DAS DYNAMOPROBLEM[1]

D. LORTZ

IPP 6/247 Februar 1985

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

DAS DYNAMOPROBLEM[1]

D. LORTZ

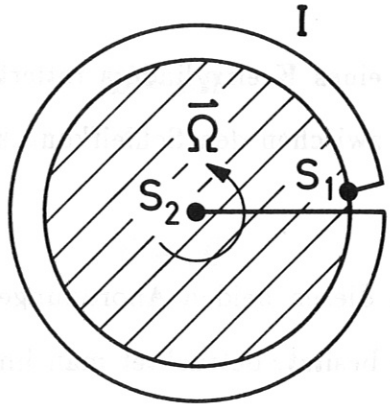
IPP 6/247 Februar 1985

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Das Dynamoproblem[1]

In der Dynamotheorie wird die Frage untersucht, ob eine Strömung in einem elektrisch leitenden Kontinuum ein Magnetfeld erzeugen kann, d.h. ob das System wie ein selbsterregter Generator wirken kann. Mit einer solchen Theorie werden heute die Magnetfelder der Erde, der anderen Planeten, der Sonne und im interstellaren Raum erklärt.

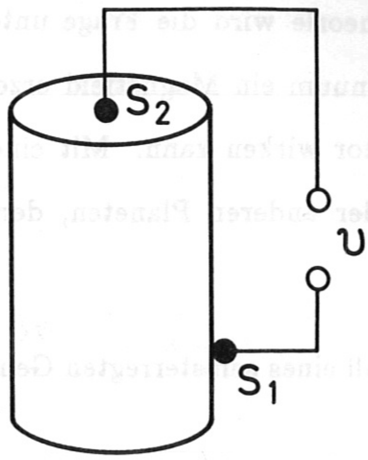
Der einfachste Fall eines selbsterregten Generators ist der Scheibendynamo:



Dabei dreht sich eine kreisförmige Scheibe aus Metall (schraffiert) mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ um ihre Symmetrieachse. An der Stelle S_1 befindet sich ein Schleifkontakt mit einem Draht, der in Drehrichtung um die Scheibe herumgeführt wird. Nach einem Umlauf führt der Draht radial zu einem zweiten Schleifkontakt S_2 in der Mitte der Scheibe. Ist die Drehgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ gross genug, dann wirkt das System als selbsterregter Generator und produziert ein dipolartiges Magnetfeld.

[1]Vortrag auf dem Fortbildungslehrgang 27/50 vom 15.10. - 19.10.1984 "Strömungstheorie und nichtlineare Phänomene", Akademie für Lehrerfortbildung, 8880 Dillingen/Donau

Ebenfalls sehr einfach lässt sich der sog. Unipolarinduktor beschreiben.



Ein Eisenmagnet in Form eines Kreiszylinders rotiert um seine Symmetrieachse. Unterbricht man einen Draht zwischen den Schleifkontakten S_1 und S_2, dann gibt es eine Spannung U.

Im Unterschied zu diesen beiden Anordnungen, in denen der elektrische Leiter zweifachen Zusammenhang besitzt, betrachtet man im astrophysikalischen Fall meistens Strömungen in einem einfach zusammenhängenden Gebiet.

Um Gleichungen anzugeben, die einen solchen Generator beschreiben, werden zunächst die Maxwell'schen Gleichungen angeschrieben

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad . \tag{4}$$

Hier sind (in SI - Einheiten) $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke, $\vec{B}$ die magnetische Induktion, $\vec{D}$ die elektrische Verschiebung, ρ die Ladungsdichte, $\vec{H}$ die magnetische Feldstärke und $\vec{j}$ die elektrische Stromdichte. Zur vollständigen Beschreibung des elektromagnetischen Feldes sind noch Materialgleichungen erforderlich, die im Fall ohne Strömung unter Annahme von Isotropie in der Form

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{5}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \tag{6}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{7}$$

geschrieben werden können. Hier nennt man μ die Permeabilität, ϵ die Permittivität und σ die elektrische Leitfähigkeit. Diese drei Grössen sind skalare Funktionen von Druck und Temperatur, d.h. von Ort und Zeit.

