

Die Wirbelstromverluste in der zentralen
Säule des ASDEX Upgrade bei der Plasma-
entladung und der Reinigungsentladung

The Eddy Current Losses in the Central
Column of ASDEX Upgrade during the Plasma
Discharge and Cleaning Discharge

E.Harmeyer

IPP 1/222

November 1983



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN

Die Wirbelstromverluste in der zentralen
Säule des ASDEX Upgrade bei der Plasma-
entladung und der Reinigungsentladung

The Eddy Current Losses in the Central
Column of ASDEX Upgrade during the Plasma
Discharge and Cleaning Discharge

E. Harmeyer

IPP 1/222

November 1983

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

The mechanical poloidal field support structure of ASDEX Upgrade contains a column of non-magnetic steel in the centre of the torus arrangement. In this central column eddy current losses occur during the plasma discharge and cleaning discharge. The diffusion problem in the column is solved by analytical methods in this report. The solution is valid for arbitrary temporal development of the exciting current in the OH transformer. The magnetic field obtained is given by a Fourier-Bessel series, the electric field by a DINI series. For an exciting current in the form of a harmonic function or an e-function a closed mathematical expression can be set for the series. The power and energy values and the temperature increase are derived from the electromagnetic field. The impedance of the column and the decrease of the plasma loop voltage caused by the column are calculated.

Die Wirbelstromverluste in der zentralen Säule des ASDEX Upgrade
bei der Plasmaentladung und der Reinigungsentladung

E.Harmeyer

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
2. Das Diffusionsproblem
3. Die elektromagnetische Feldverteilung
 - 3.1 Spezialfälle der Anrege-Zeitfunktion
 - 3.1.1 Die Sprungfunktion
 - 3.1.2 Die harmonische Schwingung
 - 3.1.3 Die e-Funktion
4. Die eingestrahlte Leistung
 - 4.1 Anregung in Form einer e-Funktion
 - 4.2 Zeitlich sinusförmige Anregung
5. Der Temperaturhub
 - 5.1 Anregung in Form einer e-Funktion
 - 5.2 Zeitlich sinusförmige Anregung
6. Die Impedanz der Säule
7. Das Ersatzschaltbild des OH-Kreises
8. Ergebnisse der Berechnungen
 - 8.1 Anregung in Form einer e-Funktion
 - 8.2 Zeitlich sinusförmige Anregung
9. Schlußfolgerungen
10. Mathematischer Anhang
11. Literatur

Die Wirbelstromverluste in der zentralen Säule des ASDEX Upgrade bei der Plasmaentladung und der Reinigungsentladung

1. Einleitung

Beim ASDEX Upgrade befindet sich in der Torusachse eine Säule aus unmagnetischem Stahl. Sie ist Teil der Poloidalfeld-Stützstruktur. In dieser zentralen Säule treten Wirbelstromfelder auf, wenn es zu Feldänderungen in diesem Bereich kommt. Wegen der Rotationssymmetrie sind die Felder in der zentralen Säule vom Winkel φ unabhängig. Die Abhängigkeit der Felder von der Längskoordinate z kann vernachlässigt werden, da die Längenausdehnung der Säule sehr viel größer als ihr Durchmesser ist. Unter diesen Voraussetzungen wird die Diffusionsgleichung skalar, da nur eine magnetische Feldkomponente in z -Richtung vorhanden ist. Sie ist abhängig von der Ortsvariablen r und von der Zeit t . Die Diffusionsgleichung ist analytisch lösbar für einen beliebigen Zeitverlauf des anregenden Stromes im OH-Trafo; die Lösung für das magnetische Feld ist durch eine Fourier-Bessel-Reihe gegeben, die Lösung für das elektrische Feld ist eine DINI-Reihe.

Praktisch sind zwei verschiedene Zeitverläufe wichtig, die harmonische Schwingung und der Puls in Form einer e-Funktion. Bei der Reinigungsentladung wird der OH-Trafo mit einem zeitlich sinusförmigen Strom gespeist, der ein entsprechend geformtes Feld in der Säule zur Folge hat. Bei der Plasmaentladung ist der Stromverlauf pulsförmig, so daß auch das Feld in der Säule pulsförmig ist. Der pulsförmige Verlauf kann durch e-Funktionen angenähert werden. Bei diesen speziellen Verläufen ist es möglich, die Reihenentwicklungen durch geschlossene mathematische Ausdrücke für die Feldkomponenten zu ersetzen.

Durch die zeitliche Feldänderung in der Säule wird ein Teil der eingestrahlten Energie in Wärme umgewandelt. Außerdem wird die Plasmaringspannung geschwächt. Zur quantitativen Bestimmung dieser Effekte werden aus den Feldgrößen die Leistungs- und Energiegrößen, der Temperaturhub und die Impedanz der Säule ermittelt.

2. Das Diffusionsproblem

Es gelten in der Säule die Maxwell'schen Gleichungen. Da Felder in Metall betrachtet werden, können die Verschiebungsströme vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} \text{I.) } \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \\ \text{II.) } \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ferner gilt:

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad (2.3)$$

Durch nochmalige Rotationsbildung der ersten Maxwell'schen Gleichung und Einsetzen der zweiten erhält man

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \kappa \operatorname{rot} \vec{E} = -\kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Mit Gl. (2.2) und

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H}$$

folgt die allgemeine Diffusionsgleichung

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0} \quad (2.4)$$

Wegen des kreisförmigen Querschnitts der Säule erfolgt die Rechnung zweckmäßigerweise in Zylinderkoordinaten. Da die Längenausdehnung der Säule sehr viel größer ist als ihr Durchmesser, kann sie durch einen unendlich langen Zylinder approximiert werden.

Die unendliche Ausdehnung der Säule in z und die Rotationssymmetrie impliziert, daß die Felder nicht von den Koordinaten φ und z abhängig sind. Es folgt daher:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

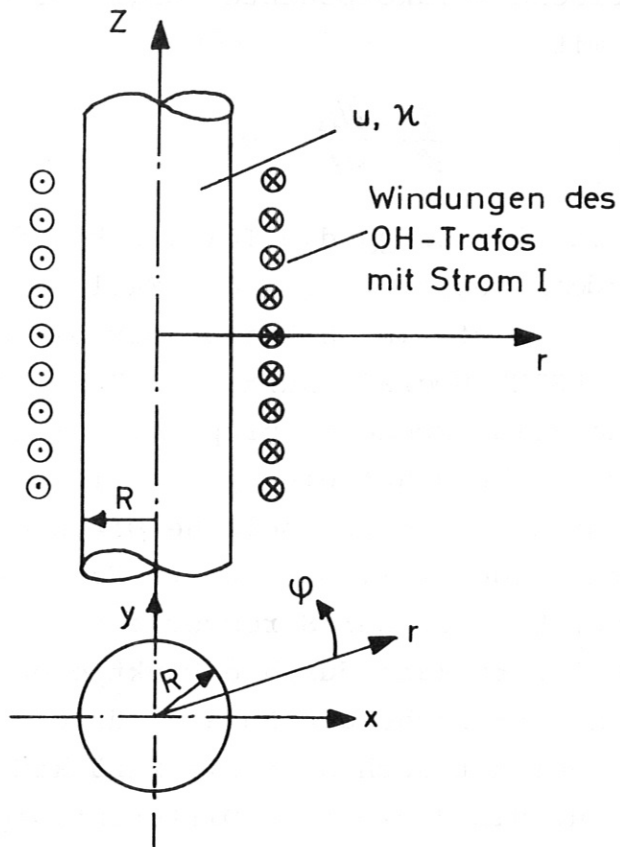


Bild 1: Modell der zentralen Säule

Damit zerfallen die Maxwell'schen Gleichungen in zwei Gleichungsgruppen. In der ersten Gruppe treten nur die Feldkomponenten H_φ und E_z auf, während in der zweiten H_z und E_φ möglich sind. Das letztere System liefert die Lösung für das gestellte Problem. Die Maxwell'schen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= -\vec{e}_\varphi \frac{\partial H_z}{\partial r} = \kappa E_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \text{rot } \vec{E} &= \vec{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

Für die Diffusionsgleichung folgt

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \mu \kappa \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (2.6)$$

Die elektrische Feldkomponente folgt aus der I. Maxwell'schen Gleichung mit

$$E_{\varphi} = -\frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (2.7)$$

An dieser Stelle können die Teilaspekte des Problems betrachtet werden. Der erste ist der Fall des zeitlich sinusförmigen Stromverlaufs im OH-Trafo, der bei der Reinigungsentladung des ASDEX Upgrade auftritt. Durch den Ansatz, daß die magnetische Feldkomponente proportional $e^{j\omega t}$ ist, kann die Diffusionsgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung II. Ordnung, die Besselsche Differentialgleichung, zurückgeführt werden /1/. Der zweite Fall ist die normale Plasmaentladung, bei der der Stromverlauf im OH-Trafo pulsformig ist. Die Pulsform kann durch e-Funktionen angenähert werden. Durch einen entsprechenden Ansatz für die magnetische Feldkomponente gelingt auch hier die Zurückführung der Diffusionsgleichung auf die Besselsche Differentialgleichung.

Im folgenden soll jedoch die Diffusionsgleichung für einen beliebigen Verlauf des anregenden Stromes im OH-Trafo gelöst werden. Das geschieht mit Hilfe der Laplace-Transformation /2/. Aus der allgemeinen Lösung werden dann die Spezialfälle des Verlaufs in Form einer harmonischen Schwingung und einer e-Funktion abgeleitet.

3. Die elektromagnetische Feldverteilung

Es gilt die Diffusionsgleichung (2.6):

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \mu \kappa \epsilon \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

Die Diffusionsgleichung wird nun der Laplace-Transformation unterzogen. Das setzt voraus, daß die Feldgrößen für $t < 0$ gleich Null sind. Wegen

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = p$$

lautet die Diffusionsgleichung im Laplace-Bereich

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r} - \mu \kappa \epsilon p \tilde{H}_z = 0 \quad (3.2)$$

Sie hat die allgemeine Lösung

$$\tilde{H}_z(r, p) = C_1 \mathcal{F}_0(k_1 r) + C_2 N_0(k_1 r)$$

mit

$$k_1 = \sqrt{-\mu \kappa \epsilon p} = j \sqrt{\mu \kappa \epsilon p} \quad (3.3)$$

Weil $H_z(r, p)$ endlich sein muß für $r = 0$, folgt $C_2 = 0$. Die Konstante C_1 kann bestimmt werden durch Betrachtung der Feldstärke am Rande, d.h. für $r = R$. Durch Anwendung des Durchflutungsgesetzes und Bilden des Umlaufintegrals um die Windungen ergibt sich dort

$$\tilde{H}_z(R, p) = \tilde{H}_{z0} = \tilde{I}(p) \cdot w' \quad (3.4)$$

Dabei ist w' die Windungszahl pro Längeneinheit der Spule.

Für die Konstante C_1 folgt also

$$C_1 = \frac{\tilde{I}(p) \cdot w'}{\mathcal{F}_0(k_1 R)} \quad (3.5)$$

Die vollständig bestimmte magnetische Feldkomponente im Laplace-Bereich lautet

$$\tilde{H}_z(r, p) = \tilde{I}(p) \cdot w' \cdot \frac{J_0(k_1 r)}{J_0(k_1 R)} \quad (3.6)$$
$$k_1 = j\sqrt{\mu \epsilon p'}$$

Die Lösung im Laplace-Bereich muß in den Zeitbereich rücktransformiert werden. Dazu wird der Faltungssatz und der Residuensatz angewandt:

Die Lösung im Laplace-Bereich ist das Produkt zweier Funktionen in p . Man kann deshalb setzen:

$$\tilde{H}_z(r, p) = I_0 \cdot w' \cdot \tilde{f}_1(p) \cdot \tilde{f}_2(p)$$

mit

$$\tilde{f}_2(p) = \frac{J_0(j\sqrt{\mu \epsilon p'} r)}{J_0(j\sqrt{\mu \epsilon p'} R)} \quad (3.7)$$
$$\tilde{f}_1(p) = \text{Laplace-Transformierte der Anregefunktion}$$

Die Lösung im Zeitbereich erhält man mit dem Faltungssatz

$$H_z(r, t) = I_0 w' f_1(t) * f_2(t)$$
$$= I_0 w' \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Es kommt also darauf an, die Funktion $\tilde{f}_2(p)$ in den Zeitbereich rückzutransformieren. Das geschieht mit dem Residuensatz. Es gilt:

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint \tilde{f}_2(p) e^{pt} dp$$
$$= \sum_{i=1}^n \text{Res}_{p=p_i} \{ \tilde{f}_2(p) e^{pt} \} \quad (3.9)$$

Dabei sind die p_i die isolierten Singularitäten (Pole) von $\tilde{f}_2(p)e^{pt}$ mit $i = 1, \dots, n$.

Im mathematischen Anhang wird gezeigt, daß die Funktion $\tilde{f}_2(p)$ unendlich viele Pole in der negativen p -Halbebene hat. Die Pole sind reell und einfach, d.h. sie liegen auf der negativen Achse.

Es gilt:

$$p_i = \frac{-j_{oi}^2}{\mu \kappa R^2} \quad (3.10)$$

Hierin sind die j_{oi} die Nullstellen der Funktion $J_0(z)$.

Das Residuum von $\tilde{f}_2(p)e^{pt}$ an der Stelle von $p = p_i$ hat, wie im mathematischen Anhang gezeigt wird, die Größe

$$\frac{2 j_{oi} J_0(j_{oi} \frac{r}{R})}{\mu \kappa R^2 J_1(j_{oi})} e^{p_i t} = \frac{-2 p_i J_0(j_{oi} \frac{r}{R})}{j_{oi} J_1(j_{oi})} e^{p_i t} \quad (3.11)$$

Damit lautet die Funktion $f_2(t)$:

$$f_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 j_{oi} J_0(j_{oi} \frac{r}{R})}{\mu \kappa R^2 J_1(j_{oi})} e^{p_i t} \quad (3.12)$$

Setzt man Gl. (3.12) in Gl. (3.8) ein, so ergibt sich die magnetische Feldstärke im Zeitbereich

$$H_2(r, t) = I_0 W' \frac{2}{\mu \kappa R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{j_{oi} J_0(j_{oi} \frac{r}{R})}{J_1(j_{oi})} e^{p_i t} \int_0^t f_1(\tau) e^{-p_i \tau} d\tau$$

mit
$$p_i = - \frac{j_{oi}^2}{\mu \kappa R^2} \quad (3.13)$$

Für die elektrische Feldstärke folgt nach Gl. (2.7)

$$E_p(r, t) = I_0 W' \frac{2}{\mu H^2 R^3} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{j^i \mathcal{F}_i(j\omega \frac{r}{R}) e^{pit}}{\mathcal{F}_i(j\omega i)} \int_0^t f_1(\tau) e^{-pi\tau} d\tau$$

für $0 < r < R$ (3.14)

3.1 Spezialfälle der Anrege-Zeitfunktion

3.1.1 Die Sprungfunktion

Es gelte:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Dann ist

$$\int_0^t f_1(\tau) e^{-pi\tau} d\tau = -\frac{1}{pi} (e^{-pit} - 1) \quad (3.16)$$

Für die Feldstärken ergibt sich

$$H_z(r, t) = I_0 W' \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \mathcal{F}_0(j\omega \frac{r}{R})}{j\omega i \mathcal{F}_i(j\omega i)} e^{pit} \right)$$

$$E_p(r, t) = -I_0 W' \frac{2}{\mu R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_i(j\omega \frac{r}{R})}{\mathcal{F}_i(j\omega i)} e^{pit}$$

für $0 < r < R$, (3.17)

wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \mathcal{F}_0(j\omega \frac{r}{R})}{j\omega i \mathcal{F}_i(j\omega i)} = 1, \quad (3.18)$$

wie im mathematischen Anhang gezeigt wird.

3.1.2 Die harmonische Schwingung

Bei der harmonischen Schwingung sind die Feldgrößen proportional $e^{j\omega t}$. Es gelte:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ e^{j\omega t} & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} \int_0^t f_1(\tau) e^{-p_1 \tau} d\tau &= \frac{1}{p_1 - j\omega} (1 - e^{-(p_1 - j\omega)t}) \\ &= \frac{-\mu_0 R^2}{j\omega^2 - k_2^2 R^2} (1 - e^{-(p_1 - j\omega)t}) \end{aligned}$$

mit $k_2^2 = -j\omega\mu_0\epsilon$ (3.20)

Für die Feldstärken ergibt sich

$$\begin{aligned} H_z(r, t) &= I_0 w' \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 j\omega_i F_0(j\omega_i \frac{r}{R})}{(j\omega_i^2 - k_2^2 R^2) F_1(j\omega_i)} e^{j\omega_i t} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 j\omega_i F_0(j\omega_i \frac{r}{R})}{(j\omega_i^2 - k_2^2 R^2) F_1(j\omega_i)} e^{p_i t} \right) \\ E_\varphi(r, t) &= I_0 w' \frac{2}{\mu R} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{j\omega_i^2 F_1(j\omega_i \frac{r}{R})}{(j\omega_i^2 - k_2^2 R^2) F_1(j\omega_i)} e^{j\omega_i t} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{j\omega_i^2 F_1(j\omega_i \frac{r}{R})}{(j\omega_i^2 - k_2^2 R^2) F_1(j\omega_i)} e^{p_i t} \right) \end{aligned}$$

für $0 < r < R$ (3.21)

Der letzte Summand in den Gleichungen repräsentiert den Einschwingvorgang, er kann für $|p_i t| \gg 1$ vernachlässigt werden.

Im mathematischen Anhang wird gezeigt, daß gilt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 j \omega_i \mathcal{F}_0(j \omega_i \frac{r}{R})}{(j \omega_i^2 - k^2 R^2) \mathcal{F}_1(j \omega_i)} &= \frac{\mathcal{F}_0(k r)}{\mathcal{F}_0(k R)} \\
 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{j \omega_i \mathcal{F}_1(j \omega_i \frac{r}{R})}{(j \omega_i^2 - k^2 R^2) \mathcal{F}_1(j \omega_i)} &= \frac{k R}{2} \cdot \frac{\mathcal{F}_1(k r)}{\mathcal{F}_0(k R)} \\
 \text{für } 0 < r < R, \quad k \in \mathbb{C}
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Für die Feldstärken bei Vernachlässigung des Einschwingvorganges ergibt sich

$$\begin{aligned}
 H_z(r, t) &= I_0 w' \frac{\mathcal{F}_0(k_2 r)}{\mathcal{F}_0(k_2 R)} e^{j \omega t} \\
 E_\varphi(r, t) &= I_0 w' \frac{k_2}{\mu} \cdot \frac{\mathcal{F}_1(k_2 r)}{\mathcal{F}_0(k_2 R)} e^{j \omega t}
 \end{aligned}$$

mit

$$k_2 = \sqrt{-j \omega \mu \epsilon'} = \frac{-1+j}{\delta} \in \mathbb{C}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \epsilon'}}$$

(3.23)

δ = Eindringtiefe

Dieses Ergebnis stimmt überein mit den entsprechenden Gleichungen in der Literatur /1/, die dort auf direktem Weg ermittelt werden.

Für tiefe und hohe Frequenzen können für die Besselfunktionen Näherungen verwendet werden. Diese lauten, wie im mathematischen Anhang gezeigt wird:

a) für tiefe Frequenzen:

$$\begin{aligned} \frac{F_0(k_2 r)}{F_0(k_2 R)} &= 1 - j \frac{R^2 - r^2}{2\delta^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1 \\ \frac{k_2 F_1(k_2 r)}{F_0(k_2 R)} &= -\frac{r}{\delta^2} \left(\frac{2R^2 - r^2}{4\delta^2} + j \right) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

b) für hohe Frequenzen

$$\begin{aligned} \frac{F_0(k_2 r)}{F_0(k_2 R)} &= \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot e^{jk_2(R-r)} = \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot e^{-\frac{R-r}{\delta}} \cdot e^{-j\frac{R-r}{\delta}} \\ \frac{k_2 F_1(k_2 r)}{F_0(k_2 R)} &= jk_2 \sqrt{\frac{R}{r}} e^{jk_2(R-r)} = \frac{-1-j}{\delta} \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot e^{-\frac{R-r}{\delta}} \cdot e^{-j\frac{R-r}{\delta}} \end{aligned}$$

mit $k_2 = \frac{-1+j}{\delta}$

und $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \epsilon}}$ (3.25)

Für $\omega \rightarrow \infty$ folgt: $\delta \rightarrow 0$

und $e^{-\frac{R-r}{\delta}} \rightarrow 0$

Also $\frac{F_0(k_2 r)}{F_0(k_2 R)} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$

$$\frac{k_2 F_1(k_2 r)}{F_0(k_2 R)} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für } 0 < r < R$$

Damit lauten die Feldkomponenten

a) für tiefe Frequenzen

$$\begin{aligned} H_z(r, t) &= I_0 W' \left(1 - j\omega \mu \epsilon \frac{R^2 - r^2}{4} \right) e^{j\omega t} \\ E_\varphi(r, t) &= -I_0 W' \frac{\omega \mu r}{2} \left(\omega \mu \epsilon \frac{2R^2 - r^2}{8} + j \right) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (3.26)$$

b) für hohe Frequenzen

$$H_z(r,t) = I_0 w' \sqrt{\frac{R'}{r}} e^{jk_2(R-r)} e^{j\omega t} \quad (3.27)$$

$$E_\varphi(r,t) = I_0 w' \frac{jk_2}{\omega \epsilon} \sqrt{\frac{R'}{r}} e^{jk_2(R-r)} e^{j\omega t}$$

$$\text{mit } k_2 = \sqrt{-j\omega\mu\epsilon'}$$

$$\text{für } 0 < r < R$$

Ergebnis:

Für $\omega \rightarrow 0$ existiert im Bereich der Säule nur die magnetische Feldkomponente $H_z = H_{z0} = I_0 w'$; die elektrische Feldkomponente E_φ wird Null. Für $\omega \rightarrow \infty$ wird der Bereich der Säule vollkommen feldfrei.

