

Besetzungsdichten und Teilcheneinschluß für
Niedrig-Beta-Wasserstoff-Plasmen
(Population Distributions and Particle Confinement in
Low- β Hydrogen Plasmas)

C. Mahn, V. Welge

IPP 2/239

Juni 1978



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Besetzungsdichten und Teilcheneinschluß für

Niedrig-Beta-Wasserstoff-Plasmen

(Population Distributions and Particle Confinement in

Low- β Hydrogen Plasmas)

C. Mahn, V. Welge

IPP 2/239

Juni 1978

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

The system of rate equations for the population densities of excited hydrogen levels is solved with the coefficients from Johnson [18], thereby reproducing the results from Hinnov and Johnson [12].

In this context the coefficients for ionisation from Johnson are compared with those from Lotz [23] and Drawin [24].

For purposes of evaluation of particle confinement times from a (Balmer-) spectral line intensity, the dependence on the neutral particle density is described.

It is shown that, for the evaluation of radially dependant confinement times, one can avoid "Abel inversion". Neglection of temporal variations of the electron density, however, may in some cases cause misleading results.

Finally, analytic expressions are given for the number of ionisations per H_{α} photon emission, as well as for the collisional radiative ionisation and recombination rates.

Juni 1978

Zusammenfassung

Das Ratengleichungssystem für die Besetzungsdichten angeregter Niveaus des Wasserstoffs wird mit Koeffizienten von Johnson [18] gelöst, und dadurch werden die Ergebnisse von Hinnov und Johnson [12] reproduziert.

In diesem Zusammenhang werden die Ionisierungskoeffizienten von Johnson mit denen von Lotz [23] und Drawin [24] verglichen.

Der Einfluß der Neutralgasdichte auf die Bestimmung des Teilcheneinschlusses aus einer (Balmer-)Spektrallinien-Intensität wird geschildert.

Zur Auswertung der Meßergebnisse wird bemerkt, daß sich zur Berechnung lokaler Teilcheneinschlußzeiten bei Zylindersymmetrie ein "Entabeln" umgehen läßt, daß andererseits jedoch zeitliche Schwankungen der Elektronendichte nicht immer vernachlässigt werden dürfen.

Vor allem aber werden analytische Näherungen angegeben für die Verknüpfung zwischen Ionisationsrate und Produktionsrate von H_{α} -Photonen, sowie für die Ionisations- und Rekombinationsraten selber.

INHALT

| | |
|---|----|
| 1. Einleitung | 1 |
| 2. Das Prinzip der Berechnung von τ durch Messung von H_{α} | 4 |
| 3. Das Gleichungssystem | 9 |
| 4. Die Koeffizienten | 19 |
| 5. Die Verknüpfung D_p zwischen n_1 und n_p | 21 |
| 6. Näherungsformeln für J , D_3 , V_3 und R | 28 |
| 7. Bemerkung zur Auswerte-Technik der H_{α} -Signale | 33 |
| 8. Vergleich der Ionisationskoeffizienten J nach verschiedenen Autoren | 35 |
| 9. Bemerkung zur Annahme $\dot{n}_e = 0$ | 36 |

1. Einleitung

Die Dichte neutralen Wasserstoffs (oder Deuteriums) in Plasmen mit kleinem β ($= \frac{8\pi nkT}{B^2}$) ist bestimmt durch Plasmateilchen-Verluste. Die Gesamtzahl der Plasmateilchen ist zeitunabhängig, wenn Verluste und Erzeugung global einander gleich sind.

Die Verluste erfolgen durch Diffusion, die Erzeugung durch Ionisation, von Neutralteilchen, die per "recycling" von der Gefäßwand und/oder aus einem Gas-Reservoir stammen. Ein geringer Bruchteil dieses neutralen Wasserstoffs befindet sich in angeregten Zuständen. So ist es üblich geworden, aus der Intensitätsmessung einer Balmer-Spektrallinie ($p \rightarrow 2$) die Teilchen-Einschlußzeit τ in Tokamaks und Stellaratoren zu ermitteln [1,2,3]. Das wird dadurch ermöglicht, daß die Emission eines Photons zahlenmäßig verknüpft ist mit einem Ionisationsakt, welcher seinerseits - im stationären Fall - den Verlust eines Ladungsträgerpaares zu decken hat.

Um diese Verknüpfung V_p zu berechnen, muß man das Ratengleichungssystem lösen, das die Besetzungen aller Energie-Niveaus des Wasserstoffs beschreibt.

Obgleich in der Astrophysik bereits in den 30er Jahren aufgegriffen [4,5,6] und z.B. 1948 [7] detailliert behandelt - sogar unter Berücksichtigung eines Strahlungsfeldes - wurde dieses Problem in der Plasmaphysik erst in den 60er Jahren [8,9,10] angepackt und - in Hinblick auf die zuvor skizzierte Anwendung - in der russischen Litteratur von Abramov, Kuznetsov und Kogan 1968 [11], in der angelsächsischen Litteratur von Hinnov und Johnson 1972 [12] in numerischer Form gelöst. Da die beiden Autorengruppen naturgemäß verschiedene Querschnitte für die zugehörigen Anregungsprozesse benutzten, kamen sie zu verschiedenen Zahlenwerten. Nach Überarbeitung ihrer Ergebnisse 1972 [13] gelangten dann Abramov et al. zu einer befriedigenden Übereinstimmung mit den Werten von Hinnov und Johnson (im folgenden HJ-Werte genannt).

Nachdem jetzt eine gewisse Einheitlichkeit bei der Ermittlung von Ionisationsraten - und daher der Definition von Teilchen-Einschlußzeiten - zu verzeichnen ist, erscheint es wünschenswert, die HJ-Werte, welche in [12] nur für diskrete Werte der Plasma- parameter n_e und T_e tabellarisch vorliegen, in analytischer Form zur Hand zu haben, um eine bequeme Auswertung von Meßergebnissen zu gewährleisten.

Derartige Rechnungen liefern nicht nur notwendige Informationen zur Ermittlung von Einschlußzeiten, sondern neben Ionisationsraten J und Rekombinationsraten R noch die absoluten Besetzungsdichten n_p aller angeregten Niveaus mit der Hauptquantenzahl $p \geq 2$, und zwar in Abhängigkeit von Dichte und Temperatur der Elektronen, n_e und T_e , sowie von der Dichte n_1 des Wasserstoffs im Grundzustand; die Ergebnisse eignen sich somit unter anderem auch zur Beschreibung von Linienintensitäts-Verhältnissen, von Ionisationsgleichgewichten, ebenso wie von langsam entstehenden oder zerfallenden Plasmen (Zeitskala: bis hinunter zum μ sec-Bereich). Im vorliegenden Bericht liegt jedoch der Schwerpunkt der Betrachtung auf der Berechnung von V_p , und es soll daher bei dieser Gelegenheit, im anschließenden Teil 2, noch einmal versucht werden, das Grundprinzip deutlich zu machen, das der Ermittlung von Einschlußzeiten aus gemessenen (Absolut-) Linien-Intensitäten zugrunde liegt.

In Teil 3 wird sodann das Gleichungssystem in Erinnerung gebracht, das gelöst werden muß,

in Teil 4 werden die - aus der Arbeit [18] entnommenen - Querschnitte und Koeffizienten des Systems vorgestellt,

in Teil 5 wird darauf hingewiesen, daß mit zunehmender Plasmadichte ($n_e > 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) die Definition von V_p zusätzlich noch von der Neutralgas-Dichte n_1 abzuhängen beginnt, gleichzeitig jedoch n_1 immer weniger von τ bestimmt wird.

In Teil 6 werden dann Näherungsformeln für das Dichte-Verhältnis $\frac{n_1}{n_3}$, die Ionisationsrate J und die Rekombinationsrate R , sowie schließlich für das Verknüpfungsverhältnis V_3 angegeben. Die Struktur dieser Formeln wird dabei den Koeffizienten aus der Arbeit [20] entnommen, die eine analytisch einfachere Form als die in [18] haben.

In Teil 7 wird gezeigt, wie sich bei zylindersymmetrischen Strahlungsdichte-Verteilungen die Einschlußzeit als Funktion vom Plasmradius, $\tau(r)$, direkt aus einer Integration der Meßgröße erhalten läßt, unter Umgehung der sogenannten "Entabelung".

In Teil 8 wird auf einen Unterschied zwischen den HJ-Ionisationsraten und den bisher im "Düchs-Code" [22] nach Lotz [23] benutzten hingewiesen, und in

Teil 9 wird kurz erwähnt, daß die Annahme $\dot{n}_e = 0$ bei der Auswertung von Meßergebnissen kritisch geprüft werden muß.

Im Verlaufe der Abhandlung werden einige Annahmen gemacht und an den betreffenden Stellen diskutiert. Der Übersicht wegen seien hier zu Beginn alle Annahmen zusammengefaßt:

1. Ionisation von Verunreinigungsatomen und -ionen (verschiedener Ionisationsstufen) tragen nur unwesentlich zum Quellterm bei.
2. Der atomare Wasserstoff liegt fast nur im Grundzustand vor.
3. Zeitliche Änderungen der Besetzungsdichten angeregter Niveaus sind vernachlässigbar.
4. Als Stoßpartner der H-Atome bei inelastischen Stößen wirken nur die Elektronen, ihre Geschwindigkeiten sind durch eine Maxwell-Verteilung bestimmt.
5. Das Plasma ist "optisch dünn".
6. Höchstens 10% der Elektronen stammen von Verunreinigungen.