Bewegt sich der Leiter mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ im gestrichenen Koordinatensystem, das durch die Lorentztransformation

$$t' = \gamma(t - c^{-2}\vec{v} \cdot \vec{x}) \tag{8}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)v^{-2}(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} - \gamma \vec{v} t \tag{9}$$

gegeben ist, dann bekommt man das elektromagnetische Feld in diesem System durch die Transformationsformeln

$$\vec{E}' = \frac{\vec{v}}{v^2}\vec{v} \cdot \vec{E} + \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\vec{v}}{v^2}\,\vec{v} \cdot \vec{E}) \tag{10}$$

$$\vec{B}' = \frac{\vec{v}}{v^2}\vec{v} \cdot \vec{B} + \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} - \frac{\vec{v}}{v^2}\vec{v} \cdot \vec{B}) \tag{11}$$

$$\vec{D}' = \frac{\vec{v}}{v^2}\vec{v} \cdot \vec{D} + \gamma(\vec{D} + \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{H} - \frac{\vec{v}}{v^2}\vec{v} \cdot \vec{D}) \tag{12}$$

$$\vec{H}' = \frac{\vec{v}}{v^2}\vec{v} \cdot \vec{H} + \gamma(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D} - \frac{\vec{v}}{v^2}\vec{v} \cdot \vec{H}) \tag{13}$$

$$\vec{j}' = \vec{j} - \gamma\rho\vec{v} + \frac{\gamma - 1}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{v} \tag{14}$$

$$\rho' = \gamma(\rho - \frac{1}{c^2}\vec{v} \cdot \vec{j}). \tag{15}$$

Dabei ist $c = (\epsilon_o\mu_o)^{-1/2}$ die Vakuumlichtgeschwindigkeit und $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Mit diesen Transformationen haben die Maxwell'schen Gleichungen im gestrichenen Koordinatensystem dieselbe Form wie in dem, in dem der Leiter ruht. Aber die Materialgleichungen gehen über in

$$\vec{B} - \frac{1}{c^2}\,\vec{v} \times \vec{E} = \mu(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}) \tag{16}$$

$$\vec{D} + \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{H} = \epsilon(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{17}$$

$$\vec{j} = \rho\vec{v} + \sigma\gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\vec{v}}{v^2}\,\vec{v} \cdot \vec{E}), \tag{18}$$

wobei die Striche wieder weggelassen wurden. Man beachte, dass die Gleichungen (16), (17) für ein nicht magnetisierbares und nicht polarisierbares Material ($\mu = \mu_o$, $\epsilon = \epsilon_o$) mit den Gleichungen (5),(6) für den ruhenden Leiter identisch sind.

Die Näherung der Magnetohydrodynamik MHD kann durch

$$V^2 << \frac{1}{\epsilon\mu} \quad (\textit{nichtrelativistische Geschwindigkeit}) \tag{19}$$

$$\frac{L^2}{\tau^2} << \frac{1}{\epsilon\mu} \quad (\textit{langsame zeitliche Änderungen}) \tag{20}$$

$$\frac{1}{\sigma^2\mu^2L^2} << \frac{1}{\epsilon\mu} \quad (\textit{gute elektrische Leitfähigkeit}) \tag{21}$$

charakterisiert werden, wobei V, L, τ charakteristische Geschwindigkeiten, Längen und Zeiten sind. Aus den Bedingungen (19), (20), (21) erhält man durch Kombination

$$\frac{VL}{c^2\tau} << 1 \tag{22}$$

$$\frac{\epsilon}{\sigma\tau} << 1 \tag{23}$$

$$\frac{V\epsilon}{-\sigma L} << 1 \tag{24}$$

Dabei wurde die Tatsache benutzt, dass es keine Materialien gibt, in denen die Phasengeschwindigkeit des Lichts sehr gross ist gegen die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Deshalb folgt auch beispielsweise aus (24)

$$\frac{V}{c^2 \sigma \mu L} << 1 \tag{25}$$

Mit (19) geht das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz (18) über in

$$\vec{j} = \rho\, \vec{v} + \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) =$$
$$= \vec{v}\, \nabla \cdot \vec{D} + \frac{\sigma}{\epsilon}(\vec{D} + \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{H})$$

Hier sieht man, dass mit (24) der Konvektionsstrom $\rho\, \vec{v}$ weggelassen werden kann, sofern die Grössenordnung von räumlichen Ableitungen durch 1/L ersetzt werden darf.