3.1.3 Die e-Funktion

Es gelte:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha t} & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

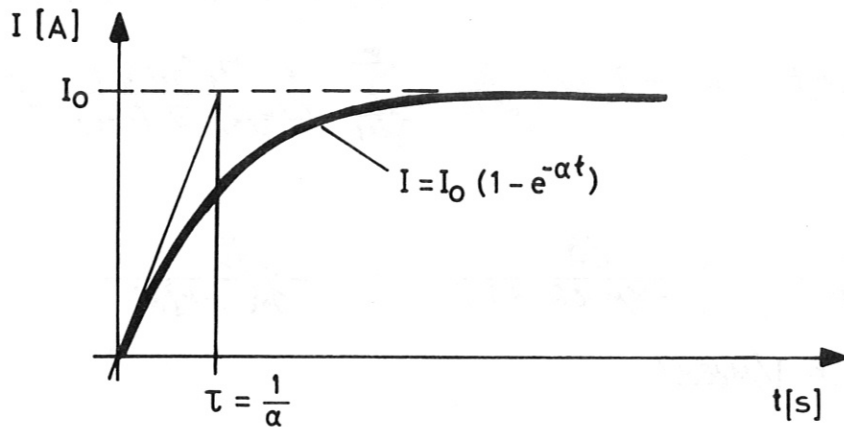


Bild 2: Stromverlauf in Form einer e-Funktion

Dann ist:

$$\int_0^t f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \frac{1}{p} (1 - e^{-pt}) - \frac{1}{\alpha + pi} (1 - e^{-(\alpha + pi)t}) \quad (3.29)$$

Für die Feldstärken ergibt sich

$$H_z(r, t) = I_0 W' \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 pi F_0(joi \frac{r}{R})}{(\alpha + pi) joi F_1(joi)} e^{-\alpha t} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \alpha F_0(joi \frac{r}{R})}{(\alpha + pi) joi F_1(joi)} e^{pit} \right)$$

$$E_\varphi(r, t) = -I_0 W' \frac{2}{jR} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{pi F_1(joi \frac{r}{R})}{(\alpha + pi) F_1(joi)} e^{-\alpha t} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha F_1(joi \frac{r}{R})}{(\alpha + pi) F_1(joi)} e^{pit} \right)$$

für $0 < r < R$

(3.30)

Für $\alpha \rightarrow \infty$ ergeben sich die Feldstärken wie bei der Sprungfunktion. Für $|\alpha| \ll |\rho_i|$ ist der letzte Summand, der den Einschwingvorgang darstellt, in den Gleichungen zu vernachlässigen. Dann lauten die Feldstärken

$$H_z(r,t) = I_0 w' \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \rho_i J_0(j \rho_i \frac{r}{R})}{(\alpha + \rho_i) j \rho_i J_1(j \rho_i)} e^{-\alpha t} \right) \quad (3.31)$$

$$E_\varphi(r,t) = -I_0 w' \frac{2}{\mu R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i J_1(j \rho_i \frac{r}{R})}{(\alpha + \rho_i) J_1(j \rho_i)} e^{-\alpha t}$$

Nun ist:

$$\frac{\rho_i}{\alpha + \rho_i} = \frac{j \omega_i^2}{-\alpha \mu R^2 + j \omega_i^2} = \frac{j \omega_i^2}{j \omega_i^2 - k_3^2 R^2} \quad (3.32)$$

mit $k_3 = \sqrt{\mu \epsilon \alpha}$

Unter Berücksichtigung von Gl. (3.22) folgt für die Feldstärken bei Vernachlässigung des Einschwingvorganges

$$H_z(r,t) = I_0 w' \left(1 - \frac{J_0(k_3 r)}{J_0(k_3 R)} e^{-\alpha t} \right)$$

$$E_\varphi(r,t) = -I_0 w' \cdot \frac{k_3}{\epsilon} \cdot \frac{J_1(k_3 r)}{J_0(k_3 R)} e^{-\alpha t}$$

mit $k_3^2 = \mu \epsilon \alpha \in \mathbb{R}$ (3.33)

für $t > 1/|\rho_1|$, $\rho_1 = \frac{-j \omega_1}{\mu \epsilon R^2}$

Wegen $|k_3 R| \ll 1$ können für die Besselfunktionen die Näherungen für kleine Argumente eingesetzt werden, so daß folgt

$$H_z(r,t) = I_0 w' \left(1 - \left(1 + \frac{\mu \epsilon \alpha}{4} (R^2 - r^2) \right) e^{-\alpha t} \right)$$

$$E_\varphi(r,t) = -I_0 w' \frac{\mu \alpha r}{2} \left(1 + \frac{\mu \epsilon \alpha}{8} (2R^2 - r^2) \right) e^{-\alpha t}$$

für $t > 1/|\rho_1|$ (3.34)

$$0 \leq r \leq R$$

4. Eingestrahelte Leistung

Um die Energiebilanz bei einer Anregung mit beliebigem zeitlichen Verlauf zu betrachten, geht man von den Maxwell'schen Gleichungen aus. Die Multiplikation der ersten Maxwell'schen Gleichung mit \vec{E} und der zweiten mit \vec{H} sowie Differenzbildung ergibt /3/

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) &= \\ &= \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = -\mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \kappa \vec{E}^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Integration über das Gesamtvolumen und Anwendung des Gauß'schen Satzes ergibt die Energieströmung pro Zeiteinheit durch die Oberfläche des betrachteten Volumens (die Leistung)

$$\begin{aligned} P &= \oiint (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} \\ &= -\mu \iiint_V \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} dV - \kappa \iiint_V \vec{E}^2 dV \\ &= P_m + P_w \end{aligned} \quad (4.2)$$

Der erste Term der rechten Seite stellt den Anteil der Energieströmung dar, der in die magnetische Feldenergie geht, während der zweite Term den Anteil darstellt, der in Wärme umgewandelt wird. Das Zeitintegral liefert die entsprechenden Energiemengen. Die Terme sind negativ, weil die Energie in das Volumen hineinströmt.

4.1 Anregung in Form einer e-Funktion

a) Die Strömung in die magnetische Feldenergie:

Setzt man in die Gleichung

$$P_m = -\mu \iiint_V \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} dV \quad (4.3)$$

die magnetische Feldstärke nach Gl. (3.33) ein und wertet das Volumenintegral aus, so folgt

$$P_m(r, t) = -\mu I_0^2 w'^2 \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{J_0(k_3 R)} r^2 \pi l \left[\frac{2}{k_3 r} J_1(k_3 r) - \frac{e^{-\alpha t} (J_0^2(k_3 r) + J_1^2(k_3 r))}{J_0(k_3 R)} \right] \quad (4.4)$$

für $0 \leq r \leq R$

$0 \leq t < \infty$

(l = wirksame Säulenlänge)

Durch Integration über die Zeit ergibt sich die magnetische Feldenergie

$$\begin{aligned} W_m(r, t) &= \int_0^t P(t') dt' \\ &= -\mu I_0^2 w'^2 \frac{r^2 \pi l}{J_0(k_3 R)} \left[\frac{2}{k_3 r} J_1(k_3 r) (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{1}{2 J_0(k_3 R)} (J_0^2(k_3 r) + J_1^2(k_3 r)) \cdot (1 - e^{-2\alpha t}) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die magnetische Feldenergie des Gesamtvolumens erhält man mit $r = R$ und $t \rightarrow \infty$:

$$W_{mges} = -\mu I_0^2 w'^2 \frac{R^2 \pi l}{J_0(k_3 R)} \left[\frac{2}{k_3 R} J_1(k_3 R) - \frac{1}{2} \left(\frac{J_0(k_3 R)}{J_0(k_3 R)} + \frac{J_1^2(k_3 R)}{J_0(k_3 R)} \right) \right] \quad (4.6)$$

Der Einschwingvorgang wurde bei der Betrachtung vernachlässigt. Das ist zulässig für eine große Zeitkonstante $\tau = 1/\alpha$ des äußeren Kreises, d.h. es gilt $|\alpha| \ll |\rho_i|$ und damit $|k_3 R| \ll 1$. Es können also für die Besselfunktionen die Näherungen für kleine Argumente eingesetzt werden.

Nun ist:

$$\frac{2}{k_3 R} \cdot \frac{J_1(k_3 R)}{J_0(k_3 R)} \approx 1 + \frac{k_3^2 R^2}{8} \quad (4.7)$$

und

$$\frac{J_0^2(k_3 R) + J_1^2(k_3 R)}{J_0^2(k_3 R)} \approx 1 + \frac{k_3^2 R^2}{4} \quad (4.8)$$

Damit folgt die bekannte Gleichung für die magnetische Feldenergie unter Berücksichtigung, daß $H_0 = I_0 w'$ ist

$$W_{\text{mges}} = -\frac{1}{2} \mu H_0^2 R^2 \pi l \quad (4.9)$$

b) Die Stromwärmeverluste:

Setzt man in die Gleichung

$$P_w = -j\omega \iiint_V \vec{E}^2 dV \quad (4.10)$$

die elektrische Feldstärke nach Gl. (3.33) ein und führt die Integration über das Volumen aus, so folgt

$$P_w(r, t) = -\mu I_0^2 w'^2 \frac{\alpha e^{-2\alpha t}}{J_0^2(k_3 r)} r^2 \pi l \left[(J_0^2(k_3 r) + J_1^2(k_3 r)) - \frac{2}{k_3 r} J_0(k_3 r) \cdot J_1(k_3 r) \right] \quad (4.11)$$

für $0 \leq r \leq R$

$0 \leq t < \infty$

Durch Integration über die Zeit ergeben sich die Energieverluste durch Joulesche Wärmeentwicklung

$$W_w(r, t) = -\mu I_0^2 w'^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2 J_0^2(k_3 r)} r^2 \pi l \left[J_0^2(k_3 r) + J_1^2(k_3 r) - \frac{2}{k_3 r} J_0(k_3 r) \cdot J_1(k_3 r) \right] \quad (4.12)$$

Die gesamten Stromwärmeverluste erhält man mit $r = R$ und $t \rightarrow \infty$:

$$W_{\text{Wges}} = -\mu I_0^2 W'^2 \frac{R^2 \pi \ell}{2 J_0^2(k_3 R)} \left[J_0^2(k_3 R) + J_1^2(k_3 R) - \frac{2}{k_3 r} J_0(k_3 r) J_1(k_3 r) \right] \quad (4.13)$$

Setzt man für die Besselfunktionen wiederum die Näherungen für kleine Argumente ein, so folgt für die Stromwärme-Energie

$$W_{\text{Wges}} = -\frac{1}{2} \mu I_0^2 W'^2 R^2 \pi \ell \cdot \frac{k_3^2 R^2}{8}$$

oder

$$W_{\text{Wges}} = -\frac{1}{2} \mu I_0^2 W'^2 R^2 \pi \ell \cdot \beta \quad (4.14)$$

$$\text{mit } \beta = \frac{\mu \mathcal{H} \alpha R^2}{8}$$

Mit den Zahlenfaktoren

$$\begin{aligned} \mu &\approx \mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ Vs/Am} \\ \mathcal{H} &= 1.37 \times 10^6 \text{ A/Vm} \\ \alpha &= 1/\tau = 1/0.1 \text{ sec} = 10/\text{sec} \\ R &= 0.1 \text{ m} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\beta = 2.15 \times 10^{-2} \approx 2 \%$$

d.h. nur 2 % der gesamten Feldenergie wird bei einer Zeitkonstante $\tau = 100$ ms der e-Funktion in Wärme umgesetzt. Der Faktor $\alpha = 1/\tau$ steht linear in der Gleichung (4.14), so daß sich z.B. bei $\tau = 1$ sec ein $\beta \approx 0.2$ % ergeben würde.

c) Die gesamte eingestrahlte Energie:

Setzt man in die Gleichung

$$P = \oint (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} \quad (4.15)$$

die elektrische und magnetische Feldstärke nach Gl. (3.33) ein und führt die Integration über die Oberfläche aus, so folgt:

$$P(r,t) = - I_0^2 W'^2 \frac{k_3}{\alpha \mu} \cdot \frac{J_1(k_3 r)}{J_0(k_3 R)} \cdot 2\pi r \ell \cdot e^{-\alpha t} \left(1 - \frac{J_0(k_3 r)}{J_0(k_3 R)} e^{-\alpha t} \right) \quad (4.16)$$

Durch Integration über die Zeit ergibt sich die durch die Oberfläche mit dem Radius r strömende Energie

$$W(r,t) = - I_0^2 W'^2 \frac{k_3}{\alpha \mu} \cdot \frac{J_1(k_3 r)}{J_0(k_3 R)} \cdot 2\pi r \ell \cdot \left(1 - e^{-\alpha t} - \frac{J_0(k_3 r)}{2 J_0(k_3 R)} (1 - e^{-2\alpha t}) \right) \quad (4.17)$$

Die gesamte durch die Oberfläche mit dem Radius R strömende Energie erhält man mit $r = R$ und $t \rightarrow \infty$:

$$W_{\text{ges}} = - I_0^2 W'^2 \frac{k_3}{\alpha \mu} \cdot \frac{J_1(k_3 R)}{J_0(k_3 R)} \pi R \ell \quad (4.18)$$

Setzt man für die Besselfunktionen wiederum die Näherungen für kleine Argumente ein, so folgt

$$W_{\text{ges}} = - \frac{1}{2} \mu I_0^2 W'^2 R^2 \pi \ell \cdot \left(1 + \frac{k_3^2 R^2}{8} \right)$$

oder

$$W_{\text{ges}} = - \frac{1}{2} \mu I_0^2 W'^2 R^2 \pi \ell \cdot (1 + \beta) \quad (4.19)$$

Das Vorzeichen der Gesamtenergie ist negativ, weil sie in negative r -Richtungen (in das Volumen hinein) strömt.

Vergleicht man Gl. (4.18) mit Gl. (4.6) und (4.13), so ergibt sich die Energiebilanz

$$W_{ges} = W_{mges} + W_{Wges} \quad (4.20)$$

4.2 Zeitlich sinusförmige Anregung

Hat der anregende Strom einen zeitlich sinusförmigen Verlauf, so bedient man sich zweckmäßigerweise der komplexen Rechnung und macht entsprechend Gl. (3.19) den Ansatz: $I \sim e^{j\omega t}$. Dann haben die Feldgrößen komplexe Amplituden, die mit dem Drehoperator $e^{j\omega t}$ multipliziert werden. In den Gl. (3.23) sind die Feldgrößen dargestellt. Die durch die Flächeneinheit strömende mittlere Leistung ist nun /3/

$$\vec{P}' = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (4.21)$$

Hier ist \vec{H}^* der konjugiert komplexe Wert von \vec{H} .

Die durch die gesamte Oberfläche des betrachteten Volumens strömende mittlere Leistung ist entsprechend Gl. (4.2)

$$\begin{aligned} P &= \oint \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{A} \\ &= -\frac{1}{2} \mu \iiint_V \vec{E} \vec{E}^* dV - j \frac{1}{2} \omega \mu \iiint_V \vec{H} \vec{H}^* dV \\ &= P_W + j P_b \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Scheinleistung P wird also, wie in der Wechselstromtechnik üblich, in die Wirkleistung P_W und die Blindleistung P_b aufgeteilt. Die Wirkleistung entspricht der in der Zeiteinheit in Wärme umgesetzten Energie in der Säule. Die Blindleistung charakterisiert die Amplitude der im Magnetfeld der Säule gespeicherten Energie. Die Magnetfeldenergie pendelt im Rythmus der Frequenz des Wechselstromes durch die Säulenoberfläche.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 P_W &= -\frac{1}{2} \epsilon \iiint_V |\vec{E}|^2 dV \\
 P_B &= -\frac{1}{2} \omega \mu \iiint_V |\vec{H}|^2 dV
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Für die Ermittlung von Wirk- und Blindleistung ist es nicht notwendig, die Volumenintegrale nach Gl. (4.23) auszuwerten. Es genügt, das Oberflächenintegral nach Gl. (4.22) zu betrachten und erhält die Scheinleistung, deren Realteil die Wirkleistung und deren Imaginärteil die Blindleistung darstellt.

Die durch die Oberfläche mit dem Radius r strömende Scheinleistung ist also

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \oiint E_\varphi H_z^* dA \\
 &= |I|^2 W'^2 \frac{k_2}{\epsilon} \cdot \frac{J_0(k_2 r)^* J_1(k_2 r)}{|J_0(k_2 R)|^2} \pi r l
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Die Aufteilung in Wirk- und Blindleistung lautet

$$\begin{aligned}
 P_W &= |I|^2 W'^2 \frac{\pi r l}{\epsilon} \operatorname{Re} \left(\frac{k_2 J_0(k_2 r)^* J_1(k_2 r)}{|J_0(k_2 R)|^2} \right) \\
 P_B &= |I|^2 W'^2 \frac{\pi r l}{\epsilon} \operatorname{Im} \left(\frac{k_2 J_0(k_2 r)^* J_1(k_2 r)}{|J_0(k_2 R)|^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

mit
$$k_2 = \sqrt{-j\omega\mu\epsilon'} = \frac{-1+j}{\delta}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\epsilon'}}$$

Die im Gesamtvolumen mit dem Radius $r = R$ umgesetzte Wirk- und Blindleistung ist

$$P_{Wges} = |I|^2 W'^2 \frac{\pi R \ell}{\mu} \operatorname{Re} \left(\frac{k_2 J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)} \right)$$

$$P_{bges} = |I|^2 W'^2 \frac{\pi R \ell}{\mu} \operatorname{Im} \left(\frac{k_2 J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)} \right) \quad (4.26)$$

Für tiefe und hohe Frequenzen können für die Besselfunktionen wiederum die Näherungsformeln verwendet werden. Es gilt:

a) für tiefe Frequenzen

$$\frac{k_2 J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)} = -\frac{R}{\delta^2} \left(\frac{R^2}{4\delta^2} + j \right)$$

$$= -\frac{\omega \mu \mu_0 R}{2} \left(\frac{\omega \mu \mu_0 R^2}{8} + j \right)$$

Damit folgt für die Wirkleistung

$$P_{Wges} = -|I|^2 W'^2 \frac{\pi \ell}{16} \cdot \omega^2 \mu^2 \mu_0 R^4 \quad (4.27)$$

d.h. für tiefe Frequenzen wächst die eingestrahlte Wirkleistung mit dem Quadrat der Frequenz. Bei Gleichstrom ist die eingestrahlte Wirkleistung $P_w = 0$. Die Leistung hat ein negatives Vorzeichen, weil sie in die Säule hineinfließt (negative r-Richtung).

Für die Blindleistung ergibt sich

$$P_{bges} = -|I|^2 W'^2 \frac{\pi \ell}{2} \cdot \omega \mu R^2 \quad (4.28)$$

Die Blindleistung ist für tiefe Frequenzen unabhängig von der Leitfähigkeit der Säule.

b) für hohe Frequenzen

$$\frac{k_2 J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)} = j k_2 = \frac{-1-j}{\delta} = (-1-j) \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0}{2}}$$

Damit folgt für die Wirkleistung:

$$P_{Wges} = -|I|^2 W'^2 \pi R \ell \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0}{2}} \quad (4.29)$$

d.h. für hohe Frequenzen steigt die eingestrahelte Wirkleistung mit der Wurzel aus der Frequenz an.

Für die Blindleistung gilt dieselbe Gleichung

$$P_{\text{ges}} = -|I|^2 W^2 \pi R l \sqrt{\frac{\omega \mu'}{2 \kappa}} \quad (4.30)$$

c) Grenzbetrachtung für eine sehr kleine und sehr große Leitfähigkeit κ : Für $\kappa \rightarrow 0$ gilt die gleiche Näherungsformel wie für tiefe Frequenzen. Die entsprechende Gl. (4.27) zeigt, daß die eingestrahelte Wirkleistung linear mit der Leitfähigkeit κ gegen Null geht. Die Blindleistung ist nach Gl. (4.28) unabhängig von der Leitfähigkeit der Säule und hat auch für $\kappa = 0$ einen endlichen Wert.

Für $\kappa \rightarrow \infty$ gelten die Näherungsformeln nach Gl. (4.29) und Gl. (4.30). Die Wirk- und Blindleistung nimmt mit $1/\sqrt{\kappa}$ ab. Für eine sehr hohe Leitfähigkeit geht die Wirk- und die Blindleistung gegen Null, weil die Felder nicht in die Säule eindringen.

5. Der Temperaturhub

Aufgrund des Wirbelstromfeldes wird in der Säule die im vorhergehenden Kapitel ermittelte Wärmemenge umgesetzt. Das führt zu einer Temperaturerhöhung in der Säule. Geht man von einer adiabatischen Wärmeentwicklung aus, so gilt für ein bestimmtes Volumen

$$W_w = \rho c \iiint_V \vartheta(V) dV \quad (5.1)$$

Dabei ist ρ die Dichte, c die spezifische Wärme des Materials und $\vartheta(V)$ der Temperaturhub in einem Volumenelement.

Ist l die Länge der Säule und r der Radius eines Volumenelements, so lautet Gl. (5.1).

$$W_w(r) = \rho c 2\pi l \int_0^r \vartheta(r') r' dr' \quad (5.2)$$

Durch Differentiation nach r und Umstellen erhält man die Gleichung für den Temperaturhub

$$\vartheta(r) = \frac{1}{\rho c 2\pi r l} \cdot \frac{dW_w(r)}{dr} \quad (5.3)$$

5.1 Anregung in Form einer e-Funktion

Hat der anregende Stromverlauf die Form einer e-Funktion, so ist die induzierte Wärmemenge in Gl. (4.12) gegeben mit

$$W_w(r, t) = | -\mu I_0^2 W'^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2 \mathcal{J}_0^2(k_3 R)} r^2 \pi l [\mathcal{J}_0^2(k_3 r) + \mathcal{J}_1^2(k_3 r) - \frac{2}{k_3 r} \mathcal{J}_0(k_3 r) \mathcal{J}_1(k_3 r)] | \quad (5.4)$$

Die Differentiation nach dem Radius ergibt

$$\frac{dW_w(r, t)}{dr} = \mu I_0^2 W'^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{\mathcal{J}_0^2(k_3 R)} r \pi l \mathcal{J}_1^2(k_3 r) \quad (5.5)$$

Der Temperaturhub lautet

$$\mathcal{J}(r, t) = \mu I_0^2 W'^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\gamma c \mathcal{J}_0^2(k_3 R)} \mathcal{J}_1^2(k_3 r) \quad (5.6)$$

mit

$$k_3 = \sqrt{\mu \kappa \alpha'}$$

Wegen $|k_3 R| \ll 1$ können für die Besselfunktion die Näherungsformeln für kleine Argumente verwendet werden.

Es gilt:

$$\frac{\mathcal{J}_1^2(k_3 r)}{\mathcal{J}_0^2(k_3 R)} \approx \frac{k_3^2 r^2}{4} \left(1 + \frac{k_3^2}{4} (2R^2 - r^2)\right) \approx \frac{\mu \kappa \alpha' r^2}{4} \quad (5.7)$$

Der Temperaturhub lautet also näherungsweise

$$\mathcal{J}(r, t) = \mu^2 I_0^2 W'^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{8\gamma c} \cdot \mu \kappa \alpha' r^2 \quad (5.8)$$

Für den Rand $r = R$ folgt für $t \rightarrow \infty$ die maximale Temperaturerhöhung

$$\mathcal{J}(R) = \mu^2 I_0^2 W'^2 \frac{\mu \kappa \alpha' R^2}{8\gamma c} \quad (5.9)$$

Die Temperatur steigt also quadratisch mit dem Radius an.

