

W.-G. Wrobel
1978
Frequenzverdreifung mit Multimode-Lasern

H. Langer, H. Röhr, W.-G. Wrobel

IPP 1/167

Oktober 1978



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN

Frequenzverdreifachung mit Multimode-Lasern

H. Langer, H. Röhr, W.-G. Wrobel

IPP 1/167

Oktober 1978

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

H. Langer
H. Röhr
W.-G. Wrobel

Oktober 1978

Abstract

The presence of different modes with random phases in a laser beam leads to fluctuations in nonlinear optical interactions.

This paper describes the influence of the linewidth of a dye laser on the generation of intensive Lyman-alpha radiation by frequency tripling. Using this Lyman-alpha source for resonance scattering on strongly doppler-broadened lines in fusion plasmas the detection limit of neutral hydrogen is nearly two orders higher with the multimode than the singlemode dye laser.

Zusammenfassung

Die Gegenwart verschiedener Moden mit Zufallsphasen in einem Laserstrahl führt zu Fluktuationen bei optisch-nichtlinearen Prozessen.

Die vorliegende Arbeit beschreibt den Einfluß der Linienbreite eines Farbstofflasers auf die Erzeugung intensiver L_{α} - Strahlung durch Frequenzverdreifachung. Bei Verwendung dieser L_{α} - Quelle zur Resonanzstreuung an stark dopplerverbreiterten Linien in Fusionsplasmen kann die Nachweisgrenze für neutralen Wasserstoff bei Multimode-Betrieb des Farbstofflasers um fast 2 Größenordnungen erhöht werden gegenüber dem Singlemode-Fall.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Formaler Ansatz und Meßgrößen	2
3. Berechnung des Multimode-Faktors	4
4. Ergebnisse der numerischen Rechnungen	8
5. Diskussion der Ergebnisse	12
5.1 Einfluß der spektralen Intensitätsverteilung	12
5.2 Einfluß von Transversalmoden	13
5.3 Einfluß der Phasenanpassungs-Bedingung	13
6. Bedeutung für die Plasmadiagnostik	17
6.1 Lyman- α -Resonanzstreuung	17
6.2 Signal-Rausch-Verhältnis	18
7. Schlußbemerkungen	20

1. Einleitung

Ein vielversprechendes Verfahren, die Neutralgasdichte in einem Fusionsplasma zu messen, ist die Resonanzstreuung am Grundzustand des Wasserstoffatoms. Dazu benötigt man Lichtquellen mit einer Wellenlänge von 1216 \AA (Lyman-Alpha) /1/. Ein Weg, solche Quellen zu konstruieren, ist die Frequenzverdopplung eines rubin-lasergepumpten Farbstofflasers in einem Kristall und die anschließende Frequenzverdreifung des so erzeugten Lichts in einer Gaszelle.

Wegen der hohen Neutralgastemperatur in einem Fusionsplasma ist die Resonanzlinie dopplerverbreitert. Das anregende Licht der VUV-Quelle sollte möglichst die gleiche spektrale Breite aufweisen, damit es alle Wasserstoffatome anregen kann und somit ein möglichst großes Signal-Rausch-Verhältnis ergibt. Eine entsprechende Breite muß auch das Licht des Farbstofflasers besitzen, das sich deshalb aus einer Vielzahl von Moden zusammensetzt.

Wegen der Nichtlinearität der Frequenzvervielfachungsprozesse genügt es nicht, die Konversionseffizienz für eine einzelne Mode zu berechnen und auf den tatsächlich vorliegenden Fall einer Vielzahl von Moden ohne weiteres anzuwenden. Vielmehr führt allein eine Aufteilung der Lichtintensität auf die tatsächlich beteiligten Moden zu einem Wirkungsgrad, der sich als höher erweist, als im Singlemode-Fall /2/. Der Grund ist, daß es durch die Aufteilung zu Intensitätsfluktuationen in der Grundwelle kommt. Wegen der Nichtlinearität der Prozesse werden die Intensitätsspitzen bevorzugt konvertiert, so daß im Mittel der Konversionsgrad ansteigt.

Der zeitliche Verlauf der Intensitätsfluktuationen hängt von den gegenseitigen Phasenbeziehungen der einzelnen Moden ab. Beim Aufbau eines Laserpulses aus dem Rauschen des verstärkenden Mediums werden diese Phasen rein zufällig festgelegt, d.h. bei jedem Laserpuls treten andere Phasenbeziehungen auf. Es ist daher angebracht, stochastische Phasen anzunehmen. Damit ist das Ergebnis der Frequenzvervielfachung eines Laserpulses nicht mehr determiniert. Es ist nur noch möglich, den Mittelwert und die Schwankungsbreite für eine Vielzahl von Pulsen anzugeben.

Insbesondere für die Frequenzverdreifung wird im folgenden eine derartige statistische

Rechnung durchgeführt. Praktisch bedeutet das für die Plasmadiagnostik:

1.) Die Lineinbreite der $L\alpha$ -Quelle ist in einem Bereich von etwa 0.01 \AA bis 5 \AA wählbar. Dies ist von besonderer Bedeutung für das Signal-Rausch-Verhältnis bei einem Streuexperiment an stark dopplerverbreiterten Linien.

2.) Die Intensität der VUV-Strahlung schwankt von Schuß zu Schuß, abhängig von Linienform und -breite. Die relative Schwankung ist dabei maximal $\pm 15\%$.

2. Formaler Ansatz und Meßgrößen

In seiner allgemeinsten Form ist das elektrische Feld der Strahlung, die von einem Multimode-Laser emittiert wird, gegeben durch:

$$(1) \quad \vec{E} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_{kj} u_j(x, y) e^{i(\beta_{kj}z - \omega_{kj}t)}$$

Dabei ist $E_{kj} = A_{kj} e^{i\phi_{kj}}$ die komplexe Amplitude der einzelnen Moden und $u_j(x, y)$ ihre Feldstärkeverteilung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Index k steht für verschiedene longitudinale, j für verschiedene Transversalmoden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei linear polarisiertes Licht angenommen.

Die Leistung, die ein Detektor der Fläche F mit der Zeitkonstanten T am Ort $z = 0$ mißt, ist gegeben durch

$$(2) \quad \bar{I} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot c \frac{1}{T} \int dF \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt |\vec{E}|^2$$

Da es mit Farbstofflasern möglich ist, nur eine Transversalmode, z. B. die TEM_{00} zu erzeugen, soll im folgenden nur eine Transversalmode angenommen werden.

Dann gilt

$$(3) \quad \bar{I} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot c \cdot \frac{1}{T} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} E_{\lambda} E_{\lambda'} \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{i(\omega_{\lambda} - \omega_{\lambda'})t} dt$$

Ist der Detektor so langsam, daß er Intensitätsänderungen mit der Frequenz des longitudinalen Modenabstands nicht mehr auflösen kann ($\tau \gg (\omega_2 - \omega_2')$), so wird das Zeitintegral

$$(4) \quad \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e^{i(\omega_2 - \omega_2')t} dt = \delta(\lambda - \lambda') = \begin{cases} 1, & \lambda = \lambda' \\ 0, & \lambda \neq \lambda' \end{cases}$$

und die Summation vereinfacht sich zu

$$(5) \quad \bar{I} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \sum_{\lambda} |E_{\lambda}|^2$$

Bei optischen nicht-linearen Prozessen der Ordnung q gilt für den Zusammenhang zwischen den Intensitäten \bar{I} der Grundwelle und \bar{I}_q der q -ten Harmonischen

$$(6) \quad \bar{I}_q = c_q \bar{I}^q$$

Dabei ist c_q dem Quadrat der nichtlinearen Suszeptibilität proportional. Die mit Detektoren meßbaren Größen sind \bar{I} und \bar{I}_q , nicht aber \bar{I}^q

Um einen Vergleich mit dem Experiment zu ermöglichen, muß die Gleichung (6) daher umgeschrieben werden in

$$(7) \quad \bar{I}_q = c_q \cdot F_{nm} \cdot \bar{I}^q$$

mit dem Multimode-Faktor F_{nm}

$$F_{nm} = \frac{\bar{I}_q}{\bar{I}^q}$$

Der Term \bar{I}^q ist nach Gl. (5) von den Phasen ϕ_{λ} der einzelnen Moden unabhängig und damit für Laserpulse verschiedener Phasenverteilung gleich.