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{26}$$

Damit folgt aus (4)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon}{\sigma}\, \vec{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\, \vec{v} \times \vec{H}$$

Der zweite und der dritte Term der rechten Seite kann wegen (23)und (24) vernachlässigt werden.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \tag{27}$$

Aus (16) folgt mit (17), (26) and (27)

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + \frac{\mu}{c^2}\,\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{H}) - \frac{\mu\epsilon}{\sigma}\vec{v} \times (\nabla \times \vec{H}) - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{c^2\sigma}\,\vec{v} \times (\nabla \times \vec{H})$$

Wegen (19), (24) and (25) sind hier auf der rechten Seite alle Terme bis auf den ersten zu vernachlässigen.

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{28}$$

Die Gleichungen (1), (2), (26), (27) und (28) lauten

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{j} &= \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} \\ \vec{B} &= \mu\vec{H} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

und repräsentieren zusammen mit den Gleichungen der Hydrodynamik die Magnetohydrodynamik. Die Ladungsdichte ρ kommt nicht vor, weil sie nachträglich aus (3) und (17) bestimmt werden kann.

In den Anwendungen interessieren oft Fälle, in denen die Leiter von einem Isolator ($\sigma = 0$) umgeben sind. In diesem Fall gilt die Gleichung (28) ebenfalls, muss aber anders begründet werden. Aus den Gleichungen im Leiter folgt, dass die Grössenordnung von elektrischem Feld und Verschiebung gegeben ist durch

$$\vec{E} \sim \frac{L}{\tau}\,\vec{B} \text{ oder } \vec{E} \sim v\vec{B} \tag{30}$$

$$\vec{D} \sim \frac{L}{\tau}\,\epsilon\vec{B} \text{ oder } \vec{D} \sim v\,\epsilon\vec{B}. \tag{31}$$

Das hat zur Folge, dass in Gleichung (16) die Terme mit $\vec{E}$ und $\vec{D}$ vernachlässigt werden dürfen.

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

Entsprechend findet man aus (3), (4) und (18)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{v}\,\nabla \cdot \vec{D} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad ,$$

d.h. die Terme auf der rechten Seite können wegen (31), (28), (22) und (23) weggelassen werden. Damit gilt im Isolator das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu H \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Man erhält also das System (32) für den Isolator, indem man im System (29) für den Leiter $\sigma = 0$ setzt. Befindet sich zwischen Leiter und Isolator eine scharfe Grenzfläche, dann führt die Forderung, dass alle Felder endlich bleiben, auf die Stetigkeit der Tangentialkomponente von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ und der Normalkomponente von $\vec{B}$.

Das System (29) reduziert sich durch Elimination auf

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B} - \frac{1}{\sigma} \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu} \right) \tag{33}$$

Die hierin vorkommende Grösse

$$\eta = \frac{1}{\sigma \mu}$$

nennt man die magnetische Diffusivität. Sie hat, wie man sieht, die Dimension Fläche/Zeit. Die Gleichung (33) beschreibt das sog. kinematische Dynamoproblem, das ist die Frage, für welche Strömungsfelder $\vec{v}\ (\vec{x}, t)$ besitzt die Gleichung (33) mit gewissen räumlichen Abfallbedingungen im Unendlichen Lösungen, die in der Zeit nicht abklingen.

Das Gleichungssystem (29) hat die Eigenschaft der Galilei-Kovarianz, d.h. bei einer Galilei-Transformation

$$t' = t, \vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}\ t, \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \tag{34}$$

behält das System (29) dieselbe Form, wenn das elektromagnetische Feld sich gemäss

$$\vec{B}' = \vec{B}, \vec{H}' = \vec{H}, \vec{j}' = \vec{j}, \vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}$$

transformiert. Diese Eigenschaft der Galilei-Kovarianz haben ebenfalls die Gleichungen der klassischen Kontinuumsmechanik, die zusätzlich zum System (29) zur Beschreibung der Strömungsdynamik dienen.

