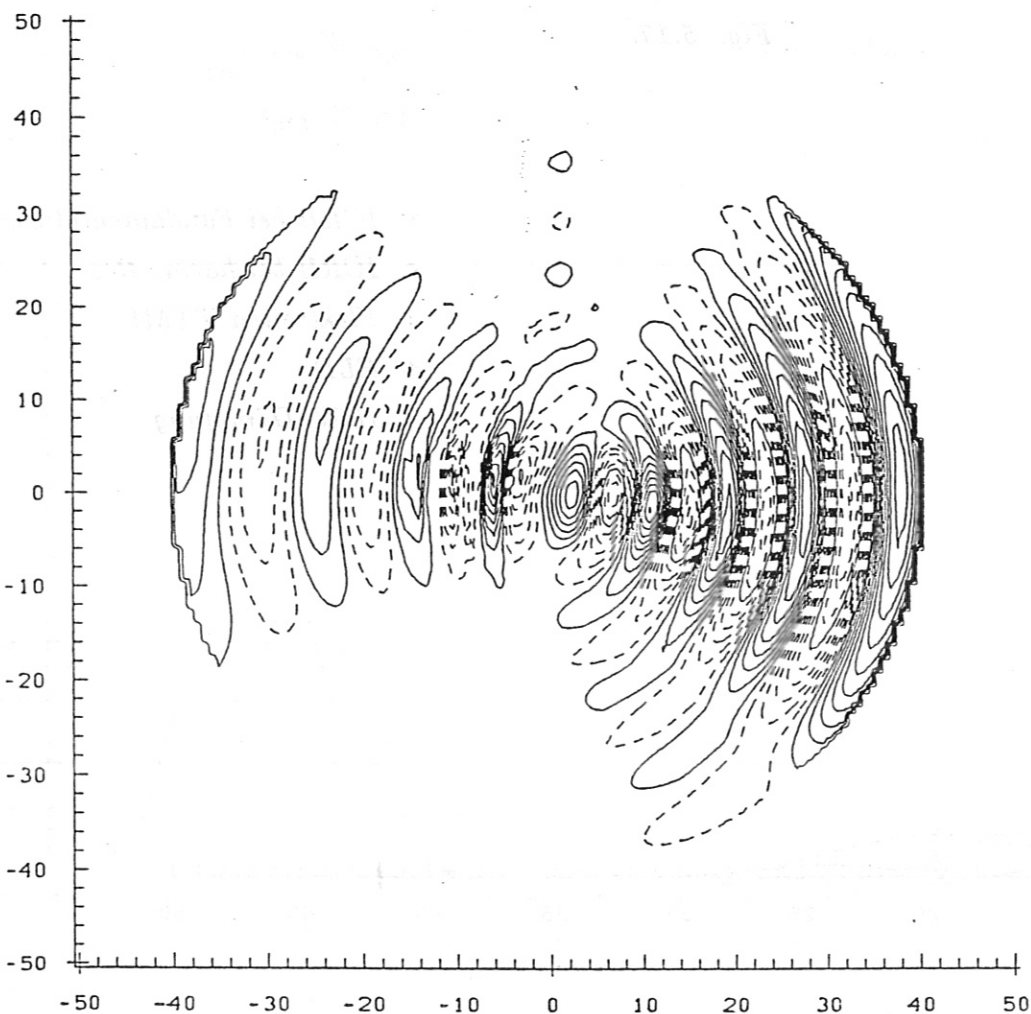


Fig. 5.20.

$N_\phi = 16.00$
 $\Delta S = 0.50$

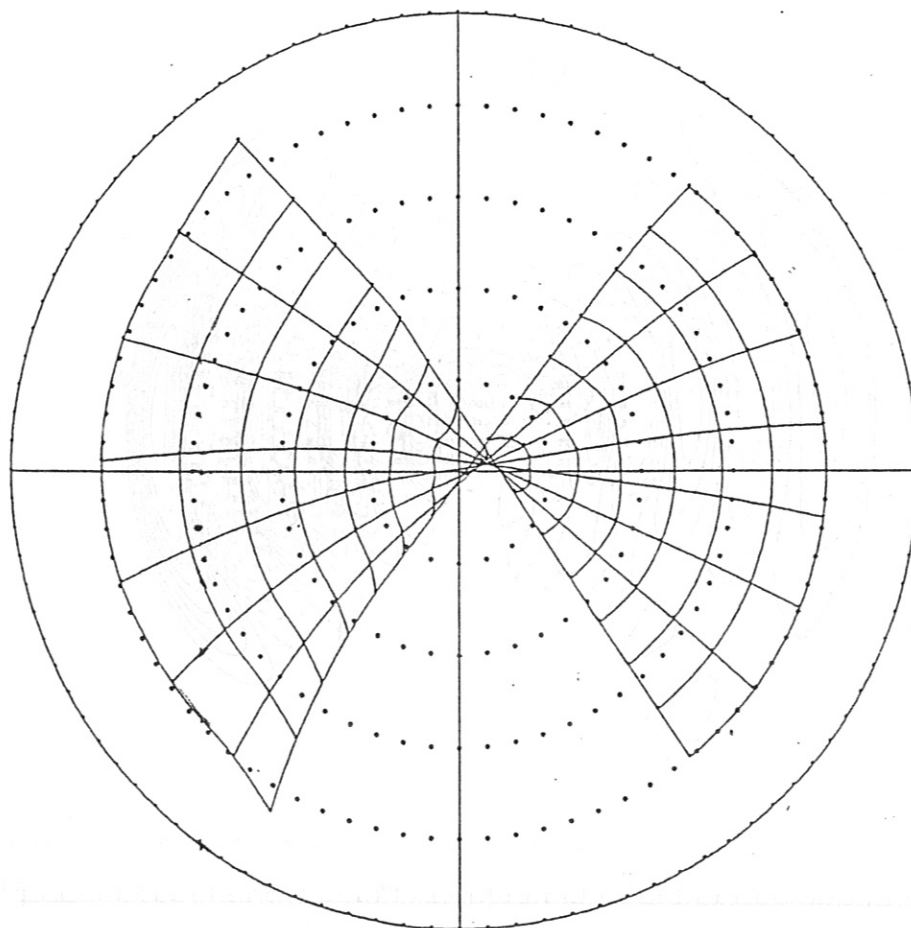


Fig. 5.21ab.

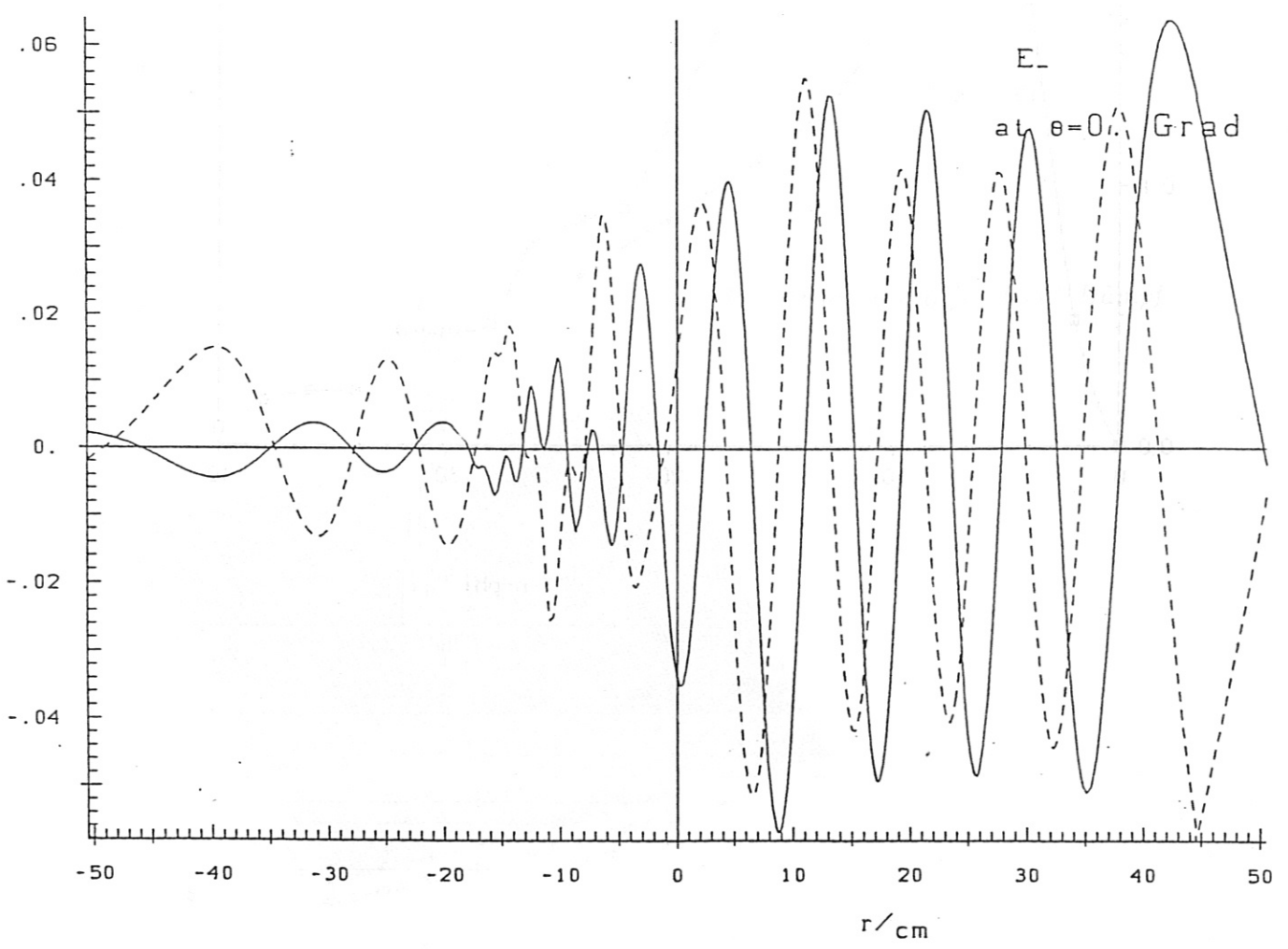
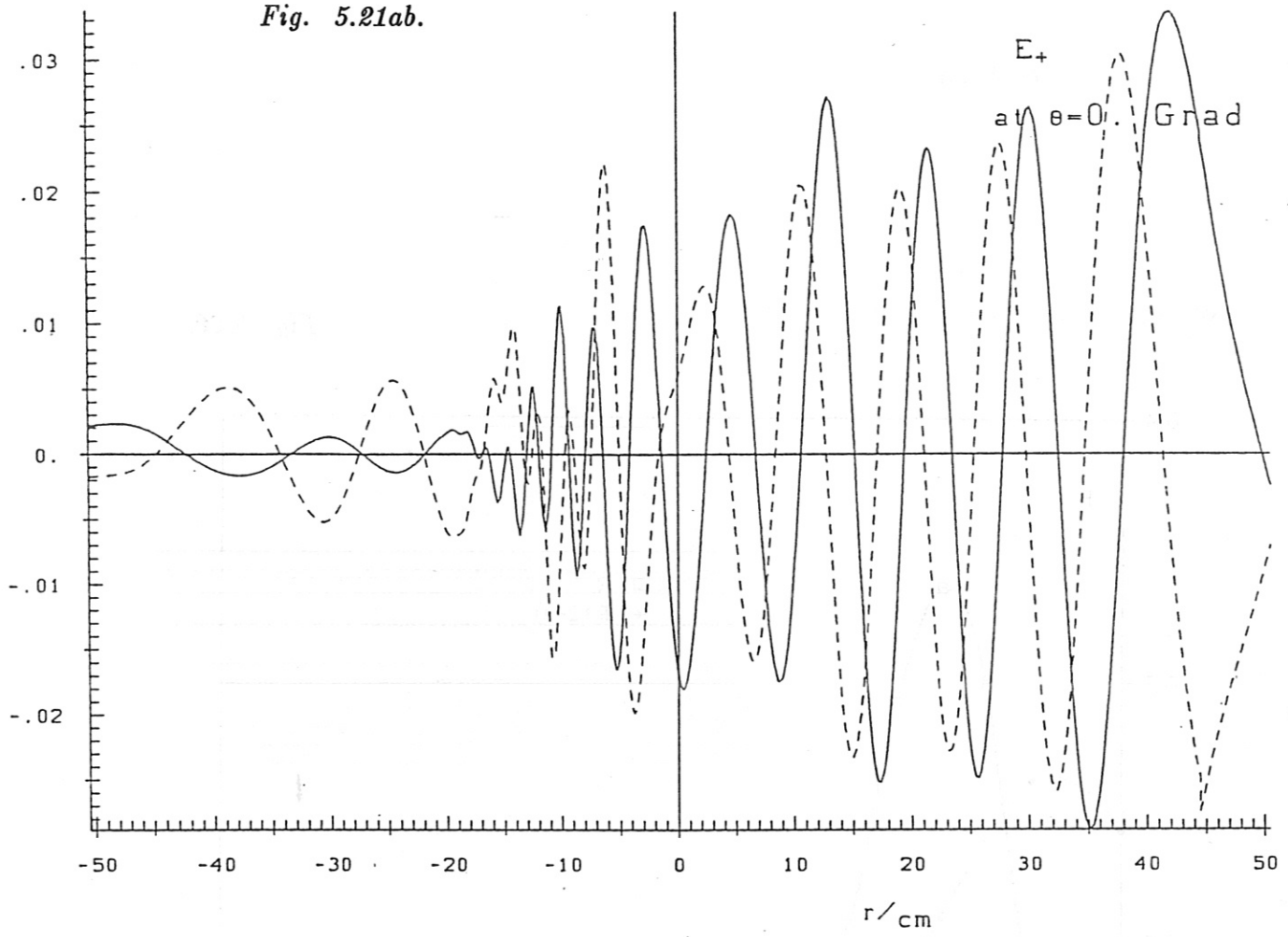
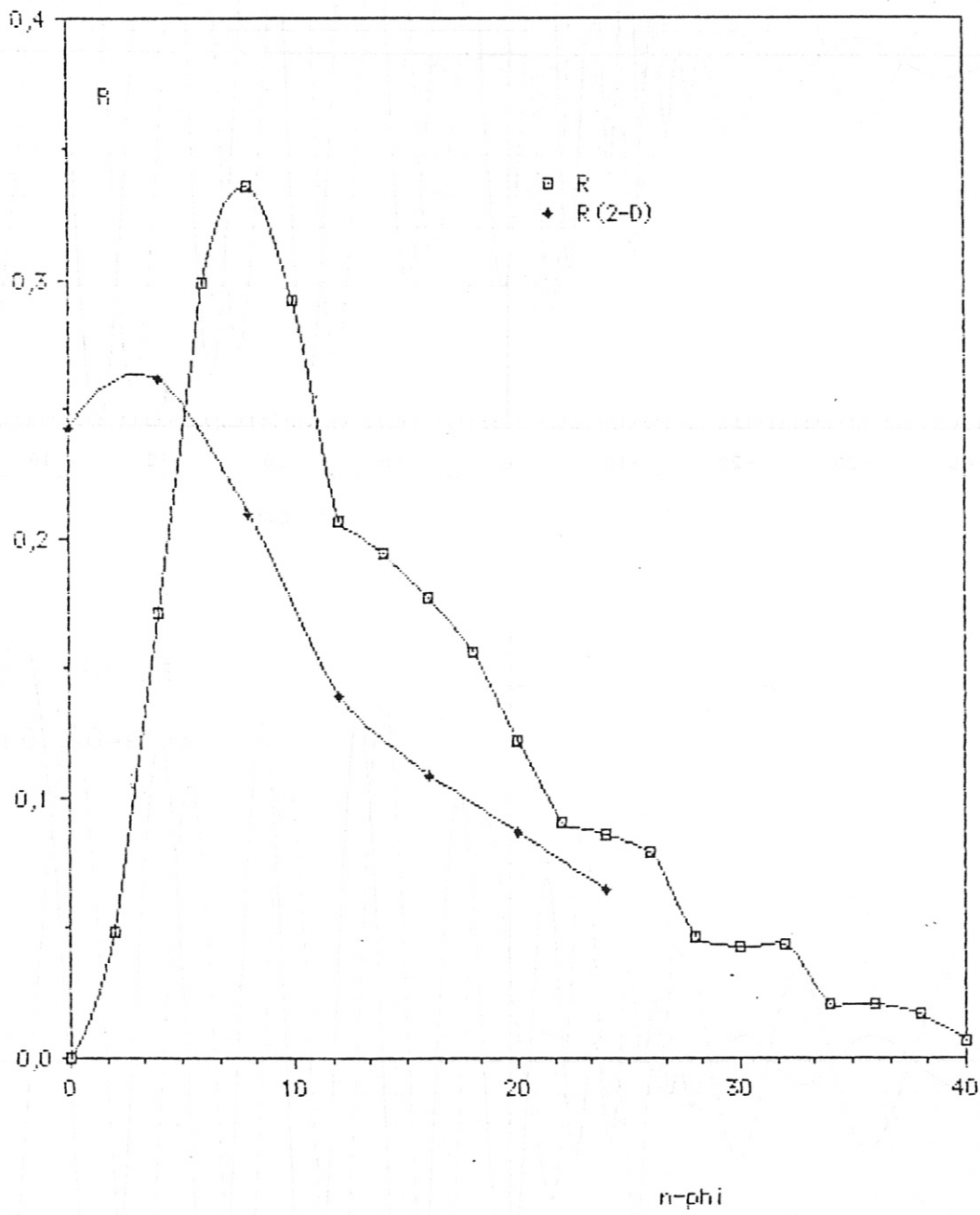