Der Term \bar{I}_q ist jedoch immer größer als \bar{I}^q und kann von Schuß zu Schuß variieren.

Bei zufälliger Phasenverteilung ergibt sich für viele Schüsse ein Mittelwert $\langle F_{nm} \rangle$

mit einer Schwankungsbreite $\langle \Delta F_{nm} \rangle$

3. Berechnung des Multimode-Faktors

Der Multimode-Faktor F_{nn} der q -ten Harmonischen ist bis auf die Konstante $(\bar{I}^q)^{-1}$ für N Moden bestimmt durch

$$(8) \quad I^q = \frac{1}{2} c \cdot \epsilon_0 \sum_{\lambda_1=1}^N \cdots \sum_{\lambda_q=1}^N A_{\lambda_1}^* \cdots A_{\lambda_q}^* \cdot A_{\lambda_{q+1}} \cdots A_{\lambda_{2q}} \cdot e^{i(\omega_{\lambda_1} + \dots + \omega_{\lambda_q} - \omega_{\lambda_{q+1}} - \dots - \omega_{\lambda_{2q}})t} \cdot e^{i(\phi_{\lambda_1} + \dots + \phi_{\lambda_q} - \phi_{\lambda_{q+1}} - \dots - \phi_{\lambda_{2q}})}$$

Für das Folgende sei vorausgesetzt, daß alle beteiligten Moden unterschiedliche Frequenzen haben. Unter dieser Bedingung läßt sich dieser Ausdruck I^q in drei Gruppen von Termen aufspalten, nämlich

$$(9) \quad I^q = C(\phi=0, \Omega t=0) + P(\phi, \Omega t) + T(\phi, \Omega t \neq 0)$$

mit

$$\phi = \phi_{\lambda_1} + \dots + \phi_{\lambda_q} - \phi_{\lambda_{q+1}} - \dots - \phi_{\lambda_{2q}}$$

$$\Omega = \omega_{\lambda_1} + \dots + \omega_{\lambda_q} - \omega_{\lambda_{q+1}} - \dots - \omega_{\lambda_{2q}}$$

Bei C ist Ω immer 0, was dazu führt, daß auch ϕ immer 0 ist. T enthält die Terme, bei denen Ω prinzipiell nicht 0 werden kann. P enthält den Rest.

Die Zeitmittelung $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt$ mit $\tau \gg (\omega_{\lambda} - \omega_{\lambda'})^{-1}$ führt zu

$$(10) \quad \bar{I}^q = C + \overline{P(\phi)}$$

Der dritte Term $T(\phi, \Omega t)$ würde nur mit schnelleren Detektoren als zeitliche Intensitätsfluktuation beobachtet werden, da zu $T(\phi, \Omega t)$ nur Glieder mit $\Omega t \neq 0$ beitragen, die sich bei der Zeitmittelung über das Intervall τ aufheben.

$P(\phi)$ wird gebildet aus Anteilen für die gleichzeitig gilt $\phi \neq 0$ und $\Omega t = 0$.

Daher stellt $P(\phi)$ einen zeitlich konstanten Ausdruck dar, der jedoch von Schuß zu Schuß variiert.

Unter der Annahme zufällig verteilter Phasen ϕ_k ist der Erwartungswert $\langle P(\phi) \rangle \sim \prod_{k=1}^N \langle e^{i\phi_k} \rangle = 0$ und damit

$$(11) \quad \langle \bar{I}^q \rangle = C$$

bzw.

$$(12) \quad \Delta \bar{I}^q = \left(\langle (\bar{I}^q)^2 \rangle - \langle \bar{I}^q \rangle^2 \right)^{1/2} = \langle P^2(\phi) \rangle^{1/2}$$

Man berücksichtigt die Konstante $(\bar{I}^q)^{-1}$ bei der Berechnung der Zahlenwerte für F_{nn} durch die Einführung normalisierter Amplituden α_k nach

$$(13) \quad \alpha_k = \left(\frac{C \cdot \epsilon_0}{2} \right)^{1/2} \frac{|E_k| \cdot e^{i\phi_k}}{\bar{I}^{1/2}},$$

so daß gilt

$$(14) \quad \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 = 1$$

Speziell für N Moden gleicher Intensität folgt

$$(15) \quad |\alpha_k|^2 = \frac{1}{N}$$

Im Anhang 1 sind die Anteile von \bar{I}^q nach dem eben diskutierten Schema aufgelistet für die Frequenzverdreifung ($q=3$). Danach ist

$$(16) \quad \langle F_{nn} \rangle = C = 6 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3} |\alpha_{k_1}|^2 |\alpha_{k_2}|^2 |\alpha_{k_3}|^2 + 9 \sum_{k_1 \neq k_2} |\alpha_{k_1}|^2 |\alpha_{k_2}|^4 + \sum_{k_1} |\alpha_{k_1}|^6;$$

und

$$\begin{aligned}
 (17) \quad (\Delta F_{MM})^2 &= \langle P^2 \rangle = \\
 &= 36 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \neq k_5 \neq k_6} \sum |\alpha_{k_1}|^2 |\alpha_{k_2}|^2 |\alpha_{k_3}|^2 |\alpha_{k_4}|^2 |\alpha_{k_5}|^2 |\alpha_{k_6}|^2 \delta(k_1+k_2+k_3-k_4-k_5-k_6) \\
 &+ 18 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \neq k_5} \sum |\alpha_{k_1}|^4 |\alpha_{k_2}|^2 |\alpha_{k_3}|^2 |\alpha_{k_4}|^2 |\alpha_{k_5}|^2 \delta(2k_1+k_2-k_3-k_4-k_5) \\
 &+ 36 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \neq k_5} \sum |\alpha_{k_1}|^4 |\alpha_{k_2}|^2 |\alpha_{k_3}|^2 |\alpha_{k_4}|^2 |\alpha_{k_5}|^2 \delta(k_1+k_2-k_3-k_4) \\
 &+ 6 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4} \sum |\alpha_{k_1}|^6 |\alpha_{k_2}|^2 |\alpha_{k_3}|^2 |\alpha_{k_4}|^2 \delta(k_1+k_2+k_3-3k_4) \\
 &+ 18 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4} \sum |\alpha_{k_1}|^6 |\alpha_{k_2}|^2 |\alpha_{k_3}|^2 |\alpha_{k_4}|^2 \delta(k_1+k_2-k_3-k_4) \\
 &+ 9 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4} \sum |\alpha_{k_1}|^4 |\alpha_{k_2}|^4 |\alpha_{k_3}|^2 |\alpha_{k_4}|^2 \delta(k_1+2k_2-k_3-2k_4) \\
 &+ 18 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4} \sum |\alpha_{k_1}|^4 |\alpha_{k_2}|^4 |\alpha_{k_3}|^2 |\alpha_{k_4}|^2 \delta(2k_1-k_3-k_4) \\
 &+ 6 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3} \sum |\alpha_{k_1}|^8 |\alpha_{k_2}|^2 |\alpha_{k_3}|^2 \delta(k_1+k_2-2k_3) \\
 &+ 3 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3} \sum |\alpha_{k_1}|^6 |\alpha_{k_2}|^4 |\alpha_{k_3}|^2 \delta(3k_1-2k_2-k_3) \\
 &+ 9 \sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3} \sum |\alpha_{k_1}|^6 |\alpha_{k_2}|^4 |\alpha_{k_3}|^2 \delta(k_1+k_2-2k_3)
 \end{aligned}$$

Setzt man in Gl. (16) eine Rechteckverteilung (alle Amplituden α_k gleich $\frac{1}{\sqrt{N}}$) ein, so gilt

$$(18) \quad \langle F_{nn} \rangle = \frac{1}{N^3} (6N(N-1)(N-2) + 9N(N-1) + N) = 6 - \frac{9}{N} + \frac{4}{N^2};$$