5.2 Zeitlich sinusförmige Anregung

Ist der anregende Stromverlauf sinusförmig, so ist die umgesetzte Wärmemenge das Zeitintegral über die Wirkleistung nach Gl. (4.25)

$$\begin{aligned} W_w(r, f) &= \int_0^t |P_w| dt' \\ &= |I|^2 W'^2 \frac{\pi r l t}{\kappa} \operatorname{Re} \left(\frac{k_2 \mathcal{J}_0(k_2 r) \mathcal{J}_1^*(k_2 r)}{|\mathcal{J}_0(k_2 R)|} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Differentiation nach dem Radius ergibt

$$\frac{dW(r, f)}{dr} = |I|^2 W'^2 \mu \pi r l \omega t \frac{|\mathcal{J}_1(k_2 r)|^2}{|\mathcal{J}_0(k_2 R)|^2} \quad (5.11)$$

Der Temperaturhub folgt mit

$$\vartheta(r, f) = \mu |I|^2 w'^2 \frac{\omega t |J_1(k_2 r)|^2}{2\gamma c |J_0(k_2 R)|^2} \quad (5.12)$$

Für $|k_2 R| \ll 1$ lautet die Näherungsformel

$$\vartheta(r, f) = \mu^2 |I|^2 w'^2 \frac{\omega^2 t \mu r^2}{8\gamma c} \quad (5.13)$$

Für $|k_2 R| \gg 1$ lautet die Näherungsformel

$$\vartheta(r, f) = \mu |I|^2 w'^2 \frac{\omega t}{2\gamma c} \frac{R}{r} \cdot e^{-\sqrt{2\omega\mu\kappa'}(R-r)} \quad (5.14)$$

Für den Rand $r = R$ ergibt sich für hohe Frequenzen oder für eine sehr große Leitfähigkeit die Temperaturerhöhung

$$\vartheta(R, f) = \mu |I|^2 w'^2 \frac{\omega t}{2\gamma c} \quad (5.15)$$

Der Temperaturhub am Rande ist also in diesem Fall unabhängig von der Leitfähigkeit des Materials und vom Radius R der Säule.

6. Die Impedanz der Säule

Bei zeitlich sinusförmiger Anregung kann aus den Feldgrößen die Impedanz der Säule berechnet werden. Die gesamte eingestrahlte Scheinleistung in den Zylinder von der Länge l und dem Radius R ist nach Gl. (4.26):

$$P = |I|^2 w'^2 \frac{k_2 \pi R l}{\mu} \cdot \frac{J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)} \quad (6.1)$$

Andererseits gilt für die Scheinleistung, wenn Z_S die Impedanz der Säule ist

$$P = -\frac{1}{2} |I|^2 (w' l)^2 Z_S \quad (6.2)$$

Diese Gleichung kann folgendermaßen gedeutet werden:

Die zentrale Säule bildet eine zweite Sekundärwicklung des OH-Trafos (Plasma erste Sekundärwicklung). Die Impedanz Z_S wird mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}^2 = (w' l)^2$ transformiert.

Zu beachten ist, daß in

$$Z_S = R_S(f) + j\omega L_S(f) \quad (6.3)$$

sowohl der ohmsche als auch der induktive Anteil frequenzabhängig sind, denn es gilt, wenn man Gl. (6.1) mit Gl. (6.2) vergleicht

$$Z_S = -\frac{2\pi R}{\mu l} \cdot k_2 \cdot \frac{J_1(k_2 R)}{J_0(k_2 R)} \quad (6.4)$$

mit

$$k_2 = \sqrt{-j\omega\mu\epsilon} = \frac{-1+j}{\delta}$$

und

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\epsilon}}$$

Die Impedanz der Säule lautet für tiefe Frequenzen und für kleine Leitfähigkeiten

$$Z_S = \frac{\omega\mu\pi R^2}{l} \left(\frac{1}{8} \omega\mu\epsilon R^2 + j \right) \quad (6.5)$$

Also gilt:

$$R_s = \frac{\omega^2 \mu^2 \pi R^4}{8l} \quad (6.6.)$$

$$L_s = \frac{\mu \pi R^2}{l} \quad (6.7)$$

Der ohmsche Widerstand geht bei tiefen Frequenzen und kleinen Leitfähigkeiten gegen Null. Die innere Induktivität der Säule ist dagegen unabhängig von der Frequenz und der Leitfähigkeit des Materials.

Für hohe Frequenzen und große Leitfähigkeiten gilt

$$Z_s = \frac{\pi R}{l} \sqrt{\frac{2\omega\mu}{\sigma}} (1+j) \quad (6.8)$$

Damit folgt

$$R_s = \omega L_s = \frac{\pi R}{l} \sqrt{\frac{2\omega\mu}{\sigma}} \quad (6.9)$$

$$L_s = \frac{\pi R}{l} \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\sigma}} \quad (6.10)$$

Der ohmsche und der induktive Widerstand der Säule haben für hohe Frequenzen und große Leitfähigkeiten den gleichen Wert. Sie nehmen zu mit der Wurzel aus der Frequenz und gehen mit der Wurzel aus der Leitfähigkeit gegen Null.

Die Gl. (6.8) stimmt überein mit der entsprechenden Gleichung in /3/, Seite 126.

7. Das Ersatzschaltbild des OH-Kreises

Der OH-Kreis kann als Transformator mit zwei Sekundärwicklungen aufgefaßt werden. Das Plasma bildet die erste Sekundärwicklung; es stellt eine einwindige Spule dar. Die zentrale Säule bildet die zweite Wicklung des OH-Trafos. Die Wirkung der Gefäßwand wird bei dieser Betrachtung zunächst vernachlässigt.

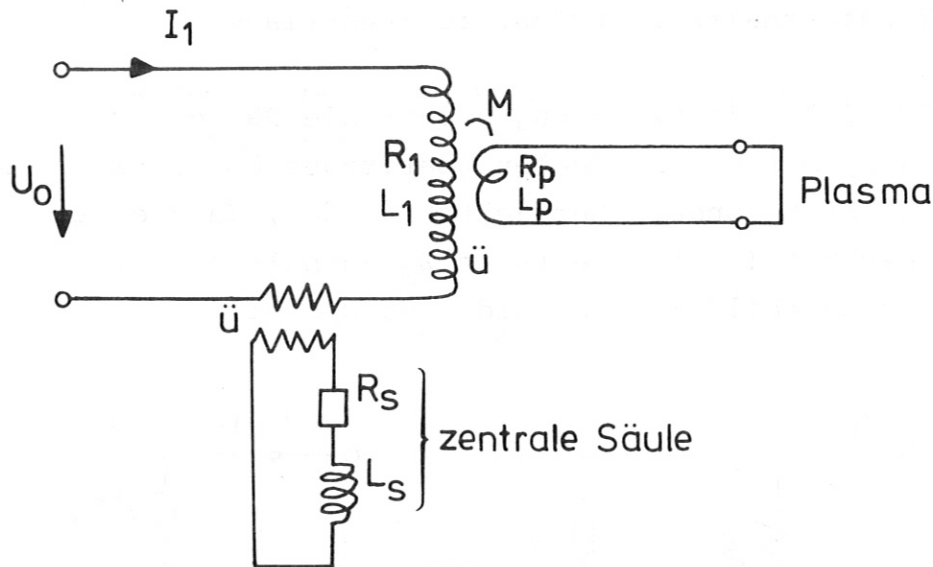


Bild 3: OH-Kreis

Bei zeitlich sinusförmiger Anregung kann aus dem Schaltbild des OH-Kreises ein Ersatzschaltbild abgeleitet werden. Dabei wird zunächst die Primärwicklung und die erste Sekundärwicklung (Plasma) betrachtet. Die Elemente dieser Ersatzschaltung sind komplexe Widerstände. Man bildet die Z-Matrix des verlustfreien Trafos, die den Zusammenhang zwischen den Spannungs- und den Stromwerten beschreibt. Die Z-Matrix wird in eine A-Matrix transformiert, die wiederum aufgespalten werden kann in eine A-Matrix des idealen Übertragers mit dem Übersetzungsverhältnis \ddot{u} und in eine A-Matrix des streuungsbehafteten Vierpols /4/. Die Kettenschaltung beider Vierpole ist die Ersatzschaltung des streuungsbehafteten, verlustfreien Trafos. Durch Einfügen der ohmschen Widerstände der Primär- und Sekundärwicklung erhält man die Ersatzschaltung des verlustbehafteten Trafos.

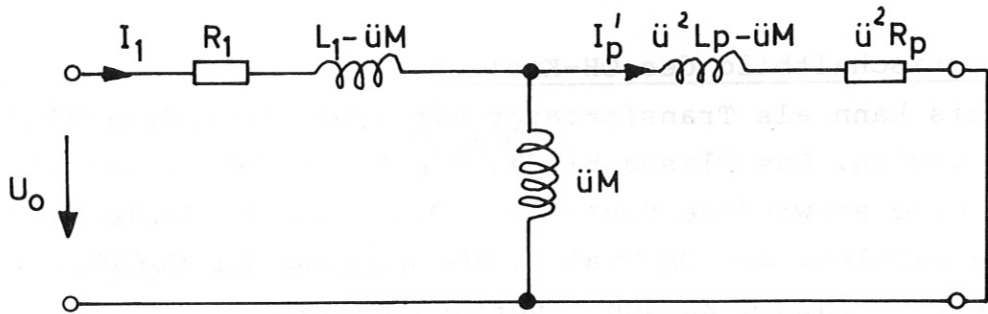


Bild 4: Ersatzschaltbild Primärwicklung-Plasma

Bei dem "Trafo" Primärwicklung - zentrale Säule wird der komplexe Widerstand Z_S mit einem idealen Übertrager übersetzt. Die Streuung muß hier nicht besonders betrachtet werden, da sie nach der Definitionsgleichung (6.2) bereits in Z_S enthalten ist. Das Ersatzschaltbild ist in Bild 5 dargestellt.

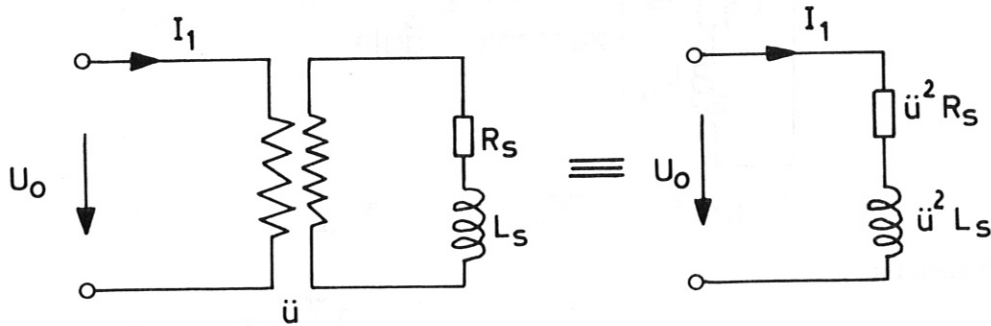


Bild 5: Ersatzschaltbild Primärwicklung - zentrale Säule

Die Zusammenschaltung von Bild 4 und Bild 5 ergibt die Gesamtschaltung des OH-Kreises.

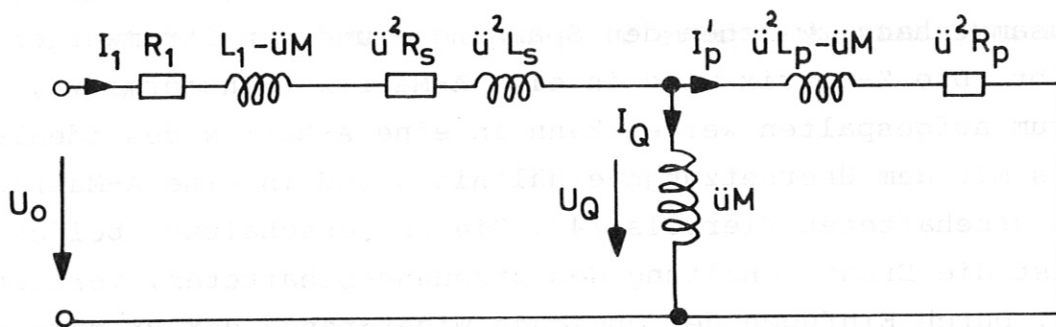


Bild 6: Gesamtschaltung des OH-Kreises

Die Plasmaringspannung ist definiert mit

$$U_p = I_p \cdot (R_p + j\omega L_p) \quad (7.1)$$

Dabei ist I_p der Plasmastrom

$$I_p = \ddot{u} \cdot I_p' \quad (7.2)$$

und \ddot{u} das Übersetzungsverhältnis, das hier gleich der Windungszahl des OH-Trafos ist, weil die Sekundärwicklung einwindig ist

$$\ddot{u} = w' \ell \quad (7.3)$$

Die übersetzte Plasmaringspannung U_p' ist

$$U_p' = \ddot{u} \cdot U_p \quad (7.4)$$

Einsetzen von Gl. (7.1) und Gl. (7.2) in Gl. (7.4) ergibt

$$U_p' = I_p' \ddot{u}^2 (R_p + j\omega L_p) \quad (7.5)$$

Andererseits gilt (siehe Bild 6):

$$\begin{aligned} \frac{I_p'}{I_1} &= \frac{j\omega \ddot{u} M \cdot \frac{j\omega(\ddot{u}^2 L_p - \ddot{u} M) + \ddot{u}^2 R_p}{j\omega \ddot{u} M + j\omega(\ddot{u}^2 L_p - \ddot{u} M) + \ddot{u}^2 R_p}}{j\omega(\ddot{u}^2 L_p - \ddot{u} M) + \ddot{u}^2 R_p} \\ &= \frac{j\omega \ddot{u} M}{j\omega \ddot{u}^2 L_p + \ddot{u}^2 R_p} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Einsetzen von Gl. (7.6) in Gl. (7.5) liefert

$$\begin{aligned} U_p' &= I_1 j\omega \ddot{u} M \\ \text{und } U_p &= I_1 j\omega M \end{aligned} \quad (7.7)$$

Nach Bild 6 gilt ferner:

$$U_0 = I_1 (R_1 + j\omega(L_1 - \ddot{u}M) + \ddot{u}^2(R_s + j\omega L_s)) + U_Q \quad (7.8)$$

mit $U_Q = I_Q j\omega \ddot{u} M$

$$I_Q = I_1 - I_p'$$

Unter Verwendung von Gl. (7.6) folgt

$$U_Q = I_1 j\omega \ddot{u} M \left(1 - \frac{j\omega M}{\ddot{u}(R_p + j\omega L_p)} \right) \quad (7.9)$$

Es seinun

$$M \ll \ddot{u} L_p \quad (7.10)$$

Dann folgt nach Gl. (7.6) und (7.8)

$$I_p' \ll I_1, \quad I_Q \approx I_1$$

und es gilt

$$U_Q \approx U_p' = I_1 j\omega \ddot{u} M \quad (7.11)$$

Mit $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$
 $Z_s = R_s + j\omega L_s$

folgt für Gl. (7.8)

$$U_0 \approx I_1 (Z_1 + \ddot{u}^2 Z_s) \quad (7.12)$$

Das Verhältnis der Plasmaringspannung zur Eingangsspannung U_0 des OH-Trafo ist

$$\frac{U_p}{U_0} = \frac{j\omega M}{Z_1 + \ddot{u}^2 Z_s} \quad (7.13)$$

Ohne zentrale Säule wäre dieses Verhältnis

$$\frac{U_{p0}}{U_0} = \frac{j\omega M}{Z_1}, \quad (7.14)$$

so daß sich die Schwächung der Plasmaringspannung durch die zentrale Säule ergibt mit

$$\boxed{\frac{U_p}{U_{p0}} = \frac{Z_1}{Z_1 + \ddot{u}^2 Z_s}} \quad (7.15)$$

Die umgesetzte Wirkleistung in der Säule ist nach Gl. (6.2) und Gl. (4.26)

$$|P_w| = \frac{1}{2} |I|^2 \ddot{u}^2 R_s$$

Einsetzen von (Gl. (7.12)) ergibt

$$\begin{aligned} |P_w| &= \frac{1}{2} |U_0|^2 \frac{\ddot{u}^2 R_s}{|Z_1 + \ddot{u}^2 Z_s|^2} \\ &= \frac{1}{2} |U_0|^2 \frac{\ddot{u}^2 R_s}{(R_1 + \ddot{u}^2 R_s)^2 + \omega^2 (L_1 + \ddot{u}^2 L_s)^2} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Die Wirkleistung nach Gl. (7.16) hat bei konstanter Eingangsspannung für eine bestimmte Frequenz f_G ein Maximum, da R_s für kleine Frequenzen mit dem Quadrat von ω und für hohe Frequenzen mit der Wurzel aus ω steigt (siehe Gl. (6.6) und (6.9)). Für diese Frequenz f_G ist die Schwächung der Plasmaringspannung durch die zentrale Säule nach Gl. (7.15) maximal.

Bei der Berechnung der Plasmaringspannung sind zusätzlich die Wirbelstromverluste im Gefäß zu berücksichtigen. Diese spielen vor allem bei höheren Frequenzen eine Rolle. Die Verluste im Gefäß sollen hier durch eine einfache Abschätzung bestimmt werden.

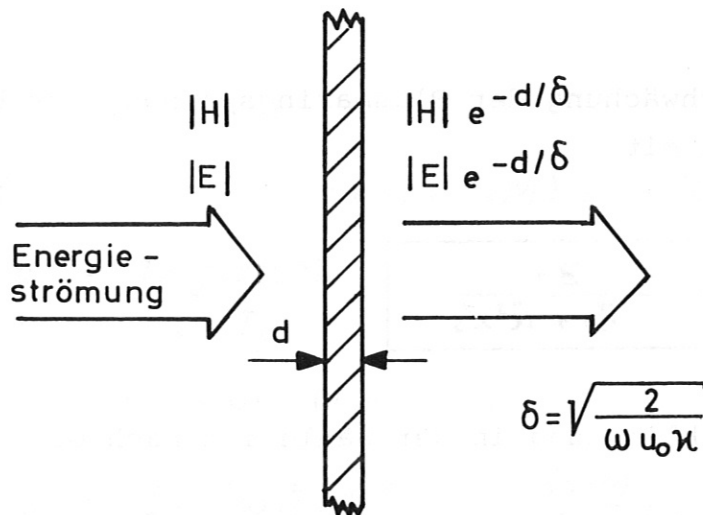


Bild 7: Zur Abschätzung der Verluste im Gefäß

Das Gefäß wird durch eine unendlich ausgedehnte Platte der Dicke d approximiert. Die Feldstärken sowie die Plasmaringspannung werden mit

$$a = e^{-d/\delta} \tag{7.17}$$

abgeschwächt. Dabei ist δ die Eindringtiefe nach Gl. (3.23).
Mit den Zahlenwerten:

$$d = 15 \text{ mm}$$

$$\kappa = 1.37 \times 10^6 \text{ A/Vm}$$

$$\mu \approx \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^7 \text{ Vs/Am}$$

ergibt sich für

$$f = 50 \text{ Hz:}$$

$$e^{-d/\delta} = 0.79$$

$$f = 300 \text{ Hz:}$$

$$e^{-d/\delta} = 0.55$$

d.h. für $f = 50 \text{ Hz}$ beträgt die Abschwächung der Plasmaringspannung 21 % und für $f = 300 \text{ Hz}$ beträgt sie 45 %.

8. Ergebnisse der Berechnungen

8.1 Anregung in Form einer e-Funktion

Für die Säule sind folgende Größen gegeben:

$$\begin{aligned} \mu &\approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} \\ \mathcal{H} &= 1.37 \times 10^6 \text{ A/Vm} \\ \gamma &= 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ c &= 4.60 \times 10^2 \text{ Ws/kg K} \\ R &= 0.1 \text{ m} \\ l &= 3 \text{ m} \\ w' &= 170/\text{m} \end{aligned}$$

Es fließe nun durch den OH-Trafo ein Strom mit dem zeitlichen Verlauf

$$I(t) = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

und den Werten

$$\begin{aligned} I_0 &= 47 \text{ kA} \\ \tau &= 0.11 \text{ sec} \end{aligned}$$

Dieser Stromverlauf repräsentiert den Strom im OH-Trafo im DN-Betrieb hinsichtlich der Wirbelstromverluste in der Säule, wie später gezeigt wird. In Fig. 1 ist der Stromverlauf dargestellt.

Berechnung von Kennwerten:

Der Reziprokwert von p_i nach Gl. (3.13) stellt die Eigenzeitkonstante der Säule dar. Mit $j_{01} = 2.4$ ergibt sich der erste Wert

$$\begin{aligned} \tau_{s1} &= \frac{1}{|p_1|} = \frac{\mu_0 \mathcal{H} R^2}{j_{01}^2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.37 \cdot 10^6 \cdot 0.1^2}{2.4^2} \\ \tau_{s1} &= 3 \text{ ms} \end{aligned}$$

Da $\tau = 110 \text{ ms}$ ist, gilt entspr. Gl. (3.33)

$$\tau \gg \tau_{s1} \longrightarrow \alpha = 1/\tau \ll |p_i|$$

Für $k_3 R$ nach Gl. (3.32) ergibt sich

$$k_3 R = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \alpha} R = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,37 \cdot 10^6}{0,11}} \cdot 0,1$$

$$\underline{k_3 R = 0,395}$$

Für β nach Gl. (4.14) ergibt sich

$$\beta = \frac{k_3^2 R^2}{8} = \frac{0,395^2}{8}$$

$$\underline{\beta \approx 0,02}$$

d.h. ~ 2 % der gesamten Feldenergie wird bei der Zeitkonstante $\tau = 110$ ms der e-Funktion in Wärme umgesetzt.

In Fig. 2 ist die Verteilungsfunktion für die Magnetfeld-Energie nach Gl. (4.5) dargestellt. Der Maximalwert für $r = R = 0,1$ m und $t = 0,4$ s beträgt 3.58 MJ.

In Fig. 3 ist die Verteilungsfunktion für die Stromwärme-Energie nach Gl. (4.12) dargestellt. Der Maximalwert für $r = R = 0,1$ m und $t = 0,4$ s beträgt 77.9 kJ.

In Fig. 4 ist die Verteilungsfunktion für den Temperaturhub nach Gl. (5.6) dargestellt. Der Maximalwert auf dem Rand für $t = 0,4$ s beträgt 0.43 K.

Die Fig. 2 - 4 stellen zweidimensionale Funktionen dar mit den beiden Veränderlichen r und t . Die gleichen Funktionen werden in den Fig. 5 - 9 als eindimensionale Funktionen dargestellt und zwar zunächst in Abhängigkeit von der Zeit t für den Radius $r = R$ und dann in Abhängigkeit vom Radius r mit t als Parameter.