Einige Zahlen sollen die Güte der Näherungen (19)-(21) demonstrieren. Ist B die Amplitude des Magnetfeldes (, die nicht durch die lineare Gleichung (33), sondern erst durch die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Strömung bestimmt wird), dann lässt sich ausser der resistiven Zeit $\tau_r = L^2/\eta$ noch die sog. Alfven-Zeit $\tau_A = \sqrt{\rho\mu}L/B$ bilden mit ρ als Massendichte. Je kleiner das Verhältnis τ_A/τ_r ist, eine desto geringere Rolle spielt die Leitfähigkeit bei der Dynamik des betrachteten Systems. Mit $\mu = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m, c \sim 3 \cdot 10^8\ m/s$ hat man die folgenden charakteristischen Zahlen:

Flüssiger Kern der Erde:

$$L \sim 3.5 \cdot 10^6 m,\ T \sim 4000K,\ \eta \sim 3\ m^2/s,\ V \sim 10^{-3} m/s$$

$$\tau_A \sim 3 \cdot 10^9 s,\ \tau_r \sim 3 \cdot 10^{12} s,\ \tau_A/\tau_r \sim 10^{-3}$$

$$V^2/c^2 \sim 10^{-23},\ L^2/(\tau_A^2 c^2) \sim 10^{-23},\ \eta^2/(L^2 c^2) \sim 10^{-29}$$

Konvektionszone der Sonne:

$$L \sim 10^6 m,\ T \sim 6 \cdot 10^3 K,\ \eta \sim 10^5 m^2/s,\ V \sim 10^3 m/s$$

$$\tau_A \sim 10^3 s,\ \tau_r \sim 10^7 s,\ \tau_A/\tau_r \sim 10^{-4}$$

$$V^2/c^2 \sim 10^{-11},\ L^2/(\tau_A^2 c^2) \sim 10^{-11},\ \eta^2/(L^2 c^2) \sim 10^{-19}$$

Fusionsplasma:

$$L \sim 1m,\ T \sim 10^8 K,\ \eta \sim 10^{-3} m^2/s,\ V \sim 10^6 m/s$$

$$\tau_A \sim 10^{-5} s,\ \tau_r \sim 10^3 s,\ \tau_A/\tau_r \sim 10^{-8}$$

$$V^2/c^2 \sim 10^{-5},\ L^2/(\tau_A^2 c^2) \sim 10^{-7},\ \eta^2/(L^2 c^2) \sim 10^{-23}$$

Man sieht also, dass für diese drei Fälle die Näherungen (19)-(21) sehr gut erfüllt sind.

Da z.B. das Magnetfeld der Erde an der Oberfläche näherungsweise axialsymmetrisch ist, ist es naheliegend, die Gleichung (33) für den axialsymmetrischen Fall zu untersuchen. Dazu führt man in Zylinderkoordinaten r, ϕ, z durch

$$B_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z},\ B_\phi = q,\ B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{35}$$

eine "Flussfunktion" $\psi(r, z)$ ein. Der Ansatz (35) garantiert, dass das Feld $\vec{B}$ divergenzfrei ist. Man nennt die r, z - Komponenten den poloidalen Teil des Feldes und die ϕ - Komponente den toroidalen Teil. Mit (35) kann man aus (33) eine Gleichung für ψ allein gewinnen

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \Delta_* \psi - v_r \frac{\partial \psi}{\partial r} - v_z \frac{\partial \psi}{\partial z},\ \Delta_* = \frac{\partial^2}{\partial\, r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{36}$$

Dabei wurde angenommen, dass μ räumlich konstant ist. Die Gleichung (36) gilt nur im Leiter. Ausserhalb gilt

$$\Delta_* \psi = 0 \tag{37}$$

An der Übergangsfläche müssen ψ und $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ stetig sein, und für $R \to \infty (R^2 = r^2 + z^2)$ muss gelten $\psi = 0(R^{-1})$. Lange Zeit war unklar (siehe [1] – [5]), ob das Problem (36), (37) zeitlich nicht-abklingende Lösungen erlaubt. Diese Frage ist nun geklärt, und die Antwort ist: unabhängig von der Wahl der Strömungsgeschwindigkeit $v_r, v_z(r, z, t)$ klingen alle Lösungen von (36), (37) zeitlich ab ([6], [7], [10]).

Wenn der poloidale Feldanteil abgeklungen ist, findet man für den toroidalen Anteil die Gleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r} rq + \frac{\partial}{\partial z}\eta\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} q v_r - \frac{\partial}{\partial z} q v_z \tag{38}$$

mit der Randbedingung $q = 0$ am Rand des Leiters. Die Randbedingung für q bedeutet, dass ein solcher toroidaler Feldanteil ausserhalb des Leiters nicht in Erscheinung treten würde. Man kann aber zeigen ([8], [9], [10]), dass sämtliche Lösungen von (38) ebenfalls zeitlich abklingen, d.h. einen axialsymmetrischen Dynamo gibt es nicht.

