

BESTIMMUNG DER VERTEILUNG SUPRATHERMISCHER  
ELEKTRONEN AUS IHRER BREMSSTRAHLUNG

K. Bernhardt

IPP III/114

August 1986



**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**

**8046 GARCHING BEI MÜNCHEN**



# MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

## GARCHING BEI MÜNCHEN

August 1986

### BESTIMMUNG DER VERTEILUNG SUPRATHERMISCHER ELEKTRONEN AUS IHRER BREMSSTRAHLUNG

K. Bernhardt

IPP III/114

August 1986

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*



August 1986

Abstract

Die Verteilungsfunktion  $f$  von in einem Tokamak erzeugten suprathemischen Elektronen wird als Funktion des Elektronenimpulses  $\vec{p}$  und des Ortes  $\vec{r}$  im Plasma aus der von ihnen erzeugten Röntgenbremsstrahlung bestimmt. Hierzu wird diese orts-, richtungs- und energieaufgelöst für denselben Energiebereich wie der der suprathemischen Elektronen gemessen. Die Auswertemethode beruht auf der Auflösung eines Zusammenhanges, der zwischen  $f$  und den aus den Messungen bestimmten Flußprofilen  $J$  der Bremsstrahlung besteht. Das Verfahren und dessen Stabilitätseigenschaften werden ausführlich diskutiert. Aus  $f$  können durch Momentenbildung u.a. die Dichte  $n_H$ , die mittlere Energie  $\bar{T}$  der suprathemischen Elektronen sowie die von ihnen getragene toroidale Stromdichte  $\vec{j}$  bestimmt werden. An ASDEX stehen für die Messung der Bremsstrahlung  $J$  nur zwei Meßrichtungen zur Verfügung. Deshalb kann aus  $J$  nur dann eindeutig  $f$  bestimmt werden, wenn für die Impulsrichtungsverteilung der Elektronen ein zweiparametrischer Ansatz vorgegeben wird. Um außer über  $n_H$  und  $\bar{T}$  auch über die Stromdichte  $\vec{j}$  der suprathemischen Elektronen Aussagen machen zu können, wird als Ansatz eine Zerlegung von  $f$  in einen isotropen und einen anisotropen Anteil,  $f = f_0(|\vec{p}|) + \cos\theta \cdot f_1(|\vec{p}|)$ , verwendet. Hier ist  $\theta$  der Winkel zwischen  $\vec{p}$  und der Torusseule. - Nach diesem Auswerteverfahren wurde aus einer Serie von an ASDEX in der Stromtriebphase durchgeführten Messungen  $f$  sowie ihre Momente  $n_H$ ,  $\bar{T}$  und  $j_{||}$ , der toroidalen Komponente von  $\vec{j}$ , bestimmt. Der durch Fehler der Messungen und sonstiger für die Auswertung benötigter Eingangsgrößen hervorgerufene Fehler der Ergebnisse wird ausführlich behandelt und Schlußfolgerungen über die Stromdichte  $j_{||}$  gezogen. Es wird diskutiert, ob ein bei der Elektronenenergie  $T \approx 50$  keV beobachtetes Minimum von  $f$  darauf zurückzuführen ist, daß für  $T \lesssim 70$  keV die Elektronenimpulse im großen Ausmaß in eine zur Torusseule parallele Richtung ausgerichtet sind. An mehreren Stellen wird darauf hingewiesen, daß die erreichbare Genauigkeit von  $f$  und der aus  $f$  abgeleiteten Größen wie  $n_H$ ,  $\bar{T}$ ,  $\vec{j}$  im wesentlichen durch den Meßaufwand für die Bremsstrahlung bestimmt wird. Man sollte auch ohne Kenntnis der Impulsrichtungsverteilung, und unter Verwendung von lediglich zwei Meßrichtungen, Aussagen über  $j_{||}$  machen können, insbesondere auch über den von niederenergetischen Elektronen ( $10 \text{ keV} \lesssim T \lesssim 70 \text{ keV}$ ) getragenen Anteil von  $j_{||}$ . Auf diese Möglichkeit wird zum Schluß hingewiesen. Es wird vorgeschlagen, sie auf ihre Anwendbarkeit hin zu überprüfen und ggf. die Bremsstrahlungsdiagnostik entsprechend auszubauen.



# Bestimmung der Verteilung suprathemischer Elektronen aus ihrer Bremsstrahlung

K. Bernhardt

## Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
2. Physik der Bremsstrahlungsemission und eine allgemeingültige Beziehung zwischen einer hochenergetischen Elektronenkomponente ( $T > 1$  keV) und ihrer Bremsstrahlung
  - 2.1 Emissionsarten harter kontinuierlicher Röntgenstrahlung
  - 2.2 Quantitative Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Elektronenverteilungsfunktion und zugehörigem Bremsstrahlungsspektrum
  - 2.3 Mikroskopische Eigenschaften der Bremsstrahlung von Stößen zwischen Elektronen und schweren Targetteilchen (e-i-Bremsstrahlung)
    - 2.3.1 Anisotropie der Bremsstrahlung relativistischer Elektronen
    - 2.3.2 Energieabhängigkeit der Bremsstrahlungsspektren von Monoimpulskomponenten
3. Formulierung eines Lösungsansatzes für die Impulsabhängigkeit von Gl. (2.4) unter Berücksichtigung der Physik der suprathemischen Entladungen
  - 3.1 Aufgliederung der Bestimmung der Verteilungsfunktion in die ihrer Orts-, Impulsbetrags- und Impulsrichtungsabhängigkeit
  - 3.2 Beschreibung der Impulsrichtungsverteilung durch einen Reihenansatz
  - 3.3 Eindeutigkeit der Bestimmung der Impulsabhängigkeit der Verteilungsfunktion aus Messungen
  - 3.4 Die Symmetrien der suprathemischen Komponente im Impulsraum und Wahl des Systems für die Impulskoordinaten
  - 3.5 Ansätze für die Impulsrichtungsverteilung
  - 3.6 Berücksichtigung der Physik der suprathemischen Komponente bei der Reihenentwicklung von  $f$
  - 3.7 Diskussion der Reihenentwicklung von  $f$  nach  $\vec{p}/p$
  - 3.8 Aufstellung der Faltungsgleichungen für die radiale und tangentiale Meßrichtung
    - 3.8.1 Radiale Abstrahlungsrichtung, Gleichung für den isotropen Anteil  $f_0(p)$  von  $f$
    - 3.8.2 Tangentiale Abstrahlungsrichtung, Gleichung für den anisotropen Anteil  $f_1(p) \cdot \cos\theta$  von  $f$
    - 3.8.3 Bestimmung von  $f_0$  und  $f_1$  aus zwei zu  $\alpha_1 = 90^\circ$  symmetrisch angeordneten Meßrichtungen
  - 3.9 Bremsstrahlungsemission beliebiger Impulsrichtungsverteilungen



4. Numerische Methodik zur Bestimmung der Impulsbetragsverteilung der suprathermischen Elektronenkomponente
- 4.1 Festlegung der Integrationsgrenzen und Wahl der Integrationsvariablen und der Integralkerne für die Gl. (3.13), (3.14a)
- 4.2 Unterteilung der bei der Entfaltung nach der Elektronenergie auftretenden Fehler
- 4.2.1 Der durch den Fehler  $\Delta I$  von  $I(K)$  induzierte Fehler  $\Delta F$  von  $F$
- 4.2.2 Der durch die Struktur von  $G$  bedingte Fehler  $\tilde{\Delta} F$  von  $F$
- 4.3 Umformung der Gl. (4.2) durch Differentiation nach  $K$
- 4.4 Stabilität der Gl. (4.10) gegen Rundungsfehler
- 4.4.1 Konvergenz der Operation  $I' \rightarrow F$  bezüglich  $L$
- 4.5 Konvergenzeigenschaften der numerischen Differentiation
- 4.6 Eine Näherung für die Berechnung von  $F$  aus  $I$
- 4.7 Die die Genauigkeit von  $F(T)$  bestimmenden Einflüsse
5. Bestimmung der Intensitätsprofile aus den Flußprofilen
- 5.1 Allgemeingültige Beziehung zwischen Intensität  $I$  und Fluß  $J$  einer Strahlung
- 5.2 Eindeutigkeit des Zusammenhanges zwischen  $J$  und  $I$
- 5.3 Berechnung von Intensitätsprofilen für eine Schnittebene
- 5.4 Räumliche Symmetrien und Koordinatensysteme für die Berechnung von Intensitätsprofilen
- 5.5 Auswertung radialer Flußmessungen
- 5.6 Auswertung tangentialer Flußprofile
6. Experimentelle Methodik zur Messung des Bremsstrahlungsflusses
- 6.1 Aufbau der Kollimatoren
- 6.2 Messung der Impulshöhenspektren
- 6.3 Korrektur der Impulshöhenspektren
7. Fehleranalyse der Methodik zur Bestimmung von  $f(\vec{p}, \vec{r})$  anhand einiger Meßbeispiele an suprathermischen Entladungen
- 7.1 Analyse der bei der Messung von Impulshöhenspektren  $Q(K')$  auftretenden Fehler
- 7.2 Bestimmung von Elektronenverteilungsfunktionen aus unvollständigen Angaben über das Bremsstrahlungsspektrum  $I(K)$  bzw.  $J(K)$
- 7.2.1 Problemstellung
- 7.2.2 Ein durch die Vorgabe eines Bremsstrahlungsspektrums vermittelter Zusammenhang zwischen  $F_H$  und  $F_{EH}$
- 7.2.3 Berechnung der Variationsbreite von  $F_H$  für  $T \leq T_m$  aus Variationen von  $F_{EH}$



- 7.2.4 Lokalität der Entfaltungsoption bezüglich der Energievariablen  $K$  und  $T$
- 7.3 Analyse der durch den Meßprozeß erzeugten Fehleranteile  
 $\Delta Q_a, \Delta Q_b, \Delta Q_c$
- 7.3.1 Approximation der Spektren durch analytische Funktionen und zwei Methoden zur Fehlerabschätzung
- 7.3.2 Unkenntnis des Spektrums  $J_o(K)$  in einem hochenergetischen Teilbereich von  $T_{\min} \leq K \leq T_{\max}$
- 7.3.3 Störung der Messung der Volumenbremsstrahlung durch Sekundärstrahlung
- 7.3.4 Auswertung der Schußserie #13045 - #13053 und Fehlerdiskussion
- 7.4 Einfluß der Fehler von explizit vorgebbaren Auswerteparametern auf die Energieabhängigkeit der Verteilungsfunktion
- 7.4.1 Abhängigkeit der Auswertung der isotropen Komponente  $\tilde{f}_o$  von verschiedenen Parametern und von den Fehlern  $\Delta Q$
- 7.4.2 Beispiele für die Auswertung von mit der tangentialen Diagnostik gemessenen Bremsstrahlungsspektren
- 7.4.3 Eine mögliche physikalische Ursache für die Absenkung von  $F_o(T)$  für  $T \lesssim 150$  keV.
- 7.5 Bestimmung der Stromdichteverteilung einer suprathemischen Entladung
- 7.6 Vergleich der Messungen der suprathemischen Bremsstrahlung mit solchen an PLT durchgeführten Messungen und mit Messungen von  $\beta_p$
- 7.7 Schlußbetrachtung: Folgerungen für die Entwicklung einer Bremsstrahlungsdiagnostik, die auch zur Messung der Stromdichteprofile im Energiebereich  $T \lesssim 70$  keV geeignet ist.



## 1. Einleitung

In Niedrig-Dichte-Entladungen in Tokamaks, wie in ASDEX, kann man bekanntlich eine suprathemische Elektronenkomponente erzeugen. Sie hat in ASDEX eine Durchschnittsenergie in der Größenordnung von 100 keV und ihre Dichte beträgt i.a. mehr als das 0.1-fache der Dichte der thermischen Elektronenkomponente, ist also verhältnismäßig groß. Die suprathemischen Elektronen bestimmen deswegen wesentlich die Energieeinschlußzeit  $\tau_e$  des Plasmas. Wegen der hohen kinetischen Energie der Elektronen ist ihre Wechselwirkung mit der kalten Komponente geringer als die der Partikel der kalten (thermischen) Komponente untereinander. Unter anderem aus diesem Grund ist  $\tau_e$  in einer suprathemischen Entladung größer als in einer gewöhnlichen ohmschen Entladung /1/.

Der Mechanismus, der zu einer stationären Verteilung suprathemischer Elektronen führt, ist zwar qualitativ bekannt, läßt sich aber quantitativ noch nicht beschreiben. Parail und Pogutse /2/ nahmen an, daß die suprathemischen Elektronen durch eine Instabilität innerhalb der aus extrem relativistischen Elektronen bestehenden Runawaykomponente erzeugt werden: Die Instabilität, die von der Anisotropie der Runaway-Verteilung getrieben wird, isotropisiert die Runaways und begrenzt dadurch ihren Zuwachs an kinetischer Energie. Dieses Modell kann jedoch nicht erklären, wie es zu der auch mit groben diagnostischen Methoden, wie z.B. mit der Messung der Umfangsspannung, beobachtbaren hohen Dichte  $n_H$  der suprathemischen Elektronen kommt /3/. Vermutlich muß man hierfür einen Entstehungsmechanismus suchen, der für die direkte Beschleunigung von Elektronen aus dem thermischen in den suprathemischen Elektronenenergiebereich sorgt.

Diese kurze Darstellung der Physik der suprathemischen Elektronen genügt, um zu zeigen, daß für eine eingehendere Untersuchung ihres Erzeugungsmechanismus und zur Klärung dieser Fragen ihre Verteilungsfunktion, also auch ihre Durchschnittsenergie und Dichte, gemessen werden muß.

Eine suprathemische Komponente entsteht auch in Stromtriebentladungen, also in Niedrig-Dichte-Entladungen, in die elektromagnetische Wellen hoher Leistung mit einer Frequenz im Bereich der Lower-Hybrid-Frequenz eingekoppelt werden. Wie bekannt, kann man auf diese Weise einen HF-getriebenen Strom erzeugen. Es liegt auf der Hand, daß es gerade die suprathemischen Elektronen sind, die diesen Strom tragen. Auch bei dieser speziellen Art von suprathemischen Entladungen ist die Erzeugung der suprathemischen Komponente noch unklar. Nur für Elektronen, die bereits suprathemische Geschwindigkeiten ( $0.1 \dots 1 \cdot c$ ) haben, ist der Sachverhalt klar: Man weiß, daß sie mit dem elektromagnetischen Feld wechselwirken können, denn man kennt das Spektrum der zur toroidalen

Seele parallelen Komponente  $k_{\parallel}$  des Wellenvektors  $\vec{k}$  und damit den ungefähren Bereich der parallelen Komponente  $v_{\parallel}$  der Elektronengeschwindigkeit  $\vec{v}$ , in dem Elektronen resonant mit der Welle wechselwirken können. Unbekannt ist aber, auf welche Weise Elektronen aus der thermischen Komponente, also Elektronen mit Parallelgeschwindigkeiten, die weitaus geringer sind als die suprathermischen Geschwindigkeiten, durch das HF-Feld in den suprathermischen Geschwindigkeitsbereich transferiert werden. Eine von der Messung des Wellenspektrums unabhängige Methode zur Messung der Verteilungsfunktion dieser Elektronen und ihrer den HF-Strom tragenden anisotropen Komponente ist daher wünschenswert, um diese Ankopplungsbedingungen zu überprüfen. In diesem Zusammenhang sind die Fragen, in welchem Elektronenenergiebereich die Elektronen am meisten zum Strom beitragen, und ob in Stromtriebentladungen der von thermischen Elektronen getragene Anteil des toroidalen Plasmastromes verschwindet, besonders interessant. Weitere wichtige Untersuchungspunkte sind die Stromstärke, die Form des radialen Stromprofils und ihre zeitliche Entwicklung und der Vergleich dieser Messungen mit den Ergebnissen anderer Diagnostiken bzw. Einstellgrößen.

Aus diesen Gründen wurde die Elektronenverteilungsfunktion  $f(\vec{p})$ , ( $\vec{p}$ : relativistischer Elektronenimpuls) mit Hilfe von energie- richtungs- und ortsaufgelösten Bremsstrahlungsmessungen im suprathermischen Energiebereich (50 keV - 400 keV) bestimmt. Die (Impuls-)Verteilungsfunktion  $f(\vec{p})$  ist so definiert, daß  $f(\vec{p})d^3p$  die Anzahl der Elektronen in dem zu  $\vec{p}$  gehörenden Impulsvolumenelement  $d^3p$  ist. In diesem Report soll die hierzu benutzte Methodik beschrieben werden. Das folgende Kapitel 2 wird eine allgemeine Einführung in die Bremsstrahlungsemission eines Plasmas geben. Außerdem wird ein allgemeingültiger Zusammenhang zwischen der Elektronenverteilungsfunktion einer beliebigen Elektronengruppe mit kinetischen Energien  $T$  oberhalb 1 keV und ihrer Röntgenbremsstrahlung hergeleitet, der auch ohne Einschränkungen im relativistischen Energiebereich  $T \gtrsim 10$  keV gültig ist.

Das eigentliche Thema des Reports, nämlich die Untersuchung speziell der suprathermischen Elektronen eines Tokamak-Plasmas, wird in den auf Kapitel 2 folgenden Kapiteln abgehandelt. Aus technischen Gründen bestehen nur begrenzte Möglichkeiten zur Messung der Bremsstrahlungsrichtcharakteristik des Plasmas: Die Bremsstrahlung kann nur aus einer zur Torusseule senkrechten (= radialen) Richtung und einer zu ihr parallelen (= tangentialen) Richtung beobachtet werden. Deshalb werden für die Bestimmung der Verteilungsfunktion Zusatzannahmen über diese getroffen werden müssen. Darauf aufbauend wird aus der in Kap. 2 abgeleiteten allgemeinen Beziehung zwischen Verteilungsfunktion



der Elektronen und ihrer Bremsstrahlung ein Gleichungssystem hergeleitet, mit dem man die isotrope und anisotrope suprathermische Elektronenkomponente simultan bestimmen kann. In Kap. 4 werden die verwendeten numerischen Techniken für die Bestimmung der Elektronenenergieverteilung aus ihrer Bremsstrahlung bei bekannter Orts- und Richtungsabhängigkeit behandelt. Das Thema von Kap. 5 bilden die verschiedenen numerischen Verfahren zur Bestimmung der Bremsstrahlungsintensitätsprofile aus den gemessenen radialen und tangentialen Bremsstrahlungsflüssen. In Kapitel 6 wird auf die experimentelle Seite des Problems, nämlich auf die korrekte Messung der Volumenbremsstrahlung des Plasmas, eingegangen. In Kapitel 7 wird eine Fehleranalyse der in den Kap. 2 bis Kap. 6 entwickelten Verfahren anhand einer ASDEX-Meßserie durchgeführt. Die sich daraus ergebenden offenen Fragen werden diskutiert.

## 2. Physik der Bremsstrahlungsemission und eine allgemeingültige Beziehung zwischen einer hochenergetischen Elektronenkomponente ( $T > 1$ keV) und ihrer Bremsstrahlung

### 2.1 Emissionsarten harter kontinuierlicher Röntgenstrahlung

Für die Bestimmung der suprathermischen Komponente ist es am günstigsten, diejenige Strahlung zu messen, die zu demselben Energiebereich gehört wie die an der Strahlungswechselwirkung beteiligten Elektronen: Auf diese Weise wird gewährleistet, daß die Messung der von den suprathermischen Elektronen emittierten Strahlung nicht durch Strahlungsbeiträge von Elektronenkomponenten niedrigerer Energie aber hoher Dichte und von Verunreinigungen gestört wird. Es soll also der Strahlungsenergiebereich oberhalb 10 keV untersucht werden. In diesem Bereich können Plasmen bekanntlich verschiedene Arten kontinuierlicher Strahlung, wie Bremsstrahlung, Comptonstreustrahlung und Rekombinationsstrahlung, emittieren. Oberhalb der Energie einiger 10 keV wird jedoch vom Plasma im wesentlichen nur Bremsstrahlung emittiert.

Von der Linienstrahlung erwartet man in diesem Bereich keine wesentlichen Beiträge mehr.

Die Comptonstreustrahlung, die durch Streuung von primärer Röntgenstrahlung an Plasmateilchen entsteht, ist bei den in Betracht kommenden Plasmadichten gegen

andere, im folgenden behandelten Strahlungsarten vernachlässigbar.<sup>+</sup>

Die Rekombinationsstrahlung sollte nach Abschätzungen /4/ im Bereich oberhalb der Ionisierungsenergien  $E_i$  der im Plasma vorkommenden Verunreinigungen nur dann eine wesentliche Rolle spielen, wenn die Durchschnittsenergie der frei beweglichen Elektronen etwa in der Größenordnung von  $E_i$  oder kleiner als diese ist. Diese Bedingung erfüllen solche Verunreinigungen, die eine hohe Kernladungszahl  $Z$  aufweisen und nur noch wenige oder keine Hüllenelektronen besitzen, wie z.B. hochionisiertes Eisen. Die Konzentration dieser Zustände im Plasma ist jedoch so klein ( $<1\%$ ), daß die von ihnen erzeugte Rekombinationsstrahlung für  $K \gtrsim 30$  keV nach Abschätzungen vernachlässigbar sein dürfte /5/. Dennoch lohnt sich auch für den Energiebereich  $K \gtrsim 30$  keV eine eingehendere Untersuchung der Rekombinationsstrahlung, da neuere Daten über die Wirkungsquerschnitte für verschiedene Ionisierungsstufen von Eisen und Sauerstoff /6/ und über Konzentrationen von Verunreinigungen verschiedener Ladungsstufen in ASDEX /7,8/ zur Verfügung stehen.

Im folgenden soll nur die Bremsstrahlung besprochen werden. Bei der Bremsstrahlung handelt es sich um die Emission elektromagnetischer Strahlung infolge einer beschleunigten Bewegung eines geladenen Teilchens innerhalb des Coulomb-Feldes eines anderen Teilchens (Target). Diese Strahlungsart wird also bei der Streuung geladener Teilchen untereinander emittiert; der Unterschied zur Rekombinationsstrahlung besteht darin, daß während der Bremsstrahlungsemission aus dem Streusystem kein gebundener Zustand entsteht.

In dem Potential eines vorgegebenen Targets fällt die Beschleunigung bzw. Abbremsung von Ionen wegen ihrer vergleichsweise großen Masse kleiner aus als die der Elektronen. Deshalb ist die bei Stößen von Ionen untereinander emittierte Bremsstrahlung bei gegebener kinetischer Anfangsenergie des Systems vernachlässigbar klein gegen die, die bei Stößen von Elektronen mit schweren Teilchen emittiert wird, zumindest in dem in diesem Report beobachteten Energiebereich. Sie wird deshalb im folgenden nicht mit berücksichtigt. Auch die Bremsstrahlung, die bei Stößen von Elektronen untereinander emittiert wird /9/, wird hier vorerst nicht betrachtet. Rechnungen zeigen jedoch, daß die Intensität dieser Bremsstrahlungsart, die von einem Wasserstoffplasma mit einer

---

<sup>+</sup>Die an der Gefäßwand erzeugte Wandbremsstrahlung und Comptonstreustrahlung, die die genaue Messung der Volumenbremsstrahlung des Plasmas erheblich erschweren kann, wird in Kap. 7 behandelt.



suprathermischen Elektronenkomponente emittiert wird, signifikante Beiträge zur Gesamtbremsstrahlung liefern kann. Deswegen sollte in Zukunft auch der Einfluß dieser "Elektron-Elektron-Bremsstrahlung" auf die Röntgenemission des Plasmas genauer untersucht werden. Die folgenden Ausführungen sollen sich aber auf diejenige, die bei Stößen zwischen Elektronen und Ionen bzw. Neutralteilchen emittiert wird (e-i,n-Bremsstrahlung), beschränken.

In den folgenden Abschnitten soll eine allgemeingültige Beziehung zwischen einer hochenergetischen Elektronenkomponente ( $T > 1$  keV) und ihrer Bremsstrahlung hergeleitet werden und einige der wichtigsten Eigenschaften der Bremsstrahlungswechselwirkung erläutert werden. Die in diesem Kapitel bereitgestellten Hilfsmittel werden in den folgenden Kapiteln für die Auswertung von Bremsstrahlungsspektren verwendet.

## 2.2 Quantitative Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Elektronenverteilungsfunktion und zugehörigem Bremsstrahlungsspektrum

Um die Impulsverteilungsfunktion aus der suprathermischen Bremsstrahlung zu bestimmen, muß die Wechselwirkung zwischen der suprathermischen Elektronenkomponente und ihrem Bremsstrahlungsfeld quantitativ erfaßt werden. Dabei ist zu beachten, daß die Bremsstrahlungsemission ein auf zweierlei Weise statistisch beeinflusster Prozeß ist: Erstens streuen die Impulse  $\vec{p}$  der an der Bremsstrahlungsemission beteiligten Elektronen. Zweitens läuft dieser Prozeß auch von sich aus, d.h., auch unter fester Vorgabe eines Impulses  $\vec{p}$ , statistisch ab. Der Begriff des Wirkungsquerschnittes erlaubt es bekanntlich, den letzten Aspekt quantitativ zu beschreiben.

Hierdurch bedingt sind also neben den Elektronenimpulsen  $\vec{p}$  auch die Energien  $K$  und die Abstrahlungsrichtungen  $\vec{k}$  der als Bremsstrahlung emittierten Photonen statistisch verteilt. Deren Verteilung wird z.B. durch die Intensität  $I$  der Strahlung angegeben.  $I$  ist die Gesamtenergie der pro Zeiteinheit, Volumeneinheit des Plasmas, pro Einheitsintervall der Photonenergie  $K$  und pro Raumwinkeleinheit emittierten Bremsstrahlungsquanten.  $I$  hängt ab von  $K$ , vom Austrahlungsort  $\vec{r}$  und von der Abstrahlungsrichtung, die durch zwei Richtungswinkel gekennzeichnet werden kann:  $I = I(K, \alpha_0, \alpha_1)$ .

Zur Bestimmung von  $f(\vec{p})$  muß also ein Zusammenhang zwischen  $I$  und  $f$  unter Verwendung von Wirkungsquerschnitten für die Bremsstrahlung gefunden werden.

Eine derartige funktionale Beziehung wird im folgenden unter sehr allgemeinen Voraussetzungen hergeleitet. Mit ihrer Hilfe lassen sich aus der Intensität  $I$  Aussagen über  $f(\vec{p})$  bilden. Um der statistischen Natur der Bremsstrahlung Rechnung zu tragen, muß die Meßapparatur so aufgebaut sein, daß eine energie- und richtungsaufgelöste Messung der Bremsstrahlung, d.h., eine Sortierung der zu registrierenden Bremsstrahlungsquanten nach ihrer Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$  und Energie  $K$ , möglich ist. Dies gilt auch für die Messung der Energieflüsse  $J$  und der Ortsabhängigkeit der Bremsstrahlung (s. Kap. 5). Wenn man im folgenden auf die Abhängigkeit der Intensität von der zugrundegelegten Verteilungsfunktion  $f$  explizit hinweisen möchte, kann man  $I$  mit der Verteilungsfunktion  $f$  indizieren:  $I = I_f$  (bzw.  $I = I_F$ , s. Kap. 4.7). Wo nötig, wird die Ortsabhängigkeit von  $f$  bzw. die von  $I$  explizit angegeben.

Der gesuchte Zusammenhang läßt sich am einfachsten aufstellen, wenn in der Elektronenkomponente  $f$  alle Elektronen bis auf kleine Abweichungen  $\Delta p$  einen einheitlichen Impuls  $\vec{p}_j$  besitzen: Für diesen Fall folgt die Beziehung zwischen  $f$  und  $I_f$  unmittelbar aus der Definition des Wirkungsquerschnitts  $\sigma$ , der die in den Raumwinkel  $\Delta\Omega$  und in die durch die Winkel  $\delta$  und  $\varepsilon$  gekennzeichnete Richtung emittierte Bremsstrahlung beschreibt. Die Bedeutung von  $\delta$  und  $\varepsilon$  gehen aus Abb. (1) hervor.

Für die Intensitätsberechnung verwendet man die Definition (/10/):

$$\sigma = \frac{\text{Rate des betrachteten Prozesses je Targetteilchen}}{\text{Stromdichte der auf die Targets einfallenden Teilchen}}$$

Hierbei identifiziert man die Targets mit den schweren Plasmateilchen und die auf die Targets einfallenden Teilchen mit den suprathemischen Elektronen.

Mit der zugrundegelegten Elektronenkomponente, die als "Monoimpulsverteilung oder -komponente" bezeichnet werden kann:

$$(2.1) \hat{f}_j(\vec{p}) = \begin{cases} \text{const, für} & \begin{cases} p_{jx} \leq p_x \leq p_{jx} + \Delta p & (+) \\ p_{jy} \leq p_y \leq p_{jy} + \Delta p \\ p_{jz} \leq p_z \leq p_{jz} + \Delta p \end{cases} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} \text{const, für} \\ 0 \end{cases}} \right\} = f(\vec{p}) \text{ für diesen Bereich (s. unten)}$$

(+) In diesem Abschnitt bilden die  $\hat{f}_j$  eine Zerlegung der in Gl (2.4) gesuchten Funktion  $f$ , d.h., es wird  $\hat{f}_j(\vec{p}) = \hat{\delta}(\vec{p} - \vec{p}_j) \cdot f(\vec{p}) \cdot \Delta^3 p$ . Hier ist  $\hat{\delta}(\vec{p} - \vec{p}_j) = \Delta p^{-3}$  in demselben Impulsbereich, in dem auch  $\hat{f}_j \neq 0$  ist, und verschwindet sonst. Für  $\Delta p \rightarrow 0$  ist  $\hat{\delta}$  die Delta-Funktion (siehe hierzu /28/); d.h.,  $\hat{\delta}(0) \rightarrow \infty$  für  $\Delta p \rightarrow 0$ . Im Gegensatz hierzu ist  $\hat{f}_j(\vec{p}_j) = f(\vec{p}_j)$  unabhängig von  $\Delta p$ . Die mathematischen Eigenschaften der  $\hat{f}_j$  und der  $\hat{\delta}$ -Funktion unterscheiden sich also voneinander, wenn die  $\hat{f}_j$  in der dargestellten Weise durch  $f(\vec{p})$  normiert werden.



erhält man also den Ausdruck speziell für den differentiellen Bremsstrahlungsquerschnitt:

$$\sigma_{\text{diff}} = \frac{d^2\sigma}{dK \cdot d\Omega} \cdot \Delta\Omega = \frac{d^2\sigma(K, p, \delta)}{dK d\Omega} \cdot \Delta\Omega$$

$$= \frac{1}{K} \cdot \frac{I_{\hat{f}_j}(K, \delta) \cdot \Delta\Omega}{\hat{f}_j(\vec{p}) \cdot \Delta^3 p \cdot v \cdot n_a}; \quad \delta = \alpha(\vec{p}_j, \text{Ausbreitungsrichtung der emittierten Strahlung})$$

und hieraus durch Umstellen der Faktoren unmittelbar den gesuchten Ausdruck für die Bremsstrahlungsintensität von Monoimpulsverteilungen  $\hat{f}_j(\vec{p})$ :

$$(2.3) \quad I_{\hat{f}_j}(K) = K \cdot v \cdot \frac{d^2\sigma}{dK \cdot d\Omega} \cdot \hat{f}_j(\vec{p}) \Delta^3 p \cdot n_a.$$

Hier ist  $n_a$  die Dichte der Targetteilchen (Neutralteilchen oder Ionen). Für die Berechnung von Bremsstrahlungsquerschnitten, oder, gleichbedeutend dazu, der Bremsstrahlung von Monoimpulskomponenten, stellt die Theorie zahlreiche Methoden zur Verfügung. Hierauf soll in den nächsten Abschnitten kurz eingegangen werden. Hier sei noch hinzugefügt, daß wegen der Rotationssymmetrie von  $\sigma_{\text{diff}}$  um die durch  $\vec{p} = \vec{p}_j$  gegebene Richtung,  $\sigma_{\text{diff}}$  und damit  $I_{\hat{f}_j}$  nur von dem zwischen Elektronenimpuls  $\vec{p}_j$  und dem Wellenvektor  $\vec{k}$  des emittierten Photons eingeschlossenen Winkel  $\delta$  abhängig ist.  $\sigma_{\text{diff}}$  ist daher nicht abhängig von  $\epsilon$ , der die Rotation der Emissionsrichtung  $\vec{k}$  um  $\vec{p}_j$  beschreibt.

Gl. (2.3) ist jedoch noch nicht die gesuchte Beziehung zwischen  $f$  und  $I_f$ , da die Elektronen in Plasmen nicht diskret wie in Gl. (2.1), sondern kontinuierlich verteilt sind. Eine zu Gl. (2.3) analoge Beziehung für beliebige Elektronenverteilungen  $f$  erhält man, wenn man ausnutzt, daß  $f$  sich als Summe von Monoimpulskomponenten  $\hat{f}_j$  (Gl. (2.1)) schreiben läßt:

$$f = \sum_j \hat{f}_j$$

und daß  $f$  in die Bremsstrahlungswechselwirkung zwischen Elektronen und schweren Targetteilchen nur linear eingeht, also die Bremsstrahlungsemission nicht mit einer Wechselwirkung von  $f$  mit sich selbst gekoppelt ist.

Das bedeutet, daß für eine Zerlegung der Elektronenverteilung  $f$  in beliebige Komponenten  $f_j$  man die Gesamtstrahlung  $I_f(K)$  als die Summe der von den  $f_j$  erzeugten Bremsstrahlungsanteilen  $I_{f_j}$  erhält:

$$I_f = \sum_j I_{f_j} \quad \text{für} \quad f = \sum_j f_j.$$

Mit  $f_j = \hat{f}_j$  als Monoimpulskomponenten (Gl. (2.1)) erhält man somit die gesuchte Beziehung zwischen  $f$  und  $I_f$ :

$$(2.4) \quad I(K, \alpha_0, \alpha_1, \vec{r}) = n_a(\vec{r}) \cdot K \cdot \int d^3p \cdot v \cdot \frac{d^2\sigma}{dK d\Omega}(K, p, \delta) \cdot f(\vec{p}, \vec{r})$$

Sie beschreibt die Bremsstrahlungsemission  $I$  einer beliebigen Elektronenverteilung  $f$  in Abhängigkeit vom Abstrahlungsort  $\vec{r}$  im Plasma und von der durch die Richtungswinkel  $\alpha_0, \alpha_1$  gekennzeichneten Abstrahlungsrichtung.  $\alpha_0$  kann beispielsweise als der Azimutwinkel und  $\alpha_1$  als der Polarwinkel in einem Polarkoordinatensystem angesehen werden, das bezüglich irgendeiner ausgezeichneten Richtung des Plasmas, i.a. toroidale Seele, definiert ist. Mit  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  wird das makroskopische Emissionsverhalten der suprathemischen Komponente beschrieben, während mit  $\delta$  und  $\epsilon$  das mikroskopische Emissionsverhalten der elementaren Bremsstrahlungswechselwirkung charakterisiert werden kann. Deshalb müssen die Winkelpaare  $(\alpha_0, \alpha_1)$  und  $(\delta, \epsilon)$  voneinander unterschieden werden (s. Kap. 3). Die Abhängigkeit des Winkels  $\delta$  von  $\alpha_0, \alpha_1$  und  $\vec{p}/p$  ist durch Gl. (3.11) gegeben.

Gl. (2.4) ist die Ausgangsgleichung für die numerische Bestimmung der suprathemischen Elektronenkomponente eines Plasmas aus ihrer Bremsstrahlung.

### 2.3 Mikroskopische Eigenschaften der Bremsstrahlung von Stößen zwischen Elektronen und schweren Targetteichen (e-i-Bremsstrahlung)

Für die in den folgenden Kapiteln zu beschreibende numerische Auswertung von Bremsstrahlungsspektren ist es wichtig, einige Grundeigenschaften der e-i-Bremsstrahlung zu kennen. Deshalb soll auf die Parameterabhängigkeit der differentiellen Bremsstrahlungsquerschnitte oder gleichbedeutend damit, auf die der von Monoimpulskomponenten  $\hat{f}_j$  (Gl. (2.1)) erzeugten Bremsstrahlungsspektren  $I_{\hat{f}_j}$  eingegangen werden. Speziell sollen unter Bezugnahme auf die einschlägige Literatur folgende Punkte behandelt werden:



- a) Die Richtcharakteristik der emittierten Intensität, also die Intensität als Funktion des Abstrahlungswinkels. Die Richtcharakteristik ist für die später zu beschreibende Bestimmung der anisotropen Komponente der supra-thermischen Elektronen bzw. des von diesen getragenen Plasmastromes von großer Bedeutung.
- b) Die Abhängigkeit der Bremsstrahlung von der Photonenenergie  $K$  und der Elektronenenergie  $T_j$ . Sie ist von Bedeutung bei der Bestimmung der Energieverteilung der suprathemischen Komponente ( $T_j = T(\vec{p}_j)$ ).
- c) Die Abhängigkeit der Bremsstrahlung von der Ladungszahl  $Z$  der vollständig ionisierten schweren Plasmateilchen bzw. der Ladungszahl  $Z_i$  der teilweise ionisierten Partikel. Dieser Punkt kann wegen der während der Entladung von der Wand abgelösten und in das Plasma transportierten Verunreinigungen von Bedeutung sein und wird zusammen mit Punkt b) abgehandelt.

Bevor auf diese Punkte näher eingegangen wird, sollen noch zwei allgemeine Bemerkungen gemacht werden. Erstens können zur expliziten Berechnung der Bremsstrahlung wegen der in Betracht kommenden hohen Photonen- und Elektronenenergien nur quantenmechanische und relativistische Theorien benutzt werden. Zweitens gilt in der quantenmechanischen Betrachtungsweise der Energieerhaltungssatz für den Bremsstrahlungsprozeß in folgender Form:

$$(2.5) \quad K \leq T_j;$$

d.h. die Energie  $K$  des abgestrahlten Photons muß, da das Streuzentrum (ein schweres Plasmateilchen) ruht, kleiner oder höchstens gleich der kinetischen Energie  $T_j$  des stoßenden Elektrons sein. Das Photonenenergiespektrum  $I$  der Bremsstrahlung von Elektronen der Energie  $T_j$  ist also nach oben durch die "kurzwellige Grenze" bzw. "Tip-Region"  $K = T_j$  begrenzt. (Die Energieerhaltung für die Rekombinationsstrahlung kann nicht in der Form (2.5) ausgedrückt werden.)

### 2.3.1 Anisotropie der Bremsstrahlung relativistischer Elektronen

Die Richtcharakteristik der emittierten Bremsstrahlung zeigt für relativistische Energien eine stark ausgeprägte Anisotropie: in ihre Bewegungsrichtung

emittieren die Elektronen erheblich mehr Strahlung als in die zu  $\vec{p}$  entgegengesetzte Richtung. Dieses Verhalten soll als Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie bezeichnet werden. Mit Hilfe der berechneten Daten von Logan /11/ soll es für Wasserstoff als Target ( $Z = 1$ ) und für zwei verschiedene, aber fest vorgegebene Elektronenenergien erläutert werden. Qualitativ ergibt sich auch für  $Z > 1$ , also für Plasmaverunreinigungen, dasselbe Bild.

Zunächst soll ein Elektron bzw. eine Monoimpulsverteilung  $\hat{f}_j$  mit einer Anfangsenergie  $T_j = 400$  keV,  $T_j = T(\vec{p}_j)$ , die schon in der Größenordnung der Elektronenmasse liegt, betrachtet werden (Abb. 2a). Für diese Energie zeigen die Emissionsspektren folgende Charakteristika: Wenn  $K$ , die Photonenenergie, gleich  $T_j$  ist (kurzwelliger Grenzfall), wird die meiste Strahlung unter einem Winkel von  $\delta_{\max} = 25^\circ$  zur Bewegungsrichtung der Elektronen emittiert. Wenn  $K \ll T_j$  ist, findet man  $\delta_{\max} = 0^\circ$ , und entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung ( $\delta = 180^\circ$ ) wird 20 x weniger Bremsstrahlung emittiert.

Wenn als Anfangsenergie  $T_j = 10$  keV gewählt wird, die man als nicht relativistisch ansehen kann, ist der Effekt der Vorwärtsausstrahlung weitaus schwächer ausgeprägt (Abb. 2b). Für  $K = T_j$  liegt das Emissionsmaximum bei  $\delta_{\max} = 70^\circ$ , d.h., in diesem Fall wird die Strahlung fast senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen emittiert und die Strahlungsrichtcharakteristik ist um  $\delta = 90^\circ$  weitgehend symmetrisch. Auch für  $K \ll T_j$  ist die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie gegenüber dem Fall  $T_j = 400$  keV abgeschwächt: Zwar liegt auch für  $T_j = 10$  keV das Emissionsmaximum bei  $\delta_{\max} = 0^\circ$ , aber die Emission unter  $\delta = 180^\circ$  ist für diesen Fall nur um einen Faktor 2 schwächer.

Die eben beschriebene Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie ist also im wesentlichen ein relativistischer Effekt. Aus diesem Grund kann man mit Hilfe der Bremsstrahlung nur dann auf eine bevorzugte Bewegungsrichtung der suprathermischen Elektronen, also auf einen von ihnen getragenen Strom schließen, wenn diese relativistische Energien haben. Aus dem Gesagten folgt, daß die sich dabei ergebenden Verfahrensfehler umso größer sind, je kleiner die Energie  $T_j$  der Elektronen ist. Weiterhin kann man auf dieser Basis leider den von den thermischen Elektronen ( $T \lesssim 10$  keV) getragenen Plasmastrom, wenn überhaupt, wohl nur mit sehr großen Fehlern bestimmen.

### 2.3.2 Energieabhängigkeit der Bremsstrahlungsspektren von Monoimpulskomponenten

In die Energieabhängigkeit der Bremsstrahlungsspektren von Monoimpulskomponenten gehen außer der Elektronenenergie  $T$  noch folgende Parameter ein: die Kernladungszahl  $Z$  und  $Z_i$ , die Ladungszahl des Targets bzw. schweren Plasmateilchens. Die Bremsstrahlung wird außerdem im schwächeren Ausmaß von Einzelheiten im Aufbau der Hülle des Targetatoms bestimmt. Man kann also die Bremsstrahlung nach diesen Einflüssen und nach  $T$  klassifizieren.

Eine grobe Klassifizierung erhält man bereits, wenn man zwischen der an durch Schalenelektronen abgeschirmten Kernen und an unabgeschirmten Kernen erzeugten Bremsstrahlung unterscheidet. Der zweite Fall liegt dann vor, wenn  $Z_i = Z$  oder  $T_j, K$  groß gegen die charakteristischen Bindungsenergien aller im Plasma vorkommenden Targetatome ist, d.h., wenn die Strahlung in Targetbereichen erzeugt wird, die nicht durch Schalenelektronen vom Targetkern abgeschirmt sind. Für die emittierte Intensität z.B. eines mit Fe (Kernladungszahl  $Z_{Fe} = 26$ ) verunreinigten Wasserstoffplasmas gilt dann für diesen Fall:

$$(2.6) I \sim n_H \cdot n_p \cdot \left(1 + \frac{n_{Fe}}{n_p} Z_{Fe}^2\right).$$

Hier sind  $n_p$  die Protonendichte und  $n_{Fe}$  die Konzentration von Eisen im Plasma. Nach der eben getroffenen Voraussetzung gilt diese Formel nur für  $K \gtrsim 10$  keV,  $T_j \gtrsim 100$  keV; unterhalb dieser Energien machen sich bereits Abschirmungseffekte bemerkbar /12/ (siehe Abb. 3).

Für jede Elektronenenergie  $T_j$  einer Monoimpulskomponente  $\hat{f}_j$  fällt das zugehörige Spektrum  $I_{\hat{f}_j}(K)$  mit  $K$  ab (Abb. (4)). Der Abfall ist umso schwächer, je größer  $Z$  und je kleiner  $T_j$  ist /13/, je stärker also die Coulombwechselwirkung zwischen Targetkern und stoßendem Elektron ist. Ein Beispiel für dieses Verhalten zeigt ein Vergleich der an Wasserstoff und an Titankernen erzeugten Bremsstrahlung (Abb. (4a)). Ein quantitatives Maß für die Stärke des Abfalls von  $I_{\hat{f}_j}(K)$  mit  $K$  ist der Quotient

$$(2.7) \kappa(K, T_j) = \frac{I_{\hat{f}_j}(K)}{I_{\hat{f}_j}(T_j)}.$$

$\kappa$  gibt an, wieviel Strahlungsenergie eine Monoimpulskomponente mit Energie



$T_j$  bei der kurzwelligen Grenze  $K = T_j$  im Vergleich zu  $K < T_j$  emittiert. (Man beachte, daß  $T_j = T(\vec{p}_j)$  ist.)

Die eben angesprochene Abhängigkeit des Quotienten  $\kappa$  von der Kopplungsstärke zwischen Target und Elektron führt man auf eine von der Coulombwechselwirkung verursachten Verzerrung der Elektronenwellenfunktion in Targetnähe /13/ zurück. Diesen Effekt versucht man in der Theorie dadurch zu berücksichtigen, daß man an die einfachste aller im relativistischen Energiebereich anwendbaren Bremsstrahlungstheorien, die sogenannte Bornsche Näherung /14,15/, verschiedene sog. "Coulomb-Korrekturen" anbringt (/16/,/17/,/18/). Ohne Coulomb-Korrektur liefert die Bornsche Näherung einen verschwindenden Wert für die Emission an der kurzwelligen Grenze  $K = T_j$ . Dieser Fall ist für Wasserstoff ( $Z = 1$ ) und für große Elektronenergien auch für  $Z > 1$  annähernd erfüllt (Abb. 4c).

Abschirmung liegt vor, wenn  $Z_i < Z$  ist und die Energien  $T_j, K$  so klein sind, daß mindestens eine von ihnen in die Größenordnung der Ionisierungsenergie der zu den Wasserstoff- bzw. Verunreinigungsatomen gehörenden innersten Schalen kommt. In diesem Fall wird die Bremsstrahlungsemission infolge Abschwächung der Coulombschen Wechselwirkung verringert. Die Abschwächung der Kopplung führt zu einer Modifikation des für den Fall ungeschirmter Targets beschriebenen Verhaltens der Bremsstrahlungsemission. Sie wird für schwach ionisierte oder neutrale Targetatome umso größer, je kleiner  $K$  bzw.  $T_j$  wird, d.h., die für die Bremsstrahlungsemission relevante Ionenladungszahl  $\tilde{Z}_i$  ( $Z_i \leq \tilde{Z}_i \leq Z$ ) kann mit  $T_j, K$  variieren. Deshalb gilt im Falle der Abschirmung Gleichung (2.6) nicht mehr unbeschränkt; statt  $Z_{Fe}$  hat man  $\tilde{Z}_{Fe,i}(K, T_j)$  in sie einzusetzen. Die Abschirmungswirkung führt für hohe  $Z$ , kleine  $\tilde{Z}_i$  und für kleine  $T_j$  (und damit kleine Photonenenergien  $K$ ) dazu, daß  $I_{f,j}(K)$  konstant für alle  $K$  ist /19,20/, also  $\kappa \approx 1$  ist (Abb. 3). Messungen totaler Bremsstrahlungsquerschnitte werden in Ref. /21/ gezeigt.

Nach dem Gesagten hängt die Bremsstrahlungsemission für hohe Elektronen- und Photonenenergien nur von  $Z$ , den Kernladungszahlen der Targets ab. Sie ist also in diesem Fall für vorgegebene  $Z$  unabhängig von der mittleren Ionenladungszahl  $Z_{eff} = (\sum Z_i^2 n_i) / (\sum Z_i n_i)$  des Plasmas ( $n_i$ : Konzentration der Verunreinigungen mit Ionenladung  $Z_i$ ).  $Z_{eff}$  ist dann also im Falle, daß die Verunreinigungen nur teilweise ionisiert sind, nicht der bestimmende Ladungsparameter für die Bremsstrahlungsemission.

### 3. Formulierung eines Lösungsansatzes für die Impulsabhängigkeit von Gl. (2.4) unter Berücksichtigung der Physik der suprathermischen Entladungen

#### 3.1 Aufgliederung der Bestimmung der Verteilungsfunktion in die ihrer Orts-, -Impulsbetrags- und Impulsrichtungsabhängigkeit

Aus Gl. (2.4) erkennt man, daß, wenn  $I$  sowohl als Funktion der Photonenenergie  $K$  als auch der Abstrahlungsrichtung  $\alpha_0, \alpha_1$  (Richtcharakteristik) vorliegt, Aussagen über die Verteilungsfunktion  $f$ , d.h., Aussagen über die örtliche, die Energie- und die Impulsrichtungsverteilung der suprathermischen Elektronen gemacht werden können. Aus  $f$  wiederum lassen sich durch geeignete Mittelungen die Größen  $n_H$  (Dichte der suprathermischen Elektronen),  $\bar{T}$  (ihre Durchschnittsenergie) und  $\vec{j}$  (die Dichte des von ihnen getragenen Stromes im Plasma) bestimmen.

Entsprechend der soeben gegebenen Aufteilung der Variablen in Ortsvariable  $\vec{r}$  sowie in Richtungs- und Betragsvariable von  $\vec{p}$  wird das Verfahren, das zur Bestimmung von  $f$  aus den gemessenen Spektren verwendet wird, in Einzelschritte untergliedert (Tabelle 2, S. 138/139).

Die Behandlung der Ortsabhängigkeit ist Gegenstand des Kap 5. Hierbei muß berücksichtigt werden, daß  $I$  nicht mit dem von den Strahlungsdetektoren gelieferten Spektrum  $J$  identisch ist, da  $J$ , im Unterschied zu  $I$  (Kap. 2), den Bremsstrahlungsfluß darstellt. Diese Größe ist bekanntlich das Linienintegral von  $I$  längs der Sichtlinie des für die Bremsstrahlungsmessung verwendeten Detektors (s. Kap 5). Der Bestimmung der Ortsabhängigkeit von  $f$  muß also eine der Ortsabhängigkeit von  $I$  aus Flußprofilen vorausgehen. Die hierzu erforderlichen verallgemeinerten Entabelungsprozeduren werden in Kap. 5 beschrieben. Aus der Ortsabhängigkeit von  $f$  lassen sich auch die der Größen  $n_H, \bar{T}$  und der Stromdichte  $\vec{j}$ , die aus  $f$  durch Mittelung über  $\vec{p}$  gebildet werden können, gewinnen.

In Kap. 4 werden Verfahren zur Bestimmung der Energie- bzw. Impulsbetragsverteilung der suprathermischen Elektronen aus den Intensitätsspektren  $I(K)$  der Bremsstrahlung beschrieben.

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß man bei der eindeutigen Berechnung der Impulsrichtungsverteilung der suprathermischen Elektronen von einem Ansatz hierfür ausgehen muß. Ein Ansatz, der zu den physikalischen und meßtechnischen

Bedingungen der in diesem Report behandelten Experimente paßt, wird vorgestellt. Er geht in die Berechnung sowohl der Energieabhängigkeit als auch der Ortsabhängigkeit von  $I$  und  $f$  ein.

### 3.2 Beschreibung der Impulsrichtungsverteilung von $f$ durch einen Reihenansatz

Für die Bestimmung der Impulsrichtungsverteilung kann man zwei Fälle unterscheiden. Der erste Fall ist trivial. Wenn man aufgrund bereits vorhandener Informationen über die Physik der suprathemischen Komponente davon ausgehen kann, daß  $f$  isotrop, also unabhängig von der Impulsrichtung ist, genügt zu ihrer vollständigen Bestimmung eine einmalige Berechnung ihrer Energieabhängigkeit.

Der zweite Fall ist gegeben, wenn man mit einer Anisotropie von  $f$  in  $\vec{p}/p$  rechnet. Diese muß dann berücksichtigt werden, wenn man den von den suprathemischen Elektronen getragenen Anteil des Plasmastroms bestimmen möchte: Nur Elektronen mit anisotrop verteilten Impulsrichtungen können einen nicht verschwindenden Strom tragen. Da das Fortfallen der Isotropiebedingung für die  $\vec{p}$ -Abhängigkeit von  $f$  gleichbedeutend ist mit der Zulassung eines weiteren Freiheitsgrades für die Elektronenkomponente, eben der Unbestimmtheit von  $f$  in der Impulsrichtung  $\vec{p}/p$ , wird eine große Anzahl neuer Variationsmöglichkeiten für  $f$  erzeugt.

Wenn  $f$  also anisotrop ist, ist für die Bestimmung ihrer Impulsabhängigkeit eine quantitative Beschreibung dieser Variationen notwendig. Diese kann man sich dadurch verschaffen, daß man die Variationen mit den Termen  $V_i$  einer Reihenentwicklung von  $f$  nach  $\vec{p}/p$

$$(3.1) \quad f(\vec{p}, \vec{r}) = \sum_i f_i(|\vec{p}|, \vec{r}) \cdot V_i(|\vec{p}|, \vec{p}/|\vec{p}|, \vec{r})$$

identifiziert. Hierbei werden die Terme  $V_i$  durch einen aus physikalischen Überlegungen gebildeten Ansatz vorgegeben. Damit reduziert sich die Bestimmung von  $f$  auf die Berechnung der Parameter bzw. Entwicklungskoeffizienten  $f_i$ . Für jeden Term muß die  $|\vec{p}|$ - und die Ortsabhängigkeit von  $f_i$  gesondert durchgeführt werden, sofern er nicht identisch verschwindet. Für die Berücksichtigung der Anisotropie von  $f$  sind also mehrere, voneinander unabhängige, also unter verschiedenen Beobachtungsrichtungen durchgeführte Messungen der Bremsstrahlungsprofile  $I(K, \vec{r})$  erforderlich. Deren notwendige Anzahl wird im folgenden bestimmt. Es wird also bei der Rechnung nicht von der Annahme ausgegangen, daß die Terme von (3.1), und damit auch die zu



unterschiedlichen Termen gehörenden Größen  $n_H^{\vec{j}}$ , dieselbe Profilbreite und Energieabhängigkeit besitzen.

### 3.3 Eindeutigkeit der Bestimmung der Impulsabhängigkeit der Verteilungsfunktion $f$ aus Messungen

Aussagen über die Verteilungsfunktion  $f$ , die auch dessen Abhängigkeit von der Impulsrichtung der Elektronen beschreiben, sind auch bei Vorgabe einer mit hoher Auflösung gemessenen Richtcharakteristik der Bremsstrahlung nicht immer eindeutig. Dieses Problem tritt z.B. bei der Bestimmung der Stromdichte nichtrelativistischer Elektronen aus Bremsstrahlungsmessungen auf (Kap.2).  $f$  läßt sich also u.U. nur mit großen Fehlern angeben. Innerhalb deren Grenzen kann  $f$  beliebig variieren, d.h., in beliebiger Weise von den Impulsen abhängig sein. Der so gebildete Variationsbereich von  $f$  ist aber beschränkt, wie Gl. (3.20) und der Schlußabschnitt (7.7) zeigen werden. Seine numerisch bestimmbaren Grenzen bieten daher eine Möglichkeit zur quantitativen Beschreibung von  $f$ , jedoch unter Verzicht auf Eindeutigkeit.

Eine eindeutige Bestimmung der Verteilungsfunktion  $f$  als Alternative hierzu, d.h., die sämtlicher Entwicklungskoeffizienten  $f_i$  in Gl. (3.1), ist nach dem Gesagten höchstens für Spezialfälle der Gl. (2.4) möglich. Das letztere wird, falls der Rechnung die an ASDEX gemessenen Bremsstrahlungsspektren zugrundegelegt werden, zusätzlich noch aus technischen Gründen erschwert: Es existieren, wie Abb. (6) zeigt, nur zwei durch die tangentielle und radiale Beobachtungswinkel gegebene Meßrichtungen und damit nur 2 Bestimmungsmöglichkeiten für die Entwicklungskoeffizienten  $f_i$  in (3.1). Deswegen, ist, wenn überhaupt, unter den gegebenen Umständen eine Bestimmung von  $f$  nur dann eindeutig, wenn man für die Festlegung der noch fehlenden Parameter  $f_i$  der Richtungsverteilung zusätzliche Annahmen bzw. Informationen über die Physik der suprathemischen Komponente verwendet. Dies läuft auf die Bildung eines Ansatzes für  $f(\vec{p})$  hinaus.