2. Das Prinzip: Berechnung von τ durch Messung von H_α

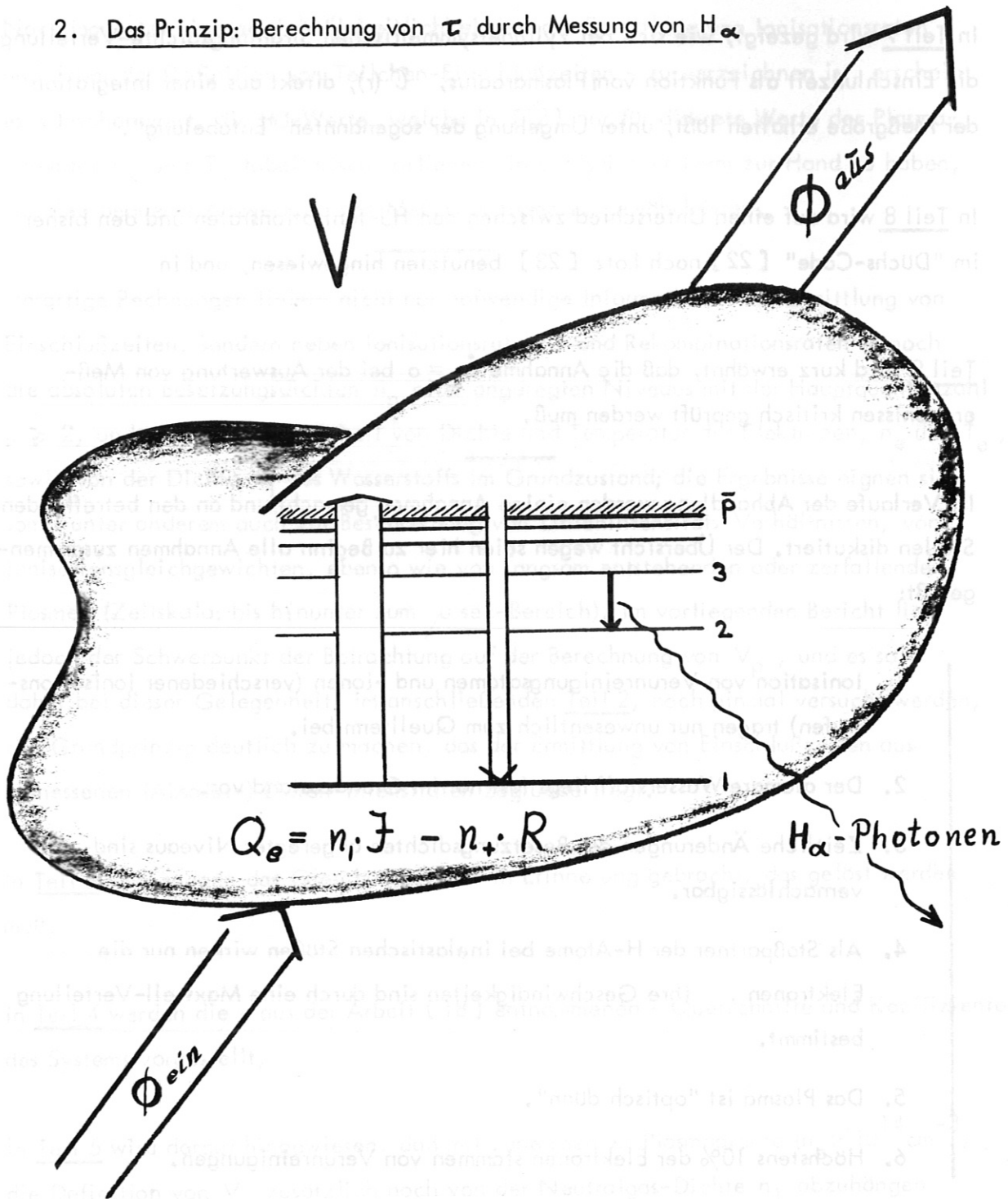


Fig.1 Das Prinzip der τ -Bestimmung aus einer H_α -Messung:

Bei Stationarität muß einem Netto-Diffusions-Verlust $\Phi_{\text{aus}} - \Phi_{\text{ein}}$ das Gleichgewicht gehalten werden durch einen Netto-Quellterm

$n_1 J - n_+ R$. Der - i.a. dominierende - Ionisationsterm $n_1 J$ steht dabei in einem festen Verhältnis zur Emission von H_α -Photonen.

In einem abgeschlossenen Plasmavolumen V geschehen unentwegt Prozesse der Ionisation (J) und - im geringeren Maße - der Rekombination (R), verknüpft mit vielen Übergängen zwischen den diskreten Energie-Niveaus des Wasserstoffatoms (gekennzeichnet durch die Hauptquantenzahlen $p = 1, 2, 3, \dots, \bar{p}$)⁺). Einer dieser Übergänge führt z.B. zur Spontan-Emission eines H_{α} -Photons. Diese Prozesse - zahlenmäßig bestimmt durch die Werte von T_e , n_e , n_+ und n_1 - sorgen für die Erhaltung eines Elektronen-Quellterms Q_e , der seinerseits - im stationären Zustand - einen Nettoverlust ($-\Phi_e$) durch Diffusion von Elektronen zu kompensieren hat (in der Fig. 1: $\Phi_e = \Phi_{\text{ein}} - \Phi_{\text{aus}}$). Stationarität wiederum ist nur dann gewährleistet, wenn von gleichem Betrage ein Fluß von neutralen H-Atomen den Wert von n_1 , und damit den Quellterm, erhält.⁺⁺) In diesem vereinfachten Bild wird also n_1 nicht, wie man es von Betrachtungen stationärer homogener (soll heißen: gradientenfreier) Plasmen her gewohnt ist, durch n_e und T_e bestimmt, sondern vielmehr, und wie zu Beginn erwähnt, - über den Zustrom Neutraler - im wesentlichen durch Diffusionsprozesse; und n_1 spiegelt somit direkt wieder das Einschlußverhalten der Maschinen (gedacht wird hierbei vor allem an die toroidalen Niedrig-Beta-Maschinen: Tokamaks und Stellaratoren): je schlechter der Einschluß, desto größer die Neutralteilchendichte (bei Stationarität).

In dem bisher Gesagten stecken bereits zwei Annahmen:

Annahme 1: Ionisation von Verunreinigungsatomen und -ionen (verschiedener Ionisationsstufen) tragen nur unwesentlich zum Quellterm bei.

Das wird zwar häufig erfüllt sein, läßt sich jedoch nur dann abschätzen, wenn spektroskopische Meßwerte vorliegen.

+) Die für die Energiebilanz wichtigen konkurrierenden Vorgänge des Ladungsaustausches können zumindest in dieser Betrachtung unbeachtet bleiben, da sie die Plasmadichte nicht ändern. Allerdings bewirken gerade letztere, daß überhaupt Neutralgas in dem vorgefundenen Maße ins Plasmainnere gelangt.

++) Mit anderen Worten: Bei vollständigem "recycling" wäre der stationäre Fall gekennzeichnet durch ein Gleichgewicht zwischen Wand-Rekombination und Volumen-Ionisation.

Annahme 2: Der atomare Wasserstoff liegt fast nur im Grundzustand vor.

Diese Annahme ist im allgemeinen sicher gültig, denn bei den vorhandenen Anregungsbedingungen (nahe den "Korona-Verhältnissen") ist der Grundzustand des Wasserstoffs bereits in einem nicht diffusionsbestimmten Plasma um Größenordnungen stärker besetzt als die angeregten; das gilt also erst recht, wenn durch Wasserstoffzufluß der Wert von n_1 gegenüber diesem lokalen Gleichgewichtswert noch erhöht wird. Bei extrem hohen Dichten ($n_e \approx 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, wie im Alcator) allerdings mag diese Annahme kritisch sein.

Die Bilanz:

Elektronen-Erzeugung durch Ionisation = Elektronen-Verlust durch Diffusion

läßt sich in differentieller Form (ϕ_e wird durch die Divergenz eines Flusses ersetzt) so schreiben^{+) :}

$$Q_e = \text{div} (\vec{F}_e) , \quad (2.1)$$

wobei \vec{F}_e sich durch eine effektive Diffusions-Geschwindigkeit \vec{v}_e oder einen effektiven Diffusionskoeffizienten D^* ausdrücken läßt:

$$\vec{F}_e = n_e \cdot \vec{v}_e = D^* \cdot \nabla n_e . \quad (2.2)$$

In diesem vorläufiger Weise einfachen Bild werden Rekombinationsprozesse (die in der Figur 1 angedeutet sind) vernachlässigt gegenüber denen der Ionisation, d.h. der Quellterm Q_e ist

$$Q_e \approx n_1 J . \quad (2.3)$$

Als Einschlußzeit definieren wir

Teilchenzahl im Volumen V innerhalb der magnetischen Fläche O :
Diffusionsrate durch die magnetische Fläche O

^{+) Es wird durchgehend das CGS-System benutzt.}

$$\tau = \frac{\int_V n_e dV}{\oint_0 (\vec{F}_e, d\vec{0})} = \frac{\int_V n_e dV}{\int_V \text{div} (\vec{F}_e) dV} \quad (2.4)$$

Nach (2.1) und (2.3) ist

$$\int_V \text{div} (\vec{F}_e) dV \approx \int_V n_1 J dV \quad (2.3a)$$

J ist berechenbar aus T_e und n_e (die ihrerseits üblicherweise per Laserlichtstreuung gemessen werden); für die Kenntnis des Quellterms in (2.3a) fehlt dann noch die Messung von n_1 . Sie geschieht bisher auf indirekte Weise: Man registriert z.B. die absolute Linienintensität von H_α ($3 \rightarrow 2$).