Fig. 5.22.



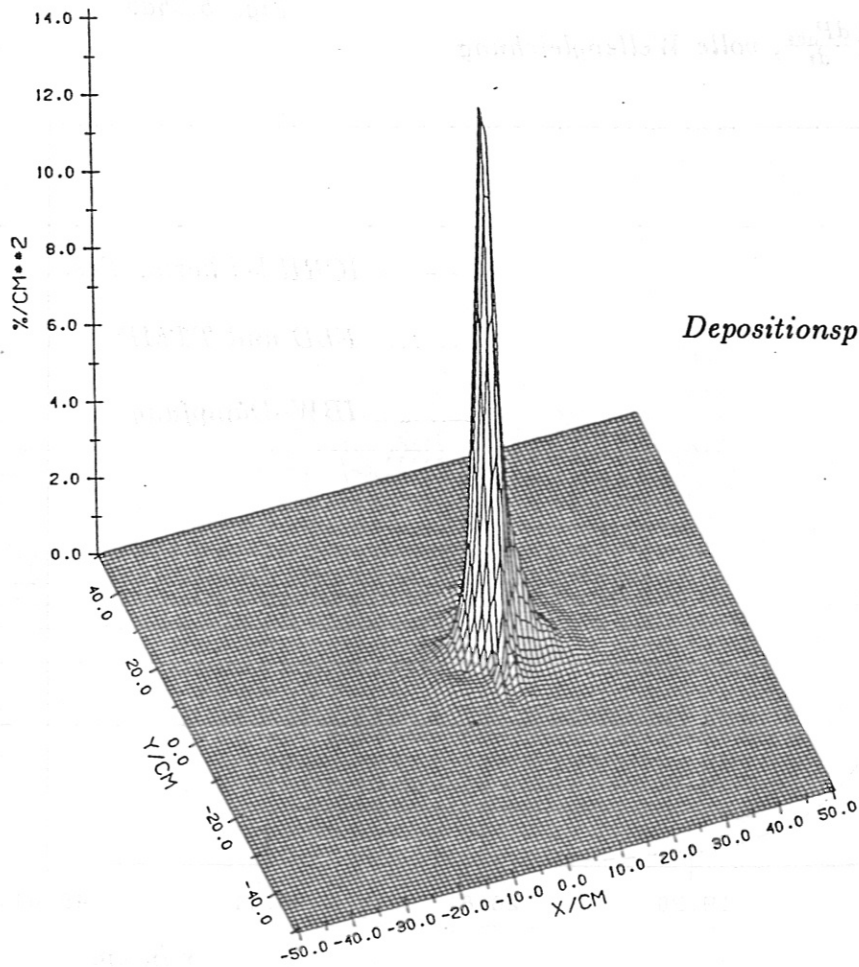


Fig. 5.23.

Depositionsprofil für ICRH bei harm. Res.

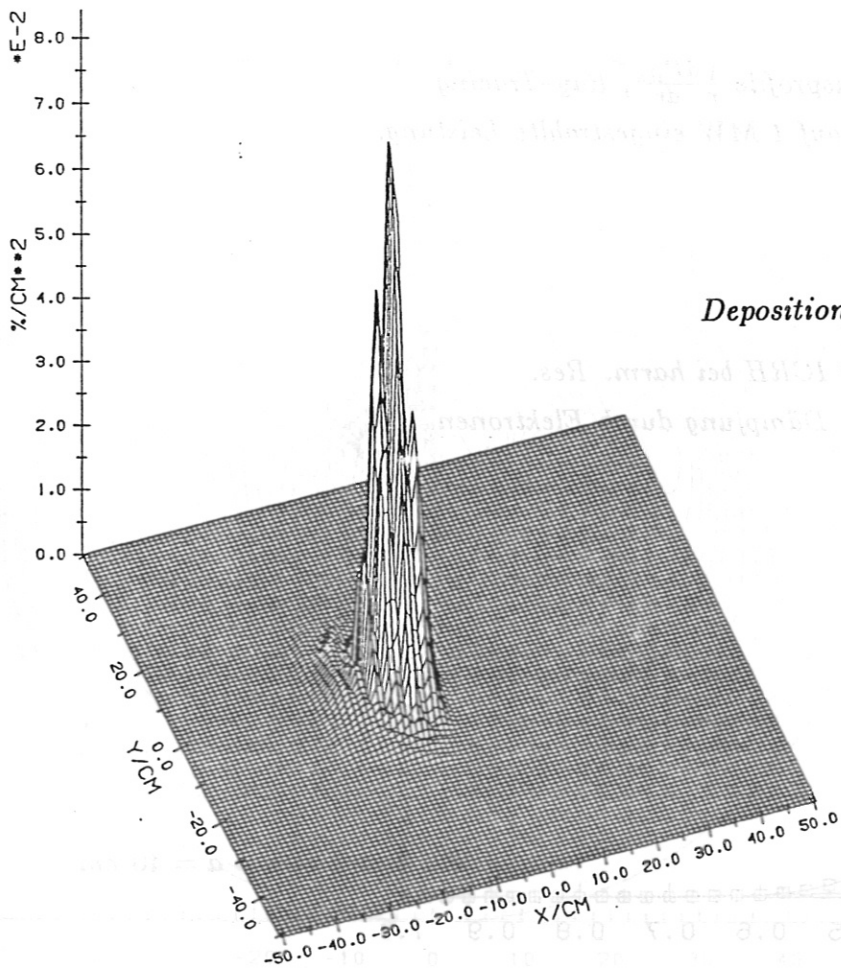


Fig. 5.24.

Depositionsprofil für IBW-Dämpf.

Fig. 5.25ab.

Depositionsprofile $\frac{1}{r} \frac{dP_{abs}}{dr}$, volle Wellengleichung

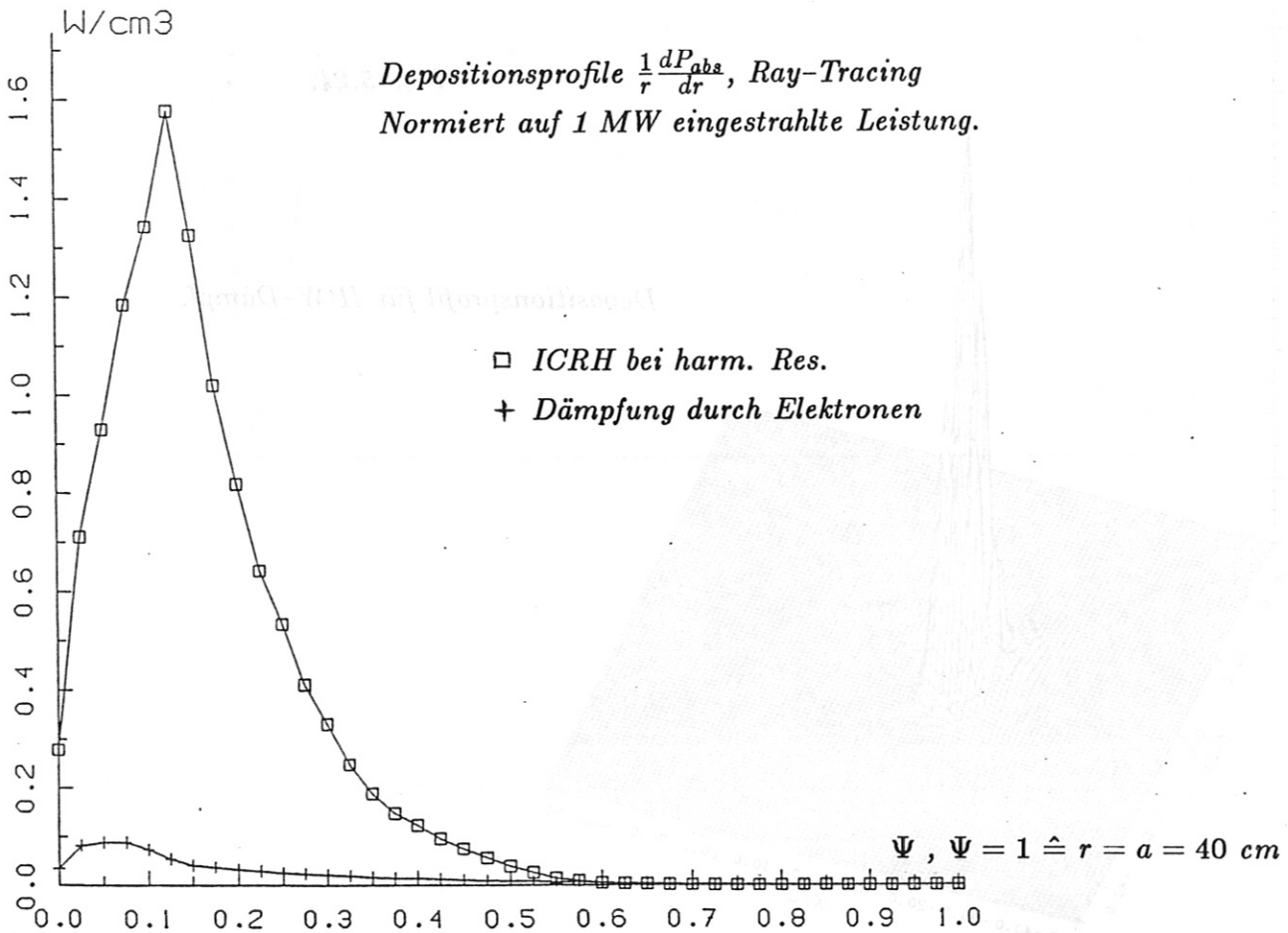
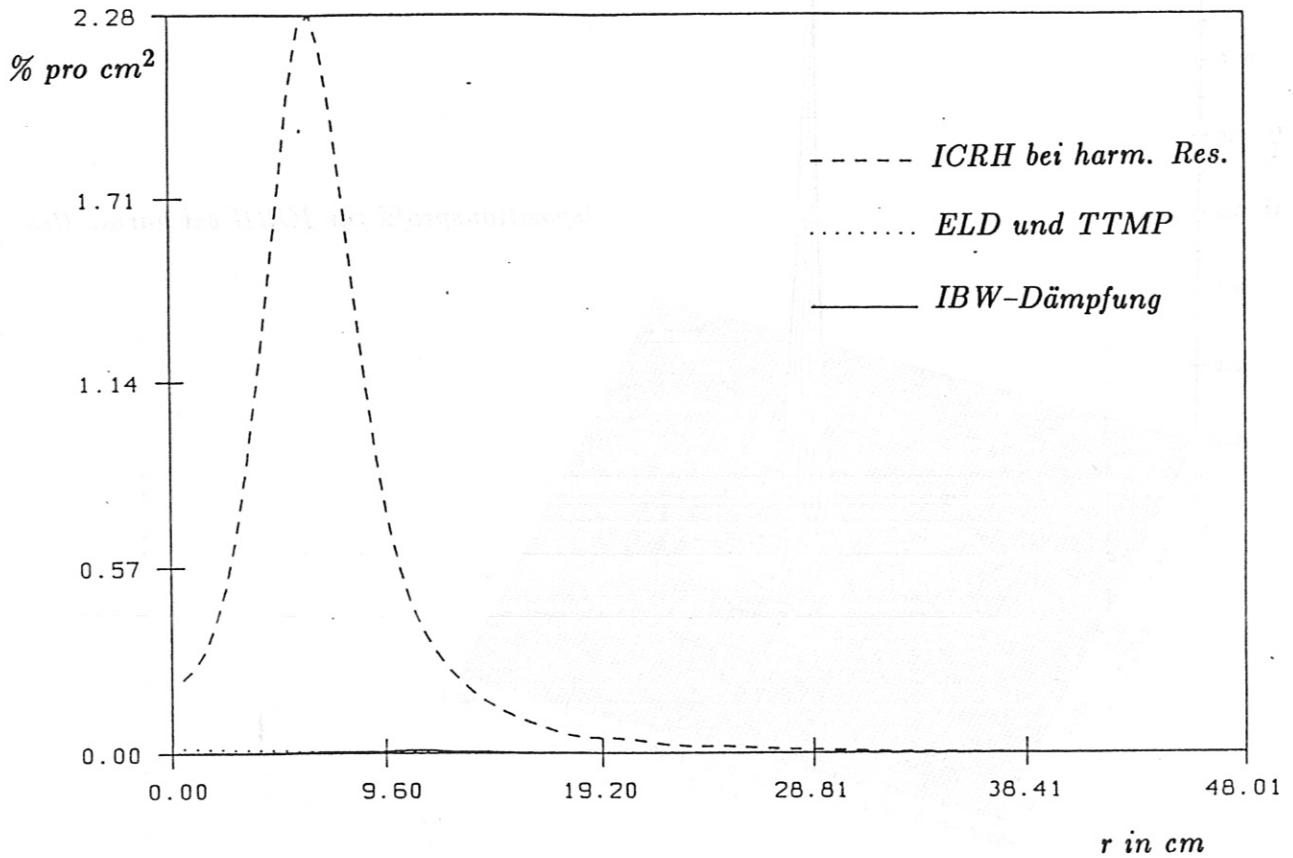


Fig. 5.26ab.