Für den Fall unendlich vieler Moden (inkohärentes Licht) gilt für die q-te Harmonische

$$(19) \quad C = q! \sum_{\lambda_1} \dots \sum_{\lambda_q} |\alpha_{\lambda_1}|^2 \dots |\alpha_{\lambda_q}|^2 +$$

$$+ \left(\frac{q!}{2!}\right)^2 \sum_{\lambda_1} \dots \sum_{\lambda_{q-1}} |\alpha_{\lambda_1}|^4 |\alpha_{\lambda_2}|^2 \dots |\alpha_{\lambda_{q-1}}|^2 +$$

$$+ \dots + \left(\frac{q!}{q!}\right)^2 \sum_{\lambda_1} |\alpha_{\lambda_1}|^{2q};$$

Für eine Rechteckverteilung ist

$$(20) \quad C = q! \frac{N(N-1) \dots (N-q+1)}{N^q} + O\left(\frac{1}{N}\right) = q! + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

d.h.

$$(21) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \langle F_{nn} \rangle = q!$$

Dieser Grenzwert ergibt sich auch in der Photonen-Statistik /3/. Der dominierende Term bei der Schwankung $\langle P^2 \rangle$ für $N \rightarrow \infty$ ist

$$(22) \quad \langle P^2 \rangle \approx \sum_{\lambda_1} \dots \sum_{\lambda_q} |\alpha_{\lambda_1}|^2 \dots |\alpha_{\lambda_q}|^2 \delta(\underbrace{\lambda_1 + \dots + \lambda_q}_{S_q} - \underbrace{\lambda_{q+1} + \dots + \lambda_{2q}}_{S_q'})$$

Die Anzahl der gleichen S_q ist $\frac{1}{(q-1)!} S_q^{q-1}$ und die Gesamtzahl aller S_q

ist etwa $\sum_{S=1}^{qN} \frac{1}{(q-1)!} \cdot S^{q-1}$. Mit $\sum_{S=0}^N S^q = \frac{N^{q+1}}{q+1} + O(N^q)$

/7/ ist

$$(23) \quad \langle P^2 \rangle \approx \frac{\sum_{S=1}^{qN} (S^{q-1})^2}{\left(\sum_{S=1}^{qN} S^{q-1}\right)^2} = \frac{q}{2q-1} \cdot \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

und damit

$$(24) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta F_{nn})^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q}{2q-1} \cdot \frac{1}{N} = 0$$

Mit steigender Modenzahl geht also das Schwankungsquadrat des Multimode-Faktors $(\Delta F_{nn})^2$ proportional $\frac{q}{2q-1} \cdot \frac{1}{N}$ gegen Null.

4. Ergebnisse der numerischen Rechnungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der numerischen Berechnung des Mittelwerts des Multimode-Faktors $\langle F_{nn} \rangle$ bzw. dessen Schwankung ΔF_{nn} dargestellt. Die Werte von F_{nn} sind über der Modenzahl N^{\max} des Farbstofflasers aufgetragen. Der für unser Experiment interessante Wertebereich liegt in dem Intervall $10 \leq N^{\max} \leq 2000$. Die Intervallgrenzen sind dabei gegeben durch den typischen Modenabstand für unseren Laser-Resonator ($c/2L \hat{=} 0.005 \text{ \AA}$). Die minimale Linienbreite, begrenzt durch das Fabry-Perot-Etalan im Resonator, liegt bei 0.05 \AA . Die obere Grenze wird bestimmt durch die "Phase-match" - Bedingung, wie später näher erläutert wird. Interessant sind insbesondere die Ergebnisse für die Grenze kleiner Modenzahlen, die man nur durch die in dieser Arbeit beschriebenen Rechnungen erhält. Zu den Rechnungen selbst ist noch zu bemerken, daß bei sehr hohen N^{\max} die Rechenzeit wegen der großen Zahl an Rechenoperationen (ca. $(N^{\max})^{2q}$) sehr schnell anwächst. Zudem ist dieser Bereich physikalisch uninteressant, da $\langle F_{nn} \rangle$ asymptotisch seinen Grenzwert $q!$ anstrebt und $\Delta F_{nn} \sim (N^{\max})^{-1/2}$ abnimmt.

Der Verlauf von $\langle F_{nn} \rangle \pm \Delta F_{nn}$ in Abhängigkeit der Modenzahl ist in Abb. 1 für $q = 2$ (geringster Rechenaufwand) dargestellt. Die Schwankung erreicht etwa bei $N^{\max} = 7$ ihr Maximum und geht anschließend mit $\Delta F_{nn} \sim \left(\frac{3}{2} N\right)^{-1/2}$ gegen Null.

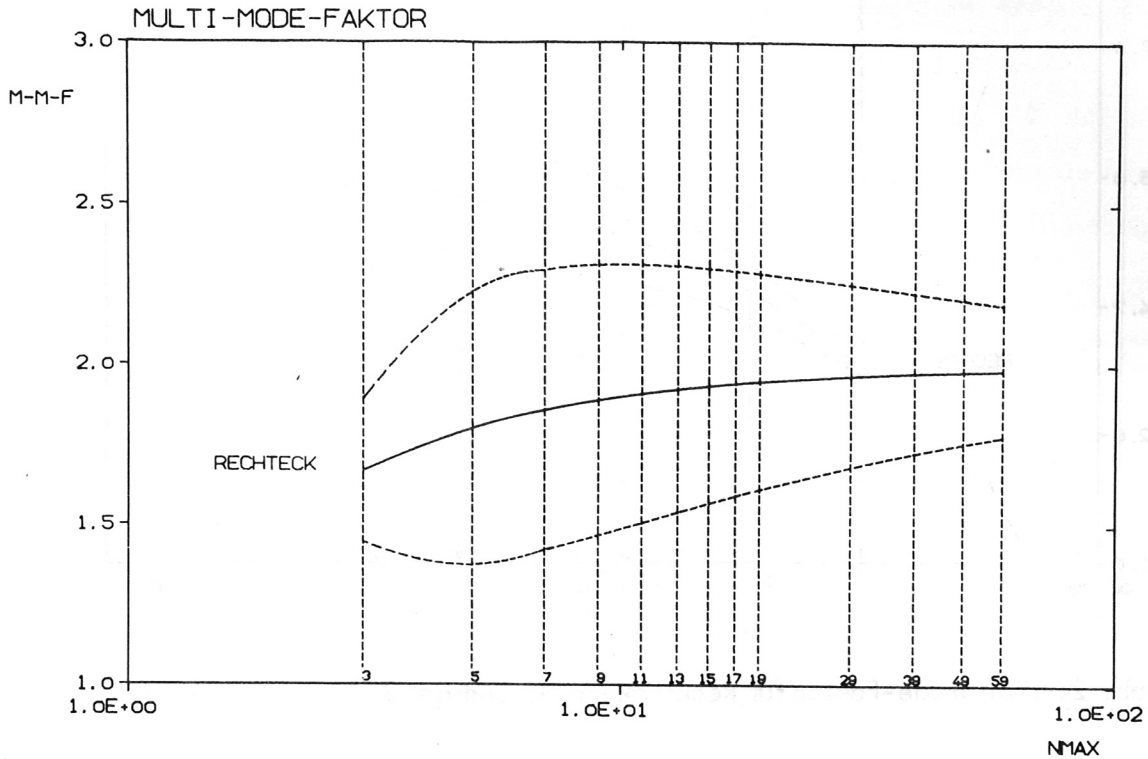


Abb. 1: Multimode-Faktor für Rechteck-Profil und $q = 2$

Die Abbildungen 2 bis 4 zeigen die Ergebnisse für den Fall $q = 3$ (Frequenzverdreifung).

Die Rechnungen für $q = 3$ wurden wegen zu hoher Rechenzeit nur bis zum Maximum der Schwankung durchgeführt. ΔF_{nn} geht dann proportional $(\frac{5}{3} \sim)^{-1/2}$ gegen Null.