Im folgenden soll das letztgenannte Verfahren zusammen mit Gl. (3.1) auf seine Anwendbarkeit auf Gl.(2.4) hin untersucht werden. Die hierfür zur Bestimmung der  $f_i$  benötigten Eigenschaften der suprathemischen Elektronengruppe, die durch Experimente oder durch plausible theoretische Überlegungen gesichert sind, haben eine für die weitere Rechnung wertvolle Zusatz Eigenschaft: Es zeigt sich, daß sie Symmetrien der Elektronengruppe im Impulsraum beschreiben. Diese kann man in den folgenden Abschnitten für eine optimale Wahl des Impulskoordinatensystems und der Terme (Variationen)  $V_i$  in der Reihen-

wicklung (3.1) verwenden. Mit dieser Hilfe gelangt man zu einem Reihenansatz, der die Grundlage für die Auswertung der Bremsstrahlungsmessungen bildet und unter in Abschnitt 3.8 spezifizierten Voraussetzungen eine eindeutige Bestimmung von  $f$  erlaubt.

### 3.4 Die Symmetrien der suprathemischen Komponente im Impulsraum und Wahl des Systems für die Impulskoordinaten

Es folgt eine Liste der Eigenschaften der suprathemischen Elektronengruppe, die als Symmetrien im Impulsraum formulierbar sind:

- a) Rotationssymmetrie um die toroidale Seele: Die Impulsverteilung der Elektronen ist im Impulsraum um jeden Aufpunkt  $\vec{r}$  im Torus in sehr guter Näherung rotationssymmetrisch um die zur poloidalen Achse parallele Impulskomponente  $p_{||}$ : jede Asymmetrie von  $f$  um die poloidale Achse wird durch die sehr schnelle, mit  $\omega \approx \omega_c$  erfolgende Zyklotronbewegung der Elektronen ( $\omega_c = \frac{e \cdot B}{m_e}$ ) ausgeglättet ( $e$ : Ladung des Elektrons).
- b) Aus den Messungen von  $\beta_p$  und  $\beta_p^{\perp}$  von suprathemischen Entladungen kann man mit einiger Sicherheit schließen, daß keine Druckenisotropie besteht /1/, also der Druck parallel zur toroidalen Seele gleich dem Druck senkrecht zu dieser ist:  $P_{||} = P_{\perp}$ . Hier bedeuten im einzelnen:  $P$ : kinetischer Druck;  $P_{\perp}$ ,  $P_{||}$  dessen zur toroidalen Seele senkrechte und parallele Komponente;  $B$ : magnetische Induktion;  $B_{pol}$ : ihre poloidale Komponente, und nach /7/, mit  $\mu_0$ , der Induktionskonstanten,

$$\beta_p = \frac{2\mu_0 P}{B_{pol}^2} ; \quad \beta_p^{\perp} = \frac{2\mu_0 P_{\perp}}{B_{pol}^2} .$$

- c) Wenn  $j_{||}(\vec{r}) \neq 0$  ist, muß  $f$  im Punkt  $\vec{r}$  nichtrotationssymmetrisch um mindestens eine der Achsen senkrecht zur toroidalen Seele sein. Wegen der nach a) poloidalen Rotationssymmetrie von  $f$  im Impulsraum gilt dieser Schluß für alle Achsen senkrecht zur poloidalen Achse gleichermaßen.

Die Rotationssymmetrie im Impulsraum um die toroidale Seele legt es nahe, in jedem Aufpunkt  $\vec{r}$  des Plasmas für den Elektronenimpuls ein Polarkoordinatensystem  $p, \theta, \varphi$  einzurichten mit einer Polarachse, die in Richtung parallel zur toroidalen Seele ausgerichtet ist. Da wegen dieser Symmetrie keine Abhängigkeit vom Azimutwinkel  $\varphi$  besteht, kann die Bezugsrichtung  $\varphi = 0$  beliebig gewählt werden, beispielsweise als die Richtung senkrecht zur Torusachse. Der Polarwinkel  $\theta$  wird von der Richtung parallel zur toroidalen Seele aus gerechnet.

Wegen der räumlichen toroidalen Krümmung sind das Koordinatensystem  $(p, \theta, \varphi)$  und das des Ortsraums voneinander abhängig. Für verschiedene toroidale Winkel  $\Psi$  (s. Kap. 5) (man beachte, daß  $\Psi$  eine räumliche Winkelkoordinate ist) erhält man demnach verschieden ausgerichtete Polarkoordinatensysteme für den Impulsraum. Wegen der später zu behandelnden räumlichen toroidalen Symmetrie des Plasmas bezüglich  $\Psi$  (Kap. 5) genügt es jedoch, die Verteilungsfunktion für einen einzigen beliebig festgelegten toroidalen Winkel  $\Psi_0$  anzugeben. Man braucht also die Aufpunkte  $\vec{r}$ , das sind die Zentren der Polarkoordinatensysteme für  $\vec{p}$ , nur auf der durch  $\Psi = \Psi_0$  definierten poloidalen Schnittebene variieren zu lassen (Abb. 5).

Durch diese Verknüpfung des räumlichen Koordinatensystems mit den Systemen für  $\vec{p}$  im Impulsraum kann jedoch eine Rotationssymmetrie um die toroidale Seele im Ortsraum gestört werden. Insbesondere trägt ein geometrischer Effekt, die endliche Aperturgröße des Kollimators, dazu bei. Diese führt zusammen mit der toroidalen Krümmung der Elektronenbahnen zu einer effektiven Verschiebung des Zentrums der poloidalen Symmetrie im Ortsraum.

Zu beachten ist weiterhin, daß bereits wegen der helikalen Verschraubung des Magnetfeldes die poloidale Symmetrie auf einer poloidalen Schnittfläche nicht exakt erfüllt sein kann.

### 3.5 Ansatz für die Impulsrichtungsverteilung

Für die Schreibweise in Polarkoordinaten und zur Berücksichtigung der im letzten Abschnitt aufgezählten Symmetrieeigenschaften von  $f$  im Impulsraum, eignen sich für die Reihenentwicklung von  $f$  nach  $\vec{p}/p$  zwei Ansätze, die ausführlich in einer Veröffentlichung von Johnston /22/ dargestellt sind.

Erstens kommt eine Entwicklung von  $f$  in Potenzen von  $\vec{p}$  in Frage. Diese läßt sich nach Johnston als eine unendliche Summe von Tensorprodukten darstellen<sup>+</sup> ("kartesische" Entwicklung):

+

Da die Polarkoordinaten ein orthogonales Koordinatensystem bilden, lassen sich alle Schlußfolgerungen aus der Arbeit von Johnston über die Reihenentwicklung von  $f(v, \theta, \varphi)$  übernehmen, auch wenn man in ihnen  $v$  durch  $p$  ersetzt.



$$(3.2) f(\vec{p}) = \sum_{\ell} \frac{\{\vec{f}_{\ell}\}_{\ell} \cdot \{\vec{p}^{\ell}\}}{p^{\ell}}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \frac{\{\vec{f}_{\ell}\}_{\ell} \cdot \{\vec{p}^{\ell}\}}{p^{\ell}} &= \sum_{i,j,k,\dots}^3 f_{(l)\dots k,j,i} \cdot v_{(l)\dots k,j,i} \\ &= \sum_{i,j,k,\dots}^3 f_{(l)\dots k,j,i} \frac{p_i}{p} \cdot \frac{p_j}{p} \cdot \frac{p_k}{p} \dots \end{aligned}$$

$p_i, p_j, p_k, \dots$  sind die kartesischen Impulskoordinaten. Jede der Indices  $i, j, k, \dots$  indiziert die Raumrichtungen  $x, y, z$ , läuft also von 1 bis 3.

Zweitens kann man unter Verwendung der in (3.4) eingeführten Polarkoordinaten

$$(3.3) \quad \begin{aligned} p_x &= p \cdot \cos\varphi \sin\theta \\ p_y &= p \cdot \sin\varphi \sin\theta \\ p_z &= p \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

eine zu (3.2) äquivalente Reihe in Kugelfunktionen

$$\begin{aligned} (3.4) f(\vec{p}, \vec{r}) &= \sum_{\ell m s} f_{\ell m s} (p, \vec{r}) \cdot Y_{\ell m s}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{\ell m s} f_{\ell m s} (p, \vec{r}) \cdot V_{\ell m s} \end{aligned}$$

mit

$$V_{\ell m s} = Y_{\ell m s}(\theta, \varphi) = \hat{P}_{\ell}^m(\cos\theta) (\hat{\delta}_{0s} \cos m\varphi + \hat{\delta}_{1s} \sin m\varphi)$$

und den zugeordneten Legendreschen Funktionen  $\hat{P}_{\ell}^m(\cos\theta)$  erhalten.  $\hat{\delta}_{0s}$  und  $\hat{\delta}_{1s}$  sind Kroneckersymbole;  $s = 0, 1$  (Siehe Ref./52/, Gl.(3-10, 3-12)). Die physikalisch interessanten Momente  $n_H, \vec{j}, \vec{\hat{P}}$  (Drucktensor), lassen sich unter Zuhilfenahme der Gl. (10a,b) in der Referenz von Johnston /22/ angeben.

$\vec{\hat{P}}(\vec{r})$  ist der Drucktensor, der kinetische und konvektive Effekte einschließt:

$$\vec{\hat{P}} = \frac{n_H}{m_e} \langle \vec{p} \vec{p} \rangle; \quad (m_e : \text{Elektronenmasse})$$

und  $\vec{j}$  die Stromdichte:

$$\vec{j} = e \cdot n_H \cdot \langle \vec{v} \rangle.$$

Unter Beachtung der letzten Fußnote und der Definition der Verteilungsfunktion

$$f(\vec{v}) d^3v = f(\vec{p}) d^3p = dn_H$$

und unter Verwendung der Entwicklung von  $f$  nach kartesischen Koordinaten erhält man:

$$(3.5) \quad n_H = 4\pi \int f_0(p, \vec{r}) p^2 dp$$

$$(3.6) \quad \vec{j} = e \cdot \frac{4\pi}{3} \int v \cdot \{f_1(p, \vec{r})\} \cdot p^2 dp$$

$$(3.7) \quad \overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}_s + \overleftrightarrow{P}_{as} = \frac{4\pi}{3 \cdot m_e} \int p^4 f_0 \cdot \underline{1} \cdot dp + \frac{8\pi}{15 \cdot m_e} \int p^4 \overleftrightarrow{f}_2 dp$$

Hierbei ist  $\underline{1}$  der kartesische Einheitstensor und  $f_0, \vec{f}_1, \overleftrightarrow{f}_2$  die zu der auf kartesische Koordinaten bezogene Reihenentwicklung (3.2) gehörenden Entwicklungskoeffizienten.

Die beiden Reihenentwicklungen sind ineinander transformierbar. Nach den Ausführungen von Johnston lassen sich die Entwicklungskoeffizienten der Reihen (3.2) und (3.4) dazu verwenden, die Momente (3.5), (3.6) und (3.7) zu bilden. Weiterhin weist er darauf hin, daß für jeden Index  $l$  gilt: der  $l$ -te Term der Reihe (3.2) läßt sich als Linearkombination der ersten  $l$  Terme der Reihe (3.4) schreiben und umgekehrt. Aus beiden Aussagen folgt, daß für die Bildung des  $l$ -ten Moments von beiden Reihen jeweils nur die ersten  $l$  Terme benötigt werden. Von keiner der beiden Reihen werden Terme, die auf die jeweils ersten  $l$  Terme folgen, für die Bildung des  $l$ -ten Moments benötigt. Wenn jedoch  $p = |\vec{p}|$  festgehalten wird, ist das Funktionensystem

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \left(\frac{P_x}{p}\right)^{l_1} &= (\sin\theta \cos\varphi)^{l_1}, & l_1 &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ \left(\frac{P_y}{p}\right)^{l_2} &= (\sin\theta \sin\varphi)^{l_2}, & l_2 &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ \left(\frac{P_z}{p}\right)^{l_3} &= (\cos\theta)^{l_3}, & l_3 &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ l &= l_1 + l_2 + l_3, \end{aligned}$$

das als Basis für die kartesische Reihenentwicklung (3.2) dient, nicht linear unabhängig: Zur Darstellung einer Funktion  $f$  auf einer Kugeloberfläche  $p = \text{const}$  werden nicht mehr alle Funktionen des Systems (3.8) benötigt. Formal zeigt sich dieser Sachverhalt in der für (3.8) geltenden Nebenbedingung:

$$(\sin\theta \cos\varphi)^2 + (\sin\theta \sin\varphi)^2 + \cos^2\theta = 1.$$

### 3.6 Berücksichtigung der Physik der suprathemischen Komponente bei der Reihenentwicklung von $f$

Das Ziel dieses Abschnittes ist die bereits in Abschnitt (3.3) angekündigte Bestimmung einiger Koeffizienten der Reihe (3.1) aus den in (3.4) aufgeführten Symmetrieeigenschaften. Hierbei sollen als Ansatz für (3.1) die formalen Entwicklungen Gl. (3.2) und Gl. (3.4) verwendet werden. Die Druckisotropie, die unter Punkt b in Abschnitt 3.4 aufgeführt ist, legt es nahe, die Koeffizienten zu denjenigen Termen der Entwicklungsreihen zu bestimmen, in die die Komponenten von  $\vec{p}$  quadratisch eingehen, da der Druck eine in  $\vec{p}$  quadratische Größe ist. Hierzu bietet sich Gl. (3.7) an. Mit ihr läßt sich aus einem vorgegebenen Drucktensor der Koeffiziententensor  $\{\overleftrightarrow{f}_2\}$  für die kartesische Reihenentwicklung Gl. (3.2) bestimmen, indem man den zu  $\{\overleftrightarrow{f}_2\}$  gehörenden Satz von Entwicklungstermen  $V_{(2)i,j}$  mit den o.a. Symmetrien vergleicht.

Der Vergleich wird dadurch erschwert, daß man hierfür nach dem oben Gesagten eine kartesische Reihenentwicklung von  $f$  zu benutzen hat, die angeführte Rotationssymmetrie um die toroidale Seele sich jedoch auf Drehungen im Impulsraum, also auf ein Polarkoordinatensystem  $(\theta, \varphi)$  mit festgehaltenem  $|\vec{p}| = p$  bezieht. Diese Schwierigkeit kann dadurch überwunden werden, daß die zur kartesischen Entwicklung gehörenden Terme  $V_{(2)i,j}$  durch solche ersetzt werden, die von den Winkelvariablen  $\theta, \varphi$  abhängig sind. Hierbei hat man jedoch zu beachten, daß ein Koeffizientenvergleich nur mit Reihen durchführbar ist, die nach linear unabhängigen Funktionensystemen entwickelt worden sind: es genügt nicht, für den Vergleich die kartesischen Koordinaten der Terme  $V_{(2)i,j}$  durch Polarkoordinaten, d.h., durch Gl. (3.8) zu substituieren, da das System (3.8) nach Abschnitt 3.5 für  $p = \text{const}$  kein linear unabhängiges System bildet. Für den Variablenwechsel hat man also die kartesischen Koeffizienten  $\{\overleftrightarrow{f}_2\}$  durch solche zu ersetzen, die man aus einer Entwicklung von  $f$  nach einem linear unabhängigen und von Polarkoordinaten abhängigen Funktionensystem erhält.



Das System  $V_{\ell ms}$  der Kugelfunktionen, Gl. (3.4), hat beide für das benötigte Funktionensystem geforderte Eigenschaften. Drückt man die Koeffizienten der kartesischen Entwicklung durch die der Entwicklung nach Kugelfunktionen aus, erhält man schließlich nach /22/, Gl. 9, für  $\{\vec{f}_2\}$  in Matrixschreibweise mit  $f_{2m\ell}$ ;  $m, \ell = 0, 1, 2$ , als Koeffizienten der Reihe 3.4:

$$\{\vec{f}_2\} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} f_{200} + 3 f_{220} & 3 f_{221} & \frac{3}{2} f_{210} \\ 3 f_{221} & -\frac{1}{2} f_{200} - 3 f_{220} & \frac{3}{2} f_{211} \\ \frac{3}{2} f_{210} & \frac{3}{2} f_{211} & f_{200} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Wenn man also  $f_{2ms}$  für die Entwicklungsfunktionen  $Y_{2ms}$  aus einem Vergleich von  $Y_{2ms}$  mit den o.a. Symmetrien der suprathemischen Komponente bestimmt hat, läßt sich mit Hilfe von Gl. (3.9) der kartesische Koeffiziententensor  $\{\vec{f}_2\}$  berechnen. Mit Hilfe von Gl. (3.7) erhält man daraufhin aus  $\{\vec{f}_2\}$  den Drucktensor.

Der Vergleich mit den oben aufgeführten Symmetrien ergibt, daß der kartesische Koeffiziententensor  $\{\vec{f}_2\}$  identisch verschwindet. Wegen der Rotationssymmetrie verschwinden in  $\{\vec{f}_2\}$  alle Nebendiagonalelemente und auch  $f_{220}$  wird zu Null. Somit ist nur  $f_{200} \neq 0$ . Die Druckisotropie, d.h., die Identität  $P_{xx} = P_{yy} = P_{zz}$ , erzwingt dann, daß in  $\{\vec{f}_2\}$  auch die Diagonalelemente verschwinden. Es bleibt also nur der isotrope Druckanteil  $\vec{P}_s \neq 0$ , dieser läßt sich nach Gl. (3.7) aus  $f_0$  allein berechnen.

Auf ähnliche Weise zeigt man, daß von dem Koeffiziententensor  $\vec{f}_1$  nur der zu der Entwicklungsfunktion  $\cos\theta$  gehörende Koeffizient  $f_1$  nicht verschwindet. Aus dieser Aussage folgt, daß nur die toroidale Komponente  $j_{\parallel}$  von der Stromdichte  $\vec{j}$  einen nicht verschwindenden Wert besitzt. Siehe Gl. (4.5).

### 3.7 Diskussion der Reihenentwicklung von $f$ nach $\vec{p}/p$

Nach (3.3) stehen nicht genug Informationen zur Verfügung, um Terme mit  $\ell > 2$  zu bestimmen, und man ist deswegen auf die in (3.3) ausgedrückte Hoffnung, daß  $\{\vec{f}_\ell\} \equiv 0$  ist für  $\ell > 2$ , wenn  $\{\vec{f}_2\} = 0$  ist, angewiesen. In diesem Fall hat man als Ansatz:

$$(3.10) f(\vec{p}, \vec{r}) = f_0(p, \vec{r}) + f_1(p, \vec{r}) \cdot \cos\theta;$$

d.h., die Anzahl der unbekanntenen energieabhängigen Parameter der  $\vec{p}/p$ -Abhängigkeit von  $f$  auf 2 reduziert; diese lassen sich für  $T > 10$  keV eindeutig aus den Messungen bestimmen, und zwar nach den Bemerkungen am Ende des vorletzten Abschnitts für jede der aufgeführten Reihenentwicklungen. Da die Reihen nach dem 2. Term abgebrochen werden, sind in diesem Fall die beiden Reihenentwicklungen sogar miteinander identisch.

Der ungünstige Fall liegt vor, wenn eine der beiden Reihenentwicklungen aus irgendwelchen Gründen schlecht konvergiert und damit  $\{f_\ell\} \neq 0$  für mindestens ein  $\ell > 2$  ist. Dann ist es, da  $\{f_\ell\}$  wegen mangelnder physikalischer Information unbestimmbar ist, für keine der beiden Reihen mehr möglich,  $f_0$  und  $f_1$  eindeutig aus den Messungen der tangentialen und radialen Diagnostik zu bestimmen /23/. Der ganze Reihenansatz ist dann also wertlos, d.h., man kann aus den zur Verfügung stehenden Messungen mit Hilfe der beschriebenen Methode keine eindeutigen Aussagen über  $f_0$  und  $f_1$  und damit auch nicht über  $n_H$ ,  $j$  und  $T$  machen. Dennoch sind in diesem Fall die sich ergebenden Fehlerspannen von  $n_H, j$ , nicht unendlich groß (siehe Schlußabschnitt (7.7)).

Ob die Vernachlässigung der höheren Entwicklungsterme zulässig ist, läßt sich wohl nur im Nachhinein prüfen, wie z.B. in der Diskussion in (7.5...7.7). Es gibt etwa die Möglichkeit, festzustellen, ob  $|f_1| \leq |f_0|$  ist. Wenn  $|f_1| > |f_0|$  ist, so kann nach Gl. (3.10)  $f < 0$  werden, was natürlich unphysikalisch ist. Man kann auch überprüfen, ob die Berechnung von  $\overleftrightarrow{P}_s$  mit Hilfe von  $f_0$  aus Gl. (3.7) physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefert. In diesem Zusammenhang erhebt sich auch die kritische Frage, ob die Diagnostiken für  $P$  und  $P_{||}$  wirklich die als Eingangsgröße für Gl. (3.7) verlangte Summe aus kinetischem und konvektivem Anteil der Drucke liefern oder nur die kinetischen Anteile. Im günstigen Fall, der für die weiteren Ausführungen angenommen werden soll, also für  $\{f_\ell\} \equiv 0$  für  $\ell \geq 2$ , wird die Anisotropie der suprathemischen Elektronenkomponente allein durch  $f_1(p)$ , dem Entwicklungskoeffizienten des 1. Terms beider Reihenentwicklungen, bestimmt. Weiterhin ist dann der um  $\theta = 90^\circ$  symmetrische Anteil von  $f$  mit  $f_0(|\vec{p}|)$  identisch. Dies läßt sich experimentell überprüfen, indem man die Richtcharakteristik der Bremsstrahlung unter zwei zu  $\theta = 90^\circ$  symmetrische Beobachtungsrichtungen und unter der Richtung für  $\theta = 90^\circ$  mißt. Im Falle, daß die letzte Aussage zutrifft, ist die für  $\theta = 90^\circ$  gemessene Intensität das arithmetische Mittel der der beiden anderen Richtungen. Siehe die folgenden Abschnitte.

### 3.8 Aufstellung der Faltungsgleichungen für die radiale und tangentielle Meßrichtung

Setzt man den Ansatz (3.10) in Gl. (2.4) ein, so erhält man gemäß der Anzahl der zur Verfügung stehenden Meßrichtungen ein System aus zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten  $f_0(p)$  und  $f_1(p)$ . Hierbei hat man einige technische Details zu beachten, die im folgenden aufgeführt sind.

- a) Nach den bereits in Kap. 2 erläuterten Eigenschaften der Röntgenbremsstrahlung hängt diese nur von dem Winkel  $\delta$  zwischen Elektronenimpuls  $\vec{p}$  und der Abstrahlungsrichtung  $\vec{k}$  ab.  $\vec{k}$  wird in einem Polarkoordinatensystem mit dem Polarwinkel  $\alpha_1$  und dem Azimuthwinkel  $\alpha_0$  beschrieben. Dessen Polarachse wird mit der Polarachse des Systems für die Elektronenimpulse identifiziert, um die Auswertung der Gleichungen für  $f_0$  und  $f_1$  zu vereinfachen. Die späteren Ergebnisse rechtfertigen dies.
- b)  $\cos\delta$  läßt sich mit Hilfe des Cosinussatzes leicht als Funktion der Polarwinkel  $\alpha_1, \theta$  und der Azimuthwinkel  $\alpha_0, \psi$  (Abb. (5)) ausdrücken:

$$p \cdot k \cdot \cos\delta = \vec{p} \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} p \cdot \sin\theta \cos\psi \\ p \cdot \sin\theta \sin\psi \\ p \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \sin\alpha_1 \cos\alpha_0 \\ k \sin\alpha_1 \sin\alpha_0 \\ k \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$= p \cdot k \cdot [\cos(\psi - \alpha_0) \cdot \sin\theta \sin\alpha_1 + \cos\theta \cos\alpha_1],$$

also:

$$(3.11) \cos\delta = \cos(\psi - \alpha_0) \sin\theta \sin\alpha_1 + \cos\theta \cos\alpha_1$$

- c) Die folgenden Rechnungen zeigen, daß der Azimuthwinkel  $\alpha_0$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf  $0^\circ$ , d.h., horizontale Beobachtungsrichtung nach außen, festgelegt werden kann. Diese Festlegung gilt für alle Abstrahlungswinkel  $\alpha_1$ , da, wie bereits gesagt, die suprathermische Komponente im Impulsraum rotationssymmetrisch bezüglich der Richtung parallel zur toroidalen Seele ist.
- d) Nach obigen Ausführungen (Kap. 3.3) kommen als polare Abstrahlungswinkel nur  $\alpha_1 = 90^\circ$  und  $\alpha_1 \approx 0^\circ$  bzw.  $\approx 180^\circ$  in Frage. Vom experimentellen Aufbau



her, Abb. (6), kann man davon ausgehen, daß sich im Mittel die Elektronen in die Richtung entgegengesetzt zur Beobachtungsrichtung  $\vec{k}$  bewegen, also als polarer Abstrahlungswinkel in tangentialer Richtung nur  $\alpha_1 \approx 180^\circ$  in Frage kommt.

Für die radiale Abstrahlungsrichtung  $\alpha_1 = 90^\circ$  hat man also:

$$(3.11a) \quad \cos \delta_0 = \cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta,$$

und für die tangentiale Abstrahlungsrichtung:

$$(3.11b) \quad \cos \delta_1 = -\cos \theta, \text{ wenn } \alpha_1 \text{ exakt gleich } 180^\circ \text{ ist.}$$

- e)  $f$  wie  $I$  sind neben von den bislang benutzten Variablen  $p, \theta, \varphi, K, \alpha_0, \alpha_1$  auch vom Ort  $\vec{r}$  abhängig. Die explizite Berücksichtigung der Ortsabhängigkeit wird aber erst in Kap. 5 für die Berechnung der Ortsabhängigkeit von  $I$  und  $f$  erforderlich.

### 3.8.1 Radiale Abstrahlungsrichtung, Gleichung für den isotropen Anteil $f_0(p)$

Durch Beachten dieser Punkte und durch Einsetzen von (3.10) in (2.4) erhält man mit

$$d^3 p = p^2 dp \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$$

für  $\alpha_1 = 90^\circ$ , also für die radiale Abstrahlungsrichtung:

$$(3.12) \quad \frac{I(K, \alpha_0, \alpha_1 = 90^\circ)}{K} = n_a \int dp \cdot |\vec{v}| \cdot p^2 \cdot \frac{d^2 \sigma}{dK d\Omega} (K, p, \cos \delta_0 = \cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta) \cdot (f_0(p) + \cos \theta \cdot f_1(p)) \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0^\circ}^{360^\circ} \int_{\theta=0^\circ}^{180^\circ} n_a \cdot \int dp \cdot |\vec{v}| \cdot p^2 \cdot \frac{d^2 \sigma}{dK \cdot d\Omega} (K, p, \cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta) \cdot f_0(p) \cdot \sin \theta d\theta d\varphi,$$

da  $\frac{d^2 \sigma}{dK d\Omega} (\cos \delta = \cos(\varphi - \alpha_0) \cdot \sin \theta)$  eine um  $\theta = 90^\circ$  in  $\theta$  symmetrische Funktion, der von  $\theta$  abhängige Beifaktor von  $f_1(p)$ ,  $\sin \theta \cdot \cos \theta$ , jedoch eine um  $\theta = 90^\circ$  antisymmetrische Funktion in  $\theta$  ist, mithin das Integral über  $f_1(p)$  verschwindet. Die rechte Seite ist also gleich

$$\begin{aligned}
 \frac{I(K, \alpha_0, \alpha_1 = 90^\circ)}{K} &= n_a \int dp f_0(p) \cdot p^2 \cdot |\vec{v}| \cdot \int_{\varphi} \int_{\theta} \frac{d^2\sigma}{dK d\Omega}(K, p, \cos \delta_0) \cdot \sin\theta d\theta d\varphi \\
 (3.13) \quad &= n_a \int f_0(p) \cdot |\vec{v}| \cdot \frac{d^2\sigma}{dK d\Omega}(K, p, \cos \delta_0) \cdot d^3p \\
 &= n_a \cdot \int dp \cdot f_0(p) \cdot p^2 \cdot |\vec{v}| \cdot \sigma_{\text{eff},0}(K, p) \\
 &= I_0(K)/K
 \end{aligned}$$

und unabhängig von dem Azimutwinkel  $\alpha_0$ , da in die rechte Seite von (3.12) und (3.13) nur der Differenzwinkel  $\varphi - \alpha_0$  eingeht und über  $\varphi$  von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$  integriert wird.

Die in Gl. (3.13) auftauchende Größe  $\sigma_{\text{eff}}$ , den "effektive Wirkungsquerschnitt", erhält man als Mittel von  $4\pi \cdot d^2\sigma/dK d\Omega$  über die Impulsrichtungsverteilung der Elektronen.

Gl. (3.13) zeigt beispielhaft, daß die Anzahl der Variablen in der Faltungsgleichung (2.4) reduziert werden kann, wenn man von Ansätzen (z.B. Gl. (3.10)) für die Impulsrichtungsverteilung der Elektronen ausgeht. In der reduzierten Gleichung taucht nur noch eine einzige Integrationsvariable, nämlich der Impulsbetrag  $|p|$ , auf. Der Zusammenhang zwischen Impulsrichtungsverteilung und der Richtcharakteristik der von der Elektronenkomponente erzeugten Bremsstrahlung wird durch die effektiven Wirkungsquerschnitte  $\sigma_{\text{eff}}$  repräsentiert.  $\sigma_{\text{eff}}$  beschreibt also außer den elementaren Stoßvorgängen auch physikalische Eigenschaften, die die suprathermische Elektronenkomponente als Vielteilchensystem besitzt.

Zu der Herleitung von (3.13) seien noch 2 Bemerkungen angefügt:

- a) Für den vorliegenden Fall einer isotropen Verteilungsfunktion  $f_0(p)$  ist  $\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\text{eff},0}$  mit dem totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{tot}}$  (Abb. 3) identisch. Der Grund hierfür liegt darin, daß  $d^2\sigma/dKd\Omega$  neben  $K, p$  nur von dem vom Photonen- und Elektronenimpuls eingeschlossenen Winkel  $\delta$  (Gl. 3.11) abhängt und deswegen

$$\int_{\varphi=0^{\circ}}^{360^{\circ}} \int_{\theta=0^{\circ}}^{180^{\circ}} \left( \frac{d^2\sigma}{dK d\Omega} \right) (K, p, \cos(\varphi - \alpha_0) \sin\theta \sin \alpha_1 + \cos\theta \cos \alpha_1) \cdot \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_{\alpha_0=0^{\circ}}^{360^{\circ}} \int_{\alpha_1=0^{\circ}}^{180^{\circ}} \frac{d^2\sigma}{dK d\Omega} (K, p, \cos(\alpha_0 - \varphi) \sin \alpha_1 \sin\theta + \cos \alpha_1 \cos \theta) \cdot \sin \alpha_1 d\alpha_1 d\alpha_0.$$

gilt. Das bedeutet: es ist egal, über welches Variablenpaar  $(\theta, \varphi)$  oder  $(\alpha_1, \alpha_0)$  diese Integration ausgeführt wird. Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt aber mit der Definition für den totalen Wirkungsquerschnitt  $\frac{d\sigma}{dK}(K, p) = \sigma_{\text{tot}}(K, p)$  überein.

- b) Es kann auch formal mit Hilfe von Drehmatrizen und durch Anwenden der Substitutionsregel für Mehrfachintegrale gezeigt werden, daß  $\sigma_{\text{eff}, 0}$  unabhängig von der Richtung von  $\vec{k}$  bzw.  $\sigma_{\text{tot}}$  unabhängig von der von  $\vec{p}$  ist.

Mit  $\sigma_{\text{eff}, 0} = \sigma_{\text{tot}}$  führt also der Ansatz (3.10) für  $f(\vec{p})$  zu einer vereinfachten Auswertung und Interpretation der Bremsstrahlungsspektren, die senkrecht zur Polarachse, d.i., zur toroidalen Seele emittiert werden: Aus ihnen läßt sich, wenn man auf sie die später zu besprechende Entfaltung nach der Elektronenenergie durchführt, unmittelbar die isotrope Komponente der Verteilungsfunktion,  $f_0(|\vec{p}|)$ , und damit die Dichte  $n_H = n_{H,0}$ , die Durchschnittsenergie  $\bar{T} = \bar{T}_0$  und der Druck  $P_s$  bestimmen. Wegen der Antisymmetrie der anisotropen Komponente  $\cos\theta \cdot f_1(|\vec{p}|)$  in Bezug zu der durch  $\theta = 90^{\circ}$  definierten Ebene verschwinden sowohl die zu  $f_1$  gehörende Durchschnittsenergie  $T_1$  als auch die zu  $f_1$  gehörende Dichte  $n_{H,1}$ . Berücksichtigt man in der Entwicklung von  $f(\vec{p})$  noch höhere Terme  $f_2, f_3$ , usw., so wäre  $I(K, \alpha_0, \alpha_1 = 90^{\circ})$  i.a. nicht mehr notwendig rotationssymmetrisch zu einer zur toroidalen Seele parallelen Richtung. Damit wäre auch i.a.  $\sigma_{\text{eff}, 0} \neq \sigma_{\text{tot}}$ .

### 3.8.2 Tangentiale Abstrahlungsrichtung, Gleichung für den anisotropen Anteil

$$\underline{f_1(p) \cdot \cos\theta}$$

Für die zur toroidalen Seele (Torusseele) tangentielle Abstrahlungsrichtung, also für  $\alpha_1 = 180^{\circ}$ , erhält man für die Intensität  $I = I_1(K, \alpha_0, \alpha_1)$ :



$$(3.14) \quad \frac{I_1(K, \alpha_0, \alpha_1)}{K} =$$

$$\int_{\theta=0^{\circ}}^{180^{\circ}} \int_{\varphi=0^{\circ}}^{360^{\circ}} dp \cdot |\vec{v}| \cdot p^2 \cdot n_a \cdot \frac{d^2\sigma}{dK d\Omega}(K, p, \cos\delta) \cdot f_0(p) \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$+ \int_{\theta=0^{\circ}}^{180^{\circ}} \int_{\varphi=0^{\circ}}^{360^{\circ}} dp \cdot |\vec{v}| \cdot p^2 \cdot n_a \cdot \frac{d^2\sigma}{dK d\Omega}(K, p, \cos\delta) \cdot f_1(p) \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= (I_0(K) + I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_0, \alpha_1))/K,$$

wobei  $\cos\delta$  durch Gl. (3.11) gegeben ist.

Aus bereits für den Fall  $\alpha_1 = 90^{\circ}$  erläuterten Gründen ist der erste Term auf der rechten Seite von (3.14),  $I_0(K)$ , identisch mit dem ersten Term der Gleichung (3.12), ist also bereits aus der Auswertung der radialen Messung bekannt. Der noch unbekannte, zu  $I_1(K, \alpha_0, \alpha_1)$  gehörende Anteil  $f_1(p)$ , läßt sich somit aus einer Gleichung bestimmen, die man durch Umstellen der Terme in Gl. (3.14) erhalten kann; also:

$$(3.14a) \quad I_1(K, \alpha_0, \alpha_1) - I_0(K) = I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_1) = n_a \cdot K \cdot \int dp \cdot p^2 \cdot |\vec{v}| \cdot f_1(p) \cdot \sigma_{\text{eff},1}(K, p, \alpha_1)$$

mit

$$(3.15) \quad \sigma_{\text{eff},1} = \int_{\varphi=0^{\circ}}^{360^{\circ}} \int_{\theta=0^{\circ}}^{180^{\circ}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \cos\theta \cdot \frac{d^2\sigma(K, p, \cos\delta)}{dK \cdot d\Omega}$$

$\sigma_{\text{eff},1}$  und damit  $I_{\text{DIFF}}$  ist aus bereits in Abschnitt 3.4.1 als Erläuterung zur Gl. (3.13) gegebenen Gründen unabhängig von  $\alpha_0$ . In Gl. (3.14a)

beschreibt  $\sigma_{\text{eff},1}$ , im Gegensatz zu  $\sigma_{\text{eff},0}$  für  $I_0(K)$ , den Einfluß der Anisotropie von  $f(p)$  auf die Richtcharakteristik der von den suprathemischen Elektronen emittierten Bremsstrahlung.  $\sigma_{\text{eff},1}$  erlaubt es also, von einer gemessenen Strahlungsanisotropie  $I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_1)$  zu Aussagen über die anisotrope Komponente  $f_1 \cdot \cos\theta$  zu gelangen.

Eine Untersuchung der Gl. (3.15) zeigt aber, daß sich die Anisotropie von  $f(\vec{p})$  nur dann in einer von  $I_{\text{DIFF}}$  widerspiegeln kann, wenn die in sie eingehenden differentiellen Wirkungsquerschnitte eine Asymmetrie um  $\theta = 90^\circ$  aufweisen. Wie aber aus Kap. 2 bereits bekannt ist, ist dieses nur für relativistische Elektronenenergien der Fall, und nur dann ist auch der Integrand von (3.15) eine um  $\theta = 90^\circ$  asymmetrische Funktion. Das bedeutet, daß für relativistische Energien

$$\sigma_{\text{eff},1} \neq 0 \text{ für } \alpha_1 \neq 90^\circ$$

und

$$\sigma_{\text{eff},1} = 0 \text{ für } \alpha_1 = 90^\circ \text{ ist,}$$

wie bereits aus den Anmerkungen zu Gl. (3.12) für den radialen Fall hervorgeht, d.h., die Richtcharakteristik anisotrop ist. Im nichtrelativistischen Fall hingegen verschwindet  $\sigma_{\text{eff},1}$  und damit  $I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_1)$  identisch in  $\alpha_1$ . Die Anwendungsmöglichkeiten von Gl. (3.14a) zur Bestimmung von  $f_1(p)$  sind deshalb, wie schon in Kap. 2 dargelegt wurde, auf den relativistischen Energiebereich beschränkt. Gemäß diesen Bedingungen ist  $\sigma_{\text{eff},1} \neq 0$  in dem durch  $K \leq T$  gegebenen Teil des Integrationsgebietes von Gl. (3.14a). Im relativistischen Energiebereich und für  $\alpha_1 \neq 90^\circ$  ist deshalb Gl. (3.14a) mit den im folgenden Kapitel erläuterten Methoden eindeutig lösbar. Dasselbe gilt, sogar ohne Einschränkungen, für Gl. (3.12). Damit ist gezeigt, daß der Ansatz Gl. (3.10) eine eindeutige Bestimmung der Verteilung der suprathemischen Elektronen zuläßt.

Unabhängig von den in  $\frac{d^2\sigma(K, p, \cos\delta)}{dK \cdot d\Omega}$  eingehenden Parametern ist der durch Gl. (3.15) definierte Ausdruck für  $\sigma_{\text{eff},1}$  eine in  $\alpha_1$  um  $\alpha_1 = 90^\circ$  antisymmetrische Funktion. Dies kann man durch Anwenden der Substitutionsregel für bestimmte Integrale zeigen. Mit  $\alpha'_1 = 180^\circ - \alpha_1$  wird mit Gl. (3.11) aus Gl. (3.15):

$$(3.15a) \quad \sigma_{\text{eff},1}(K, p, \alpha'_1 = 180^\circ - \alpha_1) =$$

$$\int_{\varphi=0^\circ}^{360^\circ} \int_{\theta=0^\circ}^{180^\circ} \sin\theta \cos\theta \frac{d^2\sigma[K, p, \cos(\varphi - \alpha_0) \sin\theta \sin \alpha_1 + \cos\theta \cdot (-\cos\alpha_1)]}{dK \cdot d\Omega} \cdot d\theta \, d\varphi.$$

Durch die Substitution

$$\theta' = 180^\circ - \theta$$

wird aus Gl. (3.15 a):

$$\begin{aligned}
 (3.15b) \quad \sigma_{\text{eff},1}(K,p,180^\circ - \alpha_1) &= \\
 &= \int_{\varphi=0^\circ}^{360^\circ} \int_{\theta'=180^\circ}^{0^\circ} \sin\theta' (-\cos\theta') \cdot \frac{d^2\sigma[K,p,\cos(\varphi-\alpha_0)\sin\theta' \sin\alpha_1 + (-\cos\theta')(-\cos\alpha_1)]}{dK d\Omega} (-d\theta) \cdot d\varphi \\
 &= - \int_{\varphi=0^\circ}^{360^\circ} \int_{\theta'=0^\circ}^{180^\circ} \sin\theta' \cos\theta' \cdot \frac{d^2\sigma[K,p,\cos(\varphi-\alpha_0)\sin\theta' \sin\alpha_1 + \cos\theta' \cos\alpha_1]}{dK d\Omega} d\theta d\varphi \\
 &= -\sigma_{\text{eff},1}(K,p,\alpha_1).
 \end{aligned}$$

Aus  $f_1(p)$  läßt sich der von den suprathemischen Elektronen getragene Anteil des Plasmastroms und, wenn eine Entabelung durchgeführt werden kann, auch ihr Stromdichteprofil bestimmen (s. Kap. 5). Das hier vorgestellte Konzept des effektiven Wirkungsquerschnittes wurde bereits in einer früheren Arbeit dazu verwendet, die Anisotropie einer in einem magnetischen Spiegelfeld eingeschlossenen relativistischen Elektronenkomponente zu bestimmen /24/.

### 3.8.3 Bestimmung von $f_0$ und $f_1$ aus zwei zu $\alpha_1 = 90^\circ$ symmetrisch angeordneten Meßrichtungen

Die Verteilungsfunktionen  $f_0$  und  $f_1$  lassen sich auch aus zwei zur Torusseele tangentialen Meßrichtungen, die zueinander entgegengesetzt orientiert sind, d.h., für  $\alpha_1 \approx 0^\circ$  und  $\alpha'_1 = 180^\circ - \alpha_1$ , bestimmen. Dies wird durch die im letzten Abschnitt behandelte Antisymmetrie der von der anisotropen Komponente emittierten Intensität  $I_{\text{DIFF}}$  in  $\theta$  ermöglicht. Unter Ausnutzung dieser Eigenschaft erhält man für die zwei Beobachtungsrichtungen  $\alpha_1$  und  $\alpha'_1$  für  $I$  die Gleichungen:

$$(3.14a) \quad I(K, \alpha_0, \alpha_1) = I_0(K) + I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_0, \alpha_1),$$

und

$$(3.14b) \quad I(K, \alpha_0, \alpha'_1) = I_0(K) - I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_0, \alpha_1).$$

Bei diesen beiden Gleichungen handelt es sich um ein System von zwei Bestimmungsgleichungen für die beiden Unbekannten  $I_0$  und  $I_{\text{DIFF}}$ . Hieraus erhält



man die von der isotropen Komponente emittierte Bremsstrahlung als Summe und die von der anisotropen Komponente emittierte Bremsstrahlung als Differenz der gemessenen Spektren:

$$(3.14c) \quad 2 \cdot I_0 = I(K, \alpha_0, \alpha_1) + I(K, \alpha_0, \alpha_1'),$$

$$2 \cdot I_{DIFF} = I(K, \alpha_0, \alpha_1) - I(K, \alpha_0, \alpha_1'),$$

Wie aus Gl. (3.12) und Gl. (3.14) lassen sich auch aus Gl. (3.14a,b)  $I_0$  und  $I_{DIFF}$  eindeutig bestimmen, allerdings mit dem Vorteil einer um den Faktor 2 höheren Genauigkeit. Für zukünftige Messungen von  $I_0$  und  $I_{DIFF}$  empfiehlt sich daher eine entsprechende Abänderung der Meßanordnung für die Bremsstrahlung.

### 3.9 Bremsstrahlungsemission beliebiger Impulsrichtungsverteilungen

Auch über die Energie- und Emissionsrichtcharakteristik der Bremsstrahlung, die von beliebig verteilten Elektronen emittiert wird, lassen sich auf einfachem Wege Aussagen machen. Wie im folgenden gezeigt wird, sind diese denjenigen ähnlich, die in den bisherigen Ausführungen für nach Gl. (3.10) verteilte Elektronen erhalten worden sind; sie lassen sich aus einer Verallgemeinerung des Ansatzes Gl. (3.10) für  $f$  gewinnen.

Zur Berechnung der Bremsstrahlung wird also im folgenden von einer beliebig von  $\theta$  abhängigen Impulsrichtungsverteilung ausgegangen. Es wird jedoch zunächst noch, um die Rechnung zu vereinfachen, angenommen, daß  $f(\vec{p})$  rotationssymmetrisch um eine zur Torusseule parallele Richtung, also unabhängig von  $\varphi$  ist. Die Ortsabhängigkeit wird, wie bisher, nicht explizit aufgeführt. Als Verteilungsfunktion der suprathemischen Elektronen wird also angesetzt:

$$(3.16) \quad f(\vec{p}) = f(|\vec{p}|, \theta).$$

$f(p, \theta)$  kann man durch eine Verallgemeinerung von Gl. (10):

$$(3.17) \quad f_{\pm}(p, \theta) = \frac{1}{2} [f(p, \theta) \pm f(p, 180^\circ - \theta)].$$

in  $f_{+}$ , ihren um  $\theta = 90^\circ$  symmetrischen, und in  $f_{-}$ , ihren um denselben Winkel antisymmetrischen Anteil zerlegen:

$$(3.18) \quad f_{+}(p, \theta) + f_{-}(p, \theta) = f(p, \theta).$$

In dem Fall, daß wie bisher  $f = f_0(p) + \cos \theta \cdot f_1(p)$  angesetzt wird, ist  $f_+ = f_0$  und  $f_- = \cos \theta \cdot f_1$ . Für eine in beliebiger Weise von  $\theta$  abhängige, also nach Gl. (3.16) gebildete Verteilung ist aber in der Regel  $f_+ \neq f_0$ ,  $f_- \neq f_1 \cdot \cos \theta$ , und  $f_+$  im Unterschied zu  $f_0$  nicht notwendig bezüglich  $\theta$  isotrop. Für die Momentenbildung aus  $f_{\pm}$  gilt aber wie für die aus  $f_0$ ,  $f_1 \cdot \cos \theta$ , daß zu  $n_{H, \vec{p}}$  nur  $f_+$  und zu  $j_{||}$  nur  $f_-$  einen Beitrag liefert (Gl. 4.5, Abschnitt 3.5).

Im folgenden sollen Aussagen über die Symmetrieeigenschaften der von den durch Gl. (3.17) ausgedrückten Komponenten der suprathemischen Elektronen gemacht werden. Hierzu wird definiert:  $I_+$  ist die von den symmetrisch um  $\theta = 90^\circ$  verteilten, durch Gl. (3.17a) beschriebenen Elektronen und  $I_-$  die durch Gl. (3.17b) beschriebenen, um denselben Winkel antisymmetrisch verteilten Elektronen erzeugte Bremsstrahlung. Die Symmetrieeigenschaften von  $I_+$  und  $I_-$  lassen sich aus der Identität

$$\begin{aligned} & \int_{\theta=0^\circ}^{180^\circ} f(p, 180^\circ - \theta) \frac{d^2 \sigma}{dK d\Omega} (\cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta \sin \alpha_1 + \cos \theta \cos \alpha_1) \sin \theta d\theta \\ &= \int_{\theta'=180^\circ}^{0^\circ} f(p, \theta') \frac{d^2 \sigma}{dK d\Omega} (\cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta' \sin(180^\circ - \alpha_1) + (-1)^2 \cdot \cos \theta' \cos(180^\circ - \alpha_1)) \sin \theta' (-d\theta) \\ &= \int_{\theta'=0^\circ}^{180^\circ} f(p, \theta') \frac{d^2 \sigma}{dK d\Omega} (\cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta' \sin(180^\circ - \alpha_1) + \cos \theta' \cos(180^\circ - \alpha_1)) \sin \theta' d\theta' \end{aligned}$$

bestimmen, die man ihrerseits mit Hilfe der Substitution  $\theta' = 180^\circ - \theta$  herleiten kann. Hieraus und aus Gl. (3.17) folgt:

$$I_{\pm}(K, \alpha_1) = 2\pi \iint f_{\pm}(p, \theta) \cdot v \cdot \frac{d^2 \sigma}{dK d\Omega} (\cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta \sin \alpha_1 + \cos \theta \cos \alpha_1) \sin \theta dp^2 dp$$

(Gl. (3.19))

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{2} \iint f(p, \theta) \cdot v \cdot \frac{d^2 \sigma}{dK d\Omega} (\cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta \sin \alpha_1 + \cos \theta \cos \alpha_1) \sin \theta d\theta p^2 dp \\ &\pm \frac{2\pi}{2} \iint f(p, \theta) \cdot v \cdot \frac{d^2 \sigma}{dK d\Omega} (\cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta \sin(180^\circ - \alpha_1) + \cos \theta \cos(180^\circ - \alpha_1)) \sin \theta d\theta \cdot p^2 \cdot dp \\ &= 2\pi \iint_{\theta=0^\circ}^{90^\circ} v |f_{\pm}(\theta)| \cdot \left\{ \frac{d^2 \sigma}{dK d\Omega} (\cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta \sin \alpha_1 + \cos \theta \cos \alpha_1) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{d^2 \sigma}{dK d\Omega} (\cos(\varphi - \alpha_0) \sin \theta \sin(180^\circ - \alpha_1) + \cos \theta \cos(180^\circ - \alpha_1)) \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \sin \theta d\theta \cdot p^2 dp \\ &= \frac{1}{2} [I(K, \alpha_1) \pm I(K, 180^\circ - \alpha_1)]. \end{aligned}$$

Man erkennt hieraus, daß  $I_+$  eine um  $\alpha_1 = 90^\circ$  symmetrische und  $I_-$  eine um  $\alpha_1 = 90^\circ$  antisymmetrische Funktion ist. Gl. (3.17a) entspricht Gl. (3.15a) und Gl. (3.17b) der Gl. (3.15b),  $I_+$  ist aber im Gegensatz zu  $I_0$  in der Regel von  $\alpha_1$  abhängig. Da somit in der Regel  $I_+(\alpha_1 = 90^\circ) \neq I_+(\alpha_1 = 0^\circ)$  ist, lassen sich nicht, wie im Fall  $f_+ = f_0$ ,  $f_- = f_1 \cdot \cos\theta$ , die Größen  $I_+$  und  $I_-$  getrennt aus Messungen von  $I(\alpha_1 = 0^\circ)$  und  $I(\alpha_1 = 90^\circ)$  bestimmen. Hierzu sind also nur zwei Meßrichtungen  $\alpha_1, \alpha_1'$  geeignet, die symmetrisch zur Ebene  $\alpha_1 = 90^\circ$  liegen, für die also  $\alpha_1' = 180^\circ - \alpha_1$  gilt. Umgekehrt lassen diese aber auch die Anwendung des Ansatzes Gl. (3.10) zu, geben also bei der Wahl der Auswertemethode eine größere Freiheit als das Richtungspaar  $\alpha_1 = 90^\circ, \alpha_1' \approx 180^\circ$ . Hieraus folgt auch, daß sich die Ergebnisse für  $f_0, f_1$ , wenn sie aus Gl. (3.15a) ermittelt worden sind, bei der Interpretation der allgemeineren Lösungen  $f_\pm$  in konsistenter Weise verwenden lassen (siehe Schlußabschnitt 7.7). - Mit Gl. (3.19) kann man aus den Symmetrieeigenschaften von  $f$  die von  $I$  eindeutig bestimmen. Aus den in Abschnitt 3.3 erläuterten Gründen ist dies jedoch für die umgekehrte Richtung nicht immer möglich. Hieraus können sich einige Schwierigkeiten bei der praktischen Anwendung von Gl. (3.19) ergeben.

Da  $f(p, \theta) \geq 0$  sein muß, ergeben sich aus Gl. (3.18) für alle  $\theta$  die Bedingungen:

$$(3.20) \quad |f_-(p, \theta)| \leq |f_+(p, \theta)| \quad \text{ sowie } \quad f_+(p, \theta) \geq 0.$$

Gl. (3.20) besitzt im Gegensatz zu der aus dem Ansatz Gl. (3.10) folgenden Bedingung

$$(3.20a) \quad |f_1| \leq |f_0|$$

Gültigkeit unabhängig von der Wahl des Ansatzes für die Impulsrichtungsverteilung. Gl. (3.20) ist deswegen ein aussagekräftigeres Testmittel als Gl. (3.20a): Im Unterschied zu Gl. (3.20a) bildet Gl. (3.20) ein Kriterium auch dafür, ob die von der Wahl des Ansatzes für die Impulsrichtungsverteilung unabhängig verlaufenden Bestimmungsschritte für  $f$  korrekt arbeiten.

Die in diesem Abschnitt erhaltenen Ergebnisse lassen sich auf den Fall, daß  $f$  auch von dem Winkel  $\varphi$  in beliebiger Weise abhängig ist, ohne Einschränkungen verallgemeinern. Auf die Herleitung der entsprechenden Beziehungen wird aber verzichtet, da nach Abschnitt (3.4) die Rotationssymmetrie der suprathemischen Komponente im Impulsraum um eine zur Torusseele parallele Richtung für alle denkbaren Torusanordnungen erfüllbar ist.

4. Numerische Methodik zur Bestimmung der Impulsbetragsverteilung der suprathemischen Elektronenkomponente

4.1 Festlegung der Integrationsgrenzen und Wahl der Integrationsvariablen und des Integralkerns für Gl. (3.13), (3.14a)

Nach der im letzten Kapitel erfolgten Festlegung der Abhängigkeit von  $f(\vec{p})$  von den Impulsrichtungen  $\vec{p}/p$  muß die Energieabhängigkeit der Elektronenverteilungsfunktion  $f(\vec{p})$  untersucht werden. Hierzu muß aus den Bremsstrahlungsspektren  $I_o(K)$  bzw.  $I_{DIFF}(K, \alpha_1)$  mit Hilfe der Gleichungen (3.12) bzw. (3.14a)  $f_o$  für den isotropen und  $f_1$  für den anisotropen Anteil der suprathemischen Elektronen als Funktion von  $p$  oder von  $T$  bestimmt werden. Die Lösung dieser Gleichungen wird im folgenden behandelt. Zur Vermeidung systematischer Fehler werden hierbei Verfahren angewendet, die ohne Annahmen über die Energieabhängigkeit von  $f_o$  bzw.  $f_1$  auskommen.

Die für die "Entfaltung" nach der Energie zu benutzenden Gleichungen (3.13) und (3.14a) sind Integralgleichungen für  $f_o$  und  $f_1$ . Da diese aus einer Integration von (2.4) über die Impulsrichtungen hervorgegangen sind, sind sie Integralgleichungen bezüglich einer einzigen Variablen  $p$ . Die Emissionsrichtungen  $\alpha_o$  bzw.  $\alpha_1$  sind lediglich Parameter, die allein vom Abstrahlungsort  $\vec{r}$  im Plasma und der Detektorposition abhängen, und deswegen wie die Ortsvariable  $\vec{r}$  für die Entfaltung nach  $|\vec{p}|$  als fest vorgegeben betrachtet werden können. Im folgenden sollen für die Entfaltungsprozeduren, die in dem Abschnitt (4.2) angeführt werden, die Integrationsgrenzen für Gl. (3.13), (3.14a) festgelegt und, darauf aufbauend,  $p$  durch die kinetische Energie  $T$  substituiert werden.

Die unteren und oberen Integrationsgrenzen von Gl. (3.13) sollen mit  $T_{min,o}$  und  $T_{max,o}$ , und die von Gl. (3.14a) mit  $T_{min,l}$  und  $T_{max,l}$  bezeichnet werden. Wegen der Energieerhaltung wird für beide Gleichungen  $T_{min,o,l} = K$ . Die oberen Grenzen  $T_{max,o,l}$  müssen so hoch gewählt werden, daß

$$(4.1) \quad I_o(K) = 0 \quad \text{für } K \geq T_{max,o}, \quad I_{DIFF}(K) = 0 \quad \text{für } K \geq T_{max,l}$$

erfüllt ist, da

$$I_o(T_{max,o}) = n_a \cdot K \cdot \int_{T_{max,o}}^{T_{max,o}} |\vec{v}| \cdot \sigma_{eff,o} \cdot f_o(p) \cdot p^2 \cdot \frac{dp}{dT} dT = 0$$



bzw.

$$I_{\text{DIFF}}(T_{\text{max},1}, \alpha_1) = n_a \cdot K \cdot \int_{T_{\text{max},1}}^{T_{\text{max},1}} |\vec{v}| \cdot \sigma_{\text{eff},1} \cdot f_1(p) \cdot p^2 \frac{dp}{dT} dT = 0$$

gelten muß.

