Das Kastenmodell in Kugelsymmetrie zur Beschreibung der Pelletexpansion mit (oder ohne) Wärmezufuhr

- - - - -

Analytical solutions for spherically expanding pellet matter with and without heat input

M. Salvat

IPP 4/186 April 1980

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Das Kastenmodell in Kugelsymmetrie zur Beschreibung der Pelletexpansion mit (oder ohne) Wärmezufuhr

- - - - -

Analytical solutions for spherically expanding pellet matter with and without heat input

M. Salvat

IPP 4/186 April 1980

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 4/186

Das Kastenmodell in Kugelsymmetrie zur Beschreibung der Pelletexpansion mit (oder ohne) Wärmezufuhr.

Analytical solutions for spherically expanding pellet matter with and without heat input.

M. Salvat

April 1980

Abstract

Some exactly integrable models of the expansion of laser heated pellets are presented.

Zur Beschreibung der Expansion eines mit Laser aufgeheizten Plasmas benutzt man als vereinfachtes Modell ein Kastenprofil für die Zustandsgrößen. Ziel dieses Berichtes ist es, exakte Lösungen dieses Modells zusammenzulegen und zu diskutieren.

I. Diskussion des Gleichungssystems

Basov und Krokhin /1/ geben für die Erhaltungssätze folgende Gleichungen:

$$\mathrm{I}\quad\begin{cases} M\dfrac{dv}{dt} = 4\pi r^2 p & (1)\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Mv^2 + E\right) = Q & (2)\end{cases}$$

wobei p den mittleren Druck, v die radiale Geschwindigkeit, E die Energie, M die Masse, Q die Laserleistung bedeuten.

In Anlehnung an diese Gleichungen gibt Dawson /2/ für die Erhaltungssätze folgendes System

$$\mathrm{II}\quad\begin{cases} P\dot{V} = \dfrac{1}{2}\bar{M}\dot{\dot{R^2}} & (3)\\[2ex] P\dot{V} + \dfrac{3}{2}(N_i+N_e)k\dot{T} = W & (4)\end{cases}$$

wobei $\bar{M}$ jetzt eine mittlere Masse $= \frac{3}{5}$ M ist.

R der Radius des Plasmas am Rande,
P ein homogener Druck,
V das Volumen,
T die homogene Temperatur,
N_i die Gesamtzahl der Ionen,
N_e die Gesamtzahl der Elektronen.

Wir wollen die Erhaltungssätze noch diskutieren.

Gl. (2) (sowie (4) mit Berücksichtigung von (3)) ist der erste Satz der Thermodynamik

$$dQ = dU + PdV$$

Die Ableitung von Gl. (1) (sowie (3)) wollen wir näher betrachten. In Kugelsymmetrie lauten die Impulsgleichungen und die Erhaltung der Masse:

$$\rho \frac{\partial \dot r}{\partial t} + \rho \dot r \frac{\partial \dot r}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 \dot r) = 0$$

Dies kann man, wie bekannt, folgendermaßen kombinieren:

$$\rho \frac{\partial \dot r}{\partial t} + \rho \dot r \frac{\partial \dot r}{\partial r} + \dot r \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 \dot r \right) = - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot r) + \rho \dot r \frac{\partial \dot r}{\partial r} + \frac{\dot r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 \dot r) = - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 \dot r) = - \frac{\partial p}{\partial r} \qquad (5)$$

Gleichung (5) wird auf Plasmavolumen integriert.

$$\int_0^V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot r) dV + \int_0^V \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 \dot r) \cdot 4\pi r^2 dr = - \int_0^V \frac{\partial p}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$\int_0^V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot r) dV + (4\pi \rho r^2 \dot r)_0^V = - \int_0^V dp \cdot 4\pi r^2$$

Der 2. Term $(4\pi \rho r^2 \dot r)_0^V$ ist 0, da $\rho_R = 0$ ist.