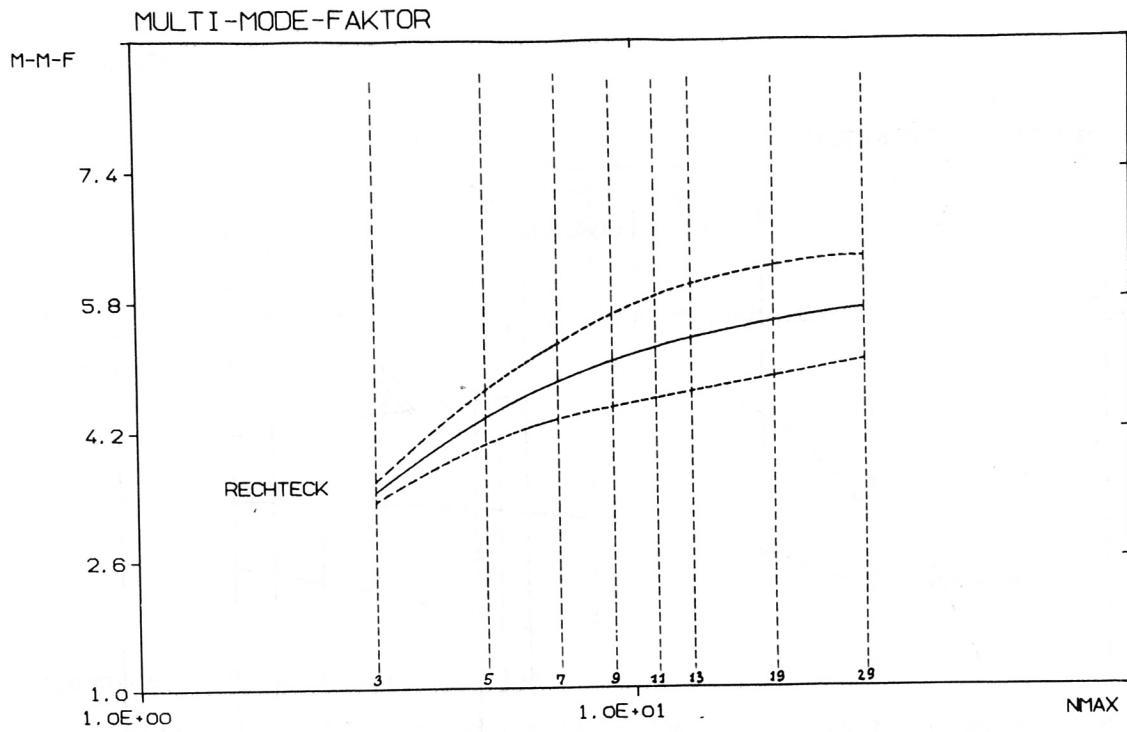


Abb. 2: Multimode-Faktor für Rechteck-Profil und $q = 3$

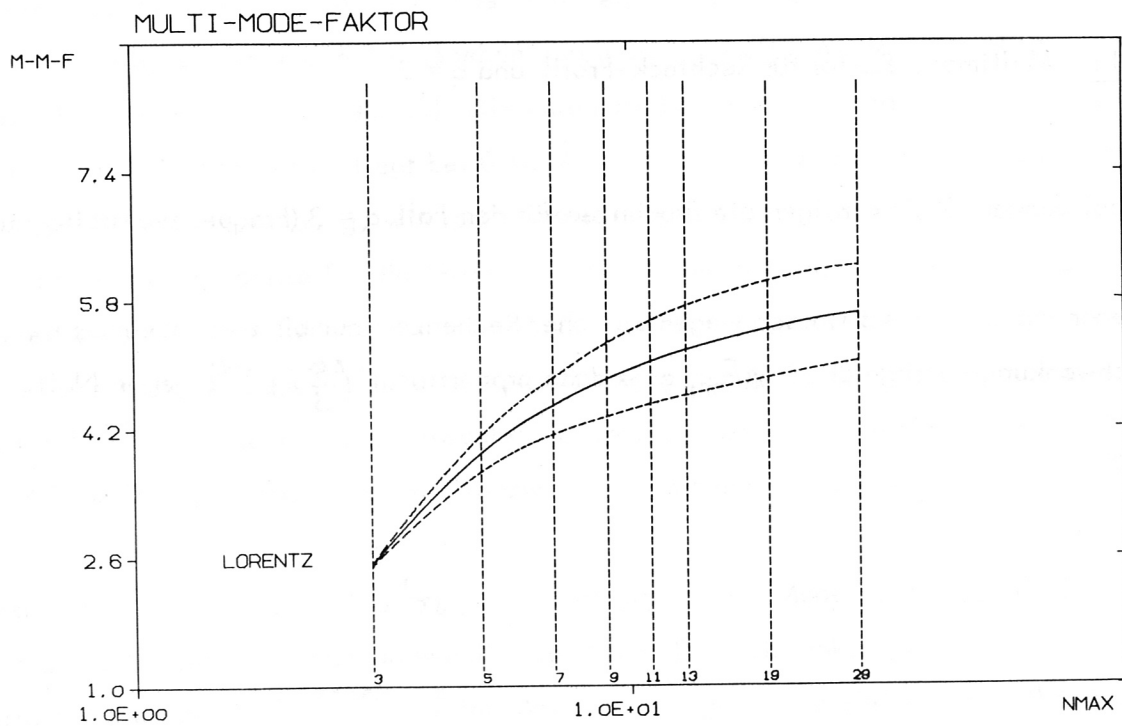


Abb. 3: Multimode-Faktor für Lorentz-Profil und $q = 3$

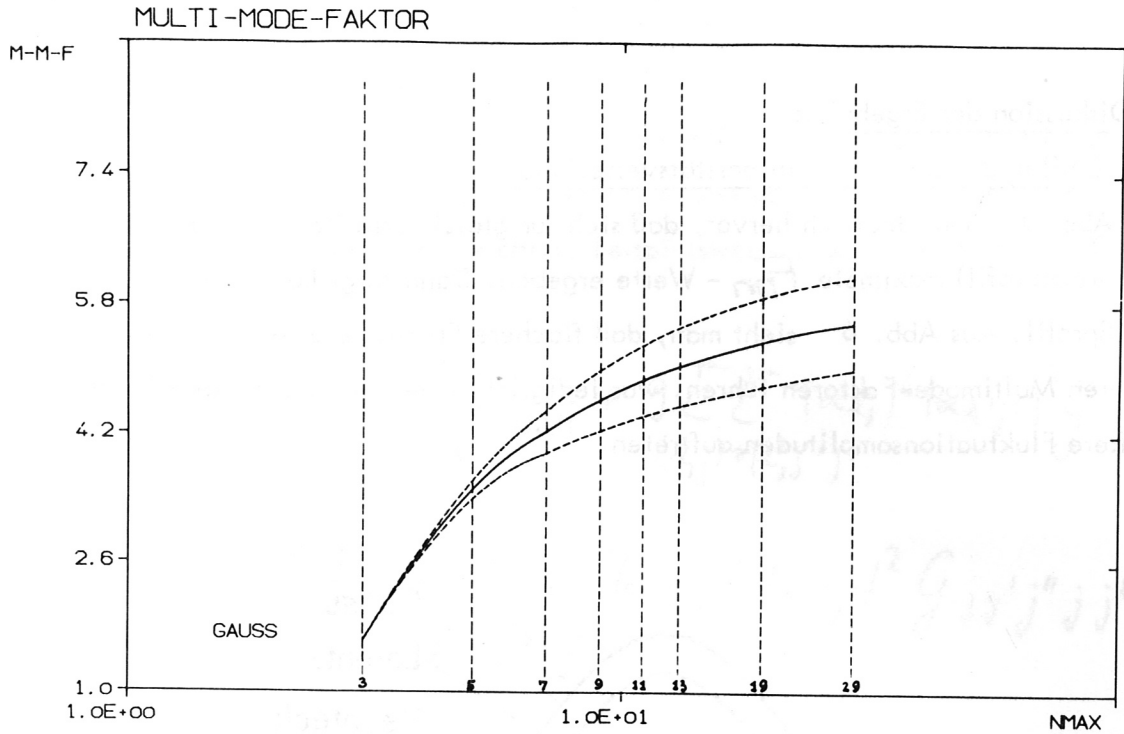


Abb. 4: Multimode-Faktor für Gauß-Profil und $q = 3$

In Abb. 5 ist dann noch ein Vergleich der Mittelwerte $\langle F_{nn} \rangle$ bei den verschiedenen Linienprofilen im Fall $q = 3$ gezeigt.