Trotz dieses negativen Resultats für Axialsymmetrie herrscht heute die Meinung vor, dass es mehr Strömungen gibt, bei denen die Lösungen $\vec{B}$ von (33) zeitlich anwachsen, als solche, bei denen das Feld abklingt. Erstmals im Jahr 1958 wurden Näherungslösungen für zeitabhängige Modelle [11] und stationäre Modelle [12] veröffentlicht, die die grundsätzliche Möglichkeit des Dynamoprinzips als Erklärung der kosmischen Magnetfelder demonstrierten. In helikaler Symmetrie [13] ist es sogar möglich, für Gleichung (33) exakte Lösungen anzugeben. Diese Lösungen dienen dann als Ausgangspunkt für Näherungslösungen in bestimmten Modellen ([14], [15]). Die Lösungsmethode in [13] bestand darin, die Tatsache auszunutzen, dass die Gleichung (33) eine grosse Freiheit enthält (nur eine Vektorgleichung für die Felder $\vec{v}$ und $\vec{B}$). Diese Freiheit kann man auch für den Fall ohne Symmetrie ausnutzen.

Im stationären Fall mit $\mu = \mu_o$ lässt sich Gl. (33) räumlich integrieren in der Form

$$\eta \nabla \times \vec{B} + \nabla U - \vec{v} \times \vec{B} = 0 , \tag{39}$$

wo U das elektrostatische Potential ist ($\vec{E} = -\nabla U$). Gleichung (39) kann betrachtet werden als algebraische Gleichung für $\vec{v}$. Dazu muss die Lösbarkeitsbedingung

$$\eta \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot \nabla U = 0 \tag{40}$$

erfüllt sein. Gleichung (40) heisst "magnetische Differentialgleichung" [16], wenn aus ihr die Funktion U bestimmt werden soll. Für eine Dynamolösung muss das elektrostatische Potential U räumlich einwertig sein, weil andernfalls das Magnetfeld nicht stationär sein könnte. Diese Einwertigkeit im Raum führt zu einer Lösbarkeitsbedingung an die Inhomogenität der Gl. (40). Zur Angabe dieser Lösbarkeitsbedingung ist die Kenntnis der räumlichen Struktur der Magnetfeldlinien erforderlich.

Diese Feldlinien werden beschrieben durch das gewöhnliche autonome Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \tag{41}$$

wo angenommen ist, dass der Ortsvektor $\vec{x}$ von der Bogenlänge s auf der Feldlinie abhängt und dass $|\vec{B}|$ nirgends verschwindet. Sind $\psi, \chi, \sigma(\vec{x})$ irgendwelche Koordinatenfunktionen, dann erhält (41) die Form

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{B^\psi}{|\vec{B}|}, \quad \frac{d\chi}{ds} = \frac{B^\chi}{|\vec{B}|}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{B^\sigma}{|\vec{B}|} \tag{42}$$

mit $B^\psi = \vec{B} \cdot \nabla\psi$, $B^\chi = \vec{B} \cdot \nabla\chi$, $B^\sigma = \vec{B} \cdot \nabla\sigma$. Mit σ als unabhängiger Variable ist das System (42) zu

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{B^\psi}{B^\sigma}, \quad \frac{d\chi}{d\sigma} = \frac{B^\chi}{B^\sigma} \tag{43}$$

äquivalent. Dabei wird angenommen, dass ψ, χ und $\nabla\sigma$ im Raum einwertig sind und dass σ längs der Feldlinien so zunimmt, dass $B^\sigma > 0$ ist. Die Divergenzfreiheit des Feldes $\vec{B}$ kann durch Einführung eines Vektorpotentials $\vec{A}$ berücksichtigt werden.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{44}$$

Der Ansatz

$$\vec{A} = A_\psi \nabla\psi + A_\chi \nabla\chi + A_\sigma \nabla\sigma$$

führt dann auf

$$B^\psi = D\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial \chi} - \frac{\partial A_\chi}{\partial \sigma}\right)$$

$$B^\chi = D\left(\frac{\partial A_\psi}{\partial \sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial \chi}\right)$$

$$B^\sigma = D\left(\frac{\partial A_\chi}{\partial \psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial \chi}\right).$$

Bilden ψ, χ, σ ein rechtshändiges Koordinatensystem, dann gilt für die Funktionaldeterminante

$$D = (\nabla\psi \times \nabla\chi) \cdot \nabla\sigma > 0$$

Das Vektorpotential in (44) kann mit σ zunehmen (aber höchstens linear, weil andernfalls $\vec{B}$ nicht einwertig wäre). Andererseits ist $\vec{A}$ unbestimmt bis auf einen Gradienten ∇a (Eichfreiheit). Diese Freiheit lässt sich ausnutzen, um $\vec{A}$ einwertig zu machen.