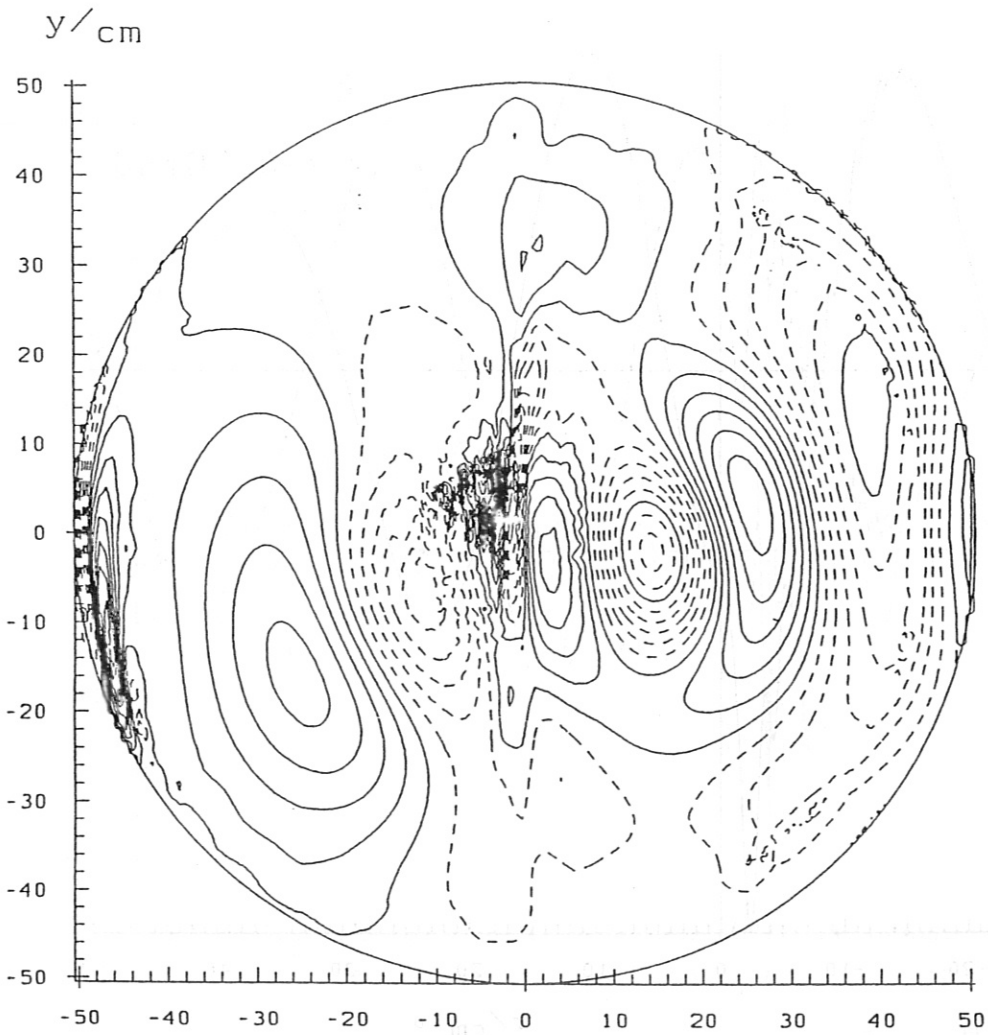
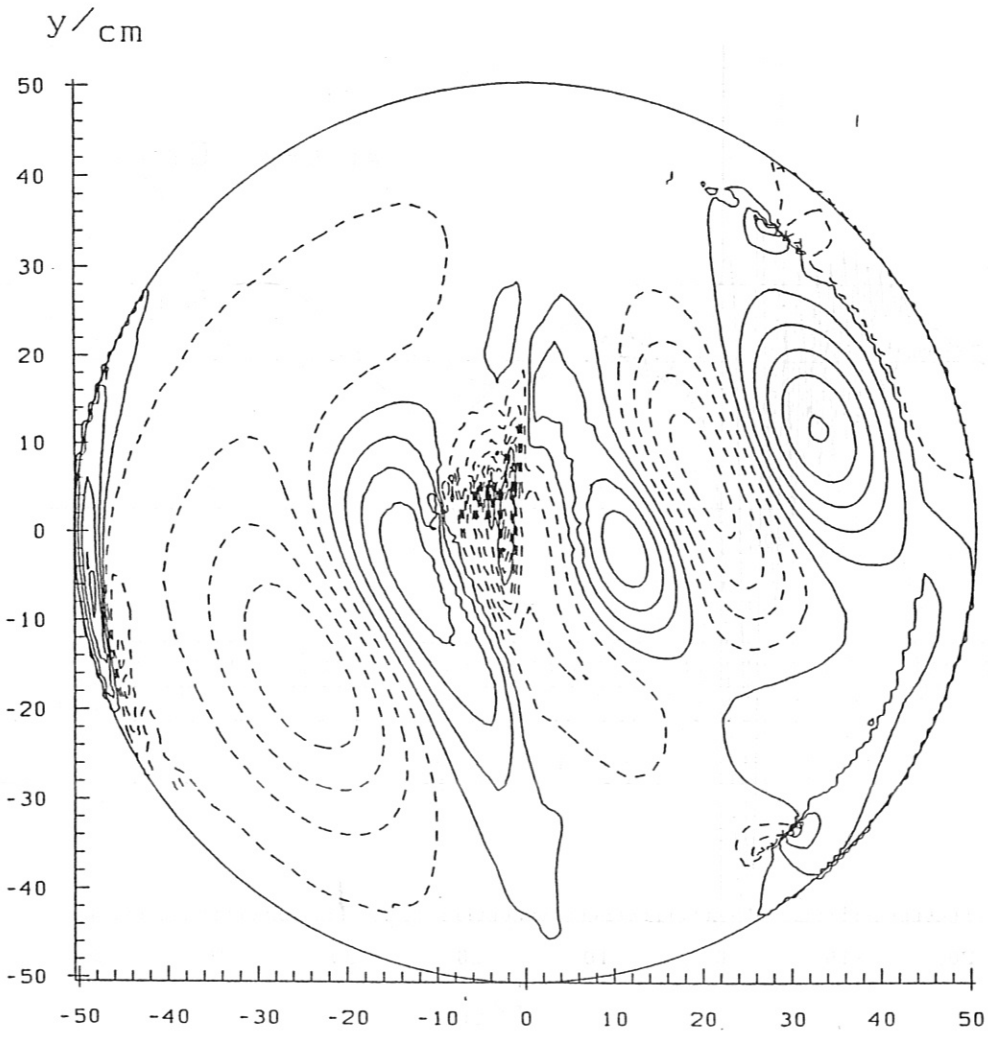


Fig. 5.27ab.

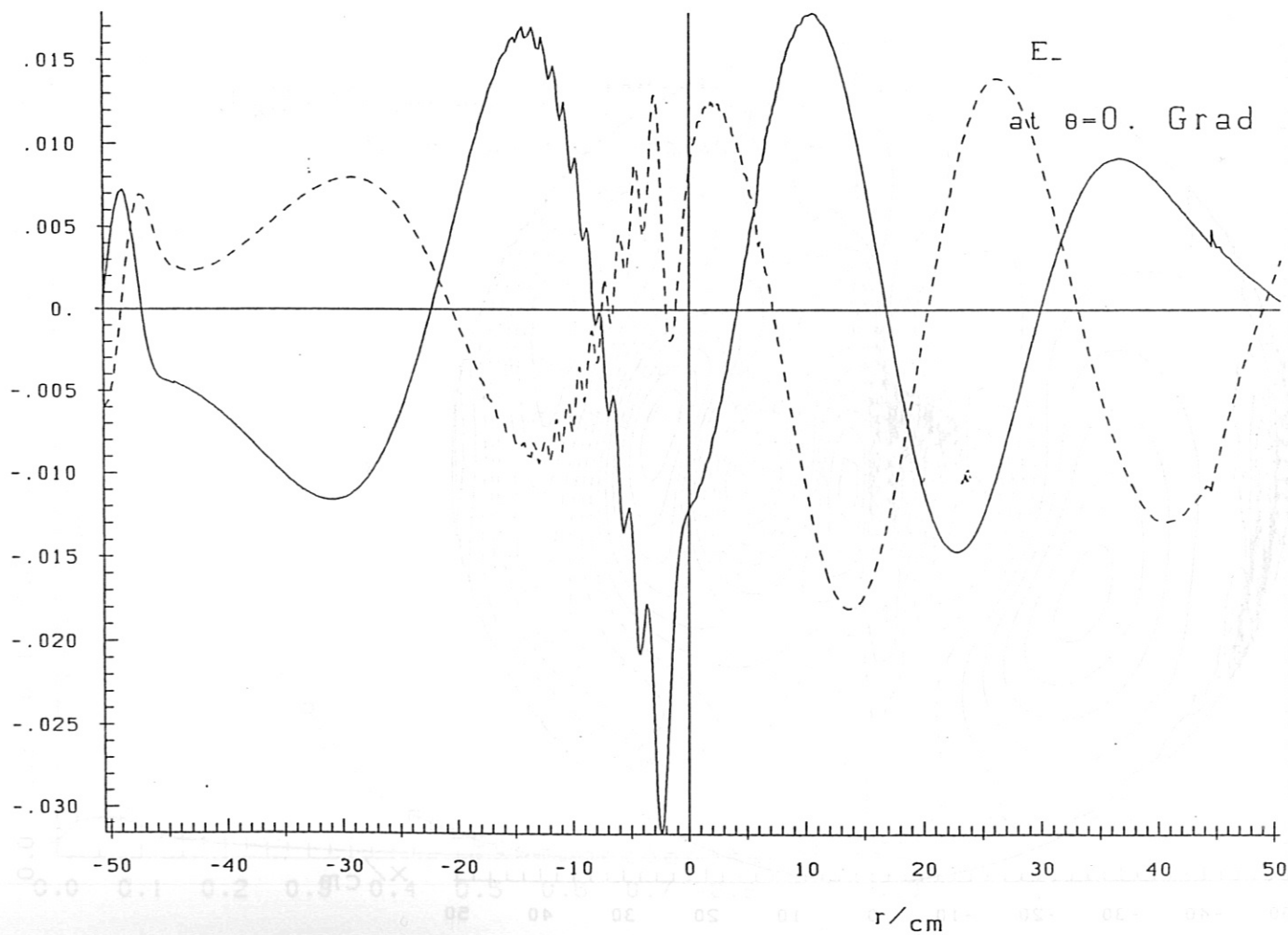
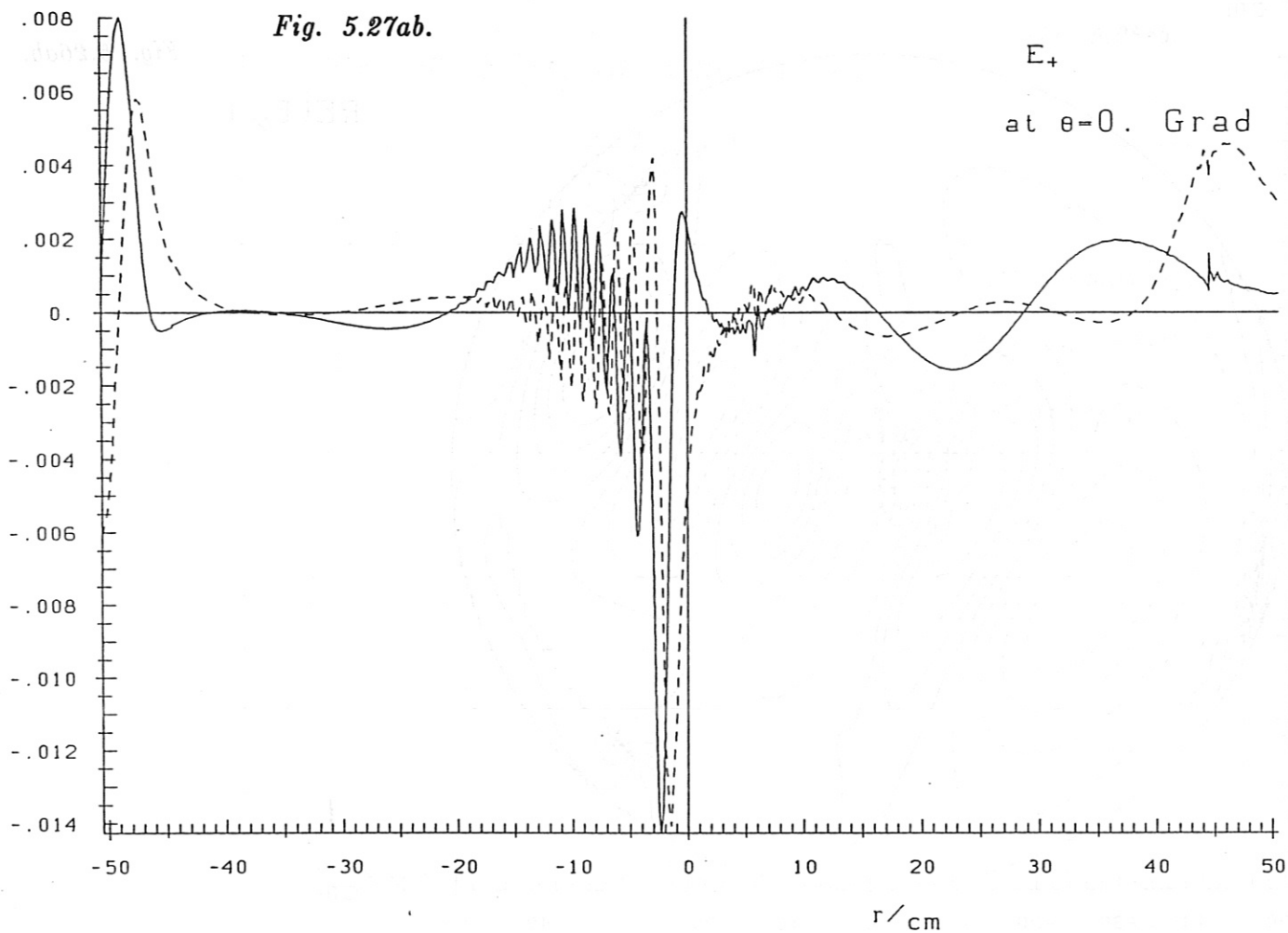


Fig. 5.28ab.