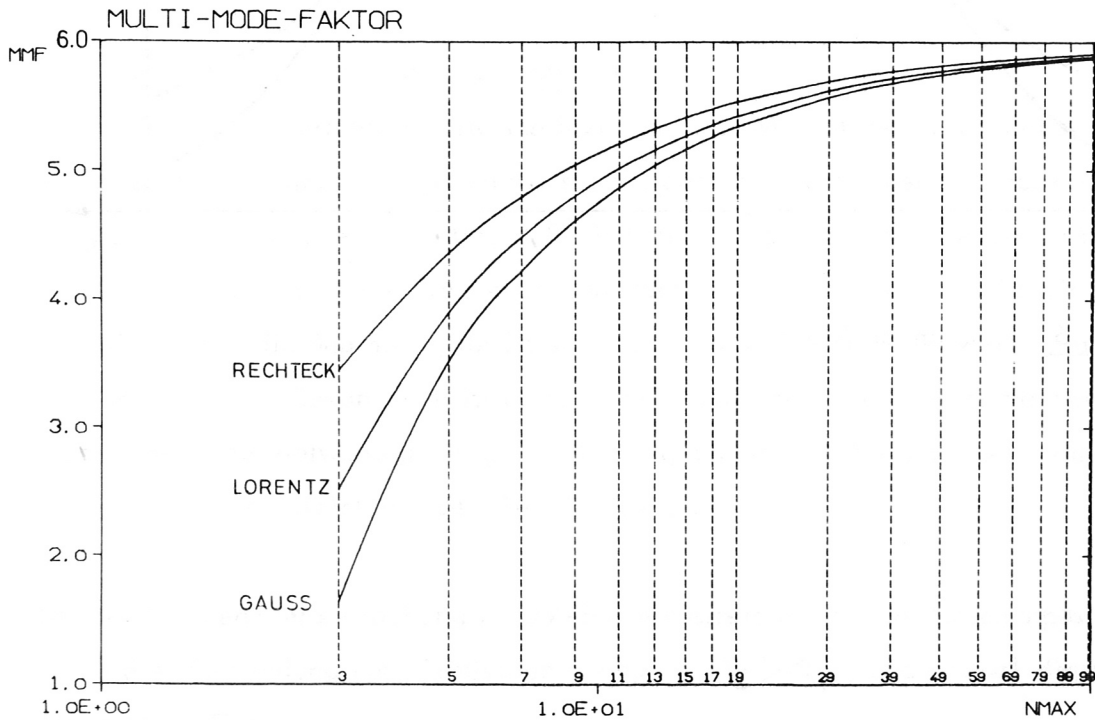


Abb. 5: Vergleich der Multimode-Faktoren für $q = 3$

5. Diskussion der Ergebnisse

5.1 Einfluß der spektralen Intensitätsverteilung

Aus Abb. 5 geht deutlich hervor, daß sich für gleichverteilte Amplituden (Rechteckprofil) maximale F_{mn} - Werte ergeben. Dann folgt Lorentz- und Gaußprofil. Aus Abb. 6 sieht man, daß flachere Frequenzverteilungen zu höheren Multimode-Faktoren führen, was lediglich bedeutet, daß entsprechend stärkere Fluktuationsamplituden auftreten.

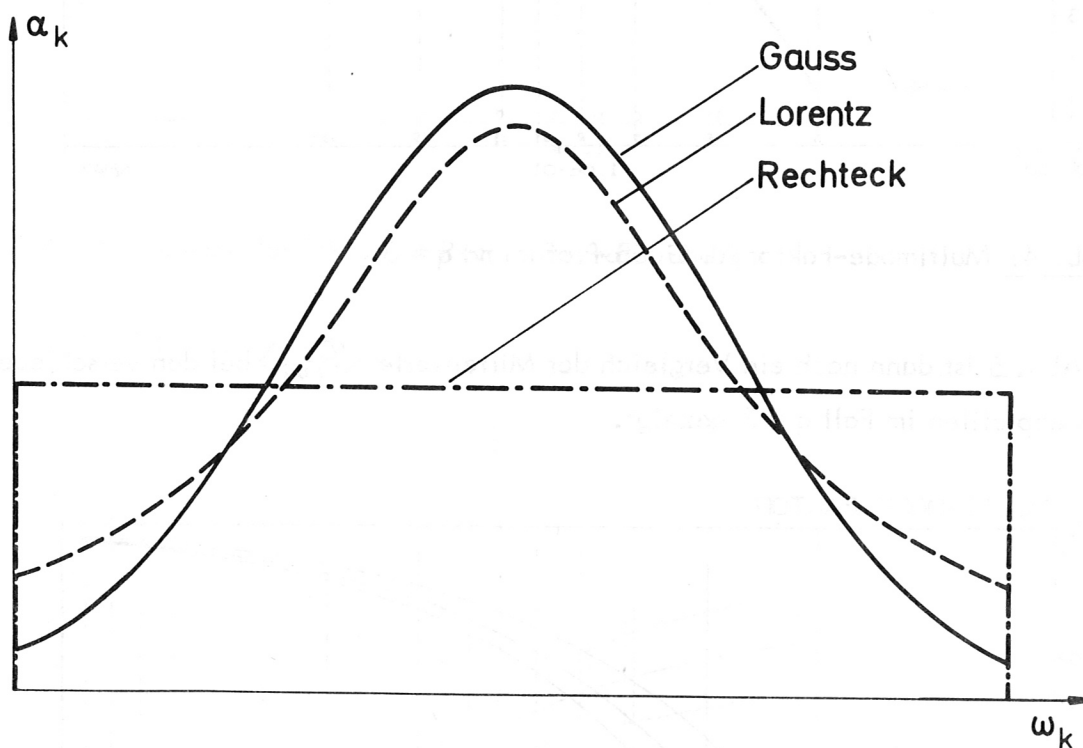


Abb. 6 Frequenzprofile

5.2 Einfluß von Transversalmoden

Mehrere Transversalmoden werden bei der Berechnung der F_{nm} -Werte berücksichtigt, indem man deren Überlappintegrale berechnet und damit die verschiedenen Terme in der Formel für die F_{nm} -Werte wichtet. Beispielsweise ergibt sich analog zu Gl. (16)

$$\begin{aligned}
 (25) \quad C = & \sum_{(k,j)} |\alpha_{k,j}|^6 G_{jjjjjj} + 9 \sum_{(k,j) \neq (k',j')} |\alpha_{k,j}|^4 |\alpha_{k',j'}|^2 G_{jjj'jjj'} + \\
 & + 6 \sum_{(k,j) \neq (k',j') \neq (k'',j'')} |\alpha_{k,j}|^2 |\alpha_{k',j'}|^2 |\alpha_{k'',j''}|^2 G_{jjj'j''jj'j''}; \\
 G_{jjj'j''jj'j''} = & \int_F dF u_j^*(x,y) u_{j'}^*(x,y) u_{j''}^*(x,y) u_j(x,y) u_{j'}(x,y) u_{j''}(x,y);
 \end{aligned}$$

Die Behandlung der Transversalmoden im allgemeinen Fall wird unübersichtlich und wir verzichten deshalb an dieser Stelle darauf, nachdem sie für die Behandlung unseres Problems unbedeutend ist.

5.3 Einfluß der Phasenanpassungs-Bedingung

Die Ergebnisse des letzten Kapitels zeigen, daß der Multimode-Faktor mit steigender Modenzahl N zunimmt, wogegen die statistischen Schwankungen für große N mit $N^{-1/2}$ abnehmen. Dies bedeutet, daß mit Erhöhung der Linienbreite des Farbstofflasers die Konversionsrate für die Frequenzverdreifung zunimmt. Beschränkt wird dies lediglich durch die Bedingung für Phasenanpassung zwischen Grundwelle und 3. Harmonischen. Bekanntlich ist es zur effektiven Erzeugung höherer Harmonischer eines Laserfeldes notwendig, zu gewährleisten, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Harmonischen gleich der der Grundwelle ist.

Bei der Frequenzverdreifung im UV-Bereich erreicht man die Phasenanpassung durch die Verwendung von Gemischen normal- ($n_3 > n_1$) und anomal dispersiver ($n_3 < n_1$) Gase.