Mit der Einsteinschen Übergangswahrscheinlichkeit \bar{R}_{32} ist diese auszudrücken durch

$$z_3 = n_3 \cdot \bar{R}_{32} \left[\frac{H_\alpha \text{-Photonen}}{\text{cm}^3 \cdot \text{sec}} \right] \quad (2.5)$$

Ebenfalls durch T_e und n_e gegeben ist das Verhältnis D_3 :

$$\boxed{\frac{n_1}{n_3} = D_3} \quad (2.6)$$

Somit ist der Quellterm in (2.3):

$$n_1 J = z_3 V_3 \quad (2.7)$$

mit

$$V_3 = \frac{D_3 \cdot J}{\bar{R}_{32}} \quad (2.8)$$

Wenn wir uns auf geringe Abweichungen der Querschnittsform der magnetischen Fläche von derjenigen eines Kreises beschränken (jedoch: Stellaratoren! Tokamaks mit D-Querschnitt!), ist dieses Volumen ein Torus mit dem großen Radius a und dem kleinen Radius r ; es seien φ die toroidale und Θ die poloidale Koordinate:

$$\int_V \text{div} (\vec{F}_e) dV = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V_3 z_3 \cdot (\varrho d\Theta) \cdot (Rd\varphi) \cdot d\varrho \quad (2.9)$$

Von $V_3(n_e, T_e)$ darf man annehmen, es sei auf einer magnetischen Fläche vom Radius ϱ konstant.

Dagegen zeigt leider die Erfahrung, daß die Emission z_3 vom H_α -Licht nicht nur von ϱ , sondern auch von den Winkelkoordinaten Θ und φ stark abhängen kann. Das bedeutet eine erhebliche Einschränkung der Methode, denn die Beobachtungsmöglichkeiten sind nur auf kleine Plasma-Teilbereiche begrenzt. Nichtdestoweniger: in dem Maße, in dem z_3 inhomogen ist, ist eine Raumauflösung vonnöten, um folgenden Mittelwert zu erhalten:

$$\tilde{z}_3(\varrho) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} z_3 \, d\Theta \, d\varphi; \quad (2.10)$$

damit wird dann (2.9) zu

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{F}_e) \, dV \approx 4\pi^2 R \cdot \int_0^r V_3 \tilde{z}_3 \varrho \, d\varrho \quad (2.9a)$$

und schließlich (2.4) zu

$$\tau(r) \approx \frac{\int_0^r n_e \varrho \, d\varrho}{\int_0^r V_3 \tilde{z}_3 \varrho \, d\varrho} \quad (2.4a)$$

Bevor wir diesen Punkt verlassen und uns der Berechnung von V_3 zuwenden, sei noch erwähnt, daß die Kontinuitätsgleichung für die Elektronen i. a. noch eine Zeitabhängigkeit berücksichtigen muß, und daß der Quellterm auch noch Rekombinationen zu beinhalten hat, so daß an Stelle von (2.1) die vollständige Beziehung treten muß:

$$\dot{n}_e + \operatorname{div}(\vec{F}_e) = n_i \cdot J - n_+ \cdot R^+, \quad (2.1a)$$

was an Stelle von (2.4a) dann bedeutet:

+) J und R sind effektive Ionisations- und Rekombinationsraten bezüglich des Grundzustandes, also z. B. $\frac{J}{n_e}$ ist nicht etwa nur der Koeffizient für Stoßionisation vom Grundzustand.

$$\tau(r) = \frac{\int_0^r n_e \vartheta d\vartheta}{\int_0^r (\tilde{z}_3 V_3 - n_+ R - \dot{n}_e) \vartheta d\vartheta} \quad (2.4b)$$

(n_+ ist die Protonendichte)

3. Das Gleichungssystem

Die Kontinuitäts-Gleichungen für die verschiedenen Wasserstoffzustände lauten:

$$\dot{n}_p + \text{div}(\vec{F}_p) = Q_p \quad (3.1)$$

Für den Grundzustand, $p = 1$, bedeutet der Term $\text{div}(\vec{F}_1)$ die Wasserstoffzufuhr - durch "recycling" oder ein Gasventil - und

$$Q_1 = - Q_e \quad (3.2)$$

Q_e ist der Quellterm in der Gleichung für die Elektronen.

Bei den angeregten Niveaus, $p \geq 2$, vernachlässigen wir den Strömungsterm, entsprechend der Annahme 2 und der folgenden

Annahme 3: Zeitliche Änderungen der Besetzungsdichten angeregter Niveaus sind vernachlässigbar (für Zeitmaßstäbe bis herunter zum μsec -Bereich).

Das gründet sich auf folgende Tatsache: Wechselseitige Übergänge zwischen angeregten Zuständen (und zwischen ihnen und dem Kontinuum) sind viel häufiger als zwischen ihnen und dem Grundzustand. (Diese Argumentation bezieht sich auf den hier ausschließlich behandelten Fall des "optisch dünnen" Plasmas.) Daher bleiben für die Angeregten die Bevölkerungs- und Entvölkerungsprozesse auch dann noch näherungsweise miteinander im Gleichgewicht, wenn die Grundzustandsdichte sich ändert. Der Grundzustand dagegen hat im Vergleich zu ihnen gegenüber plötzlichen Änderungen in n_e und T_e um Größenordnungen längere Relaxationszeiten. Der Grundzustand kann

nämlich auf gegebene Änderungen von n_e und T_e nur wesentlich langsamer als sie reagieren, denn einerseits besteht durch inelastische Stöße zu angeregten oder kontinuierlichen Zuständen eine relativ schwache Kopplung, andererseits ist ein "Entweichen nach unten" per Spontanemission unmöglich⁺⁾. Es genügt demnach, die Dichte angeregter Niveaus durch die jeweilige momentane Dichte des Grundzustandes auszudrücken:

$$\xi_p = \frac{n_p}{n_p(E)} = r_p^{(0)} + r_p^{(1)} \cdot \xi_1; \quad p \geq 2 \quad (3.3)$$

Dabei ist

$$\xi_1 = \frac{n_1}{n_1(E)}, \quad (3.4)$$

und der Index (E) bezeichnet den dem Tripel (n_e, n_+, T_e) zugehörigen Wert im lokalen thermischen Gleichgewicht (LTE):

$$n_p^{(E)} = \frac{n_e n_+}{S_p}, \quad (3.5)$$

wobei S_p die Saha-Boltzmann-Verteilung ist:

$$S_p = \frac{1}{(4\pi)^{3/2} \cdot a_0^3} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot s^{-3/2} \cdot \exp(-s_{p, \bar{p}+1}) \quad (3.6)$$

a_0 ist der Bohrsche Radius,

s ist das Reziproke der reduzierten Elektronentemperatur kT_e [eV]:

$$s = \frac{\chi_H}{kT_e}; \quad \chi_H = 13.54 \text{ eV} \quad (3.7)$$

und

$$s_{pq} = \frac{s}{p^2} \cdot \left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right) \quad (3.8)$$

\bar{p} ist das letzte noch als diskret betrachtete Niveau. $\bar{p} + 1$ steht für die untere Grenze des Bereichs freier Energiezustände, zu dem alle Niveaus oberhalb von \bar{p} mit dem "wahren" Kontinuum (begrenzt durch die Inglis-Teller-Beziehung) zusammengefaßt werden (siehe [20]).

^{+) Mehr quantitative Begründungen finden sich in [14] und [12].}

$r_p^{(0)}$ und $r_p^{(1)}$ in (3.3) sind Lösungen des Gleichungssystems

$$Q_p = 0, \quad (3.9)$$

zu dem die Kontinuitätsgleichungen (3.1) unter den gemachten Annahmen sich vereinfachen. $r_p^{(0)}$ und $r_p^{(1)}$ werden gebraucht für die Berechnung von J und R im Quellterm (rechte Seite von (2.1 a)), sowie für die Berechnung von V_p . Damit ist dann über (2.4 b) die Beziehung zwischen τ und der H_α -Intensität (oder derjenigen einer anderen Balmer-Spektrallinie ($p \rightarrow 2$)) bekannt, wenn man abschließend noch bemerkt, daß z_p sich aus der gemessenen und "entabelten" Strahlungsdichte

$$i_p \left[\frac{\text{erg}}{\text{sec} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{ster}} \right] \quad \text{so ergibt:}$$

$$z_p = \frac{4\pi}{E_{2p}} \cdot i_p \left[\text{cm}^{-3} \cdot \text{sec}^{-1} \right] \quad (3.10)$$

(E_{2p} ist die Energiedifferenz des $p \rightarrow 2$ -Übergangs in erg).