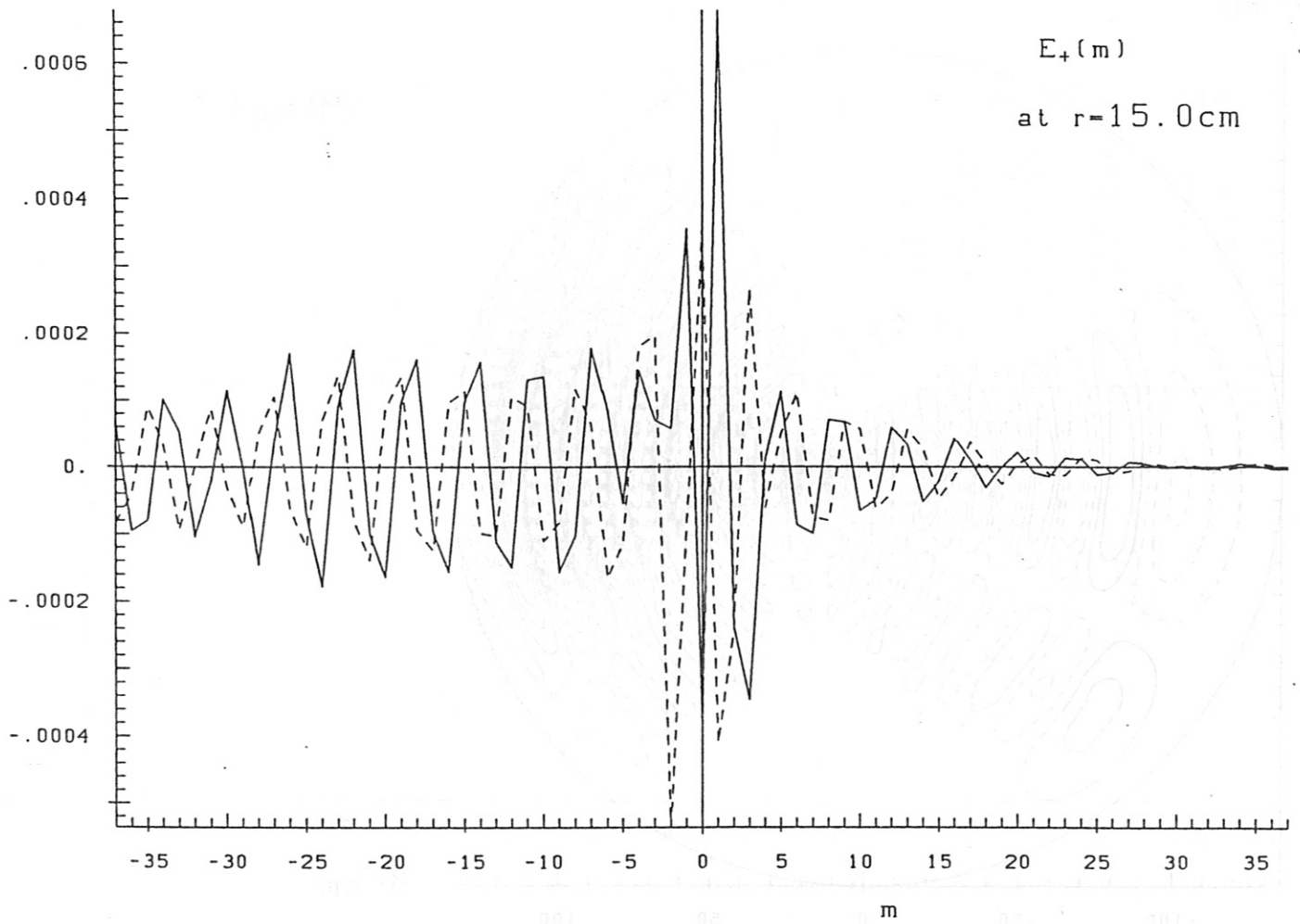
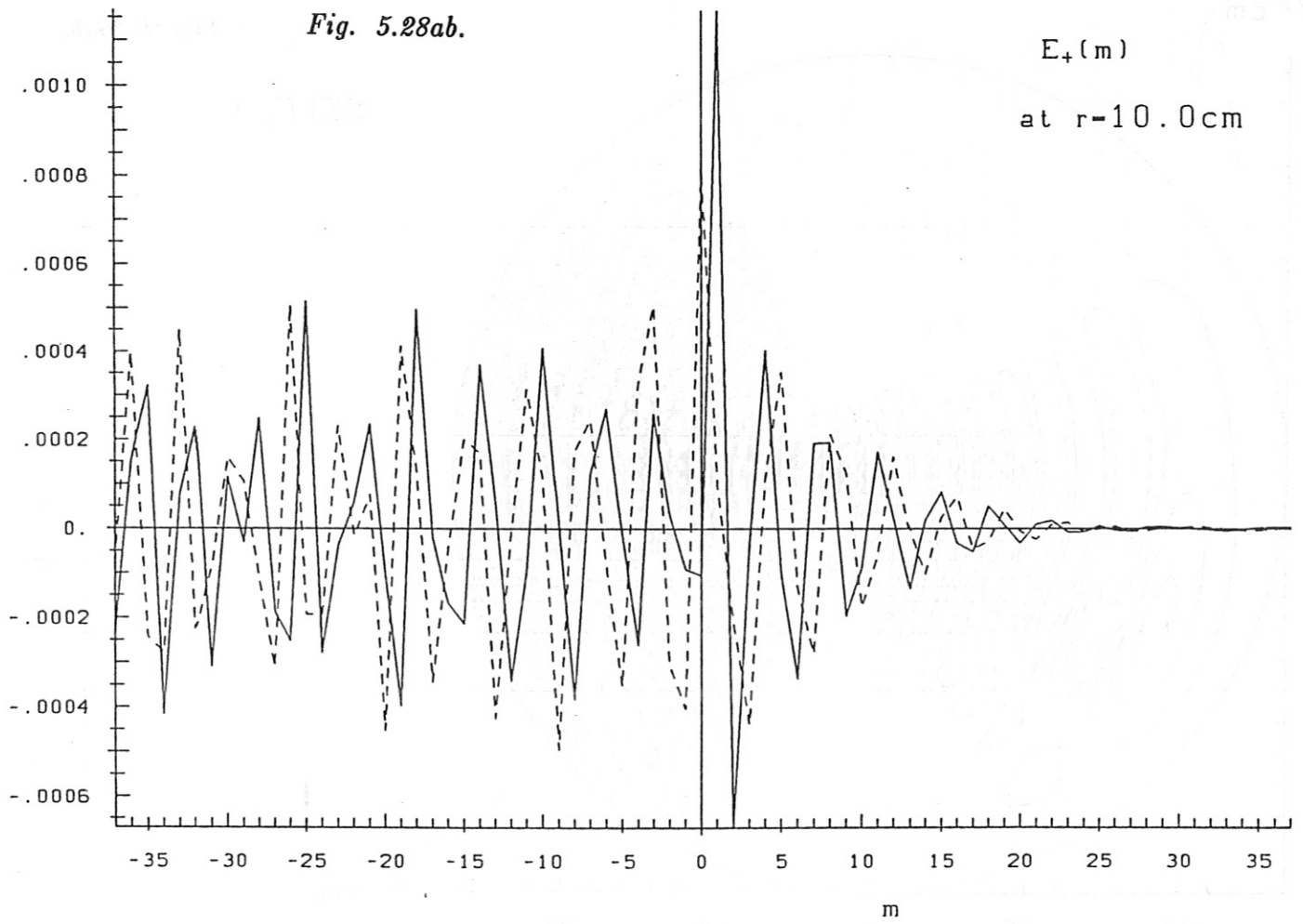


Fig. 5.29ab.

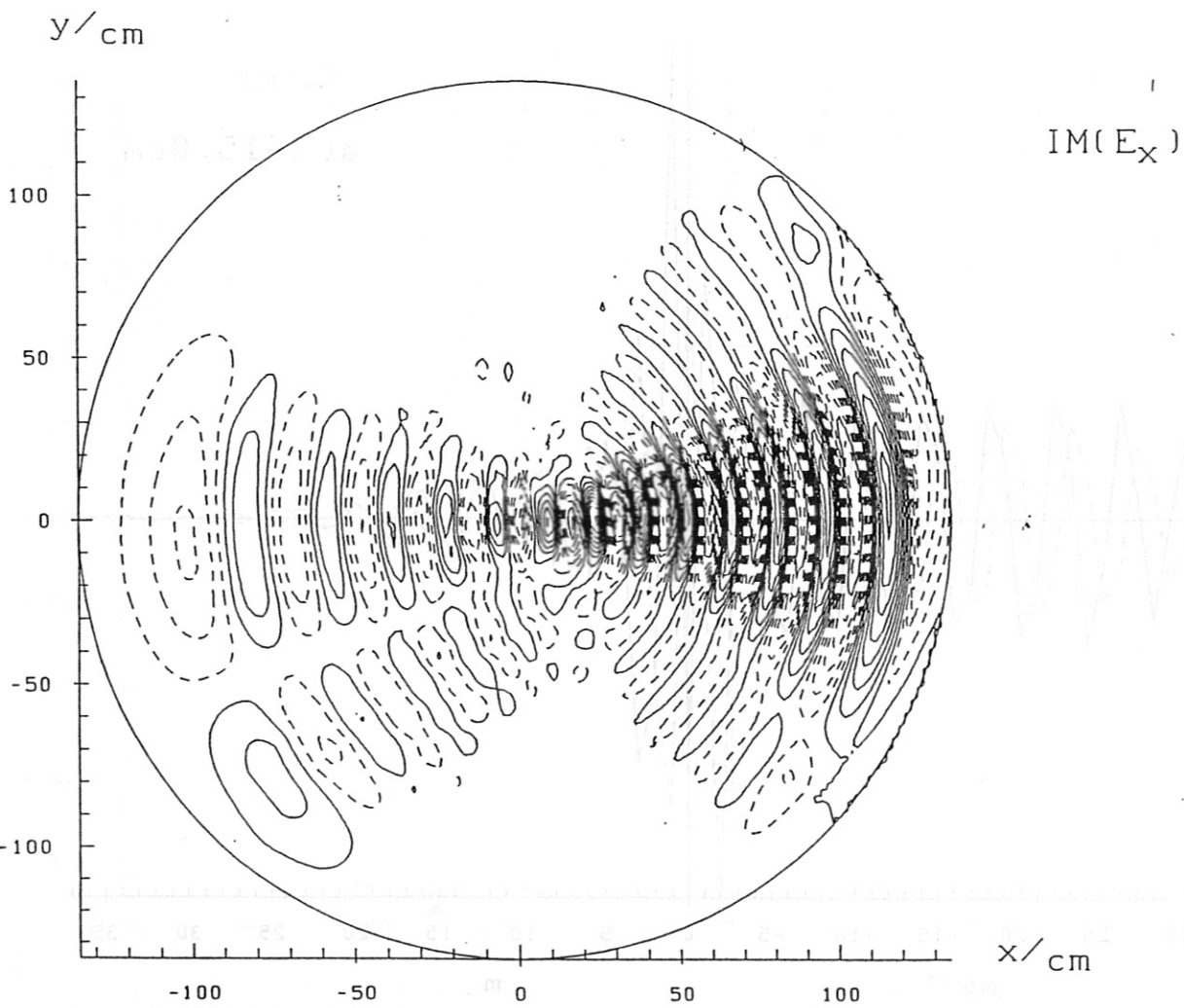
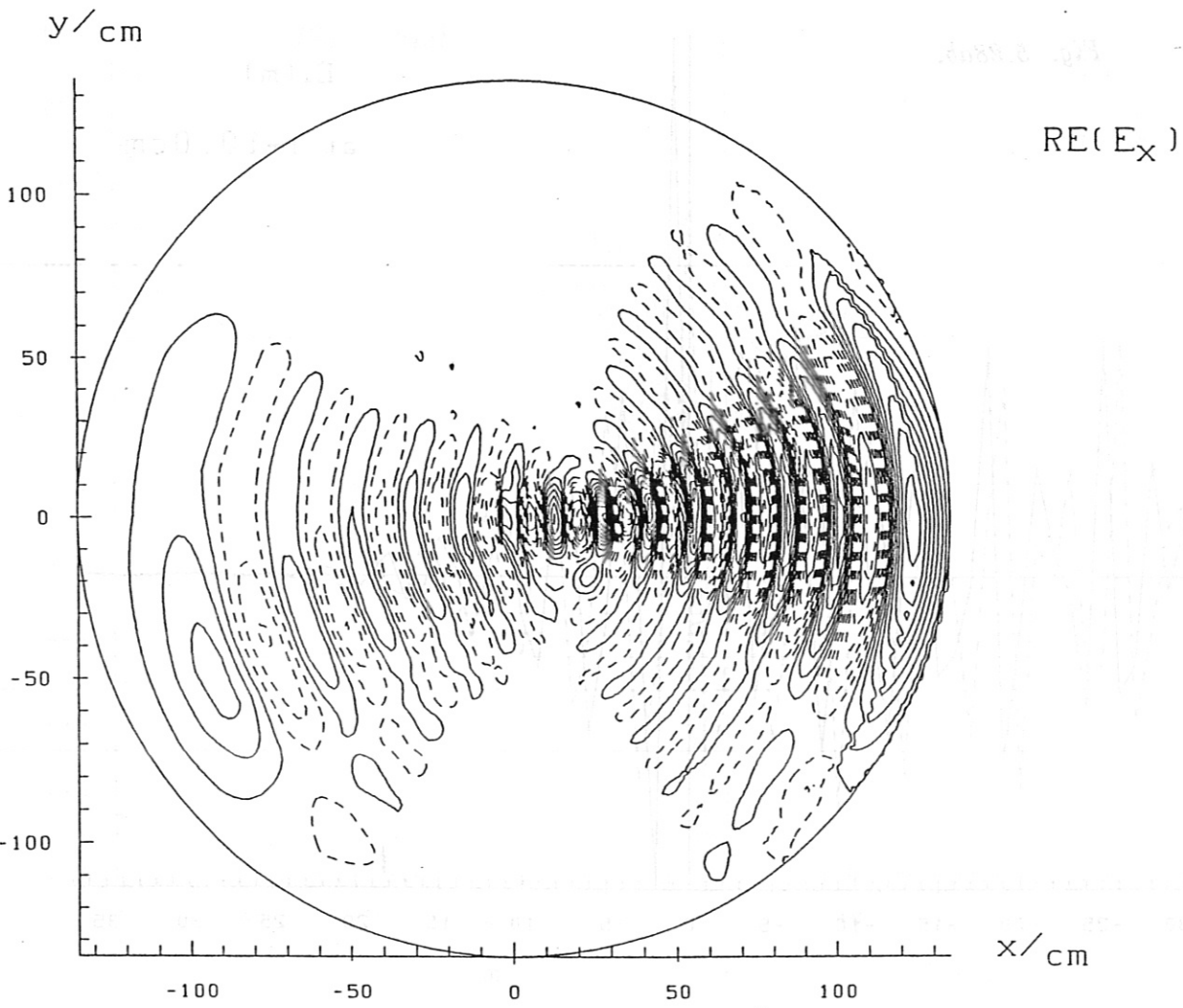


Fig. 5.30ab.