In Fig. 5 ist die Energiebilanz über der Zeit aufgetragen. Die Kurve mit dem Index W stellt die Wärmeenergie, die mit dem Index M die Magnetfeldenergie und die mit dem Index T die Gesamtenergie dar. Es ist deutlich sichtbar, daß 98 % der Gesamtenergie ins Magnetfeld gehen.

In Fig. 6 ist die zeitliche Entwicklung des Temperaturhubs auf den Rand ($r = R$) dargestellt. Über 85 % des Temperaturanstiegs geschieht in den ersten 100 Millisekunden.

Die Fig. 7 - 9 stellen Verteilungsfunktionen über dem Radius r der zentralen Säule für 4 verschiedene Zeitpunkte dar. Fig. 7 zeigt die integrale Magnetfeld-Energie. Deutlich ist der Anstieg mit r^2 zu erkennen. Da jedoch auch das Säulenvolumen mit r^2 ansteigt, ergibt sich eine gleichmäßige Energieverteilung des Magnetfeldes in der Säule für $t \rightarrow \infty$. Die Energiedichte ist dann

$$w_m = \frac{1}{2} \mu I_0^2 w'^2 = \frac{1}{2} 4 \pi 10^{-7} (47 \cdot 10^3)^2 \cdot 170^2$$

$$\underline{w_m = 40.1 \text{ MJ/m}^3}$$

Das wirksame Säulenvolumen ist

$$V = R^2 \pi l = 0.1^2 \pi 3$$

$$\underline{V = 0.094 \text{ m}^3}$$

Die gesamte Magnetfeldenergie für $t \rightarrow \infty$ ergibt sich also mit

$$W_{mges} = w_m \cdot V = 40.1 \cdot 0.094$$

$$\underline{W_{mges} = 3.78 \text{ MJ}}$$

Wie die Kurve 4 in Fig. 7 zeigt, ist für $t = 0.4 \text{ s}$ bereits 97 % der Gesamtenergie des Magnetfeldes erreicht.

Fig. 8 zeigt die integrale Stromwärme-Energie. Der Anstieg erfolgt mit r^4 , d.h. die Energie wird hauptsächlich am Rande der Säule umgesetzt. Deshalb steigt der Temperaturhub zum Rand hin an, wie Fig. 9 zeigt. Der Anstieg des Temperaturhubs erfolgt mit r^2 , da das Volumen ebenfalls mit r^2 zunimmt. Der Temperaturhub nach Fig. 9 bezieht sich auf das jeweilige Volumenelement mit dem Radius r .

Es werde nun der Stromverlauf im OH-Trafo betrachtet, wie er für den DN-Betrieb vorgesehen ist. In Fig. 10 ist dieser Stromverlauf dargestellt. Durch Regelung der Spannungsquellen wird erreicht, daß der Stromverlauf in vielen Zeitabschnitten linear ist. Der Stromverlauf kann in den einzelnen Zeitabschnitten durch eine e-Funktion mit einem passenden Strommaximalwert I_0 und einer entsprechenden Zeitkonstante τ approximiert werden. Die zugehörige Wärmeenergie und der Temperaturhub können mit den genannten Formeln berechnet werden. Durch Summation der Werte in den einzelnen Zeitbereichen erhält man den gesamten Verlauf über der Zeit. In Fig. 10 ist die Wärmemenge W_w und der Temperaturhub ΔT in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Die Gesamtwärmemenge beträgt ~ 78 kJ und der Temperaturhub beträgt ~ 0.43 K. Diese Werte entsprechen jenen, die sich aus dem e-funktionsförmigen Stromverlauf nach Fig. 1 ergeben.

8.2 Zeitlich sinusförmige Anregung

Für die Säule gelten die in 8.1. genannten Größen. Zusätzlich gilt für die Wicklung des OH-Trafos und für die Verkettung mit dem Plasma:

$$\begin{aligned}R_1 &= 32 \text{ m}\Omega \\L_1 &= 61 \text{ mH} \\M &= 67 \text{ }\mu\text{H} \\L_p &= 1.5 \text{ }\mu\text{H} \\ü &= w'l = 510\end{aligned}$$

Für die Reinigungsentladung wird eine Plasmaringspannung von etwa $U_p = 10$ V benötigt.

Die Wirbelstromverluste in der Säule sollen möglichst gering sein. Das impliziert nach Gl. (7.16), eine möglichst hohe Frequenz zu wählen. Andererseits steigen mit der Frequenz die Verluste im Gefäß nach Gl. (7.17), so daß die Eingangsspannung des OH-Trafos mit der Erhöhung der Frequenz gesteigert werden muß. Eine Abschätzung der Eingangsspannung erhält man mit Gl. (7.14) in Verbindung mit Gl. (7.17).

Will man eine Plasmaringspannung von $U_p = 10 \text{ V}$ erreichen, so ergibt sich für die Eingangsspannung des OH-Trafos

$$\begin{aligned} f = 50 \text{ Hz:} & \quad |U_0| = 12 \text{ kV} \\ f = 300 \text{ Hz:} & \quad |U_0| = 18 \text{ kV} \end{aligned}$$

Den folgenden Berechnungen liegen diese Werte für die Eingangsspannung zugrunde.

Die Impedanz der Säule ergibt sich, wenn man Gl. (6.8) für hohe Frequenzen zugrunde legt, zu

$$\begin{aligned} f = 50 \text{ Hz:} & \quad Z_S \approx 2.5 (1 + j) \mu\Omega \\ f = 300 \text{ Hz:} & \quad Z_S \approx 6.15 (1 + j) \mu\Omega \end{aligned}$$

Die Eingangsimpedanz des OH-Trafos $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ ist

$$\begin{aligned} f = 50 \text{ Hz:} & \quad Z_1 = 0.032 + j19.16 \Omega \\ f = 300 \text{ Hz:} & \quad Z_1 = 0.032 + j114.96 \Omega \end{aligned}$$

Überprüfung der Ungleichung (7.10):

$$\begin{aligned} \text{Es ist } M &= 67 \mu\text{H} \\ \ddot{u}L_p &= 765 \mu\text{H} \end{aligned}$$

Also gilt

$$M \ll \ddot{u}L_p$$

Die Schwächung der Plasmaringspannung durch die zentrale Säule ergibt sich mit Gl. (7.15)

$$\begin{aligned} f = 50 \text{ Hz:} & \quad |U_p/U_{p0}| \approx 0.967 \\ f = 300 \text{ Hz:} & \quad |U_p/U_{p0}| \approx 0.986 \end{aligned}$$

Die Plasmaringspannung wird durch die Anwesenheit der zentralen Säule nur geringfügig geschwächt!

Der Temperaturhub pro Zeiteinheit folgt aus Gl. (5.15) mit

$$f = 50 \text{ Hz:} \quad \dot{\theta}(R)/t \approx 0.65 \text{ K/s}$$

$$f = 300 \text{ Hz:} \quad \dot{\theta}(R)/t \approx 0.22 \text{ K/s}$$

Da ein Temperaturhub von 0.65 K/sec nicht tolerabel erscheint, muß man zu einer höheren Frequenz als 50 Hz übergehen. Damit verbunden ist die Wahl einer höheren Eingangsspannung des OH-Trafos wegen der steigenden Verluste im Gefäß. Im folgenden wird $U_0 = 18 \text{ kV}$ zugrunde gelegt.

Die Fig. 11 - 13 stellen zweidimensionale Funktionen dar mit den beiden Variablen f (Frequenz) und r (Radius). Diese Funktionen werden in den Fig. 14 - 18 als eindimensionale Funktionen dargestellt und zwar zunächst in Abhängigkeit von der Frequenz f für den Radius $r = R$ und dann in Abhängigkeit vom Radius r mit f als Parameter.

Fig. 11 zeigt die Verteilungsfunktion für die Wirkleistung nach Gl. (4.25) mit dem Strom I_1 nach Gl. (7.12), wobei die Impedanz Z_S der Säule entsprechend Gl. (6.2) unter Berücksichtigung von Gl. (4.24) ebenfalls eine Funktion von r und f ist. Der Maximalwert liegt für $r = R = 0.1 \text{ m}$ bei $f_G \approx 2 \text{ Hz}$ und beträgt 316 kW. Der Wert bei $f = 50 \text{ Hz}$ beträgt 180 kW und bei $f = 300 \text{ Hz}$ 17 kW.

In Fig. 12 ist die Verteilungsfunktion für die Induktivität der Säule dargestellt. Sie ergibt sich aus Gl. (6.2) unter Berücksichtigung von Gl. (4.24). Die Induktivität ist für kleine Frequenzen ($\leq 10 \text{ Hz}$) frequenzunabhängig und beträgt dort für $r = R$ nach Gl. (6.7) etwa 13.2 nH. Für höhere Frequenzen nimmt die innere Induktivität wegen der Feldverdrängung ab.

In Fig. 13 ist die Verteilungsfunktion für den Temperaturhub pro Zeiteinheit nach Gl. (5.12) dargestellt. Der Temperaturhub hat für $r = R$ bei der Frequenz $f_G \approx 2 \text{ Hz}$ im Maximum. Es beträgt 1.85 K/s. Der Wert für $f = 50 \text{ Hz}$ beträgt 1.14 K/s und für $f = 300 \text{ Hz}$ 0.21 K/s.

In Fig. 14 ist die in der Säule umgesetzte Wirkleistung in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen. Die Wirkleistung nimmt für höhere Frequenzen ab, weil bei konstanter Spannung der Strom etwa mit $1/\omega$ abnimmt (linearer Anstieg von ωL_1), der Wirkwiderstand der Säule jedoch nach Gl. (6.9) nur mit $\sqrt{\omega}$ zunimmt.

Fig. 15 zeigt die Impedanz der Säule in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Kurve mit dem Index R stellt den Wirkwiderstand, die mit dem Index X den Blindwiderstand dar. Für höhere Frequenzen nähern sich die Kurven entsprechend Gl. (6.9) stark an.

In Fig. 16 ist der Temperaturhub pro Zeiteinheit auf dem Rand ($r = R$) dargestellt. Für höhere Frequenzen zeigt sich wie bei der Wirkleistung eine fallende Tendenz.

Die Fig. 17 und 18 stellen Verteilungsfunktionen über dem Radius r der zentralen Säule für 4 verschiedene Frequenzen dar. Fig. 17 zeigt die integrale Wirkleistung. Der Anstieg erfolgt etwa mit r^4 , d.h. die Energie wird hauptsächlich am Rand der Säule umgesetzt. Der Temperaturhub nach Fig. 18 steigt deshalb zum Rand mit etwa r^2 an. Der Temperaturhub bezieht sich auf das jeweilige Volumenelement mit dem Radius r .

In Fig. 19 ist der Betrag der magnetischen Feldstärke H_z bezogen auf die Randfeldstärke in Abhängigkeit vom Radius r der Säule dargestellt. Während die magnetische Feldstärke für kleine Frequenzen zu einer gleichmäßigen Verteilung über den Radius hin tendiert, ergibt sich mit dem Anstieg der Frequenz ein immer deutlicherer Skin-effekt.

In Fig. 20 ist der Betrag der elektrischen Feldstärke E_φ bezogen auf die Randfeldstärke in Abhängigkeit vom Radius r der Säule dargestellt. Für kleine Frequenzen verteilt sich die elektrische Feldstärke linear über den Radius. Mit dem Anstieg der Frequenz ergibt sich eine immer stärkere Feldverdrängung in der Säule.

Fig. 21 zeigt die Abhängigkeit der Plasmaringspannung von der Fre-

quenz. Die Kurve mit dem Index 0 zeigt die Plasmaringspannung ohne den Einfluß von Gefäß und Säule. Die Kurve mit dem Index 1 zeigt den Einfluß des Gefäßes, die mit dem Index 2 den Einfluß des Gefäßes und der Säule auf die Plasmaringspannung. Mit steigender Frequenz wird die Abschwächung durch die Säule immer geringer, während die abschwächende Wirkung durch das Gefäß steigt. Zugrunde liegt diesen Kurven die Beziehung nach Gl. (7.15) und die Abschätzung nach Gl. (7.17).

Den Fig. 11 - 21 liegt eine Eingangsspannung des OH-Trafos von $U_o = 18$ kV zugrunde. Fig. 21 zeigt, daß die Plasmaringspannung für Frequenzen unter 300 Hz größer ist als der gewünschte Wert von $U_p = 10$ V. Es soll nun die Eingangsspannung des OH-Trafos variiert und die Frequenz festgestellt werden, bei der die Plasmaringspannung 10 V erreicht. Die zugehörigen Werte für den Eingangsstrom des OH-Trafos, die umgesetzte Wirk- und Blindleistung im Bereich der Säule und für den Temperaturhub pro Zeiteinheit werden berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle I zusammengefaßt.

| Lfd.Nr. | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------------|--------|------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| U_o | /kV/ | 12. | 14. | 16. | 18. | 20. | 22. | 24. |
| U_p | /V/ | ~10. | ~10.2 | ~10.2 | ~10.2 | ~10.4 | ~10. | ~10. |
| f | /Hz/ | 31.6 | 100. | 200. | 316. | 400. | 575. | 707. |
| I_1 | /A/ | 993. | 374. | 216. | 154. | 136. | 104. | 92. |
| P_{ws} | /kW/ | 108. | 51. | 25. | 17.1 | 15.2 | 10.9 | 9.6 |
| P_{bs} | /kVar/ | 275. | 67. | 31. | 20. | 17. | 12. | 10. |
| $\dot{\theta}/t$ | /K/s/ | 0.63 | 0.36 | 0.24 | 0.21 | 0.19 | 0.18 | 0.176 |

Tabelle I: Erzeugung einer Plasmaringspannung von $U_p \approx 10$ V durch Variation von U_o

Die Tabelle zeigt, daß man bei steigender Eingangsspannung des OH-Trafos zu höheren Frequenzen übergehen kann. Das wirkt sich günstig auf die Erwärmung der Säule aus. Allerdings ergibt sich oberhalb von 300 Hz kaum noch ein Absinken des Temperaturhubes. Dagegen nehmen die Verluste im Gefäß stark zu, entsprechend der Abschätzung nach Gl. (7.17).

9. Schlußfolgerungen

Beim ASDEX Upgrade treten in der zentralen Säule bei der Plasmaentladung und bei der Reinigungsentladung Wirbelstromverluste auf. Diese haben einen Temperaturhub in der Säule zur Folge. Die analytische Berechnung zeigt, daß bei den pulsförmigen Strömen der Plasmaentladung im DN-Betrieb eine Wärmemenge von etwa 78 kJ in der Säule umgesetzt wird. Das entspricht ungefähr 2 % der gesamten eingestrahlten Energie. Auf dem Säulenrand ergibt sich ein Temperaturhub von etwa 0.43 K. Die ermittelten Werte erscheinen unkritisch sowohl hinsichtlich der Feldänderung also auch hinsichtlich der Temperaturerhöhung in der Säule.

Bei der Reinigungsentladung wird der OH-Trafo mit sinusförmigem Wechselstrom gespeist. Die Amplitude der Plasmaringspannung soll ~ 10 V betragen. Die analytische Berechnung zeigt, daß die umgesetzte Wirkleistung und damit die Temperaturerhöhung in der Säule mit steigender Frequenz geringer wird. Dagegen steigen die Verluste im Gefäß mit steigender Frequenz stark an. Oberhalb einer Frequenz von 300 Hz ergibt sich kaum noch ein Absinken des Temperaturhubes in der Säule. Er liegt im Frequenzbereich von 50 Hz bis 300 Hz zwischen 0.65 K und 0.22 K pro Sekunde. Diese Werte machen bei längeren Entladungsphasen eine Kühlung der Säule notwendig. Eine weitere Möglichkeit zur Herabsetzung des Temperaturhubes in der Säule bei der Reinigungsentladung wäre die Unterteilung der Säule in voneinander isolierten Segmenten.

Die Abschwächung der Plasmaringspannung durch die Anwesenheit der Säule ist geringfügig und beträgt in dem betrachteten Frequenzbereich etwa 2 - 3 %.

Ich danke Herrn Dr. W. Köppendörfer für die Unterstützung dieser Arbeit und Herrn M. Blaumoser für viele wertvolle Hinweise und hilfreiche Diskussionen.

10. Mathematischer Anhang

10.1 Anwendung des Residuensatzes

Um die Funktion $\tilde{f}_2(p)$ vom Laplacebereich in den Zeitbereich rückzu-transformieren, kann man unter gewissen Voraussetzungen den Residuensatz anwenden.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \tilde{f}_2(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint \tilde{f}_2(p) e^{pt} dp \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{p=p_i} \{ \tilde{f}_2(p) e^{pt} \} \end{aligned} \quad (10.1)$$

für $t > 0$.

Dabei sind die p_i , $i = 1, \dots, n$ die isolierten Singularitäten (Pole) der komplexen Funktion $\tilde{f}_2(p) e^{pt}$. Voraussetzung für die Anwendung des Satzes ist, daß alle Pole der Funktion in der negativen p -Halbebene liegen, so daß sie vom Integrationsweg umschlossen werden.

Die Funktion $\tilde{f}_2(p)$ lautet hier:

$$\tilde{f}_2(p) = \frac{\mathcal{F}_0(j\sqrt{\mu \kappa p} R)}{\mathcal{F}_0(j\sqrt{\mu \kappa p} R)} = \frac{Z(p)}{N(p)} \quad (10.2)$$

Für die Nullstellen der Nennerfunktion $N(p)$ gilt

$$\mathcal{F}_0(j\sqrt{\mu \kappa p_i} R) = \mathcal{F}_0(j\omega_i)$$

mit $j\omega_i = i$ -te Nullstelle von $J_0(z)$. Also

$$\begin{aligned} j\sqrt{\mu \kappa p_i} R &= j\omega_i \\ p_i &= \frac{-j\omega_i^2}{\mu \kappa R^2} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Da die Besselfunktionen J_ν , $\nu > -1$, auch im Komplexen nur reelle Nullstellen haben [5], folgt: Alle Nullstellen von $N(p)$ liegen auf der negativen reellen Achse und sind einfach. Es gibt unendlich viele Nullstellen.

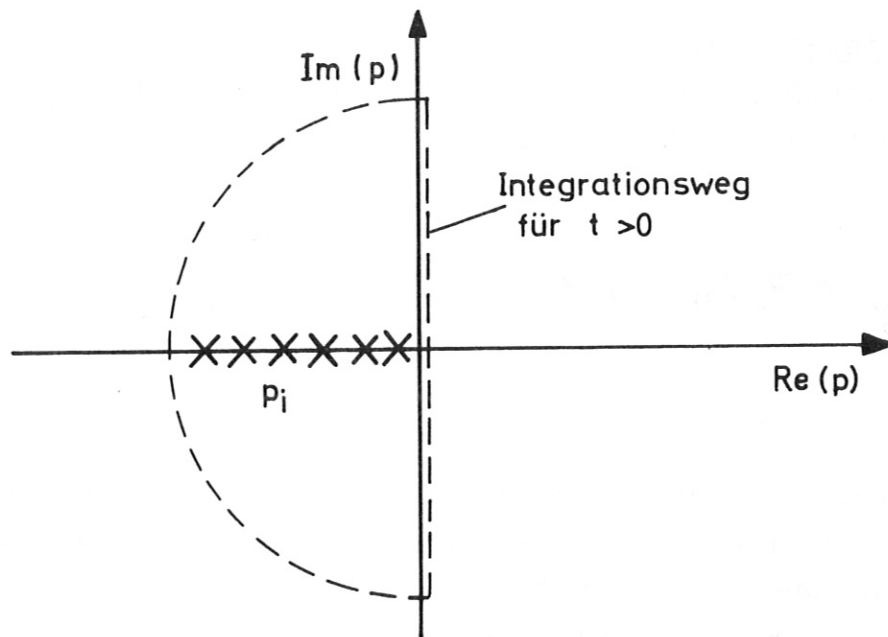


Bild 8: Komplexe p-Ebene mit Polen p_i der Funktion $\tilde{f}_2(p)$

Die Bestimmung der Residuen an den Stellen $p = p_i$ kann mit folgendem Satz erfolgen /6/: Es habe $\tilde{f}_2(p)$ die Form: $\tilde{f}_2(p) = Z(p)/N(p)$. $Z(p)$, $N(p)$ seien differenzierbare Funktionen und es gelte $Z(p_i) \neq 0$, $N(p_i) = 0$, $N'(p_i) \neq 0$. Dann ist bei einfachen Nullstellen des Nenners das Residuum gegeben mit

$$\text{Res}_{p=p_i} \{ \tilde{f}_2(p) e^{pt} \} = \frac{Z(p_i)}{N'(p_i)} e^{p_i t}$$

Hier ist

$$Z(p_i) = F_0(j\omega_i \frac{r}{R})$$

$$N(p_i) = F_0(j\omega_i) = 0$$

$$N'(p_i) = \frac{d}{dp} (N(p)) \Big|_{p=p_i} = \frac{\mu R^2 F_1(j\omega_i)}{2 j\omega_i}$$

Also lauten die Residuen

$$\text{Res}_{p=p_i} \{ \tilde{f}_2(p) e^{pt} \} = \frac{2 j\omega_i F_0(j\omega_i \frac{r}{R})}{\mu R^2 F_1(j\omega_i)} e^{p_i t}$$

für $0 < r < R$

$0 < t < \infty$

10.2 Fourier-Bessel-Reihen

Die Besselfunktionen bilden auf dem Gebiet $G = (0, 1)$ ein orthogonales Funktionensystem, denn es gilt /7/:

$$\int_0^1 t J_\nu(j_{\nu m} t) \cdot J_\nu(j_{\nu n} t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2} J_{\nu+1}^2(j_{\nu m}), & m = n \end{cases} \quad (10.5)$$

für $\nu \geq -1$.

Mann kann deshalb analog zu den Fourierreihen im Intervall $(0, 1)$ Funktionen $f(x)$ unter gewissen Bedingungen, die hier erfüllt sind, nach Besselfunktionen entwickeln.

Es ergeben sich die Fourier-Bessel-Reihen.