Vor der Beschreibung des Gleichungssystems (3.9) sei noch etwas allgemeines über den Ionisationsgrad von Wasserstoff-Plasmen gesagt, und zwar für den stationären Fall:

$$\dot{n}_e = 0:$$

Die Dichte n_1 des neutralen Wasserstoffs (im Grundzustand) trennen wir in einen Anteil $n_1^{(D)}$, der von einer Quelle außerhalb des Volumens stammt ("recycling" oder Gaszufuhr) und Diffusionsverluste zu decken hat, und einen Anteil $n_1^{(L)}$, der - bei denselben Werten von n_e , n_+ und T_e - sich in einem homogenen Plasma, also ohne Diffusion, einstellen würde, entsprechend dem lokalen Gleichgewicht; d.h. wir formen (2.1 a) bei so um:

$$n_1 = n_1^{(L)} + n_1^{(D)}, \quad (3.11)$$

wobei

$$n_1^{(L)} = \frac{n_+ R}{J} \quad (3.12)$$

und

$$n_1^{(D)} = \frac{\text{div}(\vec{F}_e)}{J} \quad (3.13)$$

Welcher Art das lokale Gleichgewicht ist, hängt von den Plasmaparametern ab, also von n_e , n_+ und T_e , und von der Frage, ob Reabsorption von Strahlung stattfindet. Solange

man Reabsorption vernachlässigen darf ("optisch dünner" Fall; Diskussion unter Annahme 5), lassen sich schematisierend drei Fälle unterscheiden:

1. $L_1 = E$; die Elektronendichte ist groß genug ($\approx 10^{17} \text{ cm}^{-3}$), so daß man LTE annehmen kann. Das ist bei den hier betrachteten Plasmen nie der Fall.
2. $L_2 = K$; die Elektronendichte ist so gering, daß Korona-Gleichgewicht gilt; dadurch werden solche Plasmen schon recht befriedigend beschrieben, wenn ihre Dichten 10^{13} cm^{-3} nicht überschreiten.
3. $L_3 = S$; die Elektronendichte liegt im Zwischenbereich ($10^{13} \leq n_e \leq 10^{17} \text{ cm}^{-3}$). Dann muß ein aufwendigeres Modell zur Beschreibung bemüht werden (nämlich das Gleichungssystem (3.9)), das auch stufenweise Prozesse zuläßt (auch "collisional-radiative" genannt).

Die kleinste Dichte n_1 , die bei gegebenen n_e , n_+ und T_e (auch im instationären Fall) sich einstellen kann, ist die lokale Gleichgewichtsdichte $n_1^{(L_i)}$:

$$n_1 \geq n_1^{(L_i)} ; \quad (3.14)$$

Bezüglich $n_1^{(L_i)}$ wiederum gilt:

$$n_1^{(K)} > n_1^{(S)} > n_1^{(E)} \quad (3.15)$$

Das Folgende kann jeder überschlagen, der nur an den Ergebnissen (Formel (6.8 c), S.32) interessiert ist. Allerdings sollte er dabei vorsichtshalber auch das zuvor über die n_1 -Abhängigkeit Gesagte zur Kenntnis nehmen,

Bei der Aufstellung des Gleichungssystems (3.9) werden zwei zusätzliche Annahmen gemacht:

Annahme 4: Als Stoßpartner der H-Atome bei inelastischen Stößen wirken nur die Elektronen; ihre Geschwindigkeiten sind durch eine Maxwell-Verteilung bestimmt.

Entsprechende Stoßprozesse mit Protonen, also Anregung, Ionisation oder (nicht-resonanter) Ladungsaustausch in angeregte Zustände oder aus angeregten Zuständen sind erst bei Protonenenergien oberhalb von 10 keV konkurrenzfähig [15].

Annahme 5: Das Plasma ist "optisch dünn".

Es genügt, bei der Diskussion sich auf die Linien der Ly-Serie zu beschränken, weil praktisch nur der Grundzustand besetzt ist. Wenn wir uns zur Abschätzung auf Ly_{α} beschränken und für diese Linie ein Doppler-Profil der Breite $\Delta\nu_D$ annehmen, so folgt aus

$$\int_{\text{Linie}} k(\nu) d\nu \approx \bar{k} \cdot \Delta\nu_D = \frac{\pi \cdot e^2}{mc} \cdot f \quad (3.16)$$

(f: Absorptions-Oszillatorenstärke; e und m: Ladung und Masse des Elektrons; c: Lichtgeschwindigkeit)

ein Absorptionsquerschnitt von

$$\bar{k} \approx 1.4 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{1}{\sqrt{(kT_1)}} \quad [\text{cm}^2] , \quad (3.17)$$

wenn kT_1 die Temperatur des absorbierenden Wasserstoffs in eV ist. Unter stark vereinfachten Vorstellungen über den Strahlungstransport leitet z.B. Holstein (siehe [16]) aus der optischen Dicke $d = n_1 \cdot \bar{k} \cdot l$ (l: Länge) einen "Verdünnungsfaktor" $g(d)$ ab, um den die wirksame Strahlung gegenüber der Hohlraumstrahlung verdünnt ist. Einer teilweisen Reabsorption der Resonanzstrahlung kann man in dem System der Ratengleichungen Rechnung tragen, indem man die Übergangswahrscheinlichkeiten der Ly-Serie mit g multipliziert. Der Einfluß auf die Besetzungsdichten und ihre Verhältnisse bleibt unterhalb 10%, solange

$$g \geq 0.9 \quad , \quad (3.18)$$

Nach [16] gehört dazu

$$d = n_1 \cdot \bar{k} \cdot l \leq 0.25 \quad . \quad (3.18a)$$

Mit einer charakteristischen Schichtdicke von $l = 5 \text{ cm}$ bedeutet das: die Annahme "optisch dünn" ist gerechtfertigt, solange

$$\frac{n_1}{\sqrt{kT_1}} \leq 3.5 \cdot 10^{11} \quad [\text{cm}^{-3} \cdot \text{eV}^{-1/2}] \quad . \quad (3.18b)$$

Gl. (3.9) lautet:

Quellterm = 0, d.h.

$$\underbrace{n_p \cdot \left[\sum_{q=1}^{p-1} n_e \cdot \bar{C}_{pq} \downarrow + \sum_{q=1}^{p-1} \bar{R}_{pq} \downarrow + \sum_{q=p+1}^{\bar{p}-1} n_e \cdot \bar{C}_{pq} \uparrow + n_e \cdot \bar{C}_p \uparrow \right]}_{\text{Entvölkerung}} = \underbrace{\left[\sum_{q=1}^{p-1} n_q \cdot \bar{C}_{qp} \uparrow + \sum_{q=p+1}^{\bar{p}-1} n_q \cdot \left[n_e \cdot \bar{C}_{pq} \downarrow + \bar{R}_{pq} \downarrow \right] + n_e \cdot n_{e+} \cdot \bar{C}_p \downarrow + n_{e+} \cdot \bar{R}_p \downarrow \right]}_{\text{Bevölkerung}} \quad (3.9a)$$