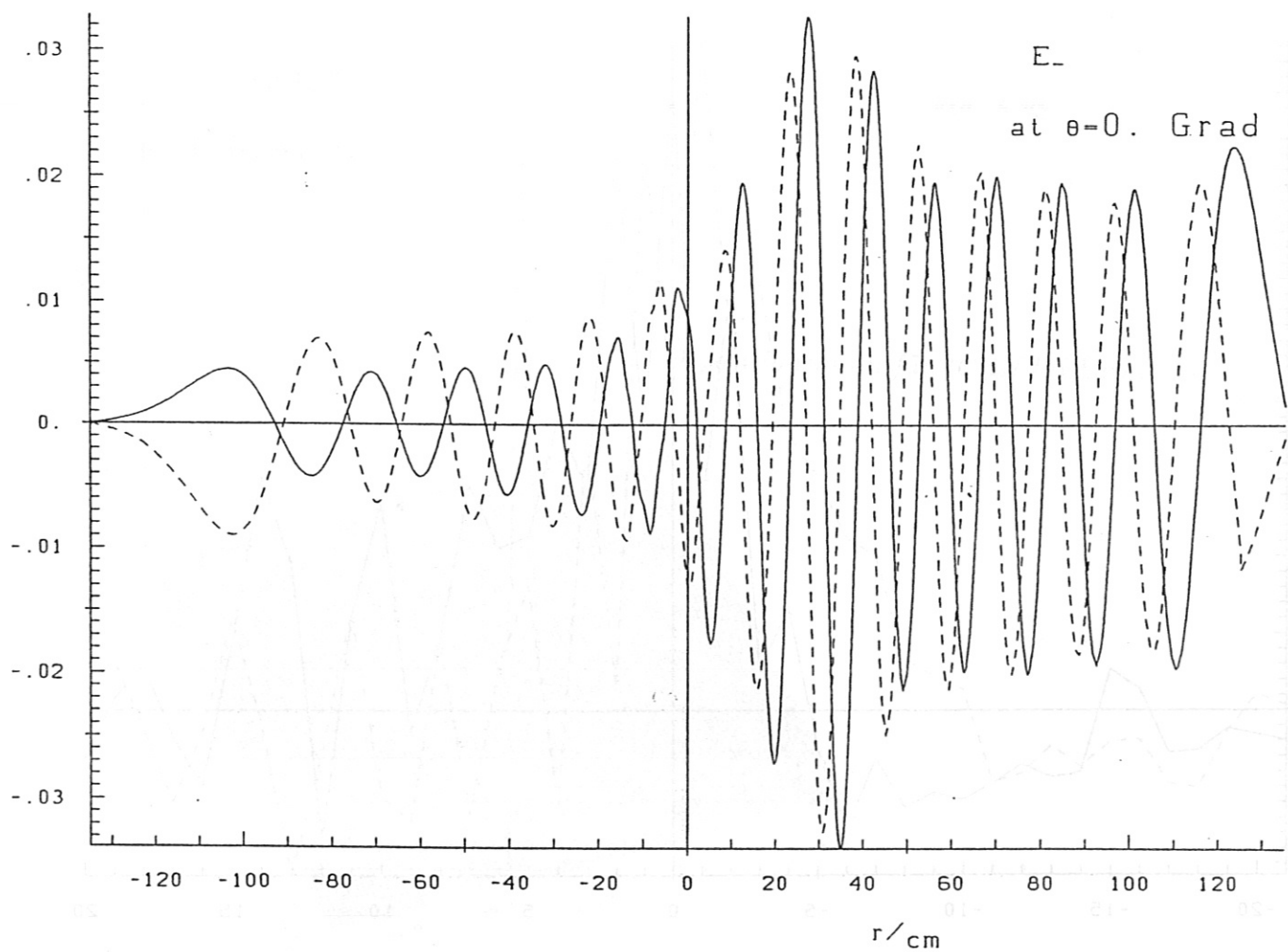
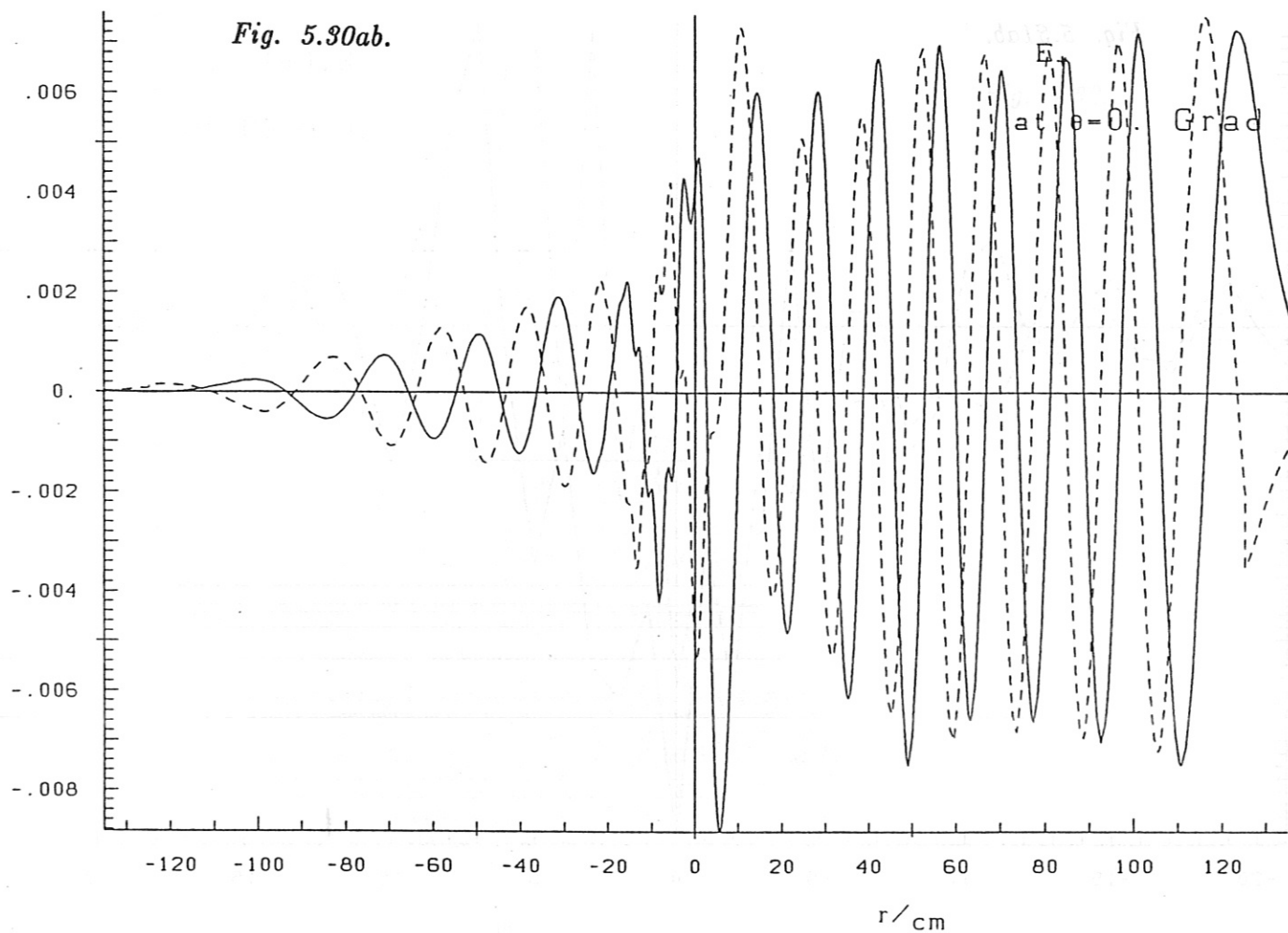


Fig. 5.31ab.

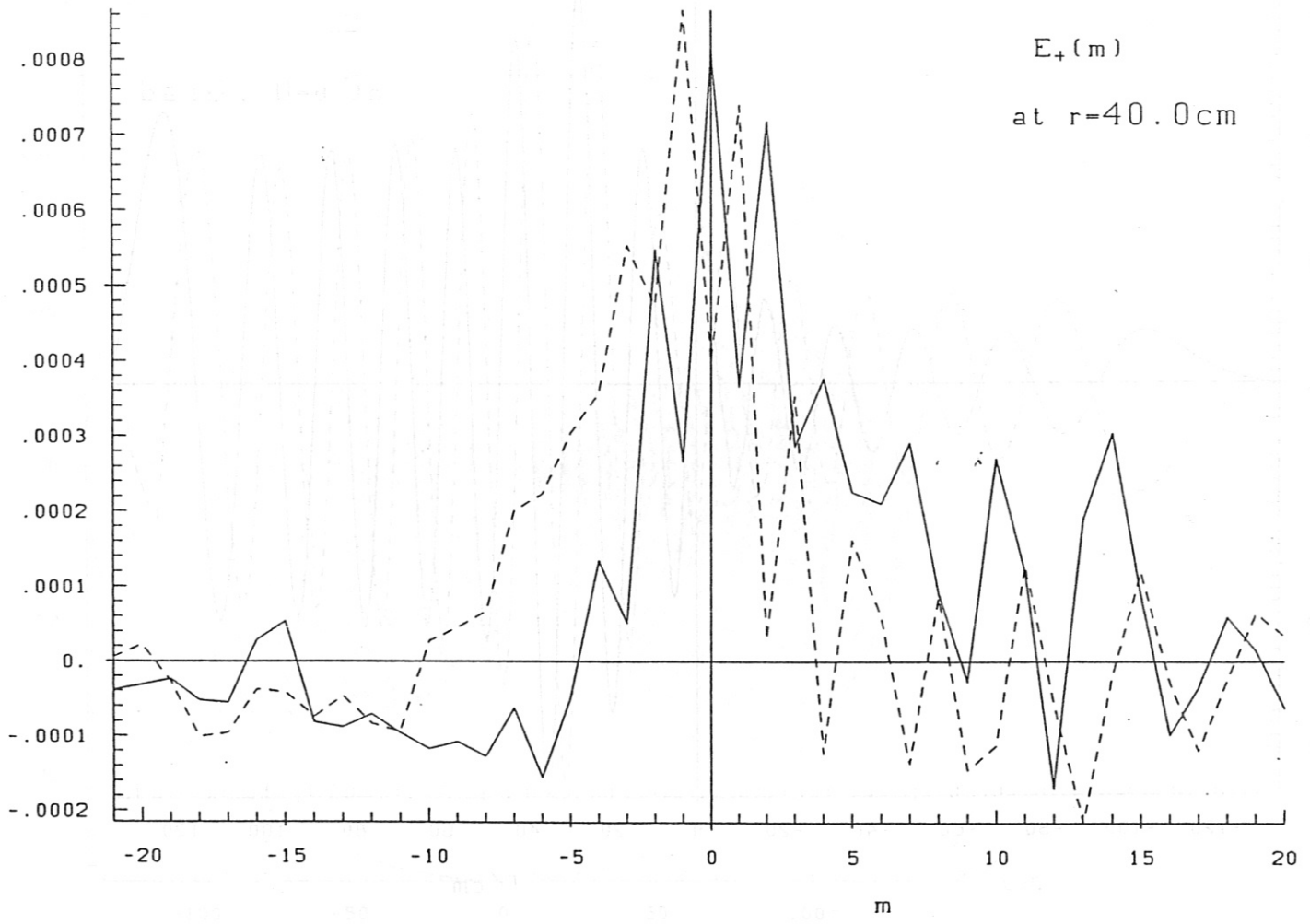
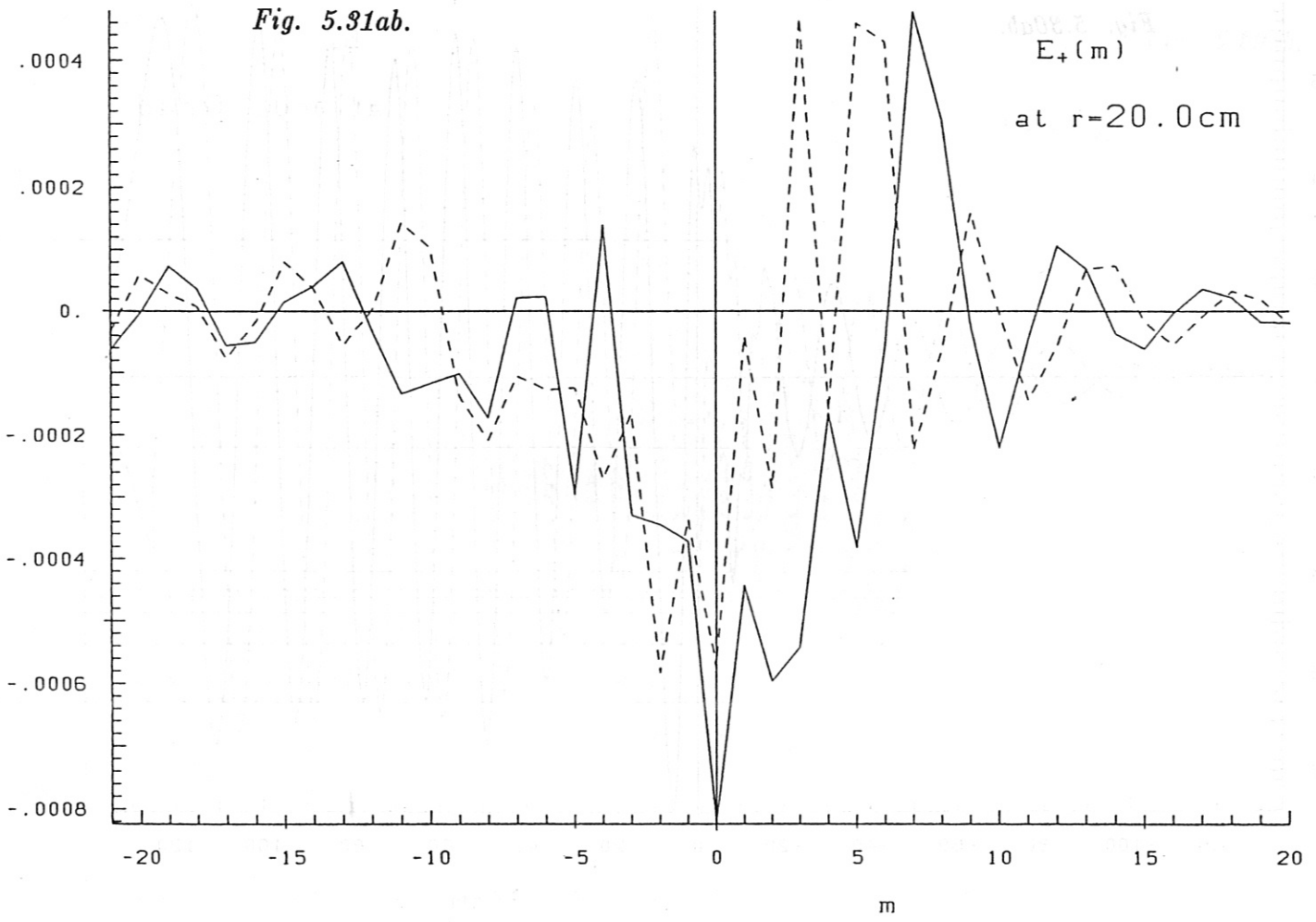
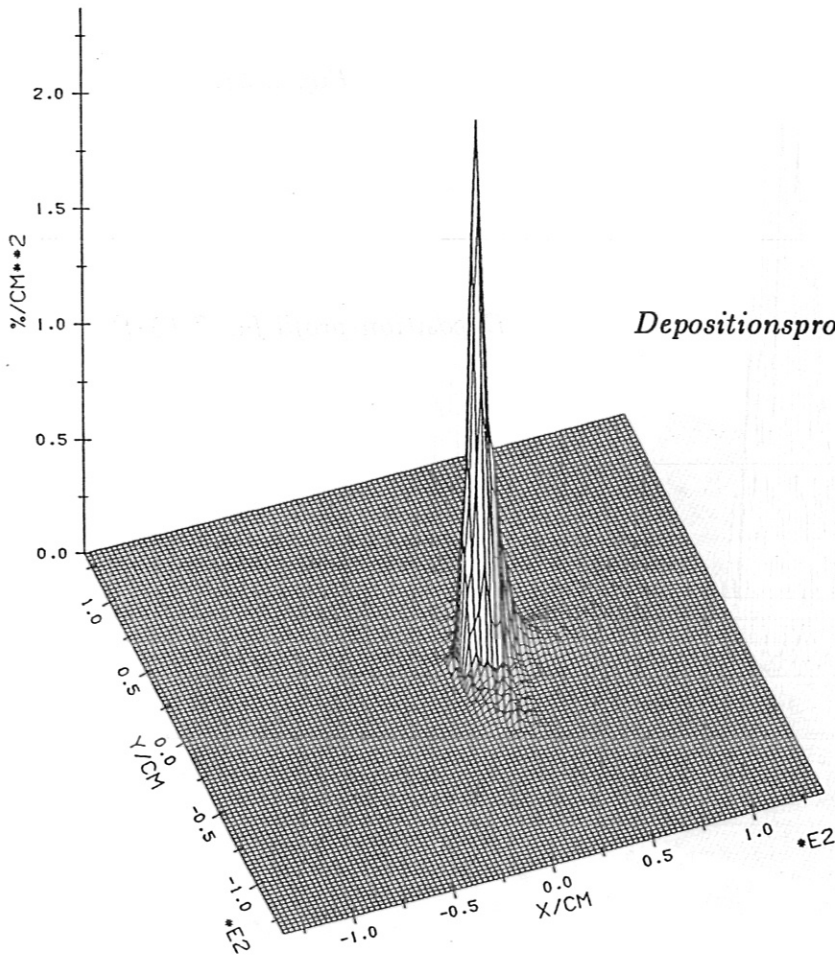
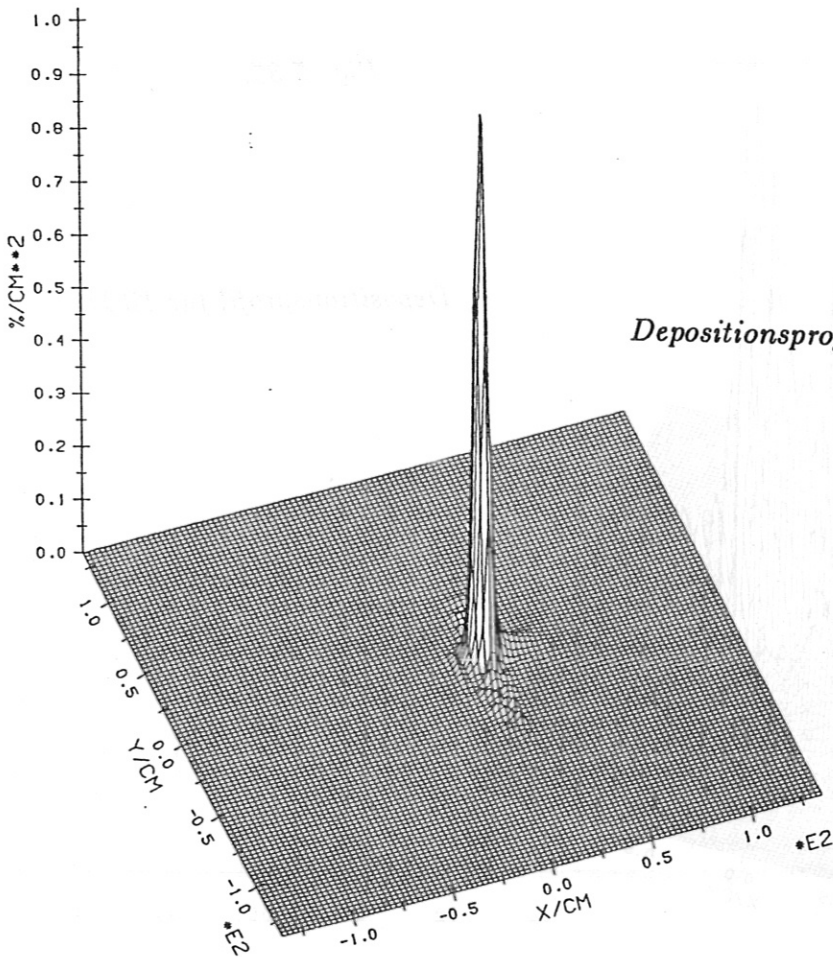