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \sigma\vec{A}_2 + \nabla a$$

mit $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ einwertig. Wegen

$$\nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}_1 + \sigma\nabla \times \vec{A}_2 - \vec{A}_2 \times \nabla\sigma$$

einwertig, folgt $\vec{A}_2 = \nabla A$. Man sieht also, dass die Wahl $a = -A\sigma$ auf ein einwertiges Feld $\vec{A}$ führt. Darüberhinaus kann man z.B. durch Umeichung mit einem Gradienten ∇b die ψ - Komponente von $\vec{A}$ zum Verschwinden bringen.

$$A'_\psi = (\vec{A} + \nabla b)_\psi = A_\psi + \frac{\partial b}{\partial \psi} = 0 \tag{45}$$

Nach Integration von Gl. (45) hat man in $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla b$ ein einwertiges Vektorpotential mit $A'_\psi = 0$, so dass man den Strich wieder weglassen und $A_\psi = 0$ setzen kann. Das liefert die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\chi}{d\sigma} &= -\frac{\dfrac{\partial A_\sigma}{\partial\psi}}{\dfrac{\partial A_\chi}{\partial\psi}} \\ \frac{d\psi}{d\sigma} &= \frac{\dfrac{\partial A_\sigma}{\partial\chi} - \dfrac{\partial A_\chi}{\partial\sigma}}{\dfrac{\partial A_\chi}{\partial\psi}} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Geht man nun durch die Transformation

$$p = A_\chi(\psi, \chi, \sigma) \tag{47}$$

von den Koordinaten ψ, χ, σ über zu p, χ, σ, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial\psi} = \frac{\partial A_\chi}{\partial\psi}\,\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\frac{\partial}{\partial\chi}|_\psi = \frac{\partial A_\chi}{\partial\chi}|_\psi\,\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial\chi}|_p$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}|_\psi = \frac{\partial A_\chi}{\partial\sigma}|_\psi\,\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial\sigma}|_p\,.$$

Wird weiter

$$H(p, \chi, \sigma) = -A_\sigma \tag{48}$$

gesetzt, dann folgt

$$\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial A_\sigma}{\partial \psi}}{\frac{\partial A_\chi}{\partial \psi}} \ , \quad \frac{\partial H}{\partial \chi} = -\frac{\partial A_\sigma}{\partial \chi}\Big|_p = -\frac{\partial A_\sigma}{\partial \chi}\Big|_\psi + \frac{\frac{\partial A_\chi}{\partial \chi}\big|_\psi}{\frac{\partial A_\chi}{\partial \psi}} \frac{\partial A_\sigma}{\partial \psi}$$

und

$$\frac{dp}{d\sigma} = \frac{\partial A_\chi}{\partial \psi}\frac{d\psi}{d\sigma} + \frac{\partial A_\chi}{\partial \chi}\frac{d\chi}{d\sigma} + \frac{\partial A_\chi}{\partial \sigma} =$$

$$= \frac{\partial A_\sigma}{\partial \chi} - \frac{\partial A_\chi}{\partial \chi}\frac{\frac{\partial A_\sigma}{\partial \psi}}{\frac{\partial A_\chi}{\partial \psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \chi}$$

Also kann das System (46) in der kanonischen Form

$$\frac{d\chi}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial p} \ , \ \frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\frac{\partial H}{\partial \chi}$$

geschrieben werden. D.h. die Feldliniengleichungen (45) sind äquivalent einem zeitabhängigen mechanischen System mit einem Freiheitsgrad [17] .