Weiterhin findet man, daß die Elektronenenergien innerhalb desselben Energiebereiches liegen müssen wie die Energien der als Bremsstrahlung emittierten Photonen. Seien nämlich  $K_{\text{max},0,1}$  die oberen Grenzenergien der Energiebereiche, in denen  $I_0(K) > 0$  bzw.  $I_{\text{DIFF}}(K) > 0$  ist und seien  $E_{\text{max},0,1}$  die entsprechenden oberen Grenzenergien von  $f_0(p)$  bzw.  $f_1(p)$ , dann folgt aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{eff},0}(K,T) &> 0 \text{ für } K \leq T, \\ \sigma_{\text{eff},1}(K,T) &> 0 \text{ für } K \leq T, \alpha_1 \neq 90^\circ, \\ \sigma_{\text{eff},0,1}(K,T) &= 0 \text{ für } K > T, \end{aligned}$$

daß

$$K_{\text{max},0} = E_{\text{max},0} = T_{\text{max},0}$$

und für  $\alpha_1 \neq 90^\circ$

$$K_{\text{max},1} = E_{\text{max},1} = T_{\text{max},1}$$

ist.

Aus den in diesem Abschnitt hergeleiteten Ergebnissen folgt, daß Gl. (3.13) und Gl. (3.14a) die einfachste Gestalt annehmen, wenn die Integrationsvariable  $p$  durch  $T$  ersetzt wird.

Führt man diese Substitution aus, lassen sich beide Gleichungen auf die Gestalt

$$(4.2) \quad I(K) = \sum_{Z, Z_i} n_{Z, Z_i} \cdot K \cdot \int_K^{T_{\text{max},0,1}} |\vec{v}| \cdot \sigma_{\text{eff},0,1}(K, T, \alpha_{0,1}, Z, Z_i) \cdot f(p(T)) \cdot p^2 \frac{dp}{dT} dT$$

$$= \int_K^{T_{\text{max},0,1}} G_{0,1}(K, T) f(p(T)) dT, \text{ mit } \frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{dp}{dT},$$

bringen.

Hier ist  $n_{Z,Z_i}(\vec{r})$  die Konzentration der Targetteilchen, d.i., der schweren Plasmateilchen mit Kernladungszahl  $Z$  und Ionenladungszahl  $Z_i$ . Für den radialen Index 0 ist  $I(K) = I_0(K, \vec{r})$ , für den tangentialen Index 1 ist  $I(K) = I_{DIFF}(K, \alpha_1, \vec{r})$ . Als Integralkern erhält man:

$$(4.3) \quad G_{0,1}(K, T, \alpha_{0,1}, \vec{r}) = \sum_{Z, Z_i} K \cdot p^2 \cdot \sigma_{eff_{0,1}}(K, T, \alpha_{0,1}, Z, Z_i) \cdot n_{Z, Z_i}(\vec{r})$$

$$= \sum_{Z, Z_i} n_{Z, Z_i} G_{eff_{0,1}}(K, T, \alpha_{0,1}, Z, Z_i).$$

$G_{eff}$  ist der "Gaunt-Faktor" für die an Atomen mit Kernladung  $Z$  und Ionenladung  $Z_i$  erzeugte Bremsstrahlung. Der Index 0 bezieht sich auf die radiale und der Index 1 auf die tangential Abstrahlungsrichtung.  $\sigma_{eff,0}$  berechnet sich nach Gl. (3.13),  $\sigma_{eff,1}$  nach Gl. (3.15). In (4.2) wird die Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte von  $\alpha$  und den Ladungszahlen  $Z, Z_i$  explizit berücksichtigt.

Mit Gl. (4.2) berechnet man also die Impulsverteilungsfunktionen  $F_0(T) = f_0(p(T))$ ,  $F_1 = f_1(p(T))$  als Funktion der kinetischen Elektronenenergie  $T$ . Aus  $f_0(p)$  läßt sich mit

$$(4.4) \quad \tilde{f}_0(T) = \frac{4\pi}{3} \sqrt{T} \cdot \sqrt{T + 2 m_e c^2} (T + m_e c^2) \cdot f(p(T)), \quad p = \frac{1}{c} \sqrt{T^2 + 2 \cdot T \cdot m_e c^2},$$

die Energieverteilungsfunktion  $\tilde{f}_0(T)$  berechnen /25/.  $m_e$  ist die Elektronenruhemasse. Aus  $f_1(p)$  läßt sich unter Beachtung der Orientierung des Polarkoordinatensystems  $(p, \theta, \varphi)$  für  $\vec{p}$  die Stromdichte berechnen:

$$(4.5) \quad \vec{j}(\vec{r}) = e \cdot \int v f_1(p(T), \vec{r}) \cdot p^2 \cdot \frac{dp}{dT} \cdot \left[ \int_{\theta\varphi} \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \right] \cdot dT$$

Man erkennt, daß nur  $j_{||}$ , die Stromdichtekomponente parallel zur poloidalen Achse, nicht verschwindet.

Im folgenden ist, je nach Anwendungsfall,  $F = F_0$  oder  $F = F_1$ .

#### 4.2 Die Entfaltung nach der Elektronenenergie

Die Entfaltung der Gl. (4.2) nach der Energie soll für die tangentiale und radiale Meßrichtung gemeinsam dargestellt werden; die Indizierung dieser

Gleichung nach der Abstrahlungsrichtung wird also im folgenden nicht explizit angegeben. Man erkennt, daß Gl. (4.2) eine Volterasche Integralgleichung der ersten Art ist: die untere Grenze des Integrals in (4.2) ist  $K$  und die zu berechnende Funktion  $f(p(T)) = F(T)$  taucht nur im Integranden auf.

Man geht bei der Behandlung der Gl. (4.2) am besten von ihrer diskretisierten Form als System von  $L$  linearen Gleichungen für die  $L$  unbekannt GröÙen  $F_i = F(T_i) = F(K_i)$  aus:

$$(4.2a) \quad I_i = \sum_{j=i}^L G_{ij} F_j \Delta T \quad \text{bzw.} \quad \vec{I} = \underline{G} \cdot \vec{F}$$

mit  $I_i = I(K_i)$ ,  $G_{ij} = G(K_i, T_j)$ , der Bremsstrahlungsmatrix  $G = (G_{ij})$ , den als diskreten Vektoren geschriebenen GröÙen  $\vec{I} = (I_i)$  und  $\vec{F} = (F_j)$ .  $\{T_i\}$  bzw.  $\{K_i\}$  sind  $L$  äquidistante Stützpunkte, die zu einer Unterteilung des MeÙintervalles  $T_{\min} \leq K \leq T_{\max}$  bzw.  $T_{\min} \leq T \leq T_{\max}$  in  $L$  Subintervalle der Breite  $\Delta T = T_2 - T_1 = K_2 - K_1$  gehören. Eine derartige Zerlegung kann man beispielsweise aus der Kanaleinteilung von  $[K'_{\min}, K'_{\max}]$  erhalten, wie sie von dem Impulshöhenmeßverfahren für die Bremsstrahlungsspektren geliefert wird (Kap. 6).

Diese Art von Gleichungen gehört zu den sogenannten "schlecht gestellten Inversionsproblemen" /26/. Dies bedeutet, daß man bei der direkten Inversion von Gl. (4.2a), also der Berechnung von  $F$  mit Hilfe der Inversen von Gl. (4.2a),

$$(4.2b) \quad \vec{F} = \underline{G}^{-1} \vec{I},$$

mit einer großen Fehlerspanne von  $F$  zu rechnen hat, auch wenn die durch die Messung vorgegebene Fehlerspanne  $\Delta I$  von  $I$  klein ist. Der Fehler von  $F$  kann die korrekte Auswertung der Bremsstrahlungsspektren erheblich erschweren und muß deshalb mit Hilfe verschiedener numerischer und meßtechnischer Verfahren behandelt werden. Testrechnungen /27/ zeigen, daß der Fehler von  $F$  in zwei Arten aufgeteilt werden kann. Diese und ihre Behandlung sind Gegenstand der folgenden Abschnitte.

#### 4.2.1 Der durch den Fehler $\Delta I$ von $I(K)$ induzierte Fehler $\Delta F$ von $F$

Eines der Anteile des Fehlers von  $F$ , der mit  $\Delta F$  bezeichnet werden soll, ist

das von Gl. (4.2b) erzeugte Abbild des Meßfehlers  $\Delta I$  von  $I(K)$ :

$$(4.6a) \quad (F(T) + \Delta F) = \underline{G}^{-1}(I(K) + \Delta I).$$

$\Delta F$  ist also unabhängig von den weiter unten erläuterten Stabilitätseigenschaften des Systems (4.2a) und kann, für einen fest vorgegebenen Fehler  $\Delta I$  von  $I$ , über eine Variation der Matrix  $\underline{G}^{-1}$  nur in Form und Größe beeinflusst, jedoch nicht auf diesem Wege erzeugt oder beseitigt werden. Da Gl. (4.2) linear ist, läßt sich der Zusammenhang (4.6a) zwischen  $\Delta F$  und  $\Delta I$  vereinfachen, d.h., auf dieselbe Weise beschreiben wie der durch Gl. (4.2b) gegebene Zusammenhang zwischen  $F(T)$  und  $I(K)$ :

$$(4.6b) \quad \Delta F(T) = \underline{G}^{-1}(\Delta I(K)).$$

Wenn für die Gl. (4.6a,b), wie für Gl. (4.2a), eine Diskretisierung und damit  $L$ , die Anzahl der äquidistanten Stützpunkte für die Diskretisierung, fest vorgegeben ist, beschreibt (4.6a) eine stetige Operation. Stetigkeit bedeutet hier:  $\Delta F(T) \rightarrow 0$  für  $\Delta I(K) \rightarrow 0$ . Der an dieser Stelle verwendete Begriff der Operatorstetigkeit bezüglich einer Funktionenvariablen (hier:  $I$ ) muß unterschieden werden von dem Stetigkeitsbegriff in seiner üblichen Bedeutung. Dieser beschreibt bekanntlich das Stetigkeitsverhalten z.B. einer reellwertigen, auf reelle Zahlen definierten Funktion bezüglich ihres Argumentes. Über die Stetigkeitseigenschaften linearer Operationen geben die Lehrbücher über Funktionalanalysis Auskunft. Siehe z.B. Ref. /28/.

Die Operatorstetigkeit der Gl. (4.6b) und Gl. (4.6a) läßt zwei Methoden zur Behandlung des Fehlers  $\Delta F$  zu. Erstens kann man  $\Delta F$  unter jede gewünschte Grenze drücken, indem man durch die Messung  $I(K)$  hinreichend genau, also mit genügend kleinem statistischem wie systematischem Fehler vorgibt. Zweitens kann man, wenn z.B. eine hinreichend genaue Messung von  $I(K)$  aus technischen Gründen nicht möglich ist, einen durch  $\Delta I$  verursachten eventuellen unregelmäßigen Verlauf von  $F(T)$  mit  $T$  ausglätten. Dies kann man z.B. durch Glättung von  $I$  erreichen. Das bedeutet, daß man Gl. (4.2b) auf genügend stark geglättete Spektren  $I(K)$  oder auf an  $I(K)$  approximierten, analytische Funktionen  $I_{FIT}(K)$  anwendet. Der Nachteil der Behandlung des Fehlers  $\Delta F$  durch Glättung ist, daß diese zu einer Vergrößerung des systematischen Fehlers in  $F$  führen kann. Als weitere Möglichkeit lassen sich beide Methoden kombiniert verwenden.



#### 4.2.2 Der durch die Struktur von $G$ bedingte Fehler $\tilde{\Delta}F$ von $F$

Die Lösung  $F$  des Gleichungssystems (4.2a) konvergiert nicht mit der Anzahl  $L$  der zu (4.2a) gehörenden Gleichungen, wenn  $G_{ii} < G_{ij}$  für  $i \neq j$  ist. Dieses Verhalten wird dadurch bedingt, daß mit  $L$  das Verhältnis: Anzahl der Nichtdiagonalelemente  $G_{i,j \neq i}$  zu Anzahl der Hauptdiagonalelemente  $G_{ii}$  von  $G$  anwächst, mit wachsendem  $L$  also die Quotienten  $G_{ij}/G_{ii}$  in Potenzprodukten immer höherer Ordnung in die Inversionsrechnung eingehen. Aus diesem Grund, und da der diskretisierte Wert von  $G(K,T)/G(K,K)$  für  $T > K$  von  $L$  unabhängig bleibt, kann  $(G_{ij})^{-1}$  für größere  $L$  nicht mehr mit genügender Genauigkeit berechnet werden. Hiernach und nach Kap. 2 wird die Grenze, ab der diese Ungenauigkeit auftritt, mit umso kleinerem  $L$  erreicht, je kleiner  $Z$ , je größer  $Z_i$  und je höher  $T_{\max}$  bzw.  $K_{\max}$  sind (Abb. 4, Gl. (4.3)).

Wenn also  $L$  diese Grenze überschreitet, wird Gl. (4.2) instabil, d.h., es werden Oszillationen großer Amplitude und Frequenz in der Energieabhängigkeit von  $F$  bereits durch die zwangsläufig bei der Inversion der Gl. (4.2a) auftretenden Rundungsfehler ausgelöst. Diese Oszillationen führen zu einem Fehler  $\tilde{\Delta}F$  von  $F$ , der den durch  $\Delta I$  verursachten Fehler  $\Delta F$  um mehrere Größenordnungen übertreffen kann und deswegen inakzeptabel hoch ist. Da nach diesen Ausführungen  $\tilde{\Delta}F$  im Gegensatz zu  $\Delta F$  allein durch die Struktur der Matrix  $G$  bedingt ist, kann  $\tilde{\Delta}F$  durch Variation in  $I(K)$  weder erzeugt noch beseitigt werden, also auch nicht durch allein auf  $I(K)$  wirkende Glättungsprozeduren unterdrückt werden. Zur Unterdrückung von  $\tilde{\Delta}F$  muß vielmehr das Inversionsverfahren in seiner Struktur geändert werden.

Modifikationen des durch Gl. (4.2a) gegebenen Verfahrens, die zu einer Unterdrückung dieser Instabilität und damit zu einer Dämpfung der von der Struktur von  $G$  bedingten Oszillation  $\tilde{\Delta}F$  führen, sind auf verschiedene Weise möglich. Bei einigen von ihnen wird das Hauptaugenmerk auf eine Glättung von  $F$  gerichtet: diese Methoden stellen eine Kombination von direkt auf  $F$  wirkenden Glättungsprozeduren mit dem System (4.2a) dar und eignen sich somit auch zur Glättung des durch einen Fehler in  $I(K)$  bewirkten Fehlers  $\Delta F$  in  $F$ . Diese sind also, im Gegensatz zu den durch Glättung von  $I$  wirkenden Glättungsverfahren von  $F$ , zur Behandlung beider oben erläuterten Fehleranteile von  $F(T)$  geeignet.

Zu diesen glättend wirkenden Verfahren gehören u.a.:

- Dämpfung der Oszillationen durch Fortlassen von in  $T$  hochfrequenten Anteilen in Gl. (4.2a). Dies ist möglich, wenn man mit algebraischen

Mitteln zwischen nieder- und hochfrequenten Anteilen in  $F, I, G$  und  $G^{-1}$  unterscheiden kann. Eine derartige Separation erreicht man durch eine Entwicklung dieser Größen nach einem Funktionensystem, dessen Mitglieder sich nach ihrer Oszillationsfrequenz bezüglich der T-Abhängigkeit charakterisieren und ordnen lassen ("orthogonale Polynome", Ref. /29/).

- Verwendung einer Nebenbedingung bei der Auflösung von Gl. (4.2a), die besagt, daß die resultierende Funktion F möglichst glatt sein soll (Regularisierungsverfahren, Ref. /26/).
- Für  $Z \gg 1$  und, wenn  $Z \approx 1$  ist, für einen eingeschränkten Bereich der Parameter  $K_{\max}, T_{\max}, \delta$  (siehe Gl. (3.11)) läßt sich durch Differentiation von Gl. (4.2) nach K in Verbindung mit Glättungsmaßnahmen ein stabilisiertes Gleichungssystem zur Bestimmung von F aus I herleiten. Dieses Verfahren wird in den folgenden Abschnitten beschrieben. Siehe auch Ref. /27/.

Weiterhin ist ein Verfahren zur Auflösung der Gl. (4.2a) erwähnenswert, das nicht auf eine Glättung beruht. Es verwendet Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie für die Berechnung der wahrscheinlichsten, mit Gl. (4.2a) konsistenten Funktion F. Voraussetzung hierzu ist, daß  $I(K) \geq 0, G(K, T) \geq 0$  ist. Konsistent ist diese Rechnung auch nur dann, wenn man als Ergebnis  $F \geq 0$  erhält (Methode der maximalen Entropie, Ref. /29/). Das hieraus resultierende Entfaltungsverfahren arbeitet nichtlinear und ist daher für manche Anwendungen schlecht geeignet.

#### 4.3 Umformung der Gl. (4.2) durch Differentiation nach K

In den folgenden Abschnitten soll das dritte der im Abschnitt 4.3.2 aufgeführten Stabilisierungsverfahren erläutert werden. Es beruht darauf, daß man die durch Gl. (4.2) dargestellte Operation  $F \rightarrow I$  mittels einer Differentiation von Gl. (4.2) nach K in eine Folge von 2 Operationen

$$F \rightarrow I' \rightarrow I$$

aufspaltet. Das bedeutet, daß man Gl. (4.2) in eine "Volterrasche Integralgleichung der 2. Art"

$$(4.7) \quad \frac{I'(K)}{G(K,K)} = -F(K) + \int_K^{T_{\max}} \frac{1}{G(K,K)} \cdot \frac{\partial G(K,T)}{\partial K} F(T) dT$$

umformt. Im diskreten Fall entspricht dies einer Überführung des der Volterra'schen Integralgleichung der 1. Art, Gl. (4.2) entsprechenden diskreten Systems

$$(4.2c) \quad \begin{aligned} I_1 &= G_{11} \cdot F_1 \cdot \Delta T + G_{12} \cdot F_2 \cdot \Delta T + G_{13} \cdot F_3 \cdot \Delta T + \dots + G_{1L} \cdot F_L \cdot \Delta T \\ I_2 &= G_{22} \cdot F_2 \cdot \Delta T + G_{23} \cdot F_3 \cdot \Delta T + \dots + G_{2L} \cdot F_L \cdot \Delta T \\ I_3 &= G_{33} \cdot F_3 \cdot \Delta T + \dots + G_{3L} \cdot F_L \cdot \Delta T \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

in

$$(4.7a) \quad \begin{aligned} I_2 - I_1 &= -G_{11} \cdot F_1 \cdot \Delta T + (G_{22} - G_{12}) \cdot F_2 \cdot \Delta T + (G_{23} - G_{13}) \cdot F_3 \cdot \Delta T + \dots \\ I_3 - I_2 &= -G_{22} \cdot F_2 \cdot \Delta T + (G_{33} - G_{23}) \cdot F_3 \cdot \Delta T + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

durch elementare Umformungen, d.h., Subtraktion der ersten Zeile von Gl. (4.2c) von der zweiten, der zweiten Zeile von der dritten, usf. Wie man durch anschließende Division beider Seiten von Gl. (4.7a) durch  $\Delta T$  und  $G_{ii}$  zeigt, ist (4.7a) äquivalent zu folgendem System:

$$(4.7b) \quad \begin{aligned} \frac{I_2 - I_1}{G_{11} \cdot \Delta T} &= -F_1 + \frac{1}{G_{11}} \cdot \frac{G_{22} - G_{12}}{\Delta T} \cdot F_2 \cdot \Delta T + \frac{1}{G_{11}} \cdot \frac{G_{23} - G_{13}}{\Delta T} \cdot F_3 \cdot \Delta T + \dots \\ \frac{I_3 - I_2}{G_{22} \cdot \Delta T} &= -F_2 + \frac{1}{G_{22}} \cdot \frac{G_{33} - G_{23}}{\Delta T} \cdot F_3 \cdot \Delta T + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

wenn  $G_{ii} \neq 0$  ist für alle  $i$  (siehe Kap. 2).

Mit den Definitionen

$$(4.8) \quad H_{ij} = H(K_i, T_j) = \frac{1}{G_{ii}} \cdot \frac{\partial G(K, T_j)}{\partial K} \Bigg|_{K=K_i} \approx \frac{1}{G_{ii}} \cdot \frac{C_{i+1, j} - G_{ij}}{\Delta T}$$

und

$$(4.9) \quad I_i' = \frac{d}{dk} I(K) \Bigg|_{K=K_i} \approx \frac{I_{i+1} - I_i}{\Delta T}$$

erhält man schließlich als diskrete Form von Gl. (4.7) die Gleichung:

$$(4.10) \quad \frac{I_i'}{G_{ii}} = -F_i + \sum_{j=i+1}^L H_{ij} F_j \cdot \Delta T; \quad i=1, \dots, L.$$

Gl. (4.9), (4.10) bilden wie Gl. (4.2a) ein Gleichungssystem für F. Da Gl. (4.2a) und Gl. (4.10) Volterrasche Integralgleichungen sind, besitzen die Matrizen  $G_{ij}$  und  $H_{ij}$  Dreiecksstruktur. Das garantiert die Existenz der für die Auflösung von Gl. (4.2a) bzw. Gl. (4.10) benötigten inversen Matrizen  $(G_{ij})$  bzw.  $(H_{ij} \cdot \Delta T - \hat{\delta}_{ij})^{-1}$ , da nach Gl. (4.3) und Kap. (2)  $G_{ii} \neq 0$  sein muß.  $\hat{\delta}_{ij}$  ist das Kroneckersymbol.

In den folgenden Abschnitten soll auf zwei Eigenschaften der sich aus den Gleichungen (4.9), (4.10) ergebenden Inversionsmethode eingegangen werden:

- a) Gl. (4.10) ist weitgehend stabil gegen durch Rundungsfehler auftretende Oszillationen  $\Delta \tilde{F}$ , ohne daß zusätzliche Glättungsmaßnahmen angewendet werden müssen.
- b) Die im Zusammenhang mit der Inversion von Gl. (4.10) durchzuführende Differentiation von I nach K erzeugt große und mit L wachsende Fehler in I' und damit in F. Um diese zu beherrschen, ist es im allgemeinen notwendig, zusätzliche Glättungen durchzuführen.

#### 4.4 Stabilität von Gl. (4.10) gegen Rundungsfehler

Im Vergleich zu dem System (4.2) bzw. (4.2a) ist das daraus hergeleitete System (4.10) bedeutend stabiler gegen Oszillation  $\Delta \tilde{F}$ , wie auch Testrechnungen zeigen /27/. Der Grund hierfür liegt darin, daß die bei der Auflösung von Gl. (4.10) durchzuführende Matrixinversion mit wachsendem L konvergiert und dadurch die zu  $\Delta \tilde{F}$  führenden Rundungsfehler auch bei hohen L unterdrückt werden. Dieses Ergebnis erhält man, wie bereits in Abschnitt 4.3 aufgeführt, für  $Z \gg 1$  und, wenn  $Z \approx 1$  ist, für einen eingeschränkten Bereich der Parameter  $K_{\max}$ ,  $T_{\max}$ ,  $\delta$ , und wenn zusätzlich folgende Voraussetzungen erfüllt sind.

- a) I(K) kann mit einer mindestens so hohen Energieauflösung gemessen werden, wie sie für F(T) verlangt wird. D.h., unter Umständen müssen für die Messung hochauflösende Halbleiterdetektoren oder Kristallspektrometer verwendet werden.



- b) Mit der Verringerung der statistischen Streuung der Meßwerte für die Bremsstrahlung, die man z.B. durch eine Verlängerung ihrer Meßzeit erreichen kann, und mit wachsendem L konvergiert I(K) gegen eine Funktion, dessen Ableitung für den gesamten Meßbereich existiert und (im üblichen Sinne) stetig in K, d.h., in K stetig differenzierbar ist.

#### 4.4.1 Konvergenz der Operation $I' \rightarrow F$ bezüglich L

Für den von dem Fehler  $\Delta(\frac{I'(K)}{G(K,K)})$  der Größe  $\frac{I'(K)}{G(K,K)}$  über die Teiloperation  $I' \rightarrow F$  induzierten Fehler  $\Delta F(T^*)$  liefert die Theorie /30,31/ für eine vorgegebene Energie  $T^*$ ,  $K^* = T^*$ :

$$(4.11) \quad \Delta F^* \leq \left\{ \frac{H_{\max}}{G^*L} \cdot \exp\left(\frac{H_{\max}}{G^*L}\right) \right\} \cdot \Delta\left(\frac{I'(K)}{G^*L}\right)$$

mit  $H_{\max} = \left( \max_{T \geq K^*} [H(K^*, T) \cdot G(K^*, K^*)] \right) \cdot (T_{\max}^{-K^*})$ ,  $F^* = F(K^*) = F(T^*)$ ,  
 ("Lipschitz-Konstante")

Um die Konvergenz der Teiloperation  $I' \rightarrow F$  bezüglich L zu beurteilen, werden für jedes L durch Diskretisierung der Funktion G(K,T) die von L abhängigen Matrixelemente  $G_{ij}$  gebildet und damit auch  $G^{*L}$  als Näherungswert des kurzweiligen Grenzwertes  $G(K^*, K^*)$ .  $G^{*L}$  ist somit ein Diagonalelement der Matrix  $(G_{ij})$  vom Range L. Es gilt außerdem:  $\Delta(I'/G) = \Delta I'/G$ , wenn G als fehlerfrei angenommen wird.

Diese Fehlerabschätzung gilt für die Lösungen der durch Diskretisierung aus Gl. (4.7) erhaltenen linearen Gleichungssysteme für alle L. Hierfür wird  $\Delta I'$  mit der Summe aus den durch  $\Delta I$  über die Differentiationsoperation  $I \rightarrow I'$  in I' induzierten Fehler und dem Diskretisierungsfehler von I' gleichgesetzt. Da somit  $\Delta F \rightarrow 0$  für  $\Delta I' \rightarrow 0$  gilt, konvergiert die Folge der Lösungen der diskreten Systeme (4.10) bezüglich L im Gegensatz zu der entsprechenden, aus dem System (4.2a) erhaltenen Folge.

Plausibel wird dieser Unterschied durch die verschiedene Art der Abhängigkeit der Matrixelemente von  $(G_{ij})$  und  $(H_{ij})$  von L. Im Gegensatz zu den Matrixelementen  $\Delta T \cdot G_{ij}$  des Systems (4.2a) (siehe Abschnitt 4.3.2) nimmt im System (4.10) zwar die Anzahl der Elemente pro Zeile bzw. Spalte der zu

Gl. (4.10) gehörenden Matrix mit  $L$  zu, deren Beträge  $H_{ij} \cdot \Delta T$  jedoch werden mit  $\Delta T$  kleiner, während die Diagonalterme des Systems (4.10) unabhängig von  $L$  sind. Wenn außerdem für jedes  $K^*$  die Größen  $G^{*L}$  nur schwach von  $L$  abhängig sind, ist damit auch die Kondition des zu Gl. (4.10) gehörenden Matrixterms nur schwach von  $L$  abhängig, d.h., Konvergenz ihrer Lösungen bezüglich  $L$  ist i.a. gewährleistet. Diese sind damit numerisch stabil im Gegensatz zu den Lösungen des Systems (4.2a).

Die letztgenannte Voraussetzung bedeutet, daß die Funktion  $G(K,T)$  im kurzwelligen Grenzbereich  $K \approx T$  nur schwach variiert. Dies ist aber nur für  $Z \gg 1$  erfüllt (Abb. 3). Für  $Z \approx 1$  kann jedoch für einige Teilbereiche der Parameter  $Z_i, T_{\max}, K_{\max}, \delta$  die Konvergenz erschwert werden. Für diese Parameterwerte können deshalb auch wieder numerische Instabilitäten der Art, die auch für den in Abschnitt (4.3.2) diskutierten Fehler  $\tilde{\Delta F}$  verantwortlich sind, entstehen, wenn  $L$  groß wird.

Die Theorie zeigt, daß die Bremsstrahlung von Elektronen der Energie  $T$  an abgeschirmten Kernen in einem Photonenenergiebereich von einigen eV unterhalb der kurzwelligen Grenze  $K = T$  stark mit  $K$  schwankt /32/. Sie kann für  $K = T$  auch zu Null werden. Dieses Verhalten wird durch die in Kap. 2 zitierten Berechnungen der Bremsstrahlungswirkungsquerschnitte nicht erfaßt. Man führt es auf eine Resonanz der stoßenden Elektronen mit den diskreten Energieniveaus des Targets zurück. In der Praxis ist es aber für die hier erläuterten Inversionsmethoden ohne Bedeutung, da die dazu benutzte Diskretisierung viel zu groß ist, um solche Effekte zu erfassen, d.h., diese durch Glättung beseitigt.

#### 4.5 Konvergenzeigenschaften der numerischen Differentiation

Die für die Auflösung des Systems (4.10) benötigte Ableitung  $I'$  von  $I$  läßt sich nur als Funktion endlich vieler, voneinander unabhängiger Parameter  $A_i$  angeben, wenn, wie in dem in diesem Report dargestellten Meßproblem, die Funktion  $I(K)$  ebenfalls nur für endlich viele Energien  $K_i$  vorgegeben werden kann. In diesem Fall stellt die Differentiationsoperation eine Abbildung des endlichdimensionalen Vektors  $\{I_i\}$  auf den endlichdimensionalen Parametervektor  $\{A_i\}$  dar und ist damit eine stetige Operation. Zu diesen gehören die diskret arbeitenden Differentiationsverfahren, also solche, die an endlichen vielen  $K_i$  die Ableitung  $I'$  durch Mehrpunkteformeln approximieren. Diese kann man bekanntlich aus der Interpolation von  $I(K)$  durch Polynome

verschiedener Ordnung herleiten. Aus einer linearen Interpolation von  $\{I_i\}$  erhält man die Approximation von  $I'$  durch Differenzquotienten:

$$(4.9) \quad I'_i = \frac{I_{i+1} - I_i}{K_{i+1} - K_i} \approx I'(K_i), \quad i = 1, \dots, L-1$$

für eine bestimmte vorgegebene Diskretisierung  $L$  und  $I'_L$  aus einer Extrapolation der  $I'_i$  für  $i < L$ .

Da nach dem Gesagten Gl. (4.9) für jedes  $L$  eine stetige Operation  $\{I_i\} \rightarrow \{I'_i\}$  beschreibt, läßt sich  $I'$  und damit  $F$  aus  $I$  im Prinzip mit jeder beliebigen Energieauflösung konsistent berechnen, d.h., für alle  $L$  ist  $\Delta I' \rightarrow 0$  für  $\Delta I \rightarrow 0$ .

Dies ist in der Praxis für größere  $L$  allerdings kaum durchführbar, da im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  die Differentiationsoperation  $I \rightarrow I'$ , im Unterschied zu der in demselben Grenzfall stetigen Operation  $I' \rightarrow F$ , unstetig ist. D.h., in diesem Fall können beliebig kleine Fehler  $\Delta I$  zu beliebig großen Fehlern  $\Delta I'$  führen. Für die diskret arbeitenden Differentiationsoperationen heißt das, daß zwar wegen ihrer Stetigkeit für ein fest vorgegebenes  $L$  mit  $\Delta I$  auch  $\Delta I'$  beschränkt ist, für ein festgehaltenes  $\Delta I$  aber der Fehler  $\Delta I'$  mit  $L$  anwächst. Die Stetigkeitseigenschaften der diskret arbeitenden Differentiationsverfahren sind also, anders als die der Operation  $I' \rightarrow F$ , stark von  $L$  abhängig.

Man muß sich aus diesen Gründen eine höhere Energieauflösung von  $I'$  bzw.  $F$  mit einer starken Erhöhung der Meßgenauigkeit von  $I$  erkaufen. Dies ist aus technischen Gründen meistens nicht möglich. Daher ist man, wenn man das in diesen Abschnitten beschriebene Entfaltungsverfahren benutzt, gezwungen, für die Differentiation eine der Meßgenauigkeit gemäße grobe Diskretisierung zu wählen. Bei der Wahl der Diskretisierung für die anschließende Matrixoperation  $I' \rightarrow F$  hat man dagegen weitgehend freie Hand.

Man erwartet, daß  $I'(K)$ , bedingt durch die von  $L$  abhängige Fehleranfälligkeit, in ihrem Verlauf mit  $K$  umso unregelmäßiger wird, je höher  $L$  ist. Die Frage taucht daher auf, ob unter diesen Umständen eine eindeutige Bestimmung von  $I'$  und  $F$  überhaupt möglich ist, d.h., die Ergebnisse für verschiedene  $L$  miteinander konsistent sind. Dies ist aber der Fall, wie der durch den folgenden Integralausdruck

$$(4.9a) \quad \frac{I_{i+1} - I_i}{\Delta K} = I_i' = \frac{1}{\Delta K} \cdot \int_{K_i}^{K_i + \Delta K} [I(K + \Delta K) - I(K)] dK = \frac{1}{\Delta K} \int_{K_i}^{K_i + \Delta K} dK \int_K^{K + \Delta K} I'(K') dK',$$

mit  $\Delta K = K_{i+1} - K_i$ , beschriebene Zusammenhang zwischen den Differenzquotienten von  $\{I_i\}$  und  $I'$  zeigt. In (4.9a) ist  $I'$  die Ableitung, die mit einer höheren als die zu  $\Delta K$  gehörenden Energieauflösung ermittelt worden ist.  $I_i'$  sind die zu  $\Delta K$  gehörenden Differenzquotienten. Der Ausdruck besagt, daß man aus  $I'$  durch Glättung, die sich maximal über einen Energiebereich von  $2 \cdot \Delta K$  erstreckt,  $I_i'$  erhalten kann. Geglättet wird hierbei sowohl  $I(K)$  als auch  $I'(K')$ . Die Aussage über Gl. (4.9a) bedeutet, daß sich  $I_i'$  und  $I'$  nur in hochfrequenten Anteilen, d.h. nur in Strukturen im Kurvenverlauf, die einen kleineren Energiebereich als  $2 \cdot \Delta K$  einnehmen, unterscheiden können. Die niederfrequenten Anteile von  $I_i'$  bleiben von der Wahl der Diskretisierung dagegen weitgehend unbeeinflusst, sind daher identisch mit denen von  $I'$ . In diesem Sinne ist auch das Ergebnis  $I'$  der Differentiationsoperation  $I \rightarrow I'$  unabhängig von  $L$ , dem Diskretisierungsparameter. Weiterhin folgt, daß der Ersatz der Differentiationsoperation  $I \rightarrow I'$  durch ein diskret arbeitendes Verfahren gleichbedeutend ist mit einer Glättung der sich aus der Differentiation ergebenden Funktion.

Entsprechende Ergebnisse erwartet man auch für andere diskret arbeitende Differentiationsverfahren.

Im nächsten Abschnitt wird eine aus Gl. (4.10) ableitbare Näherung für  $F(T)$  besprochen.

#### 4.6 Eine Näherung für die Berechnung von $F$ aus $I$

Für  $Z \gg 1$  läßt sich aus dem System (4.7b) eine Näherungsgleichung für  $F(T)$  wie folgt herleiten.

Wenn die Bremsstrahlungsquerschnitte mit kleiner werdender Photonenergie so schwach ansteigen, d.h., wenn die Quotienten

$$\frac{G_{i+1,j} - G_{i,j}}{G_{i,i}} = H_{i,j} \cdot \Delta T$$



für  $i < j \leq L$ ,  $1 \leq i \leq L-1$ , so klein gegen 1 sind, daß im System (4.7b) die Summe

$$s_i = \sum_{j=i+1}^L \Delta T \cdot F_j \cdot H_{ij}$$

der Terme rechts des Diagonalterms  $F_i$  für  $1 \leq i \leq L$  betragsmäßig gegen  $F_i$  vernachlässigt werden kann, dann ist

$$(4.12) \quad F(K) \approx -I'(K)/G(K,K)$$

eine Näherungslösung von Gl. (4.7) bzw. Gl. (4.10).

Die Güte dieser Näherung ist nur schwach abhängig von L, der Feinheit der Unterteilung des Meßbereiches  $[T_{\min}, T_{\max}]$  in Subintervalle der Breite  $\Delta T$ . Diese Eigenschaft folgt aus den bereits in Abschnitt 4.5 besprochenen Konvergenzeigenschaften des Systems (4.10).

Nach Kap. 2 ist die für die Gültigkeit von Gl. (4.12) notwendige Bedingung,  $H_{ij} \cdot \Delta T \ll 1$  umso besser erfüllt, je kleiner T und  $Z_{i-}$  und je größer Z ist. Rechnungen /27/ zeigen, daß für Durchschnittsenergien  $\bar{T}$  der suprathermischen Komponente bis 100 keV deren Verteilungsfunktion F(T) mit Hilfe von (4.12) bestimmt werden kann, wenn die mittlere Kernladungszahl des Plasmas  $\bar{Z} \gtrsim 10$  ist ( $\bar{Z}$  ist nicht mit  $Z_{\text{eff}}$  zu verwechseln!). Für Bremsstrahlung, die in einem Wasserstoffplasma erzeugt wird, hat man also in jedem Falle eine der in Abschnitt (4.3) aufgeführten exakteren Methoden zu verwenden.

#### 4.7 Die die Genauigkeit von F(T) bestimmenden Einflüsse

Wenn man die Gleichung (4.2a) gegen den Anteil  $\tilde{\Delta}F$  des Fehlers in F(T) stabilisiert hat, bleibt nach den Ausführungen in Abschnitt (4.3) als Fehlerquelle für F nur noch der durch einen Meßfehler  $\Delta I$  von I(K) erzeugte Fehleranteil  $\Delta F$ . Man erwartet also, daß, unabhängig von der verwendeten Stabilisierungsmethode, die aus dieser Maßnahme resultierende Abbildung  $I \rightarrow F$  stetig ist. Dies konnte im letzten Abschnitt für den Fall, daß die Stabilisierung durch Differentiation der Gl. (4.2) nach K erfolgt, durch Analyse der Eigenschaften der Abbildungskette  $I \leftrightarrow I' \leftrightarrow F$  auch bestätigt werden. Stetigkeit hat, wie bereits gesagt, zur Konsequenz: die Genauigkeit von F wächst mit der von I an, wenn man auf Glättungen von I bzw. F ver-

zichtet, die über das zur Dämpfung der Oszillationen  $\tilde{\Delta F}$  erforderliche Maß hinausgehen.

Nach der in diesen Abschnitten vertretenen Sichtweise hängt also die Genauigkeit  $\Delta F$  von  $F(T)$  entscheidend von der Genauigkeit von  $\Delta I$  und damit auch von dem experimentellen Meßaufwand ab. Umgekehrt ist es unmöglich, allein mit Hilfe numerischer Maßnahmen einen durch Meßfehler bedingten Informationsverlust von  $F$  rückgängig zu machen.

Für die weitere Diskussion der noch verbleibenden Fehler  $\Delta I$  bzw.  $\Delta F$  ist es also notwendig, ihre verschiedenen Beiträge genauer zu analysieren. Dies geschieht in Kap. 7. Die Frage, inwieweit man mit den hier vorgestellten Verfahren anstelle der Intensitäten  $I(K)$  die entsprechenden Flüsse  $J(K) = \int I(K) \cdot d\lambda$  auswerten kann, wird zusammen mit der Bestimmung der Intensitätsprofile aus den Flußprofilen abgehandelt.

## 5. Verallgemeinerte Entabelung

### 5.1 Allgemeingültige Beziehung zwischen Intensität $I$ und Fluß $J$ einer Strahlung

Wie bereits in Kap. (3.2) erläutert, müssen die Intensitätsprofile  $I_o(K, \vec{r})$  und  $I_{DIFF}(K, \vec{r})$  in voneinander unabhängigen Rechnungen ("Entabelungen") bestimmt werden. Es ist zudem erforderlich, als Entabelungsverfahren solche, aus einem verallgemeinerten methodischen Ansatz her ableitbare, Varianten zu verwenden, die den jeweiligen Symmetrieeigenschaften der zu berechnenden Intensität (Kap. 3) angepaßt sind. Diese können am besten diskutiert werden, indem man in den folgenden vorbereitenden Abschnitten von der für alle Strahlungsarten geltenden Beziehung zwischen Intensitäts- und Flußprofilen ausgeht.

Gesucht ist also ein Zusammenhang zwischen der Intensität  $I$  der betrachteten Strahlung und den der Messung zugänglichen Flüssen  $J$ .  $I = I(K, \alpha_o, \alpha_1, \vec{r})$  ist die vom Punkt  $r$  des Plasmas in die durch die Winkel  $\alpha_o, \alpha_1$  gekennzeichnete

Richtung emittierte Strahlungsintensität und damit eine lokale Plasmagröße, während J proportional zu der vom benutzten Strahlungsdetektor erfaßten Strahlung ist.  $\alpha_0, \alpha_1$  sind die zur eindeutigen Kennzeichnung einer bestimmten Richtung erforderlichen Winkel. Diese können durch ein beliebiges Koordinatensystem definiert sein. Grenzt man den Sichtbereich des Detektors mit Hilfe eines Kollimators genügend stark ein, so läßt sich J als Linienintegral der Intensität I der Strahlungsquelle längs der durch den Kollimator definierten Beobachtungslinie g ausdrücken:

$$(5.1) \quad J_g(K) = J(K, \vec{\eta}) = \int_g I(K, \alpha_0, \alpha_1, \vec{r}) \cdot d\lambda.$$

$\vec{\eta}$  ist ein Koordinatensatz zur eindeutigen Kennzeichnung der Lage und Richtung der Beobachtungslinie (optische Achse) g des Kollimators.

Diese Gleichung bildet eine allgemeingültige Grundlage für die Bestimmung von I aus J. Wenn I von dem Abstrahlungsort  $\vec{r}$  und den Abstrahlungsrichtungen  $\alpha_0, \alpha_1$  abhängig ist, müssen mehrere Messungen von J längs verschiedener Sichtlinien  $g_j$  verwendet werden, d.h. Gl. (5.1) muß zu einem Gleichungssystem

$$(5.2) \quad J_{g_j}(K) = \int_{g_j} I(K, \alpha_0, \alpha_1, \vec{r}) \cdot d\lambda, \quad j = 1, \dots, N$$

erweitert werden, wobei N die Anzahl der Messungen für die Flüsse  $J_{g_j}$  sind.

Die Linienintegralbildung, d.h. die funktionale Gestalt von Gl. (5.1) bzw. Gl. (5.2), ist unabhängig von K, der Photonenenergie der Strahlung, da sie nur durch die Kollimatorgeometrie bestimmt wird. Gl. (5.1) bzw. Gl. (5.2) bilden daher einen für alle K gültigen Zusammenhang zwischen I und J. Deshalb lassen sich mit ihnen auch Energiespektren von J bzw. I auswerten. Notwendig ist hierzu nur die explizite Berücksichtigung der Energieabhängigkeit in I bzw. J; für jedes K, für die eine Messung von J vorliegt, muß Gl. (5.1) bzw. Gl. (5.2) gesondert aufgestellt werden.

## 5.2 Eindeutigkeit des Zusammenhanges zwischen J und I

Meßprinzipbedingt existiert für jede Sichtlinie  $g_j$ , d.h., für jeden Koordinatensatz  $\vec{\eta}_j$ , den man zur Kennzeichnung einer Sichtlinie verwenden kann, die Linienintegralbildung (5.1) und ist eindeutig, d.h., für alle möglichen Intensitätsverteilungen liefert Gl. (5.1) genau den zu erwartenden Fluß J

für die durch  $\vec{\eta}_j$  gegebene Sichtstrahlposition. Das aus (5.1) gebildete Gleichungssystem (5.2) vermittelt also eine eindeutige Abbildung  $I \rightarrow J$  für alle möglichen Intensitätsverteilungen.

Die Umkehrabbildung  $J \rightarrow I$ , d.h., die Berechnung eines Intensitätsprofils  $I$  aus einer vorgegebenen Messung  $J$ , ist jedoch nur dann eindeutig lösbar, wenn zur Rechnung Randbedingungen für die Abhängigkeit der Intensität  $I$  von ihren Orts- und Richtungsvariablen bekannt sind. Der Grund hierfür liegt darin, daß zur eindeutigen Kennzeichnung einer Sichtlinie  $g$  vier unabhängige Parameter benötigt werden,  $I$  jedoch als Funktion von 5 unabhängigen Variablen angegeben werden muß. Zur Festlegung von  $I$  reichen also die durch  $\vec{\eta}$  gegebenen Variationsmöglichkeiten für  $g$  bzw.  $J(K, \vec{\eta})$  nicht aus: Bei der Linienintegralbildung (5.1) geht Information über  $I$  verloren. Diese kann man aus  $J$  mit Hilfe der Umkehr"abbildung"  $J \rightarrow I$  allein nicht wiedergewinnen.

Eine wesentliche Rolle bei der weiteren Behandlung der Flußspektren  $J$  spielen also die der Plasmageometrie zugrundeliegenden Symmetrien so wie die aus der Theorie ableitbaren Aussagen über die Richtungsverteilung der emittierten Strahlung. Bei der Auswertung der Abhängigkeit des Bremsstrahlungsflusses vom Ort  $\vec{r}$  sieht man sich also ähnlichen Problemen gegenüber wie bei der Berechnung der Impulsrichtungsverteilung der suprathemischen Komponente. Im Gegensatz aber zu der Berechnung dieser Impulsverteilung ist eine Bestimmung von  $I$  ohne Hinzunahme von a-priori-Information über die Strahlungsrichtcharakteristik und die Ortsabhängigkeit von  $I$  auch unter Vorgabe einer beliebig guten Ortsauflösung von  $J$  nicht möglich.

### 5.3 Berechnung von Intensitätsprofilen für eine Schnittebene

Das Gleichungssystem (5.2) läßt sich numerisch einfacher behandeln, wenn in ihm die Anzahl der voneinander unabhängigen Variablen reduziert werden kann. Erreichen läßt sich dies durch Aufteilung des Systems (5.2) in in sich abgeschlossene Untersysteme. Hierbei kann man folgendermaßen vorgehen: man gibt eine im Plasma liegende ebene Schnittebene vor, auf die man die Intensitätsbestimmung beschränken möchte. Ein zu dieser Schnittfläche passendes, in sich konsistentes Untersystem von Gleichungen läßt sich folgendermaßen erhalten: Man verwende aus dem ursprünglichen System nur diejenigen Gleichungen, die den Flußmessungen unter Verwendung von auf dieser Fläche liegenden Sichtlinien  $g_j$  entsprechen. Durch diese Maßnahme



wird erreicht, daß sämtliche in Gl. (5.2) erscheinenden Koordinaten  $\vec{\eta}$  bzw.  $r, \alpha_0, \alpha_1$  als Koordinaten dieser Ebene ausgedrückt werden können. Dadurch erfordert die Linienintegralbildung nach (5.1) nicht die Hinzunahme weiterer Koordinaten, die aus dieser Ebene herausführen, und die Anzahl der voneinander unabhängigen Variablen wird reduziert. I läßt sich also im Rahmen des auf dieser Weise erhaltenen Untersystems als Funktion von maximal 3 Koordinaten und J als eine Funktion von maximal 2 Koordinaten beschreiben.

Mit dieser Reduzierung verzichtet man auf die Bestimmung der Intensität für Gebiete außerhalb der gewählten Schnittfläche und auch auf die derjenigen Intensität, die von dieser Fläche in nicht parallel zu der Fläche liegende Richtungen emittiert wird. Das in 5.2 Gesagte gilt auch für alle derart reduzierten Gleichungssysteme: Man kann nur durch Berücksichtigung weiterer Randbedingungen zu Untersystemen gelangen, die auch eindeutig lösbar sind. Deren Anzahl unabhängiger Variablen wird nebenbei auf die beschriebene Weise weiterhin verringert.

#### 5.4 Räumliche Symmetrien und Koordinatensysteme für die Berechnung von Intensitätsprofilen

Aus den Ausführungen in Abschnitt (5.1) erkennt man, daß mit Gl. (5.2) auch der Zusammenhang zwischen den Intensitäts- und Flußprofilen der von der suprathemischen Elektronenkomponente erzeugten Bremsstrahlung beschrieben werden kann. Wie jedoch ebenfalls aus den vorbereitenden Ausführungen in den Abschnitten (5.2) und (5.3) hervorgeht, muß die Anzahl der unabhängigen Variablen von I und J reduziert werden, um Gl. (5.2) zu einem geeigneten Instrument für die Bestimmung von I aus J zu machen. Hierbei spielen wie in Kap. 3 bei der Bestimmung der Impulsrichtungsverteilungen Symmetrieüberlegungen eine große Rolle. Im folgenden soll also die Reduzierung des Gleichungssystems auf Schnittebenen und die räumlichen Symmetrieeigenschaften des Plasmas behandelt werden.

Die Schnittebenen ergeben sich aus der für die Profilmessungen verwendeten Detektor- und Kollimatoranordnungen. Durch die zu der "radialen Diagnostik" gehörenden Beobachtungsrichtungen ( $\alpha_1 = 90^\circ$ ) wird eine poloidale und durch die zur "tangentialen Diagnostik" gehörenden Beobachtungsrichtungen ( $\alpha_1 \approx 0^\circ, 180^\circ$ ) eine toroidale Schnittebene definiert. Diese steht senkrecht zur toroidalen Symmetrieachse und ist mit der Ebene identisch, die auch die Torusseele enthält. Zu beiden

Ebenen können Profile gemessen werden (Kap. 6). Als Folge der Reduktion auf eine Ebene reduziert sich die Anzahl der Ortsvariablen von 3 auf 2 und die der Richtungsvariablen von I auf 1, und J hängt nur noch von 2 unabhängigen Variablen ab. Die Richtungsvariable von I soll für beide Schnittebenen mit  $\alpha$  bezeichnet werden. Wie in Kap. 4 werden die der poloidalen Schnittebene zugeordneten Intensitäten I und J mit dem Index 0 versehen. Für die tangentielle Schnittebene werden die Intensitätsdifferenzen  $I_{DIFF}$  (Gl. (3.14a)) und die zu  $I_{DIFF}$  gehörenden Flußdifferenzen  $J_{DIFF}$  (s. Kap. 5.6) ausgewertet. Die übrigen Größen  $\alpha, r, \xi, g, \eta$ , usw., werden, falls nötig, mit 0 indiziert, falls die Zuordnung zur poloidalen Schnittebene demonstriert werden soll, und mit 1, falls die zur toroidalen Schnittebene demonstriert werden soll.

Folgende räumliche Symmetrien erlauben eine weitere Reduzierung der Variablen von I und J:

- a) Das Plasma weist im poloidalen Querschnitt eine räumliche Rotationssymmetrie auf, da die suprathemische Entladung als Niedrig-Dichte-Entladung ein niedriges  $\beta$  besitzt und deshalb die Flußflächen im Querschnitt kreisförmig sind. Diese Symmetrie kann aber durch horizontale und vertikale Verschiebungen und durch Verformungen des Plasmaquerschnitts gestört sein.
- b) Das Plasma ist im toroidalen Querschnitt rotationssymmetrisch. Diese Symmetrie kann aber durch Inhomogenitäten im technischen Aufbau gestört sein (Magnetfeldripple).

Aus beiden Eigenschaften folgt, daß für beide Schnittebenen  $I_0$  bzw.  $I_{DIFF}$  räumlich rotationssymmetrisch um das Symmetriezentrum 0 und  $J_0$  bzw.  $J_{DIFF}$  unabhängig von einer Drehung der Meßapparatur um 0 ist. Es liegt daher nahe, sowohl die Ortsabhängigkeit von  $I_0, I_{DIFF}$  als auch die Variablen von  $J_0, J_{DIFF}$  durch die üblichen Toruskoordinaten, d.h., durch ebene Polarkoordinaten, auszudrücken. Das Ortskoordinatensystem von  $I_0$  bzw.  $I_{DIFF}$  ist damit (bis auf einen festgewählten Bezugspolarwinkel) festgelegt; jedoch nicht dasjenige für  $J_0$  bzw.  $J_{DIFF}$ , da die Flüsse, wie schon in (5.1) gesagt worden ist, globale Meßgrößen bilden. Ihre Festlegung auf ein bestimmtes Polarkoordinatensystem kann daher willkürlich erfolgen; eine mögliche Wahl hierfür sind die Polarkoordinaten  $(\xi, \eta)$  desjenigen Punktes  $\vec{\xi} = \vec{r}_{min}$  auf der Sichtlinie g, dessen Abstand zu dem jeweiligen Symmetriezentrum  $0_{0,1}$  minimal ist, also  $\vec{\xi} = (\xi, \eta) = (r_{min}, \eta)$ .  $I_0$  bzw.  $I_{DIFF}$  hängt somit außer von

der Abstrahlungsrichtung  $\alpha$  nur von dem Abstand  $r = |\vec{r}|$  des Abstrahlungs-ortes  $\vec{r}$  von 0 und  $J$  bzw.  $J_{\text{DIFF}}$  nur von  $\xi$  ab. Nach den Ausführungen in 5.2 reichen jedoch die bisher durchgeführten Vereinfachungen zu einer eindeutigen Bestimmung von  $I_0, I_{\text{DIFF}}$  aus  $J_0, J_{\text{DIFF}}$  nicht aus, da  $I_0, I_{\text{DIFF}}$  von mehr Variablen abhängt als  $J_0, J_{\text{DIFF}}$ : Die Intensität weist eine u.U. nicht isotrope Richtcharakteristik auf. Um diese Unbestimmtheit zu beseitigen, müssen für die Richtcharakteristik zusätzliche Bestimmungsgleichungen aufgestellt werden. Diese lassen sich nach Kap. 2, Kap. 3 nur mit Kenntnis der Impulsrichtungsverteilung angeben. Wenn man die aufgrund der dort getroffenen Annahmen über  $f(\vec{p})$  hergeleitete Richtcharakteristiken in Gl. (5.2) einsetzt, erhält man schließlich die gesuchte Bestimmungsgleichung für Orts- und Energieabhängigkeit von  $I_0, I_{\text{DIFF}}$  und damit die von  $F_{0,1}$ . (Man beachte, daß in Gl. (3.13) und (3.14a) die Ortsabhängigkeit von  $F_{0,1}$  und  $I_0, I_{\text{DIFF}}$  nicht explizit aufgeführt ist.) Mit  $R_{p1}$  werde der Abstand der Torusseule (Plasmamitte) vom toroidalen Symmetriezentrum  $O_1$  bezeichnet.

Für die poloidale Schnittebene ist nach Gl. (3.13) die Richtcharakteristik für jeden Abstrahlungsort  $\vec{r}_0$  rotationssymmetrisch bezüglich des Abstrahlungswinkels  $\alpha_0, I = I_0(K, \vec{r}_0)$  ist demnach außer von  $K$  nur von  $|\vec{r}_0|$  abhängig. Mit dieser Variablenabhängigkeit von  $I_0$  erhält man aus Gl. (5.2) die Abelsche Integralgleichung:

$$(5.3) \quad J_0(K, \xi_{0j}) = \int_{\xi_{0j}} I_0(K, \sqrt{\xi_{0j}^2 + \lambda^2}) d\lambda, \quad j = 1, \dots, N_0.$$

Hierbei ist  $r_0 = \sqrt{\xi_{0j}^2 + \lambda^2}$  aufgrund der für  $\xi$  getroffenen Konvention.  $\lambda$  ist der Abstand zwischen dem Aufpunkt  $\vec{r}_0$  auf der Sichtlinie  $g_{0j}$  und dem Punkt  $\vec{r}_{0,\text{min}}$  auf  $g_{0j}$  mit minimalem Abstand zu  $O_0$ .  $N_0$  ist die Anzahl der radialen Meßrichtungen und  $O_0$  das zur poloidalen Schnittebene gehörende Symmetriezentrum (Plasmamitte).

Die radialen Messungen lassen sich somit mit Hilfe der Abelschen Integralgleichung (5.3) auswerten. Der folgende Abschnitt (5.5) zeigt, daß man aber bei der Kombination von Gl. (5.3) mit der Faltungsgleichung (3.13) Vorsicht walten lassen muß. Die Auswertung der tangentialen Profilmessungen  $J_{\text{DIFF}}$  erfordert hingegen eine Abwandlung des durch Gl. (5.3) gegebenen Entabellungsverfahrens. Das sich hieraus ergebende Verfahren wird in Abschnitt (5.6) erläutert.