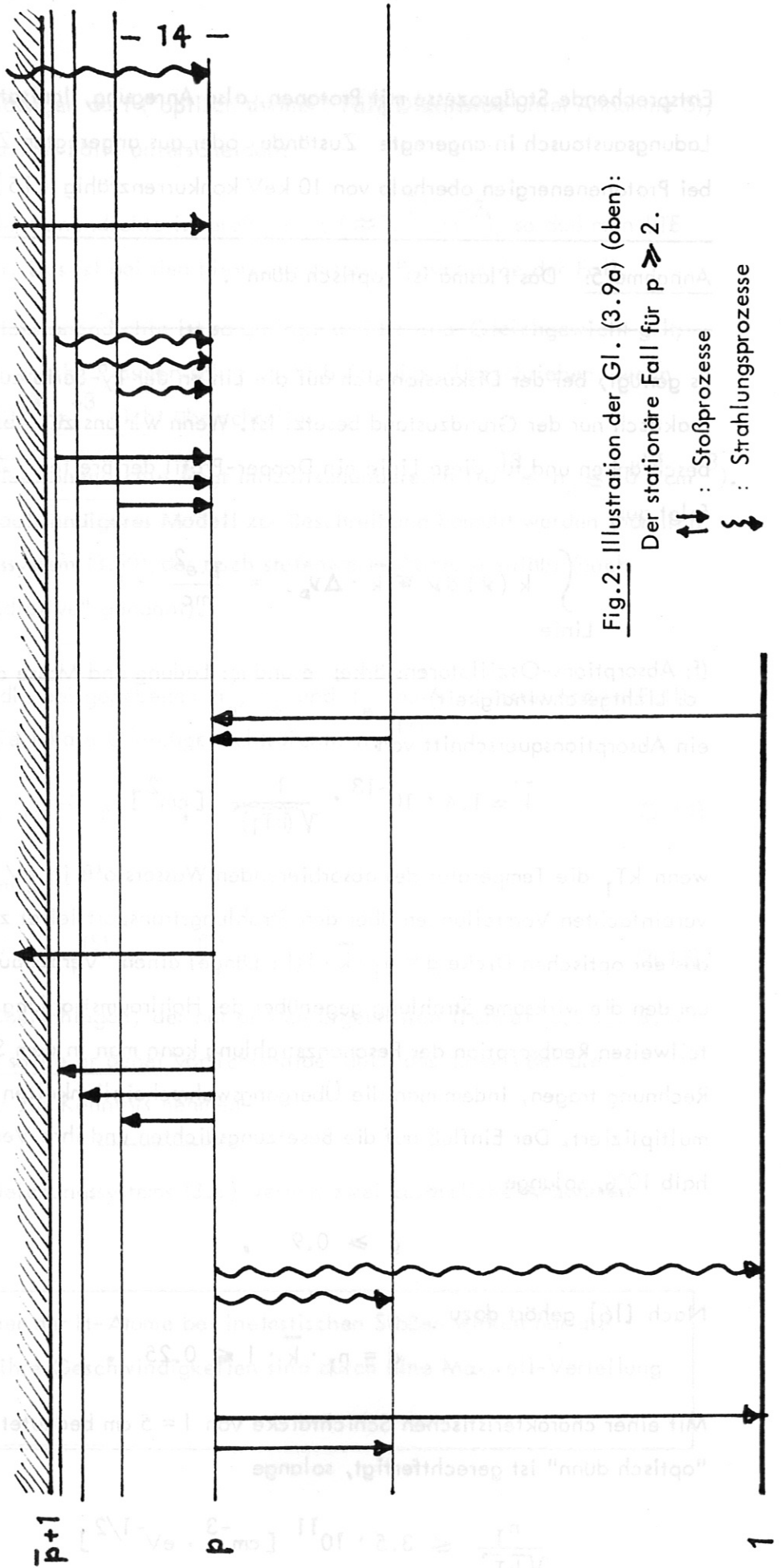


Fig. 2: Illustration der Gl. (3.9a) (oben):

Der stationäre Fall für $p \geq 2$.

Die Frequenzen der jeweiligen Prozesse (d.h. also die Ereignisse pro Teilchen und Zeiteinheit) sind:

| | | <u>g-g-Prozesse</u> | <u>g-f-Prozesse</u> |
|----------------------------|---|--|--|
| pro H-Atom im Niveau p: | Strahlungsemission: | $\bar{R}_{pq} \downarrow$ | |
| | Stoßanregung bzw. -"Abregung" (Stöße 2.Art) und Stoß-Ionisation | $n_e \cdot \bar{C}_{pq} \uparrow \downarrow$ | $n_e \bar{p}+1 \bar{C}_p \uparrow$ |
| | pro Proton: | Strahlungs-Rekombination | $n_e \bar{p}+1 \bar{R}_p \downarrow$ |
| | Dreierstoß-Rekombination | | $n_e^2 \cdot \bar{p}+1 \bar{C}_p \downarrow$ |

Sie sind also entweder unabhängig von n_e , oder proportional zu n_e , oder proportional zu n_e^2 .

Dabei werden die Koeffizienten durch folgende Normierung dimensionslos gemacht:

$$\left| \begin{array}{l} \bar{R}_{pq} \downarrow(\uparrow) = 2 \cdot R_{F_{gg}} \cdot R_{pq} \downarrow(\uparrow) , \\ \bar{p}+1 \bar{R}_p \uparrow = 2 \cdot R_{F_{gg}} \cdot \bar{p}+1 R_p \uparrow) , \end{array} \right| \quad (3.19 a)$$

mit

$$R_{F_{gg}} = \frac{2^3 \alpha^4}{\pi \cdot 3^{3/2}} \cdot \frac{c}{a_0} = 0.789 \cdot 10^{10} [\text{sec}^{-1}] , \quad (3.19 b)$$

(α ist die Sommerfeldsche Feinstruktur-Konstante)

$$\left| \begin{array}{l} \bar{C}_{pq} \uparrow \downarrow = 2 \cdot c_{F_{gg}} \cdot C_{pq} \uparrow \downarrow , \end{array} \right| \quad (3.19 c)$$

$$\left| \begin{array}{l} \bar{p}+1 \bar{C}_p \uparrow = 2 \cdot c_{F_{gg}} \cdot \bar{p}+1 C_p \uparrow , \end{array} \right| \quad (3.19 d)$$

$$\left| \begin{array}{l} \bar{p}+1 \bar{R}_p \downarrow = 2 \cdot c_{F_{gg}} \cdot \bar{p}+1 R_p \downarrow , \end{array} \right| \quad (3.19 e)$$

mit

$$c_{F_{gg}} = \frac{2^5}{\pi^{3/2} 3^{3/2}} \cdot c \cdot \pi a_0^2 = 2.13 \cdot 10^{-8} [\text{cm}^3 \cdot \text{sec}^{-1}] , \quad (3.19 f)$$

$$\left| \begin{array}{l} \bar{p}+1 \bar{C}_p \downarrow = 2 \cdot \frac{c_{F_{gg}}}{F} \cdot \bar{p}+1 C_p \downarrow , \end{array} \right| \quad (3.19 g)$$

mit

$$F = \frac{R_{F_{gg}}}{c_{F_{gg}}} = \frac{2 \pi^3 \alpha^3}{(4\pi)^{3/2} \cdot a_0^3} = 3.71 \cdot 10^{17} \text{ [cm}^{-3}\text{]}, \quad (3.19 \text{ k})$$

und daher

$$\frac{c_{F_{gg}}}{F} = \frac{2^7}{3^{3/2} \pi \alpha^2} \cdot a_0^3 \cdot c \pi a_0^2 = 5.74 \cdot 10^{-26} \text{ [cm}^6 \cdot \text{sec}^{-1}\text{]}. \quad (3.19 \text{ i})$$

Dabei sind alle Koeffizienten mit denjenigen der inversen Prozesse über das detaillierte Gleichgewicht verknüpft. Die Verknüpfung geschieht mittels der Saha - Boltzmann-Beziehung (3.6), die in der dimensionslosen Form lautet:

$$\sigma_p = \frac{S_p}{F} = \frac{n_e}{F} \cdot \frac{n_+}{n_p^{(e)}} = \frac{1}{2 \pi \alpha^3} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot s^{-3/2} \cdot \exp(-s_{\bar{p}, p+1}) \quad (3.6 \text{ a})$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{p}+1 \uparrow R_p = \sigma_p \cdot \bar{p}+1 \downarrow R_p, \\ \bar{p}+1 \uparrow C_p = \sigma_p \cdot \bar{p}+1 \downarrow C_p, \end{array} \right\} \quad (3.20 \text{ a})$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{p}+1 \uparrow C_p = \sigma_p \cdot \bar{p}+1 \downarrow C_p, \\ R_{qp} \uparrow = \frac{\sigma_q}{\sigma_p} \cdot R_{pq} \downarrow, \end{array} \right\} \quad (3.20 \text{ b})$$

$$\left. \begin{array}{l} R_{qp} \uparrow = \frac{\sigma_q}{\sigma_p} \cdot R_{pq} \downarrow, \\ C_{qp} \uparrow = \frac{\sigma_q}{\sigma_p} \cdot C_{pq} \downarrow, \end{array} \right\} \quad (3.20 \text{ c})$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{qp} \uparrow = \frac{\sigma_q}{\sigma_p} \cdot C_{pq} \downarrow, \\ \end{array} \right\} \quad (3.20 \text{ d})$$

wobei

$$\frac{\sigma_q}{\sigma_p} = \frac{S_q}{S_p} = \frac{p^2}{q^2} \cdot \exp(-s_{qp}) \quad (3.6 \text{ b})$$

der "Boltzmann-Faktor" ist.

(Entsprechend sind die nicht-normierten Koeffizienten durch S_p miteinander verknüpft.)

Mit Hilfe der Beziehungen (3.19) und (3.20) erhält das inhomogene System linearer Gleichungen (3.9a) die folgende Form:

$$\boxed{\sum_{q=2}^{\bar{p}} A_{pq} \cdot \varrho_q = B_p^{(0)} + \varrho_1 \cdot B_p^{(1)}} \quad (3.9 \text{ b})$$

mit $p = 2, 3, \dots, \bar{p}$ (p : Zeilenindex, q : Spaltenindex)

Und zwar ist

$$A_{pq} = \frac{n_e}{F} \cdot c_{pq} + r_{pq}, \quad \text{mit} \quad (3.9c)$$

$$c_{pq} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{p-1} C_{pl}^{\downarrow} + \sum_{l=p+1}^{\bar{p}} C_{pl}^{\uparrow} & - C_{pq}^{\downarrow}, \text{ wenn } p > q, \\ + \sum_{l=p+1}^{\bar{p}+1} C_{pl}^{\uparrow} & + \sum_{l=p+1}^{\bar{p}+1} C_{pl}^{\uparrow}, \text{ wenn } p = q, \\ - C_{pq}^{\uparrow} & - C_{pq}^{\uparrow}, \text{ wenn } p < q, \\ 0 & 0, \text{ wenn } p > q, \end{cases} \quad (3.9d)$$

$$r_{pq} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{p-1} R_{pl}^{\downarrow} & \sum_{l=1}^{p-1} R_{pl}^{\downarrow}, \text{ wenn } p = q, \\ - R_{pq}^{\uparrow} & - R_{pq}^{\uparrow}, \text{ wenn } p < q, \end{cases} \quad (3.9e)$$

$$B_p^{(0)} = \frac{n_e}{F} \cdot \sum_{l=p+1}^{\bar{p}+1} C_{pl}^{\uparrow} + \sum_{l=p+1}^{\bar{p}+1} R_{pl}^{\uparrow}, \quad (3.9f)$$