$\int_0^V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot r) dV$ ist nach der Leibnitz'schen Regel gleich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^V (\rho \dot r)\, dV - \dot V \rho_R \dot R$$

Der Term $\dot V \rho_R \dot R$ ist 0, da $\rho_R = 0$. ist.

Außerdem: $$\int_0^V dp \cdot 4\pi r^2 = (p \cdot 4\pi r^2)_0^V - \int p \, d(4\pi r^2)$$

Der Term $\left(p\cdot 4\pi r^2\right)_0^V$ ist = 0, da $P_R = 0$ ist.

Es bleibt für den Impulssatz (in Kugelsymmetrie):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^V (\rho\dot r)\,dV = \int_0^V p\, d(4\pi r^2) \qquad (6)$$

Diese Gleichung ins unabhängig vom Modell. Wir spezialisieren die Gleichung (6) auf Kastengeometrie.

p, ρ, T haben keine r-Abhängigkeit und sind nur Funktion von t.

Man erhält: $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\int_0^V \dot r\,dV\right) = p\int_0^V d(4\pi r^2) = 4\pi R^2 p$$

Verwendet man die Erhaltung der Masse unter der Form:

$\rho r^3 = c^{te} = \rho_0 r_0^3$, wobei $\frac{r}{r_0} = \frac{R}{R_0}$; r_0, R_0: Anfangswerte

oder $\dot r = -\frac{1}{3}\frac{\dot\rho}{\rho} r$, so erhält man

$$\int_0^V \dot r\,dV = -\frac{1}{3}\frac{\dot\rho}{\rho}\int_0^V r\,dV = -\frac{1}{3}\frac{\dot\rho}{\rho}\,4\pi\int_0^V r^3\,dr = \frac{\pi}{3}\frac{\dot\rho}{\rho}R^4$$

aber $\frac{\dot\rho}{\rho} = -3\frac{\dot R}{R}$, so daß

$$\int_0^V \dot r\,dV = \pi R^3 \dot R$$

Insgesamt erhält man für die Impulsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\pi R^3\dot R\right) = 4\pi R^2 p$$

$$\frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial t}\left(M\dot R\right) = 4\pi R^2 p$$

$$\frac{3}{4}\dot R\,\frac{\partial}{\partial t}\left(M\dot R\right) = 4\pi R^2\dot R\, p$$

und mit $\bar{M} = \frac{3}{4}$ M,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2\right) = p\dot{V}$$

Das Kastenmodell liefert den Koeff. $\frac{3}{4}$ (statt $\frac{3}{5}$, den Dawson angenommen hat).

II. Lösung des Differentialsystems II

Exakte Lösungen existieren in 3 Fällen:

$$\begin{cases} W = 0 \\ W = C \qquad\qquad C = \text{o.k} \\ W = CR^2 \end{cases}$$

a) Fall W = 0

$$\text{III}\begin{cases} p\dot{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2\right) & (7) \\ p\dot{V} + \frac{3}{2}(N_i+N_e)k\dot{T} = 0 & (8) \end{cases}$$

Gl. (8) liefert die Adiabate, da man die Gleichung (8)

$$(n_i+n_e)kT\dot{V} + \frac{3}{2}(n_i+n_e)Vk\dot{T} = 0$$

schreiben kann, oder

$$\frac{\dot{T}}{T} + \frac{2}{3}\frac{\dot{V}}{V} = 0$$

oder

$$TV^{\frac{2}{3}} = T_0V_0^{\frac{2}{3}}$$

oder

$$TR^2 = T_0R_0^2 \qquad (9)$$

(7) und (8) kombiniert, liefern die Energiegleichung

$$\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2 + \frac{3}{2}(N_i+N_e)kT = E_0 \qquad (10)$$

Und mit Hilfe der Gl.(9) kann man Gl.(10)

$$\frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{3}{2}(N_i+N_e) k T_0 \frac{R_0}{R^2} = E_0$$

schreiben.