### 5.5 Auswertung radialer Flußmessungen

Im Folgenden wird gezeigt, daß das Vorhandensein von Verunreinigungen im Plasma mit Kernordnungszahl  $Z$  und Ionenladung  $Z_i$ , dessen Dichten mit  $n_{Z,Z_i}$  bezeichnet werden sollen, die Auswertung der radialen Flußmessungen erschwert, wenn die Profilform von  $n_{Z,Z_i}$  mit  $Z, Z_i$  variiert. Dies zeigt sich, wenn man nach der im letzten Abschnitt angegebenen Vorgehensweise Gl. (4.2):

$$I_o(K) = \int_{T=K}^{T_{\max,0}} F_o(T, r_o) \cdot G_o(K, T, r_o) dT$$

mit durch Gl. (4.3) definiertem  $G_o$ :

$$G_o(K, T, r_o) = \sum_{Z, Z_i} n_{Z, Z_i}(r_o) \cdot K \cdot p^2 \cdot \sigma_{\text{eff},0}(K, T, Z, Z_i)$$

mit Gl. (5.3) kombiniert. Man erhält:

$$\begin{aligned} (5.4) \quad J_o(K, g_{o,j}) &= \int_{g_{o,j}} \int_{T=K}^{T_{\max,0}} F_o(T, r_o) G_o(K, T, r_o) dT d\lambda \\ &= \int_{g_{o,j}} I_o(K, \sqrt{g_{o,j}^2 + \lambda^2}) d\lambda = \int_{g_{o,j}} I_o(K, r_o) d\lambda, \quad j = 1, \dots, N_o \end{aligned}$$

Man erkennt: Auch wenn die Verunreinigungskonzentrationen  $n_{Z,Z_i}$  von  $r_o$  abhängig sind, läßt sich Gl. (5.4) in die Form einer Abelschen Integralgleichung bringen, da der Integrand  $I_o(K, r_o)$  nur von  $|\vec{r}_o|$  abhängig (und von  $\alpha_o$  unabhängig) ist. Nur dann aber, wenn die in  $G_o$  eingehenden Dichteprofile bis auf von  $r_o$  unabhängige Faktoren miteinander identisch sind, d.h.,

$n_{Z,Z_i}(r_o) = \xi_{Z,Z_i} \cdot n_a(r_o)$  gesetzt werden kann, ist die Verabelungsoperation mit der Faltungsoperation über  $T$  vertauschbar. Durch Faltung der Funktion

$$\bar{n}_a \cdot \bar{F}_o(T, \rho_{o,j}) = \int_{g_{o,j}} n_a(r_o) \cdot F_o(T, r_o) d\lambda; \quad \lambda_{\text{eff}} \cdot \bar{n}_a = \int_{g_{o,j}} n_a(r_o) d\lambda;$$

über  $T$  läßt sich in diesem Fall der Fluß  $J_o(K, \rho_{o,j})$  berechnen.  $\lambda_{\text{eff}}$  ist hier ein vorgegebener Näherungswert für die Länge des im Plasma liegenden Teils des Sichtstrahls  $g_{o,j}$  und  $\bar{n}_a$  der unter Annahme dieser Länge aus dem Linienintegral von  $n_a$  berechnete Mittelwert von  $n_a$  längs des Sichtstrahls  $g_{o,j}$ .

Davon abgesehen können für die Auswertung radial gemessener Flußprofile die üblichen Entabelungsprozeduren verwendet werden. Das ist letztendlich auf die Isotropie der Verteilungsfunktion  $f(\vec{p})$  in jeder poloidalen Schnitt-



ebene, also auf ihre Unabhängigkeit von dem Azimutwinkel  $\alpha_0$  zurückzuführen (s. Kap. 3). Bei der Entabelung radialer Flußprofile muß man nur beachten, daß sie mehrere Male, jeweils unter Vorgabe eines anderen Wertes des Parameters K, der Photonenenergie, durchgeführt werden muß, um aus der K-Abhängigkeit von  $J_0$  auch die von  $I_0$  zu erhalten.

### 5.6 Auswertung tangentialer Flußprofile

Nach den Ausführungen in Kap. 3 ist - anders als in der poloidalen Schnittebene - f und damit auch I in jeder toroidalen Schnittebene des Plasmas anisotrop. Als Folge davon kann sich in diesen Flächen die Anisotropie der Bremsstrahlung in der Strahlungsrichtung auswirken: die Intensität der in verschiedene Winkel  $\alpha_1$  emittierten Strahlung (Abb. (7)) ist auch dann unterschiedlich, wenn sie an verschiedenen, jedoch gleich weit vom Zentrum  $O_1$  entfernten Stellen im Plasma produziert wird. Deswegen können bei der Bildung des Linienintegrals (5.1) die einzelnen Strahlungsanteile nicht so einfach wie bei der Abelschen Integralgleichung (5.3) aufsummiert werden.

Dieser Sachverhalt läßt sich auch anhand des in Kap. 3 hergeleiteten Ausdrucks der tangentialen Bremsstrahlungsemission der anisotropen Elektronenkomponente formal zeigen: Bildet man wie in Abschnitt (4.2) aus den radialen Verunreinigungsprofilen  $n_{Z,Z_i}$  einen über diese gemittelten Ausdruck

$$G_1 = \sum_{Z_i, Z} n_{Z, Z_i}(r_1) \cdot G_{\text{eff}, 1}(K, T, \alpha_1, Z, Z_i),$$

erhält man aus Gl. (4.2)

$$I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_1, r_1) = \int F_1(T, r_1) G_1(K, T, \alpha_1, r_1) dT.$$

Als Ortsvariable kann sowohl  $r_1$ , der Abstand des Aufpunktes zur Torusseele (= Symmetriezentrum  $O_0$ ) als auch sein Abstand R zur großen Torusachse, dem toroidalen Symmetriezentrum  $O_1$  gewählt werden. Da die toroidale Schnittebene identisch ist mit der Ebene, in der die Torusseele liegt, ist  $r_1 + R_{P1} = R$ .

Mit der Definition von  $J_{\text{DIFF}}$  als der Differenz zwischen dem tangentialen Fluß  $J_1$  als Linienintegral längs des Sichtstrahls  $g_{1j}$  und des radialen Flusses  $J_0$  erhält man mit  $R_{P1}$  (= 165 cm) als großem Torusradius:

$$(5.5) \quad J_{\text{DIFF}}(K, \vartheta_{1,j}) = J_1(K, \vartheta_{1,j}) - \int_{g_{1,j}} I_0(K, r_1 = \sqrt{\vartheta_{1,j}^2 + \lambda^2} - R_{P1}) d\lambda$$

und in Verbindung mit Gl. (5.1) durch Bildung des Linienintegrals entlang derselben Sichtlinie  $g_{j,1}$  erhält man:

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad J_{\text{DIFF}}(K, \xi_{1j}) &= \int_{g_{1,j}} I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_1, r_1) d\lambda = \int_{g_{1,j}} I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_1, R) d\lambda \\
 &= \int_{g_{1j}} \int_{\xi_{1j}} F_1(T, \sqrt{\xi_{1j}^2 + \lambda^2}) \cdot G_1(K, T, \alpha_1 = 180^\circ - \arccos \left( \frac{\sqrt{\xi_{1j}^2 + \lambda^2}}{\xi_{1j}} \right), \sqrt{\xi_{1j}^2 + \lambda^2}) d\lambda dT \\
 &= \int_{g_{1j}} I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_1 = 180^\circ - \arccos \left( \frac{\sqrt{\xi_{1j}^2 + \lambda^2}}{\xi_{1j}} \right), \sqrt{\xi_{1j}^2 + \lambda^2}) d\lambda, \quad j = 1, \dots, N_1, \\
 &\quad (R = \sqrt{\xi_{1j}^2 + \lambda^2}).
 \end{aligned}$$

Hier sind  $R, \xi_{1,j}$  Polarkoordinaten, die sich auf die toroidale Schnitt-ebene beziehen,  $R_{p1}$  der große Plasmaradius,  $g_{1,j}$  die für die tang. Messung benutzten Sichtlinien ( $j = 1, N_1$ ), und  $N_1$  die Anzahl der tangentialen Messungen.

In diesem Abschnitt werden die Argumente der trigonometrischen Funktionen sowie die Werte der inversen trigonometrischen Funktionen in Grad angegeben.

Die Gleichung (5.6) hat also wegen der komplizierten Abhängigkeit des Winkels  $\alpha_1$  von  $R$  und  $\xi_1$  nicht die Form einer Abelschen Integralgleichung.

Das aus Gl. (5.6) gebildete System für  $N_1$  Messungen in tangentialer Richtung mit  $j = 1, \dots, N_1$  ist jedoch nach  $I_{\text{DIFF}}$  auflösbar, wenn man mit Hilfe der bekannten effektiven Wirkungsquerschnitte die zu demselben radialen Abstand  $R$  vom Zentrum  $O_1$ , aber zu verschiedenen Abstrahlungswinkeln  $\alpha_1$  gehörenden Intensitäten ineinander umrechnet. Somit können in dem Gleichungssystem alle zu einem bestimmten Radialabstand  $R$  gehörenden Intensitätsspektren  $I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_1(R, \xi_{1,j}), R)$  bis auf  $I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_1 = 180^\circ, R = \xi_{1,j})$  eliminiert werden.  $I_{\text{DIFF}}(K, 180^\circ, R = \xi_{1,j})$  für  $j = 1, \dots, N_1$  sind dann die einzigen verbleibenden Unbekannten und müssen wie bei einer gewöhnlichen Entabelung berechnet werden. Dies ist auf einfachem Wege zu bewerkstelligen, da das System (5.6) in diskretisierter Form wie eine diskretisierte gewöhnliche Abelsche Integralgleichung Dreieckstruktur besitzt.

Zum Schluß dieses Kapitels soll das diskrete System (5.6a) ausführlich niedergeschrieben werden. Zunächst folgt eine Liste der hierzu benötigten Definitionen.

Für den Rest dieses Abschnitts wird, um die Schreibweise zu vereinfachen, darauf verzichtet, die zur toroidalen Schnittebene gehörenden Größen durch entsprechende Indizierung von denen der poloidalen Schnittebene zu unterscheiden, d.h., in den folgenden Definitionen wird der Index "1" weglassen.

- N: Anzahl der Sichtlinien  $g_j$  = Anzahl der Flußmessungen  $J_{\text{DIFF}}$   
 j: Numerierung der Sichtlinien  $g_j$  mit  $j_1 < j_2$  für  $\xi_{j_1} > \xi_{j_2}$   
 $g_j$ : j-te tangentielle Sichtlinie  
 i: durch Diskretisierung von (5.6) erhaltener Index = Numerierung der Aufpunkte  $R_{ji}$  des j-ten Sichtstrahls.

Hierfür gilt:  $i_1 < i_2 \leq j$  für  $R_{ji_1} \geq R_{ji_2} \geq R_{jj} = \xi_j$   
 und:  $i \leq j$ . (Dreiecksstruktur des Systems)

$\xi_1 = R_{11}, \xi_2 = R_{22}, \dots, \xi_N = R_{NN}$ :  
 radiale Abstände der Sichtlinien vom Symmetriezentrum  $O_1$ .

$R_{ji}$   $i = 1, \dots, j$ : Abstände der j Aufpunkte auf dem j-ten Sichtstrahl  $g_j$  zum Zentrum  $O_1$ .

$\Delta\lambda_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, j$ : Länge der zu  $R_{ji}$  gehörenden Wegelemente auf  $g_j$ .

$$\Delta\lambda_{ji} = |(\sqrt{R_{j,i-1}^2 - R_{jj}^2} - \sqrt{R_{j,i}^2 - R_{jj}^2}) \cdot 2| \quad \text{für } i > 1$$

$$= |(\sqrt{R_{j1}^2 - R_{jj}^2} - \sqrt{A^2 - R_{jj}^2}) \cdot 2| \quad \text{für } i = 1$$

A: maximaler toroidaler Plasmadurchmesser,

$$A = R_{P1} + a,$$

$R_{P1}$ : großer Torusradius;

a: kleiner Plasmaradius;

$$\tilde{\alpha}_{ji} = \arccos\left(\frac{R_{jj}}{R_{ji}}\right): \text{Winkel zwischen } \vec{R}_{jj} \text{ und } \vec{R}_{ji}, \quad j \geq i$$

$$\alpha_{jj} = 180^\circ - \tilde{\alpha}_{jj}$$

$I_{D,ji} = I_{DIFF}(K, \alpha_{ji}, R_{ji})$ : Intensitätsdifferenz an der Stelle  $\vec{R}_{ji}$  mit Abstrahlungswinkel  $\alpha_{ji}$ . ( $\alpha_{ji}$  ist auf das in  $\vec{R}_{ji}$  definierte Polarkoordinatensystem für die Abstrahlungsrichtung  $\alpha$  bezogen)

Um Konsistenz des Gleichungssystems zu erreichen, wird

$R_{ji} = R_{ii}$  für  $i \leq j \leq N$  gesetzt (Fig. (7)!) und  
 $\alpha_{jj} = 180^\circ$  für alle  $j$ .

Die Transformationsmatrix  $\tilde{G}$  für die Berechnung von Intensitäten für Emissionswinkel  $\alpha_1 \neq 180^\circ$  aus der Intensität, die unter  $\alpha_1 = 180^\circ$  emittiert wird, läßt sich aus den  $G_1$ -Matrizen ermitteln:

$$\tilde{G}(180^\circ \rightarrow \alpha_{ji}) = G_1(\alpha_{ji}) * G_1^{-1}(\alpha_{jj}); \quad i \leq j \leq N$$

$$I_{D,ji} = \tilde{G}(180^\circ \rightarrow \alpha_{j,i}) * I_{D,ii}.$$

Hierbei werden die Elemente der  $G_1$ -Matrix durch Gl. (4.3) angegeben,  $J_{j,DIFF}$  ist die gemessene Flußdifferenz für den  $j$ -ten Sichtstrahl:

$$J_{j,DIFF} = J_{DIFF}(K, \varrho_j = R_{jj}).$$

Die Diskretisierung der  $G_1$  - wie der  $\tilde{G}$ -Funktionen erfolgt nach dem in (4.4) angegebenen Verfahren.

Mit diesen Definitionen erhält man für  $I_{DIFF}$  folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I_{DIFF}(K, R_{11}, \alpha_{11}) \cdot \Delta\lambda_{11} &= J_{DIFF}(K, R_{11}) \\ I_{DIFF}(K, R_{21}, \alpha_{21}) \cdot \Delta\lambda_{21} + I_{DIFF}(K, R_{22}, \alpha_{22}) \cdot \Delta\lambda_{22} &= J_{DIFF}(K, R_{22}) \\ &\vdots \\ (5.6a) \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Ihre Dreieckstruktur legt folgendes Vorgehen nahe:

- a) Aus der ersten Gleichung berechne man  $I_{DIFF}(K, \alpha_{11}, R_{11}) = J_{DIFF}(K, R_{11}) / \Delta\lambda_{11}$  als Funktion von  $K$ .
  - b) Wegen  $R_{11} = R_{21} = R_{31}$ , usw. können mit Hilfe der effektiven Wirkungsquerschnitte aus  $I_{DIFF}(K, \alpha_{11}, R_{11})$  die Intensitäten  $I_{DIFF}(K, \alpha_{21}, R_{21})$ ,  $I_{DIFF}(K, \alpha_{31}, R_{31})$ , usw., (die erste Spalte des Gleichungssystems) berechnet werden.
  - c) Man löse die zweite Gleichung nach  $I_{DIFF}(K, \alpha_{22}, R_{22})$  auf.
  - d) Die Intensitäten in der 2. Spalte des Gleichungssystems können berechnet werden
- $\vdots$   
 $\vdots$   
 usw.  
 $\vdots$   
 $\vdots$



Aus den so berechneten Intensitäten  $I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_{jj}, R_{jj})$  können mit Hilfe der effektiven Wirkungsquerschnitte für  $\alpha_{jj} = 180^\circ$  die  $F_1(T, R_{jj})$  berechnet werden nach dem bereits in (4.3 - 4.5) besprochenen Verfahren.

Dieses Verfahren arbeitet direkt, also ohne Iteration. Wenn Messungen von  $J_{\text{DIFF}}$  auf Sichtlinien beiderseits der poloidalen Achse vorliegen, kann man die poloidale Rotationssymmetrie von  $f(\vec{p})$ , bezogen auf die poloidale Achse als Symmetrieachse, ausnutzen, um auf diese Weise zusätzliche Meßpunkte für  $I_{\text{DIFF}}$  zu gewinnen (/45/). Dann geht Gl.(5.6a) in ein Gleichungssystem über, das nicht mehr reine Dreiecksstruktur besitzt. Eine derartige Gleichung wird deshalb am vorteilhaftesten mit Hilfe eines Iterationsverfahrens gelöst; ein solches Verfahren wird zur Zeit entwickelt.

## 6. Experimentelle Methodik zur Messung der Flußdichte

Nach den in den letzten Kapiteln behandelten Auswerteschritten  $J \rightarrow I$ ,  $I \rightarrow F$  bzw.  $\tilde{f}$ , bleibt als letzter Schritt noch die Bestimmung der Energieflüsse  $J$ . Sie soll in diesem Abschnitt behandelt werden. Die Energieflüsse werden im Gegensatz zu den bisher behandelten Schritten im wesentlichen mit experimentellen Hilfsmitteln bestimmt. Nach den bisherigen Ausführungen ist klar, daß die Anordnung zur Messung der Bremsstrahlung folgenden Anforderungen genügen muß:

- a) Zur Bestimmung der Strahlungsrichtcharakteristik, also der Abhängigkeit der Intensität von den Emissionswinkeln  $\alpha_0, \alpha_1$ , muß man den Energiefluß  $J$  unter verschiedenen Beobachtungsrichtungen  $\vec{\eta}$  messen können.
- b) Zur Bestimmung der Ortsabhängigkeit von  $I$  und damit der von  $f$  muß man das Flußprofil, d.h., für jedes  $\vec{\eta}$  den Fluß  $J(K, \vec{\eta})$  bestimmen können (Def. von  $\vec{\eta}$  siehe die vorhergehenden Abschnitte). Die Schnittebenen, auf denen die zu den  $\vec{\eta}$  gehörenden Sichtlinien zur Messung der Strahlung liegen, müssen so gewählt sein, daß eine Bestimmung der zu  $J$  gehörenden Intensitätsprofile von  $I(K, \alpha_0, \alpha_1, \vec{r})$ , d.h., der Ortsabhängigkeit von  $I$ , möglich ist.
- c) Die Bremsstrahlung muß energieaufgelöst gemessen werden. Nach den Ausführungen in Kap. 2 heißt das, daß man in der Lage sein muß, die Anzahl und Energien der zu ihr gehörenden Strahlungsquanten statistisch zu erfassen.

Für die Erfüllung der ersten beiden Forderungen benötigt man für jeden Strahlungsdetektor einen Kollimator. Mit einem Kollimator kann man den zu untersuchenden Plasmabereich und Emissionswinkelbereich der Strahlung für die Messung vorgeben. Ein Kollimator ist also so aufgebaut, daß er den Detektor von allen Strahlungsanteilen abschirmt, deren Entstehungsort und Abstrahlungsrichtung nicht mit diesen Vorgaben übereinstimmt.

Die für das Experiment benutzten Kollimatoren werden in Abschnitt 6.1, und die Strahlungsdetektoren in Abschnitt 6.2 behandelt.

### 6.1 Aufbau der Kollimatoren

Ein für die Messung der suprathemischen Komponente geeigneter Kollimator muß nach den Schlußbemerkungen im letzten Abschnitt folgende Eigenschaften haben:

- Er definiert die Beobachtungsrichtung und -position  $\vec{n}$  des Detektors, also die Lage der optischen Achse der Meßanordnung (Kollimatorachse),
- Er definiert einen Öffnungswinkel  $\Omega_{\text{Det}}$  für die Bremsstrahlungsmessung. Er wird so klein gewählt, daß die Divergenz des vom Kollimator gebildeten Strahlenbündels und der vom Detektor aus sichtbare Teilbereich des Plasmas für eine gute Ortsauflösung der Messung genügend klein ist,
- Er definiert den Querschnitt des Strahlenbündels in Detektornähe, d.i. den für die Messung benutzten Anteil der aktiven Detektorfläche (Auffangfläche).

Für ASDEX wird die in Abbildung (6a,b) schematisch dargestellte Kollimatoranordnung benutzt. Sie besteht aus einer den Detektor bis auf die Eintrittsöffnung allseitig umschließende Bleiabschirmung und zwei zwischen Plasma und Detektor angebrachten Bleiblenden mit Innendurchmessern  $2 \cdot r_{D1}$  bzw.  $2 \cdot r_{D2}$ . Die Innenwand der detektorseitigen Bleiabschirmung ist mit Folien aus Materialien verschiedener Kernordnungszahl  $Z$  ausgekleidet, um die Erzeugung von störender Bleifluoreszenzstrahlung zu unterdrücken. Um die Abschwächung der vom Plasma emittierten Bremsstrahlung entlang der Kollimatorachse möglichst klein zu halten, wird als Fenster für den Strahlaustritt aus dem Vakuumbereich eine Berylliumscheibe der Dicke 1.5 mm verwendet. Als Blendeninnendurchmesser läßt sich jeder Wert unterhalb von 3 cm einstellen.

Mit dieser Anordnung lassen sich die eingangs aufgeführten Forderungen erfüllen, soweit keine extrem hochenergetischen Runawayelektronen zur Bremsstrahlung beitragen (s. Abschnitte 7.3). Kontrollmessungen mit dieser Anordnung, die während suprathemischer Phasen der Entladung mit verschlossener plasmaseitiger Bleiblende durchgeführt wurden, untermauern diese Feststellung. Sie zeigen, daß aus Gebieten, die außerhalb des durch die geometrische Abmessungen des Kollimators gegebenen Sichtbereiches für den Detektor liegen, keine Röntgenstrahlung in den Detektor gelangt. Diese Strahlungsanteile stören demnach nicht die exakte Auswertung des Flusses  $J$  für die gewählte Plasmaregion  $\vec{r}$  und Abstrahlungsrichtung  $\vec{\eta}$ . Das steht im Gegensatz zu Messungen, die früher mit einer ähnlichen Kollimatoranordnung an einer in einem magnetischen Spiegelfeld erzeugten hochenergetischen Elektronenkomponente durchgeführt wurden /33/. Sie zeigen, daß ein Kollimator, dessen Strahlengang nicht vollständig von einer Abschirmung umgeben ist, empfindlich ist gegen seitlich einfallende Röntgenstrahlung, d.h., diese durch Comptonstreuung in den Sichtbereich des Detektors umlenkt. Der so zustandekommende effektive Öffnungswinkel für seitlich auf den Kollimator einfallende Störstrahlung,  $\Omega_{\text{Det,eff}}$ , ist erheblich größer als der durch die Kollimatorgeometrie gegebene Öffnungswinkel  $\Omega_{\text{Det}}$  für die im Sichtbereich des Detektors erzeugte Bremsstrahlung. Deswegen kann deren Messung erheblich durch die beschriebene Comptonstreustrahlung gestört werden.

Aus dem Vergleich der zitierten Messungen mit denen an ASDEX kann man schließen, daß eine derartige Störstrahlungskomponente von ASDEX in suprathemischen Entladungen zwar erzeugt wird, jedoch wegen der großen Dicke der Toruswand ( $\approx 3$  cm Stahl) nicht aus dem Gefäß gelangen kann. Über die Störstrahlungsanteile, die an im Sichtbereich des Detektors liegenden festen Bauteilen erzeugt werden, siehe die Abschnitte (7.3).

Aus dem Energiefluß  $J(K, \vec{\eta})$  der sich in Richtung  $\vec{\eta}$  zum Detektor hin ausbreitenden Bremsstrahlung läßt sich der durch die Auffangfläche bzw. aktive Detektoroberfläche gehende Quantenstrom  $q$  bestimmen (/4,23/):

$$(6.1) \quad q(K) = \frac{\pi^2}{K} \frac{r_{D1}^2 \cdot r_{D2}^2}{D^2} \cdot J(K, \vec{\eta}).$$

Hier ist  $D$  der Abstand zwischen den beiden Bleiblenden und  $\vec{\eta}$  der schon in früheren Abschnitten definierte Parametersatz für die Festlegung der Kollimatorposition und -orientierung. Die Messung von  $q(K)$  wird in den nächsten Abschnitten besprochen.

Zur Messung der Röntgenstrahlung werden sowohl für die radiale als auch für die tangentielle Meßrichtung Kollimatoren der beschriebenen Art verwendet. Diese erlauben es, sowohl die für die Bestimmung der isotropen Komponente  $f_0$  erforderliche Messung von  $J_0$  als auch die für die anisotrope Komponente  $f_1$  benötigte Messung von  $J_1$  bzw.  $J_{DIFF}$  durchzuführen. Die radiale Meßanordnung besteht aus einer Gruppe von 3 Kollimatoren. Deren Achsen liegen in einer poloidalen Schnittebene und sind so orientiert, daß bereits die für diese Positionen simultan durchgeführten Messungen von  $q(K)$  für eine Bestimmung des Profils von  $J$  ergeben (Abb. (6b)). Die tangentielle Meßanordnung besteht dagegen nur aus einem einzigen Kollimator. Da sie aber horizontal schwenkbar ist, lassen sich auch mit ihr Flußprofile, in diesem Fall solche für eine toroidale Schnittebene, aus einer Meßserie gewinnen.

Die Einstellwerte für die Kollimatoren, wie  $r_{D1}$ ,  $r_{D2}$ ,  $D$ ,  $\vec{n}$ , etc, die man als Basis für die numerische Auswertung der Messungen verwendet, sind mit Fehlern behaftet. Weiterhin ist die Zahl der Meßrichtungen möglicherweise für eine Bestimmung der Richtcharakteristik zu klein, wie bereits in Kap. 3 ausgeführt wurde. Aus diesen Gründen können systematische Fehler bei der Bestimmung der Profile von  $J$ ,  $I$  und  $f$  entstehen. Auf diese wird in den Abschnitten (7.4) eingegangen.

Im nächsten Abschnitt wird die Methodik zur energieaufgelösten Messung von  $q(K)$  beschrieben.

## 6.2 Messung der Impulshöhenspektren

Um eine effektive Analyse der Photonenstatistik durchführen zu können, müssen an das verwendete Strahlungsmeßgerät einige Voraussetzungen gestellt werden:

- Die Detektoren sollen einzelne Röntgen- bzw.  $\gamma$ -Quanten nachweisen können und für jeden nachgewiesenen Quant einen der Quantenenergie zumindest annähernd proportionalen Spannungs- oder Ladungspuls liefern.
- Die Detektoren sollen in dem gesamten interessierenden Meßbereich eine möglichst hohe Nachweisempfindlichkeit und ein möglichst hohes Auflösungsvermögen besitzen. Die Nachweisempfindlichkeit muß quantitativ bekannt sein.
- Die Detektoren sollen eine möglichst hohe Pulsrate verarbeiten können, d.h., ihre zur Messung eines einzelnen Quants benötigte Zeit ("Totzeit") soll möglichst klein sein.



Zu den Detektoren mit den geforderten Eigenschaften gehören NaJ(Tl)-Szintillationszähler und planare Ge-Halbleiterzähler. Diese benutzen zur Messung der Quanten großvolumige Kristalle der jeweiligen Zusammensetzung. In beiden basiert der Meßvorgang auf der Absorption der Strahlung und der Sammlung der dabei freigesetzten Ladungen (in Halbleiterkristallen) oder Lichtquanten (in Szintillationskristallen) in Spannungs-, Ladungs- bzw. Lichtpulsen. Deren Höhen  $K'$  sind (annähernd) proportional zu der Energie der nachgewiesenen Quanten, wenn nicht ein Teil der Quantenenergie durch Comptonstreuung wieder aus dem Kristall entweicht. Entscheidend für eine hohe Nachweisempfindlichkeit und kleine durch Comptonstreuung verursachten Verluste ist die Größe der verwendeten Kristalle: Je länger der Weg ist, die ein Quant im Kristall zurücklegen kann, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß er nachgewiesen wird. Die Funktionsweise der NaJ(Tl)-Zähler ist z.B. in /34/, /35/ und die der Halbleiterzähler in /36/ beschrieben.

Bei der statistischen Analyse der auf diese Weise erhaltenen Impulse teilt man diese nach ihrer Impulshöhe in Gruppen  $Q_i$  auf. Hierbei geht man von einer Zerlegung des gesamten interessierenden Impulshöhenbereichs  $[K'_{\min}, K'_{\max}]$  in  $L_0$  Teilbereiche ("Kanäle") aus:

$$[K'_{\min} + (i-1) \cdot \Delta K', K'_{\min} + i \cdot \Delta K'], i=1, \dots, L_0, \text{ mit } \Delta K' = \frac{K'_{\max} - K'_{\min}}{L_0}.$$

Durch eine gruppenweise Bestimmung der Anzahl der während der Meßzeit  $t$  angesammelten Pulse erhält man das Impulshöhenspektrum  $Q(K')$ . Es ist gegeben durch den aus den Anzahlen  $Q$  der in den verschiedenen Kanälen für  $i=1, \dots, L_0$  registrierten Pulse. Dieser Auswertevorgang läßt sich durch Verwenden von "Impulshöhenanalysatoren" auf elektronischem Wege automatisch durchführen.

### 6.3 Korrektur der Impulshöhenspektren

Das Impulshöhenspektrum  $Q(K')$  liefert zwar ein getreues Abbild der von den Meßgeräten gelieferten Verteilung der Impulshöhen, gibt aber den Verlauf der eigentlich gewünschten Verteilung, des auf den Detektor einfallenden Photonenstroms  $q(K)$ , nur verzerrt wieder. Verantwortlich hierfür sind Einflüsse verschiedener physikalischer Effekte auf den Meßprozeß, die teilweise im letzten Abschnitt schon angesprochen worden sind. Dieser Abschnitt

bildet eine Überleitung zu dem nächsten Kapitel, in dem die Diskussion der Fehler sowohl des experimentellen als auch der besprochenen numerischen Verfahren auf eine breite Basis gestellt wird. Dort wird gegebenenfalls die Diskussion der in diesen und bisherigen Abschnitten angesprochenen Meßfehler von  $q(K)$  sowie  $Q(K')$  vertieft. Im folgenden werden die Korrekturen, die man an  $Q(K')$  anzubringen hat, aufgezählt.

- a) Die Nachweiswahrscheinlichkeit  $W$  der Detektoren ist nur in einem Energiebereich  $40 \text{ keV} \lesssim K \lesssim 100 \text{ keV}$  gleich 1. Für kleine Photonenenergien wird  $W$  durch die Absorption durch Materialien, die sich zwischen Plasma und dem aktiven Bereich des Zählerkristalls befinden, verringert. Hierzu gehören insbesondere das Eintrittsfenster des Zählers, das Austrittsfenster am Torus und die sich zwischen beiden Fenstern befindliche Luft. Deren Einfluß kann durch Absorptionskoeffizienten der in Frage kommenden Absorbermaterialien für Röntgenstrahlung /37/ bis auf wenige Prozent genau beschrieben werden, wenn die Dicke der Absorber bekannt ist. Ist dies, wie z.B. im Falle inaktiver Schichten, die sich auf den Oberflächen der Zählerkristalle befinden, nicht der Fall, müssen zur Bestimmung von  $W$  aufwendige Verfahren angewendet werden /38/. Siehe hierzu auch /39/.

Für Photonenenergien  $K \gtrsim 100 \text{ keV}$  nimmt  $W$  mit  $K$  ab, da die freie Weglänge der Röntgenquanten für diese Energien größer wird als die Kristalldimensionen /37/. Zur Bestimmung von  $W$  in diesem Bereich kann man radioaktive Präparate verwenden, die  $\gamma$ -Strahlung in mehreren Linien bekannter Quantenenergie und Linienintensität aussenden. Hierzu können z.B. verwendet werden: Ta 182, Eu 153, Ba 133, Cs 137, etc.

Es ist empfehlenswert, die Bestimmung von  $W$  sowohl für große als auch kleine Photonenenergien mit Hilfe von Synchrotronstrahlung durchzuführen.

- b) Der Escape-Peak-Effekt führt zum Verlust eines Teils der vom Quant an das Kristall abgegebenen Energie als Fluoreszenzstrahlung, die sich mit einfachen Mitteln abschätzen läßt (/35/, /38/). Entsprechendes gilt für die 511 keV-Vernichtungsstrahlung.
- c) Neutronen können die in dem NaJ(Tl)-Kristall enthaltenen Jod-Kerne zur Emission von  $\gamma$ -Linienstrahlung der Energie  $\approx 60 \text{ keV}$  anregen. Die so erzeugte Linie in dem Spektrum  $Q(K')$  läßt sich numerisch herausfiltern /40/.

- d) Bei der Messung von Röntgenstrahlung mit NaJ(Tl)-Zählern ist die Impulshöhe  $K'$  nicht exakt proportional zur Photonenenergie  $K$ . Dies muß man bei der Umrechnung der Impulshöhenskala auf die Energieskala durch Verwendung einer geeigneten Kalibrierungsfunktion  $K' = K'(K)$  berücksichtigen.
- e) Ein Teil der im Zählerkristall umgesetzten Quantenenergie kann als Comptonstreustrahlung den Detektor wieder verlassen. Das führt in den Impulshöhenspektren  $Q(K')$  zu einer Umverteilung der Pulse zu niedrigeren Impulshöhen  $K'$  hin. Hierdurch wird also die Bestimmung der Energieabhängigkeit von  $q(K)$  erheblich erschwert. In einer früheren Arbeit /33/ wurde mit Hilfe von Simulationsrechnungen untersucht, inwieweit dieser Effekt zur Verzerrung des Impulshöhenspektrums führt. Es wurde festgestellt, daß die numerisch simulierten Impulshöhenspektren  $Q(K')$  unabhängig davon sind, ob man die Comptonstreuung im Zählerkristall berücksichtigt, wenn man für  $q(K)$  eine mit  $K$  exponentiell abfallende Funktion mit "Temperaturen"  $\lesssim 300$  keV vorgibt.
- f) Bei hohen Zählraten muß man Totzeit- und Pile-Up-Korrekturen an  $Q(K')$  durchführen /41/.

Aus den mit diesen Korrekturen versehenen Impulshöhenspektren  $Q(K')$  und unter Verwendung der mit Hilfe von Linienstrahlern bestimmten Kalibrierungsfunktion  $K' = K'(K)$  erhält man  $q(K) = \frac{Q(K'(K))}{\Delta K t}$ . Hier ist  $t$  die Meßzeit und  $\Delta K$  die Breite des eines Kanals entsprechenden Energieintervalls.

## 7. Fehleranalyse der Methodik zur Bestimmung von $f(\vec{p}, \vec{r})$ anhand einiger Meßbeispiele an suprathemischen Entladungen

In Kap. 4 bis Kap. 6 wurde die Bestimmung der Orts- und Energieabhängigkeit von  $f(\vec{p}, \vec{r})$  behandelt. Den Gegenstand dieses abschließenden Kapitels bildet eine Fehleranalyse dieser Verfahren. Sie wird anhand einiger Messungen, die an suprathemischen Entladungen in ASDEX durchgeführt worden sind, dargestellt.

Zur Fehleranalyse wird untersucht, welche Einflüsse die Fehler der in das Meß- und Auswerteverfahren eingehenden Parameter und Meßgrößen auf die Fehler der zu bestimmenden Verteilungsfunktion  $f$  haben. Dieser Frage wurde bereits in Kap. 4 in Zusammenhang mit den Stetigkeitseigenschaften der dort besprochenen Inversionsmethoden nachgegangen. Im folgenden wird der Schwer-

punkt mehr auf die vielfältigen Fehlerquellen gelegt, die Beiträge zu  $\Delta I$  oder zu den Fehlern der für die Entfaltung benutzten Wirkungsquerschnitte liefern. Die bisher verwendete Gliederung der Messung und Auswertung von Bremsstrahlungsspektren in Einzelschritte:

- Messung der Profile der Impulshöhenspektren  $Q(K')$  ( $K'$ : Impulshöhe);
- Bestimmung der Flußprofile  $J$  und Intensitätsprofile  $I$  aus  $Q$ ;
- Bestimmung von  $f_0$  und  $f_1$  bzw.  $F_0$  und  $F_1$  aus  $I$ ;

liefert auch für die Analyse der bei der Auswertung auftretenden und sich fortplanzenden Fehler eine günstige Aufgliederung (siehe Tabelle 2).

Diese können also in zwei Gruppen eingeteilt werden:

- a) in Fehler, die unmittelbar durch den Meßprozeß für Impulshöhenspektren  $Q(K')$  verursacht werden, also Eingangsfehler für die sich an die Messung anschließende numerische Auswertung darstellen,
- b) in Fehler, die in den auf die Messung folgenden Auswertungsschritten durch eine Unkenntnis der explizit vorgebbaren Parameter entstehen.
- c) Außerdem sind die Fehler zu untersuchen, die durch Fehler in der Vorgabe des Ansatzes für die Richtungsverteilung (Kap. 3) und in der der Verunreinigungskonzentrationen entstehen. Außer zu Fehlern  $\Delta I$  führen beide Einflüsse auch zu Fehlern in den für die Entfaltung benutzten Bremsstrahlungsquerschnitten. Es sei angemerkt, daß der Ansatz für die Richtungsverteilung und damit auch sein Fehler von der Anzahl der erschlossenen Beobachtungsrichtungen für die Bremsstrahlung abhängig ist. Siehe hierzu auch die Schlußbemerkungen in Abschnitt (7.7).

In den Abschnitten 7.2, 7.3 werden Fehler der Kategorie a, in den Abschnitten 7.4 und 7.5 solche der Kategorie b und c behandelt.

### 7.1 Analyse der bei der Messung von Impulshöhenspektren $Q(K')$ auftretenden Fehler

Die Fehler von  $J, I, F$ , die unmittelbar durch den Meßprozeß für Impulshöhenspektren  $Q(K')$  verursacht werden, werden mit dem den Größen  $J, I, F$  vorgesetzten Symbol  $\Delta_Q$  bezeichnet. Sie können ausgewertet werden, indem man ihre Fortpflanzung in der oben angegebenen Folge der Auswerteschritte:



Fehler  $\Delta_Q Q$  in Q bzw.  $\Delta_Q J$  in J  $\rightarrow$  von  $\Delta_Q Q$  bzw.  $\Delta_Q J$  verursachter Fehler  $\Delta_Q I$  in I  
 $\rightarrow$  von  $\Delta_Q I$  verursachter Fehler  $\Delta_Q F$  in F,

jeweils für die isotrope und anisotrope Komponente, untersucht. Voraussetzung für die Durchführbarkeit dieser Analyse ist trivialerweise, daß die Spanne, innerhalb der der Fehler von Q variiert, bekannt ist, oder, daß durch die Messung oder Meßserie zusammen mit Q eine den Fehler ausmachende Variation von Q vorgegeben wird, die ausgewertet werden kann.

Zu den in diesem Abschnitt zu diskutierenden Fehlern gehören:

- a) der aus dem statistischen Meßfehler  $\Delta_{Qa} Q$  von  $Q(K')$  resultierende Meßfehler  $\Delta_{Qa} J$  von J,  $\Delta_{Qa} I$  von I bzw.  $\Delta_{Qa} F$  von F;
- b) die durch die Nichtreproduzierbarkeit der suprathemischen Komponente  $\Delta_{Qb} F$  bedingte Unbestimmtheit  $\Delta_{Qb} Q$ ,  $\Delta_{Qb} J$  bzw.  $\Delta_{Qb} I$  (in einer Schußserie zeigt sich  $\Delta_{Qb} F$  in nicht beherrschbaren Variationen  $\Delta_{Qb} Q$  der gemessenen Impulshöhenspektren  $Q(K')$ ).
- c) der durch Störstrahlungen wie Wandbremsstrahlung und Comptonstreustrahlung an Kollimatorkomponenten erzeugte Fehler  $\Delta_{Qc} Q$ ,  $\Delta_{Qc} J$ ,  $\Delta_{Qc} I$  bzw.  $\Delta_{Qc} F$ ,
- d) Wenn der hochenergetische Teil des Energiebereiches nicht durch die Messung erfaßt werden kann, entsteht ein weiterer Fehler desjenigen Bremsstrahlungsanteils, der durch die Elektronen mit im Meßbereich liegenden Energien erzeugt wird:  $\Delta_{Qd} J$ ,  $\Delta_{Qd} I$ ,  $\Delta_{Qd} F$ . Genaueres siehe Abschnitt (7.2).

Da diese Fehler zu Beginn der Auswertefolge  $J \rightarrow I \rightarrow F$  erscheinen, muß man, um ihre Auswirkung auf den Fehler  $\Delta_Q F$  von F zu erhalten, ihre Ausbreitung i.a. durch sämtliche Einzelschritte der Auswertung verfolgen. Zu den in dieser Hinsicht schwierig zu bewältigenden Schritten gehört neben der Entfaltung bezüglich der Energie, dessen Fehlerverhalten bereits in Kap. 4 erörtert wurde, die Bestimmung der Intensitätsprofile aus den Flußprofilen.

Zur Zeit ist es noch nicht möglich, die durch den zuletzt angeführten Schritt bewirkte Fortpflanzung der Fehler  $\Delta_Q Q$  bzw.  $\Delta_Q J$  zu dem Fehler  $\Delta_Q I$  von I zu ermitteln. Die Fehlerfortpflanzung kann also nur für die Bestimmung von F aus I untersucht werden. Wenn man den Fehler  $\Delta_Q$  auswerten möchte, kann man demnach lediglich seine Fortpflanzung bei der Bestimmung des Linienintegrals

$$(7.1) \quad \bar{F}_0 \approx F_0 \cdot \lambda_{\text{eff}};$$

aus  $\int I_0 d\lambda = J_0$  unter Umgehung des Auswerteschrittes  $J \rightarrow I$ , ermitteln.

In dieser Definition für  $F_0$  bedeuten die Konstanten  $\lambda_{\text{eff}}$  die effektiven Längen der im Plasma liegenden Teile der zur Meßordnung gehörenden Sichtstrahlen. Diese Vorgehensweise ist aber auch nur dann möglich, wenn die den beiden Auswerteschritten entsprechenden Operationen miteinander vertauschbar sind (siehe auch Abschnitt 5.5).

Die zuletzt genannte Einschränkung ist allerdings für die Analyse von  $\Delta_{Q_c} Q$ ,  $\Delta_{Q_d} Q$  nicht von Bedeutung, da, wie sich in den folgenden Abschnitten zeigen wird, für diese Fehleranteile eine der folgenden Alternativen zutrifft:

- $\Delta_{Q_c} Q$ ,  $\Delta_{Q_d} Q$  sind ohnehin nicht ohne weitere experimentelle Hilfsmittel aus dem Impulshöhenspektrum  $Q(K)$  erkennbar und damit auch unter keinen Umständen numerisch auswertbar.
- Die den  $\Delta_{Q_c} Q$ ,  $\Delta_{Q_d} Q$  entsprechenden Eingangsfehler  $\Delta_{Q_c} I$ ,  $\Delta_{Q_d} I$  für den Teilschritt  $I \rightarrow F$  der Auswertung können statt aus  $\Delta_{Q_c} Q$ ,  $\Delta_{Q_d} Q$  unmittelbar aus  $I(K)$  abgeleitet werden. Eine Kenntnis der von dem Teilschritt  $J \rightarrow I$  gelieferte Antwort auf  $\Delta_{Q_c} J$ ,  $\Delta_{Q_d} J$  erübrigt sich daher in diesem Fall.

Für die Analyse der in diesem Abschnitt angesprochenen Fehler ergibt sich nach dem Gesagten folgende Gliederung.

Die Auswirkung des unter Punkt d aufgeführten Fehleranteils auf die Bestimmung von  $F$  braucht nur für den Teilschritt  $I \rightarrow F$  der Auswertung untersucht zu werden: es wird gezeigt, daß aus  $I(K)$  unmittelbar die auszuwertende Fehlerspanne  $\Delta_{Q_d} I$  entnommen werden kann. Da außerdem der Teilschritt  $J \rightarrow I$  den Charakter des Fehlertyps  $\Delta_{Q_d}$  nicht verändert, gelten die Ausführungen hierüber gleichermaßen für die Flußspektren  $J$ , wenn die zu den Auswerteschritten  $J \rightarrow I$ ,  $I \rightarrow F$  gehörenden Operationen miteinander vertauschbar sind.  $\Delta_{Q_d} I$  bzw.  $\Delta_{Q_d} J$  wird in den Abschnitten 7.2.1 bis 7.2.4 behandelt. Das in 7.2.5 durchgerechnete Beispiel bezieht sich auf den Fall, daß  $I$  durch  $J_0 = \int I_0 d\lambda$ ,  $F$  durch  $\bar{F}_0 / \lambda_{\text{eff}}$  (Gl. 7.1) ersetzt wird. Weiterhin wird hierfür nach Kap. 5.5 angenommen, daß alle im Plasma vorhandenen schweren Teilchenarten (H, D, Fe, usw.) bis auf vom Ort unabhängige Faktoren dieselbe Dichteprofilform  $n_a(r_0)$  aufweisen.

Die Auswirkung der unter a, b, c aufgeführten Fehleranteile auf die Bestimmung der Verteilungsfunktion ist Gegenstand der Abschnitte 7.3. Es wird die bereits erwähnte Vertauschbarkeit der Auswertoperationen angenommen und demgemäß nur die bei der Auswertung der Flüsse J erzeugten Fehler  $\Delta_{Q_a} \bar{F}$ ,  $\Delta_{Q_b} \bar{F}$ ,  $\Delta_{Q_c} \bar{F}$  von  $\bar{F}$  behandelt.

Es wird sich hierbei zeigen, daß es wie im unter Punkt d angeführten Fall auch in den unter den Punkten a,b,c aufgezählten Fehlerarten solche Anteile gibt, die man nur in dem Entfaltungsschritt  $I \rightarrow F_0$  und auch  $I \rightarrow F_1$  zu untersuchen braucht. Es handelt sich dabei wiederum um unmittelbar aus dem Verlauf von  $I(K)$  ableitbaren Fehlern oder numerisch auswertbaren Fehlerkennzeichen von  $I(K)$ . Für diese Fehler bleiben die in den Absätzen (7.3) entwickelten Verfahren im wesentlichen auch dann gültig, wenn man die in diese eingehenden Größen  $J_0$  durch  $I_0$  bzw.  $I_1$  sowie  $\bar{F}_0$  durch  $F_0$  bzw.  $F_1$  ersetzt.

In den folgenden Abschnitten wird in Zusammenhang mit den experimentellen Ursachen der jeweiligen Fehlerart auf die meßtechnische Seite der Problematik eingegangen.

## 7.2 Bestimmung von Elektronenverteilungsfunktionen aus unvollständigen Angaben über das Bremsstrahlungsspektrum $I(K)$ bzw. $J(K)$

### 7.2.1 Problemstellung

Der Dynamikbereich der in Abschnitt (6.1) beschriebenen Meßanordnung für die Bremsstrahlung, also ihr ausnutzbarer Zählratenbereich, ist nach oben und nach unten beschränkt: Nach oben wird er begrenzt durch die Totzeit, d.h., wegen der endlichen Responsezeit des benutzten Detektors auf ein einzelnes Quant können innerhalb einer bestimmten Zeitspanne nicht beliebig viele Quanten gemessen werden. Hohe Zählraten bewirken zudem das Auftreten von Pile-Up-Effekten und damit eine Verzerrung der gemessenen Spektren. Niedrige Zählraten sind mit großen statistischen Fehlern behaftet.

Durch diese Einschränkung des Dynamikbereiches wird auch der meßbare Intensitätsbereich begrenzt. Für  $T_{\min} \leq K \leq T_{\max}$  können (höchstens) nur solche Spektren  $I(K)$  korrekt gemessen werden, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\bar{I}_{\min} \leq \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} I(K) dK \leq \bar{I}_{\max}.$$

Hierbei sind  $\bar{I}_{\min}$ ,  $\bar{I}_{\max}$ , die minimalen bzw. maximalen noch korrekt meßbaren Gesamtintensitäten, durch die soeben diskutierten Zählratengrenzen gegeben, und zwar in Abhängigkeit von der benutzten Kollimatoranordnung.

Experimentell zeigt sich jedoch, daß die vom Plasma emittierte Bremsstrahlung den meßtechnisch zulässigen Bereich der Gesamtintensität  $[\bar{I}_{\min}, \bar{I}_{\max}]$  überschreitet. Deswegen ist eine Erfassung des gesamten interessierenden Photonenenergiebereiches  $T_{\min} \leq K \leq T_{\max}$  nur möglich, wenn man die Bremsstrahlung in mehreren sich aneinander anschließenden Bereichen gesondert mißt /46/. Die Einteilung des Meßbereiches  $[T_{\min}, T_{\max}]$  in Teilbereiche und die Dimensionierung der bei der Messung benutzten Kollimatoren hat man in Hinblick auf die zur Verfügung stehenden Dynamikbereiche der verwendeten Detektoren zu optimieren. Leider ist es aber aus technischen Gründen oft nicht möglich, den für die Messung in mehreren Bereichen erforderlichen Aufwand durchzuführen. In diesen Fällen muß man sich also mit der Messung in nur einem einzigen Bereich zufriedengeben.

In den in diesem Report geschilderten Untersuchungen ist speziell der sich an der oberen Grenzenergie der thermischen Komponente anschließende Teilenergiebereich  $[T_{\min}, T_m]$  für die suprathemische Komponente von Interesse.  $T_{\min}$  wird hierbei gleich 50 keV gesetzt. Diese Wahl von  $T_{\min}$  erfordert, daß  $T_m = 400$  keV gesetzt wird, um die obige Bedingung für die Dynamikanpassung zu erfüllen. Auf die Messung von  $I_{EH}(K)$  in dem sich an  $T_m$  anschließenden, "extrem hochenergetischen (EH-)Bereich" wird (notgedrungen) verzichtet, obwohl dort die Intensität keineswegs vernachlässigbar ist.

Aufgrund dieses Verzichts ist eine eindeutige Bestimmung der Verteilungsfunktion mindestens für Energien  $T > T_m$  nicht mehr möglich. Dieses erkennt man z.B. aus der Struktur des aus Gl. (4.2) hergeleiteten diskreten Gleichungssystems (4.2a). Da aber Meßinformation über  $I(K)$  für den kleineren, auf  $K \leq T_m$  eingeschränkten Energiebereich zur Verfügung steht, taucht die Frage auf, ob wenigstens für Energien  $T$ , die in diesem Bereich liegen,



also für  $T \leq T_m$ ,  $F_H(T) = F(T)$  einigermaßen genau bestimmt werden kann. Um sie zu beantworten, muß ermittelt werden, wie groß die Variationen in  $F_H(T)$  sind, die von solchen in  $F_{EH}(T)$  bei der auf Gl. (4.2) basierenden, linearen Entfaltung erzeugt werden, d.h., es muß aus Gl. (4.2) ein funktionaler Zusammenhang zwischen  $F_H$  und  $F_{EH}$  gefunden werden.

7.2.2 Ein durch die Vorgabe eines Bremsstrahlungsspektrums vermittelter Zusammenhang zwischen  $F_H$  und  $F_{EH}$

Nach den Ausführungen im letzten Abschnitt 7.2.1 ist ein Zusammenhang zwischen  $F_H$  für den unteren Energieteilbereich  $[T_{\min}, T_m]$  und  $F_{EH}$  für den oberen Energieteilbereich  $[T_m, T_{\max}]$  gesucht. Ihn erhält man aus Gl. (4.2), indem man der Problemstellung gemäß die im Bereich  $T_{\min} \leq K \leq T_m$  gemessene Bremsstrahlung  $I(K)$  während der Variation von  $F_H$  bzw.  $F_{EH}$  festhält. Spaltet man für  $T_{\min} \leq K \leq T_m$  die gemessene Intensität  $I(K)$  auf in den von  $F_H$  erzeugten Anteil  $I_{FH}(K)$  und den von  $F_{EH}$  erzeugten Anteil  $I_{FEH}(K)$ , so folgt, daß

$$\begin{aligned}
 (7.2) \quad I(K) &= I_{FH}(K) + I_{FEH}(K) \\
 &= \int_K^{T_m} G(K,T) F_H(T) dT + \int_{T_m}^{T_{\max}} G(K,T) F_{EH}(T) dT \\
 &= \int_K^{T_{\max}} G(K,T) F(T) dT
 \end{aligned}$$

unabhängig von Variationen von  $F_{EH}(T)$  bzw.  $F_H(T)$  ist. Hierbei ist

$$I_{FH}(K) = \int_K^{T_m} G(K,T) F_H(T) dT,$$

$$I_{FEH} = \int_{T_m}^{T_{\max}} G(K,T) F_{EH}(T) dT \quad \text{für} \quad T_{\min} \leq K \leq T_m.$$

(Man beachte die Bezeichnungsweise; es ist  $I_{FEH} \neq I_{EH}$ !) Aus (7.2) ergibt sich durch Umstellen der Terme eine Gleichung, die die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion  $F_H(T)$ ,  $T \leq T_m$ , von  $F_{EH}$  explizit beschreibt:

$$(7.3) \quad \int_K^{T_m} G(K, T) F_H(T) dT = I(K) - \int_{T_m}^{T_{\max}} G(K, T) F_{EH}(T) dT; \quad T_{\min} \leq K \leq T_m,$$

oder

$$(7.3a) \quad \int_K^{T_m} G(K, T) F_H(T) dT = I_{FH}(K).$$

Da nach obiger Definition  $I_{FH}(K)$  nur von Elektronen mit Energien  $T \leq T_m$  erzeugt wird, gelten für Gl. (7.3) dieselben Überlegungen, wie sie in Kap. 4.3 für Gl. (4.2) durchgeführt worden sind, d.h.,

$$(7.4) \quad I_{FH}(K) = I(K) - I_{FEH}(K) = 0 \quad \text{für } K \geq T_m.$$

Die Lösung von (7.3a) (für ein vorgegebenes  $F_{EH}(T)$ ) kann man also mit den bereits für die Lösung von Gl. (4.2) aufgeführten linearen Verfahren erhalten. Für ein fest vorgegebenes Bremsstrahlungsspektrum kann also  $F_H(T)$  in Abhängigkeit von  $F_{EH}$  und somit ihre gesuchte Schwankungsbreite durch Variation von  $F_{EH}$  bestimmt werden. Mit der Schwankungsbreite von  $F_{EH}$  erhält man mit derselben Rechnung auch die von  $I_{FH}$  und  $I_{FEH}$ . Nach Gl. (7.2), 1. Zeile, sind diese miteinander identisch. Sie bilden den durch die Unkenntnis von  $F_{EH}$  erzeugten Anteil  $\Delta_{Qd} I_{FH}$  vom Fehler  $\Delta I_{FH}$ .

### 7.2.3 Berechnung der Variationsbreite von $F_H$ für $T \leq T_m$ aus Variationen von $F_{EH}$

Wie bereits in Kap. 7.2.1 angekündigt, ist es das Ziel, die durch die Variation von  $F_{EH}$  erzeugte Variation von  $F_H$  bei festgehaltenem Spektrum  $I(K)$ ,  $K \leq T_m$ , zu berechnen. Dies geschieht durch Berechnen eines Ensembles von Verteilungen  $F_H$  aus einem Ensemble von Verteilungen  $F_{EH}$  mit Hilfe von Gl. (7.3). Die Vorgabe beliebiger Funktionen  $F_{EH}$  im extrem hochenergetischen Bereich führt jedoch auf unbeschränkte Variationen, d.h., zu einem unbegrenzt großen Bestimmungsfehler von  $F_H(T)$  für  $T \leq T_m$ . Wenn aber Variationen von  $F_{EH}$  in Gl. (7.3) unbeschränkt erlaubt sind, ist das zum Schluß des Kap. 7.2.1 formulierte Problem nicht lösbar.