Fig. 5.92.



Depositionsprofil für ICRH bei Fundamentalres.

Fig. 5.93.



Depositionsprofil für ICRH bei harm. Res.

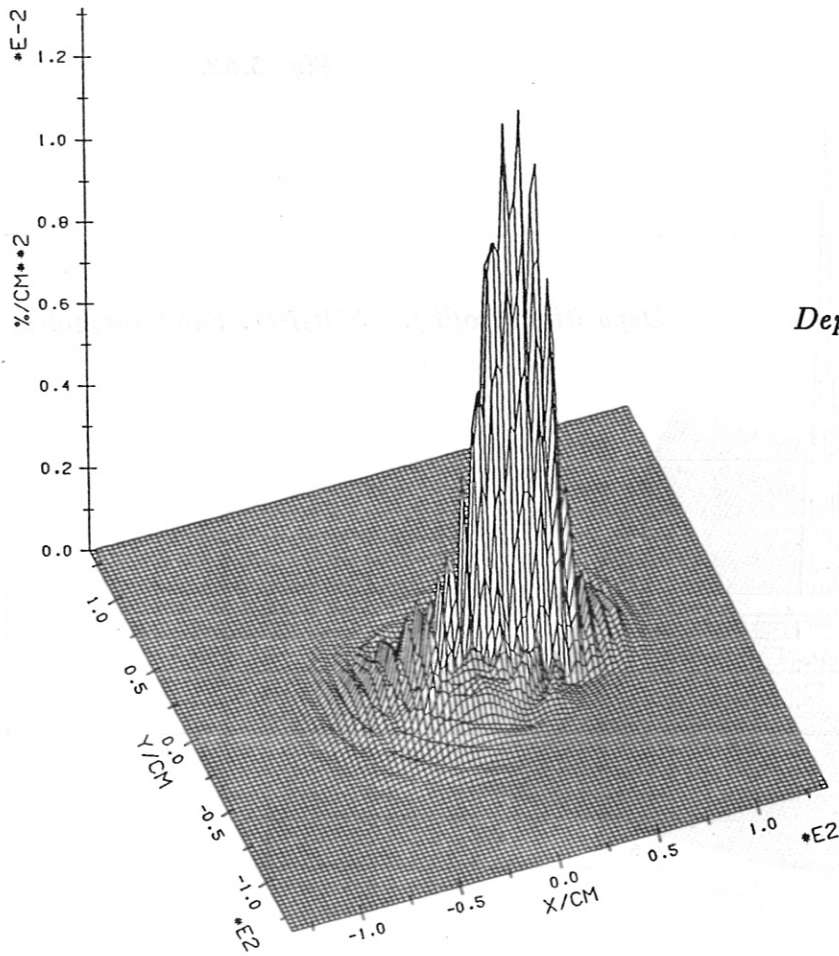


Fig. 5.34.

Depositionsprofil für TTMP

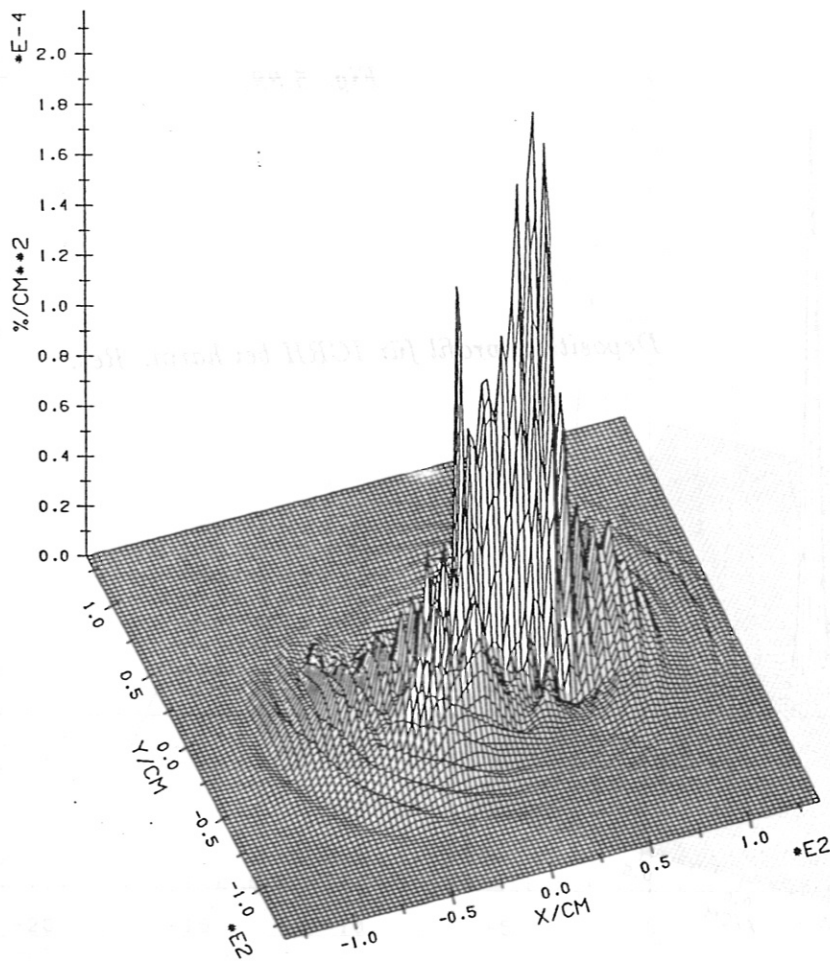


Fig. 5.35.

Depositionsprofil für ELD

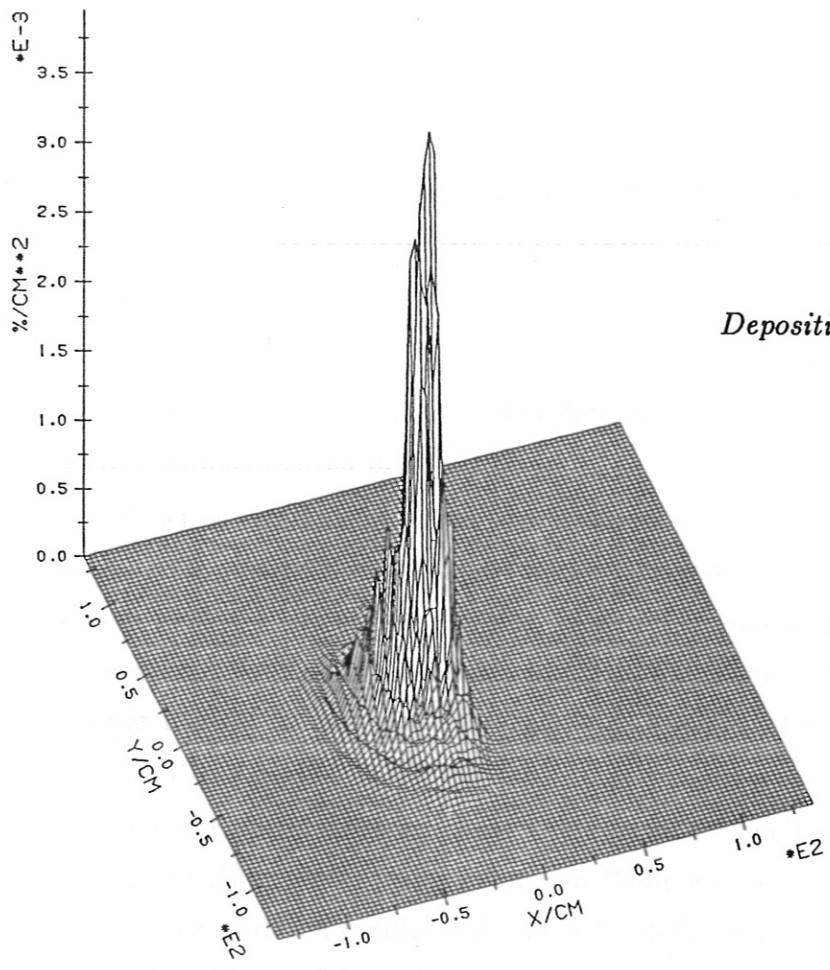


Fig. 5.36.

Depositionsprofil für IBW-Dämpf.