Die Integration ergibt:

$$R^2 = a_1 \left(t + \frac{\sqrt{R_0^2 - \frac{a_2}{a_1}}}{\sqrt{a_1}} \right)^2 + \frac{a_2}{a_1} \tag{11}$$

wobei

$$a_1 = \frac{2E_0}{M} \quad , \quad a_2 = \frac{3(N_i+N_e) k T_0}{M} R_0^2$$

T erhält man unter Benutzung von Gl. (9):

$$T = \frac{T_0 R_0^2}{a_1 \left(t + \frac{\sqrt{R_0^2 - \frac{a_2}{a_1}}}{\sqrt{a_1}} \right)^2 + \frac{a_2}{a_1}} \tag{12}$$

b) Fall W = C^{te} (Dawson)

$$\mathrm{IV} \left\{ \begin{array}{ll} P\dot{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M \dot{R}^2\right) & (13) \\ \frac{3}{2}(N_i+N_e) k \dot{T} + P\dot{V} = W & (14) \end{array} \right.$$

Durch Einsetzen von (13) und (14) und integrieren erhält man die Energiegleichung

$$\frac{3}{2}(N_i+N_e) kT + \frac{1}{2} M \dot{R}^2 = Wt + \frac{3}{2}(N_i+N_e) k T_0 + \frac{1}{2} M \dot{R}_0^2$$

$$= Wt + E_0 \tag{15}$$

Nach Dawson rechnet man aus (15) P und führt dessen Ausdruck in (13). Man hat folgende Schritte:

$$\frac{3}{2}(n_i+n_e) V kT + \frac{1}{2} M \dot{R}^2 = Wt + E_0$$

$$P = \frac{wt + E_0 - \frac{1}{2} M \dot{R}^2}{\frac{3}{2} V}$$

$$\frac{2}{3}\frac{\dot{V}}{V}\left(wt + E_0 - \frac{1}{2} M \dot{R}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M \dot{R}^2\right)$$

$$2\frac{\dot{R}}{R}\left(wt + E_0 - \frac{1}{2} M \dot{R}^2\right) = M \dot{R}\ddot{R}$$

$$wt + E_0 = \frac{M}{2}\frac{d}{dt}(R\dot{R})$$

$$M R\dot{R} = M R_0 \dot{R}_0 + 2E_0 t + wt^2$$

$$M\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R_0^2}{2}\right) = M R_0 \dot{R}_0 t + E_0 t^2 + w\frac{t^3}{3}$$

$$R^2 = R_0^2 + 2R_0\dot{R}_0 t + \frac{2E_0}{M} t^2 + \frac{2}{3}\frac{w}{M} t^3 \tag{16}$$

Aus (16) rechnet man:

$$\dot{R}^2 = \frac{\left(R_0\dot{R}_0 + 2\frac{E_0}{M} t + \frac{w}{M} t^2\right)^2}{R_0^2 + 2R_0\dot{R}_0 t + \frac{2E_0}{M} t^2 + \frac{2}{3}\frac{w}{M} t^3}$$

und die Temperatur erhält man aus (15):

$$T = \frac{wt + E_0 - \frac{1}{2} M \dot{R}^2}{\frac{3}{2}(N_i + N_e) k} \tag{17}$$

Wenn die Heizzeit genug lang ist, erhält man

$$\lim_{(t\ \text{groß})}\left(\frac{1}{2} M \dot{R}^2\right) = \frac{3}{4} wt \tag{18}$$

$$\lim_{(t\ \text{groß})}\left(\frac{3}{2}(N_i + N_e) kT\right) = \frac{1}{4} wt \tag{19}$$

Wenn $\dot{R}_0$ und T_0 genug klein sind (E_0 genug klein), erhält man:

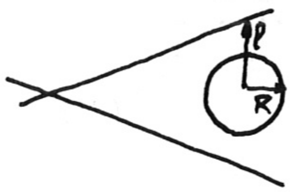
$$T = \frac{Wt}{3k(N_i+N_e)} \; \frac{2R_0^2 + \frac{1}{3}\frac{W}{\bar{M}}t^3}{R_0^2 + \frac{2}{3}\frac{W}{\bar{M}}t^3} \tag{20}$$

und

$$\lim_{(t\ \text{groß})} T = \frac{Wt}{6k(N_i+N_e)} \tag{21}$$

c) Fall $W = C\,R^2$

Dieser Fall entspricht der Bestrahlung eines expandierenden Pellets von Radius $R = R(t)$ in einem Laserstrahl von Radius $\ell > R(t)$, wie in Bild



angedeutet ist.

Es sei $\phi = \frac{L_{Law}}{M\ell^2}$ die Laserintensität ($L_{Law} = \frac{E_{Laser}}{Laser}$). Die dem Pellet zugeführte Leistung (unter Vernachlässigung der Lichtreflexion) lautet:

$$W = \frac{L_{Laser}}{\pi\ell^2}\cdot\pi R^2 = \frac{L_{Laser}}{4\pi\ell^2}\cdot 4\pi R^2$$

$$W = \bar{\Phi}\cdot 4\pi R^2 \qquad \left(\bar{\Phi} = \frac{L_{Laser}}{4\pi\ell^2}\right)$$

Das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{aligned} P\dot{V} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2\right) && (22)\\ P\dot{V} + \frac{3}{2}(N_i+N_e)k\dot{T} &= \phi\cdot 4\pi R^2 && (23)\end{aligned}\right.$$

läßt sich exakt integrieren.

Aus (22) rechnet man zuerst $\frac{3}{2}(N_i+N_e)kT$:

$$(n_i+n_e)kT\cdot 4\pi R^2\dot{R} = \bar{M}\dot{R}\ddot{R}$$

oder

$$\frac{3}{2}(N_i+N_e)kT = \frac{1}{2}\bar{M}R\ddot{R} \tag{24}$$

Durch Verwendung dieses Ergebnisses wird die Gleichung (23):

$$\frac{\hbar}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{R}^2+R\ddot{R}\right)=\bar{\phi}\cdot 4\pi R^2 \tag{25}$$

Man hat aber:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{R}^2+R\ddot{R}\right)=\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\left(R\dot{R}\right)=\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{R^2}{2}\right)$$

Gl. (25) läßt sich dann

$$\dddot{R^2}=4^2\pi\frac{\bar{\phi}}{\hbar}R^2 \tag{26}$$

schreiben und mit den Abkürzungen: $R^2=X$, $4^2\pi\frac{\bar{\phi}}{\hbar}=a^3$

$$\dddot{X}=a^3X \tag{27}$$

Die Lösung lautet:

$$R^2=X=C_1e^{at}+\left(C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at+C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)e^{-\frac{a}{2}t} \tag{28}$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_1, C_2, C_3 hat man

$$\left\{\begin{aligned} C_1+C_3&=X_0\\ a\left(C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2-\frac{1}{2}C_3\right)&=\dot{X}_0\\ a^2\left(C_1-\frac{\sqrt{3}}{2}C_2-\frac{1}{2}C_3\right)&=\ddot{X}_0\end{aligned}\right. \tag{29}$$

so erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} C_1&=\frac{1}{3}\left(X_0+\frac{\dot{X}_0}{a}+\frac{\ddot{X}_0}{a^2}\right)\\ C_2&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\dot{X}_0}{a}-\frac{\ddot{X}_0}{a^2}\right)\\ C_3&=\frac{2}{3}\left(X_0-\frac{\dot{X}_0}{2a}-\frac{\ddot{X}_0}{2a^2}\right)\end{aligned}\right. \tag{30}$$