Man kann dennoch zu brauchbaren Aussagen über die Variationsbreite von  $F_H$  gelangen, ohne sich auf Messungen im extrem hohen Energiebereich oder auf physikalisch begründete Informationen über  $F_{EH}$  stützen zu müssen. Dies zu zeigen, ist Gegenstand dieses und des folgenden Abschnitts. Ermöglicht wird

eine Bestimmung der Variationsbreite von  $F_H$  dadurch, daß in dem für den unteren Energiebereich  $K \leq T_m$  gemessenen Spektrum  $I(K)$  neben Information über  $F_H$  auch Information über  $F_{EH}$  enthalten ist. Besonders deutlich wird dieser Sachverhalt an der oberen Grenze  $K = T_m$  des unteren Energiebereiches: Nach Gl. (2.5) kann die für  $K = T_m$  gemessene Bremsstrahlung  $I(T_m)$  nur von den Elektronen im extrem hohen Energiebereich, also mit Energien  $T \geq T_m$ , erzeugt werden. Deshalb unterliegt die Verteilungsfunktion  $F_{EH}$  einer Einschränkung, d.h., einer durch Gl. (7.2) für  $K = T_m$  gelieferten Nebenbedingung für die Wahl von  $F_{EH}(T)$ ,  $T \geq T_m$ :

$$(7.5) \quad I(T_m) = I_{F_{EH}}(T_m) = \int_{T_m}^{T_{\max}} G(T_m, T) F_{EH}(T) dT.$$

Das bedeutet, daß  $I_{F_{EH}}(T_m)$  bei der Variation von  $F_{EH}$  auf den von  $F_{EH}$  unabhängigen Wert  $I(T_m)$  festgehalten wird, damit auch für  $K < T_m$  die Variation von  $I_{F_{EH}}(K)$  bzw.  $I_{F_H}(K)$  erheblich eingeschränkt wird und so auf ein endliches Intervall begrenzt bleibt. Diese Nebenbedingung führt zu einer Abschätzungsmethode der Variationsbreite von  $F_H$ , die nur wenige Berechnungen von Funktionen  $F_H$  erfordert.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die Berechnung der Variation von  $F_H$  mit diskretisierten Funktionen  $F_{EH}$  durchgeführt. Hierzu wird das extrem hochenergetische Energieintervall  $[T_m, T_{\max}]$  in  $L_{EH}$  Subintervalle  $[T_{EH,i}, T_{EH,i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, L_{EH}$ , der Breite  $\Delta T_{EH} = T_{EH,i+1} - T_{EH,i}$ , aufgeteilt. Um die Bestimmung von  $F_H$  aus  $I_{F_H}$  numerisch zu stabilisieren, d.h., die Umkehrabbildung der durch Gl. (7.3) definierten Abbildung in eine stetige Form zu überführen, kann eine der in Abschnitt 4.3 diskutierten Verfahren angewendet werden.

Weiterhin kann Gl. (7.3) und somit der Gang der Rechnung durch Einführung der Operatorenschreibweise übersichtlicher gestaltet werden. Mit

$$(7.6) \quad \underline{G}_H(F_H) = \int_K^{T_m} G(K, T) F_H(T) dT$$

und

$$(7.7) \quad \underline{G}_{EH}(F_{EH}) = \int_{T_m}^{T_{\max}} G(K, T) F_{EH}(T) dT$$

wird Gl. (7.3) zu:

$$(7.3b) \quad \underline{G}_H(F_H) = I(K) - \underline{G}_{EH}(F_{EH})$$

mit der formalen Lösung

$$(7.8) \quad F_H = G_H^{-1}(I(K) - G_{EH}(F_{EH})).$$

Schließlich kann die Rechnung ohne Beschränkung der Allgemeinheit dadurch vereinfacht werden, daß man anstelle von  $F_H$  ein beliebiges, aber linear gebildetes Moment  $M$  aus  $F_H$

$$(7.9) \quad \mu_{F_{EH}} = M(F_H) = M(G_H^{-1}(I(K) - G_{EH}(F_{EH})))$$

bestimmt. Beispiele für  $\mu$  sind Dichte  $n_H$  und Gesamtenergie  $\bar{T} \cdot n_H$  der suprathemischen Komponente mit Energien  $T \leq T_m$ , oder auch der Wert  $F_H(T_j)$ , den  $F_H$  für eine bestimmte Stelle  $T = T_j \leq T_m$  annimmt. Die Aufgabe besteht also darin, die Variationsbreite von  $\mu$  aus der von  $F_{EH}$  zu bestimmen.

Die Nebenbedingung für  $F_{EH}$ , Gl. (7.5), läßt vermuten, daß für diese Berechnung nicht alle möglichen Verteilungsfunktionen  $F_{EH}(T)$  für  $T \geq T_m$ , sondern nur die "monoenergetischen" Funktionen,  $\hat{F}_i$ , benötigt werden. Die  $\hat{F}_i$  bilden eine Teilmenge der Funktionen  $F_{EH}$ , die im Bereich  $T \geq T_m$  definiert sind, und sind aus den in Kap. (2.2) definierten "Monoimpulsverteilungen" durch eine Variablentransformation ableitbar:

$$(7.10) \quad \hat{F}_i = \begin{cases} F_{EH,i}^0 \geq 0 \text{ für } T_{EH,i} \leq T \leq T_{EH,i+1}, \quad i = 1, \dots, L_{EH} \\ 0 \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

Diese Funktionen werden mit Hilfe der Nebenbedingung Gl. (7.5) normiert, d.h. sie sollen die von  $i$  und  $\Delta T_{EH}$  abhängigen mit Gl. (7.5) verträglichen Maximalbeträge  $F_{EH,i}^0$  von  $F_{EH}(T_{EH,i})$  darstellen. Diese werden durch die untenstehende, aus Gl. (7.5) folgende Gl. (7.5a) bestimmt.

Die soeben aufgestellte Vermutung läßt sich anhand der Abb. (8) veranschaulichen. Diese Skizze zeigt

- für eine kleine Auswahl von monoenergetischen, im Energiebereich  $T > T_m$  liegenden Elektronenkomponenten  $\hat{F}_i$  die von ihnen erzeugten Bremsstrahlungsspektren  $I_{\hat{F}_i}(K)$ ;
- das Bremsstrahlungsspektrum  $I_{F_{EH}}$  für eine beliebige Kombination  $F_{EH}$  aus den  $\hat{F}_i$ .



Sowohl  $I_{\hat{F}_i}$  als auch  $I_{F_{EH}}$  genügen der Nebenbedingung Gl. (7.5). Wie die Skizze veranschaulicht, liegt daher für  $K < T_m$  die Intensität  $I_{F_{EH}}$  innerhalb der Variationsbreite  $I_{\hat{F}_i}$ .

Es wird also folgendes behauptet: Sei  $\Delta\mu$  die sich aus Gl. (7.9) ergebende Variationsbreite von  $\mu$ , wenn man der Rechnung alle mit der Bedingung (7.5) verträgliche Verteilungen  $F_{EH}$  zugrundelegt. Genauer gesagt, sei  $\Delta\mu$  definiert durch

$$\Delta\mu = |\mu_o - \mu_u|,$$

wobei  $\mu_o, \mu_u$  das Maximum bzw. Minimum der auf diese Weise gebildeten, den  $F_{EH}$  zugeordneten Momenten von  $F_H$  ist. Ferner sei  $\tilde{\Delta}\mu$  die entsprechende Größe, die man, ebenfalls unter Beachtung von Gl. (7.5), aus den monoenergetischen Verteilungen  $\hat{F}_{EH,i}$  für  $i = 1, \dots, L_{EH}$ , zugeordneten Momenten

$$(7.11) \quad \mu_{\hat{F}_i} = M(\underline{G}_H^{-1}(I(K) - \underline{G}_{EH}(\hat{F}_i))), \quad i = 1, \dots, L_{EH},$$

erhält:

$$(7.11a) \quad \tilde{\Delta}\mu = |\tilde{\mu}_o - \tilde{\mu}_u|, \quad \text{mit} \quad \tilde{\mu}_u \leq \mu_{\hat{F}_i} \leq \tilde{\mu}_o.$$

(Wegen der zu Beginn dieses Abschnitts getroffenen Voraussetzung über  $\underline{G}_H^{-1}$  und wegen  $T_{\max} < \infty$  sind die Größen  $\mu_u, \tilde{\mu}_u, \mu_o, \tilde{\mu}_o$  endlich). Dann gilt:

$$(7.12) \quad \Delta\mu = \tilde{\Delta}\mu, \quad \mu_u = \tilde{\mu}_u, \quad \mu_o = \tilde{\mu}_o.$$

Die Behauptung kann man mit Hilfe der Linearität der Operatoren  $\underline{G}_H, \underline{G}_{EH}$ , beweisen, d.h., man kann ausnutzen, daß sich jedes aus Gl. (7.9) ergebende Moment  $\mu_{\hat{F}_{EH}}$  sich linear aus zu den monoenergetischen Komponenten  $\hat{F}_i$  zugeordneten Momenten  $\mu_{\hat{F}_i}$  zusammensetzt. Allerdings hat man dabei zu beachten, daß nach der Bemerkung zu Gl. (7.10) die Nebenbedingung Gl. (7.5) für die monoenergetischen Komponenten  $\hat{F}_i$  in der Form

$$(7.5a) \quad I_{\hat{F}_i}(T_m) = I(T_m) = G(T_m, T_{EH,i}) \cdot F_{EH,i}^o \cdot \Delta T_{EH} \\ = \underline{G}_{EH}(\hat{F}_i)(T_m) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, L_{EH},$$

erfüllt werden soll. Das bedeutet, daß i.a.  $|F_{EH,i}^o| < |F_{EH}(T_{EH,i})|$  ist. Im Unterschied zu der in Kap. 2 durchgeführten Zerlegung von  $f$  in  $\hat{f}_j$  benötigt man Entwicklungskoeffizienten  $C_i$ , Betrag kleiner 1, um  $F_{EH}$  durch die in Gl. (7.10) definierten  $\hat{F}_i$  darzustellen.

$$(7.13) \quad F_{EH}(T) = \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \cdot \hat{F}_i.$$

Diese Entwicklung führt die Nebenbedingung Gl.(7.5) in folgende Form über:

$$(7.5b) \quad I_{F_{EH}}(T_m) = I(T_m) = \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \hat{F}_i(T_m).$$

Wegen der Linearität der Faltungsoperation folgt hieraus

$$\begin{aligned} I(T_m) &= \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \hat{F}_i(T_m) = \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \frac{L_{EH}}{G_{EH}}(\hat{F}_i)(T_m) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \right) \cdot I(T_m) \end{aligned}$$

und deshalb

$$(7.14) \quad \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i = 1; \quad C_i \geq 0 \text{ für alle } i \text{ (oder } C_i \leq 0 \text{ für alle } i),$$

$C_i$  wechselt mit  $i$  nicht das Vorzeichen. Anderenfalls würde  $F_{EH}$  bei der Variation von  $T_{EH}$  das Vorzeichen wechseln. Ein Vorzeichenwechsel findet aber für  $F_0$ , und, wenn die Elektronen z.B. in einer Stromtriebentladung durch Landau-Wechselwirkung in eine einheitliche Richtung getrieben werden, auch für  $F_1$  im gesamten Energiebereich  $[T_{min}, T_{max}]$  nicht statt.

Diese aus den Gln. (7.5) folgende Normierungsbedingung Gl.(7.14) für die Entwicklungskoeffizienten  $C_i$  von  $F_{EH}$  kann man nun dazu verwenden, das der Verteilung  $F_{EH}$  zugeordnete Moment  $\mu_{F_{EH}}$  von  $F_H$  aus den den  $\hat{F}_i$  zugeordneten Momenten  $\mu_{\hat{F}_i}$  zu berechnen. Man erhält:

$$\begin{aligned} \mu_{F_{EH}} = M(F_H) &= M\left\{ \frac{L_{EH}}{G_H^{-1}} \left[ I(K) - \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \hat{F}_i \right] \right\} && \text{Gl. [(7.9), (7.13)]} \\ &= M\left\{ \frac{L_{EH}}{G_H^{-1}} \left[ I(K) - \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \frac{L_{EH}}{G_{EH}}(\hat{F}_i) \right] \right\} \\ &= M\left\{ \frac{L_{EH}}{G_H^{-1}} \left[ \left( \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \right) I(K) - \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \frac{L_{EH}}{G_{EH}}(\hat{F}_i) \right] \right\} && \text{[Gl. (7.14)]} \\ &= M\left\{ \frac{L_{EH}}{G_H^{-1}} \left[ \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \left( I(K) - \frac{L_{EH}}{G_{EH}}(\hat{F}_i) \right) \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i M\left\{ \frac{L_{EH}}{G_H^{-1}} \left[ I(K) - \frac{L_{EH}}{G_{EH}}(\hat{F}_i) \right] \right\} = \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \mu_{\hat{F}_i} && \text{Gl. [(7.11)]} \end{aligned}$$

mit Hilfe von Gl. (7.14). Die Beziehung (7.14) sorgt also dafür, daß in jedem Teil dieser Gleichungskette die Argumentfunktion von  $G_H^{-1}$  an der Stelle  $K = T_m$  verschwindet, also die in Kap. 4.2 aufgestellte Vorbedingung zur Auflösung der Gl. (7.3a), d.h., zur Anwendung von  $G_H^{-1}$  erfüllt.

Mit Hilfe wiederum der Gl. (7.14) und der Gleichung (7.11a),

$$\tilde{\mu}_u \leq \mu_{\hat{F}_i} \leq \tilde{\mu}_o, \quad i = 1, \dots, L_{EH},$$

läßt sich auch

$$\mu_{F_{EH}} = \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \mu_{\hat{F}_i}$$

abschätzen zu

$$\tilde{\mu}_u = \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \tilde{\mu}_u \leq \mu_{F_{EH}} = \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \mu_{\hat{F}_i} \leq \sum_{i=1}^{L_{EH}} C_i \tilde{\mu}_o = \tilde{\mu}_o.$$

Also gilt:

$$\tilde{\mu}_u \leq \mu_u \leq \mu_{F_{EH}} \leq \mu_o \leq \tilde{\mu}_o.$$

Da diese Beziehung auch für  $F_{EH} = \hat{F}_i$ ,  $i=1, \dots, L_{EH}$ , gilt, muß auch

$$\tilde{\mu}_u = \mu_u \quad \text{und} \quad \tilde{\mu}_o = \mu_o$$

erfüllt sein. Damit ist die o.a. Behauptung bewiesen und auch bestätigt, daß die hier vorgestellte Methode eine Abschätzung von  $\Delta\mu$  und auch eine Angabe des Mittelwerts  $\mu$  allein aus Messungen von  $I(K)$  für  $K \leq T_m$  erlaubt. Es zeigt sich hiermit auch, daß ein einziger Parameter, nämlich  $T_{EH}$ , ausreicht, um denjenigen Anteil des Variationsbereiches von  $F_{EH}$  bzw.  $F_H$ , der mit der Nebenbedingung (7.5) verträglich ist, vollständig zu erfassen.

Allerdings macht diese Methode keine von den Messungen von  $I(K)$  unabhängig geltende Aussage über die Größe des zu erwartenden relativen Fehlers  $\Delta\mu/\mu$ . Der Grund hierfür liegt darin, daß  $\Delta\mu/\mu$  wesentlich von dem nur experimentell erhältlichen Verhältnis: Dichte  $n_{EH}$  der Elektronen mit Energien  $T > T_m$  zu Dichte  $n_H$  der Elektronen mit  $T \leq T_m$  bestimmt wird. Wenn z.B. die Dichte  $n_H$  von  $F_H$  im Vergleich zu  $n_{EH}$  verringert wird, so führt eine Variation von

$F_{EH}$  sicher zu einem Anwachsen des relativen Fehlers  $\Delta n_H/n_H$ . Die in 7.2.1 gestellte Frage nach der Größe des Einflusses von  $F_{EH}$  auf die Messung von  $F_H$  kann also nur anhand experimenteller Beispiele beantwortet werden.

Deshalb wird das oben entwickelte Auswerteverfahren für unvollständig gemessene Bremsstrahlungsspektren anhand eines an einer suprathemischen Entladung gemessenen Intensitätsspektrums demonstriert. Als Meßbeispiel wurde ein mit Hilfe der radialen Diagnostik im Bereich  $K \leq T_m = 400$  keV aufgenommenes Spektrum (Schuß 13045), das über die Dauer der Einstrahlung von "Lower-Hybrid"-Wellen zeitlich gemittelt worden ist, genommen. Mit Hilfe von Gl. (7.11) wurde die Empfindlichkeit von  $F_H(T)$ ,  $T \leq T_m$ , gegen eine Variation von  $F_{EH}$  untersucht. Hierzu wurden für 5 verschiedene monoenergetische Komponenten im extrem hochenergetischen Bereich mit den Elektronenenergien  $T_{EH,i} = 447$  keV, 494 keV, 635 keV, 918 keV und 1435 keV die Momente  $n_H$  und  $T \cdot n_H$  für  $F_H$  berechnet. Diese Momente sind in der Abb. (9) gegen  $T_{EH,i}$  aufgetragen. Die Diagramme zeigen, daß sich die Momente mit  $T_{EH}$  nur schwach ändern, d.h., man erhält das günstige Ergebnis, daß im Falle von Messungen an einer suprathemischen Komponente bis zu Energien von  $T_m = 400$  keV der durch die Unbestimmtheit des Spektrums oberhalb von  $T_m$  verursachte Fehler in  $F_H$  tolerierbar ist.

Die für die Verteilung  $F_{EH}$  für  $T \geq T_m$  aufgestellte Randbedingung Gl. (7.5) läßt auch grobe Aussagen über  $F_{EH}$  zu. Wertet man unter Vorgabe des gemessenen Wertes  $I(T_m)$  Gl. (7.5) für die 5 oben aufgeführten monoenergetischen Komponenten der Energien  $T_{EH,i}$  und der Breite  $\Delta T_{EH}$  aus, so erhält man deren maximal möglichen Dichten  $\tilde{f}^0 \cdot \Delta T_{EH} = \hat{n}_{EH,i}$  im Bereich  $T \geq T_m$ . Diese sind in Abb. (10) gegen  $T_{EH,i}$  aufgetragen. Da  $\hat{n}_{EH,i}$  für  $T_{EH,i} = 447$  keV um einen Faktor 10 höher ist als die zu  $\tilde{f}_H$  im Energiebereich von  $T \approx 350$  keV bis  $T + \Delta T_{EH}$  gehörende Dichte, hat diese Abschätzung von  $\tilde{f}_{EH} \cdot \Delta T_{EH}$  nach oben für sich allein genommen nur wenig Aussagekraft. Dadurch aber, daß die Bedingung Gl. (7.4) nicht nur für  $T_m$ , sondern auch entsprechend für Energien  $T'_m < T_m$  gilt, läßt die oben erläuterte Rechenmethode neben der bereits behandelten eine große Anzahl weiterer, von dieser unabhängigen Abschätzungen der zur Diskussion stehenden Variationen zu. Diese zusammen ergeben möglicherweise brauchbare Abschätzungen von  $\tilde{f}_{EH} \cdot \Delta T_{EH}$  nach oben. Da der Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlung umso schwächer mit  $K$  abfällt, je höher  $T$  ist (Abb. 4), erlauben sie auch die Angabe einer unteren Grenze für  $T_{max}$ .



#### 7.2.4 Lokalität der Entfaltungsoption bezüglich der Energievariablen K und T

Über die Abhängigkeit der Momente  $n_H$ ,  $n_H \cdot \bar{T}$  von dem extrem hochenergetischen Teil  $F_{EH}$  der Verteilungsfunktion kann man aus Abb. (10) folgendes entnehmen:  $n_H$ ,  $n_H \cdot \bar{T}$  variieren am stärksten mit denjenigen Komponenten der Elektronenverteilung, die zu den dicht oberhalb von  $T_m$  liegenden Energien  $T_{EH}$ , also zu dem sich unmittelbar an  $T_m$  anschließenden schmalen Energiebereich  $T_m \leq T_{EH} \lesssim T_m + 200$  keV gehören. Dasselbe erwartet man von dem Dichtemoment, das nur aus den zu einem kleinen Teilintervall der Breite  $\Delta T$  von dem Bereich  $[T_{min}, T_m]$  gehörenden Elektronen gebildet wird, bzw. von der über dieses Intervall gemittelten Verteilungsfunktion.  $\Delta T$  ergibt sich beispielsweise durch Diskretisierung des Bereiches  $[T_{min}, T_m]$ .

Im folgenden soll dieser Sachverhalt auf die Bestimmung der Verteilungsfunktion  $F$  in dem obersten dieser Energieintervalle,  $T_m - \Delta T \leq K$ ,  $T \leq T_m$ , angewendet werden. Für  $F(T)$ ,  $T_m - \Delta T \leq T \leq T_m$ , liefert Gl. (7.2) den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 (7.3c) \quad & \int_{T_m - \Delta T}^{T_m} G(T - \Delta T, T) F(T) dT = G(T_m - \Delta T, T^*) \cdot F(T^*) \Delta T \\
 & = I(T_m - \Delta T) - \int_{T_m}^{T_{max}} G(T_m - \Delta T, T) \cdot F_{EH}(T) dT \\
 & = I(T_m - \Delta T) - I_{EH}(T_m - \Delta T); \quad T_m - \Delta T \leq T^* \leq T_m;
 \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Mittelwertsatzes und hieraus

$$(7.3d) \quad F(T^*) = \frac{I(T_m - \Delta T) - I_{EH}(T_m - \Delta T)}{G(T_m - \Delta T, T^*) \cdot \Delta T} .$$

In diesen Ausdruck für  $F(T^*)$  geht allein über die Größe  $I_{EH}(T_m - \Delta T)$  eine Abhängigkeit von  $F_{EH}(T)$ ,  $T \geq T_m$ , ein. Wie schon früher erläutert, wird die Variation von  $I_{EH}(T_m - \Delta T)$  mit  $F_{EH}$  und damit die von  $F(T^*)$  dadurch begrenzt, daß bei der Variation  $I_{EH}(T_m)$  als vorgegebener Meßwert konstant bleibt.

Aus der Aussage, daß nur für  $T_m \leq T \lesssim T_m + 200$  keV eine Variation von  $F_{EH}(T)$  zu einer von  $F(T^*)$  führt, folgt, daß  $F(T^*)$  funktional nur von derjenigen Bremsstrahlung abhängt, die von Elektronen mit solchen Energien erzeugt wird. Zur exakten Bestimmung von  $F(T^*)$  braucht also  $I(K)$  nur für  $T_m \leq K \lesssim T_m + 200$  keV bekannt zu sein. Derselbe Schluß gilt auch für andere

Werte von  $T_m$ . Die Entfaltungsoperation  $I \rightarrow F$  ist also im Gegensatz zu der dazu inversen Faltungsoperation  $F \rightarrow I$  eine annähernd lokale Operation: Diese Eigenschaft wird ausgeprägter für wachsende  $Z$ . Für  $Z \gg 1$  wird nach Kap. 2

$$\left| \frac{G(T_m - \Delta T, T) - G(T_m, T)}{G(T_m - \Delta T, T^*)} \right| \ll 1.$$

Wenn diese Bedingung so gut erfüllt werden kann, daß

$$\left| \int_{T_m}^{T_{\max}} [G(T_m - \Delta T, T) - G(T_m, T)] \cdot F_{EH}(T) dT \right| \ll \left| I(T_m - \Delta T) - \int_{T_m}^{T_{\max}} G(T_m - \Delta T, T) \cdot F_{EH}(T) dT \right| \approx |\Delta T \cdot G(T_m - \Delta T, T) \cdot F(T^*)|$$

oder

$$\left| \int_{T_m}^{T_{\max}} [G(T_m - \Delta T, T) - G(T_m, T)] \cdot F_{EH}(T) dT \right| \ll \left| I(T_m - \Delta T) - \int_{T_m}^{T_{\max}} G(T_m, T) F_{EH}(T) dT \right|$$

ist, folgt aus Gl. (7.3d) die bereits in Kap. 4 auf anderem Wege hergeleitete Näherungsformel (4.12) für Bremsstrahlungsspektren. Sie arbeitet exakt lokal.

### 7.3 Analyse der durch den Meßprozeß erzeugten Fehleranteile $\Delta Q_a$ , $\Delta Q_b$ und $\Delta Q_c$

In diesen Abschnitten soll der statistische Meßfehler  $\Delta Q_a J$ , der durch die Nichtreproduzierbarkeit der suprathemischen Komponente,  $\Delta Q_b \bar{F}$ , bedingte Unbestimmtheit  $\Delta Q_b J$ , von  $J(K)$ , sowie die von ihnen verursachten Folgefehler behandelt werden. Hierbei sollen auch die Anteile von  $\Delta Q_c J$  und ihre Folgefehler berücksichtigt werden. Wie bereits im vorletzten Abschnitt 7.1 angekündigt, wird vorausgesetzt, daß die Entfaltungsoperation außer auf  $I(K)$  auch auf den Fluß  $J(K)$  anwendbar ist.

In den nächsten Abschnitten werden zwei zur Bestimmung von  $\Delta_{Q_a} \bar{F}_0$ ,  $\Delta_{Q_b} \bar{F}_0$  geeignete Verfahren beschrieben, die unabhängig vom verwendeten stabilisierten Inversionsverfahren  $J_0 \rightarrow F_0$  anwendbar sind, soweit dieses linear in  $J_0$  bzw.  $\bar{F}_0$  ist. Voraussetzung für ihre Anwendbarkeit bei der Fehleranalyse ist nur, daß man bei der Entfaltung anstelle der ungeglätteten Spektren  $J_0(K)$  analytische Funktionen  $J_{0,FIT}(K)$  verwendet, die man erhält, indem man  $J_0(K)$  durch einen analytischen Ansatz approximiert. Eine geeignete Approximationsmethode wird im folgenden Abschnitt beschrieben. Die Verwendung von analytischen Approximationen für  $J_0$  erlaubt es zudem auch, Anteile von  $\Delta_{Q_c} I$  auf einfache Weise mit zu berücksichtigen.

In Abschnitt 7.3 werden diese Methoden auf Messungen an ASDEX angewendet, um sie zu testen und um die Physik des Stromtriebs zu untersuchen. Hierzu werden die Auswertungsergebnisse von radialen Bremsstrahlungsmessungen  $J_0$ , also Ergebnisse für die isotrope Komponente  $\bar{F}_0(T)$ , für die Stromtriebserie #13045 - #13053 zusammengetragen. Die Messungen wurden jeweils in der Stromtriebphase der Entladung durchgeführt. Ausgewertet wird der Bereich  $T \leq T_m = 400$  keV. Zu der Zusammenstellung gehören die für die Dichte  $n_H$  und Durchschnittsenergie  $\bar{T}$  der suprathemischen Komponente für  $T \leq T_m$  bestimmten Werte, und teilweise ihre nach beiden Verfahren bestimmten Streuungen und Serienmittelwerte. Aus einem Vergleich der nach den beiden angeführten Methoden bestimmten Streuungen von  $\bar{T}$  und  $n_H$  kann die Genauigkeit des in diesem Kapitel beschriebenen Bestimmungsverfahrens für  $F_0$  beurteilt werden.

### 7.3.1 Approximation der Spektren durch analytische Funktionen und zwei Methoden zur Fehlerabschätzung

Eine Auswertung von an ASDEX gemessenen Bremsstrahlungsspektren unter Verwendung stabilisierender Inversionsverfahren liefert bereits Hinweise, ob zusätzliche Glättungsmaßnahmen erforderlich sind. Der statistische Fehler von  $J_0$  ist so groß, daß ohne Glättungen die Entfaltung keine verwertbaren Ergebnisse für  $\bar{F}_0(T)$  liefert. Aus diesem Grunde muß, bevor  $J_0(K)$  entfaltet wird, der statistische Fehler von  $J_0(K)$  durch Glättung verkleinert werden. Allerdings nimmt man dabei, wie darauf bereits in Abschnitt 4.2 hingewiesen worden ist, die Entstehung eines systematischen Fehlers in Kauf.

Die Glättung erfolgt dadurch, daß man für die Auswertung  $J_0(K)$  durch eine nur von wenigen Parametern  $A_i$  abhängige analytische Funktion  $J_{0,FIT}(K, A_1, A_2, A_3 \dots)$

ersetzt. Die  $A_i$  werden durch eine Anpassung von  $J_{o,FIT}(K, A_1, \dots)$  an  $J_o(K)$  nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt. Hierzu wird ein in Bevington /42/ dargestelltes kombiniertes Iterations- und Gradientenverfahren benutzt. Damit  $J_{o,FIT}$  mit Hilfe von Gl. (4.2) oder einer ihrer stabilisierten Varianten entfaltet werden kann, muß  $J_{o,FIT}$  so angesetzt werden, daß  $J_{o,FIT}(T_{max}) = 0$  ist (s. Gl. (4.1)). Für die im folgenden beschriebene Fehleranalyse von  $J_{o,FIT}$  und den aus  $J_{o,FIT}$  berechneten Verteilungsfunktionen ist auch  $\partial J_{o,FIT} / \partial k = \partial J_{o,FIT} / \partial A_i = 0$  an der Stelle  $K = T_{max}$  zu fordern.

Die Anpassungsrechnung wird für den Energiebereich  $T_{min} \leq K \leq T_{FIT}$  durchgeführt. Mit  $T_{FIT}$  soll die obere Grenze des für die Anpassungsrechnung verwendeten Energiebereiches bezeichnet werden. Für den Fall, daß die Bremsstrahlung für alle  $K$ , für die  $J_o(K) \neq 0$  erwartet wird, gemessen werden kann und keine Effekte die Messung von  $J_o(K)$  im hochenergetischen Teil dieses Bereiches stören, kann  $T_{FIT} = T_{max}$  gesetzt werden. Dann wird die Anpassung im Bereich  $T_{min} \leq K \leq T_{max}$  durchgeführt. Neben  $T_{FIT}$  können bei Bedarf weitere Grenzenergien für die Anpassungsrechnung festgelegt werden.

Im folgenden werden, wie angekündigt, zwei Verfahren zur Ermittlung der Fehleranteile  $\Delta_{Q_a} \bar{F}_o$  und  $\Delta_{Q_b} \bar{F}_o$  der zu der isotropen suprathemischen Komponente  $F_o$  gehörenden Linienintegrale  $\bar{F}_o$  beschrieben. Sie können zur Diskussion der Fehler  $\Delta_{Q_a} \bar{F}_o$  und  $\Delta_{Q_b} \bar{F}_o$ , die bei der Entfaltung der auf der beschriebenen Weise erhaltenen Spektren  $J_{o,FIT}$  entstehen, verwendet werden. Sie sind unabhängig von der verwendeten Stabilisierungsmethode, soweit diese zu einem in  $J_o$  bzw.  $\bar{F}_o$  linearen Entfaltungsverfahren führt.

Das erste Verfahren benützt die von der Anpassungsrechnung gelieferten mittleren quadratischen Abweichungen  $\sigma(A_i)$  von  $A_i$  zur Berechnung des aus dem statistischen Fehler  $\Delta_{Q_a} J_o$  resultierenden Fehlers  $\Delta_{Q_a} J_{o,FIT}$  von  $J_{o,FIT}$  und des diesem zugeordneten Fehlers  $\Delta_{Q_a} \bar{F}_o$  von  $\bar{F}_o$ .  $\Delta_{Q_a} J_{o,FIT}$  ist allerdings nicht mit  $\Delta_{Q_a} J_o$  identisch, sondern ist infolge der durchzuführenden Anpassungsrechnung aus den eingangs beschriebenen, von  $\Delta_{Q_a} J_o$  unterschiedlichen statistischen und systematischen Anteilen zusammengesetzt. Mit Hilfe der Regeln für die Fehlerfortpflanzung kann man  $\Delta_{Q_a} J_{o,FIT}$  durch die Fehler  $\sigma(A_i)$  der  $A_i$  ausdrücken ( $L_A$ : Anzahl der Koeffizienten  $A_i$ ):

$$(7.13) \Delta_{Q_a} J_{o,FIT} \approx \sum_{i=1}^{L_A} \frac{\partial J_{o,FIT}}{\partial A_i} \sigma(A_i)$$



Hieraus erhält man für  $\Delta_{Q_a} \bar{F}_0$ :

$$(7.14) \quad \Delta_{Q_a} \bar{F}_0 \approx \sum_{i=1}^{L_A} (G^{-1} \left( \frac{\partial J_{o,FIT}}{\partial A_i} \right)) \sigma(A_i),$$

da nach Voraussetzung  $\frac{\partial J_{o,FIT}}{\partial A_i} = 0$  für  $K = T_{\max}$ , für  $i = 1, \dots, L_A$  ist (siehe Abschnitt 4.1).

Wenn man für die weitergehende Auswertung von  $\bar{F}_0$  die effektiven Längen  $\lambda_{\text{eff}}$  verwendet, also  $F_0 \approx \bar{F}_0 / \lambda_{\text{eff}}$  setzt, so lassen sich aus den Gleichungen (7.13, 7.14) zusätzlich noch die Fehler der Momente  $n_H$ ,  $n_H \cdot \bar{T}$  berechnen. Weiterhin lassen sich hieraus, wenn die Fehler von  $A_i$  statistisch voneinander unabhängig sind, auch ihre mittlere quadratische Abweichungen  $\sigma(n_H)$ ,  $\sigma(n_H \cdot \bar{T})$  entnehmen:

$$(7.15) \quad \sigma^2(\lambda_{\text{eff}} \cdot n_H) \approx \sum_{i=1}^{L_A} \int_{T=T_{\text{MOMO}}}^{T_{\text{MOM1}}} dT \cdot (G^{-1} \left( \frac{\partial J_{o,FIT}}{\partial A_i} \right))^2 \sigma^2(A_i); \quad n_H \cdot \lambda_{\text{eff}} = \int_{T=T_{\text{MOMO}}}^{T_{\text{MOM1}}} dT \cdot (G^{-1} J_{o,FIT})$$

$$(7.16) \quad \sigma^2(\lambda_{\text{eff}} \cdot n_H \cdot \bar{T}) \approx \sum_{i=1}^{L_A} \int_{T=T_{\text{MOMO}}}^{T_{\text{MOM1}}} dT \cdot T \cdot (G^{-1} \left( \frac{\partial J_{o,FIT}}{\partial A_i} \right))^2 \sigma^2(A_i); \quad \lambda_{\text{eff}} \cdot n_H \cdot \bar{T} = \int_{T=T_{\text{MOMO}}}^{T_{\text{MOM1}}} dT \cdot T \cdot G^{-1} J_{o,FIT}$$

Mit  $T_{\text{MOMO}}$  und  $T_{\text{MOM1}}$  werden die untere bzw. obere Grenzenergie zur Auswertung der Momente von  $\bar{F}_0$ ,  $n_H$  sowie  $\bar{T} \cdot n_H$ , bezeichnet. Abgesehen davon, daß  $T_{\text{min}} \leq T_{\text{MOMO}} \leq T_{\text{MOM1}} \leq T_{\text{MAX}}$  sein muß, können die  $T_{\text{MOMO}}$ ,  $T_{\text{MOM1}}$  beliebig und unabhängig von  $T_{\text{FIT}}$  vorgegeben werden.

Eine zweite Möglichkeit, die Streuungen von  $\bar{F}_0$  bzw. ihrer Momente abzuschätzen, besteht darin, eine Meßserie von  $J_0(K)$  mit fest vorgegebenen Einstellparametern für das Plasma auszuwerten. Auf diese Weise kann man die Streuung von  $\bar{F}_0$  als die Summe aus zwei Anteilen erhalten. Der erste Anteil ist der statische Fehler  $\Delta_{Q_a}$  des angewandten Bestimmungsverfahrens von  $\bar{F}_0$ , der letztlich

durch die Messung von  $Q$  bedingt ist. Der zweite Anteil ist die durch die unvermeidliche Streuung der Plasmaparameter bewirkte Streuung  $\Delta_{Q_b}$  der Parameter der suprathemischen Elektronenkomponente. Wegen der zum Teil schlechten Meßstatistik von  $J_o(K)$ , d.h., großen  $\Delta_{Q_a} J_o$ , wird auch bei dieser Bestimmungsmethode für den Fehler von  $\bar{F}_o$  von den durch Anpassung erhaltenen analytischen Funktionen  $J_{o,FIT}(K)$  ausgegangen.

Diese Methode schätzt den sich aus der Kombination der beiden diskutierten Fehleranteile  $\Delta_{Q_a} J_o$  und  $\Delta_{Q_b} J_o$  bzw.  $\Delta_{Q_b} \bar{F}_o$  ergebenden Gesamtfehler ab.

### 7.3.2 Unkenntnis des Spektrums $J_o(K)$ in einem hochenergetischen Teilbereich von $T_{min} \leq K \leq T_{max}$

Im allgemeinen kann  $J_o(K)$ , wie in Abschnitt 7.2 geschildert, nicht in dem gesamten Energiebereich  $T_{min} \leq K \leq T_{max}$ , also für alle  $K$ , für die  $J_o(K) \geq 0$  ist, gemessen werden, sondern nur in einem unteren Teilbereich  $T_{min} \leq K \leq T_m$  ( $= 400$  keV). In diesem Fall wird  $I_o(K)$  also nur in dem Energiebereich  $T_{min} \leq K \leq T_{fit} = T_m$  durch eine analytische Funktion  $J_{o,FIT}(K)$  approximiert und angenommen, daß man  $J_{o,EH}(K)$  für  $T_m \leq K \leq T_{max}$  aus der Extrapolation von  $J_{o,FIT}(K)$  erhalten kann. Um aus dem so gebildeten Energieflußspektrum die Verteilungsfunktion  $F_{o,H}(T) = F_o(T) = \bar{F}_o / \lambda_{eff}$  für  $T \leq T_m$  zu erhalten, geht man in zwei Schritten vor:

- a) Man bestimme mit  $T_{min} = T_m$  aus  $J_{o,EH}(K)$  mit Hilfe einer der in dem Abschnitt 4.2 aufgeführten linearen Entfaltungsmethoden die Impulsverteilungsfunktion  $F_o(T) := F_{o,EH}(T)$  für  $T_m \leq T \leq T_{max}$ .
- b) Aus dem so ermittelten  $F_{o,EH}(T)$  ( $= F_o(T)$  für  $T \geq T_m$ ) und aus  $J_{o,FIT}(K)$  für  $K \leq T_m$  errechne man mit Hilfe der Gl. (7.3)  $J_{o,FH}(K)$  für  $K \leq T_m$  und hieraus  $F_{o,H}(T) = F_o(T)$  für  $T \leq T_m$  sowie  $\tilde{f}_{o,H}(T)$  mit Hilfe von Gl. (4.4).

Den durch die Unbestimmtheit von  $J_{o,EH}(K)$ ,  $K \geq T_m$  verursachten Fehler von  $\tilde{f}_{o,H}(T)$  kann man mit Hilfe der in Abschnitt 7.2 ausgeführten Überlegungen bestimmen.

### 7.3.3 Störung der Messung der Volumenbremsstrahlungsmessung durch Sekundärstrahlung

Die Messung der Plasmabremsstrahlung kann erheblich durch die Einstreuung von auf anderer Weise entstehender Röntgenstrahlung in den Strahlengang der Meßanordnung gestört werden. Es handelt sich, wie bereits in Abschnitt 7.1 ausgeführt, um die durch Störstrahlungen wie Wandbremsstrahlung und Comptonstreustrahlung an Kollimatorkomponenten erzeugten Fehler  $\Delta_{Q_C} J$  von  $J$ .  $\Delta_{Q_C} J$  tritt vorzugsweise bei hohen Werten der Photonenenergie  $K$  auf, da mit  $K$  der Photoabsorptionsquerschnitt der Kollimatormaterialien stark abnimmt und somit die den Störstrahlungsprozessen zugänglichen Bereiche des Kollimators zunehmen.  $\Delta_{Q_C} J$  setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen:

- a) An den durch den Kollimator erfaßten Bereich der Torusinnenwand von ASDEX (Streutarget) kann durch Comptonstreuungsprozesse Bremsstrahlung der suprathemischen Komponente in den Strahlengang des Kollimators gestreut werden. Die so entstandene Sekundärstrahlung kann, zusätzlich zu der allein die gewünschte Meßinformation enthaltenden primären Volumenbremsstrahlung, als Störstrahlung in den Detektor gelangen. Zu ihrer quantitativen Abschätzung kann man durch Monte-Carlo-Methoden erhältliche "Albedo-Werte" für Rückstreuung von Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlung an dicken Targets /43/ verwenden. Diese erlauben es, das Spektrum des Energieflusses und die Richtungsverteilung der Sekundärstrahlung in Abhängigkeit von dem Energieflußspektrum  $J$  der Primärstrahlung und ihrer Einfallrichtung auf das Streutarget zu bestimmen. Nach diesen Daten ist anscheinend die durch Comptonstreuung erzeugte Sekundärstrahlung vernachlässigbar auch gegen die Primärstrahlung, die längs der Sichtlinie mit einem minimalen Abstand  $\rho = 27$  gemessen wird, d.h., die in den Randbereichen des Plasmas erzeugt wird. Genauere Berechnungen dieser Sekundärstrahlungsart sind angebracht.
- b) Auch die Wandbremsstrahlung, die suprathemische Elektronen in den im Sichtbereich des Kollimators liegenden Bereichen der Toruswand erzeugen, kann zur Störstrahlung  $\Delta_{Q_C} J$  beitragen. Auch dieser Anteil läßt sich grob quantitativ abschätzen. Es soll ausgegangen werden von einem kleinen Durchmesser der suprathemischen Komponente von 20 cm und einer uniformen Dichte von  $10^{11}/\text{cm}^3$ , also einer Gesamtzahl von  $\sim 3 \cdot 10^{16}$  suprathemischen Elektronen im Plasma. Aus ihrer Lebensdauer von 100 ms /1/ und aus der Gesamtfläche der Torusinnenwand von ca.  $4 \cdot 10^5 \text{ cm}^2$

erhält man für die Teilchenstromdichte der suprathemischen Elektronen auf die Wand einen Wert von  $\sim 10^{12}/\text{s}\cdot\text{cm}^2$ . Es wird angenommen, daß die Teilchenstromdichte für jeden Teilbereich der Innenwand denselben Wert hat. Mit einer angenommenen primären Elektronenergie von 100 keV und dem aus Ref. /44/ entnommenen Bruchteil  $4.4 \cdot 10^{-3}$ , der hiervon als Wandbremsstrahlung emittiert wird, erhält man für den Energiefluß, also für die pro Flächen- und Zeiteinheit von der Innenwand abgestrahlte Energie der Wandbremsstrahlung einen Wert von  $\approx 4.4 \cdot 10^{+14} \text{ eV}/\text{s}\cdot\text{cm}^2$ .

Basierend auf einer Dichte der schweren Plasmateilchen von  $10^{12}/\text{cm}^3$  strahlt nach Ref. /9/ der im Sichtbereich des Detektors liegende Teil derselben suprathemischen Komponente pro Flächen- und Zeiteinheit insgesamt eine Energie von ca.  $(6.2 \cdot 10^{14} \text{ eV}/\text{cm}^2 \cdot \text{s}) \cdot Z^2$  als Volumenbremsstrahlung ab.

Die von dem Kollimator erfaßbaren Anteile des Volumen- und Wandbremsstrahlungsflusses können also in derselben Größenordnung liegen. Allerdings zeigen die in der poloidalen Schnittebene gemessenen radialen Bremsstrahlungsprofile, daß der Energiefluß der Röntgenstrahlung an  $\sim 25 \text{ cm}$  vom Plasmazentrum entfernt liegenden Stellen um einen Faktor 5 - 10 niedriger ist als in der Plasmamitte. Das deutet stark darauf hin, daß der für das Zentrum gemessene Röntgenenergiefluß keine Anteile beider Störstrahlungsarten enthält. Somit wird in der obigen Abschätzung für  $Z = 1$  der von der Torusinnenwand emittierte Gesamtenergiefluß der Wandbremsstrahlung um einen Faktor 5 oder mehr überschätzt. Man kann dennoch nicht ausschließen, daß die Wandbremsstrahlung die Messung der nahe am Plasmarand liegenden Teile der Bremsstrahlungsprofile erschwert.

- c) Zu der Störstrahlung zählt auch die von Runawayelektronen erzeugte extrem harte Röntgenstrahlung (Runaway-Bremsstrahlung) im MeV-Bereich. Diese kann die für die Definition des Strahlengangs erforderliche Bleiabschirmung der Meßanordnung ohne starke Abschwächung durchdringen und dort Comptonstreustrahlung, die vom Strahlungsdetektor nachgewiesen werden kann, erzeugen.

Die Meßanordnung für die Bremsstrahlung suprathemischer Elektronen ist also besonders empfindlich gegen seitlich in den Kollimator eindringende Runaway-Bremsstrahlung. Man kann diese Kollimatoreigenschaft durch einen effektiven Öffnungswinkel  $\Omega_{\text{det,eff}}$  für Störstrahlung charakterisieren.



Wegen der besagten großen Durchdringungskraft dieser Strahlung ist  $\Omega_{\text{det,eff}}$  erheblich größer als der von der Kollimatorgeometrie her gegebene Öffnungswinkel  $\Omega_{\text{det}}$  für die suprathemische Bremsstrahlung.

Die zu  $\Delta_{Q_c} J$  gehörenden Anteile können i.a. nur mit experimentellen Methoden analysiert oder beseitigt werden. Man kann einem Spektrum  $J(K)$  nur dann eine Verzerrung durch Störstrahlung ohne weitere Hilfsmittel ansehen und diese damit einer numerischen Analyse zugänglich machen, wenn  $\Delta_{Q_c} J$  in einem Teil des Meßbereiches zu einem Anwachsen von  $J(K)$  mit  $K$  führt. Ein derartiges Verhalten ist ein sicheres Kriterium für die Existenz von Störstrahlungsanteilen in  $J(K)$ , da der Bremsstrahlungsfluß immer eine mit  $K$  abnehmende Größe ist. Dasselbe gilt auch für die zu  $J(K)$  gehörende Intensität  $I(K)$ . Nach dem Gesagten kann ein störstrahlungsbedingtes Anwachsen von  $J(K)$  bzw.  $I(K)$  mit  $K$  nur in der Nähe der hochenergetischen Grenze des Meßbereiches auftreten. Der Störanteil  $\Delta_{Q_c} J$  bzw.  $\Delta_{Q_c} I$  läßt sich also grob durch die untere Grenzenergie des gestörten Energiebereiches als Energieparameter charakterisieren.

Ein derartiges Anwachsen von  $J$  bzw.  $I$  mit  $K$  kann leicht von der von Runaway-Bremsstrahlung erzeugten Störstrahlung erzeugt werden. Diese kann sich somit bereits für Photonenenergien  $K < T_m = 400 \text{ keV}$  im Verlauf von  $J(K)$  bzw.  $I(K)$  bemerkbar machen. Sie werde mit  $S(K)$  und ihre untere Grenzenergie mit  $T_s$  bezeichnet.

Für die in Abschnitt (7.4) zu behandelnde Bestimmung der Ortsabhängigkeit von  $I(K, \alpha_0, \alpha_1, r)$  und  $f(\vec{p}, r)$  ist es nützlich, wenn man auch den soeben beschriebenen Fehlereinfluß abschätzen kann. Für diesen Zweck wird  $T_{\text{fit}}$ , die obere Grenze des für die Approximation von  $I_o(K)$  bzw.  $I_{\text{DIFF}}(K, \alpha_1)$  verwendeten Energiebereiches, variiert. Ist  $T_{\text{fit}} > T_s$ , so wird bei der Approximation der Einfluß der Runaway-Bremsstrahlung mit erfaßt, ist  $T_{\text{fit}} \leq T_s$ , so wird er vernachlässigt. Ist  $T_s = T_m$ , so erübrigt sich eine Berücksichtigung der von der Runaway-Bremsstrahlung erzeugten Comptonstreustrahlung, da sie in diesem Fall durch die Messung nicht mit erfaßt werden kann.

#### 7.3.4 Auswertung der Schußserie #13045 - #13053 und Fehlerdiskussion

Es folgt die in Abschnitt 7.3.1 angekündigte Auswertung der Stromtriebserie

#13045 - #13053 (+). Hierzu werden die Spektren  $J_O(K)$  durch eine wie folgt angenetzte analytische Funktion  $J_{O,FIT}(K)$  approximiert:

$$(7.17) J_{O,FIT}(K) = A_1 \cdot \exp(A_2 \cdot K) + A_3 \cdot \exp(A_4 \cdot K) \cdot K^{A_5}.$$

Der erste Term auf der rechten Seite soll den Verlauf von  $J_O(K)$  für  $T_{min} \leq K \leq 50$  keV, der zweite Term den für  $50 \text{ keV} \leq K \leq T_{FIT}$  beschreiben. Aus den in den vorgehenden Abschnitten dargelegten Gründen wird  $T_{FIT} \leq T_m \leq 400$  keV gesetzt. Entfaltet werden die so gewonnenen Spektren  $J_{O,FIT}$  unter Verwendung der in den Abschnitten 4.4, 4.5 geschilderten Stabilisierungsmethode.  $Z$  wurde = 2 gewählt. Für die Entfaltung wurden Bremsstrahlungsquerschnitte in Bornscher Näherung benutzt. Wie bereits in Abschnitt 7.1 angekündigt, wird die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion von  $Z$  und von der Art der Wirkungsquerschnitte erst in Abschnitt 7.4 diskutiert.

Abb. (11) zeigt drei mit Hilfe der radialen Diagnostik nach der in diesem Kapitel dargestellten Methode ausgewertete Spektren für von der oberen zur unteren Bildreihe wachsende Abstände  $\varrho_O$  der Sichtstrahlen von der Plasmamitte (toroidale Seele, #13047). Auf der unteren Hälfte der jeweils linken Bilder sind in Abhängigkeit von der Photonenergie die gemessenen und über die Injektionszeit für "Lower-Hybrid"-Wellen von 1 - 2 s aufsummierten Impulshöhen-spektren,  $Q_O$ , in Abhängigkeit der Photonenergie  $K$  aufgetragen. Die mittleren Bilder zeigen die aus analytischen Approximationen von  $J_O(K)$  mit Hilfe von Gl.(5.3) berechneten Linienintegrale

$$4\pi \cdot J_{O,FH}(K) = 4\pi \int I_{O,FH}(K) \cdot d\lambda$$

als Funktion von  $K$ . Für diese Auswertung wurde  $I_{O,FH}$  näherungsweise aus der Division von  $J_{O,FH}$  durch effektive Längen  $\lambda_{eff}$  der im Plasma liegenden Bereiche der Sichtstrahlen bestimmt. Die rechten Bilder zeigen die aus  $I_{O,FH}$  bestimmte Verteilungsfunktion  $\tilde{f}_O(T) = \tilde{f}_{O,H}(T)$ .

(+) Die auszuwertende Serie besteht aus HF-Stromtriebentladungen in Deuteriumplasma mit einer Dichte der thermischen Elektronen von  $n_e \approx 8.3 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , einer Leistung  $P_{HF} = 600$  KW und einer Frequenz von 1.3 GHz der zum HF-Stromtrieb erforderlichen elektromagnetischen Wellen. Diese werden mit Hilfe einer aus 8 Hohlleiteröffnungen bestehenden "Grillantenne" in die durch Gl.4.5 gegebene mittlere Bewegungsrichtung der suprathemischen Elektronen in das Plasma eingestrahlt. Hierzu muß ihre Phasendifferenz zwischen jeweils benachbarten Hohlleiteröffnungen auf  $\Delta\phi_{HF} = 90^\circ$  eingestellt werden /53/. Die verbleibenden Parameter  $n_e, P_{HF}$  und der Plasmastrom  $I_{p1}$  sind so eingestellt, daß  $I_{p1}$  allein durch HF-Stromtrieb aufrecht- und konstant gehalten wird (OH-Primärstrom  $I_{OH} = \text{const}$ ,  $I_{p1} = 9$  kA/s für  $I_{p1} = 300$  kA).  $\Delta\phi_{HF} = 90^\circ$  läßt bei der verwendeten Antennenkonfiguration erwarten, daß von den suprathemischen Elektronen diejenigen, die Energie  $T \approx 100$  KeV besitzen, am stärksten mit dem eingestrahnten HF-Feld wechselwirken (siehe Abschnitt 7.4.3).

In Tabelle 1 sind die Auswertungsergebnisse für die Schußreihe #13045 - #13053 zusammengefaßt. Ausgewertet wurden die Spektren sowohl für den niederenergetischen Bereich  $K \lesssim 50$  keV als auch für den sich daran anschließenden höherenergetischen Bereich  $50 \text{ keV} \lesssim K \leq 400$  keV. Genauigkeitsabschätzungen waren jedoch vorläufig nur für die Messungen in dem letzten Bereich von Interesse.  $T_{\text{FIT}} = 200$  keV. Für die in diesem Bereich erhaltenen Größen wurden nach beiden, in 7.3.1 angegebenen Methoden, die zugehörigen Streuungen berechnet. Die interessierenden Größen haben im einzelnen folgende Bedeutungen:

- K: Photonenenergie in keV  
T: Elektronenenergie in keV  
 $A_4, A_5$ : Anpassungsparameter in Gl. (7.17)  
 $\sigma(A_5)$ : mittlere quadratische Abweichung von  $A_5$ , erhält man aus der Approximationsrechnung
- $\bar{J}_0 = \int_{K=50 \text{ keV}}^{400 \text{ keV}} J_0(K) dK$ : gemessener über K integrierter Strahlungsenergiefluß, in  $\text{keV}/(\text{s} \cdot \text{cm}^2)$
- $\sigma(\bar{J}_0)$ : mittlere quadratische Abweichung von  $\bar{J}_0$ , berechnet aus  $J_0$ , in  $\text{keV}/(\text{s} \cdot \text{cm}^2)$
- $\bar{T}_{x, \text{FIT}}$ : Durchschnittsenergie der vom Plasma emittierten Röntgenstrahlung für  $50 \text{ keV} \leq K \leq 400$  keV aus der Approximation  $J_{0, \text{FIT}}$ , in keV
- $\bar{J}_{0, \text{FIT}} = \int_{K=50 \text{ keV}}^{400 \text{ keV}} J_{0, \text{FIT}} dK$ , aus Approximation  $J_{0, \text{FIT}}$  erhaltener Strahlungsenergiefluß, in  $\text{keV}/(\text{s} \cdot \text{cm}^2)$
- $\bar{T}$ : Durchschnittsenergie der suprathemischen Komponente,  $50 \text{ keV} \leq T \leq 400$  keV, aus  $F_0 \approx \bar{F}_0 / \lambda_{\text{eff}}$ , in keV
- $\sigma(\bar{T})$ : mittlere quadratische Abweichung von  $\bar{T}$ , aus Fehlerfortpflanzung der mittleren quadratischen Abweichungen  $\sigma(A_i)$  der Anpassungsparameter  $A_i$ ,  $i = 3, 4, 5$ .
- $n_H$ : Dichte der suprathemischen Komponente,  $50 \text{ keV} \leq T \leq 400$  keV, aus  $F_0 \approx \bar{F}_0 / \lambda_{\text{eff}}$ , in  $\text{cm}^{-3}$
- $\sigma(n_H)$ : mittlere quadratische Abweichung von  $n_H$ , erhält man wie  $\sigma(\bar{T})$ , in  $\text{cm}^{-3}$

Für einige Größen sind in der Tabelle die durch Auswertung der Serie erhaltenen Mittelwerte und Streuungen  $\sigma_{SCH}$  eingetragen. Diese Streuungen  $\sigma_{SCH}$  repräsentieren die sich aus der Kombination der Fehleranteile  $\Delta_{Q_a} J_o$ ,  $\Delta_{Q_b} J_o$  ergebenden Fehler in  $J_o$  bzw.  $\bar{F}_o$ . Die übrigen, in dieser Liste aufgelisteten mittleren quadratischen Abweichungen sind dagegen lediglich eine Folge von  $\Delta_{Q_a} J_o$  und der systematischen Abweichungen zwischen  $J_o$  und  $J_{o,FIT}$ .

Die Tabelle zeigt, daß die zwei zur Ermittlung der mittleren quadratischen Abweichungen von  $\bar{T}$  und  $n_H$  verwendeten Methoden zu stark unterschiedlichen Werten führen: Die Fehlerfortpflanzung liefert i.a. für die mittlere quadratische Abweichung Werte  $\sigma(\bar{T})$ ,  $\sigma(n_H)$ , die in derselben Größenordnung wie die zugehörigen Momente  $\bar{T}$ ,  $n_H$  liegen. Die Summierung der Meßwerte von  $\bar{T}$ ,  $n_H$  und ihrer Quadrate über die Serie nach Methode 2 führt dagegen zu Streuungen  $\sigma_{SCH}$  von  $\bar{T}$ ,  $n_H$ , die weitaus kleiner sind als  $\sigma(\bar{T})$  bzw.  $\sigma(n_H)$ .