$$B_p^{(1)} = \frac{n_e}{F} \cdot C_{p1}^{\downarrow}. \quad (3.9g)$$

$r_p^{(0)}$ und $r_p^{(1)}$ (vgl. (3.3)) sind die beiden Lösungsvektoren aus (3.9b), die man z.B. erhält, indem man die Vektoren $B_p^{(1)}$ (Kopplung an den Grundzustand) und $B_p^{(0)}$ (Kopplung an das Kontinuum) nacheinander gleich Null setzt. Zu den Werten von J und R (vgl. (2.1a)) gelangt man, indem man alle \bar{p} Kontinuitätsgleichungen (3.1) durch die Normierungen (3.19) und die Beziehungen (3.6) und (3.20) umformt, sie addiert und den so gewonnenen Quellterm der Neutralen nach (3.2) in die Kontinuitätsgleichung der Elektronen

$$Q_e = \text{div}(\vec{F}_e) + \dot{n}_e \quad (3.2a)$$

einsetzt. Mittels der Lösungen des Gleichungssystems (3.9), $r_p^{(0)}$ und $r_p^{(1)}$ in (3.3), ist das Ergebnis dann:

$$\sum_{p=1}^{\bar{p}} \frac{n_e}{F} \left[\sum_{l=1}^{\bar{p}+1} C_{pl}^{\downarrow} + \sum_{p=2}^{\bar{p}} \sum_{l=p+1}^{\bar{p}+1} C_{pl}^{\downarrow} \cdot r_p^{(1)} \right] - \left[\sum_{p=1}^{\bar{p}} \sum_{l=p+1}^{\bar{p}+1} R_{pl}^{\downarrow} \right] \quad (3.2b)$$

$$+ \frac{n_e}{F} \cdot \left(\sum_{l=1}^{\bar{p}+1} C_{pl}^{\downarrow} + \sum_{p=2}^{\bar{p}} \sum_{l=p+1}^{\bar{p}+1} C_{pl}^{\downarrow} \cdot (1 - r_p^{(0)}) \right) = \frac{\text{div}(\vec{F}_e) + \dot{n}_e}{c_{F_{gg}} \cdot n_e n_+},$$

woraus schließlich mit

$$\vartheta_1 = \frac{F}{n_e} \cdot \frac{n_1}{n_+} \cdot \sigma_1 \quad (3.21)$$

folgt:

$$n_1 \cdot J - n_+ \cdot R = \operatorname{div}(\vec{F}_e) + \dot{n}_e \quad (3.2c)$$

(vgl. (2.1a))

mit

$$J = n_e \cdot \hat{J} = n_e \cdot 2^c F_{gg} \cdot \left[\bar{p}+1 C_1^\uparrow + \sum_{p=2}^{\bar{p}} \frac{\sigma_1}{\sigma_p} \cdot \bar{p}+1 C_p^\uparrow \cdot r_p^{(1)} \right] \quad (3.22)$$

und

$$R = n_e \cdot \hat{R} = n_e \cdot 2^c F_{gg} \cdot \left[\bar{p}+1 R_1^\downarrow + \sum_{p=2}^{\bar{p}} \bar{p}+1 R_p^\downarrow + \frac{n_e}{F} \cdot \sum_{p=2}^{\bar{p}} \bar{p}+1 C_p^\downarrow \cdot (1 - r_p^{(o)}) \right] \quad (3.23)$$

Teil 3 zusammengefaßt:

n_e , n_+ und T_e seien gegeben.

Aus den $(\bar{p}-1)$ Raten-Gleichungen

$$Q_p = 0; \quad 2 \leq p \leq \bar{p} \quad (3.9)$$

errechnet man die $(\bar{p}-1)$ Unbekannten n_p , als lineare Funktionen von n_1 :

$$n_p = n_p^{(E)} \cdot \left[r_p^{(o)} + r_p^{(1)} \cdot \frac{n_1}{n_1^{(E)}} \right] \quad (3.3)$$

Die \bar{p} .te Gleichung

$$Q_e = \operatorname{div}(\vec{F}_e) + \dot{n}_e \quad (3.2a)$$

liefert die Verknüpfung zwischen n_1 (enthalten im Quellterm Q_e) und dem Diffusionsverlust-Term $\operatorname{div}(\vec{F}_e)$, wobei Q_e noch die n_p nach (3.3) enthält.

Aufgliederung des Q_e , nach Summanden mit und ohne n_1 als Faktor, liefert

$$n_1 \cdot J - n_+ \cdot R = \operatorname{div}(\vec{F}_e) + \dot{n}_e \quad (3.2c)$$

J und R sind nach (3.22) und (3.23) nur noch Funktionen von n_e und T_e .

Eine der linearen Beziehungen (3.3) läßt sich am Ende benutzen, um n_1 durch ein n_p auszudrücken. So ist schließlich $\text{div}(\vec{F}_e)$ durch eine Messung von n_p und die Lösung von \bar{p} Gleichungen bestimmt.

4. Die Koeffizienten

Für die verschiedenen inelastischen Stoßprozesse (a) mit den Elektronen müssen die jeweiligen Querschnitte c_a als Funktion der Elektronengeschwindigkeit bekannt sein. Die Koeffizienten ergeben sich daraus dann durch Multiplikation mit der Elektronengeschwindigkeit v und anschließender Mittelung über die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten:

$$\bar{c}_a = \langle c_a \cdot v \rangle \text{ [cm}^3 \cdot \text{sec}^{-1}\text{]} \quad (4.1)$$

Es muß darauf hingewiesen werden, daß diese Querschnitte noch nicht lückenlos bekannt sind - im Gegensatz zu denjenigen der Strahlungsprozesse -, daß daher jeder bisherige Versuch, sie in geschlossener Form wiederzugeben, notwendigerweise einen Kompromiß darstellen muß zwischen experimentell und theoretisch gewonnenen Werten und der kühnen Überbrückung informationsloser Lücken. Jedoch ist der allgemeine Eindruck, daß sich diese Unsicherheiten um nicht mehr als einen Faktor der Größenordnung 2 auf die berechneten n_1/n_p , J und R auswirken können [17]⁺⁾ .

Zur Berechnung der HJ-Werte werden alle Koeffizienten der Arbeit von Johnson [18] entnommen.

Mit der zusätzlichen Definition:

$$x_{pq} = 1 - \frac{p^2}{q^2} \quad (4.2)$$

wird (3.8) zu

$$s_{pq} = s_p \cdot x_{pq}, \text{ mit } s_p = \frac{s}{p^2} \quad (4.3)$$

⁺⁾ Nur bei sehr niedrigen Elektronen-Temperaturen kann die Unsicherheit größer sein, weil das Schwellwert-Verhalten der Querschnitte am wenigsten bekannt ist.

Damit schreiben sich die J-Koeffizienten folgendermaßen:^{+))}

$$R_{pq}^{\downarrow} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{p^5} \cdot \frac{1}{x_{qp}} \cdot g(q, x_{qp}); \quad p > q \quad (4.4)$$

Das ist derselbe Ausdruck wie in [20] bis auf den korrigierenden, auf g-g-Prozesse übertragenen Gaunt-Faktor

$$g(p, x_{pq}) = g_0(p) + g_1(p) \cdot x_{pq}^{-1} + g_2(p) \cdot x_{pq}^{-2} \quad ; \quad p < q$$

| | p = 1 | p = 2 | p ≥ 3 |
|----------|---------|---------|--|
| $g_0(p)$ | 1.133 | 1.0785 | $(0.9935 + 0.2328 \cdot p^{-1} - 0.1296 \cdot p^{-2})$ |
| $g_1(p)$ | -0.4059 | -0.2319 | $-p^{-1} \cdot (0.6282 - 0.5598 \cdot p^{-1} + 0.5299 \cdot p^{-2})$ |
| $g_2(p)$ | 0.07014 | 0.02947 | $p^{-2} \cdot (0.3847 - 1.181 \cdot p^{-1} + 1.47 \cdot p^{-2})$ |

$$R_p^{\uparrow \bar{p}+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^5} \cdot \sum_{i=0}^2 g_i(p) \cdot x_{p, \bar{p}+1}^{-1} \cdot E_{i+1}(x_{p, \bar{p}+1} \cdot s_p) \quad (4.5)$$

E_{i+1} : Exponential-Integral-Funktion: $E_i(z) = \int_1^{\infty} e^{-zt} \cdot t^{-i} dt; \quad i = 0, 1, 2, \dots$

(Auch dieser Koeffizient ist recht ähnlich dem in [20] benutzten, der sich so umschreiben läßt:

$$R_p^{\uparrow \bar{p}+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^5} \cdot x_{p, \bar{p}+1}^{-1} \cdot E_1(x_{p, \bar{p}+1} \cdot s_p) \cdot)$$

$$C_{pq}^{\uparrow} = \frac{p}{x_{pq}^{1/2}} \cdot s_{pq}^{3/2} \cdot \left\{ A_{pq} \cdot \left[\left(\frac{1}{s_{pq}} + \frac{1}{2} \right) \cdot E_1(s_{pq}) - \left(\frac{1}{z_{pq}} + \frac{1}{2} \right) \cdot E_1(z_{pq}) \right] \right. \\ \left. + (B_{pq} - A_{pq} \cdot \ln \frac{2p^2}{x_{pq}}) \cdot \left[\frac{1}{s_{pq}} \cdot E_2(s_{pq}) - \frac{1}{z_{pq}} \cdot E_2(z_{pq}) \right] \right\} \quad (4.6)$$