Aus der Lösung (28) kann man $\dot{R}$ rechnen:

$$\dot{R} = \frac{a}{2} \frac{c_1 e^{at} + \left(\frac{c_2\sqrt{3} - c_3}{2}\cos - \frac{c_2 + c_3\sqrt{3}}{2}\sin\right) e^{-\frac{a}{2}t}}{\sqrt{c_1 e^{at} + (c_2 \sin + c_3 \cos) e^{-\frac{a}{2}t}}} \tag{31}$$

Hier bedeutet

$$\sin : \sin \frac{\sqrt{3}}{2} a t \quad , \quad \cos : \cos \frac{\sqrt{3}}{2} a t$$

Die dem Pellet zugeführte effektive Energie lautet:

$E_{eff} = 4\pi\bar{\Phi} \int_0^t R^2 dt$ und unter Verwendung von (28):

$$E_{eff} = 4\pi \frac{\bar{\Phi}}{a}\left(-c_1 + c_2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{c_3}{2} + c_1 e^{at} - \frac{1}{2}\left(c_2(\sin + \sqrt{3}\cos) + c_3(\cos - \sqrt{3}\sin)\right) e^{-\frac{a}{2}t}\right) \tag{32}$$

wobei $4\pi \frac{\bar{\Phi}}{a}$ wegen der Definition von $a^3 \left(= 4^2\pi \frac{\bar{\Phi}}{\bar{M}} \right)$
durch $\frac{\bar{M}}{4} a^2$ ersetzt werden kann.

Weiter kann man aus (31) die kinetische Energie ausdrücken:

$$\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2 = \frac{1}{2}\bar{M}\frac{a^2}{4} \frac{c_1 e^{at} + \left(\frac{c_2\sqrt{3} - c_3}{2}\cos - \frac{c_2 + c_3\sqrt{3}}{2}\sin\right) e^{-\frac{a}{2}t}}{c_1 e^{at} + (c_2 \sin + c_3 \cos) e^{-\frac{a}{2}t}} \tag{33}$$

Die Energiegleichung lautet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2 + \frac{3}{2}(N_i + N_e) kT\right) = \bar{\Phi} \cdot 4\pi R^2$$

und die Integration liefert:

$$\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2 + \frac{3}{2}(N_i + N_e) kT - \left(\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2 + \frac{3}{2}(N_i + N_e) kT_0\right) =$$

$$\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2 + \frac{3}{2}(N_i + N_e) kT - E_0 = \int \bar{\Phi}\, 4\pi R^2 dt,$$

so daß $\quad \frac{3}{2}(N_i + N_e) kT = E_0 + E_{eff} - \frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2$

Mit Hilfe von (32) und (33) findet man den exakten Ausdrück zur Berechnung der inneren Energie (bzw. der Temperatur).

Es läßt sich sofort berechnen, daß:

$$\lim_{(t\ \mathrm{groß})} \left(\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2\right) = \lim_{(t\ \mathrm{groß})} \left(\frac{3}{2}(N_i+N_e)kT\right) = \frac{E_{eff}}{2}$$

Dieses Ergebnis ist, abweichend von dem Ergebnis von Dawson, Gleichung (18) und (19).

Zusammenfassung der Ergebnisse der Integration (exakte Lösungen) des Gleichungssystems

$$\begin{cases} P\dot{V} = \frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2 \\ P\dot{V} + \frac{3}{2}(N_i+N_e)kT = W \end{cases}$$

in Kugelsymmetrie.

1) Fall W = 0

$$R^2 = a_1\left(t + \frac{\sqrt{R_0^2 - \frac{a_2}{a_1}}}{\sqrt{a_1}}\right)^2 + \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}^2 = \frac{1}{2}\bar{M}a_1^2 \frac{\left(t + \frac{\sqrt{R_0^2 - \frac{a_2}{a_1}}}{\sqrt{a_1}}\right)^2}{R^2}$$

$$T = T_0\frac{R_0^2}{R^2},$$

wobei
$$a_1 = \frac{2E_0}{\bar{M}} = 2\,\frac{\frac{1}{2}\bar{M}\dot{R}_0^2 + \frac{3}{2}(N_i+N_e)kT_0}{\bar{M}}$$

$$a_2 = R_0^2\,\frac{3(N_i+N_e)kT}{\bar{M}}$$

$$\bar{M} = \frac{3}{4}M \quad \left(\frac{3}{5}\bar{M}\ \text{nach Dawson}\right)$$