Mit

$$(26) \quad n_3^2 - 1 = 4\pi \{ N_a \chi_a^{(1)}(\omega) + N_b \chi_b^{(1)}(\omega) \}, \quad 3 = 1, 3$$

n : Brechungsindex

$\chi^{(1)}$: lineare Suszeptibilität

N : Anzahldichte der Atome

ergibt sich unter der Voraussetzung $\Delta k = \frac{6\pi}{\lambda} (n_1 - n_3) = 0$
für das Druckverhältnis

$$(27) \quad \frac{N_b}{N_a} = \frac{\chi_a^{(1)}(3\omega) - \chi_a^{(1)}(\omega)}{\chi_b^{(1)}(\omega) - \chi_b^{(1)}(3\omega)} ;$$

Dies gilt für paralleles Licht.

Im Falle der Fokussierung verschiebt sich das Maximum des "Phase-Matching"-
Integrals $\gamma(\Delta k, b, L)$ in

$$(28) \quad I_3 \sim I_1^3 \left| \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{e^{i\Delta k z}}{(1 + i\frac{2z}{b})} \right|^2, \quad L = z_2 - z_1, \quad b = \omega_0^2 \cdot l$$

ω_0 : Fokustaille

von $\Delta k = 0$ zu $\Delta k = \frac{2}{b}$ /4/.

Durch die Verschiebung des Maximums zu $\Delta k = \frac{2}{b}$
wird es möglich, das anomal-dispersive Gas "selbstanzupassen". Die Fokussierung
kompensiert dabei den "Mismatch" $\Delta k = \frac{2}{b} = \frac{6\pi}{\lambda} (n_1 - n_3)$

Die Phase-Match-Bedingung in Gl. (27) wird jetzt ersetzt durch

$$(29) \quad \frac{12\pi^2}{\lambda^2} N_a \Delta \chi_a^{(1)} = \frac{2}{b}, \quad \Delta \chi_a^{(1)} = \chi_a^{(1)}(\omega) - \chi_a^{(1)}(3\omega)$$

Diese Bedingung gilt streng nur für monochromatisches Licht. Variiert man nun die Wellenlänge um die Linienbreite $\Delta\lambda$, so ist die Phase-Match-Bedingung aus Gl. (29) nicht mehr erfüllt und der Wirkungsgrad $\eta = \frac{I_3}{I_1}$ für die Frequenzverdreifung verringert sich.

In Abb. 9 ist ein typischer Verlauf des Wirkungsgrads $\eta = \frac{I_3}{I_1}$ der Frequenzverdreifung über $b \cdot \Delta k$ aufgetragen.

Diese Kurve verändert ihre Halbwertsbreite $b \cdot \delta(\Delta k) = 3.4$ nur unwesentlich für einen großen Bereich des Fokussierungsparameters b .

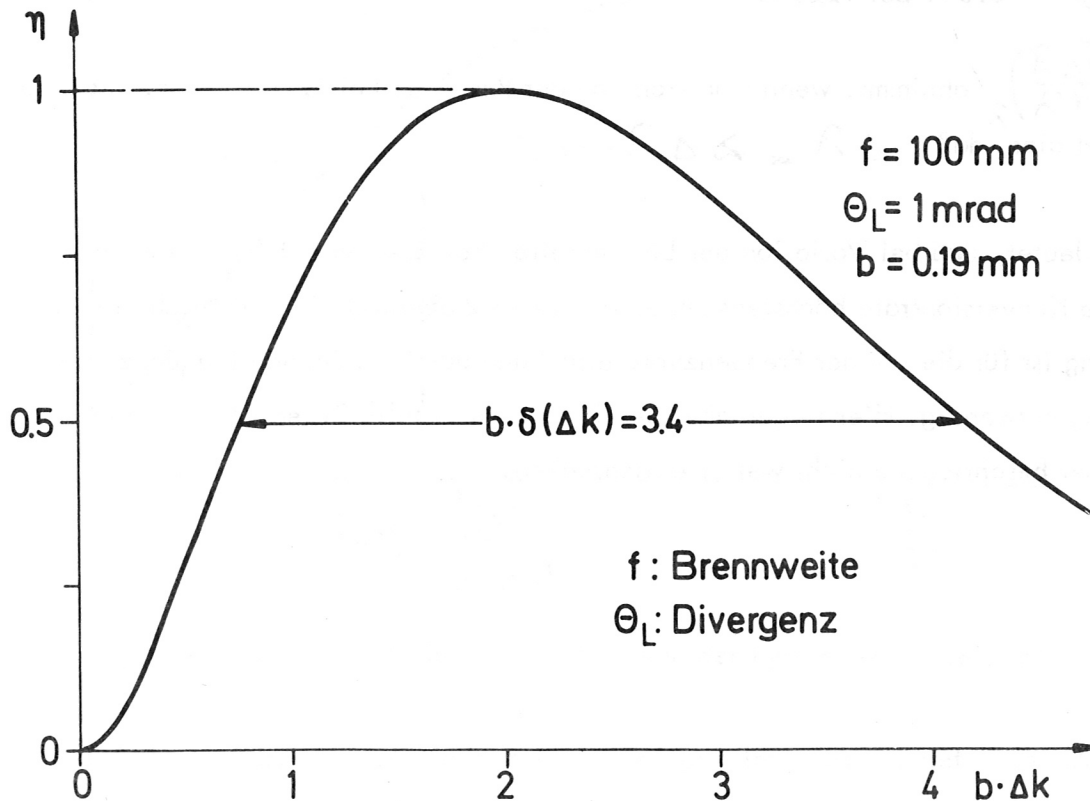


Abb. 9: Wirkungsgrad der Frequenzverdreifung

Die entsprechende Linienbreite $\Delta\lambda$ berechnet man aus $\delta(\Delta k_{\text{eff}}) = \left(\frac{\delta(\Delta k_{\text{eff}})}{\Delta\lambda} \right) \cdot \Delta\lambda$ und Gl. (29) über

$$(30) \quad \frac{12\pi^2}{\lambda^2} N_a \delta(\Delta k_{\text{eff}}) = \frac{3.4}{b}$$

zu

$$(31) \quad \Delta \lambda = 1.7 \cdot \frac{\Delta \lambda_a^{(1)}}{\left(\frac{d(4\lambda_a^{(1)})}{d\lambda} \right)_\lambda} ;$$

Verwendet man die in /5/ gemessenen Werte von N_a für Krypton bei 1232 \AA und 1216 \AA mit $b = 3 \text{ cm}$, so errechnet man $\left(\frac{d(4\lambda_a^{(1)})}{d\lambda} \right)_{\lambda=1224 \text{ \AA}} = 0.5 \cdot 10^{-26} \text{ esu \AA}^{-1}$ und $\Delta \lambda_a^{(1)} = 5.8 \cdot 10^{-26} \text{ esu}$

Damit ergibt sich nach Gl. (31) $\Delta \lambda = 19.7 \text{ \AA}$ für die Grundwelle, d.h.

$$\Delta \lambda_{\text{uvv}} = 6.3 \text{ \AA} \text{ bei } 1224 \text{ \AA}$$

Da $\left(\frac{d\Delta \lambda}{d\lambda} \right)_\lambda$ abnimmt, wenn man sich von der Resonanz bei 1236 \AA wegbewegt, so bedeutet dies, daß $\Delta \lambda_{L_\alpha} \geq \Delta \lambda_{1224 \text{ \AA}}$

Dies bedeutet, daß bei Variation der Linienbreite bei L_α von 0.05 \AA bis etwa 5 \AA die Konversionsrate höchstens um einen Faktor 2 abnimmt. Eine ähnliche Betrachtung ist für die vor der Frequenzverdreifung durchzuführende Frequenzverdopplung notwendig. Hier liegen aber bereits experimentelle Daten vor /6/, die das bisher beschriebene nicht weiter einschränken.