^{+))} Die Unterniveaus jeder Hauptquantenzahl p, q seien gemäß ihrem statistischen Gewicht $2p^2, 2q^2$, besetzt.

$$A_{pq} = 3.92 \cdot \frac{p^3}{q^3} \cdot \frac{1}{x_{pq}^4} \cdot g(p, x_{pq})$$

$$z_{pq} = r_p \cdot x_{pq} + s_{pq}; \quad r_1 = 0.45; \quad r_p = 1.94 \cdot p^{-1.57} \quad \text{für } p \geq 2.$$

$$B_{pq} = \frac{4p^4}{q^3} \cdot \frac{1}{x_{pq}^2} \cdot \left(1 + \frac{4}{3} \cdot x_{pq}^{-1} + b_p \cdot x_{pq}^{-2} \right)$$

$$b_1 = -0.603; \quad b_p = p^{-1} (4 - 18.63 \cdot p^{-1} + 36.24 \cdot p^{-2} - 28.09 \cdot p^{-3}) \quad \text{für } p \geq 2.$$

$$\begin{aligned} \overset{\bar{p}+1}{C}_p \uparrow &= \frac{p}{x_{p,\bar{p}+1}^{1/2}} \cdot s_{p,\bar{p}+1}^{3/2} \cdot \left\{ A_{p,\bar{p}+1} \cdot \left[\frac{1}{s_{p,\bar{p}+1}} \cdot E_1(s_{p,\bar{p}+1}) - \frac{1}{z_{p,\bar{p}+1}} \cdot E_1(z_{p,\bar{p}+1}) \right] \right. \\ &\quad \left. + (B_{p,\bar{p}+1} - A_{p,\bar{p}+1} \cdot \ln \frac{2p^2}{x_{p,\bar{p}+1}}) \cdot [\zeta(p,\bar{p}+1) - \zeta(z_{p,\bar{p}+1})] \right\} \end{aligned}$$

(4.7)

$$A_{p,\bar{p}+1} = 1.96 \cdot p \cdot \sum_{i=0}^2 \frac{g_i(p)}{i+3} \cdot x_{p,\bar{p}+1}^{-(i+3)}$$

$$z_{p,\bar{p}+1} = x_{p,\bar{p}+1} \cdot (r_p + s_p)$$

$$B_{p,\bar{p}+1} = \frac{2}{3} \cdot p^2 \cdot \frac{1}{x_{p,\bar{p}+1}} \cdot (3 + 2 \cdot x_{p,\bar{p}+1}^{-1} + b_p \cdot x_{p,\bar{p}+1}^{-2})$$

$$\zeta(t) = E_0(t) - 2 \cdot E_1(t) + E_2(t)$$

5. Die Verknüpfung D_p zwischen n_1 und n_p

Diese Verknüpfung ist zwar in jedem Falle formulierbar, doch nicht immer so einfach wie in der vereinfachenden Darstellung, Teil 2, angegeben. Wir werden sehen, daß die Verknüpfung abhängt vom Ionisationsgrad des Plasmas, und damit letzten Endes vom Einschlußverhalten der Maschine.

Umformung von (3.3):

$$n_1 = n_p \cdot \frac{\zeta_p}{\zeta_1} \cdot \frac{1}{r_p^{(1)}} \cdot \left(1 - \frac{r_p^{(0)}}{\zeta_p}\right) \quad (5.1)$$

läßt erkennen, daß eine direkte Proportionalität zwischen n_1 und n_p nur dann besteht, wenn

$$\zeta_p \gg r_p^{(0)} ; \quad (5.2)$$

in diesem Fall, der allerdings häufig vorliegt, hat die Implikation bei der Formulierung der Beziehung (2.6) - nämlich, daß D_3 nur von n_e und T_e abhängt - seine Gültigkeit. Die Forderung (5.2) bedeutet, die Besetzungsdichte des oberen Niveaus der Balmer-Linie möge im wesentlichen durch Kopplung an den Grundzustand bestimmt sein (Kopplung aus Kontinuum, $r_p^{(0)}$, vernachlässigbar, "Korona-Näherung").

Der vollständige Ausdruck für

$$D_p \equiv \frac{n_1}{n_p} \quad (5.3)$$

lautet:

$$D_p = \frac{\zeta_p}{\zeta_1} \cdot \frac{1}{r_p^{(1)}} \cdot \left(1 - r_p^{(0)} \cdot \frac{n_p^{(E)}}{n_p}\right) , \quad (5.1a)$$

der sich auch so umformen läßt:

$$D_p = \frac{\zeta_p}{\zeta_1} \cdot \frac{1}{r_p^{(1)}} \cdot \frac{1}{1 + X_p \cdot \frac{n_+}{n_1}} , \quad (5.1b)$$

mit

$$X_p = \frac{r_p^{(0)} / \zeta_p}{\left(\frac{r_p^{(1)}}{r_p} \cdot \frac{\zeta_1}{\zeta_p}\right) / \left(\frac{n_e}{F}\right)} \quad (5.4)$$

Wenn (5.2) bzw.

$$X_p \cdot \frac{n_+}{n_1} \ll 1 \quad (5.5)$$

nicht mehr erfüllt sind, beginnen D_p und damit auch

$$V_p \equiv \frac{D_p \cdot J}{R_{p2}} , \quad (5.6)$$

gemäß (5.1a) von n_p abzuhängen. Wann tritt das auf?

Zur Beantwortung dieser Frage diskutieren wir die Auftrennung der Besetzungsdichten nach (3.3) in der vereinfachten Näherung eines 3-Niveau-Atoms, in der sich ergibt:

$$r_p^{(0)} = \frac{4R_p^\uparrow}{\mathcal{R}_p} \quad , \quad (5.7)$$

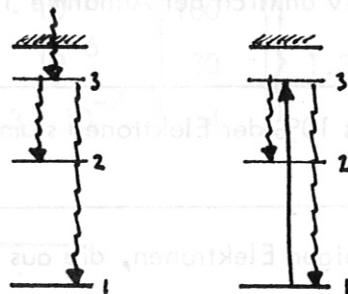
$$r_p^{(1)} = \frac{n_e}{F} \cdot C_{p1}^\downarrow \quad , \quad p = 2, 3 \quad (5.8)$$

und

$$\mathcal{R}_p = \sum_{q=1}^{p-1} R_{pq}^\downarrow \quad .$$

Damit wird aus (3.3) nach entsprechender Umformung:

$$n_p = \frac{n_e}{F} \cdot n_+ \cdot \left[\frac{4R_p^\downarrow}{\mathcal{R}_p} + \frac{n_1}{n_+} \cdot \frac{C_{1p}^\uparrow}{\mathcal{R}_p} \right] \quad . \quad (5.9)$$



Das Verhältnis des Anteils der Verknüpfung zum Kontinuum - erster Summand - zu demjenigen der Verknüpfung zum Grundzustand - zweiter Summand - ist, bei gegebenem Ionisierungsgrad $\left(\frac{n_1}{n_+}\right)^{-1}$, unabhängig von der Elektronendichte. Diejenige Hauptquantenzahl p_s , für die beide Anteile vergleichbar sind ("collision limit"), ist gegeben durch

$$\frac{n_+}{n_1} \cdot \frac{4R_{p_s}^\downarrow}{C_{1p_s}^\uparrow} \approx 1 \quad . \quad (5.10)$$

In einem stationären homogenen Plasma wäre der Ionisierungsgrad $\frac{n_+}{n_1}$ in "Korona-Näherung" beschrieben durch

$$\left(\frac{n_+}{n_1}\right)^{(K)} \approx \frac{4C_{11}^\uparrow}{4R_{11}^\downarrow} \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\pi \cdot \alpha^3} \cdot \frac{1}{s} \quad . \quad (5.11)$$

Andererseits ist

$$\frac{4R_{p_s}^\downarrow}{C_{1p_s}^\uparrow} \approx \frac{\pi \alpha^3}{2} \cdot s \cdot p_s \quad ; \quad \frac{\pi \alpha^3}{2} = 6 \cdot 10^{-7} \quad (5.12)$$

(siehe (6.2), (6.3) und (6.4)).

Für lokales Korona-Gleichgewicht ist - wie Einsetzen in (5.10) zeigt - die die Stoßgrenze bestimmende Hauptquantenzahl p_s in dieser Näherung unabhängig von n_e und T_e :

$$(p_s)^{(K)} \approx 4.$$

Im lokalen Gleichgewicht ist also $p = 3$ (bei H_α -Messung) nur unwesentlich stärker an den Grundzustand als an das Kontinuum geknüpft und daher die Bedingung (5.2) noch nicht gut erfüllt. Sie wird vielmehr erst dann gut erfüllt, wenn durch Neutralgaszufuhr der Ionisierungsgrad wesentlich kleiner wird als im lokalen Gleichgewicht. Für $kT_e \approx 250$ eV wird aus (5.10) und (5.12):

$$p_s \approx 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{n_1}{n_e} \quad (5.13)$$

Soeben benutzt und auch für die folgenden Abschätzungen benötigt wird eine Annahme, die in ihrer Art qualitativ ähnlich der Annahme 1 ist, nämlich die

Annahme 6: Höchstens 10% der Elektronen stammen von Verunreinigungen.

n_v sei die Dichte derjenigen Elektronen, die aus Ionisierung von Verunreinigungen stammen:

$$n_e = n_+ + n_v,$$

mit

$$n_v = \sum_{i,j} i \cdot n_i^{(j+)} \quad , \quad \text{wobei } n_i^{(j+)} \text{ die Dichte der}$$

j -fach geladenen Ionen der Verunreinigungsart i ist. Die Annahme 6 verlangt also:

$$n_e = n_+ \cdot \beta,$$

wobei $\beta = 1 + \frac{n_v}{n_+}$ begrenzt ist auf

$$1 \leq \beta \leq 1.1.$$

Diese Forderung wird nur bei sehr "sauberen" Entladungen erfüllt sein.