So, wie dies aus der Mechanik bekannt ist (siehe z.B. [18]), zeigen auch die Feldlinien i.a. chaotisches Verhalten. Für die Diskussion von Dynamomodellen kann man nun die Freiheit ausnutzen, die in der Tatsache steckt, dass Gl. (39) nur eine Vektorgleichung für die beiden Vektorfelder $\vec{v}$ und $\vec{B}$ ist. Man kann die Existenz von "magnetischen Flächen" fordern. Dies sind räumlich einwertige toroidale Flächen F, in denen die Magnetfeldlinien verlaufen. Wenn diese Flächen existieren, dann ergibt sich durch räumliche Integration der Gleichung (40) über das Innere von F die Bedingung

$$\int\int \eta \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{B}) |\nabla V|^{-1} d^2 f = 0 \tag{49}$$

Dabei ist V das von F umschlossene Volumen und $d^2 f$ das Flächenelement auf F. Gl. (49) ist notwendig dafür, dass ein räumlich einwertiges U aus Gl. (40) berechnet werden kann. Die Bedingung (49) ist aber i.a. nicht hinreichend. Notwendig und hinreichend ist dagegen die Bedingung [16]

$$\int \eta \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{B}) B^{-1} dl = 0 \tag{50}$$

wobei das Kurvenintegral über jede geschlossene Feldlinie zu erstrecken ist. Die Bedingung (50) ist sehr kompliziert, weil die Feldlinienlänge i.a. keine stetige Funktion der Fläche ist. Es gibt allerdings Fälle, in denen die Bedingungen (49) und (50) zusammenfallen. Der oben diskutierte Fall der Axialsymmetrie ist ein solcher. Ist das axialsymmetrische Feld rein poloidal, dann ist die Stromdichte toroidal; d.h. beide Bedingungen (49), (50) werden trivial.

Wenn Gl. (40) erfüllt ist, lässt Gl. (39) sich algebraisch nach $\vec{v}$ auflösen.

$$\vec{v} = \alpha \vec{B} + \vec{C}\ , \quad \vec{C} = \frac{\vec{B}}{B^2} \times (\eta \nabla \times \vec{B} + \nabla U) \tag{51}$$

Die freie Funktion α kann z.B. durch eine Kontinuitätsgleichung festgelegt werden, die im einfachsten inkompressiblen Fall die Form

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{52}$$

hat. Wegen der Quellenfreiheit von $\vec{B}$ führt dies auf

$$\vec{B} \cdot \nabla \alpha = -\nabla \cdot \vec{C} \tag{53}$$

Gl.(53) ist wieder eine magnetische Differentialgleichung, für die diesmal die Lösbarkeitsbedingung

$$\int B^{-1} \nabla \cdot \vec{C} \, dl = 0 \tag{54}$$

erfüllt sein muss, wobei das Integral wiederum über alle geschlossenen Feldlinien zu erstrecken ist.

Die Gleichungen (2), (40) und (54) beschreiben das "inverse kinematische Dynamoproblem" [19]. Obwohl diese Gleichungen für $\vec{B}$ und U keine axialsymmetrische Lösung zulassen, wird man erwarten, dass sie i.a. noch Freiheiten enthalten.

Der formale Grund, warum ein axialsymmetrischer Dynamo nicht möglich ist, besteht darin, dass eine Gleichung für den poloidalen Teil allein erfüllt sein muss. Effekte, die eine solche Separation verhindern, können dazu führen, dass es Dynamolösungen mit einfacher Symmetrie gibt. Einen solchen Effekt bekommt man z.B., wenn man die Annahme der Isotropie für die Leitfähigkeit fallen lässt. Die Anisotropie der Leitfähigkeit bedeutet, dass die Diffusivität η nicht ein Skalar ist, sondern ein Tensor. Für einen solchen Fall ist z.B. die stationäre Gleichung (39) zu ersetzen durch

$$\eta_{ij} \, \epsilon_{jkl} \, \frac{\partial}{\partial x_k} B_l + \frac{\partial U}{\partial x_i} - \epsilon_{ijk} \, v_j \, B_k = 0 \tag{55}$$

Hier wird in cartesischen Koordinaten die Indexschreibweise mit Summenkonvention benutzt. Wie in [20] gezeigt wird, lässt Gl.(55) tatsächlich Lösungen mit einfacher Symmetrie zu. Eine Anisotropie in der Leitfähigkeit könnte dadurch zustandekommen, dass in den

astro- und geophysikalischen Anwendungen die Felder in der Regel turbulent sind [21], was hier aber nicht weiter diskutiert wird.