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(j_{\nu m} x), \quad x \in \mathbb{C} \quad (10.6)$$

mit

$$a_m = \frac{2}{J_{\nu+1}^2(j_{\nu m})} \cdot \int_0^1 t f(t) J_\nu(j_{\nu m} t) dt$$

Speziell für $\nu = 0$ folgt:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(j_{0m} x)$$

mit

$$a_m = \frac{2}{J_1^2(j_{0m})} \cdot \int_0^1 t f(t) J_0(j_{0m} t) dt \quad (10.7)$$

Es sei

$$f(x) = \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} = \frac{J_0(kRx)}{J_0(kR)}, \quad \begin{matrix} x = \frac{r}{R} \\ k \in \mathbb{C} \end{matrix}$$

Dann gilt nach /5/ Nr. 11.3.29

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \frac{J_0(kRt)}{J_0(kR)} \cdot J_0(j_{0i} t) dt &= \\ &= \frac{kR \cdot J_1(kR) J_0(j_{0i}) - j_{0i} J_0(kR) J_1(j_{0i})}{J_0(kR) \cdot (k^2 R^2 - j_{0i}^2)} \\ &= - \frac{j_{0i} \cdot J_1(j_{0i})}{k^2 R^2 - j_{0i}^2} \end{aligned}$$

Also lauten die Entwicklungskoeffizienten

$$a_i = - \frac{2 joi}{(k^2 R^2 - joi^2) \mathcal{F}_1(joi)}$$

und es folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 joi \mathcal{F}_0(joi \frac{r}{R})}{(joi^2 - k^2 R^2) \mathcal{F}_1(joi)} = \frac{\mathcal{F}_0(kr)}{\mathcal{F}_0(kR)} \quad (10.8)$$

für $0 < r < R$

Speziell für $k = 0$ folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \mathcal{F}_0(joi \frac{r}{R})}{joi \mathcal{F}_1(joi)} = 1 \quad (10.9)$$

Differenziert man Gleichung (10.8) nach r , so ergibt sich eine DINI-Reihe /7/:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 joi (-\frac{joi}{R}) \mathcal{F}_1(joi \frac{r}{R})}{(joi^2 - k^2 R^2) \mathcal{F}_1(joi)} = -k \frac{\mathcal{F}_1(kr)}{\mathcal{F}_0(kR)}$$

also

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{joi^2 \mathcal{F}_1(joi \frac{r}{R})}{(joi^2 - k^2 R^2) \mathcal{F}_1(joi)} = \frac{kR}{2} \cdot \frac{\mathcal{F}_1(kr)}{\mathcal{F}_0(kR)} \quad (10.10)$$

für $0 < r < R$

Speziell für $k = 0$ folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_1(joi \frac{r}{R})}{\mathcal{F}_1(joi)} = 0 \quad (10.11)$$

10.3 Grenzwertbetrachtungen

Welche Werte haben die Verhältnisse der Zylinderfunktionen

$$A_1 := \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)}$$

$$A_1^* := \frac{J_0(kr)^*}{J_0(kR)^*}$$

$$A_2 := \frac{J_1(kr)}{J_0(kR)}$$

für $|kr|$, $|kR| \ll 1$ und

für $|kr|$, $|kR| \gg 1$?

a) $|kr|$, $|kR| \ll 1$

Das bedeutet: $\omega \rightarrow 0$ oder $h \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow \infty$

Dafür gilt:

$$\begin{aligned} J_0(kr) &= 1 - \frac{k^2 r^2}{4} + \frac{k^4 r^4}{64} \\ J_0(kr)^* &= 1 + \frac{k^2 r^2}{4} + \frac{k^4 r^4}{64} \\ J_0(kR) &= 1 - \frac{k^2 R^2}{4} + \frac{k^4 R^4}{64} \\ J_1(kr) &= \frac{kr}{2} \left(1 - \frac{k^2 r^2}{8} + \frac{k^4 r^4}{192} \right) \end{aligned} \quad (10.12)$$

Damit folgt durch Bildung des Cauchy-Produkts:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 + \frac{k^2}{4} (R^2 - r^2) + \frac{k^4}{64} (3R^4 - 4R^2 r^2 + r^4) \\ A_1^* &= 1 - \frac{k^2}{4} (R^2 - r^2) + \frac{k^4}{64} (3R^4 - 4R^2 r^2 + r^4) \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$A_2 = \frac{kr}{2} \left(1 + \frac{k^2}{8} (2R^2 - r^2) + \frac{k^4}{192} (9R^4 - 6R^2 r^2 + r^4) \right)$$

Für $r = R$ folgt:

$$\begin{aligned} A_1(R) &= 1 \\ A_1^*(R) &= 1 \\ A_2(R) &= \frac{kR}{2} \left(1 + \frac{k^2 R^2}{8} + \frac{k^4 R^4}{48} \right) \end{aligned} \quad (10.14)$$

Für $k = 0$ ($\omega = 0$ oder $\mu = 0$) folgt:

$$A_1(0) = 1$$

$$A_1^*(0) = 1$$

$$A_2(0) = 0$$

mit

$$k^2 = -j\omega\mu\epsilon = -2j/\delta^2 \quad \delta^2 = \frac{2}{\omega\mu\epsilon} \quad (10.15)$$

$$k^4 = \omega^2\mu^2\epsilon^2 = 4/\delta^4$$

b) $|kr|, |kR| \gg 1$

Das bedeutet: $\omega \rightarrow \infty$ oder $\mu \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$

Dafür gilt $1/\delta$:

$$F_0(kr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi kr}} e^{-j(kr - \pi/4)}$$

$$F_0^*(kr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k^*r}} e^{j(k^*r - \pi/4)} \quad (10.16)$$

$$F_0(kR) = \frac{1}{\sqrt{2\pi kR}} e^{-j(kR - \pi/4)}$$

$$F_1(kr) = \frac{j}{\sqrt{2\pi kr}} e^{-j(kr - \pi/4)}$$

Damit folgt:

$$A_1 = \sqrt{\frac{R}{r}} e^{jk(R-r)}$$

(10.17)

$$A_1^* = \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-jk^*(R-r)}, \quad jk = k^*$$

$$A_2 = j\sqrt{\frac{R}{r}} e^{jk(R-r)}$$

für $0 < r \leq R$

Für $r = R$ folgt:

$$\begin{aligned} A_1(R) &= 1 \\ A_1^*(R) &= 1 \\ A_2(R) &= j \end{aligned} \tag{10.18}$$

Für $k \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow \infty$ oder $\delta \rightarrow \infty$) folgt wegen $jk = (-1-j)/\delta$:

$$\begin{aligned} A_1(\infty) &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-\frac{R-r}{\delta}} e^{-j\frac{R-r}{\delta}} = 0 \\ A_1^*(\infty) &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-\frac{R-r}{\delta}} e^{+j\frac{R-r}{\delta}} = 0 \\ A_2(\infty) &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} j\sqrt{\frac{R}{r}} e^{-\frac{R-r}{\delta}} e^{-j\frac{R-r}{\delta}} = 0 \end{aligned} \tag{10.19}$$

für $0 < r < R$

11. Literatur

- /1/ Simonyi, K., Theoretische Elektrotechnik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1977
- /2/ Lehner, G., Theorie der Felder und Wellen III, Vorlesungsmanuskript des Instituts für Theorie der Elektrotechnik der Universität Stuttgart
- /3/ Piefke, G., Feldtheorie I, BI Mannheim, 1974
- /4/ Bosse, G., Grundlagen der Elektrotechnik III, BI Mannheim, 1969
- /5/ Abramowitz, M., Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications Inc., New York, 1972
- /6/ Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Zürich Frankfurt/M., 1973
- /7/ Watson, G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, University Press Cambridge, 1958

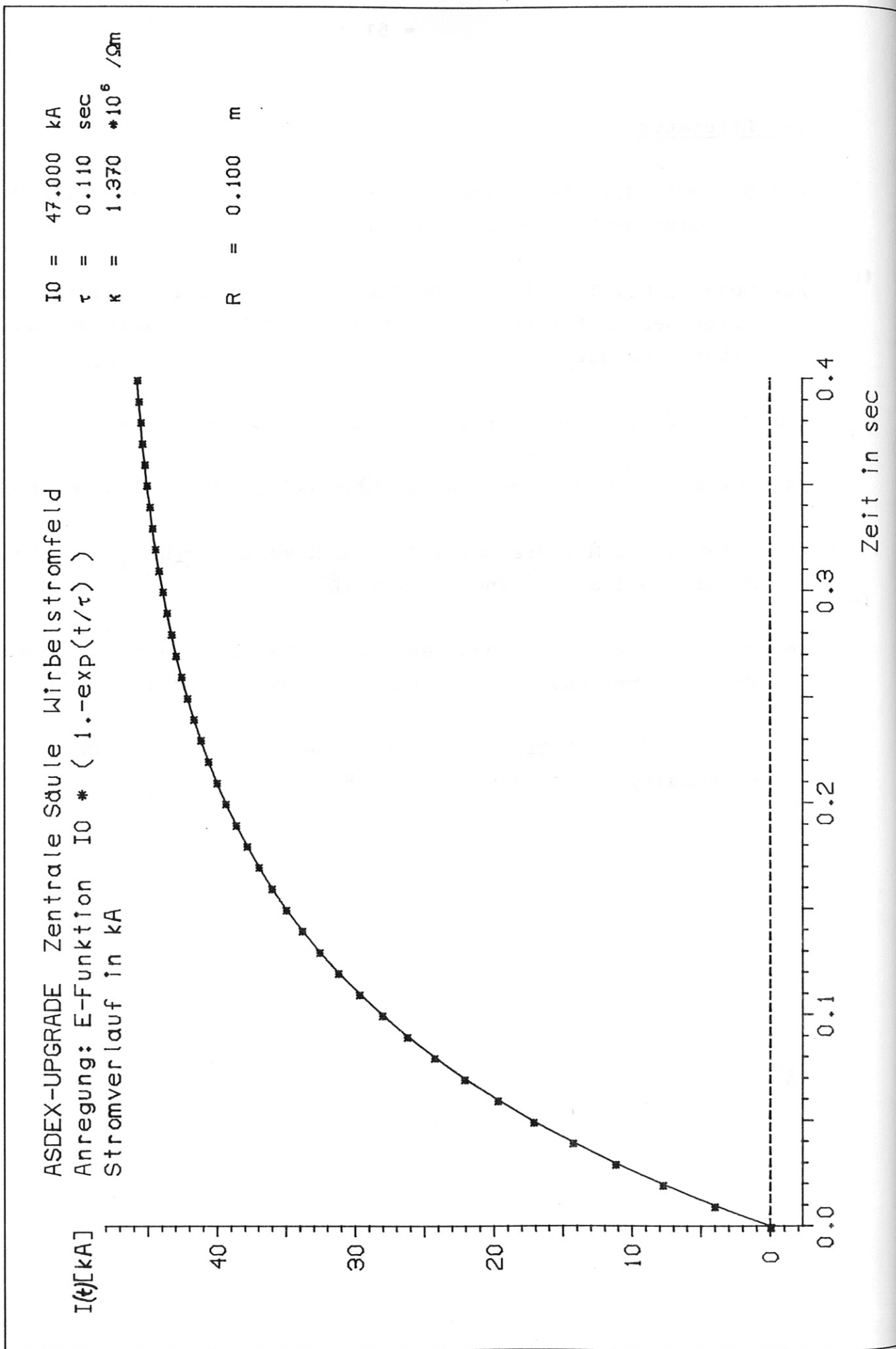


Fig. 1: Stromverlauf im OH-Trafo

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld
 Anregung: E-Funktion $I_0 * (1 - \exp(-t/\tau))$
 Magnetfeld-Energie in MJ

$I_0 = 47.000 \text{ kA}$
 $\tau = 0.110 \text{ sec}$
 $K = 1.370 * 10^6 / \Omega m$

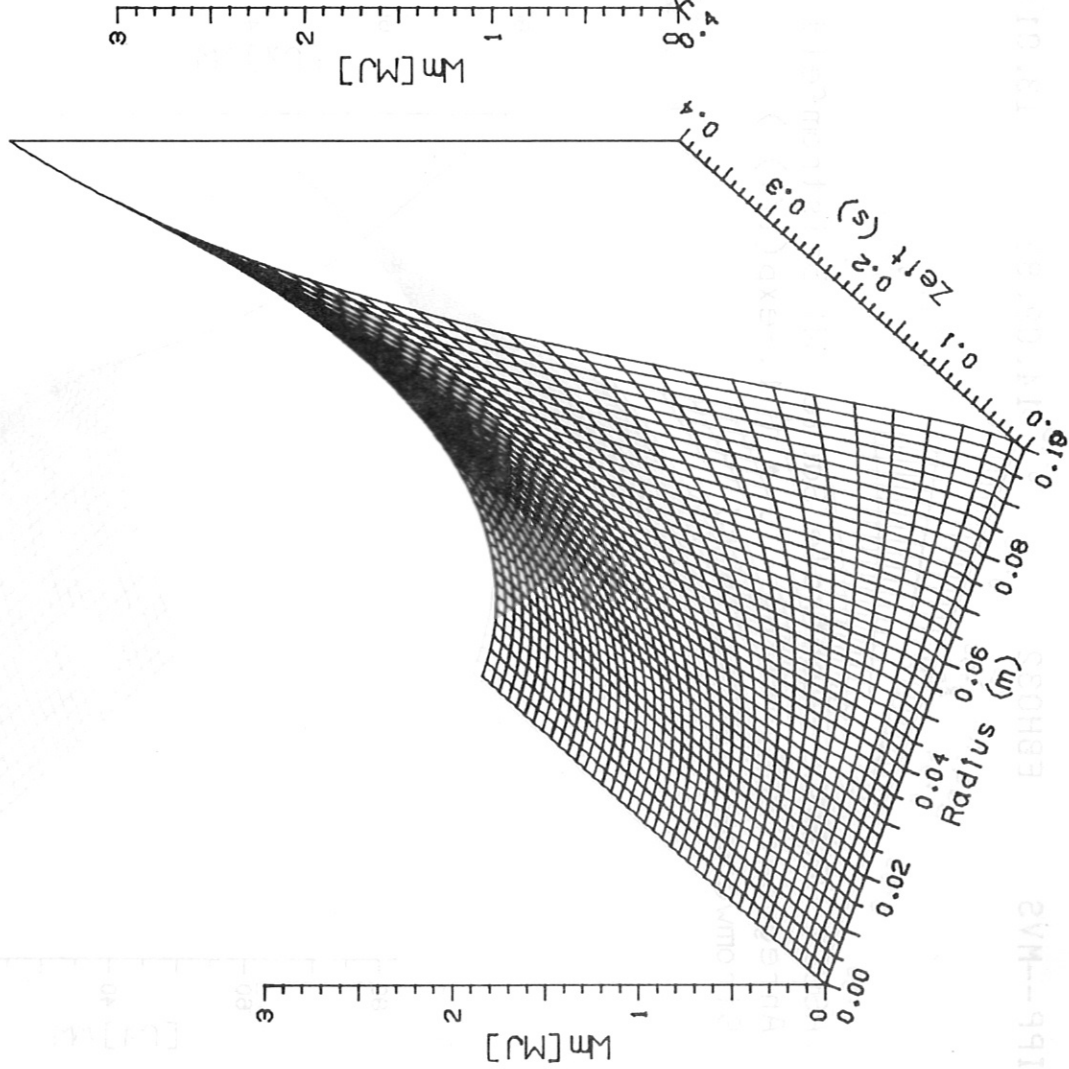


Fig. 2: Magnetfeld-Energie

1bb--W42

EBH032

13.01:27

14.09.83

J1-10

002 +

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld
 Anregung: E-Funktion $I_0 * (1 - \exp(-t/\tau))$
 Stromwärme-Energie in kJ

$I_0 = 47.000 \text{ kA}$
 $\tau = 0.110 \text{ sec}$
 $K = 1.370 * 10^6 \text{ } \Omega\text{m}$

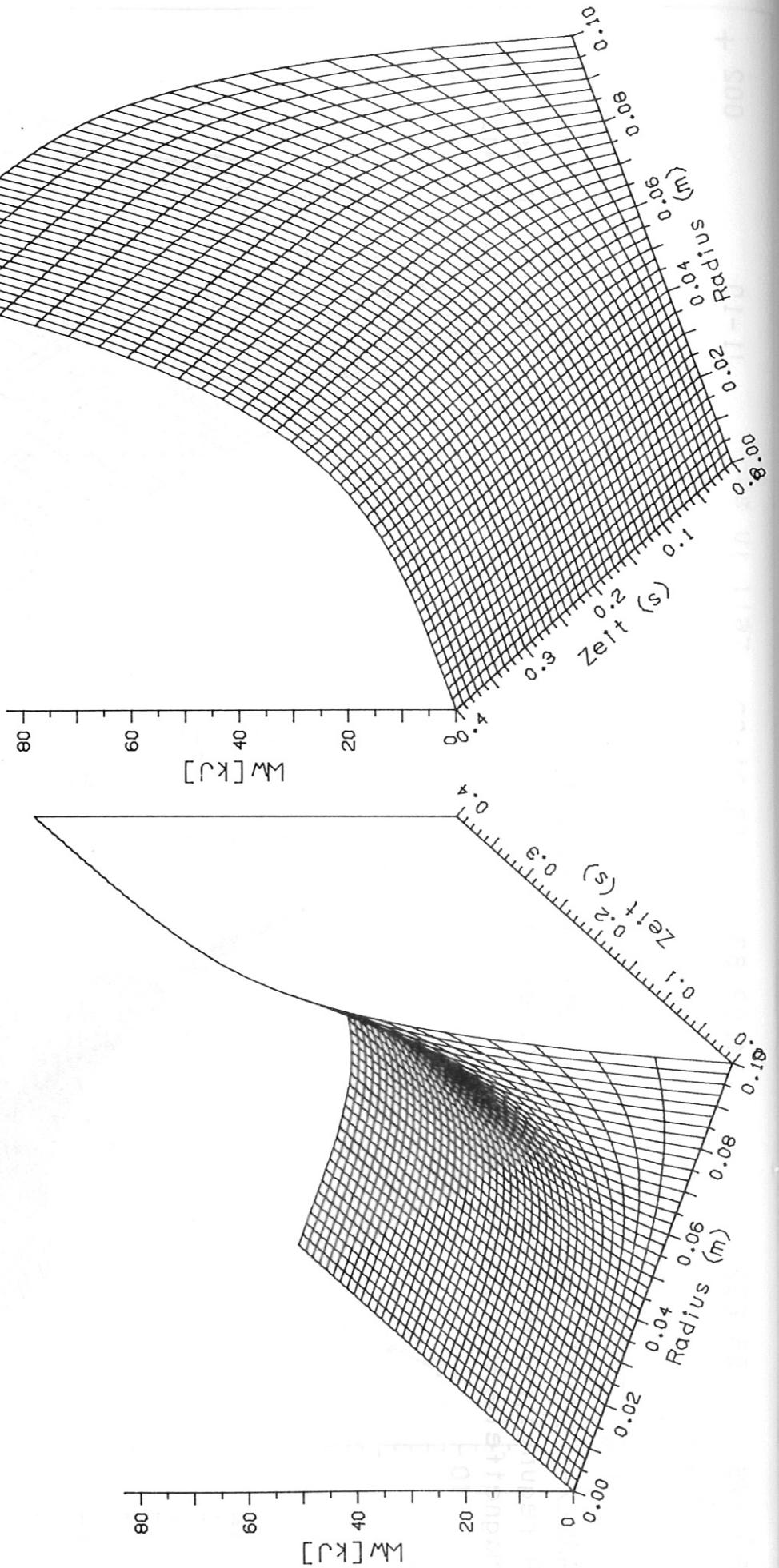


Fig. 3: Stromwärme-Energie

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld
 Anregung: E-Funktion $I_0 * (1 - \exp(-t/\tau))$
 Temperaturhub in K

$I_0 = 47.000$ kA

$\tau = 0.110$ sec

$k = 1.370 * 10^6$ / Ω m

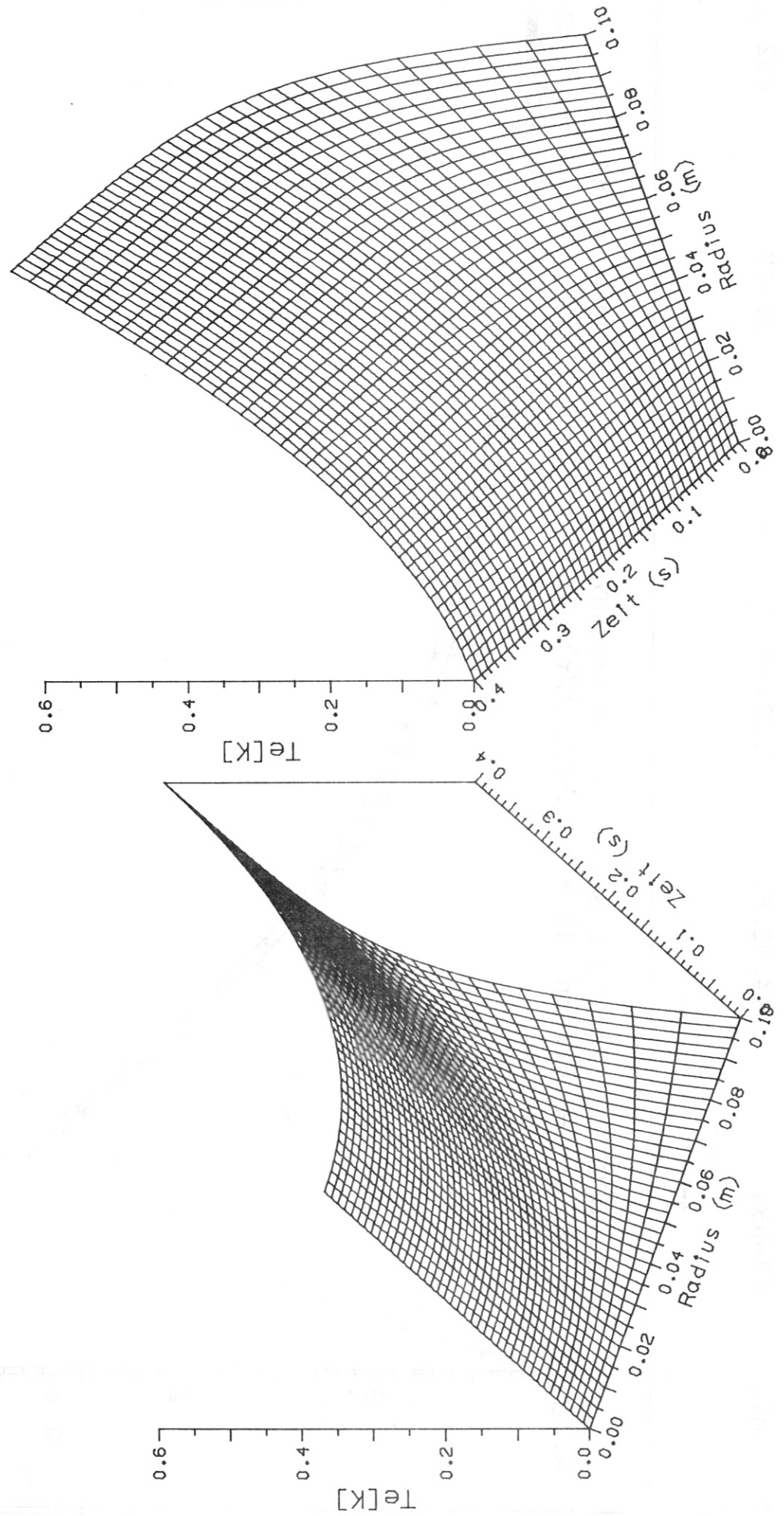


Fig. 4: Temperaturhub

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld
 Anregung: E-Funktion $I_0 * (1 - \exp(-t/\tau))$
 Energiebilanz