Die Frage erhebt sich, worauf dieser Widerspruch zurückzuführen ist. Zu ihrer Beantwortung beachte man, daß nicht für alle Messungen  $\sigma(T) \approx \bar{T}$ ,  $\sigma(n_H) \approx n_H$  ist. Beispiele hierfür liefern die Messungen der Schüsse #13045 und #13053 für den Sichtstrahlabstand  $\rho_o = 13$  cm. Ein Vergleich der für  $\tilde{f}_o$  bestimmten Tabellenwerte und ihrer Streuungen mit denen von  $J_o$  zeigt folgendes: Der Fall  $\sigma(\bar{T}) \ll \bar{T}$ ,  $\sigma(n_H) \ll n_H$ , tritt offenbar dann auf, wenn auch  $\sigma(A_5) \ll A_5$  ist.

Im umgekehrten Fall haben also sowohl die Anpassungsparameter  $\sigma(A_5)$  von  $J_o$  als auch die aus  $\tilde{f}_o$  bestimmten Momente  $n_H$ ,  $\bar{T}$  gleichermaßen nicht tolerierbare große Streuungen, soweit sie nicht aus Mittelungen über die Schußserie gewonnen worden sind. Das bedeutet, daß die Ursache für die Diskrepanz zwischen  $\sigma(\bar{T})$ ,  $\sigma(n_H)$  einerseits und  $\sigma_{SCH}$  für  $\bar{T}$ ,  $n_H$  andererseits nicht bei der Entfaltungszurückführung zu suchen ist, sondern bei der benützten Approximationsmethode. Man muß jedoch hinzufügen, daß die Approximation von  $J_o$  durch  $J_{o,fit}$  brauchbare Ergebnisse liefert trotz der großen Streuungen des ermittelten Anpassungsparameters  $A_5$ : Wie für  $n_H$  und  $\bar{T}$  sind auch für  $\bar{T}_{x,FIT}$  und  $\bar{J}_{o,FIT}$  durch Mittelung über die Schußserie berechneten mittleren quadratischen Abweichungen  $\sigma_{SCH}$  kleiner, als es die aus der Fehlerfortpflanzung erhaltenen mittleren quadratischen Abweichungen von  $A_5$  erwarten lassen. Trotzdem empfiehlt es sich, nach einer besseren Methode für die Approximation von  $J_o$  durch  $J_{o,fit}$  zu suchen, um die Widersprüche in den Ergebnissen für  $\sigma(n_H)$ ,  $\sigma(\bar{T})$  und  $\sigma_{SCH}$  zu beseitigen.



Tabelle 1

Energieflußspektrum $J_0(K, \rho = 13 \text{ cm})$ mit radialer Diagnostik gemessen		Elektronenverteilungsfunktion $f_0(T)$			
Anpassungsparameter		Aus dem Fit gewonnene Größen		Durchschnitts- energie $50 \text{ keV} \leq T \leq 400 \text{ keV}$	Dichte der supra- thermischen Komp. $50 \text{ keV} \leq T \leq 400 \text{ keV}$
$1/A_4$	$A_5$	$\sigma(\bar{J}_0)$	$\bar{T}_x, \text{FIT}$	$\bar{T}$	$n_H$
keV	$\sigma(A_5)$	$\bar{J}_0$	$\sigma(\bar{T})$	$\sigma(n_H)$	
		$\text{keV} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-2}$	keV	keV	$\text{cm}^{-3}$
Schuß					
13045	-0.27	$1.9 + 12$	127.1	182.5	$3.6 + 10$
13046	-0.26	$1.7 + 12$	123.8	177.4	$3.6 + 10$
13047	-0.32	$1.6 + 12$	122.4	171.8	$3.4 + 10$
13048	-0.12	$1.6 + 12$	119.3	177.8	$3.4 + 10$
13049	-0.84	$1.7 + 12$	139.2	154.3	$3.5 + 10$
13051	-0.09	$1.6 + 12$	119.7	179.9	$3.3 + 10$
13052	-0.38	$1.7 + 12$	125.2	172.6	$3.5 + 10$
13053	-0.25	$1.7 + 12$	119.7	171.0	$3.6 + 10$
Mittelwert	-0.316	$1.69 + 12$	124.6	173.4	$3.49 + 10$
Streuung $\sigma_{SCH}$	0.22	$9.26 + 10$	5.01	8.43	$1.06 + 9$

#### 7.4 Einfluß der Fehler von explizit vorgebbaren Auswerteparametern auf die Energieabhängigkeit der Verteilungsfunktion

In den folgenden beiden Abschnitten werden die unter Punkt b und c zu Beginn dieses Kapitels aufgeführten Fehlertypen behandelt, also die, die durch Fehler in den explizit vorgebbaren Auswerteparametern verursacht werden. Es wird also untersucht, wie groß die Variation der Verteilungsfunktion sein kann, die durch Variation der Auswerteparameter erzeugt wird (siehe auch Tabelle 1).

Die Parameter repräsentieren die Randbedingungen des Auswertesystems. Sie müssen also, wie die Impulshöhenspektren, als Meßwerte oder aus physikalischen bzw. technischen Erwägungen heraus, der Auswertung vorgegeben werden, um zu physikalisch sinnvollen Aussagen zu gelangen. Für die numerische Auswertung bedeutet das, daß die Beschränktheit der Variationsbereiche für die Parameter notwendig ist für die von  $f$  bzw. ihrer Linienintegrale  $\bar{f}$ : Nur, wenn man zusätzlich zu den Impulshöhenspektren noch weitere Informationen über die Physik und Technik des Experiments in die Rechnung einbezieht, lassen sich also Aussagen von  $f$  auf ihre Stichhaltigkeit hin überprüfen.

Dieses Konzept soll anhand von zwei Beispielen demonstriert werden. In den nächsten beiden Abschnitten sollen die bereits bisher behandelten Messungen von  $\tilde{f}_0$  auf ihre Abhängigkeit von verschiedenen Parametern hin untersucht werden. Zum Vergleich mit  $\tilde{f}_0$  werden tangentielle Messungen mit herangezogen. Im darauf folgenden Abschnitt wird das Ergebnis einer Berechnung von  $f_1$  bzw.  $j_{||}(r_1)$ , die mit Hilfe der in den Kapiteln 4 und 5 dargestellten Methoden durchgeführt worden ist, vorgestellt und für  $f_1$  in ähnlicher Weise wie für  $\tilde{f}_0$  die Parameterabhängigkeit untersucht. Diese Ausführungen schließen eine Diskussion der in der Einleitung kurz dargestellten Physik des Stromtriebs mit ein.

##### 7.4.1 Abhängigkeit der Auswertung der isotropen Komponente $\tilde{f}_0$ von verschiedenen Parametern und von $\Delta_Q$

In diesem Abschnitt soll die Diskussion der Meßergebnisse der radialen Röntgendiagnostik (Abb. (6b)) für  $\tilde{f}_0$  fortgesetzt werden. Die schon in Abschnitt 7.3.4 erläuterte Abb. (11) zeigt als Beispiel die für Schuß #13047 der dort diskutierten Meßserie erhaltenen Ergebnisse für  $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_0 / \lambda_{\text{eff}}$  für 3 verschiedene Abstände  $\rho_0$  des Sichtstrahls. Die Graphen für  $\tilde{f}_0$  zeigen, daß  $\tilde{f}_0(T)$  im Bereich  $50 \text{ keV} \lesssim T \lesssim 150 \text{ keV}$  mit  $T$  schwächer abfällt als für  $T \lesssim$

50 keV und  $T \geq 150$  keV. Im mathematisch-formalen Sinn kann ein derartiger Verlauf von  $\tilde{f}(T)$  mit  $T$  als Folge einer Variation einer mit  $T$  monoton abfallenden und in log. Auftragung positiv gekrümmten Verteilungsfunktion angesehen werden (gestrichelte Graphen in Abb. 11). Diese Variation werde im folgenden als Absenkung  $\Delta_{\text{ABS}} \tilde{f}_0$  bezeichnet. Sie ist umso stärker ausgeprägt, je größer  $\rho_0$  ist; für  $\rho_0 = 27$  cm, also in den Plasmarandgebieten, tritt sie sogar so stark in Erscheinung, daß  $\tilde{f}_0(T)$  (und, wie die Rechnungen zeigen, auch die Impulsverteilungsfunktion  $F_0(T)$ ) für  $T \approx 50$  keV ein Minimum aufweist. Auch an den mit der tangentialen Diagnostik gemessenen Spektren wurden Absenkungen beobachtet. Hierauf wird in dem Abschnitt (7.4.2) eingegangen.

In folgenden soll untersucht werden, inwieweit die Absenkung  $\Delta_{\text{ABS}} \tilde{f}_0$  durch Meßfehler oder Fehler in den Auswerteparametern verursacht werden kann. Die Ausführungen hierüber gliedern sich in zwei Teile. Da die Absenkung in den Abschnitten 7.2 und 7.3 bei der Behandlung der bei der Messung von  $Q_0(K')$  entstehenden Fehler  $\Delta_{Q_{a,b,c,d} Q_0}$  nicht berücksichtigt worden ist, soll auch deren Einfluß auf die Bestimmung von  $\Delta_{\text{ABS}} \tilde{f}_0$  behandelt werden. Dies geschieht im nächsten Abschnitt. Im darauf folgenden Abschnitt werden sodann die entsprechenden Auswirkungen der Fehler der für die Auswertung explizit vorgebbaren Parameter diskutiert.

#### 7.4.1.1 Einfluß der Fehler $\Delta_{Q_0}$ auf die Bestimmung von $\Delta_{\text{ABS}} \tilde{f}_0$

Als erstes soll ein Eindruck darüber vermittelt werden, wie hoch die Anforderungen an die Meßgenauigkeit von  $Q_0(K')$  gestellt werden müssen, damit man klaren Aufschluß über die Ursachen der Absenkung erhalten kann: Um als diese die Meßfehler  $\Delta_{Q_0}$  ausschließen zu können, muß

$$|\Delta_{Q_0}| < |\Delta_{\text{ABS}} \tilde{f}_0|$$

sein. Hierbei ist  $\Delta_{\text{ABS}} \tilde{f}_0$  die Variation von  $Q_0$ , die der Absenkung  $\Delta_{\text{ABS}} \tilde{f}_0$  der aus  $Q_0$  bestimmten Verteilungsfunktion  $\tilde{f}_0$  zugeordnet ist. Es muß also mit Hilfe von Messungen  $\Delta_{Q_0}$  mit  $\Delta_{\text{ABS}} \tilde{f}_0$  verglichen werden.

Verglichen mit  $\Delta_{\text{ABS}} \tilde{f}_0$  ist  $\Delta_{Q_0}$  nur schwach ausgeprägt, wie man anhand der in Abb. (11) gezeigten und bereits diskutierten Beispiele erkennt. Zeigen läßt sich dies durch einen Vergleich der Bremsstrahlungsspektren, die von Verteilungen jeweils mit und ohne Minimum bei  $T = 50$  keV erzeugt werden, also durch einen Vergleich von  $Q_0(K', 0 \text{ cm})$  mit  $Q_0(K', \rho_0 = 27 \text{ cm})$ . Man fin-

det, daß zwar der Quotient aus diesen beiden Spektren von der Impulshöhe  $K'$  abhängig ist, aber im Bereich  $K \leq 200$  keV nur um maximal einen Faktor 2 mit  $K'$  variiert. Der entsprechend gebildete Quotient aus den aus ihnen ermittelten Verteilungsfunktionen variiert hingegen um einen Faktor 5 ... 10 mit  $T$  für  $T \leq 200$  keV.

Die Meßgenauigkeit muß also diesem Verstärkungseffekt gemäß hoch sein. Im folgenden soll mit Hilfe unterschiedlicher Methoden untersucht werden, ob die Anteile  $\Delta Q_{a,b,c,d} Q_0$  des Meßfehlers von  $Q_0$  diese Bedingung erfüllen.

- Einfluß der Fehler  $\Delta Q_a, \Delta Q_b$ : Durch schlechte Statistik oder durch die Nichtreproduzierbarkeit von Anteilen der suprathemischen Komponente verursachte Meßfehler von  $Q_0$  können für die Absenkung von  $\tilde{f}_0(T)$  nicht verantwortlich sein. Man kann diesen Schluß ziehen, da dieses Verhalten in allen Messungen der Serie, zu der auch das hier betrachtete Beispiel gehört, auftritt. Darüber hinaus zeigt sich die Absenkung in der Mehrzahl aller bisher durchgeführten Messungen der suprathemischen Komponente. Dasselbe gilt für ihre anhand der Abb. (11) demonstrierte Abhängigkeit von  $Q_0$ .

- Einfluß von Störstrahlung,  $\Delta Q_c$ : Zur Beurteilung der Absenkung ist eine Untersuchung der im Detektorkristall erzeugten Comptonstreustrahlung und der an im Sichtbereich des Detektors erzeugten Sekundärstrahlung von Bedeutung. Sie konnte bisher noch nicht im Detail durchgeführt werden. Folgende Hinweise sind aber für eine künftige Untersuchung dieser Frage von Bedeutung.

Der durch Comptonstreuung im Zählerkristall bewirkte Verlust an Nachweisempfindlichkeit für die zu messende Strahlung  $q(K)$  wirkt sich nicht auf das zu  $q(K)$  gehörende Impulshöhenspektrum  $Q(K')$  aus, wenn  $q(K)$  mit  $K$  exponentiell abfällt:

$$q(K) \propto \exp(-K/\bar{T}_x).$$

Dies zeigen Testrechnungen für Durchschnittsenergien  $\bar{T}_x$  der Strahlung mindestens bis zu 200 keV. Da in suprathemischen Entladungen die Runawayproduktion und damit auch die von Runaway-Bremsstrahlung (siehe Abschnitt 7.3) unterdrückt wird, erwartet man, daß die suprathemische Bremsstrahlung diese Voraussetzung erfüllt. Die hiervon im Zählerkristall erzeugte Comptonstreustrahlung kann also die Absenkung nicht verursachen.



Die Auswirkung derjenigen Sekundärstrahlung, die von im Sichtbereich des Zählers liegenden Bereich der Torusinnenwand erzeugt wird, auf die Absenkung, läßt sich auf zweierlei Weise ermitteln.

Eine dieser Methoden erlaubt die Behandlung dieser Frage allein mit den vorhandenen Messungen der radialen Flußprofile  $J_0(k, \rho_0)$  unter folgenden Voraussetzungen:

- a) Für alle  $\rho_0$  besitzt  $J_0(k, \rho_0)$ , abgesehen von einem von  $K$  unabhängigen Faktor, dieselbe Energieabhängigkeit.
- b) Soweit man sich auf die Innenwandbereiche beschränkt, die von der radialen Diagnostik erfaßt werden können, ist die Sekundärstrahlung unabhängig vom Emissionsort.

Diese Voraussetzungen erlauben die Bestimmung der Störstrahlung allein aus zwei der insgesamt drei Messungen für  $J_0(k, \rho_0)$ , bis auf einen von  $K$  und  $\rho_0$  unabhängigen skalaren Parameter. Sie ermöglichen es somit, nachzuprüfen, ob man unter der Annahme verschiedener solcher Parameterwerte die Absenkung  $\Delta_{ABS} \tilde{f}_0$  aller drei Messungen vollständig auf die Störstrahlung zurückführen kann. Ist dieses nicht möglich, so kann man  $\Delta_{ABS} \tilde{f}_0$  nur dann auf Sekundärstrahlung zurückführen, wenn  $\Delta_{ABS} \tilde{f}_0$  abhängig vom Emissionsort ist. Dies steht aber in Widerspruch zu b: Es ist unplausibel, daß auf dem von den Detektoren einsehbaren Wandbereich die Comptonstreu- und Wandbremsstrahlung merklich variieren kann.

Die zweite Methode besteht darin, die Erzeugung von Sekundärstrahlung an den im Sichtbereich der Detektoren liegenden Wandbereichen durch geeignete Vorrichtungen zum Abfangen suprathemischer Elektronen und zur Absorption von Comptonstreustrahlung zu unterdrücken ("Sümpfe").

- Variation von  $\Delta_{Q_d}$ : Eine wie in den Abschnitten 7.2 und 7.3 beschriebene Variation des extrem hochenergetischen Anteils der suprathemischen Komponente hat keinen merklichen Einfluß auf die Absenkung von  $\tilde{f}_0$  (Abb. 12).

#### 7.4.1.2 Einfluß der Parameterfehler auf die Bestimmung von $\Delta_{ABS} \tilde{f}_0$

In ähnlicher Weise und mit derselben Zielsetzung wie in dem letzten Abschnitt sollen im folgenden die Einflüsse der Fehler der für die Auswertung explizit vorgebbaren Parameter auf die Absenkung von  $\tilde{f}(T)$  erläutert werden.

- Einfluß der Totzeit: Die bei der Messung der Impulshöhenspektren  $Q(K')$  von hohen Zählraten erzeugten Totzeiten werden im Laufe der Auswertung der  $Q(K')$  auf numerischem Wege korrigiert.
- Einfluß durch Pile-Up-Effekte: Wie ein Vergleich der Abb. (13a) mit Abb. (11) zeigt, tritt die Absenkung weitgehend unabhängig von der Zählrate auf, kann also nicht durch eventuell auftretende Pile-Up-Effekte verursacht werden.
- Variation der Absorberdichte: Eine Variation der Dicke der sich zwischen Plasma und Detektor befindlichen Absorber um den Faktor 2 und mehr hat nur einen geringen Einfluß auf die Absenkung. Da die Absorberdicken und die Absorptionskoeffizienten bis auf wenige Prozent genau bekannt sind, können Fehler dieser Größen nicht für die beobachtete Absenkung von  $\tilde{f}$  verantwortlich sein.
- Einfluß der Nachweisempfindlichkeit: Um die Abhängigkeit der beobachteten Absenkung von den Detektoreigenschaften zu beurteilen, wurde durch Messungen von  $\gamma$ -Linienpektren die Nachweisempfindlichkeit für die zur radialen Diagnostik gehörenden NaJ(Tl) Zähler bestimmt. Die auf diese Weise für den gesamten Meßbereich ermittelten Nachweisempfindlichkeitsfunktionen wurden normiert, d.h., für eine beliebige Photonenenergie durch Multiplikation mit geeigneten, von K unabhängigen Normierungsfaktoren auf einen einheitlichen Wert gesetzt. Es wurde festgestellt, daß die so erhaltenen Funktionen höchstens um einen Faktor 1.05 voneinander abweichen. Die gemessenen Impulshöhenspektren weisen jedoch, wie bereits gesagt, einen Unterschied von ca. einem Faktor 2 auf. Anscheinend kann also die Absenkung von  $\tilde{f}$  auch nicht durch Unterschiede in den Nachweiseigenschaften der benutzten NaJ(Tl)-Zähler erklärt werden. Es bleibt zu prüfen, ob die Absenkung auch dann noch auftritt, wenn in der radialen Diagnostik eines der NaJ(Tl)-Zähler durch einen Halbleiterzähler ersetzt wird.
- Abhängigkeit von der Wahl effektiver Wirkungsquerschnitte: Die Absenkung von  $\tilde{f}$  läßt sich abschwächen, indem man für die Entfaltung Bremsstrahlungswirkungsquerschnitte für  $Z = 26$  benutzt. Diese Wahl von Z bedeutet: man geht davon aus, daß die Bremsstrahlung zum größten Teil durch Stöße suprathemischer Elektronen an Eisenatomen bzw. -ionen, die sich als Verunreinigungen im Plasma befinden, erzeugt wird. (Bereits eine Eisenkonzentration von 1 % in einem Wasserstoffplasma bewirkt, daß die von den

Eisenverunreinigungen erzeugte Bremsstrahlung um mehr als das 6-fache stärker ist als die von den Protonen erzeugte). Die Absenkung kann noch einmal erheblich reduziert werden, wenn man für die Entfaltung die in Kap. 2 behandelten Wirkungsquerschnitte für unvollständig ionisierte Eisenatome benutzt. Sie kann jedoch durch diese Maßnahmen nicht vollständig beseitigt werden (Abb. 12, 16). Über die Auswirkungen einer Wahl von effektiven Wirkungsquerschnitten, die unter Vorgabe von von Gl. (3.10) abweichender Ansätze für  $f$  berechnet werden, auf die Bestimmung der Absenkung von  $\tilde{f}_0$  siehe die folgenden Abschnitte.

- Variationen der numerischen Differentiationsmethode: Bei der Auswertung einiger Messungen wurden nicht die durch Approximation gewonnenen Funktionen  $I_{0,FIT}(K)$  bzw.  $J_{0,FIT}(K)$ , sondern die Spektren  $I_0(K)$  bzw.  $J_0(K)$  direkt unter Verwendung einer Mehr-Punkte-Formel differenziert (Abb. (14)). Es stellt sich heraus, daß eine Absenkung von  $\tilde{f}_0$  auch bei dieser Vorgehensweise, und zwar unabhängig von der Anzahl der bei der Interpolation verwendeten Punkte, auftritt.

Nach diesen Ausführungen scheint die Absenkung von  $\tilde{f}_0$  für  $T \lesssim 150$  keV am ehesten durch Störstrahlungen, die in die Strahlungsdetektoren oder in ihre Strahlengänge eindringen, oder durch Verunreinigungen erzeugt zu werden. Um eine in dem Stromtriebmechanismus liegende Ursache für die Absenkung, die im nächsten Abschnitt behandelt wird, auszuschließen, empfiehlt es sich, alle in den Abschnitten 7.4.1 aufgeführten Argumente nachzuprüfen. Auf jeden Fall ergibt sich aber, daß die Absenkung ein systematisch auftretender Effekt ist.

#### 7.4.2 Beispiele für die Auswertung von mit der tangentialen Diagnostik gemessenen Bremsstrahlungsspektren

In Abb. (15) sind einige aus tangentialen Bremsstrahlungsmessungen der betrachteten Serie bestimmte Verteilungsfunktionen  $\tilde{f}_{||}$  dargestellt. Auch diese weisen eine Absenkung in demselben Energiebereich auf wie die aus den radialen Messungen ermittelten isotropen Verteilungsfunktionen  $\tilde{f}_0$ . Dieses Verhalten ist wie für  $\tilde{f}_0$  auch für  $\tilde{f}_{||}$  die Regel.

Die tangentialen Messungen wurden unter der Annahme ausgewertet, daß die Elektronen eine Strahlverteilung, d.h., ihre Impulse eine von der Elektronenenergie unabhängige, einheitliche Richtung  $\vec{p}_s$  besitzen. Für die

Auswertung wurden mehrere Winkel  $\delta = \angle(\vec{k}, \vec{p}_s)$  zwischen der Beobachtungsrichtung  $\vec{k}$  und der Impulsrichtung  $\vec{p}_s$  vorgegeben.  $\delta$  läßt sich durch die experimentellen Randbedingungen näher spezifizieren: Aus der Richtung des Plasmastromes kann geschlossen werden, daß sich die suprathemischen Elektronen, wenn sie sich im Sichtbereich des Kollimators der tangentialen Meßanordnung aufhalten, im Mittel von dieser entfernen. Deshalb wurde  $\delta \geq 90^\circ$  angenommen. Bei der Auswertung der tangentialen Messungen wurde nur der Bereich  $K \geq 50$  keV,  $T \geq 50$  keV berücksichtigt ( $A_1 = 0$  in Gl. (7.17) für die Anpassung von  $J_1$ ). Der Grund für diese Einschränkung liegt darin, daß für  $T \leq 50$  keV sich  $\tilde{f}_0$  in der Regel stark von  $\tilde{f}_\parallel$  unterscheidet und deshalb nicht sicher ist, ob die Auswertung für diesen Energiebereich die Elektronenverteilung korrekt beschreibt. Aufgrund der Existenz der thermischen Komponente muß man aber unabhängig davon mit einem starken Anstieg von  $F$  bzw.  $f$  mit  $T \rightarrow 0$  rechnen. Daher lassen manche Messungen sowohl in radialer als auch in tangentialer Richtung indirekt den Schluß zu, daß  $f$  im Bereich  $10$  keV  $\leq T \leq 70$  keV ein Minimum besitzt.

Die Auswerteergebnisse für  $\tilde{f}_\parallel$  sind für zwei in tangentialer Richtung durchgeführte Messungen aus der bereits diskutierten Meßserie, für  $\rho_1 - R_{P1} = 0$  cm und  $\rho_1 - R_{P1} = 12$  cm, aufgetragen. Diese zeigen, daß die Absenkung schwach ist für  $\delta = 90^\circ$ , ausgeprägter jedoch für  $\delta > 90^\circ$ , und zwar umso mehr, je größer  $\delta$  ist. Das Ausmaß der Absenkung für  $\tilde{f}_\parallel$  bewegt sich durchaus in dem Rahmen, den man von der Stärke der Absenkung der aus den radialen Messungen für die den  $\rho_1$  entsprechenden Sichtstrahlabstände  $\rho_0$  bestimmten Verteilungsfunktionen  $\tilde{f}$  her erwartet. Um dies zu verdeutlichen, sind zum Vergleich diejenigen Verteilungsfunktionen  $\tilde{f}_\perp$  aufgetragen, die man aus den radialen Messungen für  $\rho_0 = 0$  cm und  $\rho_0 = 13$  cm ebenfalls unter Annahme einer Strahlverteilung und für  $\delta = 90^\circ$  erhält. Der Vergleich von  $\tilde{f}_\parallel$  mit  $\tilde{f}_\perp$  und mit  $\tilde{f}_0$  (Abb. (11)) ergibt, daß das Ausmaß der Absenkung für jede von ihnen für jeweils festgehaltenes  $\rho_0$  bzw.  $\rho_1$  gleich groß ist, soweit  $90^\circ \leq \delta < 140^\circ$  für die tangentiale Meßrichtung gewählt wird. Dagegen deutet sich an, daß die Absenkung in  $\tilde{f}_\parallel$  mit wachsendem  $\rho_1$  größer wird. Auch dieses Verhalten steht in Einklang mit der Variation von  $\tilde{f}_\perp(T)$  und mit der bereits in (7.4.1) diskutierten Variation von  $\tilde{f}_0(T)$  mit  $\rho_0$ . Messungen zu seiner Bestätigung fehlen bisher leider.

#### 7.4.3 Eine mögliche physikalische Ursache für die Absenkung von $F_0$ für $T \leq 150$ keV

Es kann sein, daß sich die beobachtete Absenkung, insbesondere die zwischen dem thermischen und dem suprathemischen Energiebereich auftretenden Minima



in  $\tilde{f}$  und  $F$ , nicht die o.a. Ursachen zurückführen läßt. In diesem Fall muß man sie durch physikalische Prozesse erklären, die sich während der Stromtriebphase in der suprathemischen Komponente abspielen. Folgende Hypothese zu ihrer physikalischen Deutung soll an dieser Stelle zur Diskussion gestellt werden.

Bedingt durch die große Amplitude des eingestrahnten HF-Feldes erhalten die Elektronen, soweit sie mit dem Feld resonant wechselwirken können, Impulse  $\vec{p}$ , die in einem mehr oder weniger starken Ausmaß parallel zur Torusseeele ausgerichtet sind. Der Resonanzbereich, also der Energiebereich, in dem die Elektronen mit dem HF-Feld in Resonanz sein können, ist, wie Rechnungen /45/ zeigen, annähernd identisch mit dem Bereich, in dem die Absenkung von  $\tilde{f}$  auftritt. Dort ist also die Impulsrichtungsverteilung der Elektronen eine Strahlcharakteristik:  $f(\vec{p})$  für Impulse  $\vec{p}$ , die nicht parallel zur Torusseeele sind, ist klein im Vergleich zu  $f(\vec{p})$  für zu ihr parallele Impulse  $\vec{p}$ .

Solange das HF-Feld im Plasma aufrechterhalten wird, findet nach dem Gesagten ein Transport von Elektronen aus dem resonanten Energiebereich in den sich daran anschließenden nichtresonanten Bereich  $T \gtrsim 150$  keV statt. Beim Eintritt dieser Elektronen in den nichtresonanten Energiebereich wird ihre Wechselwirkung mit dem HF-Feld schwächer. Als Folge davon gewinnen die vom Plasma auf sie ausgeübten Kräfte stärkeren Einfluß auf ihre Bewegung im Phasenraum. Die Elektronen sind oberhalb des Resonanzbereiches deshalb nicht mehr an eine Vorzugsrichtung für den Impuls gebunden. Sie können also durch Diffusion an alle Stellen des zu dem nichtresonanten Energiebereich gehörenden Phasenraumbereiches gelangen und erzeugen dort somit eine Verteilung, die im Vergleich zu der im Resonanzbereich nur schwach anisotrop ist.

Der mit dem HF-Feld resonante Anteil der suprathemischen Komponente unterscheidet sich also von dem nichtresonanten Anteil durch eine höhere Anisotropie seiner Verteilung. Das bedeutet, daß  $f(\vec{p})$  für nicht zur Torusseeele parallele Impulse  $\vec{p}$  im Resonanzbereich kleiner ist als an der Grenze zwischen diesem Bereich und dem hochenergetischen Teil des nichtresonanten Bereiches. Allerdings ist  $f(\vec{p})$  auch für zur Torusseeele parallele Impulse  $\vec{p}$  im Resonanzbereich nicht wesentlich größer und kann sogar kleiner sein als in den Teilen der nichtresonanten Bereiche, die sich unmittelbar an das untere und obere Ende des resonanten Bereiches anschließen. Dies ist ebenfalls auf die großen Beschleunigungskräfte zurückzuführen, die auf die

sich im Resonanzbereich aufhaltenden Elektronen wirken. Für eine Verteilung der geschilderten Art folgt also, daß die Dichte der Elektronen im resonanten Energiebereich kleiner ist als die der Elektronen im hochenergetischen nichtresonanten Bereich.

Um die Messungen im Rahmen dieses Modells quantitativ auswerten zu können, muß die Annahme, daß  $f_0$  für alle T isotrop ist (Gl. (3.10)), fallengelassen werden. Das heißt, im resonanten Bereich muß für  $f_0$  anstelle einer isotropen Richtcharakteristik eine Strahlcharakteristik der Art, wie sie in diesem Abschnitt besprochen worden ist, angenommen werden. Für die Entfaltung sind dementsprechend gebildete effektive Wirkungsquerschnitte zu verwenden, d.h., solche, die unter Zugrundelegung des für die Strahlcharakteristik geltenden Ansatzes berechnet worden sind.

Die bisher unter der Annahme einer isotropen Verteilung  $f_0$  ermittelten Absenkungen von  $\tilde{f}_0$  im resonanten Bereich lassen es allerdings bereits plausibel erscheinen, daß dort eine Strahlverteilung vorliegt, ohne daß die Rechnung, wie beschrieben, modifiziert werden muß. Die Vermutung ist deshalb berechtigt, da die Absenkung unabhängig von dem gewählten Ansatz für  $f_0$  auftritt. Diese Aussage besagt, daß für beide Ansätze gilt:

$$I_{>}(K) \geq I_{<}(K) \Leftrightarrow f_{>}(p) \geq f_{<}(\vec{p}),$$

mit  $I_{>}(K) = I_{f>}(K)$ ;  $I_{<}(K) = I_{f<}(K)$ , d.h., positive Beiträge von  $f$  leisten immer positive Beiträge zu  $I_f$ ; somit führt eine Absenkung der isotropen Verteilungsfunktion zu einer Absenkung der anisotropen Verteilungsfunktion und umgekehrt. Auf ähnliche Weise lassen sich auch mit Hilfe anderer Ansätze für die Impulsrichtungsverteilung berechneten Verteilungsfunktionen in die Diskussion einer in der beschriebenen Weise gemischt stark- und schwach anisotropen Elektronenverteilung einbeziehen. Hierzu gehören insbesondere die in Abschnitt (7.4.2) bestimmten Verteilungsfunktionen  $\tilde{f}_{||}$ , die aus den tangentialen Messungen unter der Annahme einer für alle Elektronenenergien einheitlichen Impulsrichtung  $\vec{p}_s$  bestimmt werden (Abb. (15)).

Aus diesem Abschnitt wird folgendes ersichtlich: Die Absenkung von  $\tilde{f}$  kann als eine Folge der für die Stromtriebexperimente spezifischen Kopplungsmechanismen zwischen Elektronen und elektromagnetischem HF-Feld angesehen werden, wenn sie nicht auf Meßfehler zurückführbar ist. Andere Kopplungsmechanismen können dagegen zu Verteilungsfunktionen von hochenergetischen Elektronen führen, die sich von den hier diskutierten Verteilungen

unterscheiden. Ein Beispiel hierfür sind die hochenergetischen Elektronengruppen, die in Spiegelfeldplasmen durch Elektronen-Zyklotron-Resonanz-Heizung entstehen. Diese zeigen ein anderes als das in diesem Abschnitt beschriebene Verhalten: Deren Verteilungsfunktionen weisen keine Absenkung auf, sondern wachsen im Bereich  $T \lesssim 200$  keV gemäß einer Potenzverteilungsfunktion ( $\tilde{f}(T) \propto T^{-s}$ ,  $1 \lesssim s \lesssim 4$ ,  $s$ : "Spektralindex") mit fallender Energie stark an /24/.

### 7.5 Bestimmung der Stromdichteverteilung einer suprathermischen Entladung

In diesem Abschnitt wird nach der in Kap. 5 beschriebenen Methode aus der bereits behandelten Stromtriebserie  $F_1(T, R)$  und daraus die nach der Energie aufgelöste Stromdichteverteilung

$$(7.18) \quad j_{||}(T, R) = e \cdot 2\pi \cdot \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} v \cdot \cos^2 \theta \sin \theta F_1(T', R) p^2 \frac{dp}{dT'} dT' d\theta, \quad p=p(T'),$$

$$j_{||}(R) = j(T_{\min}, R),$$

in Abhängigkeit von  $T$  bestimmt. Wie  $F_0$  wird auch  $F_1$  in ihrem Verhalten auf Schwankungen in  $\Delta_Q$  und den explizit vorgebbaren Auswerteparametern untersucht. Zu den bisher schon behandelten Parametern kommen solche neu hinzu, die in die Entabelung der radialen Flußprofile und in die Berechnung von  $I_{\text{DIFF}}(K, R)$  aus  $J_{\text{DIFF}}(K, \rho_1)$  (Kap. 5) eingehen. Insgesamt handelt es sich um folgende Einflüsse:

- Kollimatorgeometrie (gemessenes Verhältnis radialer zu tangentialer Fluß)
- Plasmaradius
- Horizontale Verschiebung des Plasmas  $D_{\text{HOR}}$
- Berücksichtigung der von  $\beta_p$  bewirkten Verschiebung magnetischer Flächen nahe der Torusseule,  $D_{\text{HOR1}}$ , die zusätzlich zu  $D_{\text{HOR}}$  auftritt.
- Variation des aus dem Anfangsschritt bei der Auflösung von Gl. (5.6) erhältlichen Wertes von  $F_1$  für den Plasmarand (d.i., Variation des Anfangsschrittes der durch das System (5.6a) gegebenen Folge von Rechenschritten
- Variation von  $Z$
- Berücksichtigung der Runaway-Bremsstrahlung nach der in Abschnitt (7.3.3) beschriebenen Methode
- Variation der Absorberdicken
- Einfluß der Abschirmung der Targetkerne durch Schalenelektronen auf die Bremsstrahlung

Die diese Einflüsse repräsentierenden Parameter werden nur innerhalb ihrer zu erwartenden Fehlerspanne variiert. Die Nebenbedingung  $|F_1| \leq |F_0|$  erlaubt es, den physikalisch sinnvollen Bereich der Variationen noch weiter einzuschränken. Um sicherzustellen, daß die Berechnung von  $F_1(T,R)$  formal richtig funktioniert, wurde zur Probe aus einer vorgegebenen Testverteilungsfunktion  $F_{1,Test}(T,R)$  das zugehörige Flußspektrum  $J_{DIFF,Test}(T,\rho_1)$  berechnet und dieses Profil mit Hilfe der zur Diskussion stehenden Methode invertiert. Wie schon ausgeführt, wurde für den Ansatz Gl. (3.10)  $f_+$  als in  $\vec{p}$  isotrop angenommen. Leider standen nicht alle zur Überprüfung dieser Hypothese erforderlichen Meßrichtungen zur Verfügung (siehe Abschnitt (3.7)).

Für die Auswertung werden die effektiven Wirkungsquerschnitte dahingehend vereinfacht, daß ihre Abhängigkeit von den Plasmaverunreinigungen durch einen einzigen Parameter, einer mittleren Kernladungszahl  $\bar{Z}$ , charakterisiert wird ( $\bar{Z}$  ist nicht mit  $Z_{eff}$  zu verwechseln!). Es wird also

$$(4.3a) \quad G_{0,1}(K,T,\alpha_{0,1},\vec{r}) = K \cdot p^2 \cdot \sigma_{eff0,1}(K,T,\alpha_{0,1},\bar{Z},Z_i) \cdot n_a(\vec{r}),$$

$$0 \leq Z_i \leq \bar{Z}, \quad n_a = n_{Z=1} \approx n_e \quad (\text{Dichte der thermischen Elektronen}).$$

verwendet. Hierbei wird berücksichtigt, daß die Targetdichte abhängig von dem Plasmaort  $r$  ist. Das Dichteprofil  $n_a(\vec{r})$  der Targets ist nach allgemeiner Auffassung /23/ in ohmschen Entladungen unabhängig von dessen Kernladungszahlen, d.h., es läßt sich bis auf einen von  $r$  unabhängigen Faktor durch das Dichteprofil der thermischen Plasmaelektronen angeben.

Für die Auswertung wurde zunächst  $D_{HOR}$  variiert, um die horizontale Plasma-verschiebung festzustellen, für die die Konsistenzbedingung  $|F_1| \leq |F_0|$  am besten erfüllt werden kann. Es zeigt sich, daß dies für  $D_{HOR} \approx 2 \dots 4$  cm, und dann, wenn keine Verschiebung der magnetischen Flußflächen im Plasmazentrum auftritt, ( $D_{HOR,1} = 0$  cm) der Fall ist. Für diese Verschiebungen und für  $\bar{Z} = 2$ , für Wirkungsquerschnitte in Bornscher Näherung, für einen Plasmaradius von 40 cm, erhält man für  $\frac{d}{dT} j_{||}(T,R)$  das in Abb. (18) gezeigte Ergebnis. Abb. (18a) zeigt den Bereich, in dem der Quotient  $|F_1(T)/F_0(T)| \leq 1$  ist. Dieser Bereich von  $T$  und  $R$  ist derjenige, in dem die in Abb. (18b) gezeigte Stromdichte konsistent ist mit dem der Rechnung zugrundegelegten Ansatz Gl. (3.10). Aus Abb. (18) geht also hervor, daß im Bereich  $70 \text{ keV} \leq T; 160 \text{ cm} \leq R \leq 180 \text{ cm}$  die Ergebnisse  $F_0$  und  $F_1$  nicht im Widerspruch zu dem Ansatz stehen. Für  $T \leq 70 \text{ keV}$  ist jedoch der Ansatz für die Rechnung nicht



verwendbar. Ob dieser Befund ähnlich wie die in Abschnitt 7.4.2 diskutierte, in annähernd denselben Energiebereich auftretende Absenkung von  $\tilde{f}(T)$ , auf eine Strahlverteilung der suprathemischen Komponente im Resonanzbereich hindeutet, muß durch weitere Untersuchungen geklärt werden.

Zweitens zeigt Abb. (18), daß der von den suprathemischen Elektronen mit  $T \geq 70$  keV getragene Strom um ca. 2 Größenordnungen geringer ist als der für die zur Diskussion stehende Entladungsserie während der Stromtriebphase eingestellte Plasmastrom von 300 kA. Das bedeutet: wenn dieser Strom überhaupt von den suprathemischen Elektronen getragen wird, dann nur von denen mit Energien  $\leq 70$  keV. Suprathemische Elektronen können also nur dann einen nennenswerten Anteil des Gesamtstromes tragen, wenn ihre Energien im niederenergetischen Teil des Resonanzbereiches oder in dem Bereich unterhalb des Resonanzbereiches liegen. Dieser und alle anderen aus Abb. 18 gezogenen Schlüsse sind jedoch nur unter dem Vorbehalt richtig, daß  $f_+$  zumindest für alle Elektronenenergien  $\geq 70$  keV in  $\theta$  isotrop, d.h., für hohe Energien der Ansatz Gl. (3.10) für die Berechnung von  $f$  anwendbar ist. Messungen an PLT /48/ und die Diskussion über den Stromtriebmechanismus in Abschnitt 7.4.3 zeigen, daß diese Voraussetzung nicht immer erfüllt zu sein braucht (siehe Abschnitt 7.6).

Ein ähnlicher Wert für die Stromdichte  $j_{||}$  folgt auf einfache Weise aus einer Abschätzung durch die Gleichung  $\bar{j} = n_H \cdot e \cdot \bar{v}$ . Hierbei wird die Elektronendichte  $n_H$  aus den für  $\tilde{f}_0$  ermittelten Werten entnommen.  $v$  wird durch die mittlere Elektronengeschwindigkeit abgeschätzt, wobei eine einheitliche Geschwindigkeitsrichtung, die der Richtung des Plasmastroms entspricht, angenommen wird. Die folgende Abschätzung wird auf den Anteil der suprathemischen Elektronen beschränkt, dessen Elektronenenergien innerhalb eines der für die Berechnung für  $F_1$  benutzten Energieintervalle, beispielsweise  $100 \text{ keV} \leq T \leq 112 \text{ keV}$  liegen. Für die Energie  $T = 100 \text{ keV}$  ist nach Abb (11)  $\tilde{f}_0 \approx 3 \cdot 10^8 / (\text{keV} \cdot \text{cm}^3)$  im Plasmazentrum, die Dichte der Elektronen im Plasmazentrum mit Energien zwischen 100 keV und 112 keV ist  $3.5 \cdot 10^9 / \text{cm}^3$ . Für die spezifizierten Elektronenenergien beträgt die maximal mögliche Durchschnittsgeschwindigkeit  $\bar{v} = c \cdot 0.55$ . Aus diesen Werten ergibt sich für  $\bar{j}$  im Plasmazentrum:

$$\bar{j} = e \cdot c \cdot 0.55 \cdot 3.5 \cdot 10^9 / \text{cm}^3 = 9.24 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} .$$

Schließlich zeigt sich trotz der schon erwähnten starken Schwankungen in

den errechneten Stromdichteprofilen mit  $R$ , daß das Maximum der Stromdichte nahe am Plasmazentrum ( $R = 167 \dots 169$  cm) liegt. Für die Auswertung wurde festgelegt: Gruppen von Elektronen, die sich momentan im Sichtbereich des tangentialen Detektors befinden, liefern einen positiv gezählten Anteil zum Plasmastrom, wenn sie sich im Mittel vom Detektor entfernen.

Die Abb. 11,15,17 zeigen, daß, unabhängig von der Art des Ansatzes für  $f$ , der Quotient  $n_H(T \gtrsim 150 \text{ keV})/n_H$  mit dem Abstand  $r_0$  zur Torussele zuzunimmt. Für große  $r_0$  verarmt also der resonante Energiebereich an Elektronen, vermutlich als Folge einer im Randbereich besonders starken Kopplung zwischen Elektronen und eingestrahlttem HF-Feld. Es liegt daher nahe, in Einklang mit dem in Abschnitt (7.4.3) diskutierten Stromtriebmechanismus, die suprathemischen Elektronen im Plasmazentrum durch eine isotrope, für große  $r_0$  dagegen durch eine gemischt stark- und schwach anisotrope Verteilung zu beschreiben. Demnach sind nach Abschnitt (7.4.3) die Impulsrichtungen der Elektronen zum Plasmarand hin stärker parallel zur Torussele ausgerichtet als im Plasmazentrum. Wenn überdies die suprathemischen Elektronen einen Ring bilden (Abschnitt (7.6), nimmt auch deren Dichte  $n_H$  und damit die Stromdichte  $j_{||}$  ihr Maximum für große  $r_0$  an.

Die durch die Variation der bisher diskutierten und weiterer Parameter erzeugte Variation in  $F_0$ ,  $F_1$  und  $j_{||}$  sind trotz aller Meßungenauigkeiten und systematischen Auswertefehler so gering, daß davon die gewonnenen Schlußfolgerungen nicht berührt werden. Dennoch sollen in Hinblick auf eine zukünftige Anwendung dieses Verfahrens zum Schluß einige bedeutende, zu Tage getretene Fehlerquellen besprochen werden.

Für  $R \lesssim 160$  cm liefert die Auflösung des Gleichungssystems (5.6) negative Werte für die Stromdichte  $j(T,R)$ . Diese Beobachtung spricht für die bereits oben diskutierte Möglichkeit, daß  $f$  auch für Energien  $\gtrsim 70$  keV eine starke Anisotropie aufweist. Weiterhin tritt ein Fehler in dem Startschritt von (5.6a), der dem am weitesten vom Zentrum  $O_1$  entfernten Sichtstrahl  $g_{1,1}$  mit der Position  $\xi_1 = 183$  cm zugeordnet ist, auf. Dieser Startfehler ist darauf zurückzuführen, daß Messungen von  $J_1(K, \xi_1)$  für  $\xi_1 > 183$  cm fehlen und deswegen das System (5.6) nur für Gebiete in der Nähe des Plasmazentrums gelöst werden konnte: In den Randbereichen des Plasmas konnten also die Größen  $I_1$  bzw.  $I_{DIFF}$  sowie  $F_1$  nur als grobe Durchschnittswerte ermittelt werden. Entabelungsverfahren besitzen jedoch allgemein die Eigenschaft, daß sich die im Startschritt entstehenden Fehler nicht in die auf ihn folgenden

Schritte fortpflanzen /4/. Für den hier diskutierten Fall heißt das, daß  $j_{||}(T,R)$  für  $R \lesssim 170$  cm weitgehend von Fehlern in dem Startschritt ( $\rho_1 = 183$  cm) unbeeinflusst bleibt, wie es auch die Variation der Startgröße  $J_{\text{DIFF}}(K, \rho_1 = 183 \text{ cm})$  in der Rechnung zeigt.

Problematisch bei der Bestimmung von  $F_1$  ist in manchen Fällen auch die hierfür erforderliche Entabelung der Flußspektren  $J_0(K, \rho_0)$ . Wenn diese nur schwach von  $\rho_0$  abhängig sind, lassen sie nur schwer eine eindeutige Aussage darüber zu, ob die resultierenden Intensitätsprofile  $I_0$  ihr Maximum in der Plasmamitte ( $r_0 = 0$  cm) oder für  $r_0 > 0$  cm (Ringstruktur) annehmen. Beispiele für solche Messungen liefert die zur Diskussion stehende Stromtriebserie: Für #13046, #13053 besitzt  $I_0(K, r_0)$  eine deutlich, für #13045 eine schwach ausgeprägte Ringstruktur; für die übrigen Entladungen dieser Serie liegt hingegen das Maximum von  $I_0$  bei  $r_0 = 0$  cm. Die radialen Messungen für #13045 scheinen ganz gut das durchschnittliche Verhalten von  $I_0$  für diese Serie zu beschreiben; sie werden deshalb der beschriebenen Bestimmung von  $j_{||}$  zugrundegelegt (Abb. 17a).

Um die beschriebenen Fehler und Nachteile in Zukunft zu vermeiden, sind vier Maßnahmen erforderlich. Erstens muß für die radiale Diagnostik die Anzahl der Meßeinrichtungen, also Detektoren mit zugehörigen Kollimatoren, erheblich vergrößert werden. Verfährt man so, erreicht man bei der Bestimmung sowohl der Ortsabhängigkeit als auch der Energieabhängigkeit von  $F_0$  bzw.  $F_1$  eine höhere Genauigkeit. Zweitens müssen die Verfahren zur Bestimmung von  $I$  aus  $J$  um eine Möglichkeit, aus vorgegebenen Fehlern  $\Delta J$  die ihnen zugeordneten Fehler  $\Delta I$  zu bestimmen, erweitert werden. Dies kann wie im Fall der Bestimmung der Energieabhängigkeit von  $F$  (Abschnitt 7.3.1), durch Verwendung der bekannten Rechenregeln für die Fehlerfortpflanzung geschehen. Drittens erlaubt die Auswertung einer größeren Anzahl von Serien, wie in den Abschnitten (7.3.1, 7.3.4) beschrieben, eine zusätzliche Bestimmung des Fehlers bei der Berechnung der um  $\theta = \alpha_1 = 90^\circ$  symmetrischen wie antisymmetrischen Intensitäts- und Elektronenverteilungsprofile. Auch die beobachtete starke Streuung im Verlauf der Stromdichteprofile mit dem Plasmaradius läßt sich verringern, wenn man eine höhere Anzahl von Messungen für die radialen wie tangentialen Flußprofile durchführt. Diese Forderung steht also in Einklang mit der zum Schluß von Kap. 4 aufgestellten Leitlinie, wonach die Qualität der Auswertergebnisse in erster Linie durch die Meßgenauigkeit bestimmt wird. Viertens sollten zusätzlich zu der Meßrichtung  $\alpha_1 = 90^\circ$  zwei zu ihr symmetrische Richtungen zur Messung von  $f_1$  bzw. der zu  $f_1$  gehörenden Bremsstrahlung  $I_{\text{DIFF}}$  und zu der der Anisotropie von  $f_+$  verwendet werden.

### 7.6. Vergleich der Messungen der suprathemischen Bremsstrahlung mit solchen an PLT durchgeführten Messungen und mit Messungen von $\beta_p$

Auch an PLT wurde die von den suprathemischen Elektronen emittierte Bremsstrahlung gemessen (/48/, /49/). Hierfür stand eine Meßapparatur zur Verfügung, die die Bremsstrahlungsrichtcharakteristik mit weit besserer Winkelauflösung als die an ASDEX installierte Diagnostik zu bestimmen gestattete. Da sie auch um eine poloidale Schnittebene symmetrische Meßrichtungen verwendet, lassen die hiermit gewonnenen Meßergebnisse auch detailliertere Aussagen über  $f_+$  zu als die, die an ASDEX erhalten worden sind. Die für PLT erhaltenen Resultate deuten darauf hin, daß auch die im PLT während der Stromtriebphase erzeugte suprathemische Elektronenkomponente einen ringförmigen Aufbau besitzt. Dessen Ringradius scheint allerdings  $\approx 30$  cm oder noch größer zu sein. Mit den in Kap. 3 bereitgestellten Rechenregeln für  $f_+$  ergibt sich aus diesen Messungen, daß im Ringbereich  $I_+$  für die Beobachtungsrichtung  $\alpha_1 = 0^\circ$  für alle Energien  $K$  um das 3...5fache höher ist als für  $\alpha_1 = 90^\circ$ . Im Ringbereich sind also  $I_+$ , damit auch  $f_+$  und der Plasmadruck  $\vec{P}$  nach diesen Messungen stark anisotrop.

Wie man durch Subtraktion des im Ring erzeugten Bremsstrahlungsanteils von der gemessenen Bremsstrahlungsrichtcharakteristik feststellt, ist jedoch in Gebieten außerhalb des Rings die Anisotropie von  $f_+$  und  $I_+$  weitaus schwächer ausgeprägt als im Ring selbst. Hieraus kann man schließen, daß  $f_+$  und damit  $\vec{P}$  nur dann merklich anisotrop sind, wenn die suprathemischen Elektronen einen Ring bilden. Bei diesem Schluß muß man aber berücksichtigen, daß aus technischen Gründen auch an PLT eine vollständige Messung der Bremsstrahlung nicht möglich war: Die Anzahl der an PLT zur Verfügung stehenden Meßrichtungen reichte für eine Entabelung der gemessenen Flußprofile nicht aus. Deswegen konnten für die Bremsstrahlungsintensität nur Werte angegeben werden, die man durch Mittelung über die für Messung benutzten Sichtlinien erhält.

Von den in diesem Report beschriebenen Messungen besitzen nur die für die Entladungen #13315, #13045, #13046, #13053 gemessene suprathemische Elektronenkomponente eine mit den entsprechenden Messungen an PLT vergleichbare Ringstruktur. Diese ist für #13315 (Abb. 17b) am stärksten, für #13046, #13053 mäßig stark und für #13045 am schwächsten ausgeprägt. Die übrigen in diesem Report behandelten Messungen zeigen keine Ringstruktur, höchstens eine mit wachsenden Energien  $T$  bzw.  $K$  anwachsende Verbreiterung und Plateaubildung der Profile für  $I_+$  und  $F_+$ . Diese Folgerungen berücksichtigen auch, daß, wie bei den PLT-Messungen, im Ringbereich  $I_+$  für  $\alpha_1 \lesssim 50^\circ$  bis zu einem Faktor 3...5 größer sein kann als  $I_+$  für die der ASDEX-Diagnostik zugänglichen Meßrichtung  $\alpha_1 = 90^\circ$ . Nach den obigen Ausführungen



folgt aus dem beschriebenen Profilverhalten, daß die von den zuletzt angeführten suprathermischen Entladungen erzeugten um  $\theta = 90^\circ$  symmetrischen Anteile  $f_+$  nur schwach anisotrop sind. Die hierzu gehörenden Stromdichteverteilungen  $j_{||}$  (T,R) können demnach mit Hilfe des Ansatzes Gl. (3.10) berechnet werden. Es besitzen insoweit also die in Abschnitt (7.5) hergeleiteten Ergebnisse für  $F_0$ ,  $F_1$  und  $j_{||}$  Gültigkeit.

Die These, daß die Anisotropie der suprathermischen Elektronenkomponente bedingt ist durch dessen Ringstruktur, wird unterstützt durch einen durch die Shafranov-Gleichgewichtsbedingung gegebenen Zusammenhang von Magnetfeldparametern des Plasmas /50/:

$$(7.19) \Lambda = \frac{1}{2} (\beta_p'' + \beta_p^\perp) + \frac{l_i}{2} - 1.$$

In dieser Gleichung ist  $\Lambda$  der sog. Asymmetriefaktor des Magnetfeldes,  $\beta_p'' = 2 \mu_0 P_{||} / B_{pol}^2$ ;  $\beta_p^\perp = 2 \mu_0 P_\perp / B_{pol}^2$  (siehe Abschnitt 3.4) und  $l_i$  die innere Induktivität des Plasmas pro die für die toroidale Richtung gewählte Längeneinheit. Leider sind nur zwei der in dieser Gleichung vorkommenden Größen direkt aus voneinander unabhängigen Messungen bestimmbar, nämlich  $\Lambda - \beta_p^\perp + 1$  und  $\beta_p^\perp$ . Aussagen über die Druckkomponenten  $P_{||}$ ,  $P_\perp$  lassen sich deshalb nur indirekt durch Vorgabe unterschiedlicher, in  $l_i$  eingehende Ansätze für die Stromdichteverteilung  $j_{||}(R)$  gewinnen. Ein derartiges Vorgehen zeigt unabhängig von den im Einzelfall vorliegenden Meßwerten für  $\Lambda - \beta_p^\perp + 1$ ,  $\beta_p^\perp$ , daß die Druckanisotropie umso schwächer ausgeprägt ist, je stärker das Stromdichteprofil um  $r_0 = 0$  cm zentriert ist. Ringförmige Profile für  $j_{||}$  liefern  $l_i \approx 0$  /51/, und deswegen unter Zugrundelegung der für #13048 erhaltenen Parametermeßwerte  $\Lambda - \beta_p^\perp + 1 \approx 0.7$ ,  $\beta_p^\perp \approx 0.13$  für das Druckverhältnis  $P_{||}/P_\perp$  den Wert

$$(7.20) \frac{\beta_p''}{\beta_p^\perp} = \frac{P_{||}}{P_\perp} = \frac{2 \cdot (0.7 - \frac{l_i}{2})}{\beta_p^\perp} + 1 \approx 12.$$

Wenn dagegen das Stromdichteprofil so stark um die Plasmamitte zentriert ist, daß  $l_i/2 = 0.7$  ist, erhält man  $P_{||} = P_\perp$ , also Druckisotropie.

Das Problem bei der Anwendung dieser Gleichung ist, daß im Falle stark um  $r_0 = 0$  cm zentrierte Profile für  $j_{||}$  der Quotient  $P_{||}/P_\perp$  wegen der Kleinheit von  $\beta_p^\perp$  recht ungenau wird: die exakte Isotropie  $P_{||}/P_\perp = 1$  läßt sich auf diesem Weg nicht feststellen. Gl. (7.20) erlaubt also nur eine im obigen

Sinne qualitative Diskussion des Isotropieverhaltens der suprathemischen Elektronenkomponente. Hier führen aber neuere Messungen weiter, die eine gesonderte Bestimmung von  $l_1$  zulassen /54/: Sie sind außerdem noch ein weiteres Indiz dafür, daß in Stromtriebentladungen in ASDEX der Druck weitgehend isotrop und damit das geschilderte Verfahren zur Bestimmung der Stromdichteverteilung anwendbar ist.