Ebenfalls verzichtet werden muss auf die Diskussion der die Strömung treibenden Kräfte und der Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Strömung (siehe z.B. [22]). Dabei treten sehr interessante Phänomene auf. Z.B. vertauscht das Magnetfeld der Erde in unregelmässigen Zeitabständen von der Grössenordnung $10^4 - 10^6$ Jahre den Nord- und den Südpol [23]. Eine befriedigende theoretische Beschreibung dieses Verhaltens scheint aber noch nicht in Sicht zu sein.

Referenzen

/1 / Cowling, T.G.: The Magnetic Field of Sunspots. Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 94 (1934) 39 - 48

/2 / Backus, G., Chandrasekhar, S.: On Cowlings's Theorem on the Impossibility of Self-Maintained Axisymmetric Homogeneous Dynamos. Proc. Nat. Acad. Sci. 42 (1956) 105 - 108

/3 / Braginskii, S.I.: Self-Excitation of a Magnetic Field During the Motion of a Highly Conducting Fluid. Sov. Phys. JETP 20 (1964) 726 - 735

/4 / Lortz, D.: Impossibility of Steady Dynamos with Certain Symmetries. Phys. Fluids 11 (1968) 913 - 915

/5 / Todoeschuck, J.P., Rochester, M.G.: The Effect of Compressible Flow on Anti-Dynamo Theorems. Nature 284 (1980) 250 - 251

/6 / Hide, R.: Dynamo Theorems. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 14 (1979) 183 -186

/7 / Lortz, D., Meyer-Spasche, R.: On the Decay of Symmetric Dynamo Fields. Math. Meth. in the Appl. Sci. 4 (1982) 91 - 97

/8 / Lortz, D., Meyer-Spasche, R., Stredulinsky, E.: Asymptotic Behaviour of the Solutions of Certain Parabolic Equations. Comm. Pure Appl.Math. 37 (1984) 677 - 703

/9 / Lortz, D., Meyer-Spasche, R.: On the Decay of Symmetric Toroidal Dynamo Fields. Z. Naturforsch. 37a (1982) 736 - 740

/10/ Ivers, D.J., James, R.W.: Axisymmetric Antidynamo Theorems in Compressible non-uniform Conducting Fluids. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A312 (1984) 179 - 218

/11/ Backus, G.: A Class of Self-Sustaining Dissipative Sperical Dynamos. Ann. Phys. 4

(1958) 372 - 447

/12/ Herzenberg, A.: Geomagnetic Dynamos. Phil. Trans. A250 (1958) 543 - 583

/13/ Lortz, D.: Exact Solutions of the Hydromagnetic Dynamo Problem. Plasma Phys. 10 (1968) 967 - 972

/14/ Benton, E.R.: On the Helical Dynamo of Lortz as a Model for the Steady Main Geomagnetic Field. Geophys. J.R. Astr. Soc. 42 (1975) 385 - 401

/15/ Lortz, D.: A Simple Stationary Dynamo Model. Z. Naturforsch. 27a (1972) 1350 - 1354

/16/ Newcomb, W.A.: Magnetic Differential Equations. Phys. Fluids 2 (1959) 362 - 365

/17/ Cary, J.R., Littlejohn, R.G.: Noncanonical Hamiltonian Mechanics and Its Application to Magnetic Field Line Flow. Ann. Phys. 151 (1983) 1 - 34

/18/ Lichtenberg, A.J., Lieberman, M.A.: Regular and Stochastic Motion. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1983)

/19/ Lortz, D.: The Inverse Dynamo Problem. Workshop on Mathematical Aspects of Fluid and Plasma Dynamics, Trieste, May 30 - June 2 (1984)

/20/ Ruderman, M.S., Ruzmaikin, A.A.: Magnetic Field Generation in an Anisotropically Conducting Fluid. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics 28 (1984) 77 - 88

/21/ Krause, F., Rädler, K.H.: Mean Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Pergamon Press. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt (1980)

/22/ Busse, F.: Recent Developments in Dynamo Theory of Planetary Magnetism. Ann. Rev. Earth Planet. Sci. 11 (1983) 241 - 268

/23/ Fuller, M., Williams, I., Hoffman, K.A.: Paleomagnetic Records of Geomagnetic

Field Reversals and Morphology of the Transitional Field. Rev. Geophys. Space Phys. 17 (1979) 179 - 203