$I_0 = 47.000 \text{ kA}$
 $\tau = 0.110 \text{ sec}$
 $k = 1.370 * 10^6 \text{ /}\Omega\text{m}$

$R = 0.100 \text{ m}$

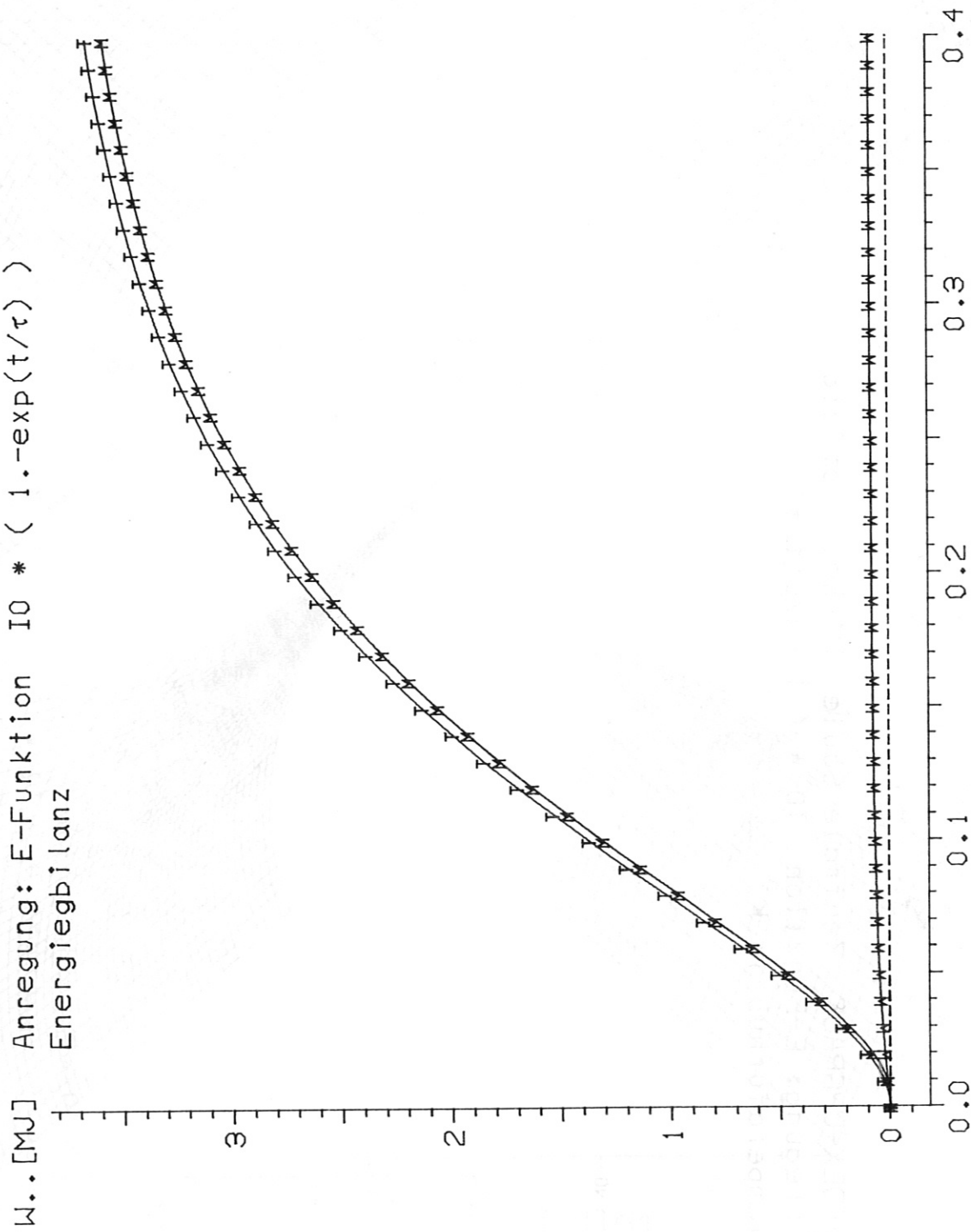


Fig. 5: Energiebilanz in Abhängigkeit von der Zeit

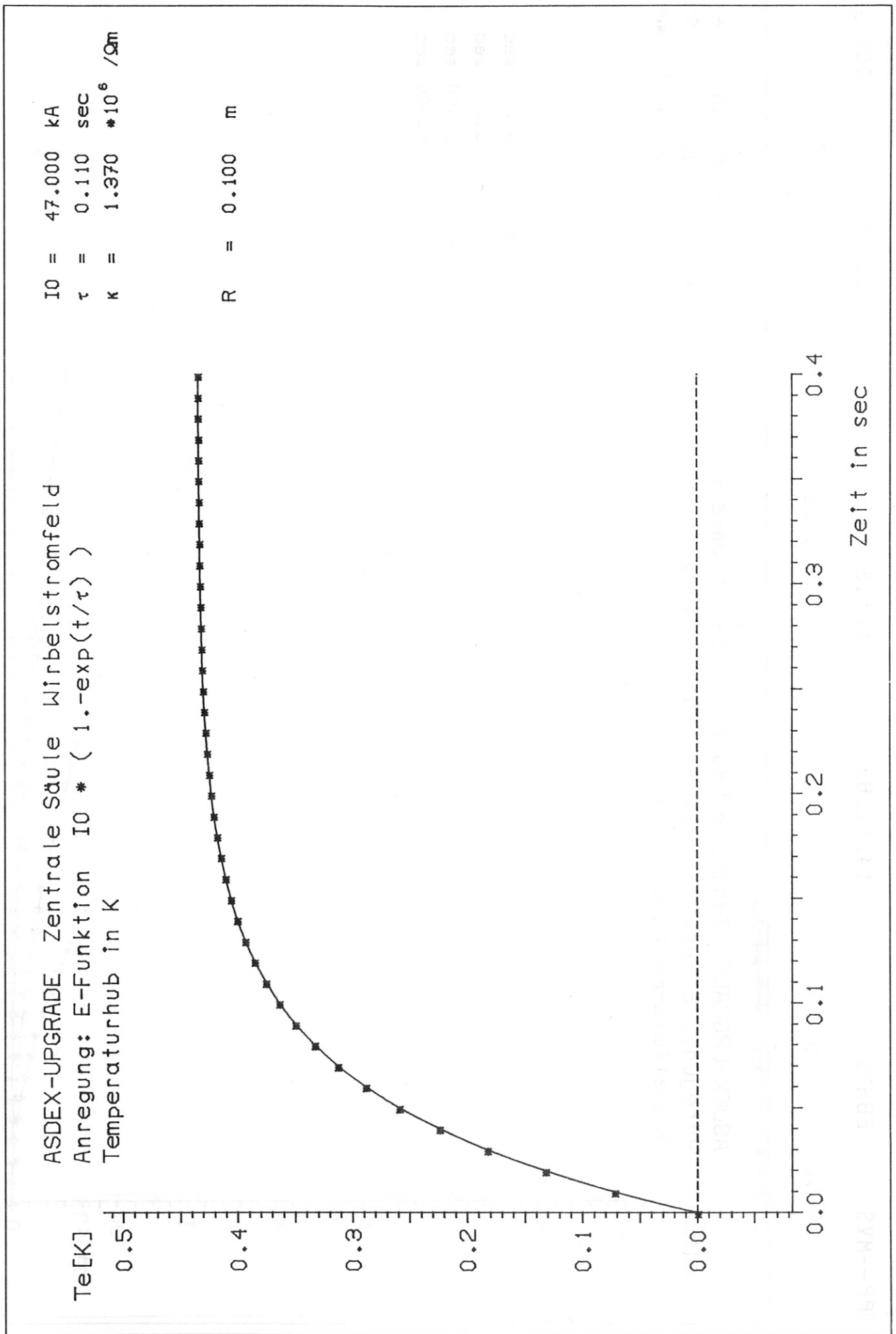


Fig. 6: Temperaturhub in Abhängigkeit von der Zeit

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld
 Anregung: E-Funktion $I_0 * (1 - \exp(-t/\tau))$
 Magnetfeld-Energie in MJ

$I_0 = 47.000 \text{ kA}$
 $\tau = 0.110 \text{ sec}$
 $k = 1.370 * 10^6 / \Omega_{HI}$

1 --> $t = 0.010 \text{ sec}$
 2 --> $t = 0.040 \text{ sec}$
 3 --> $t = 0.100 \text{ sec}$
 4 --> $t = 0.400 \text{ sec}$

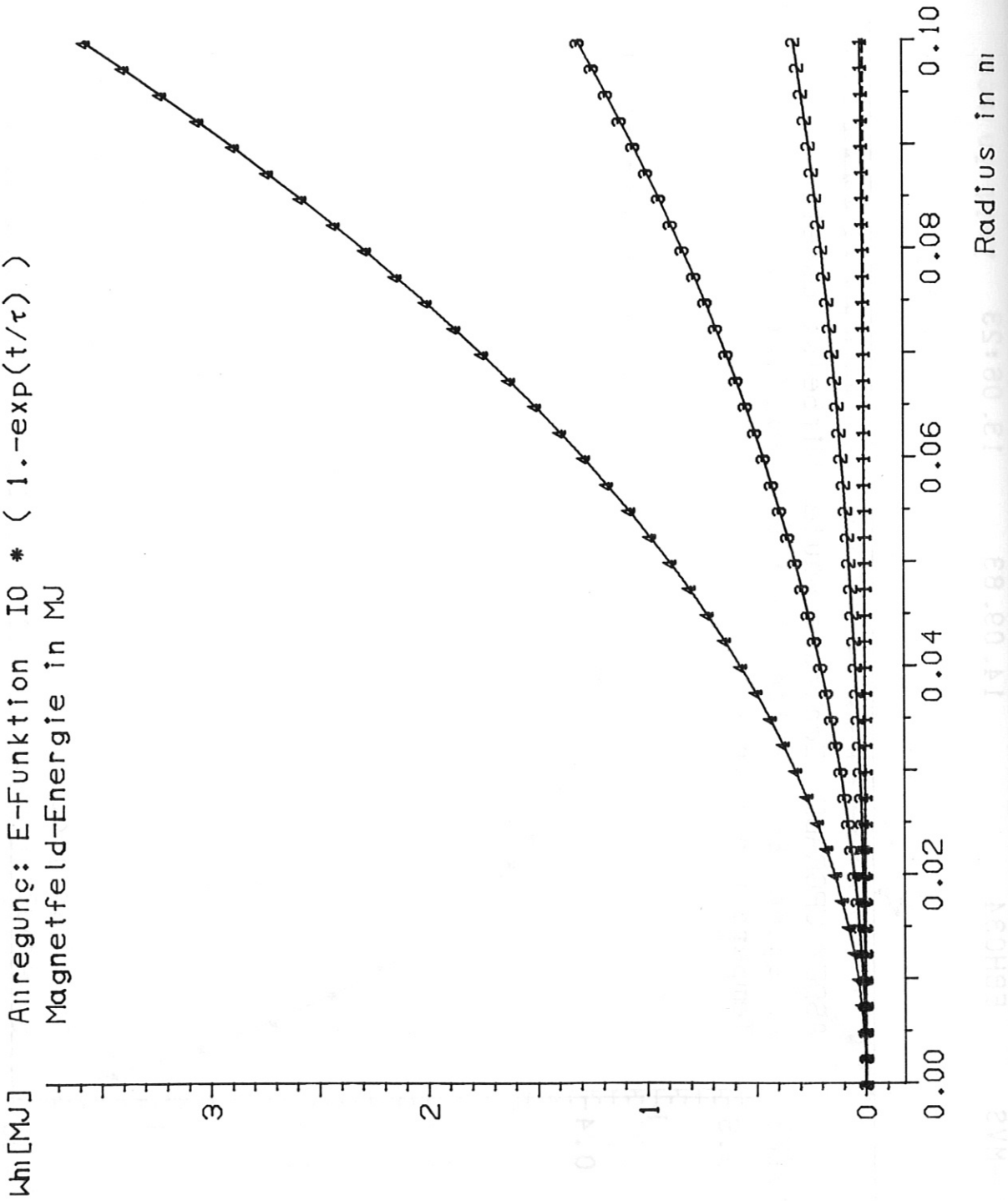


Fig. 7: Integrale Magnetfeldenergie in Abhängigkeit vom Radius

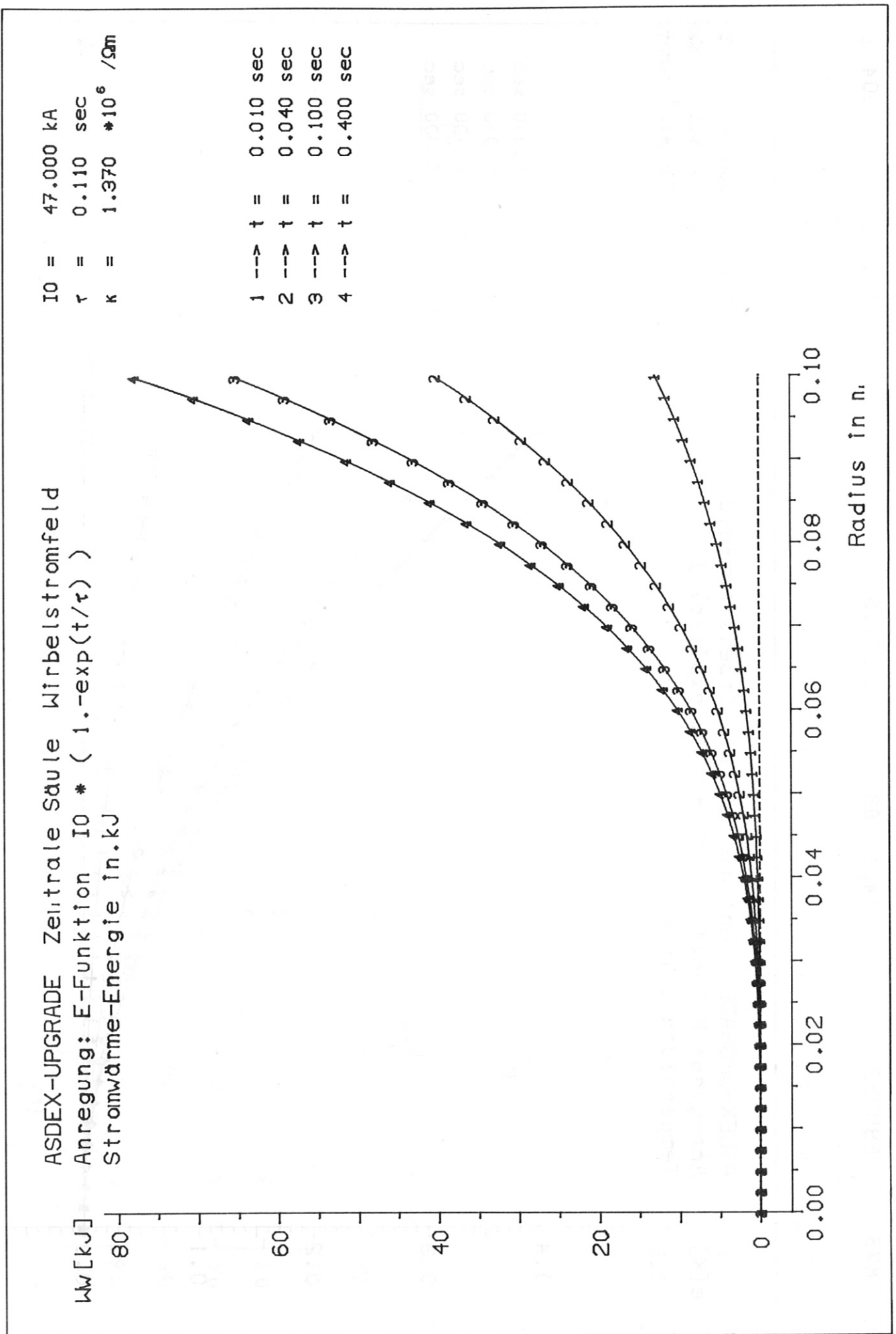


Fig. 8: Integrale Stromwärme-Energie in Abhängigkeit vom Radius

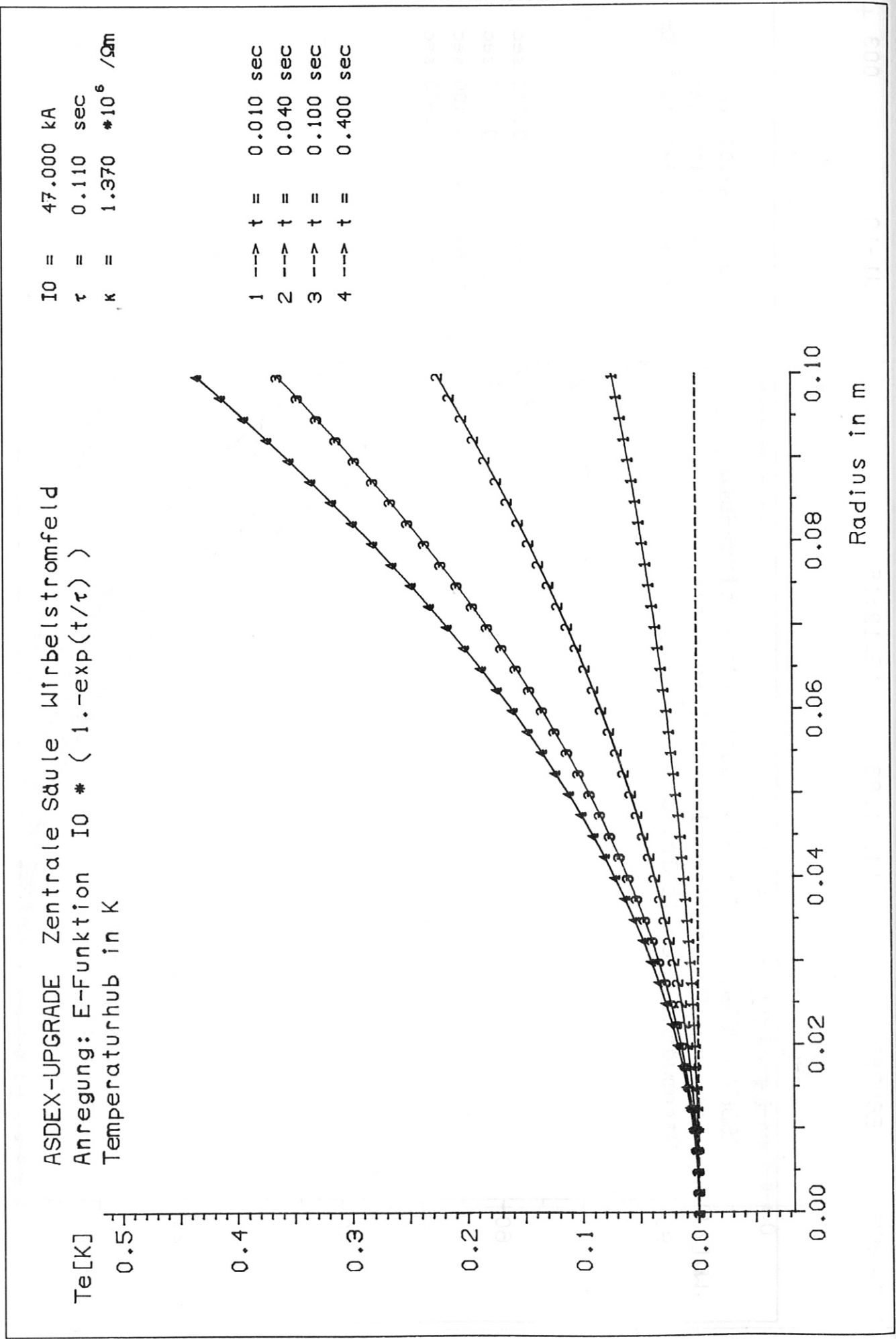


Fig. 9: Temperaturhub in Abhängigkeit vom Radius

ASDEX Upgrade
 Zentrale Säule, OH-Trafo
 (DN-Betrieb)

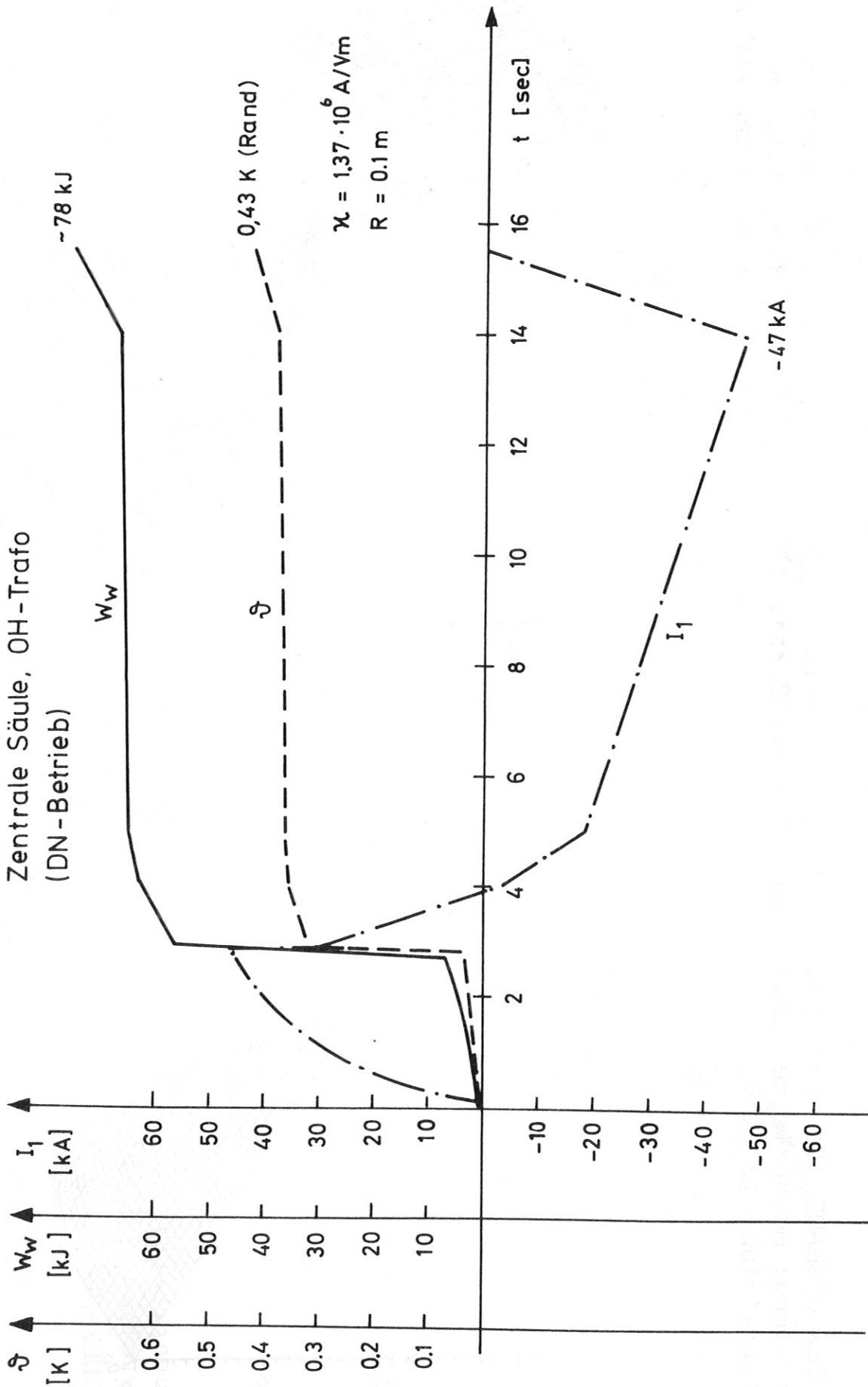


Fig. 10: DN-Betrieb: Stromverlauf im OH-Trafo, Wärmeenergie und Temperaturhub in der zentralen Säule in Abhängigkeit von der Zeit.