### 7.7 Schlußbetrachtung: Folgerungen für die Entwicklung einer Bremsstrahlungsdiagnostik, die auch zur Messung der Stromdichteprofile im Energiebereich $T \lesssim 70$ keV geeignet ist

Die Ausführungen der letzten Abschnitte legen es nahe, daß die für die Erzeugung des HF-getriebenen Plasmastromanteils wesentlichen Effekte in einem niederenergetischen Teil des suprathemischen Energiebereichs wirken. Entsprechendes gilt, wie bereits in der Einleitung bemerkt, vermutlich auch für die Mechanismen, die suprathemische Elektronen erzeugen. Von besonderer Bedeutung für die Physik suprathemischer- und Stromtriebentladungen ist daher der Aufbau desjenigen Teils der suprathemischen Elektronengruppe, der zum Energiebereich  $T \lesssim 70$  keV gehört. In Zukunft muß also bei der Messung der Energie- und Impulsrichtungsabhängigkeit von  $f$  besonders dieser niederenergetische Energiebereich berücksichtigt werden.

Um also den auswertbaren Energiebereich zu kleinen Energien hin zu erweitern, ist eine Fortentwicklung der Bremsstrahlungsdiagnostik erforderlich. Es wird hierbei an zwei Maßnahmengruppen gedacht: Erstens muß die Datenmenge über die Bremsstrahlung, die die experimentelle Anordnung zur Verfügung stellen kann, erhöht werden. Diese Maßnahme ist erforderlich, hauptsächlich um denjenigen Fehleranteil bei der Bestimmung von  $I_{DIFF}$  bzw.  $I$  auszugleichen, der durch die im Falle niedriger Energien schwache Ausprägung der Bremsstrahlungsrichtcharakteristik verursacht wird. Sie ist aber auch, wie in diesem Report an verschiedenen Stellen herausgestellt worden ist, eine grundlegende Voraussetzung für eine allgemeine Qualitätserhöhung der Auswertergebnisse. - Zweitens muß versucht werden, die Auswertemethode in eine von der Impulsrichtungsverteilung unabhängige Form zu bringen. Das Ziel ist also, eine Messung der Stromdichteprofile  $j_{||}(T,r)$  der suprathemischen Komponente für beliebige Ausprägungen der Anisotropie von  $f$ , also auch für den zur Diskussion stehenden Energiebereich  $T \lesssim 70$  keV, zu ermöglichen. Wie beschrieben, ist eine Messung von  $j_{||}(T,r)$  mit den derzeit zur Verfügung stehenden Mitteln nur unter Benutzung des Ansatzes

$$(3.10) \quad f(\vec{p}) = f_0(|\vec{p}|) + \cos \theta \cdot f_1(|\vec{p}|)$$

für die Impulsrichtungsverteilung möglich.

Mit Hilfe des folgenden Verfahrens kann man, ohne auf einen Ansatz für die Impulsrichtungsverteilung zurückgreifen zu müssen und unter Verwendung einer nur geringen Anzahl von Meßrichtungen, Aussagen über die Profile der von den suprathemischen Elektronen getragenen energieaufgelösten Stromdichte,  $j_{||}(T,r)$ , machen. Die Methode besteht darin, unter Verwendung einer Verallgemeinerung des in Abschnitt 7.2 dargestellten Verfahrens, alle die mit der vorgegebenen Bremsstrahlungsmessung verträglichen Variationen von  $f(\vec{p})$  und damit die von den gesuchten Größen  $n_H$  und  $j_{||}$  herauszufinden. Hierzu wird anstelle des Ansatzes Gl. (3.10) die für beliebige Impulsrichtungsverteilungen gültige Schreibweise von  $F$  als Summe bzw. Differenz der  $F_{\pm}$  (Gl. (3.17)) benutzt. Die Rechnung geht von Gl. (3.19) aus.

Die vorgeschlagene Methode strebt also bereits von ihrem Ansatz her nicht an, eindeutige Werte für die gesuchten Größen  $f$ ,  $n_H$ ,  $j_{||}$  zu liefern. Ihr Ziel ist lediglich die Angabe der zu diesen gehörenden und mit den Bremsstrahlungsmessungen verträglichen maximalen Variationsintervallen. Diese Verfahrensweise bedeutet keinen Verzicht auf Genauigkeit, da nach Kap. 3 aus Gl. (2.4) bzw. Gl. (3.19) die Impulsrichtungsverteilung i.a. ohnehin nicht eindeutig bestimmt werden kann. Die Eindeutigkeit ist überdies auch dann nicht gewährleistet, wenn die Richtcharakteristik der Bremsstrahlung mit hoher Auflösung gemessen wird. Dies ist eine für die Auflösung von "Fredholmschen Integralgleichungen der 1. Art", worauf man auch die Bestimmung der Impulsrichtungsverteilung zurückführen kann, typische Schwierigkeit ("ill-posedness", /26/). Nach dem Gesagten kann man sich in dem vorliegenden Fall die damit verbundenen numerischen Probleme durch Anwenden der vorgeschlagenen Auswertemethode ersparen.

Der Variationsbereich für auf diese Weise erhältlichen Verteilungsfunktionen  $F$  ist beschränkt, wenn man voraussetzt, daß  $F$  als über die Energie und Impulsrichtung geglättet vorliegen (siehe Abschnitt 4.5). Deswegen ist es grundsätzlich möglich, in der beschriebenen Weise für Verteilungsfunktionen Fehlergrenzen und damit Abschätzungen für  $F_{\pm}$  anzugeben. Die Beschränktheit von  $F$  kann man folgendermaßen verdeutlichen: Die Dichte  $n_H$  der suprathemischen Elektronen bzw.  $F_{+}$  wird größenordnungsmäßig bereits dadurch festgelegt, daß der Variation ein für eine einzige Beobachtungsrichtung  $\alpha_1$  gemessenes Spektrum  $I_{+}(K, \alpha_1)$  fest vorgegeben wird. Unter der Annahme, daß  $F_{-}$  in den Bereichen  $\theta \geq 90^{\circ}$  und  $\theta \leq 90^{\circ}$  jeweils nicht das Vorzeichen wechselt, kann man für  $F_{-}$  bzw.  $j_{||}$  einen entsprechenden Schluß ziehen, wenn mindestens eine Messung von  $I_{-}$  vorliegt.



Das Problem bei der Anwendung dieses Verfahrens ist also nicht die Existenz von Variationsgrenzen für  $f$  an sich, sondern vielmehr die sich aus der Variation ergebende maximale Variationsbreite, d.i., die maximale Fehler-spanne: diese kann so groß sein, daß man aus ihr keine brauchbare Abschätzung für  $n_H$  und  $j_{||}$  erhalten kann. Drei bei der Variation einzuhaltende Randbedingungen verbessern allerdings die Situation: Erstens sind von den Variationen von  $f$ , die mit dem durch die Messung vorgegebenen Spektrum  $I$  verträglich sind, nur diejenigen physikalisch sinnvoll, die die Bedingungen Gl. (3.20) erfüllen. Zweitens werden die mit der Messung verträglichen Variationen von  $F_{\perp}$  zusätzlich durch die physikalisch sinnvolle, im letzten Absatz aufgeführte Annahme über das Vorzeichen von  $F_{\perp}$  eingeschränkt. Drittens wird die maximale Variationsbreite von  $F_{\perp}$  und damit die der gesuchten Größen  $n_H$  und  $j_{||}$  kleiner mit sinkenden Elektronenenergien  $T$ . Dies ist auf den bereits in Kap. 2 diskutierten Sachverhalt zurückzuführen, daß bei kleinen Energien  $T$  die differentiellen Wirkungsquerschnitte wesentlich schwächer vom Emissionswinkel  $\delta$  abhängig sind als bei hohen Energien. Gerade für  $T \lesssim 70$  keV erhält man also mit Hilfe dieser Methode möglicherweise brauchbare Abschätzungen für  $n_H$ ,  $j_{||}$ , auch wenn  $I_{\perp}$  nur für ein einziges Richtungspaar  $(\theta, 180^\circ - \theta)$  gemessen worden ist und deshalb die Impulsrichtungsverteilung nicht genau bekannt ist. Ob diese Hoffnung berechtigt ist, müssen Testrechnungen zeigen.

Die beschriebene Abschätzungsmethode für  $j_{||}$  kann außerdem für das in Abb. (18) gezeigte energieaufgelöste Stromdichteprofil, insbesondere für  $T \lesssim 70$  keV, eine Abschätzung des auf den Ansatz Gl. (3.10) zurückzuführenden systematischen Fehlers von  $f$  liefern. Sie sagt vielleicht auch darüber etwas aus, ob das für diesen Energiebereich bestimmte Verhältnis  $|F_1/F_0| > 1$  darauf zurückzuführen ist, daß  $F$  eine gemischt stark- und schwach anisotrope Verteilung nach der in Abschnitt (7.4.3) beschriebenen Art besitzt. Bei hohen Energien ist, wie bereits ausgeführt, die Bremsstrahlungsemission stark in Richtungen  $\delta \approx 0^\circ$  ausgerichtet. Um diesen Sachverhalt angemessen zu berücksichtigen, ist für die Auswertung der Bremsstrahlungsspektren nach dieser Methode für hohe Energien  $T > 70$  keV die Hinzunahme weiterer Meßrichtungen (z.B.,  $\alpha_1 = 90^\circ$ ) erforderlich.

Für den experimentellen Ausbau der Bremsstrahlungsdiagnostik werden folgende Empfehlungen gegeben:

- a) Aus den in Kap. 3 erläuterten Gründen ist es notwendig, den Differenzfluß  $J_{\perp}$  (bzw.  $J_{DIFF}$ ) mit höherer Genauigkeit als bisher zu bestimmen.



Dies kann erreicht werden, wenn man die bestehende tangentiale Diagnostik zu einem System ausbaut, das zwei um die poloidale Schnittebene  $\alpha_1 = 90^\circ$  symmetrisch angeordnete Teilsysteme besitzt. Diese können ihrerseits jeweils aus mehreren Detektoren, kombiniert mit Kollimatoren, bestehen.

- b) An verschiedenen Stellen wurde die Notwendigkeit betont, die pro Entladung erfaßbare Datenmenge über die Bremsstrahlung zu erhöhen. Um dies zu erreichen, muß jedes Teilsystem mit möglichst vielen Beobachtungsrichtungen bzw. Detektoren ausgestattet werden. (In den derzeit benutzten Aufbaurahmen für die Bremsstrahlungsdiagnostik läßt sich die Anzahl der aus je einem Detektor und einem Kollimator bestehenden Kombinationen auf ca. 30 erhöhen.) Eine Erhöhung der Datenmenge kommt der Bestimmung des Orts-, der Impulsrichtungs- und der Energieabhängigkeit von  $f$  gleichermaßen zugute. Durch die Benutzung vieler Detektoren können die Flußprofile  $J_{\pm}(K, \varrho)$  aus simultan ablaufenden Einzelmessungen, also ohne die sonst notwendige Verwendung einer Serie von Entladungen, bestimmt werden. Hierdurch wird das Auftreten des auf die Nichtreproduzierbarkeit der Entladungen zurückzuführenden Fehlers  $\Delta_{Q_b}$  vermieden (siehe Abschnitt 7.1). Dies kommt wiederum insbesondere der Genauigkeit von  $J_{\pm}$  zugute.
- c) Für die Messung der Bremsstrahlung in dem niederenergetischen Teil des suprathemischen Energiebereichs ist es wünschenswert, Detektoren mit höherer Energieauflösung als die der auch verwendeten NaJ(Tl-) Detektoren zu verwenden.
- d) Die in diesem Abschnitt empfohlenen Testrechnungen zur Frage der Abschätzbarkeit von  $j_{\parallel}$ ,  $n_H$  aus Bremsstrahlungsmessungen lassen eine Aussage über den Meßaufwand zu, der für die Bestimmung von  $j_{\parallel}$  erforderlich ist. Sie können ergeben, daß hierfür mehrere um  $\alpha_1 = 90^\circ$  symmetrisch angeordnete Teilsysteme erforderlich sind.

Die bestehenden Programme zur Bestimmung der Verteilungsfunktion der suprathemischen Elektronen arbeiten sehr schnell. Deswegen ist es möglich, die aus Bremsstrahlungsmessungen bestimmten Profile für  $F_{0,1}$  sowie für  $n_H$ ,  $\bar{T}$  und der energieaufgelösten Stromdichte  $j_{\parallel}(T, r)$  unmittelbar während des Experimentierbetriebs ("on line") zu erhalten, wenn genügend Datenverarbeitungs-kapazität zur Verfügung steht.

### Danksagung

Die in diesem Report beschriebenen Messungen wurden durch die ASDEX-Arbeitsgruppe ermöglicht und unterstützt. Der Autor dankt den Herren Dr. G. Fußmann, Dr. Leuterer, Dr. P. Smeulders und Dr. F. Söldner für zahlreiche Diskussionen über Stromtriebentladungen. Dr. G. Fußmann war außerdem bei der Herausgabe dieses Reports sehr hilfreich. Frau Hermann erledigte die umfangreichen Schreibarbeiten, Frau Volkenandt zeichnete die zu dem Report gehörenden Abbildungen und Frau Wendt und Herr Dr. P. Smeulders gaben wertvolle Unterstützungen für die anfallenden Programmierarbeiten. Auch für diese Hilfen bedankt sich der Autor.

Literaturangaben

- /1/ Fussmann, G. et al., 9th International Conference on Plasma Physics, Baltimore, USA, 1982, IAEA-CN-41
- /2/ Parail, V.V., Pogutse, O.P., Nucl. Fusion 18 (1978) 303
- /3/ Bernhardt, K., Fussmann, G., et al., DPG Frühjahrstagung Regensburg 1983.
- /4/ Smeulders, P., priv. Mitteilung
- /5/ Brau, K., et al., PPL-Report 1644, Princeton, USA
- /6/ Kim, Young Soon; Pratt, R.H., Phys. Rev. A. 27 (1983) 2913
- /7/ M. Keilhacker et al., Nucl. Fusion 25 (1985) 1045
- /8/ Janeschitz, G., private Mitteilung
- /9/ Haug, E., Z. f. Naturforschung 30a (1975) 1546
- /10/ Walcher, W., private Mitteilung
- /11/ Logan, B.G., NRL Memorandum Rep. 2861, Washington DC, Aug. 1974
- /12/ Bernhardt, K., Haug, E., Wiesemann, K., ADTNT 28 (1983) 461
- /13/ Lee, C.M., Pratt, R.H., Phys. Rev. A. 12 (1975) 707
- /14/ Bethe, H.A., Heitler, W., Proc. Roy. Soc., A146 (1934) 83
- /15/ Sauter, F., Ann. Phys. 20 (1934) 404
- /16/ Elwert, G., Ann. Phys. 34 (1939) 178
- /17/ Elwert, G., Haug, E., Phys. Rev. 183 (1969) 90
- /18/ Tseng, H.K., Pratt, R.H., Phys. Rev. A3 (1971) 100
- /19/ Lee, C.M., Pratt, R.H., Phys. Rev. A 16 (1977) 2169
- /20/ Semaan, M., Quarles, C.A., Phys. Rev. A 24 (1981) 2280
- /21/ Quarles, C.A., Heroy, D.B., Phys. Rev. A 24 (1981) 48
- /22/ Johnston, T.W., Phys. Rev. 120 (1960) 1103
- /23/ Fussmann, G., priv. Mitteilung
- /24/ Bernhardt, K., Wiesemann, K., Plasma Physics 24 (1982) 867
- /25/ Haug, E., priv. Mitteilung
- /26/ Tikhonov, A.N., Alikaev, V.V., Arsenin, V.Ya., Dumova, A.S., Sov. Phys. JETP 28 (1969) 1006
- /27/ Bernhardt, K., Comp. Phys. Comm. 19 (1980) 17
- /28/ Großmann, S., Funktionalanalysis, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1970
- /29/ Kennet, T.J., Brewster, P.M., Prestwich, W.V., Robertson, A., Nuclear Instr. a. Methods 153 (1978) 125

- /30/ Kowalewski, G., Integralgleichungen, Lehrbuch; Leipzig, Berlin (1930)
- /31/ Kershaw, D., in: Numerical Solution of Integral Equations;  
Hrg: Delves, L.M. and Walsh, J., Clarendon Press, Oxford (1974)
- /32/ Olsen, H.A., Maximon, L.C., Phys. Rev. A 18 (1978) 2517
- /33/ K. Bernhardt et al., DFG-Report 1977, Ruhr-Universität Bochum
- /34/ Siegbahn, K., Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy, North Holland  
Publishing Company, Amsterdam 1966
- /35/ Birks, J.B., The Theory and Practice of Scintillation Counting  
(Pergamon Press, Oxford 1967)
- /36/ Firmenkatalog EG & G, Jahrgang 1983
- /37/ Henke, B.L., ADNDT 27 (1982) 1
- /38/ Maor, D., Rosner, B., J. Phys. E 11 (1978) 1141
- /39/ Ziemann, K., SFB Plasmaphysik Bochum/Jülich (1984) 84-05-12
- /40/ Lederer, C.M., Hollander, J.M., Perlman, I., Table of Isotopes  
(J. Wiley, New York, 1967)
- /41/ Programme von Smeulders, P.
- /42/ Bevington, P.R., Data Reduction and Error Analysis for the Physical  
Sciences (McGraw-Hill, New York 1969)
- /43/ Schaeffer, N.M., Reactor Shielding for nuclear engineers (1973),  
US-AEC
- /44/ Pages, L., Bertel, E., Joffre, H., Sklavenitis, L., Atomic Data 4  
(1972) 1
- /45/ Söldner, F., priv. Mitteilung
- /46/ E.H. Silver, et al., Report PPPL-1660 (1982)
- /47/ v. Goeler, S., et al., Report PPPL-2010 (1983)
- /48/ v. Goeler, S., Stevens, J., et al., Nucl. Fusion 25 (1985) 1515
- /49/ Stevens, J., v. Goeler, S., et al., Nucl. Fusion 25 (1985) 1529
- /50/ Mukhovatov, V.S., Shafranov, V.D., Nucl. Fusion 11 (1971) 605
- /51/ Artsimowitsch, L.A., Sagdejew, R.S., Plasmaphysik für Physiker,  
(1983), B.G. Teubner, Stuttgart
- /52/ Shkarofsky, I.P., Johnston, T.W., Bachynski, M.P.,  
The Particle Kinetics of Plasmas, Lehrbuch;  
Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
- /53/ Leuterer, F., et al; Phys. Rev. Letters 55 (1985) 7
- /54/ Bartiromo, R. et al, Nuclear Fusion 26 (1986) 1105





Die Geometrie des Systems ist durch die folgenden Parameter beschrieben:  
 $f$ : Brennweite des Systems  
 $d$ : Durchmesser des Systems  
 $\theta$ : Öffnungswinkel des Systems  
 $\alpha$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\beta$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\gamma$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\delta$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\epsilon$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\zeta$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\eta$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\theta$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\iota$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\kappa$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\lambda$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\mu$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\nu$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\xi$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\omicron$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\pi$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\rho$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\sigma$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\tau$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\upsilon$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\phi$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\chi$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\psi$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\omega$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\delta$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\epsilon$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\zeta$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\eta$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\theta$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\iota$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\kappa$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\lambda$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\mu$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\nu$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\xi$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\omicron$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\pi$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\rho$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\sigma$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\tau$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\upsilon$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\phi$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\chi$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\psi$ : Winkel der Lichtstrahlen  
 $\omega$ : Winkel der Lichtstrahlen

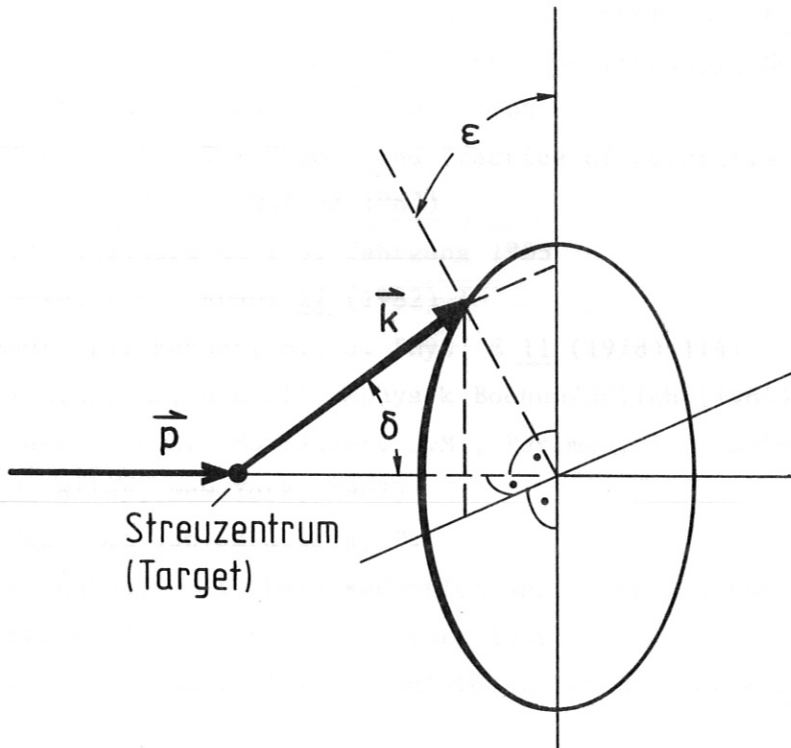


Abb. 1:

Die Geometrie der Bremsstrahlungsemission in mikroskopischer Darstellung.  $\vec{p}$ : Impulsrichtung des auf das ruhende Target treffenden Elektrons,  $\vec{k}$ : Richtung des emittierten Bremsstrahlungsquants. Die Orientierung von  $\vec{k}$  wird durch Polarkoordinaten  $\delta$  und  $\epsilon$  gekennzeichnet. Als Achse des zugehörigen Systems wird die Richtung von  $\vec{p}$  gewählt.

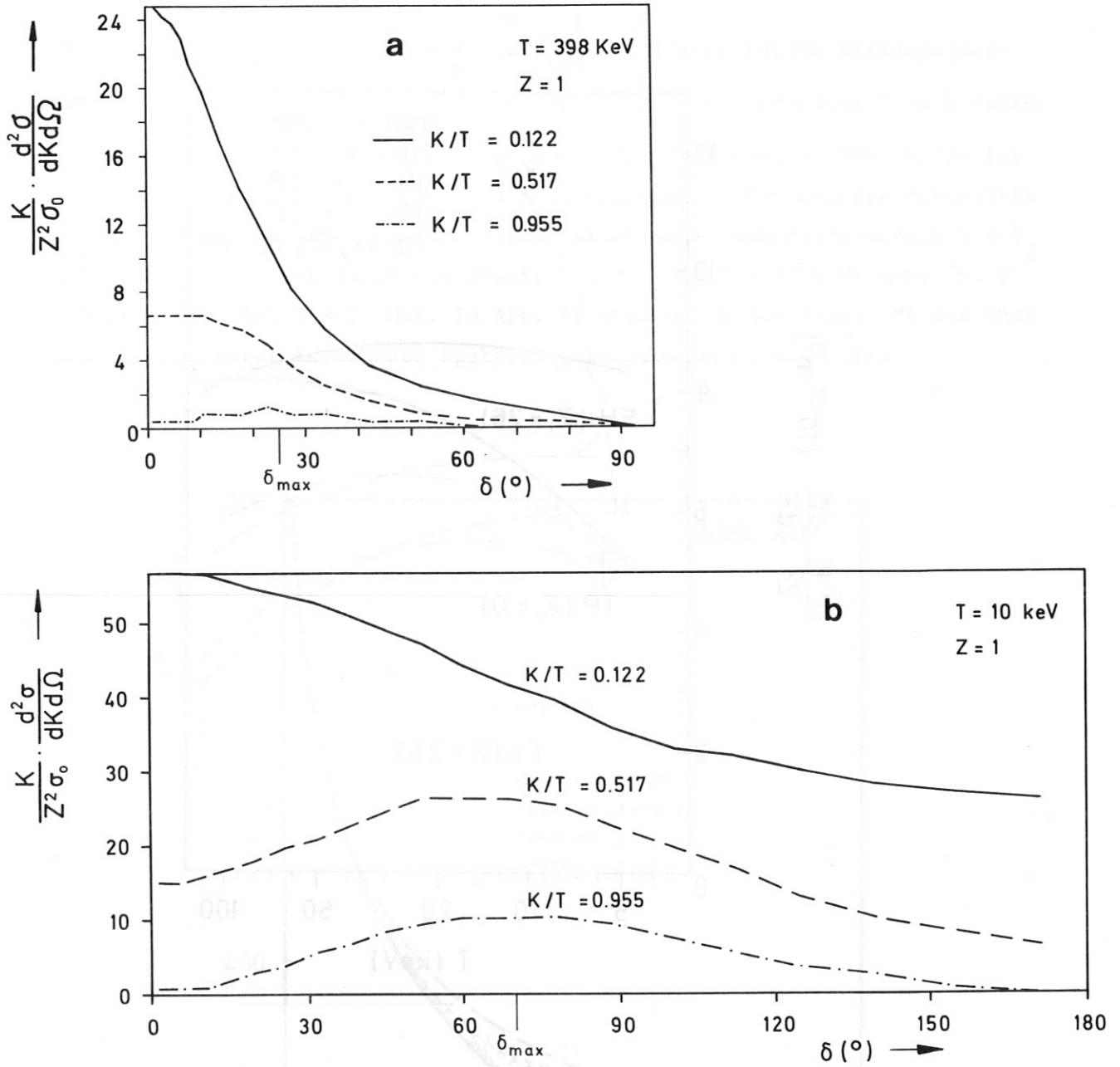


Abb. 2:  
 a: Auf  $\frac{Z^2 \cdot \sigma_0}{K} = \frac{Z^2 \cdot 0.58 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2}{K \text{ ster} \cdot \text{KeV}}$  skalierte und in der Photonenenergie  $K$  und dem Abstrahlungswinkel  $\delta$  differentielle Wirkungsquerschnitte  $\frac{d^2}{dKd\Omega} \sigma(K, T, \delta)$  für Bremsstrahlung, die von Elektronen mit einer Anfangsenergie  $T = T_j = 398 \text{ keV}$  emittiert wird.  $\frac{d^2 \sigma}{dKd\Omega}$  ist aufgetragen in Abhängigkeit vom Emissionswinkel  $\delta$  für drei verschiedene Werte von  $K/T$ .  $\delta_{\text{max}}$  kennzeichnet für  $K/T = 0.955$  (kurzwelliger Grenzfall) denjenigen Emissionswinkel, für den die Bremsstrahlungsintensität bzw.  $\frac{d^2 \sigma}{dKd\Omega}$  den maximalen Wert annimmt. Aus /11/.

b: Dasselbe für eine Anfangsenergie  $T = 10 \text{ keV}$ .

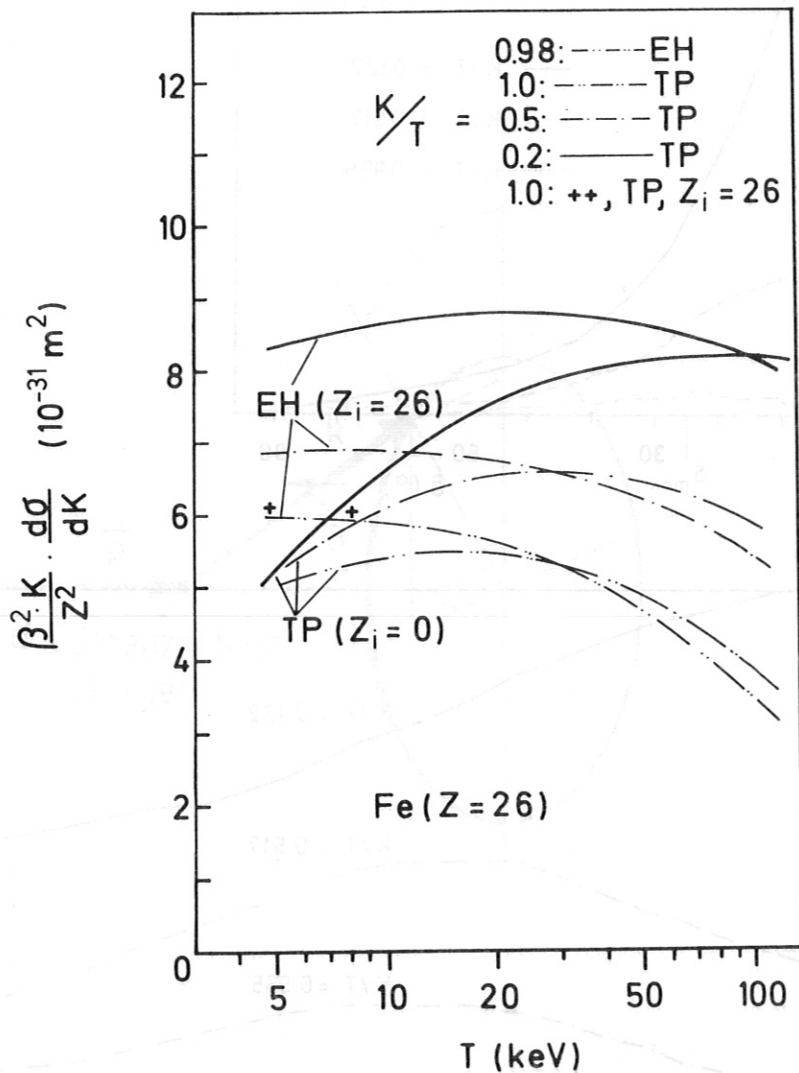
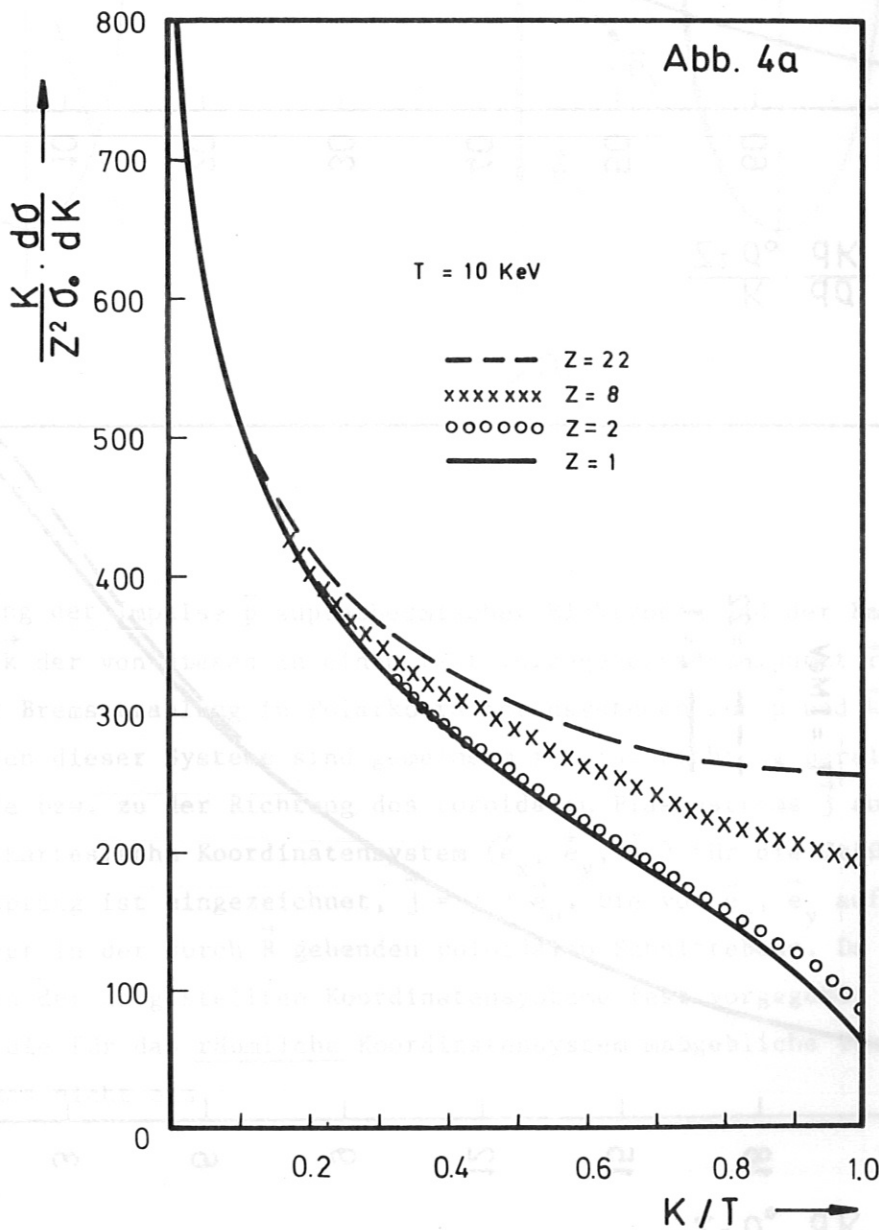


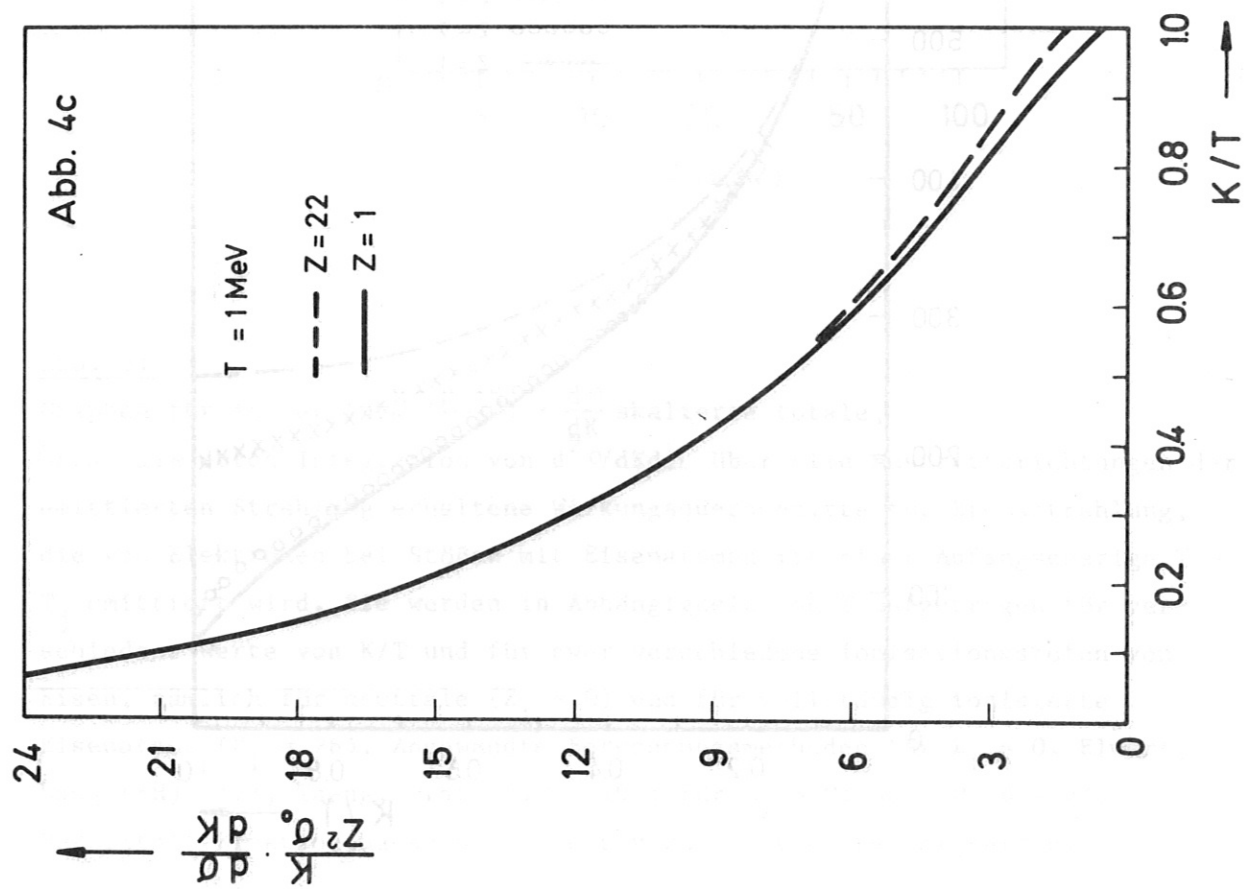
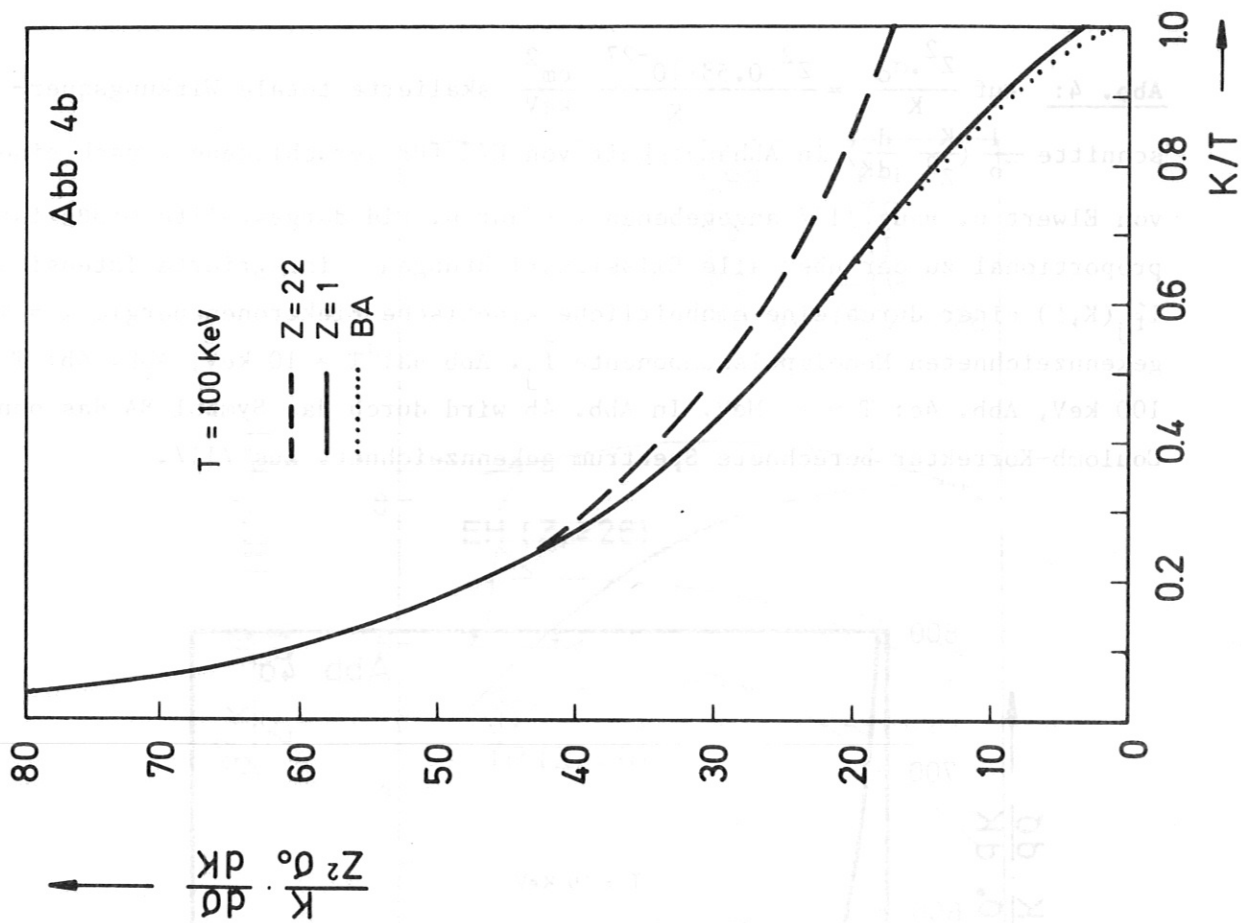
Abb. 3:

Graphen für in der Form  $\left(\frac{\beta^2 \cdot K}{Z^2}\right) \cdot \frac{d\sigma}{dK}$  skalierte totale, (d.s. die durch Integration von  $d^2\sigma/dKd\Omega$  über alle Austrittsrichtungen der emittierten Strahlung erhaltene Wirkungsquerschnitte für Bremsstrahlung, die von Elektronen bei Stößen mit Eisenatomen mit einer Anfangsenergie  $T = T_j$  emittiert wird. Sie werden in Abhängigkeit von  $T$  aufgetragen für verschiedene Werte von  $K/T$  und für zwei verschiedene Ionisationsstufen von Eisen, nämlich für neutrale ( $Z_i = 0$ ) und für vollständig ionisierte Eisenatome ( $Z_i = 26$ ). Angewandte Berechnungsmethoden für  $Z_i = 0$ : Elwert, Haug (EH) /12/, Tseng, Pratt (TP) /19/; für  $Z_i = 26$ : nur TP.  $\beta = v/c$ : Verhältnis Elektronengeschwindigkeit  $v$  zu Lichtgeschwindigkeit  $c$ .



Abb. 4: Auf  $\frac{Z^2 \cdot \sigma_0}{K} = \frac{Z^2 \cdot 0.58 \cdot 10^{-27}}{K} \frac{\text{cm}^2}{\text{keV}}$  skalierte totale Wirkungsquerschnitte  $\frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{K}{Z^2} \frac{d\sigma}{dK} \right)$  in Abhängigkeit von  $K/T$  für verschiedene  $Z$  nach einem von Elwert u. Haug /17/ angegebenen Verfahren. Die dargestellte Größe ist proportional zu der über alle Emissionsrichtungen integrierte Intensität  $I_{\hat{f}_j}(K, \delta)$  einer durch eine einheitliche kinetische Elektronenenergie  $T = T_j$  gekennzeichneten Monoimpulskomponente  $\hat{f}_j$ . Abb. 4a:  $T = 10 \text{ keV}$ ; Abb. 4b:  $T = 100 \text{ keV}$ , Abb. 4c:  $T = 1 \text{ MeV}$ . In Abb. 4b wird durch das Symbol BA das ohne Coulomb-Korrektur berechnete Spektrum gekennzeichnet. Aus /11/.





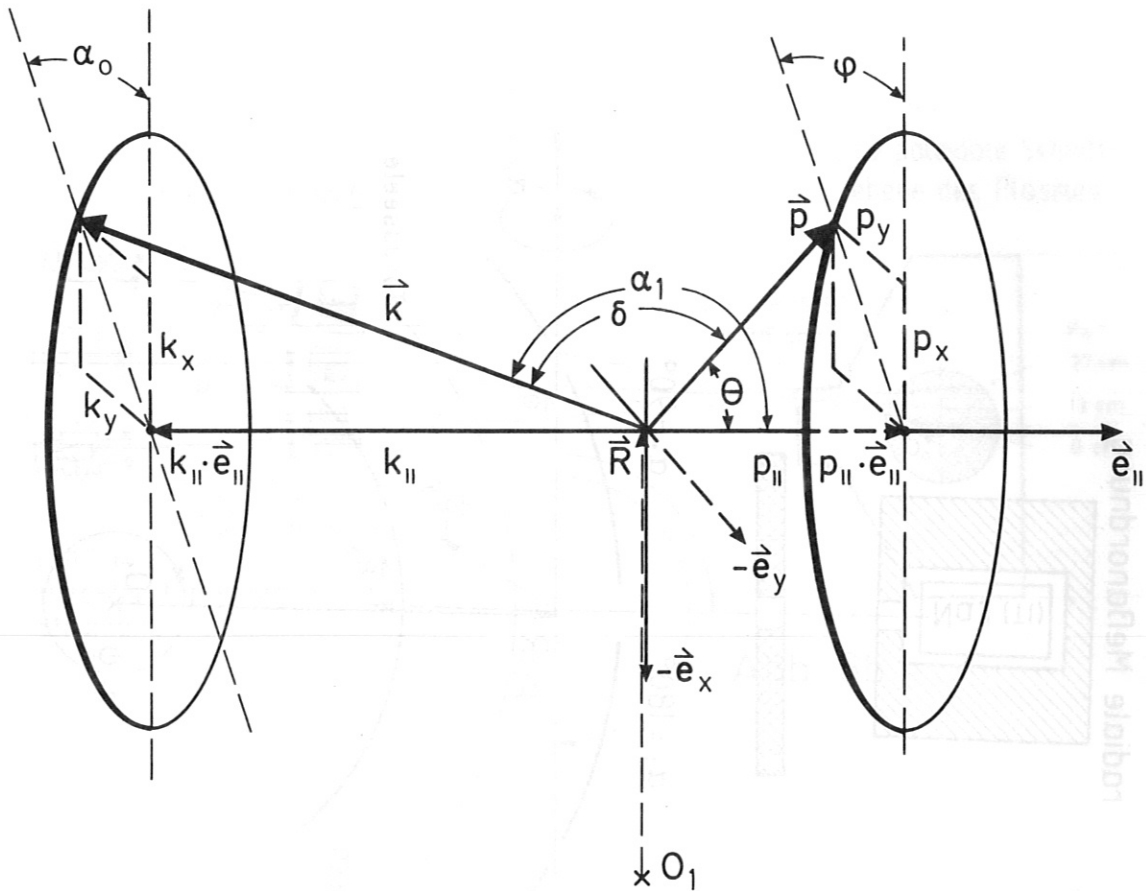


Abb. 5:

Darstellung der Impulse  $\vec{p}$  suprathemischer Elektronen und der Emissionsrichtung  $\vec{k}$  der von diesen in einem fest vorgegebenen Raumpunkt  $\vec{r}_0$  bzw.  $\vec{R}$  erzeugten Bremsstrahlung in Polarkoordinatensystemen für  $\vec{p}$  und  $\vec{k}$ . Die Polarachsen dieser Systeme sind gemeinsam in eine Richtung parallel zur Torusseule bzw. zu der Richtung des toroidalen Plasmastroms  $\vec{j}$  ausgerichtet. Auch das kartesische Koordinatensystem  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_{||})$  für die Größen  $\vec{p}$ ,  $\vec{k}$  mit  $\vec{R}$  als Ursprung ist eingezeichnet,  $\vec{j} = j_{||} \cdot \vec{e}_{||}$ . Die von  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  aufgespannte Ebene liegt in der durch  $\vec{R}$  gehenden poloidalen Schnittebene. Da  $\vec{R}$  bei der Definition der dargestellten Koordinatensysteme fest vorgegeben wird, geht in diese die für das räumliche Koordinatensystem maßgebliche Torusgestalt des Plasmas nicht ein.

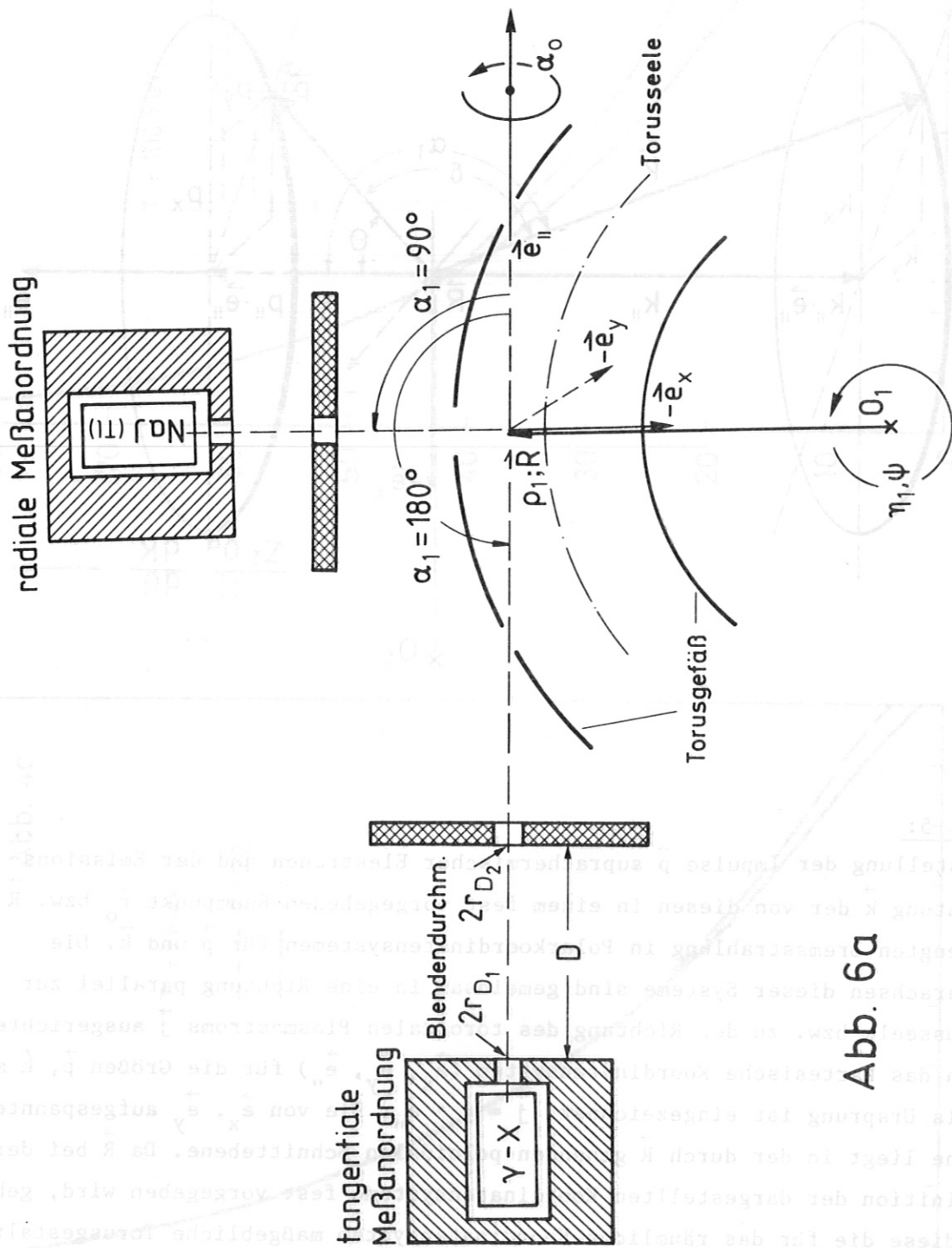


Abb. 6a



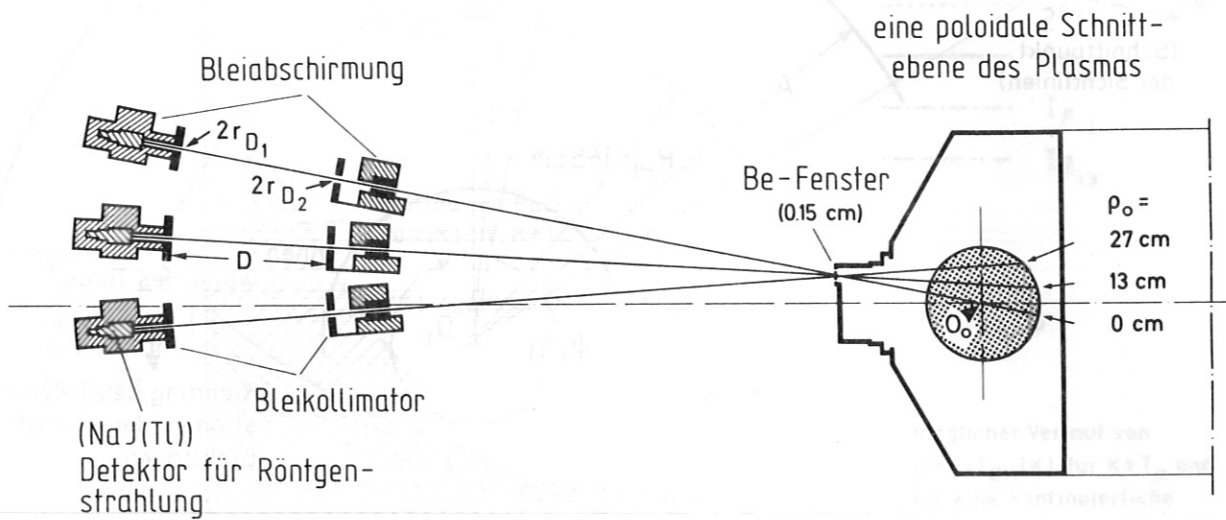


Abb. 6b

Abb. 6:

Skizze der Meßanordnung. a: Gezeigt ist derjenige horizontale Schnitt des Torus (toroidale Schnitt Ebene), in der die Torusseule liegt, zusammen mit einer radialen und tangentialen Meßanordnung, die je aus einem Kollimator und einem Meßgerät für Bremsstrahlung bestehen. In dieser Skizze liegen beide Kollimatorachsen (Sichtlinien) in der toroidalen Schnitt Ebene und schneiden sich unter einem rechten Winkel in  $\vec{R} = \vec{\rho}_1$ . Die zu dem Bezugspunkt  $\vec{R}$  gehörenden kartesischen Koordinatenachsen ( $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ) und Orientierung der Emissionsrichtungen  $\alpha_0, \alpha_1$  (Abb. 5) sind ebenfalls mit eingezeichnet.  $\vec{\rho}_1 = (\rho_1, \eta_1)$ : Koordinaten für die Orientierung des zur tangentialen Meßanordnung gehörenden Kollimators. Die für die radiale Meßanordnung möglichen Meßrichtungen (Kollimatorachsen) liegen in der durch  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  aufgespannten poloidalen Schnitt Ebene.  $\gamma$ -X: planarer Ge-Halbleiterdetektor, NaJ(Tl): Szintillationsdetektor. Schraffierte Bauteile: Bestandteile der Kollimatoren.  $\psi$ : toroidaler Winkel des räumlichen Systems der Toruskoordinaten. b: Skizze der in einer poloidalen Schnitt Ebene liegenden radialen Meßanordnung für Bremsstrahlung  $O_0$ : räumliches Symmetriezentrum für das Plasma in Bezug auf einer poloidalen Schnitt Ebene.  $O_0$  liegt auf der Torusseule.