2) Fall $W = c^{te}$ (Dawson)

$$R^2 = R_0^2 + 2R_0\dot R_0 t + 2\frac{E_0}{\bar M}t^2 + \frac{2}{3}\frac{W}{\bar M}t^3$$

$$E_{eff} = Wt$$

$$\frac{1}{2}\bar M\dot R^2 = \frac{1}{2}\bar M\,\frac{\left(R_0\dot R_0 + 2\frac{E_0}{\bar M}t + \frac{W}{\bar M}t^2\right)^2}{R_0^2 + 2R_0\dot R_0 + 2\frac{E_0}{\bar M}t^2 + \frac{2}{3}\frac{W}{\bar M}t^3}$$

$$T = \frac{Wt + E_0 - \frac{1}{2}\bar M\dot R^2}{\frac{3}{2}(N_i+N_e)k}$$

$$\lim_{(t\,grop)}\left(\frac{1}{2}\bar M\dot R^2\right) = \frac{3}{4}Wt = \frac{3}{4}E_{eff}$$

$$\lim_{(t\,grop)}\left(\frac{3}{2}(N_i+N_e)kT\right) = \frac{1}{4}Wt = \frac{1}{4}E_{eff}$$

$$\lim_{(t\,grop)} T = \frac{Wt}{6k(N_i+N_e)}$$

3) Fall $W = \bar\Phi \cdot 4\pi R^2$

$$R^2 = C_1 e^{at} + (C_2\sin + C_3\cos)e^{-\frac{a}{2}t}$$

$$E_{eff} = \frac{\bar M}{4}a^2\left(-C_1 + C_2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{C_3}{2} + C_1 e^{at} - \frac{1}{2}\left(C_2(\sin + \sqrt{3}\cos) + C_3(\cos - \sqrt{3}\sin)\right)e^{-\frac{a}{2}t}\right)$$

$$\frac{1}{2}\bar M\dot R^2 = \frac{1}{2}\bar M\frac{a^2}{4}\cdot\frac{C_1 e^{at} + \left(\frac{C_2\sqrt{3} - C_3}{2}\cos - \frac{C_2 + C_3\sqrt{3}}{2}\sin\right)e^{-\frac{a}{2}t}}{C_1 e^{at} + (C_2\sin + C_3\cos)e^{-\frac{a}{2}t}}$$

$$\frac{3}{2}(N_i+N_e)kT = E_0 + E_{eff} - \frac{1}{2}\bar M\dot R^2$$

$$\lim_{(t\,prop)}\left(\frac{1}{2}\bar M\dot R^2\right) = \lim_{(t\,grop)}\left(\frac{3}{2}(N_i+N_e)kT\right) = \frac{E_{eff}}{2}$$

wobei

$$\begin{cases} \sin = \sin \frac{\sqrt{3}}{2} a t \\ \cos = \cos \frac{\sqrt{3}}{2} a t \\ a = \left(4^{2}\eta \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\pi}}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}\left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{a} + \frac{\ddot{x}_0}{a^2}\right) \\ C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\dot{x}_0}{a} - \frac{\ddot{x}_0}{a^2}\right) \\ C_3 = \frac{2}{3}\left(x_0 - \frac{\dot{x}_0}{2a} - \frac{\ddot{x}_0}{2a^2}\right) \end{cases}$$

Referenzen:

/1/ N.G. Bašov und D.N. Krokhin. Proceedings of the Conference of Quantum Electronics, Paris, 1963.

/2/ J.M. Dawson. The Physics of Fluids, Vol. 7, No. 7 (July 1964) p. 981.