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld
 Anregung: Harmonische Schwingung $U_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$
 Wirkleistung in kW

$U_0 = 18.000 \text{ kV}$
 $R = 0.100 \text{ m}$
 $k = 1.370 \cdot 10^6 \text{ /}\Omega\text{m}$

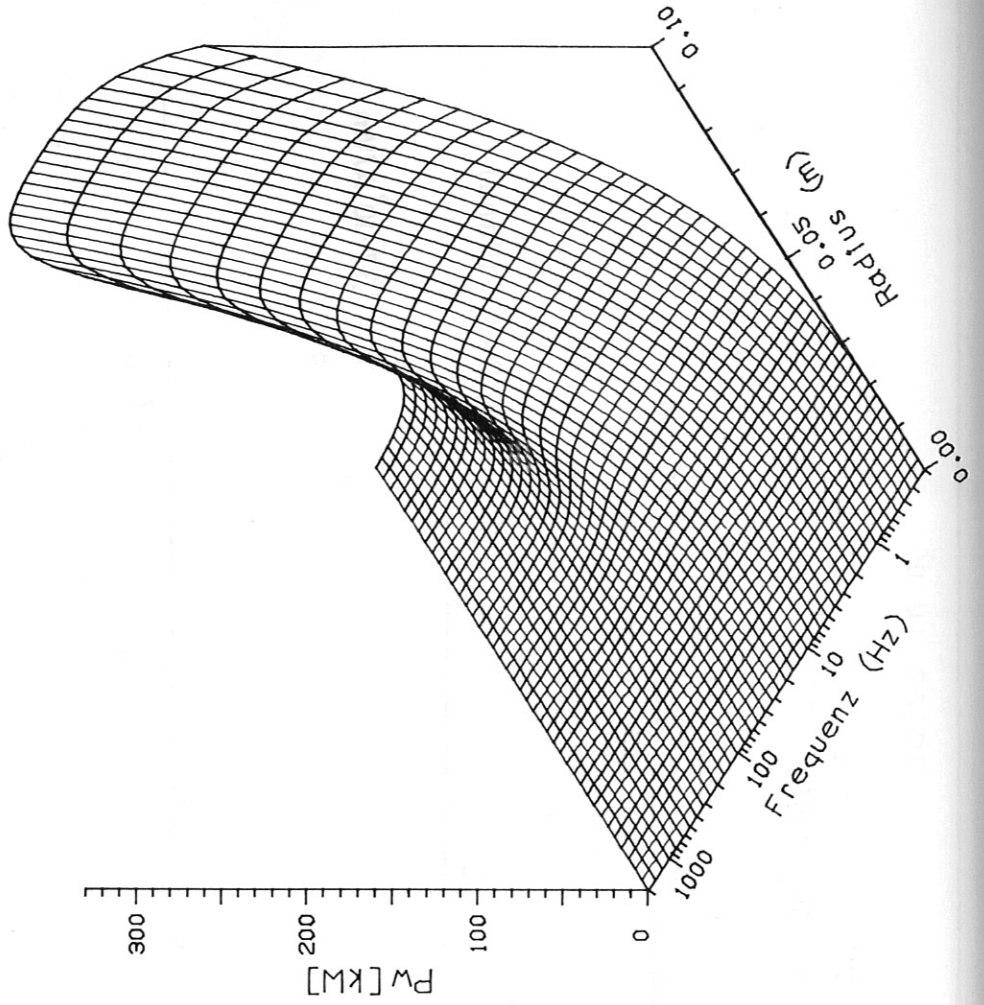
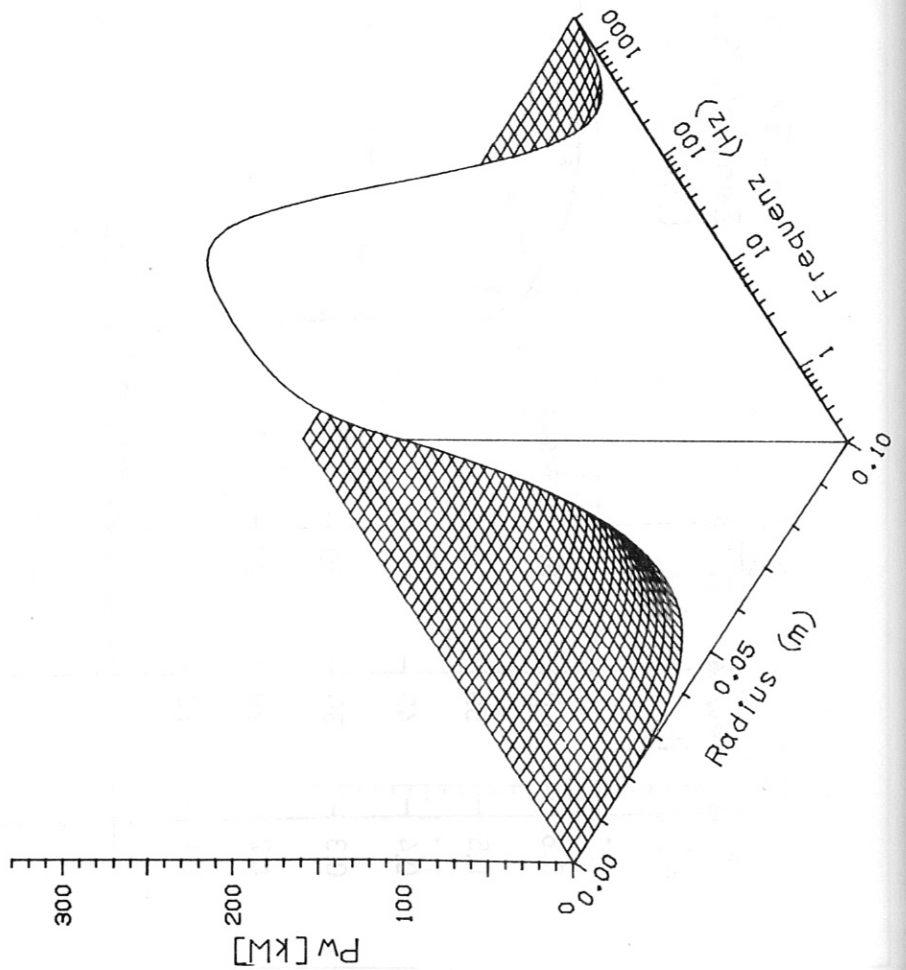


Fig. 11: Wirkleistung

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld
 Anregung: Harmonische Schwingung $U_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$
 Induktivität in nH

$U_0 = 18.000 \text{ kV}$
 $R = 0.100 \text{ m}$
 $k = 1.370 \cdot 10^6 \text{ } \Omega\text{m}$

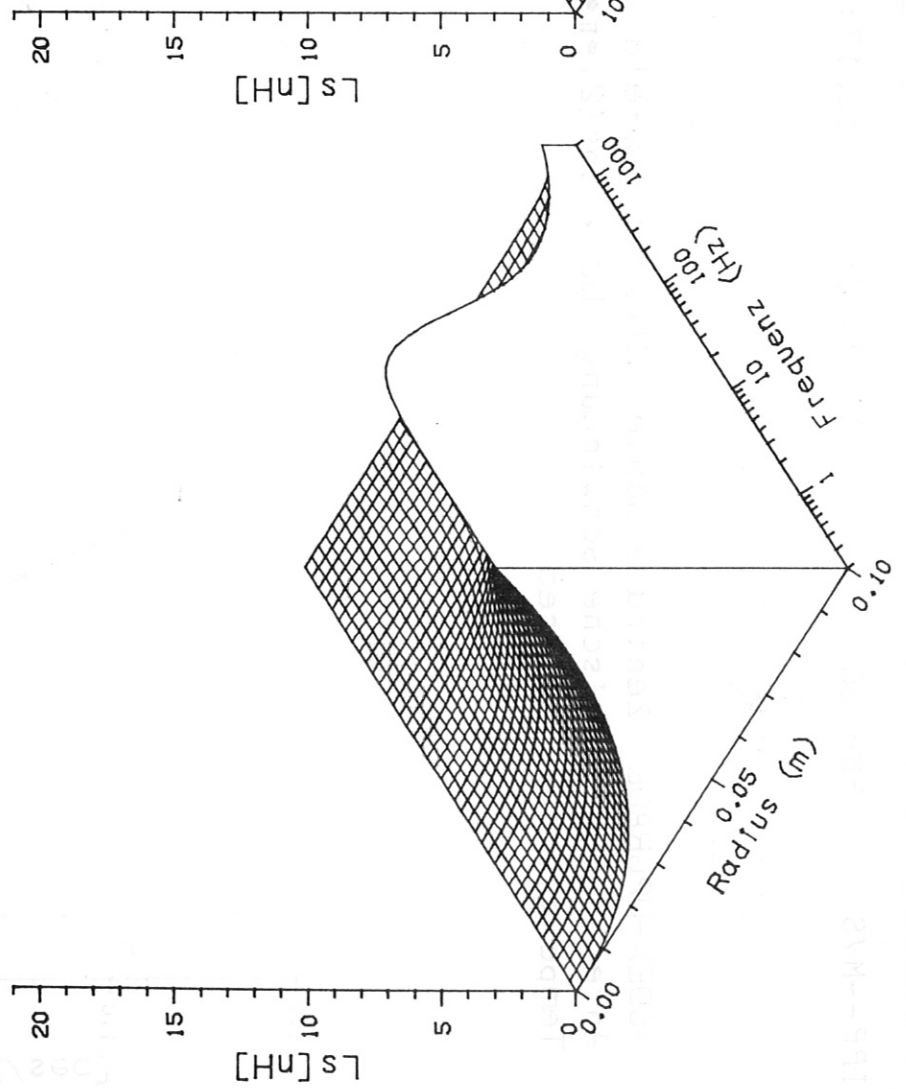


Fig. 12: Induktivität der Säule

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld

Anregung: Harmonische Schwingung $U_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$