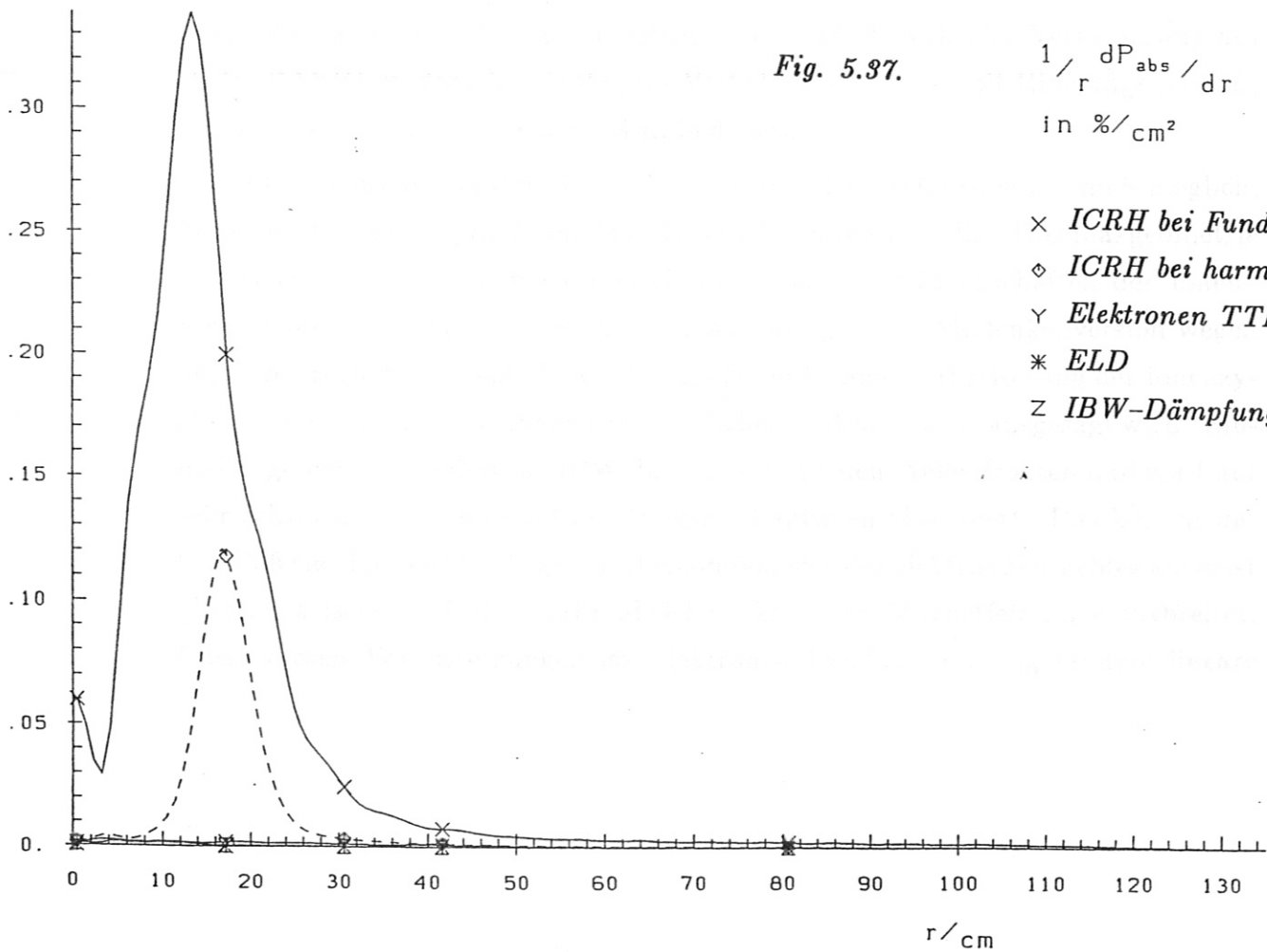


Fig. 5.37.

$$\frac{1}{r} \frac{dP_{abs}}{dr}$$

in $\%/cm^2$

- × ICRH bei Fundamentalres.
- ◇ ICRH bei harm. Res.
- γ Elektronen TTMP
- * ELD
- z IBW-Dämpfung

6. Zusammenfassung der Ergebnisse, Vergleich mit dem Experiment und Ausblick.

Die beschriebenen Modelle und Computerprogramme erhöhen das Verständnis der Physik der Wellenausbreitung und -absorption in Plasmen im Frequenzbereich der Ionenzyklotronresonanz und eröffnen neue Möglichkeiten zur Simulation von ICRH-Experimenten in Tokamaks.

So ist es erstmals gelungen, im Rahmen der linearen Theorie eine in beliebiger Geometrie gültige Formel für die lokale Dissipation elektromagnetischen Wellen in einem heißen Plasma herzuleiten. In dem für ICRH typischen Parameterbereich ist dieser Ausdruck für Plasmen mit Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungen immer positiv definit, d.h. Energie wird auch lokal ausschließlich von der Welle auf die Plasmateilchen übertragen.

Der in Kapitel 4 beschriebene Code simuliert in einer Dimension das single pass Verhalten einer einfallenden schnellen Welle an einer resonanten Schicht. Im Gegensatz zu anderen eindimensionalen Modellen wird die Poloidalkomponente des statischen Magnetfeldes eines Tokamaks (näherungsweise) mitberücksichtigt. Das erlaubt eine realistischere Simulation von Heizungsszenarien, in denen die Ionenzyklotronwelle angeregt werden kann. Der Code ist schnell genug, um den Einbau in ein Ray-Tracing Paket zu ermöglichen. Das würde z.B. eine Verbesserung des Codes RAYIC, in dem das single pass Verhalten bisher nur mit Hilfe ungenauerer, analytischer Modelle berechnet wird, bedeuten.

Mit Hilfe des in Kapitel 5 beschriebenen globalen Codes ist es erstmals möglich, Leistungsdepositionsprofile für kinetische Dämpfung in voller Tokamakgeometrie zu berechnen. Außerdem wurden einige unerwartete Eigenschaften der Ionen-Bernsteinwelle beobachtet: So ist ihre Anregung durch Modenkonzersion wegen der durch toroidale Effekte bewirkten größeren Dopplerverbreiterung der Ionenzyklotronresonanzen schwächer als von einfacheren Modellen vorausgesagt wird. Einmal angeregt, propagiert die IBW dann mit vertikalen Wellenfronten und wird nur sehr schwach durch lineare Dämpfungsmechanismen absorbiert. Das kommt daher, daß sie eine sehr niedrige Parallelkomponente des elektrischen Feldes aufweist ("quasistatische" Polarisation) und sich senkrecht zu Magnetfeldlinien ausbreitet. Unter diesen Voraussetzungen ist Elektronen Landaudämpfung (andere lineare

Dissipationsprozesse kommen sowieso nicht in Frage) sehr schwach. Schließlich wird sie dann wahrscheinlich von Elektronen durch nichtlineare Effekte absorbiert. Bei ASDEX wurde die Verunreinigungsproduktion während ICRH bei $\omega \simeq 2\Omega_{ci}$ in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke und damit der Lage der Resonanz untersucht. Es ergab sich, daß die Verunreinigungsproduktion am geringsten ist, wenn sich die Resonanz in der Mitte des Plasmas befindet oder etwas zur Niedrigfeldseite verschoben ist⁶⁵. Das wurde so gedeutet, daß die Ionen-Bernsteinwelle, wenn sie auf der Niedrigfeldseite angeregt wird und dann das Plasmazentrum durchqueren muß, dort auf Grund der hohen Temperaturen und Dichte linear absorbiert wird. Wird sie hingegen auf der Hochfeldseite angeregt, sollte sie den Plasmarand erreichen können und dort Verunreinigungen hervorrufen. Diese Interpretation kann von unseren Ergebnissen, wonach die IBW in jedem Fall sehr schwach durch lineare Mechanismen gedämpft wird, nicht bestätigt werden. Es kann allerdings keine Aussage darüber gemacht werden, in wie fern nichtlineare Prozesse dieses Verhalten erklären können.

Eine mit experimentellen Messungen vergleichbare Größe ist der Antennenwiderstand R_A , insbesondere wenn globale Eigenmoden angeregt werden können. Das ist aber sehr aufwendig und erfordert sehr viel Rechenzeit, da dazu das gesamte von der Antenne abgestrahlte Spektrum von Toroidalmoden behandelt werden muß. Aus diesen Gründen und weil sie eine bessere Darstellung der Randschicht erlauben, sind für derartige Untersuchungen eindimensionale Codes, die die Wellengleichung in slab-Geometrie im gesamten Tokamak lösen, besser geeignet. Globale Codes könnten dann dazu dienen, die Ergebnisse dieser Rechnungen in einigen Fällen zu überprüfen.

Stationäre Profile zusatzgeheizter Experimente hängen sowohl von den Depositions- als auch den Wärmeleitungsprofilen ab. Aus ihnen kann daher, bei der gegenwärtigen Unkenntnis letzterer, nur sehr wenig experimentelle Information über die Wellenabsorption gewonnen werden. Tatsächlich besteht eher realistische Hoffnung, daß die theoretischen Vorhersagen zur Energiedeposition durch Weiterentwicklung der physikalischen Modelle und Codes so zuverlässig werden, daß aus den gemessenen Plasmaprofilen eindeutige Aussagen zum Wärmeleitungsverhalten gemacht werden können. Direkte experimentelle Tests der Vorhersagen zur ICRH-Leistungsdeposition sind nur durch Betrachtung der

Variation der Temperaturprofile bei sich ändernder Heizleistung möglich⁶⁶. Diese Methode ist aber nur in dem bisher nur bei JET gefundenen sägezahnfreien Regime (das irreführenderweise "giant sawtooth" genannt wird) anwendbar. Durch das Einschalten der ICRH werden nämlich sonst sägezahnförmige Schwankungen der Temperaturprofile ausgelöst. Ansonsten ist ein quantitativer Vergleich der von dem Code berechneten Leistungsdepositionsprofile mit experimentellen Beobachtungen nicht möglich, da Depositionsprofile nicht genau genug gemessen werden können und weil die Energie sehr schnell durch andere Prozesse umverteilt wird. So können nur "globale" Eigenschaften verglichen werden: welche Teilchensorte geheizt wird und ob die Energie mehr zentral oder in der Randschicht deponiert wird. Auf Grund der sehr schwachen Absorption der Ionen-Bernsteinwelle, deren Verhalten von anderen Codes nicht genau genug simuliert werden kann, erwarten wir relativ breite Depositionsprofile für die Elektronenheizung. Dieses Verhalten könnte eine Erklärung für die bei derartigen Szenarien experimentell gefundenen breiteren Elektronentemperaturprofile darstellen⁶⁶.

Schließlich kann noch die Stärke des elektromagnetischen Wellenfeldes in der Randschicht abgeschätzt werden. Man könnte z.B. die Feldstärke bei Verwendung von Dipol- oder Quadrupolantennen vergleichen. Das könnte einen Ausgangspunkt zur Erklärung der bei ICRH insbesondere bei Monopolantennen verstärkt auftretenden Verunreinigungen darstellen. Dafür sind wahrscheinlich nichtlineare, parasitische Effekte verantwortlich, die aber weitgehend unverstanden sind.

Die Verteilung der durch Zusatzheizung dem Plasma zugeführten Leistung hat wahrscheinlich großen Einfluß auf das Stabilitäts- und Einschlußverhalten. Das kann mit Hilfe von Transportcodes untersucht werden, die die Leistungsdepositionsprofile als Eingangsgröße benutzen. Diese Programme laufen bereits routinemäßig für Entladungen mit Neutralinjektion. Prinzipiell könnten die von unserem Code berechneten Depositionsprofile einbezogen werden, um das Verhalten bei ICRH zu simulieren.

Wie bei jedem anderen großen Computerprogramm, ist auch die Entwicklung dieses Codes niemals abgeschlossen und es können immer noch kleine Verbesserungen vorgenommen werden. Ein Punkt wäre eine genauere Berechnung der Plasmaantwort, in der parallele Gradienten des statischen Magnet-

feldes mitberücksichtigt werden ("Verallgemeinerte Zeta-Funktion"). Eine genauere Beschreibung der allerdings wahrscheinlich immer sehr schwachen Elektrodämpfung wäre möglich, wenn man die Parallelkomponente des elektrischen Wellenfeldes nicht wie bisher iterativ berechnet, sondern als explizite Variable behandelt. Das würde den Code auch einfacher machen und eine bessere Simulation der Randschicht erlauben, wo die Dichte niedriger und daher die Abschirmung von E_{\parallel} schwächer ist. Dieses Vorhaben scheitert aber leider an Speicherplatz- und Rechenzeitbeschränkungen. Der Einbau von Finiten Larmorradiuskorrekturen, die bei $\omega \simeq \Omega_{ci}$ resonant sind, wäre recht aufwendig, da diese Terme sehr komplizierte Ausdrücke enthalten. Eine Verallgemeinerung für nichtkreisförmige Flußflächen wäre hingegen eine relativ schnell durchführbare Verbesserung.

Anhang A. Aufspaltung von $\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J})$ in Dissipations- und Flußterme.

Der im Poynting-Theorem auftretende Term $\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J})$ ist in einem thermischen Plasma unter Vernachlässigung des für die Driftwelleninstabilitäten verantwortlichen Terms durch folgenden Ausdruck gegeben :

$$\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J}) = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{4\pi} \int d^3v F_{M,s}(v^2, \vec{r}_{gs}) \cdot \text{Re} \left\{ e^{i\omega^* t} \left(\vec{E}^*(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{v}}{v_{ths}} \right) \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega t'} \left(\vec{E}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{v}'}{v_{ths}} \right) \right\} \quad (\text{A.1})$$

Der Term in der geschweiften Klammer hängt nur durch einen Faktor $e^{2\gamma t}$ explizit von der Zeit ab. Gleichzeitig kann er als substantielle Zeitableitung entlang Teilchenbahnen dargestellt werden :

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left\{ e^{i\omega^* t} \left(\vec{E}^*(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{v}}{v_{th}} \right) \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega t'} \left(\vec{E}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{v}'}{v_{th}} \right) \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^{2\gamma t} H^* \cdot H) = \frac{1}{2} \left[2\gamma + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + (\Omega_c \vec{v} \times \vec{u}_{\parallel}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right] (e^{2\gamma t} H^* \cdot H) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

wobei

$$H = \int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega(t-t')} \left(\vec{E}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{v}'}{v_{th}} \right). \quad (\text{A.3})$$

Nach Substitution von Gl. (A.2) und Integration im Geschwindigkeitsraum verschwindet der letzte Term in Gl. (A.1). Vertauschung von \vec{v} mit dem räumlichen Gradienten (das ist erlaubt, da \vec{r} und \vec{v} unabhängige Variablen sind) ergibt schließlich :

$$\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}^* \cdot \vec{J}) = \frac{dP_{abs}}{dV} + \text{div} \vec{S}_{kin} \quad (\text{A.4})$$

Wobei die lokal absorbierte Leistung dP_{abs}/dV im Grenzfall vernachlässigbarer Stoßfrequenzen durch Gl. (2.65) gegeben ist und der kinetische Flußterm hat die Form :

$$\vec{S}_{kin} = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{8\pi} \int d^3v F_{M,s}(v^2, \vec{r}_g) \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \left\{ \vec{v} \left| \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \frac{\vec{v}'}{v_{ths}} \cdot \vec{E}(\vec{r}') \right|^2 \right\} \quad (\text{A.5})$$