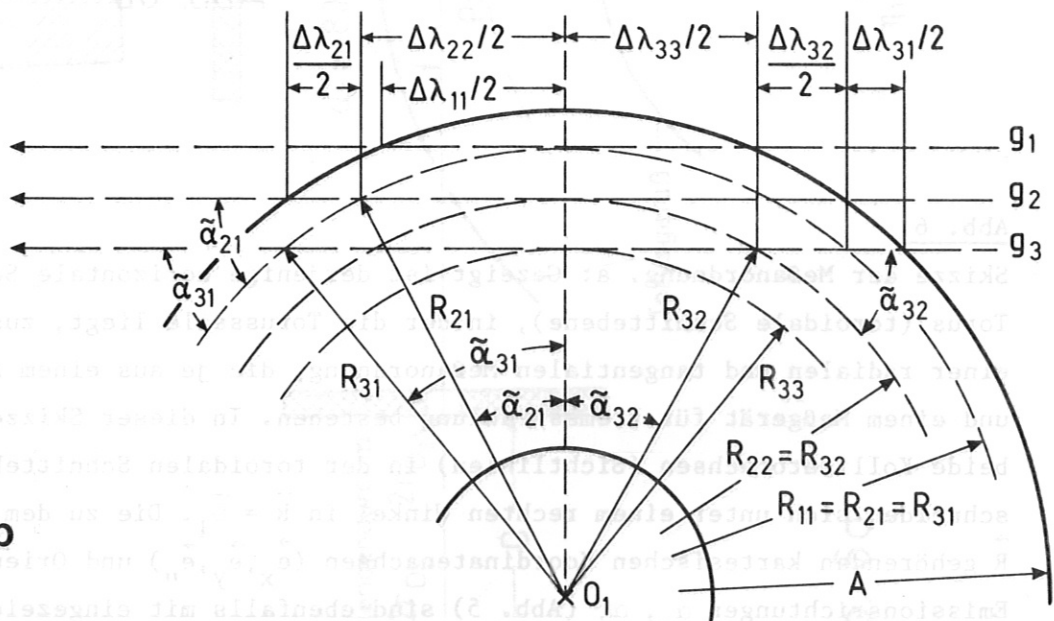
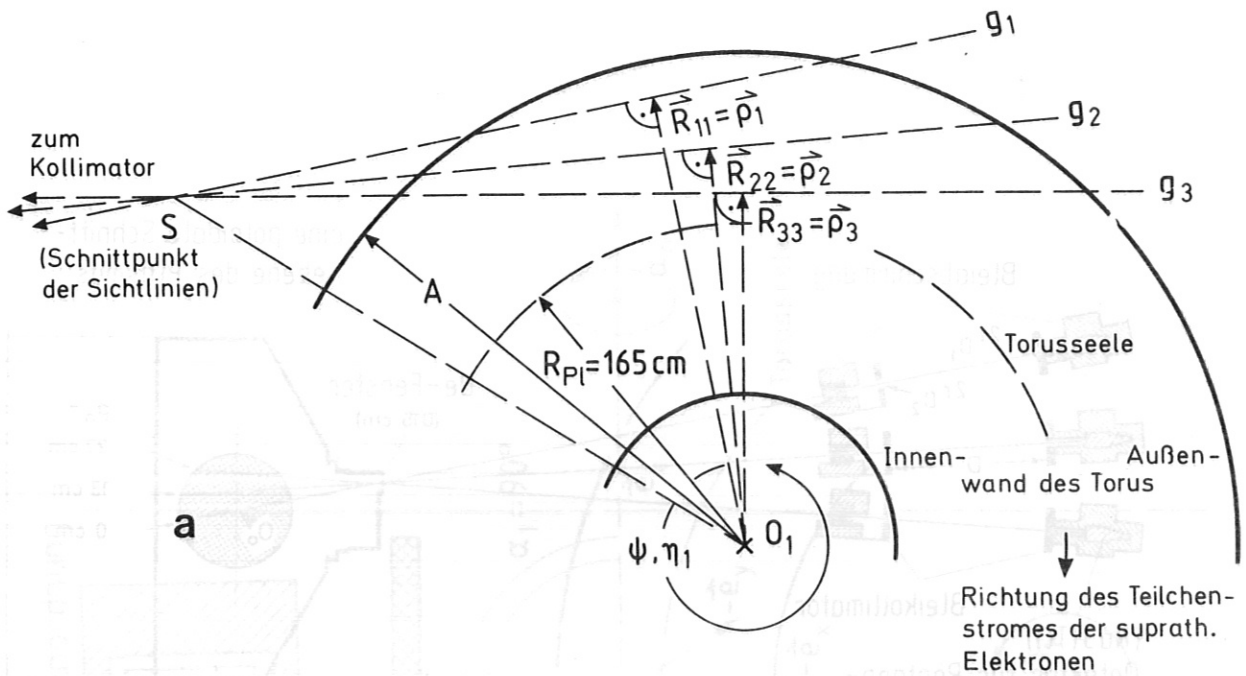


Abb. 7:

a) Geometrie der tangentialen Bremsstrahlungsdiagnostik. Es wird dieselbe toroidale Schnittebene wie in Abb. 6a gezeigt. Durch S geht die zur großen toroidalen Achse parallele Drehachse der tangentialen Meßanordnung.  $\Psi$  : toroidaler Winkel;  $\eta_1$  : Orientierungswinkel der tangentialen Diagnostik.

b) Wegen der toroidalen Symmetrie des Plasmas ist die in Abb. 7b gezeigte Geometrie äquivalent mit der in Abb. 7a. Sie liegt der in Abschnitt 5.6 erläuterten Berechnungsmethode für die anisotrope Komponente der supra-thermischen Elektronen zugrunde. Erklärung der Bezeichnungen siehe dort.

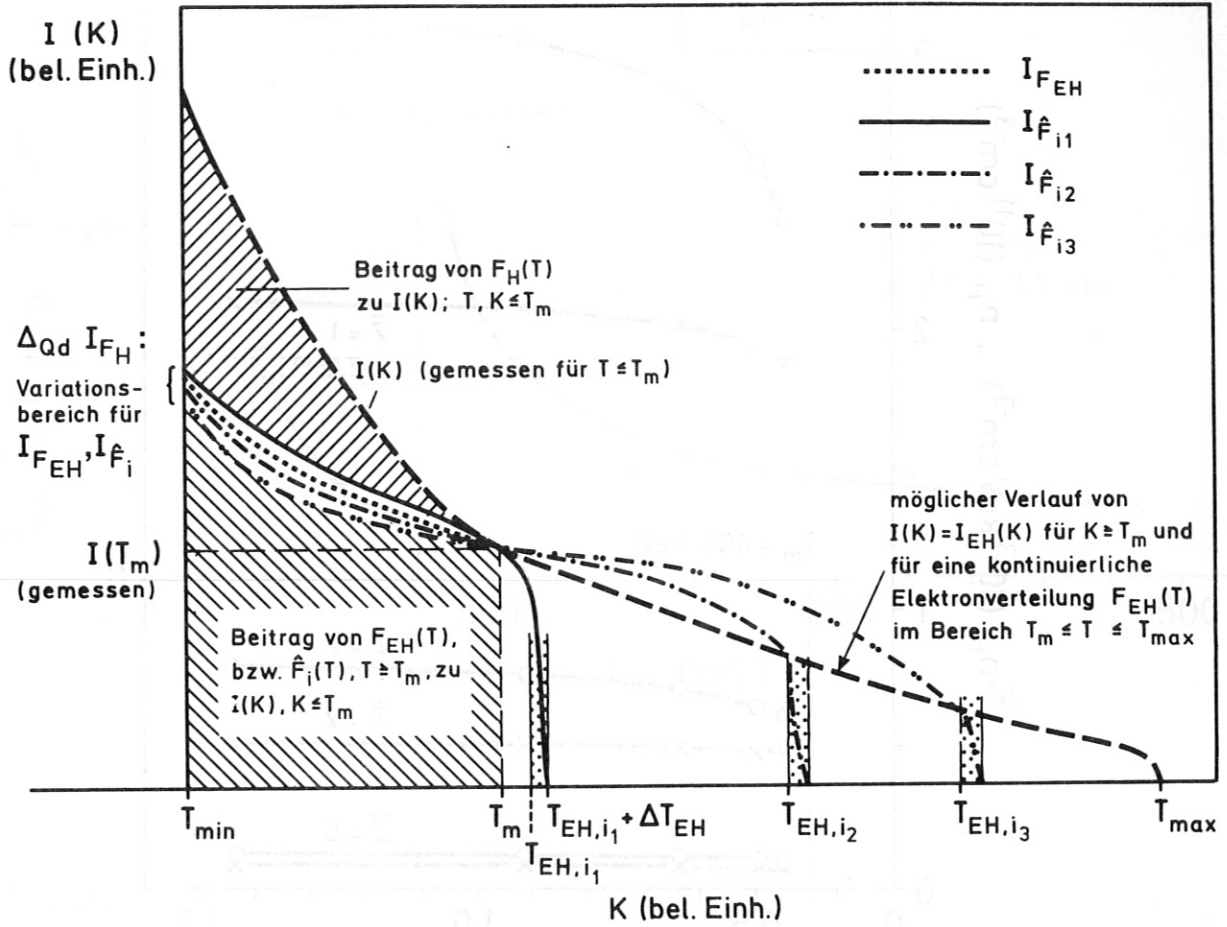


Abb. 8:

Veranschaulichung der Variation von  $F(T) = F_H(T)$ ,  $T \leq T_m$ , mit  $F(T) = F_{EH}(T)$ ,  $T \geq T_m$  bzw. mit den in diesem Energiebereich liegenden monoenergetischen Komponenten  $\hat{F}$ . Der Variation wird als Nebenbedingung das Spektrum  $I(K)$ ,  $K \leq T_m$  durch Messung fest vorgegeben. Mit Punkten gefüllte Streifen: Position einiger im Bereich  $T \geq T_m$  liegenden monoenergetischen Komponenten der Breite  $\Delta T_{EH}$ . Durch die Begrenzung des Variationsbereiches für  $I_{F_H}$  wird auch der von  $F_H$  eingeschränkt (Siehe Text). Die Variation von  $F_H$  mit  $I_{F_H}$  wird in dieser Abbildung aber nicht gezeigt.

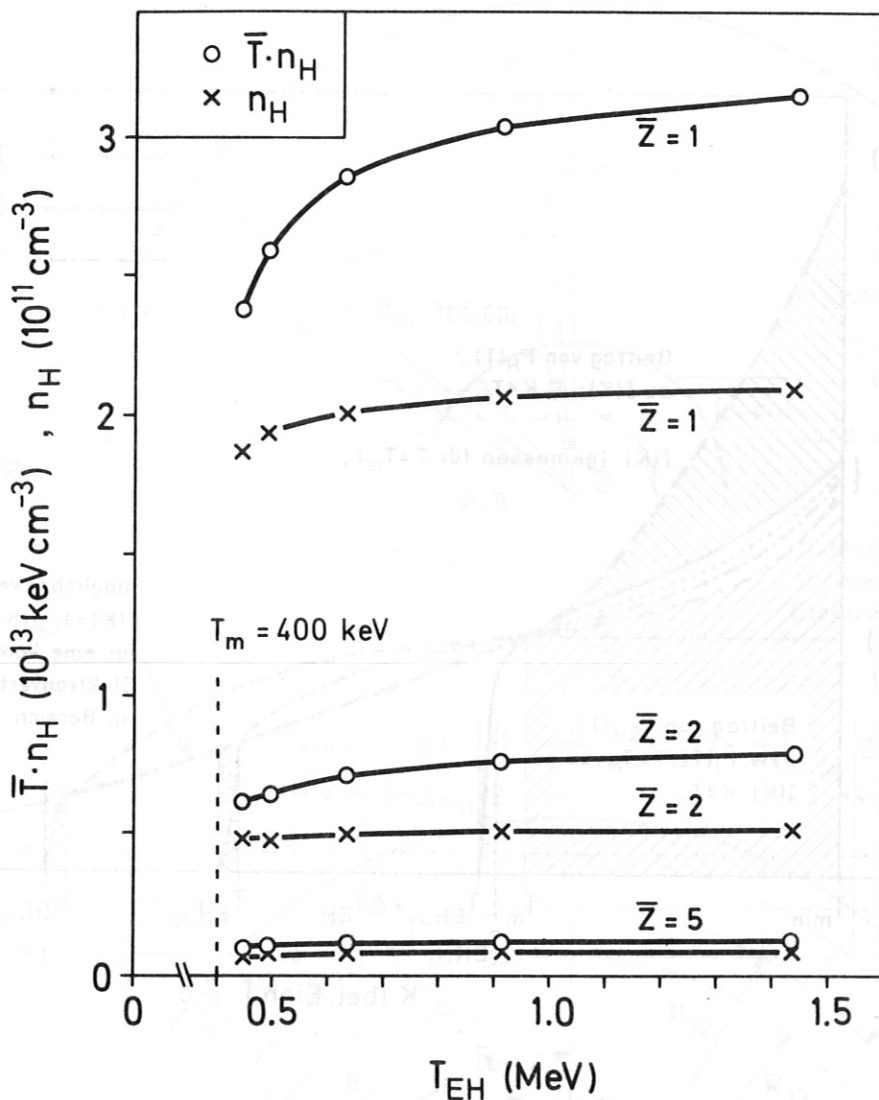


Abb. 9:

Ergebnisse für die aus der in Abb. 8 veranschaulichte Variation von  $\tilde{f}_H$  für  $T \leq T_m$ , für den Fall, daß man der Variation das aus #13047 für  $\rho_o = 0 \text{ cm}$  ermittelte Intensitätsspektrum  $I(K) = J_o(K)/\lambda_{\text{eff}}$  (Abb. (11), obere Reihe) vorgibt. Anstelle der Variation von  $\tilde{f}_H$  mit  $T_{EH}$  wird in diesem Bild aber diejenige ihrer Momente  $n_H$  (Dichte der suprathemischen Elektronen), und  $n_H \cdot \bar{T}$  (deren Energiedichte) dargestellt ( $n_a = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ).



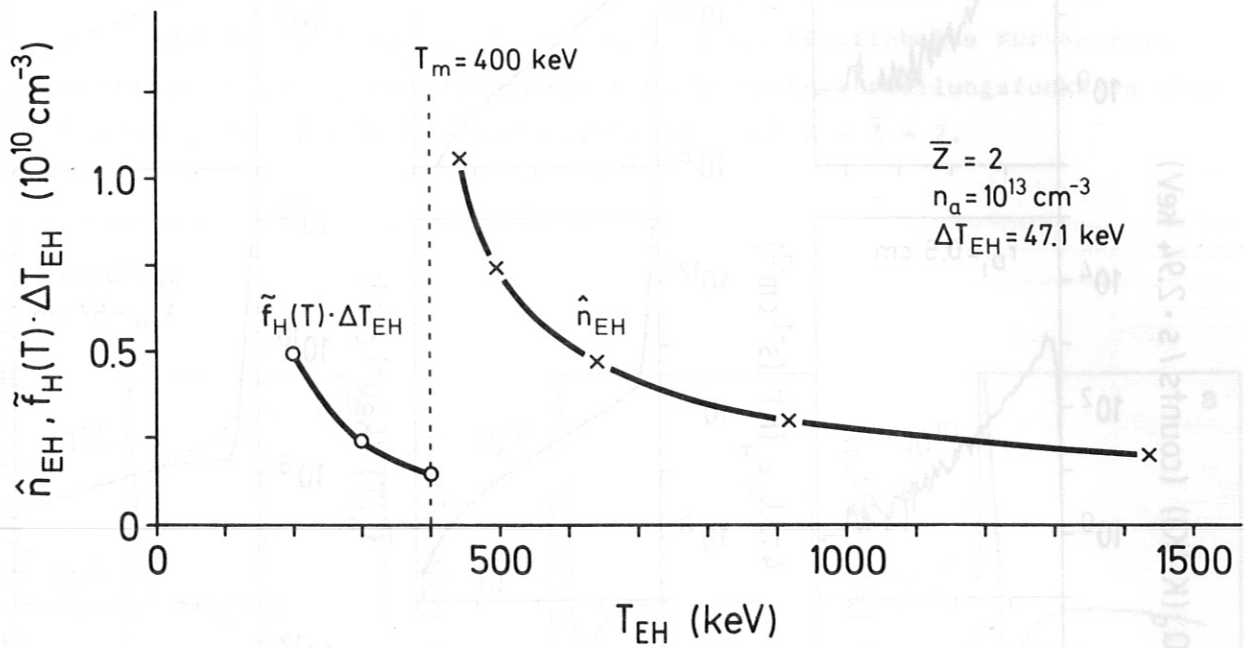


Abb. 10:

Die aus der Auswertung, die auch der Abb. (9) zugrundeliegt, erhaltenen Werte für die maximal möglichen Dichten  $\hat{n}_{EH}$  der durch Gl. (7.10) definierten monoenergetischen Komponenten  $\hat{F}_{EH}$ . Zum Vergleich mit  $\hat{n}_{EH}$  sind auch die Dichten  $\tilde{f}_H(T) \cdot \Delta T_{EH}$  der im Bereich  $200 \text{ keV} \leq T \leq T_m$  liegenden monoenergetischen Komponenten der Verteilung  $\tilde{f}_H(T)$ , die dieselbe Breite  $\Delta T_{EH}$  wie die  $\hat{F}_{EH} \cdot \Delta T_{EH}$  besitzen, gegen T aufgetragen. Die hier angewandte Methode kann weiter ausgebaut werden zu einem Abschätzungsverfahren für  $T_{max}$  nach unten (siehe Text).

Anmerkung: Aus der Linearität des Zusammenhanges Gl. (4.2) zwischen F und I folgt, daß die im Text diskutierte Beschränkung der Momente von F "gleichmäßig" ist: Deren Variationsbreite  $|\mu_o - \mu_u|$  ist, abgesehen von der für  $K=T_m$  gemessenen Intensität  $I(T_m)$ , unabhängig von  $I(K)$  für  $K < T_m$  und damit auch unabhängig von der verwendeten Entfaltungsmethode für  $I(K)$ ,  $K \leq T_m$ , soweit diese in der in Kap.4 diskutierten Weise stabilisiert ist.

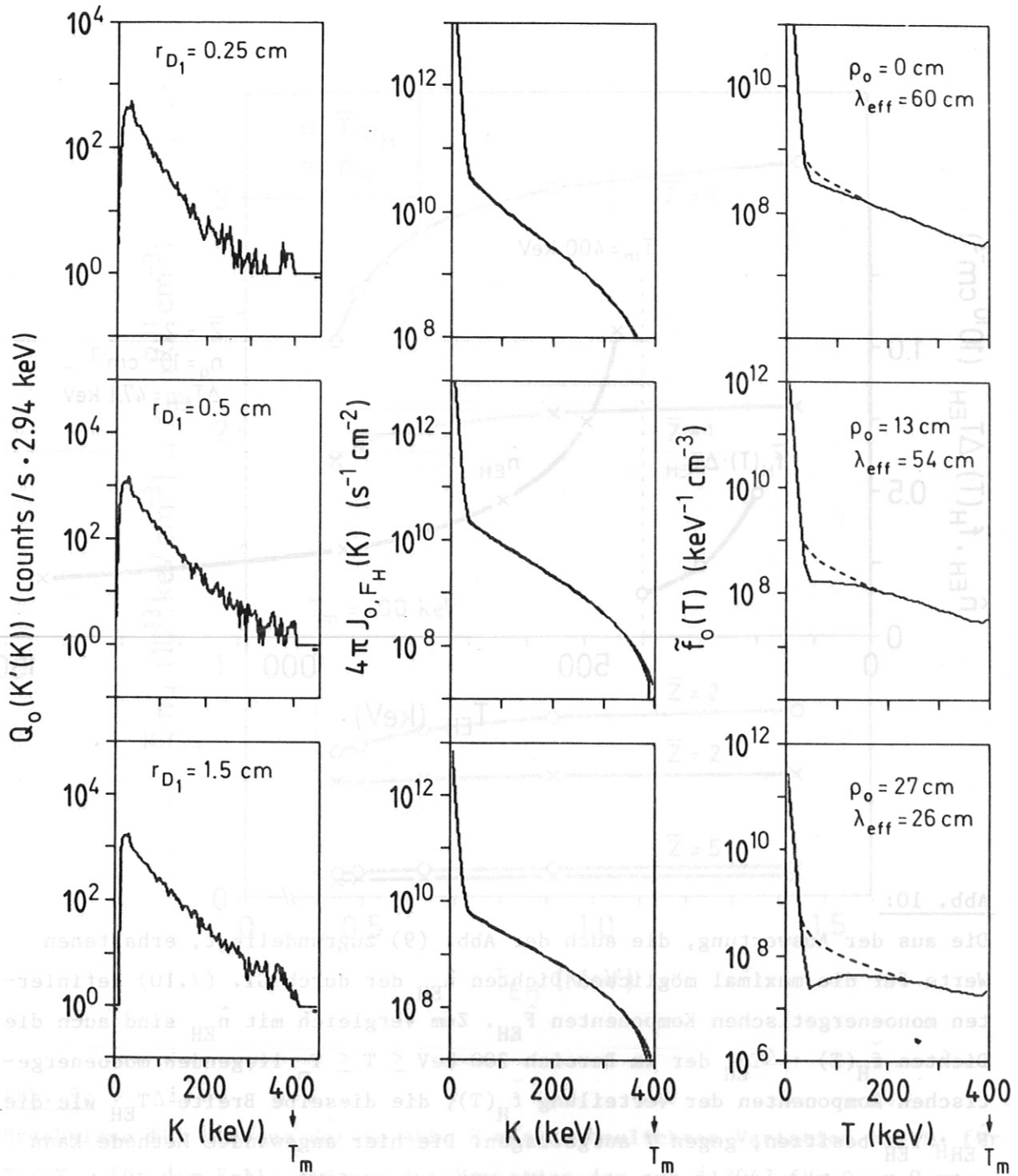


Abb. 11:

Auswertung der in der Stromtriebphase der Entladung #13047 mit Hilfe der radialen Diagnostik gemessenen Bremsstrahlungsspektren für die 3 verschiedenen Sichtstrahlen bei  $\rho_o = 0, 13, 27$  cm. Meßzeit  $t = 1$  s. Es wurde eine im Plasma uniforme Dichte der Bremsstrahlungstargets  $n_a = 10^{13}/cm^3$  angenommen. Kollimatordaten: Halbdurchmesser der detektorseitigen Blendenöffnung  $r_{D2} = 0.26$  cm,  $D = 150$  cm,  $\Delta K = 2.94$  keV. Den Graphen für  $4\pi \cdot J_{0,F,H}$  sind aus Probefaltungen über  $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_{0,H}$  erhaltene Flußspektren

(Gl. 4.2a) überlagert. Der im Bereich  $T \gtrsim 390$  keV beobachtete Anstieg von  $\tilde{f}_0$  und das Auseinanderlaufen von  $4\pi \cdot J_{0,FH}$  und des Ergebnisses der Probefaltung (siehe Bilder der mittleren Spalte) ist darauf zurückzuführen, daß die Bedingung Gl. 7.4 aufgrund der beschränkten Rechengenauigkeit nicht exakt erfüllt werden kann. Abstand Be-Fenster - Detektor: 5 m. Fenster des NaJ(T)-Detektors: 0.26 cm  $Al_2O_3$ , 0.08 cm Al. Gestrichelte Kurventeile: zum Vergleich mit  $f_0$  eingezeichnete hypothetische Verteilungsfunktion ohne "Absenkung" (s. Text). Mittlere Kernladungszahl  $Z = \bar{Z} = 2$ .

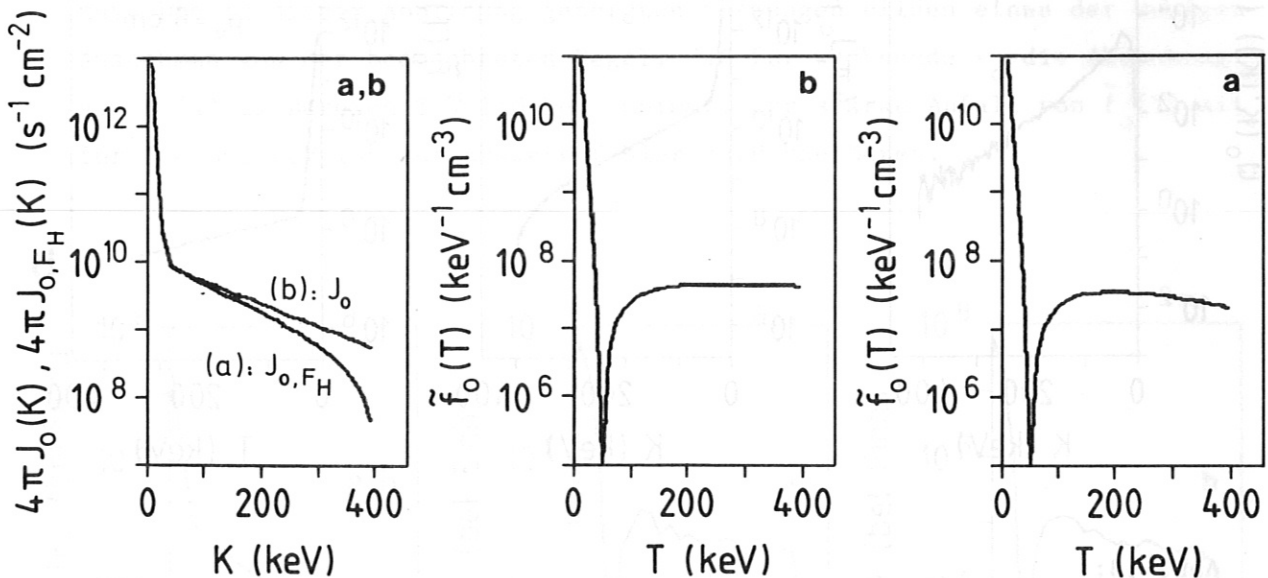


Abb. 12:

Auswertung der für Entladung #13311 während der suprathemischen Phase in radialer Richtung für  $\rho_0 = 27$  cm gemessenen Bremsstrahlung unter Annahme unterschiedlicher extrem hochenergetischer Anteile  $\tilde{f}_{0,EH}(T)$  von  $\tilde{f}_0(T)$  für  $T \geq T_m = 400$  keV. (a):  $f_0$  aus Entfaltung von  $J_{0,FH}$ , des um den Anteil der zu  $\tilde{f}_{0,EH}$  gehörenden Bremsstrahlung korrigierten Anteils von  $J_0$ ; (b)  $\tilde{f}_0$  aus Entfaltung unmittelbar von  $J_0$  unter Umgehung dieser Korrektur und unter Verletzung der Bedingung Gl. (7.4). Bei der Entfaltung wurde von der Approximation von  $J_0$  durch Gl. (7.17) ausgegangen. Korrekturansatz siehe Abschnitt (7.3.2).  $Z = 26$ . Wirkungsquerschnitte für Bremsstrahlung in Bornscher Näherung. Eisentargets werden als unabgeschirmt angenommen ( $Z_i = 26$ ). Es wird angenommen, daß fast die gesamte Bremsstrahlung durch Stöße zwischen Elektronen und Eisentargets erzeugt wird, d.h.:  $n_a = n_{Fe}$  (siehe Gl. (2.6)). Weitere Annahme  $n_a = 6 \cdot 10^{10}/cm^3$ .

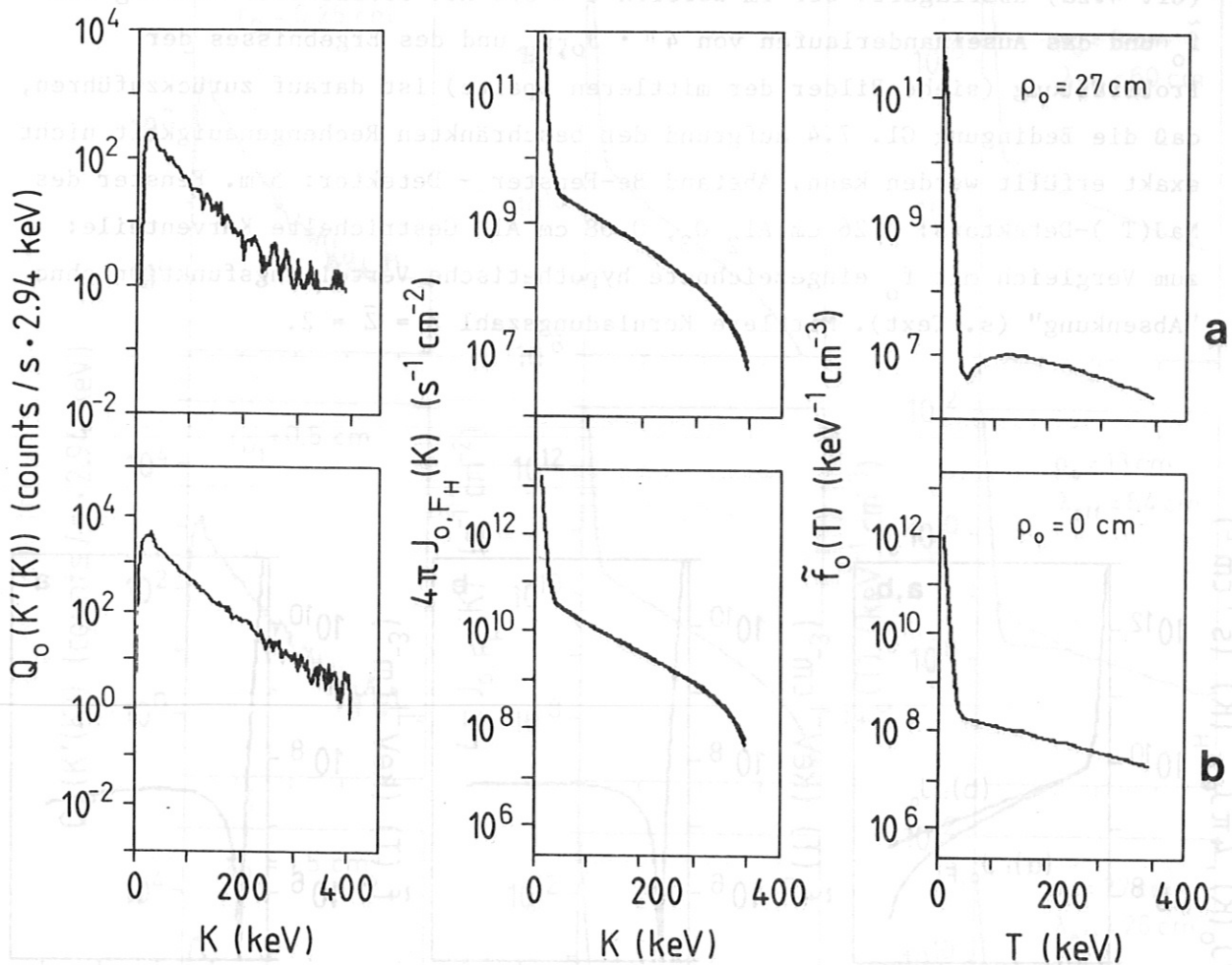


Abb. 13:

Auswertung von Bremsstrahlungsspektren, die mit der radialen Meßvorrichtung während der suprathemischen Phase der Entladung #12380 für  $\rho_0 = 0 \text{ cm}$  (b) und  $\rho_0 = 27 \text{ cm}$  (a) aufgenommen worden sind. Es wurde  $Z = 26$  und  $n_a = n_{\text{Fe}} = 10^{11} / \text{cm}^3$  angenommen. Man beachte, daß die Skaleneinheitenlängen für alle Größen in (a) und (b) voneinander verschieden sind. Wirkungsquerschnitte für die Bremsstrahlungsproduktion in Bornscher Näherung. Eisentargets werden als unabgeschirmt angenommen.

Abb. 14:

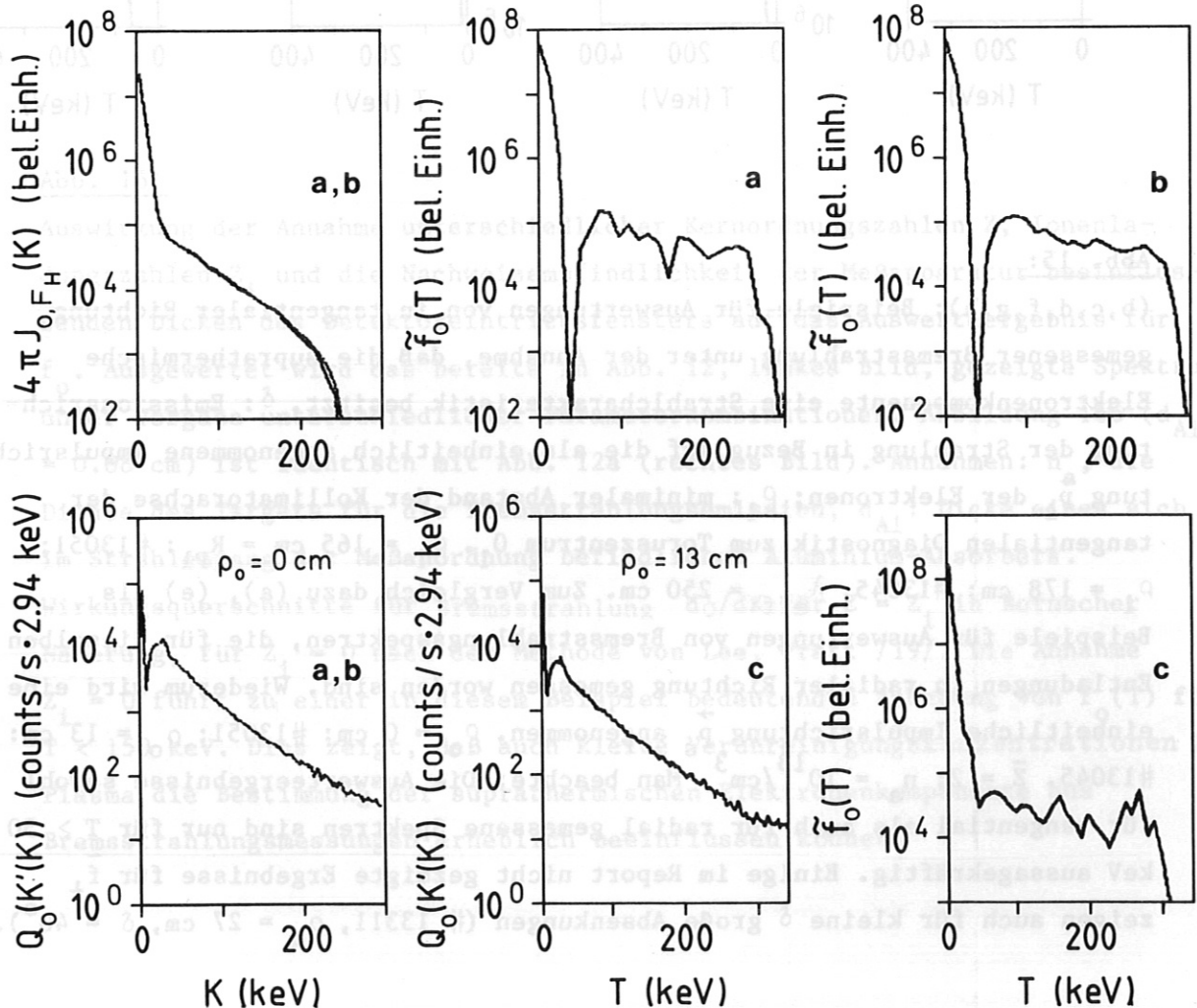
Entfaltung von Bremsstrahlungsspektren unter Umgehung des Zwischenschrittes der Anpassung von  $J_0$  durch eine analytische Funktion  $J_{0, \text{FIT}}$ , das heißt, durch unmittelbare Anwendung der Faltungsgleichung (4.7) auf  $J_{0, F_H}$ . Für die hierzu erforderliche Differentiation von  $J_{0, F_H}$  nach  $K$  wurde eine Differentiationsformel verwendet, die auf eine glättende und sich über mehrere



(L') Meßpunkte von  $J_0$  erstreckende Interpolationsformel beruht. Für  $\rho_0 = 0$  cm erhält man im Energiebereich  $K \geq 50$  keV die in Abb. (13a) dargestellte Verteilungsfunktion  $\tilde{f}_0$  mit Hilfe einer 3-Punkte - und  $\tilde{f}_0$  in Abb. (13b) mit Hilfe einer 5-Punkte-Differentiationsformel. Gesamtanzahl der in (a), (b) für die Diskretisierung des Bereichs  $K \leq 300$  keV benutzten Intervalle:

$L = 25$ .  $Q_0(K')$ : Summe der während der Entladungen #12422, #12431, #12432, #12436...12439, #12445, #12447, #12448, #12449, jeweils in der suprathemischen Phase, in radialer Richtung gemessenen Bremsstrahlung. Annahme:  $Z = \bar{Z} = 4$ .

(c): Auswertung der simultan zu (a,b) in radialer Richtung für  $\rho_0 = 13$  cm gemessenen Bremsstrahlung.  $L = 34$  für  $K, T \leq 350$  keV;  $L' = 5$  für  $K, T \geq 40$  keV. Die in dieser Abbildung gezeigten Messungen bilden eines der wenigen Ausnahmen von der beobachteten Regel, daß für wachsende  $\rho_0$  die Absenkung von  $\tilde{f}_0(T)$  im Bereich  $T \approx 150$  keV zunimmt. Der starke Abfall von  $\tilde{f}_0(T)$  mit für  $T \approx 300$  keV ist auf Auswertefehler zurückzuführen.



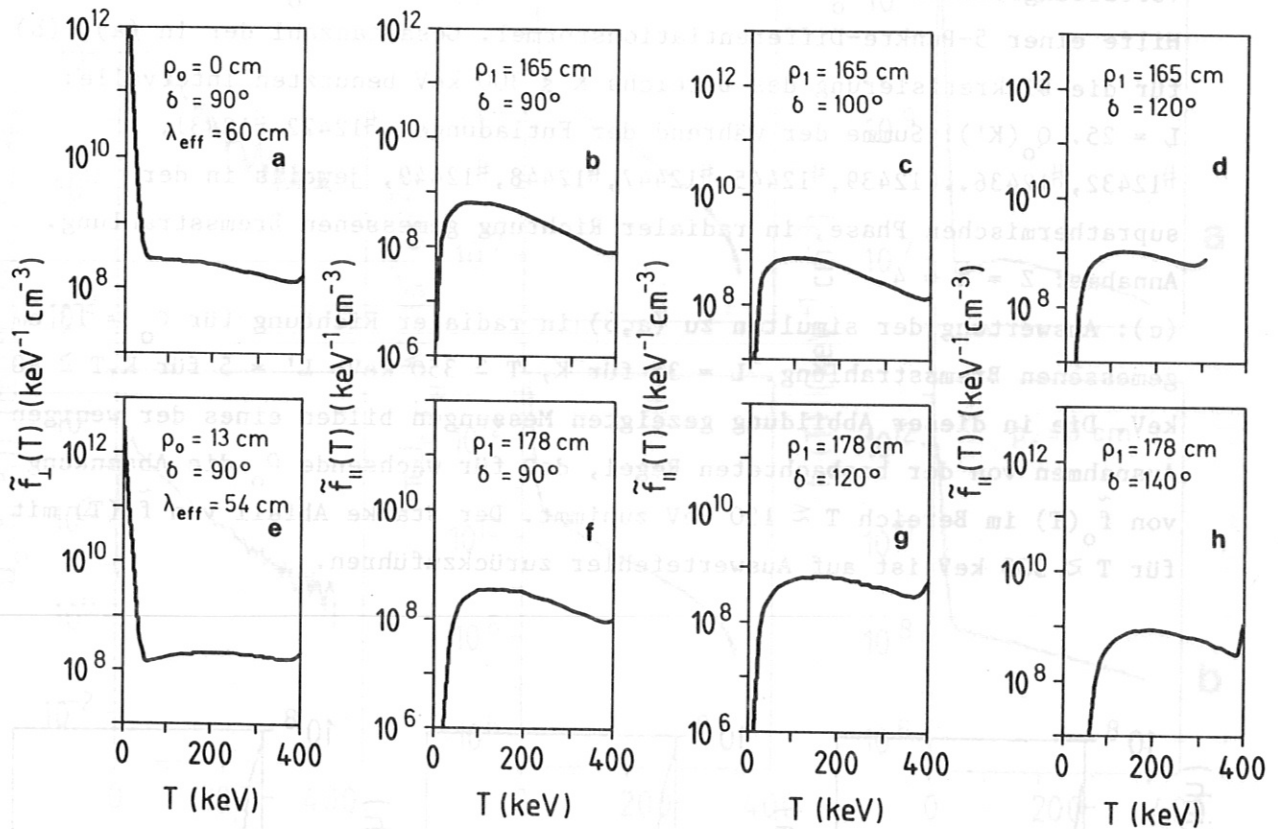


Abb. 15:

(b,c,d,f,g,h): Beispiele für Auswertungen von in tangentialer Richtung gemessener Bremsstrahlung unter der Annahme, daß die suprathemische Elektronenkomponente eine Strahlcharakteristik besitzt.  $\delta$ : Emissionsrichtung der Strahlung in Bezug auf die als einheitlich angenommene Impulsrichtung  $\vec{p}_s$  der Elektronen;  $\rho_1$ : minimaler Abstand der Kollimatorachse der tangentialen Diagnostik zum Toruszentrum  $O_1$ .  $\rho_1 = 165 \text{ cm} = R_{P1}$ : #13051;  $\rho_1 = 178 \text{ cm}$ : #13045;  $\lambda_{\text{eff}} = 250 \text{ cm}$ . Zum Vergleich dazu (a), (e) als Beispiele für Auswertungen von Bremsstrahlungsspektren, die für dieselben Entladungen in radialer Richtung gemessen worden sind. Wiederum wird eine einheitliche Impulsrichtung  $\vec{p}_s$  angenommen.  $\rho_0 = 0 \text{ cm}$ : #13051;  $\rho_0 = 13 \text{ cm}$ : #13045.  $\bar{Z} = 2$ ;  $n_a = 10^{13} / \text{cm}^3$ . Man beachte: Die Auswertergebnisse sowohl für tangential als auch für radial gemessene Spektren sind nur für  $T \geq 50 \text{ keV}$  aussagekräftig. Einige im Report nicht gezeigte Ergebnisse für  $\tilde{f}_{\perp}$  zeigen auch für kleine  $\delta$  große Absenkungen (# 13311,  $\rho_0 = 27 \text{ cm}$ ,  $\delta = 40^\circ$ ).

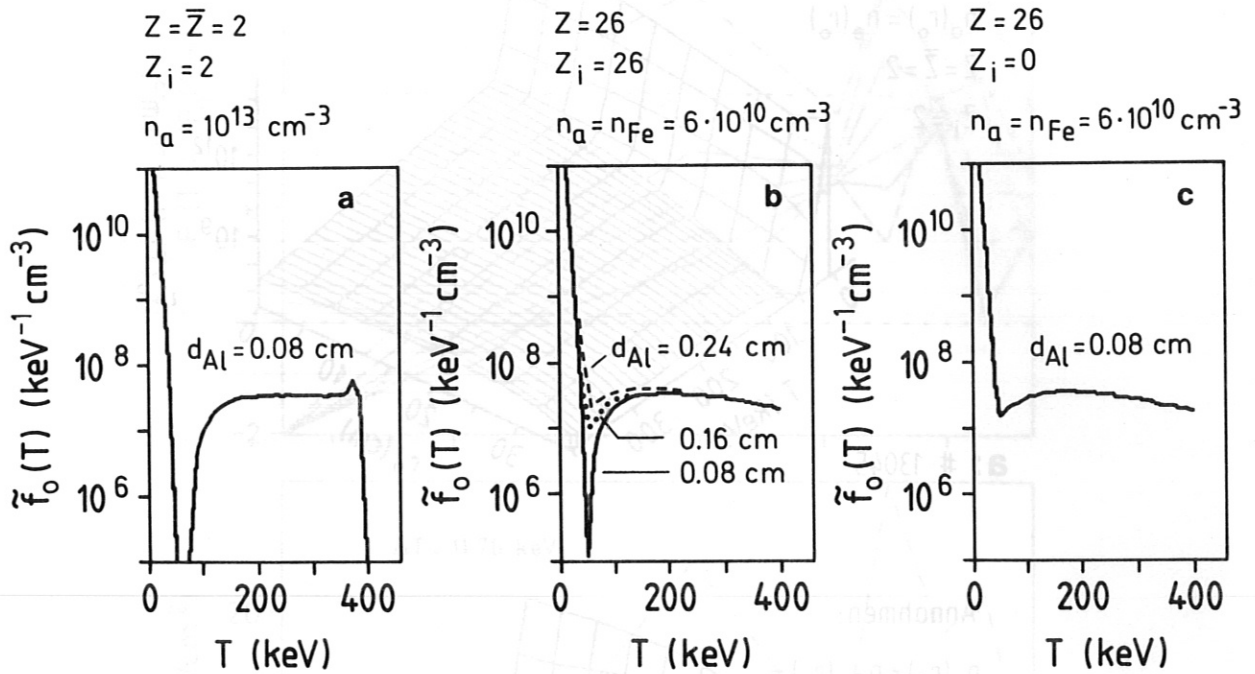


Abb. 16:

Auswirkung der Annahme unterschiedlicher Kernordnungszahlen  $Z$ , Ionenladungszahlen  $Z_i$  und die Nachweisempfindlichkeit der Meßapparatur beeinflussenden Dicken des Detektoreintrittsfensters auf das Auswertergebnis für  $f_0$ . Ausgewertet wird das bereits in Abb. 12, linkes Bild, gezeigte Spektrum unter Vorgabe unterschiedlicher Parameterkombinationen. Abbildung 16b ( $d_{Al} = 0.08$  cm) ist identisch mit Abb. 12a (rechtes Bild). Annahmen:  $n_a$ , die Dichte des Targets für die Bremsstrahlungsemission,  $d_{Al}$ : Dicke eines sich im Strahlengang der Meßanordnung befindlichen Aluminium-Absorbers. Wirkungsquerschnitte für Bremsstrahlung  $d\sigma/dK$  für  $Z = Z_i$  in Bornscher Näherung, für  $Z_i = 0$  nach der Methode von Lee, Pratt /19/. Die Annahme  $Z_i = 0$  führt zu einer in diesem Beispiel bedeutenden Anhebung von  $\tilde{f}_0(T)$  für  $T < 150$  keV. Dies zeigt, daß auch kleine Verunreinigungskonzentrationen im Plasma die Bestimmung der suprathemischen Elektronenkomponente aus Bremsstrahlungsmessungen erheblich beeinflussen können.

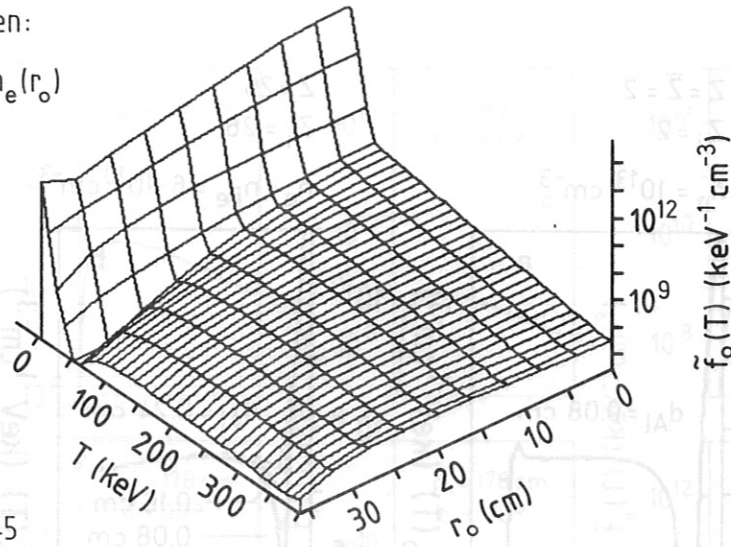
Annahmen:

$$n_a(r_o) = n_e(r_o)$$

$$Z = \bar{Z} = 2$$

$$Z_i = 2$$

a: # 13045



Annahmen:

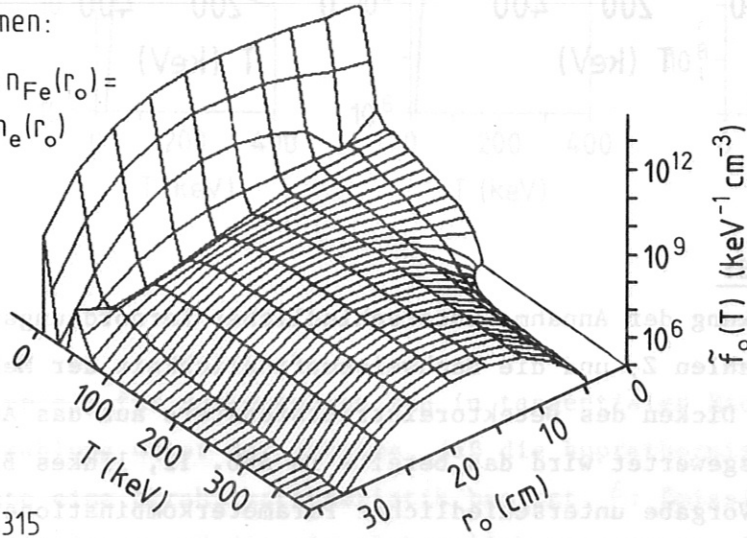
$$n_a(r_o) = n_{Fe}(r_o) =$$

$$= 0.01 \cdot n_e(r_o)$$

$$Z = 26$$

$$Z_i = 26$$

b: # 13315



**Abb. 17:**

Zu unterschiedlichen Entladungen gehörende radiale Profile des isotropen Anteils  $f_o$  der suprathermischen Elektronenkomponente. Bei ihrer Auswertung wurde von dem Ansatz Gl. (3.10) für  $f$  ausgegangen, also u.a. Druckisotropie des Plasmas angenommen.  $n_a(r_o)$ : Profile der Targetatome für die Bremsstrahlungsemission;  $n_e(r_o)$ : Dichteprofil der thermischen Elektronen. Abbildung 17b zeigt für #13315 eine stark ausgeprägte radiale Ringstruktur: Im Bereich  $15 \text{ cm} \lesssim r_o \lesssim 25 \text{ cm}$  nimmt  $f_o$  für  $T > 300 \text{ keV}$  sein Maximum und für  $T \approx 50 \text{ keV}$  sein Minimum (Absenkung) an.

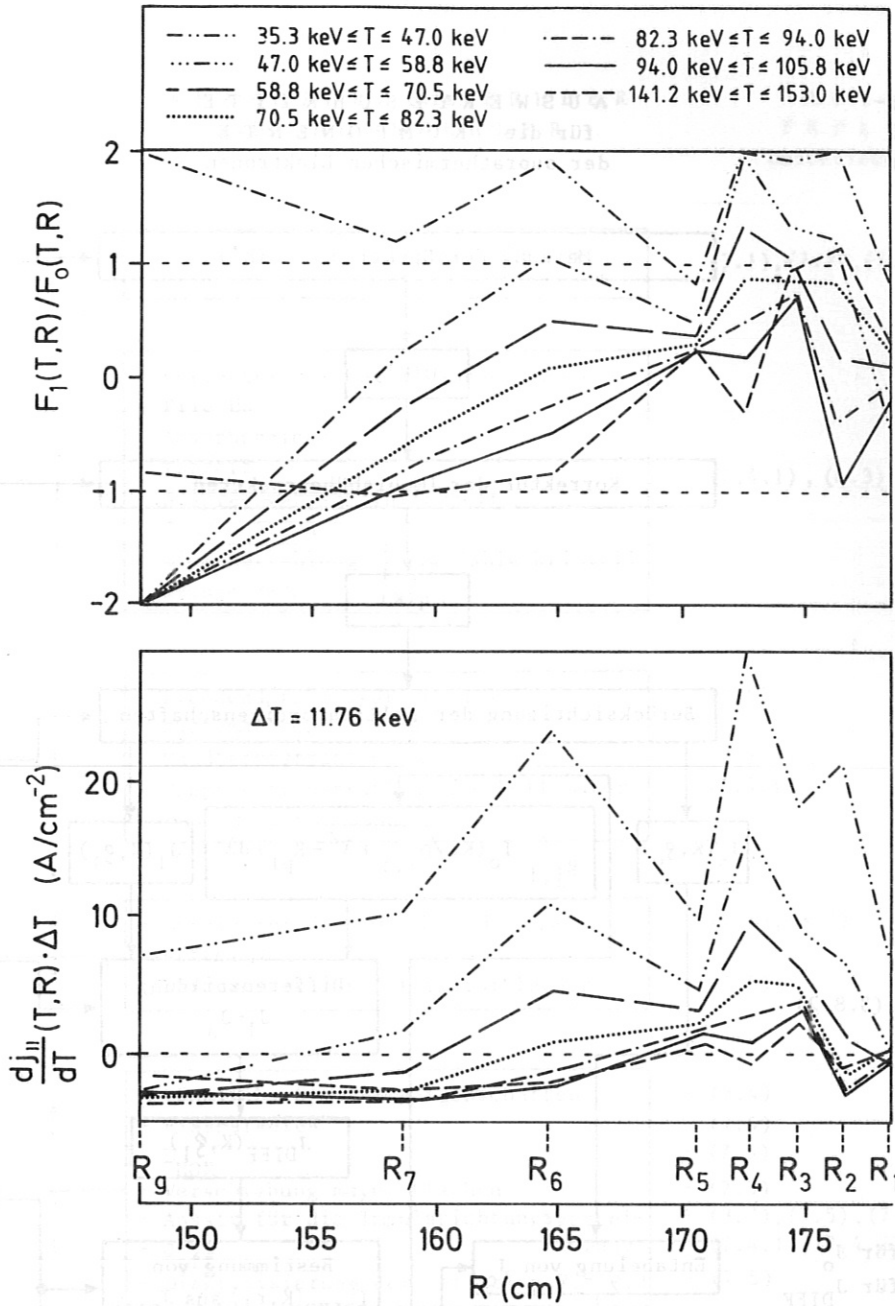


Abb. 18:

Auswertebispiel für  $F_1/F_0$  und für die energieaufgelöste radiale Stromdichteverteilung. Profil der Dichte  $n_a$  der Bremsstrahlungstargets im Plasma wird als identisch mit dem Dichteprofil der thermischen Elektronen angenommen. Es wird ferner angenommen, daß die im Plasma anwesenden Verunreinigungen zu einer Erhöhung der mittleren Kernladungszahl auf  $Z = \bar{Z} = 2$ , d.h., zu einer um den Faktor 4 höheren Bremsstrahlungsintensität des Plasmas führen als in dem Fall fehlender Verunreinigungen  $\bar{Z} = Z = 1$ . Kleiner Plasmradius: 40 cm; horizontale Verschiebung  $D_{\text{HOR}} = 4 \text{ cm}$ . Entladungsserie: #13045 ... #13053. Vorausgesetzt ist Druckisotropie und Gültigkeit der Gl. (3.10). Meßrichtungen:  $\alpha_1 = 90^\circ$  (senkrecht zur Richtung des Teilchenstromes der suprath. Elektronen),  $\alpha_1 \approx 180^\circ$  (antiparallel hierzu).



Tabelle 2:

AUSWERTESCHRITTE  
beschrieben in

AUSWERTESCHRITTE  
für die KOMPONENTE  
der suprathemischen Elektronen

(6.2)

Messung der Spektren  $Q(K')$

$Q(K')$

(6.3)

Korrektur der Impulshöhenspektren

$q(K)$

(6.1,6.3)

Berücksichtigung der Kollimatoreigenschaften

$J_0(K, \xi_0)$

$$\int_{g_{j,1}} I_0(K, \sqrt{\rho_{1,j}^2 + \lambda^2 - R_{p1}}) d\lambda$$

$J_1(K, \xi_1)$

(5.6), (3.2-3.7), (3.8.2)

Differenzbildung  
 $J_1 - J_0$

$J_{DIFF}(K, \xi_1)$

(3.8.1), (5.5) für  $J_0$   
(3.8.2), (5.6) für  $J_{DIFF}$

Entabelung von  $J_0$

Bestimmung von  
 $I_{DIFF}(K, r_1)$  aus  $J_{DIFF}$

$I_0(K, r)$

$I_{DIFF}$

Kap. 4

Entfaltung von  $I_0$   
nach der Energie

Entfaltung von  $I_{DIFF}$   
nach der Energie

$F_0(T, r)$   
-  $n_H(r)$   
-  $\bar{T}(r)$

$F_1(T, R)$   
-  $j_{||}(R)$   
-  $j_{||}(T, R)$

isotrope Komponente der suprathemischen Elektronen      anisotrope

PARAMETER, ihre FEHLER  
sowie MESSFEHLER

MESS-  
FEHLER  
beschrieben in

Meßfehler $\Delta Q_a, \Delta Q_b, \Delta Q_c, \Delta Q_d$	(7.1), (7.2), (7.3), (7.4.1)
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Korrektur der Energieabhängigkeit</li> <li>- Pile-Up</li> <li>- Absorberdicke</li> <li>- Totzeit</li> <li>- Ansprechwahrscheinlichkeit</li> <li>- Comptonstreuung</li> <li>- Linienstrahlung</li> <li>- Escape-Peak</li> </ul> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">} im Zählerkristall</p>	(7.4.1), (6.3)
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Blendendurchmesser und ihre systematischen Fehler</li> <li>- Wandbremsstrahlung</li> <li>- Comptonstreustrahlung im Kollimator und Torusinnenwand</li> </ul>	(7.5) (7.3.3) (7.4.1)
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ansatz für die Impulsrichtungsverteilung</li> <li>- Durchmesser der Kollimatorblenden</li> </ul>	(7.5), (3.7) (7.5)
<ul style="list-style-type: none"> <li>- räumliche Symmetrieeigenschaften</li> <li>- Plasmaradius</li> <li>- <math>D_{HOR}</math></li> <li>- Verschiebung magn. Flächen</li> <li>- Ansatz für die Impulsrichtungsverteilung</li> <li>- <math>\sigma_{eff}</math></li> <li>- Diskretisierung der Variablen <math>R, r, \varphi, d</math></li> </ul>	- (5.4) - (7.5) - (7.5) - (7.5) - (3.7), (7.5), (7.4.1), (7.4.2) - (7.4.1), (7.4.2), (7.5), (7.6) - (7.5)
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\sigma_{eff}</math> bzw. Ansatz für Richtungsvert.</li> <li>- Art und Dichte der Verunreinigungen</li> <li>- <math>\langle \bar{Z} \rangle</math></li> <li>- Differentiationsmethode</li> <li>- <math>\Delta F</math></li> <li>- <math>\tilde{\Delta F}</math></li> <li>- Konsistenz mit Ansatz Gl. (3.10)</li> </ul>	- (3.7), (7.5), (7.4.1), (7.4.2) - (7.4.1) - (7.5) } Kap. 4 - (7.4.2), (7.5), (7.6)