Temperaturhub in K/sec

$U_0 = 18.000 \text{ kV}$

$R = 0.100 \text{ m}$

$k = 1.370 \cdot 10^6 \text{ /}\Omega\text{m}$

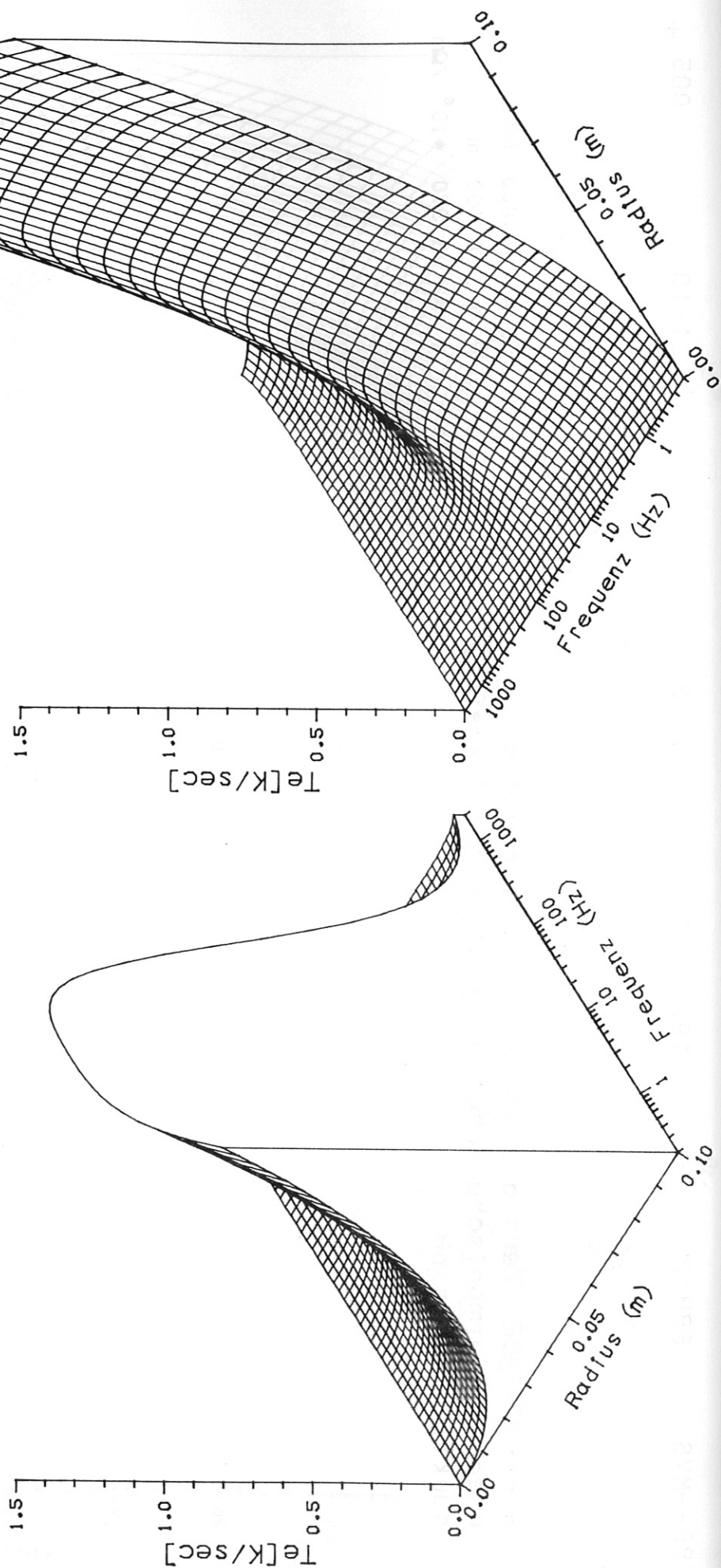


Fig. 13: Temperaturhub pro Zeiteinheit

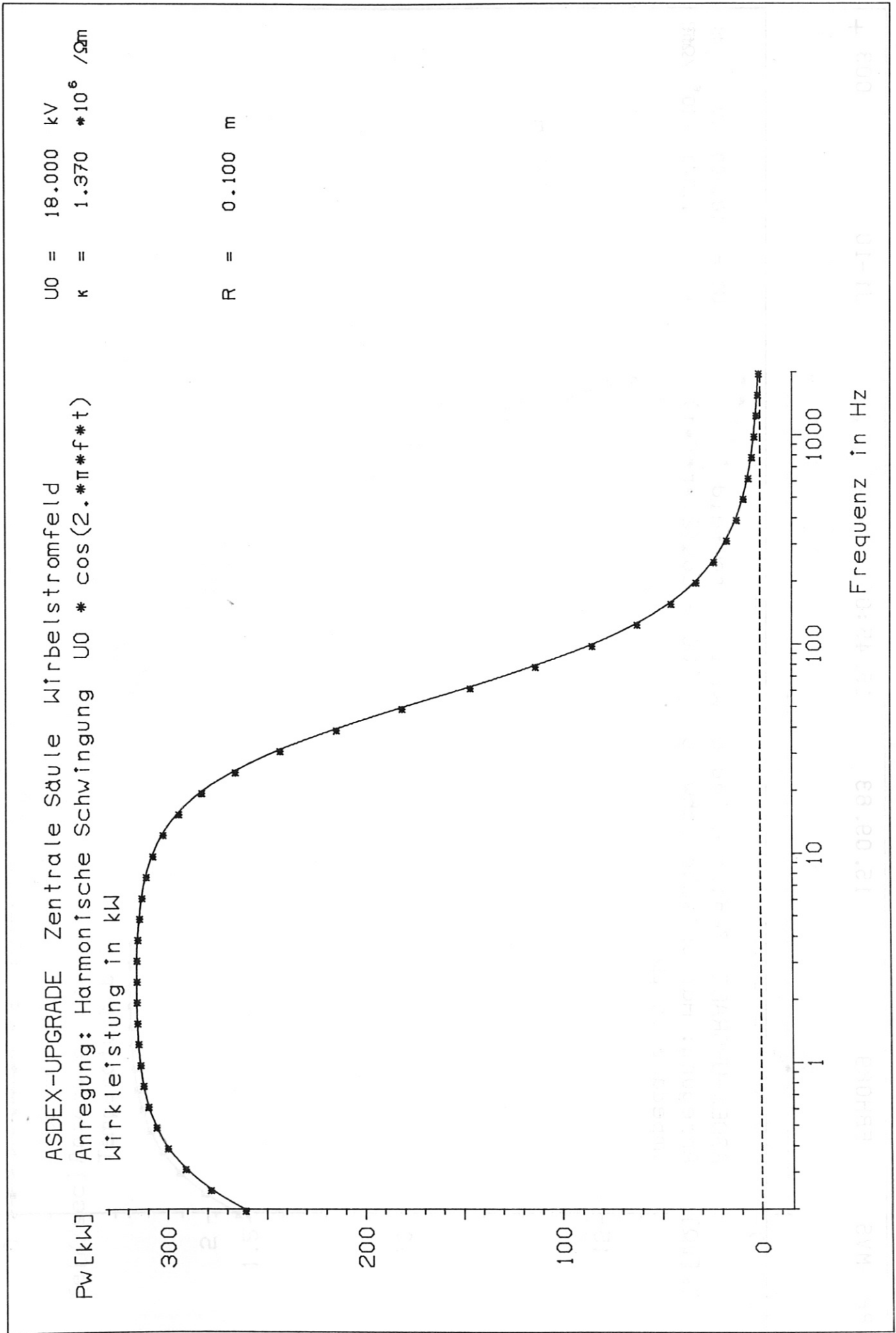


Fig. 14: Wirkleistung in Abhängigkeit von der Frequenz

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld

Anregung: Harmonische Schwingung $U_0 * \cos(2.*\pi*f*t)$

Impedanz in $\mu\Omega$

$U_0 = 18.000 \text{ kV}$

$k = 1.370 * 10^6 / \Omega\text{m}$

$R = 0.100 \text{ m}$

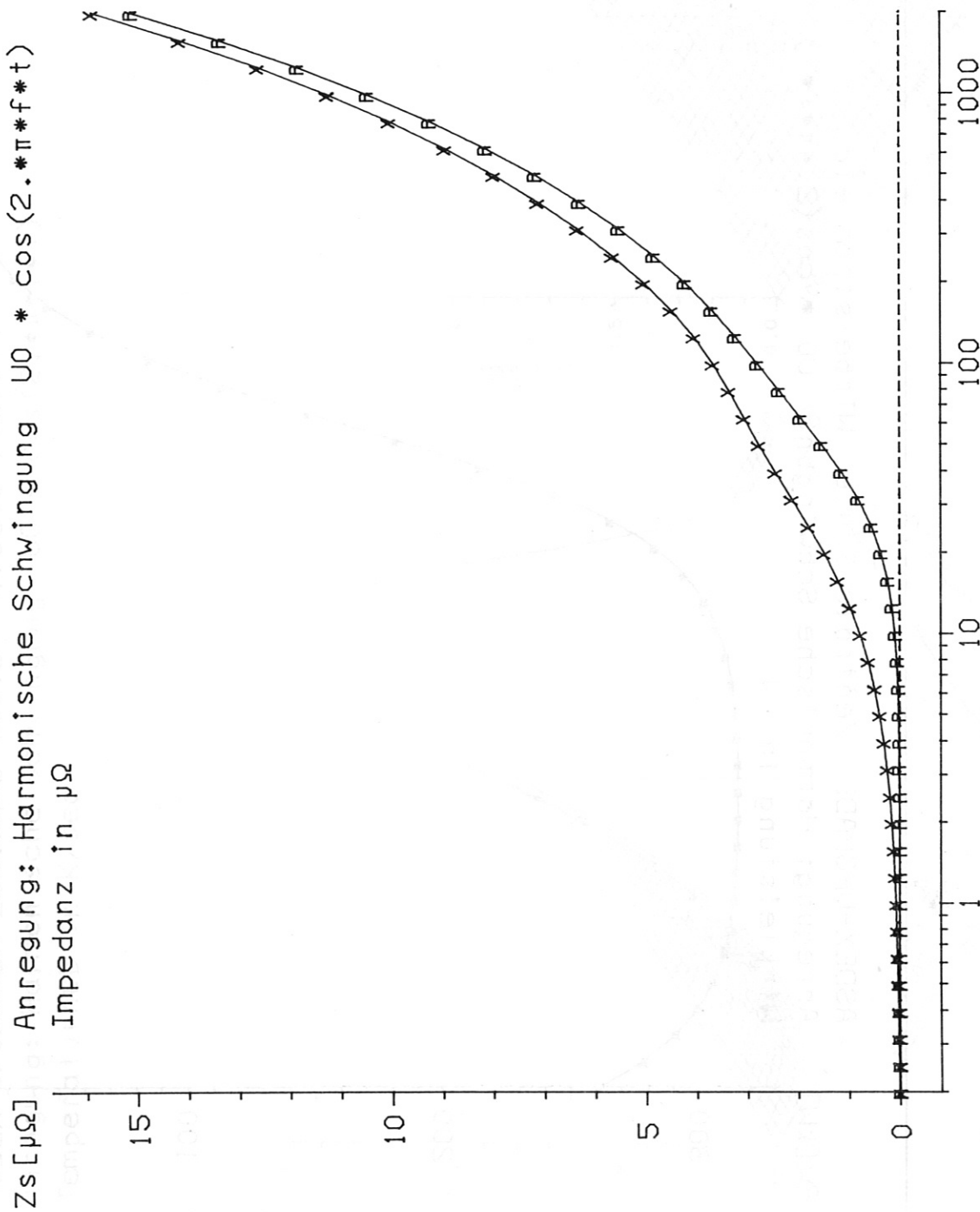


Fig. 15: Impedanz der Säule in Abhängigkeit von der Frequenz

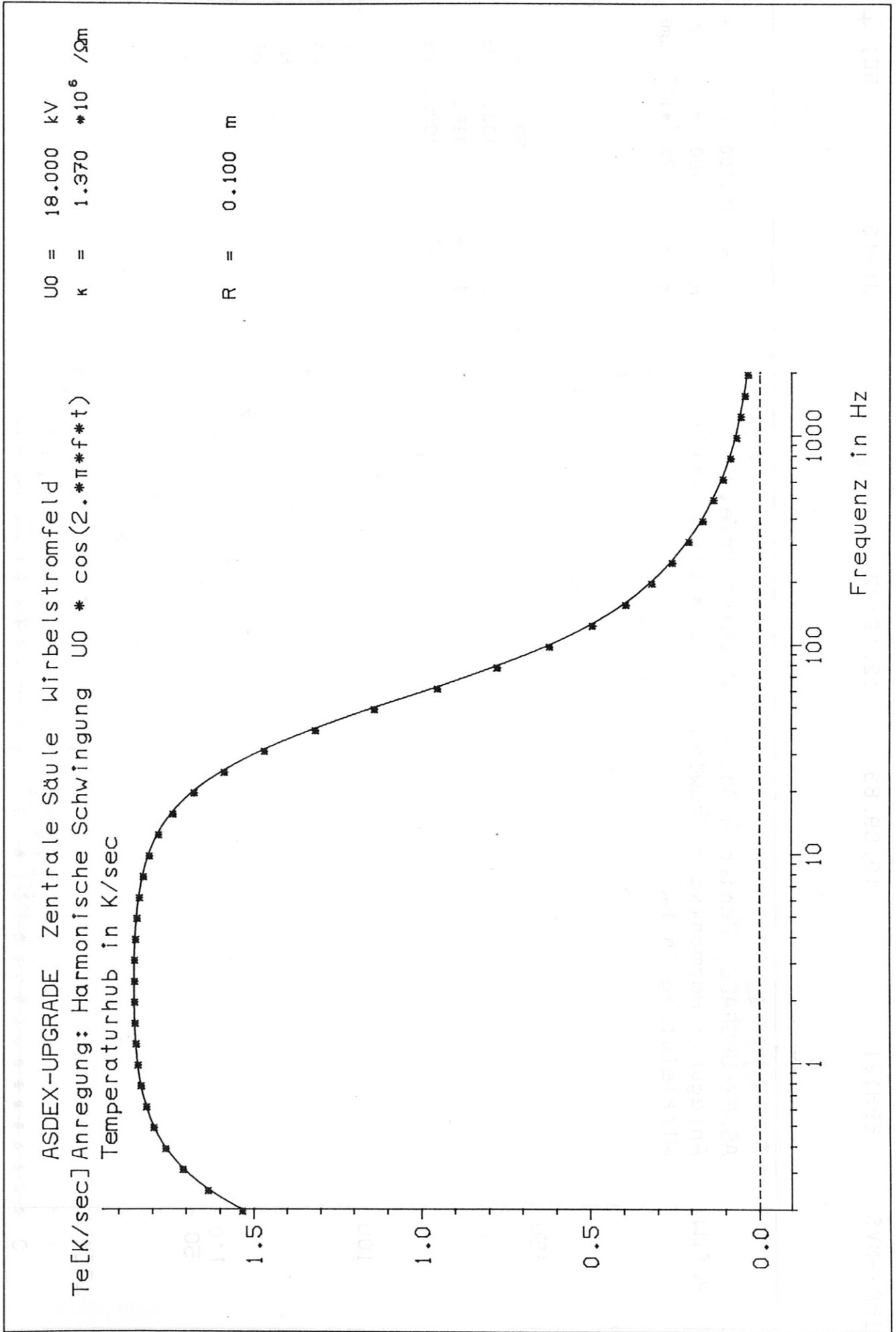


Fig. 16: Temperaturhub pro Zeiteinheit in Abhängigkeit von der Frequenz

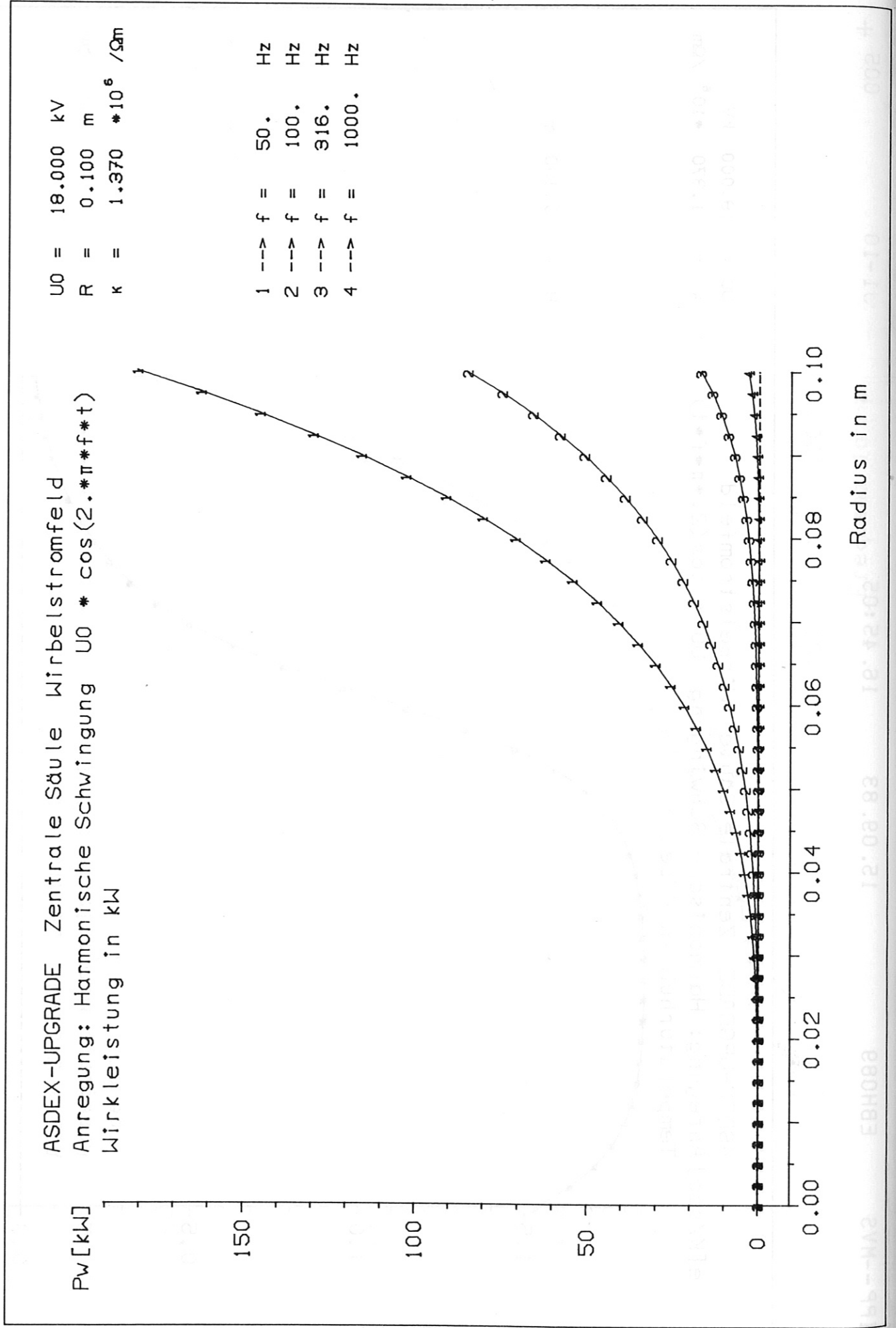


Fig. 17: Integrale Wirkleistung in Abhängigkeit vom Radius

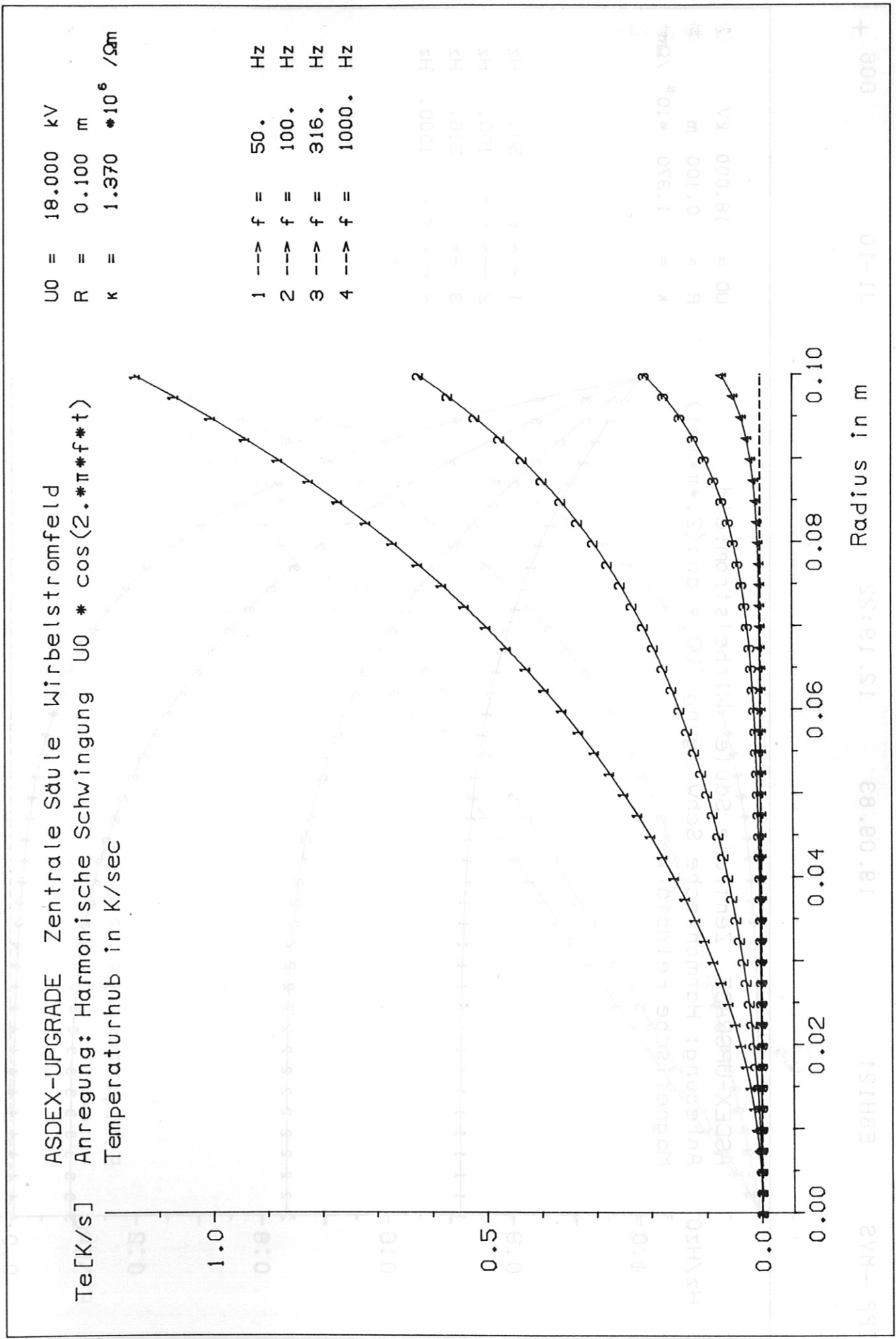


Fig. 18: Temperaturhub pro Zeiteinheit in Abhängigkeit vom Radius

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld
 Anregung: Harmonische Schwingung $U_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$
 Magnetische Feldstärke

$U_0 = 18.000 \text{ kV}$
 $R = 0.100 \text{ m}$
 $k = 1.370 \cdot 10^6 \text{ /}\Omega\text{m}$

1 ---> f = 50. Hz
 2 ---> f = 100. Hz
 3 ---> f = 316. Hz
 4 ---> f = 1000. Hz

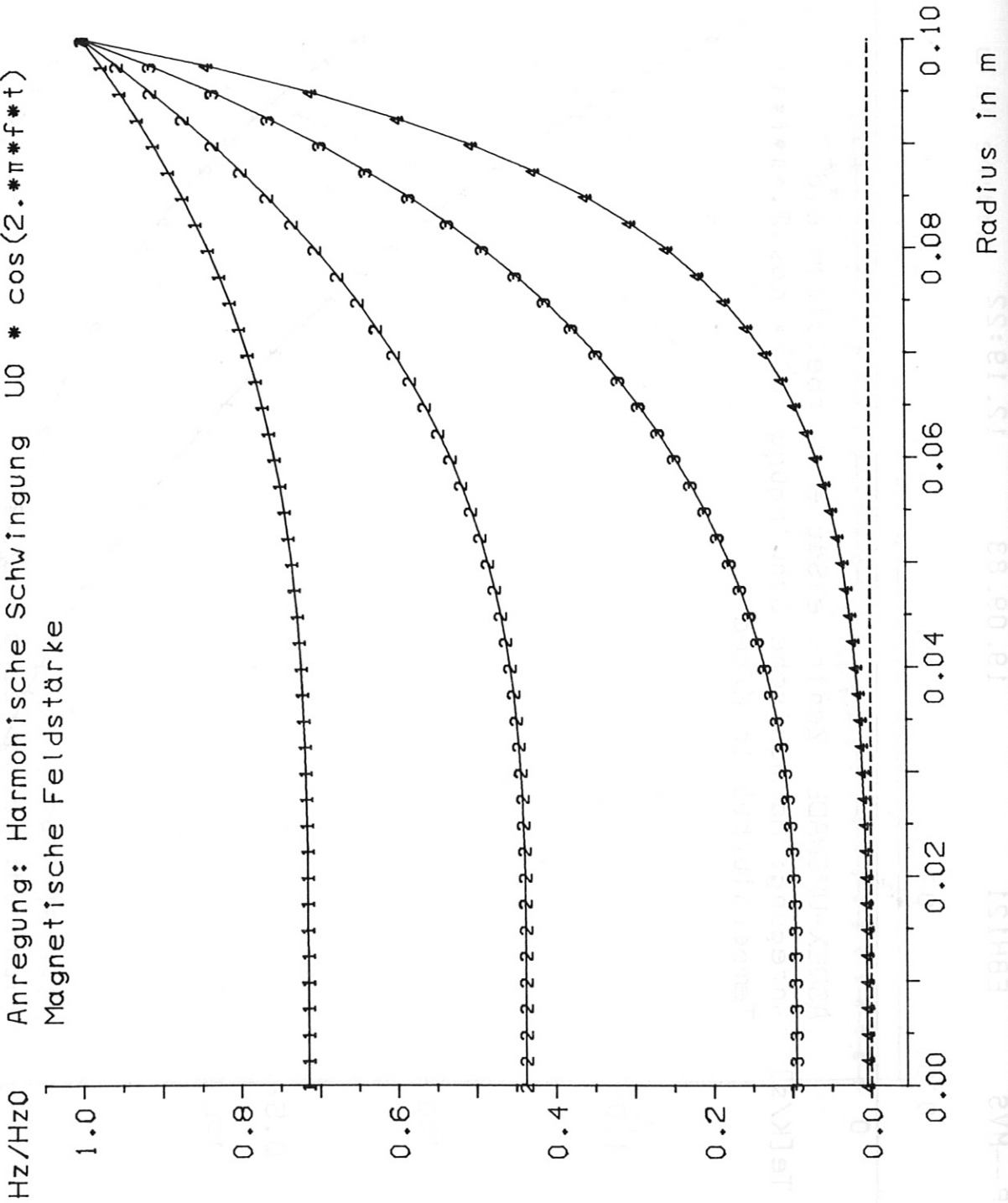


Fig. 19: Relative magnetische Feldstärke in Abhängigkeit vom Radius

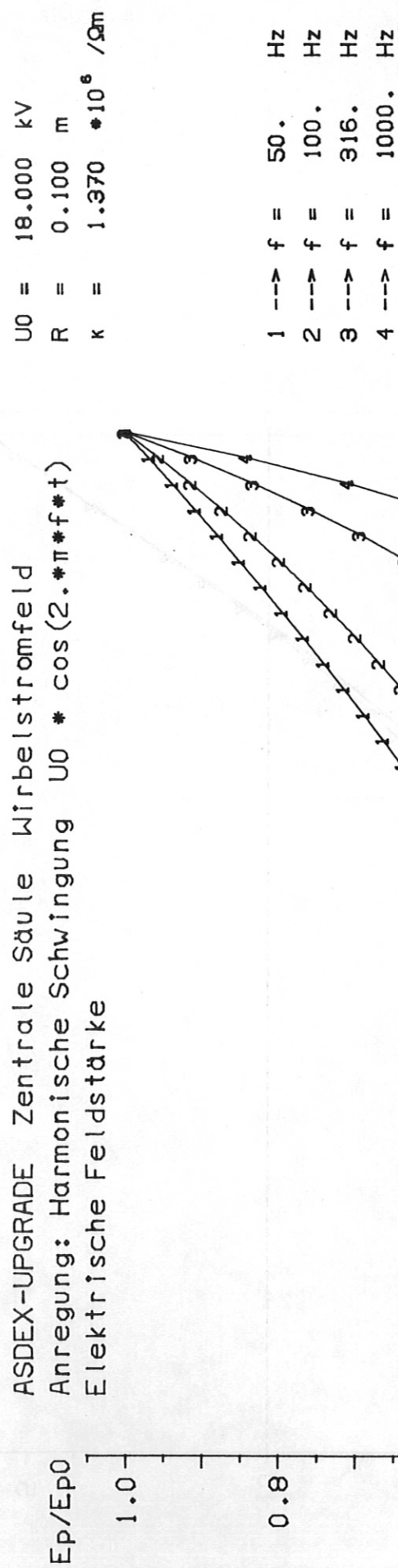


Fig. 20: Relative elektrische Feldstärke in Abhängigkeit vom Radius

ASDEX-UPGRADE Zentrale Säule Wirbelstromfeld

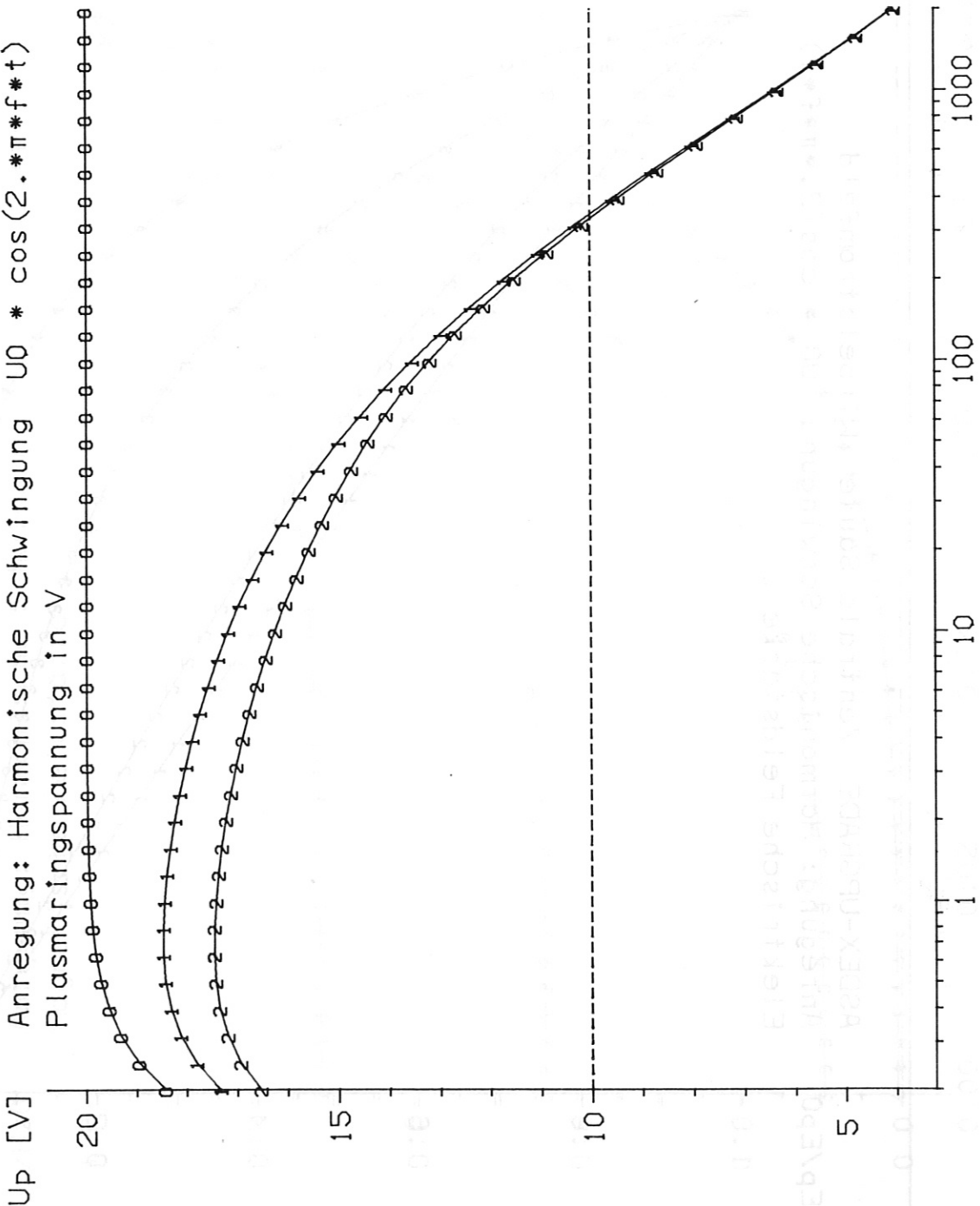
Anregung: Harmonische Schwingung $U_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$

Plasmaringspannung in V

$U_0 = 18.000 \text{ kV}$
 $\kappa = 1.370 \cdot 10^6 / \Omega \text{m}$

$R = 0.100 \text{ m}$

- 0 --- U_R
- 1 --- U_p (m.Gef. o.S.)
- 2 --- U_p (m.Gef. m.S.)



Frequenz in Hz

Fig. 21: Plasmaringspannung in Abhängigkeit von der Frequenz