**Anhang B. Abspaltung eines kinetischen Flußterms in $\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}^*(\vartheta) \cdot \vec{J}_{\perp}^{(0)}(\vartheta))$
auf einer magnetischen Flußfläche.**

In pseudotoroidaler Geometrie gilt auf einer gegebenen magnetischen Flußfläche :

$$\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}^*(\vartheta) \cdot \vec{J}_{\perp}^{(0)}(\vartheta)) = \sum_{ions} \frac{\omega_{pi}^2}{8\pi} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi}v_{thi}} \cdot \text{Re} \left[E_{+}^*(\vartheta) e^{i(\omega t - \int_0^t \Omega_{ci}(\vartheta') dt')} \int_{-\infty}^t dt' E_{+}(\vartheta') e^{-i(\omega t' - \int_0^{t'} \Omega_{ci}(\vartheta'') dt'')} \right] \quad (B.1)$$

In der ballistischen Approximation ist

$$\vartheta' = \vartheta + (t' - t)\alpha_v, \quad \vartheta'' = \vartheta + (t'' - t)\alpha_v \quad (B.2)$$

wobei

$$\alpha_v = \frac{\sin \Theta v_{\parallel}}{r}. \quad (B.3)$$

Als nächstes stellen wir die Integrale über dt' and dt'' als Integrale über $d\vartheta'$ and $d\vartheta''$ dar :

$$\frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E}^*(\vartheta) \cdot \vec{J}_{\perp}^{(0)}(\vartheta)) = \sum_{ions} \frac{\omega_{pi}^2}{8\pi} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi}v_{thi}} e^{-2\gamma\vartheta/\alpha_v} \cdot \text{Re} \left[E_{+}^*(\vartheta) e^{i(\omega^* \vartheta - \int_0^{\vartheta} \Omega_{ci}(\vartheta') d\vartheta')/\alpha_v} \int_{-\infty}^{\vartheta} \frac{d\vartheta'}{\alpha_v} E_{+}(\vartheta') e^{-i(\omega\vartheta' - \int_0^{\vartheta'} \Omega_{ci}(\vartheta'') d\vartheta'')/\alpha_v} \right] \quad (B.4)$$

Eine partielle Differentiation ergibt dann :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^*(\vartheta) \cdot \vec{J}_{\perp}^{(0)}(\vartheta)) &= \sum_{ions} \frac{\omega_{pi}^2}{8\pi} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi}v_{thi}} e^{-2\gamma\vartheta/\alpha_v} \\
&\cdot \frac{1}{2} \text{Re} \left[E_+^*(\vartheta) e^{i(\omega^*\vartheta - \int_0^{\vartheta} \Omega_{ci}(\vartheta') d\vartheta')/\alpha_v} \right. \\
&\cdot \int_{-\infty}^{\vartheta} \frac{d\vartheta'}{\alpha_v} E_+(\vartheta') e^{-i(\omega\vartheta' - \int_0^{\vartheta'} \Omega_{ci}(\vartheta'') d\vartheta'')/\alpha_v} \\
&- \int_{-\infty}^{\vartheta} \frac{d\vartheta'}{\alpha_v} E_+^*(\vartheta') e^{i(\omega^*\vartheta' - \int_0^{\vartheta'} \Omega_{ci}(\vartheta'') d\vartheta'')/\alpha_v} \\
&\cdot E_+(\vartheta) e^{-i(\omega\vartheta - \int_0^{\vartheta} \Omega_{ci}(\vartheta') d\vartheta')/\alpha_v} \\
&+ \alpha_v \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\int_{-\infty}^{\vartheta} \frac{d\vartheta'}{\alpha_v} E_+^*(\vartheta') e^{i(\omega^*\vartheta' - \int_0^{\vartheta'} \Omega_{ci}(\vartheta'') d\vartheta'')/\alpha_v} \right. \\
&\left. \left. \cdot \int_{-\infty}^{\vartheta} \frac{d\vartheta'}{\alpha_v} E_+(\vartheta') e^{-i(\omega\vartheta' - \int_0^{\vartheta'} \Omega_{ci}(\vartheta'') d\vartheta'')/\alpha_v} \right) \right] \quad (B.5)
\end{aligned}$$

Der Realteil der ersten beiden Terme verschwindet und der letzte Term beschreibt den parallelen kinetischen Fluß und die Dissipation. Nach einer weiteren partiellen Differentiation und Substitution von

$$\vartheta' = \vartheta - \alpha_v \tau, \quad \vartheta'' = \vartheta - \alpha_v \tau' \quad (B.6)$$

erhält man schließlich :

$$\frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^*(\vartheta) \cdot \vec{J}_{\perp}^{(0)}(\vartheta)) = \frac{dP_{abs}^{i1}(\vartheta)}{dV} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} S_{kin,\parallel}^{\vartheta} \quad (B.7)$$

wobei $S_{kin,\parallel}^{\vartheta}$ die Poloidalkomponente des zum senkrechten Strom nullter Ordnung Larmorradius gehörenden (parallelen) kinetischen Flusses bezeichnet :

$$S_{kin,\parallel}^{\vartheta} = \sum_{ions} \frac{\omega_{pi}^2}{16\pi} \int dv_{\parallel} \frac{e^{-v_{\parallel}^2/v_{thi}^2}}{\sqrt{\pi}v_{thi}} v_{\parallel} \sin \Theta \left| \int_0^{\infty} d\tau e^{i \int_0^{\tau} (\omega - \Omega_{ci}(\vartheta'')) d\tau'} E_+(\vartheta') \right|^2 \quad (B.8)$$

Nach Integration über magnetische Flußflächen ergeben diese Terme keine Beiträge, d.h.

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \text{Re}(\vec{E}^*(\vartheta) \cdot \vec{J}_{\perp}^{(0)}(\vartheta)) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{dP_{abs}^{i1}(\vartheta)}{dV} \quad (B.9)$$

LITERATURVERZEICHNIS

1. J. Raeder et al., *Kontrollierte Kernfusion*, Teubner, Stuttgart, (1981).
2. J.D. Lawson, *Proc. of the Phys. Soc. B* 70, (1957), S. 6.
3. J. Wesson, *Tokamaks*, Clarendon Press, Oxford, (1987).
4. T.H. Stix, *The Theory of Plasma Waves*, McGraw-Hill, N.Y. (1962).
5. E. Canobbio (1971), *Proc. Course of Instabilities and Confinement in toroidal plasmas*, (EUR 5064e), Varenna, S. 243.
6. H.L. Berk, D. Pfirsch, 29. Meeting of the Plasma Physics Div. of the APS, San Diego.
7. D.G. Swanson, *Proc. 3. Int. Symp. on Heating in Tor. Plasmas*, Grenoble (1982), Vol 1, S. 285.
8. P.L. Colestock, R.J. Kashuba, *Nucl. Fusion* 23 (1983), S. 763.
9. M. Brambilla, M. Ottaviani, *Plasma Phys. and Contr. Fusion* 27 (1985), S. 919.
10. S.C. Chiu, T.K. Mau, *Nucl. Fusion* 23 (1983), S. 1613.
11. Th. Martin, J. Vaclavic, *Helv. Phys. Acta* 60 (1987), S. 471.
12. T.H. Stix, *Nuclear Fusion* 15 (1975), S. 737.
13. D.G. Swanson, *Phys. of Fluids* 24 (1981), S. 2035.
14. K. Appert, T. Hellsten, J. Vaclavik, L. Villard, *Comp. Phys. Comm* 40 (1986), S. 73.
15. B.D. Fried, S.D. Conte, *The Plasma Dispersion Function*, Academic Press, N.Y. 1961.
16. M. Brambilla, *IPP* 4/209 (1982).

17. M. Ono, Proc. Course and Workshop on Applications of RF Waves to Tokamak Plasmas, Varenna 1985, S. 187.
18. M. Brambilla, Report IPP 5/15, April 1987, wird demnächst in Nucl. Fusion veröffentlicht.
19. D.G. Swanson, Proc. 3. Int. Symp. on Heating in tor. Plasmas, Grenoble (1982), EUR 7979 EN, Vol. 1, S. 285 und dort zitierte Veröffentlichungen.
20. R.R. Weynants, Phy. Rev. Lett. 33 (1974), S. 78.
21. R.A. Cairns, C.N. Lashmore Davies, Phys. of Fluids 26 (1983) S. 1268.
22. M. Brambilla, M. Ottaviani, Plasma Phys. and Contr. Fusion 27 (1985), S. 1.
23. S.C. Chiu, V.S. Chan, Y.S. Hsu, D.G. Swanson, J. Plasma Physics 27 (1982), S. 327.
24. K.G. Budden, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge Univ. Press, London (1961), Ch. 11.
25. Y.C. Ngan, D.G. Swanson, Phys. of Fluids 20 (1977), S. 1920.
26. J. Vaclavic, K. Appert, Plasma Phys. and Contr. Fusion 29 (1987) S. 257.
27. M. Brambilla, T. Krücken, wird in Plasma Phys. and Contr. Fusion veröffentlicht.
28. B.D. Mc. Vey, R.S. Sund, J.E. Scharer, Phys. Rev. Letters 55 (1985) S. 507.
29. S.I. Itoh, A. Fukuyama, K. Itoh, K. Nishikawa, J. Phys. Soc. of Japan, 54 (1985), S. 1800.
30. D.W. Falconer, Plasma Phys. and Contr. Fusion 29 (1987), S. 433.

31. P.L. Colestock, Proc. Course and Workshop on Applications of RF Waves to Tokamak Plasmas, Varenna (1985), S. 60.
32. K. Theilhaber, J. Jacquinot, Nucl. Fusion 24 (1984), S. 541.
33. P. Lallia, Nucl. Fusion 15 (1975), S. 1190.
34. P. Descamps, Vortrag beim ICRH Workshop, Ringberg (1988).
35. C.K Phillips, F.W. Perkins, D.Q. Hwang, Phys. of Fluids 29 (1986), S. 1608.
36. S.J. Buchsbaum, Phys. of Fluids 3 (1960), S. 418.
37. T. Hellsten, E. Tennfors, Phys. Scripta 30 (1984), S. 341.
38. A. Fukuyama, K. Itoh, S.I. Itoh, Nucl. Fusion 23 (1983), S. 1005.
39. K. Appert, Invited Paper presented at Int. Conf. on Plasma Phys., Kiev, UDSSR, (1987) und K. Appert, T. Hellsten, H. Lütjens, O. Sauter, J. Vaclavik, L. Villard, Report LRP 319/87, Lausanne (1987).
40. M. Brambilla, nicht veröffentlicht
41. E.F. Jaeger, D.B. Batchelor, H. Weitzner, Nucl. Fusion 28 (1988), S. 53.
42. F.W. Perkins, Nucl. Fusion 17 (1977), S. 1197.
43. M. Brambilla, Comp. Phys. Rep. 4 (1986), S. 1.
44. L. Villard, K. Appert, R. Gruber, J. Vaclavic, Comp. Phys. Rep. 4 (1986), S. 95.
45. K. Itoh, A. Fukayama, S.I. Itoh, Nucl. Fusion 24 (1984) 13.
46. A. Fukuyama, K. Itoh, S.I. Itoh, Comp. Phys. Comm. 40 (1986), S. 137.
47. D.N. Smithe, P.L. Colestock, R.J. Kashuba, T. Kammash, Nucl. Fusion 27 (1987), S. 1319.

48. M. Brambilla, T. Krücken, Proc. 13. Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Heating, Schliersee (1986), Vol. 2, S. 89.
49. H. Romero, J. Scharer, Nucl. Fusion 27 (1987), S. 363.
50. G. Strang, G.J. Fix, An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1973).
51. Sommerschule "Finite Elements in Physics", Lausanne, Comp. Phys. Rep. Vol. 6, (1987), Nr. 1-6.
52. L. Mc.Carthy, Vortrag beim ICRH Workshop, Ringberg (1988).
53. T. Krücken, M. Brambilla, Proc. 14. Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Madrid (1987), Vol. 3, S. 996.
54. M. Brambilla, Report IPP 5/10 (1986).
55. D. Gambier, A. Samain, Nuclear Fusion 25 (1983), S. 283.
56. G. Cattanei, R. Croci, Nucl. Fusion 17 (1977), S. 239.
57. T.H. Stix, Proc. Course and Workshop on Applications of RF Waves to Tokamak Plasmas, Varenna (1985), S. 1.
58. G.D. Kerbel, M.G. Mc. Coy, Comp. Phys. Comm. 4 (1986), S. 105.
59. D. Smithe, T. Kammash, P.J. Colestock, Proc. 7. top. Conf. on Applications of RF Power to Plasmas, Kissimmee (1987), S. 350.
60. M. Ono, P. Beiersdorf, R. Bellet al., Phys. Rev. Letters 60 (1988), S. 294.
61. J.D. Moody, M. Porkolab, C.L. Fiore et al., Phys. Rev. Letters 60 (1988), S. 298.
62. C.F. Karney, Phys. of Fluids 22 (1979), S. 2188.
63. E.O. Brigham, The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1974).

64. W. Kerner, E. Schwarz, J. Steuerwald, Proc. 8th Europhys. Conf. on Comp. Phys., Editor J. Nührenberg, EPS, Eibsee (1986), 10D, S. 83.
65. Jet-Team, Plasma Phys. and Contr. Fusion Research, 11th Conf. Proc., Kyoto (1986), Vol. 1, S. 449.
66. G. Janeschitz et. al., Proc. 13. Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Heating, Schliersee (1986), Vol. 1, S. 407.

Außerdem habe ich noch das Manuskript eines Buches von Dr. Brambilla über elektromagnetische Wellen in Plasmen, das demnächst veröffentlicht werden soll, benutzt.

DANKSAGUNG

Herrn Prof. Pinkau möchte ich für die Möglichkeit danken, diese Arbeit unter seiner Leitung durchzuführen.

Herrn Dr. Brambilla danke ich herzlich für seine hervorragende und verständnisvolle Betreuung. Durch zahlreiche Diskussionen hat er wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Diese Arbeit entstand in der motivierenden und optimistischen Atmosphäre der Theorie 3-Gruppe unter Leitung von Prof. Lackner. Ich möchte mich bei allen Mitarbeitern für die in vielerlei Hinsicht gewährte Unterstützung bedanken.

Herrn Dr. Noterdaeme danke ich für wertvolle Diskussionen der experimentellen Resultate.

Frau Schwarz danke ich für die Hilfe beim Einbau der Routine zur Lösung blocktridiagonaler Gleichungssysteme.

Herrn Dr. Kerner danke ich für verschiedene Diskussionen über die finite Elemente Methode.

Herrn Dr. Schumacher und Herrn Prof. Lackner danke ich für die sehr sorgfältige Durchsicht des Manuskripts und einige wertvolle Verbesserungsvorschläge.

Schließlich danke ich meinen Eltern, ohne deren Unterstützung ich diese Dissertation nicht hätte anfertigen können.