6. Bedeutung für die Plasmadiagnostik

6.1 Lyman - α - Resonanzstreuung

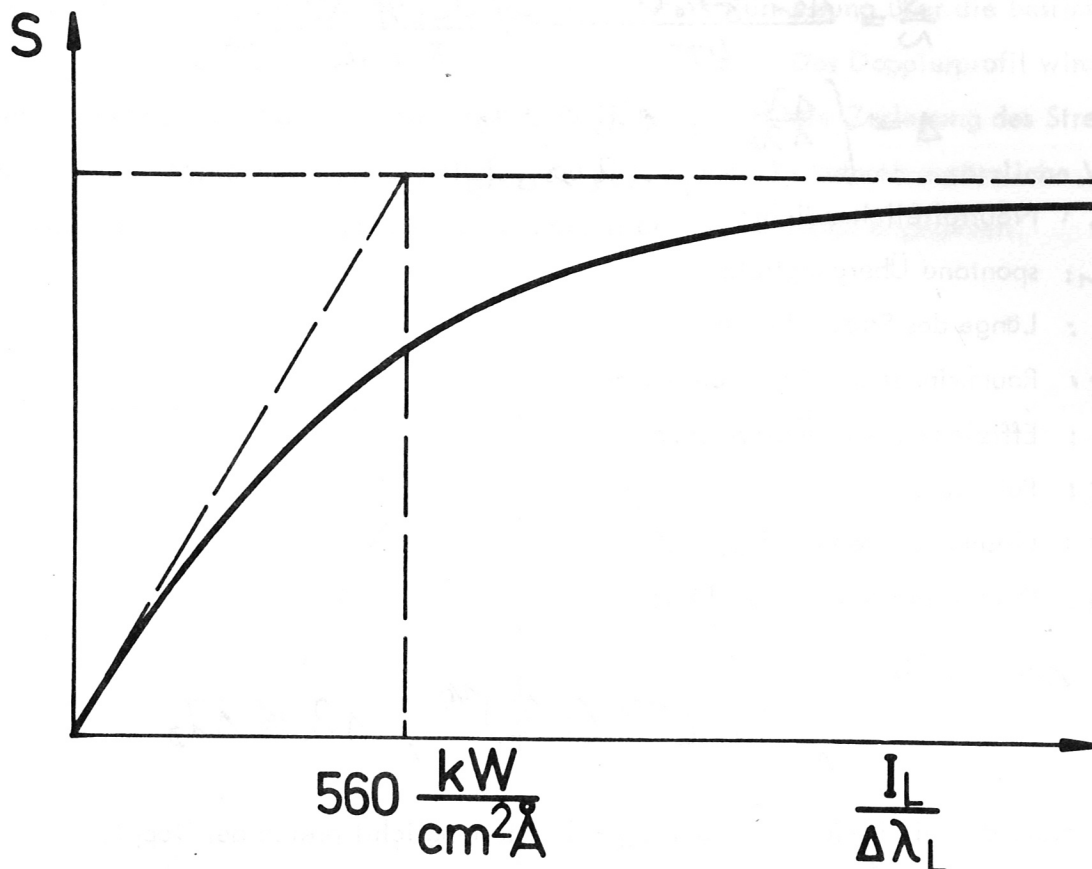


Abb. 10 Abhängigkeit des Streusignals von der Lyman- α - Intensität

In Abb. 10 ist das Streusignal S über der $L\alpha$ - Intensität aufgetragen. Das Streusignal geht bei spektralen Intensitäten größer als $560 \text{ kW cm}^{-2} \text{ \AA}^{-1}$ in Sättigung, da Gleichbesetzung der Resonanzniveaus auftritt. Das Signal-Rausch-Verhältnis ist bei diesem Sättigungswert am größten, da aus dem gleichen Streuvolumen (gleiches Rauschen) das meiste Streulicht emittiert wird. Man wird deshalb immer anstreben, durch geeignete Fokussierung bzw. Variation der Linienbreite $\Delta\lambda_L$ bei vorgegebener $L\alpha$ - Leistung P_L die Sättigungsintensität zu erreichen, so daß

$$\frac{P_L}{\Delta\lambda_L \cdot a^2} = 560 \left[\frac{\text{kW}}{\text{cm}^2 \text{ \AA}} \right], \quad a: \text{Fokussdurchmesser}$$

6.2 Signal - Rausch - Verhältnis

Für das Signal-Rausch-Verhältnis in einem L_{α} -Streuexperiment bei Sättigung des Streusignals gilt

$$(33) \quad \frac{S}{N} = \frac{A_{21} \cdot \frac{4}{3} n_0 a^2 \cdot L}{4\pi} \sqrt{\frac{\Omega_s \cdot \eta \cdot \Delta t}{B \cdot a \cdot L}} \cdot \Delta$$

mit

$$\Delta = \begin{cases} \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D} & , \Delta\lambda < \Delta\lambda_D \\ 1 & , \Delta\lambda \geq \Delta\lambda_D \end{cases}$$

- n_0 : Neutralteilchendichte
- A_{21} : spontane Übergangsrate
- L : Länge des Streuvolumen
- Ω_s : Raumwinkel des Detektorsystems
- η : Effizienz des Detektorsystems
- Δt : Pulsdauer
- B : Plasmaleuchten bei L_{α}
- $\Delta\lambda_D$: Dopplerbreite der L_{α} -Linie

Da gilt $\Delta\lambda \sim a^{-2}$ ist

$$(34) \quad \frac{S}{N} \sim L^{1/2} (\Delta\lambda)^{1/4}, \quad \Delta\lambda \leq \Delta\lambda_D$$

Daraus folgt, daß die Linienbreite der L_{α} -Quelle möglichst gleich der Dopplerbreite der Resonanzlinie sein sollte.

Nach den vorherigen Abschätzungen ist die maximale Breite der L_{α} -Quelle ca. 5 \AA . Dies entspricht der Dopplerbreite bei einer Neutralgastemperatur $T_0 = 3 \text{ keV}$.

Die Fokussierung wird entsprechend der L_{α} -Leistung gewählt zu

$$(35) \quad a [\text{cm}] = 4.2 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{\frac{P_L [\text{kW}]}{\Delta\lambda [\text{Å}]}}$$

Die Ortsauflösung beschränkt die maximale Länge des Streuvolumens zu $L = 5 \text{ cm}$.

Unter Annahme einer TEM_{00} -Mode des Farbstofflasers ergibt sich daraus $a^{\text{min}} = 0.1 \text{ cm}$.

Läßt sich die L_{α} -Leistung steigern, beispielsweise durch Ar_2^* -Excimer-Verstärker, so bedeutet dies für das Signal-Rausch-Verhältnis

$$(36) \quad \frac{S}{N} \sim L^{1/2} \cdot P_L^{3/4}$$

Vergleicht man den Multimode- mit dem Singlemode-Laser, so bedeutet dies, daß bei Multimode-Betrieb entsprechende Dopplerlinienbreite eingestellt werden kann und dazu eine Leistungssteigerung um $q!$ auftritt. Diese beiden Effekte bewirken nach Gl. (34) und Gl. (36) einen Gewinn im Signal-Rausch-Verhältnis um einen Faktor 50 bei typischen Neutralgastemperaturen von 1 keV.

Dazu kommt der große Vorteil, daß bei einer Temperaturmessung über die Bestimmung der Dopplerbreite die Laserlinienbreite variiert werden kann. Das Dopplerprofil wird dann von Schuß zu Schuß abgefahren. Dadurch wird eine spektrale Zerlegung des Streulichts durch einen Monochromator überflüssig und man vermeidet dadurch zusätzliche Verluste. In Abb. 12 ist das Streusignal in Abhängigkeit der Wellenlänge angegeben.

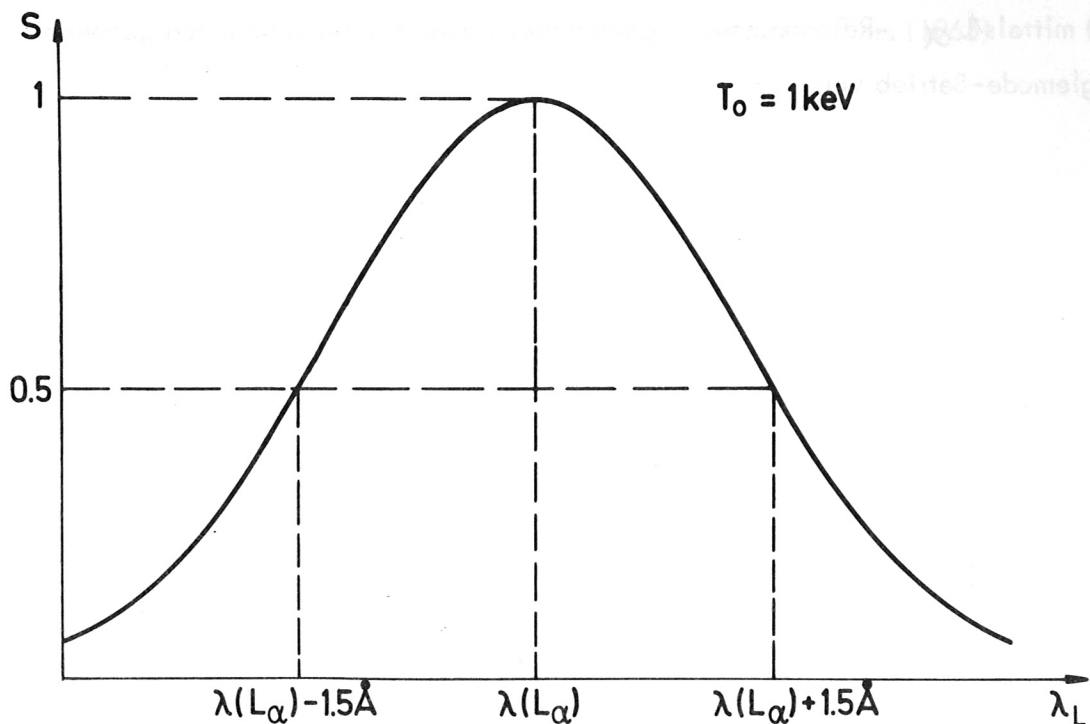


Abb. 12: Abhängigkeit des Streusignals von der Wellenlänge.

7. Schlußbemerkungen

In dieser Arbeit wurde der Einfluß der Multimode-Struktur des Feldes eines Farbstofflasers auf die Konversionsrate der Frequenzverdreifachung ($q = 3$) zur Erzeugung von L_{α} -Strahlung hin untersucht. Mit steigender Anzahl der Longitudinalmoden des Lasers wächst der Multimode-Faktor auf $q!$. Dabei treten allerdings von Schuß zu Schuß Schwankungen der Intensität der Harmonischen auf, die maximal 15% betragen.

Unter Berücksichtigung der "Phase-match"-Bedingung bedeutet dies für die L_{α} -Quelle daß deren Linienbreite in einem Bereich von 0.01 \AA bis 5 \AA ohne wesentlichen Intensitätsverlust variiert werden kann. Damit wird bei Multimode-Betrieb des Lasers die Nachweisgrenze bei der Neutralteilchendiagnostik (Temperatur- und Dichtemessung) mittels L_{α} -Resonanzstreuung um nahezu zwei Größenordnungen gegenüber dem Singlemode-Betrieb verbessert.

Literaturverzeichnis

- /1/ D.W. Koopman et al., J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer
19, 555 (1978)
H. Langer, IPP-Report 1/165 (1977)
- /2/ J. Ducuing, N. Bloembergen, Phys. Rev. 133, 1493 (1964)
- /3/ R.J. Glauber, Phys. Rev. 131, 2766 (1963)
- /4/ G.C. Bjorklund, IEEE J. of Quant. El. 11, 287 (1975)
- /5/ S.A. Batishche et al., Sov. Tech. Phys. Lett. 3, 1148 (1977)
- /6/ S.M. Hamadani, G. Magyar, Opt. Comm. 4, 310 (1971)
- /7/ V. Mangulis, Handbook of Series, Academic Press (1965)

Anhang 1

Berechnung von F_{nn} und ΔF_{nn} für $q = 3$

Nach Gl. (8) gilt

$$\frac{1}{1^3} = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \sum_{k_3=1}^N \sum_{k_4=1}^N \sum_{k_5=1}^N \sum_{k_6=1}^N \alpha_{k_1}^* \alpha_{k_2}^* \alpha_{k_3}^* \alpha_{k_4}^* \alpha_{k_5}^* \alpha_{k_6}^* \exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - \omega_{k_4} - \omega_{k_5} - \omega_{k_6})t\}$$

Diese N^6 Terme zerlegt man nun in die drei Gruppen C, P und T. Zur Kontrolle wird anschließend überprüft, ob die Gesamtzahl der Terme wiederum gleich N^6 ist.

TERM	HÄUFIGKEIT GRUPPE		ANZAHL
$\sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \neq k_5 \neq k_6} \exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - \omega_{k_4} - \omega_{k_5} - \omega_{k_6})t\}$	1	P	$N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)$
$\sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4 \neq k_5} \exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - 2\omega_{k_4} - \omega_{k_5})t\}$ $\exp \{i(\omega_{k_1} + 2\omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4} - \omega_{k_5})t\}$ $\exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - \omega_{k_4} - \omega_{k_5})t\}$	$1 \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 3$	P	$15N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)$
	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot 1 = 3$	P	
	$3 \cdot 3 = 9$	P	
$\sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4} \exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - 3\omega_{k_4})t\}$ $\exp \{i(3\omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})t\}$ $\exp \{i(\omega_{k_1} + 2\omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})t\}$ $\exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - 2\omega_{k_4})t\}$	1	P	$20N(N-1)(N-2)(N-3)$
	1	P	
	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot 3 = 9$	P	
	$3 \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 9$	P	
$\sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3} \exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - 3\omega_{k_3})t\}$ $\exp \{i(3\omega_{k_1} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t\}$ $\exp \{i(\omega_{k_1} + 2\omega_{k_2} - 2\omega_{k_2} - \omega_{k_3})t\}$	$3 \cdot 1 = 3$	P	$15N(N-1)(N-2)$
	$1 \cdot 3 = 3$	P	
	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 9$	T	
$\sum_{k_1 \neq k_2} \exp \{i(\omega_{k_1} + 2\omega_{k_2} - 3\omega_{k_2})t\}$ $\exp \{i(3\omega_{k_1} - \omega_{k_1} - 2\omega_{k_2})t\}$	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot 1 = 3$	T	$6N(N-1)$
	$1 \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 3$	T	
$\sum_{k_1} \exp \{i(3\omega_{k_1} - 3\omega_{k_1})t\}$	$1 \cdot 1 = 1$	C	N
$\sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_4} \exp \{i(\omega_{k_1} + 2\omega_{k_2} - \omega_{k_3} - 2\omega_{k_4})t\}$ $\exp \{i(2\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4})t\}$ $\exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - \omega_{k_3} - 2\omega_{k_4})t\}$ $\exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_4})t\}$	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 9$	P	$45N(N-1)(N-2)(N-3)$
	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot 3 = 9$	P	
	$3 \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 9$	P	
	$3! \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 18$	T	
$\sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3} \exp \{i(2\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_2} - 2\omega_{k_3})t\}$ $\exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t\}$	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 9$	T	$15N(N-1)(N-2)$
	$1 \cdot 3! = 6$	C	
$\sum_{k_1 \neq k_2} \exp \{i(3\omega_{k_1} - 3\omega_{k_2})t\}$ $\exp \{i(2\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_1} - 2\omega_{k_2})t\}$	1	T	$10N(N-1)$
	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 9$	T	
$\sum_{k_1 \neq k_2 \neq k_3} \exp \{i(3\omega_{k_1} - 2\omega_{k_2} - \omega_{k_3})t\}$ $\exp \{i(2\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_1} - 2\omega_{k_3})t\}$ $\exp \{i(2\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t\}$ $\exp \{i(2\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - 3\omega_{k_3})t\}$ $\exp \{i(2\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - 2\omega_{k_2} - \omega_{k_3})t\}$ $\exp \{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} - 2\omega_{k_2} - \omega_{k_3})t\}$	$1 \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 3$	P	$60N(N-1)(N-2)$
	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 9$	P	
	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot 3! = 18$	T	
	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot 1 = 3$	P	
	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 9$	P	
	$3! \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 18$	T	
$\sum_{k_1 \neq k_2} \exp \{i(2\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - 3\omega_{k_2})t\}$ $\exp \{i(\omega_{k_1} + 2\omega_{k_2} - 2\omega_{k_2} - \omega_{k_1})t\}$ $\exp \{i(3\omega_{k_1} - \omega_{k_1} - 2\omega_{k_2})t\}$	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot 1 = 3$	T	$15N(N-1)$
	$\left(\frac{3!}{2!}\right) \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 9$	C	
	$1 \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 3$	T	