Beispielsweise liegt eine Entladung mit 2% Sauerstoff, der sich ungefähr zu gleichen Teilen in der 4. oder 5. Ionisierungsstufe befindet, und 0.1% Eisen, das sich in der

10. bis 15. Ionisierungsstufe befindet, bereits etwas außerhalb der Grenze:

$$\beta = 1 + 0.02 \cdot 4.5 + 0.001 \cdot 12.5 \approx 1.13 .$$

Das sogenannte Z_{eff} wäre in diesem Fall:

$$Z_{\text{eff}} \approx \frac{1 + 0.02 \cdot 20 + 0.001 \cdot 150}{1.1} = \frac{1.55}{1.1} \approx 1.4 .$$

Erfahrungsgemäß hat der Ionisationsgrad $\left(\frac{n_1}{n_e}\right)^{-1}$ die Tendenz, mit wachsendem n_e zuzunehmen. Einen Eindruck von der Größenordnung von $\frac{n_1}{n_e}$ und dem - nach (5.13) - zugehörigen p_s im Plasmainternen verschiedener Maschinen vermittelt die folgende

Tabelle :

| Maschine | n_e | n_1 | n_1/n_e | p_s | $(n_1/n_e)^{(k)}$ | $(p_s)^{(k)}$ |
|----------|---------------------|-----------|---------------------|-------|-------------------------|---------------|
| W VII a | $3 \cdot 10^{13}$ | 10^8 | $3 \cdot 10^{-6}$ | 100 | } $1.3 \cdot 10^{-7}$ } | } 4 |
| Pulsator | 10^{14} | 10^{8+} | 10^{-6} | 30 | | |
| Alcator | $0.8 \cdot 10^{15}$ | 10^{8+} | $1.3 \cdot 10^{-7}$ | 4 | | |

+) geschätzt

Das Modell des 3-Niveau-Atoms zeigt auch die Bedeutung von X_p in (5.4): Setzt man nämlich $r_p^{(0)}$ und $r_p^{(1)}$ aus (5.7) und (5.8) in (5.4) ein, so erhält man

$$X_p = \frac{4 R_p \downarrow}{C_{1p} \uparrow} \quad (5.14)$$

und somit analog zu (5.12):

$$X_p \approx \frac{\pi \cdot \alpha^3}{2} \cdot s \cdot p . \quad (5.15)$$

Zusammen mit (5.11) bedeutet das aber:

$$X_p \approx \left(\frac{n_1}{n_+}\right)^{(k)} \cdot \frac{p}{4} , \quad (5.16)$$

so daß aus (5.1b) wird:

$$D_p \approx \frac{6p}{61} \cdot \frac{1}{r_p^{(1)}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{4} \cdot \left(\frac{n_1}{n_+}\right)^{(k)} \cdot \frac{n_+}{n_1}} . \quad (5.1c)$$

(5.1c) sagt also aus: Nur solange der Ionisierungsgrad weit unterhalb demjenigen des lokalen ("Korona"-) Gleichgewichtes liegt, er also fast ausschließlich diffusionsbestimmt ist:

$$\frac{n_+}{n_1} \ll \frac{4}{p} \left(\frac{n_+}{n_1} \right)^{(k)} \quad , \quad (5.5a)$$

(bzw. die Neutralgasdichte weit oberhalb des K-Wertes liegt) ist D_p unabhängig von n_1 (bzw. n_p), d.h. sind n_1 und n_p einander direkt proportional.

Wie Tabelle zeigt, ist letzteres sehr gut erfüllt für das Plasmaintere im W VII A, gerade noch ausreichend im Pulsator, jedoch nicht mehr erfüllt im Alcator.

Nachdem nun der Einfluß des Ionisationsgrades auf V_p bekannt ist, soll anschließend der Einfluß des Teilchen-Einschlusses auf den Ionisationsgrad betrachtet werden.

Wie bereits am Ende von Teil 2 erwähnt, ist der Ionisationsgrad nicht nur durch Diffusionsverluste, sondern auch durch Rekombination bestimmt. Gleichung (3.23) zeigt, daß dabei nur Strahlungs-Rekombination in Frage kommt; Dreierstoß-Rekombinationen sind bei den interessanten Elektronendichten zu unwahrscheinlich. Wir ersetzen in der stationären Form von (2.4b) $\tilde{z}_3 \cdot V_3$ durch $\tilde{n}_1 \cdot J$ (wobei \tilde{n}_1 der über eine Magnetfeldfläche gemittelte Wert ist) und definieren Mittelwerte von J und R :

$$\bar{\tau}(r) = \frac{\int_0^r n_e \varrho d\varrho}{\bar{J} \cdot \int_0^r \tilde{n}_1 \varrho d\varrho - \bar{R} \int_0^r n_+ \varrho d\varrho} \quad . \quad (5.17)$$

Mit $n_e \approx n_+$ führen wir jetzt auch noch Mittelwerte von n_+ und \tilde{n}_1 ein:

$$\frac{\bar{n}_1(r)}{\bar{n}_+(r)} = \frac{\bar{R}}{\bar{J}} \cdot \left[1 + \frac{1}{\bar{\tau}(r) \cdot \bar{R}} \right] \quad . \quad (5.17a)$$

Alle Größen in (5.17a) sind über das Volumen innerhalb einer magnetischen Fläche vom Radius r gemittelte Werte; während aber die Dichten dabei nur mit dem Radius ϱ gewichtet wurden, wurde J mit $\tilde{n}_1 \cdot \varrho$, und R mit $n_e \cdot \varrho$ gewichtet.

Es ist daher eine nicht ganz zulässige Vereinfachung, wenn wir näherungsweise in der nächsten Gleichung alle Größen als die lokalen Werte am Radius r verstehen:

$$\frac{n_1}{n_+} \approx \frac{R}{J} \cdot \left[1 + \frac{1}{\tau \cdot R} \right] \quad (5.17b)$$

Aus (3.23) und (6.2) folgt

$$R \approx n_e \cdot 2 \cdot c \cdot F_{gg} \cdot \bar{p} + 1 \downarrow R_1 \approx n_e \cdot 2.5 \cdot 10^{-14} \cdot s \quad (5.18)$$

(Siehe auch (6.12)).

Im Bereich niedriger Plasmadichten ($< 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) erweist sich $\tau R \ll 1$, und daher

$$\frac{n_1}{n_+} \approx \left(\frac{n_1}{n_+} \right)^{(k)} \cdot \frac{1/\tau}{R}$$

Mit steigender Plasmadichte wächst aber nicht nur R - proportional zu n_e laut (5.18) - sondern - das zeigt die bisherige experimentelle Erfahrung - auch τ .

So kommt es, daß im Bereich hoher Plasmadichten ($> 10^{15} \text{ cm}^{-3}$) $\tau R \gg 1$ gelten kann und daher

$$\frac{n_1}{n_+} \approx \left(\frac{n_1}{n_+} \right)^{(k)}$$

Diese Situation muß nach Tabelle 1 im Plasmainterinneren von Alcator bereits erreicht sein. Diesen begrenzenden Einfluß der Rekombination auf die minimal erreichbare Neutralgasdichte bemerken z.B. Gordeev, Petrov und Zinov'ev in [19].

Nur um einen Eindruck zu erhalten, welches etwa die Grenzdichte zwischen beiden Bereichen ist, machen wir am Ende die recht willkürliche Annahme:

$$\tau(r) = 10^{-14} \cdot \frac{n_e}{r}$$

Das würde bedeuten: Für ein Plasma, das bei $r = 10 \text{ cm}$ eine Elektronentemperatur von $\approx 40 \text{ eV}$ hat, wäre

$$n_e \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

diejenige Dichte, bei der Diffusion und Rekombination vergleichbar sind.

Zusammenfassend läßt sich sagen:

Bei Dichten unterhalb von 10^{14} cm^{-3} ist die H_{α} - (oder H_{β} -) Intensität der Neutralgasdichte proportional, aus welcher sich dann die Teilchen-Einschlußzeit sicher bestimmen läßt.

Bei Dichten oberhalb von 10^{15} cm^{-3} ist die H_{α} - Intensität schwächer als proportional von n_1 abhängig. Auch wenn man n_1 aus H_{α} bestimmt hätte, bekäme man keine Information mehr über τ .

Im Bereich zwischen 10^{14} und 10^{15} cm^{-3} sind Diffusionsverlust- und Strahlungsrekombinations-Raten vergleichbar, eine τ -Bestimmung aus einem gemessenen n_1 beginnt also unsicherer zu werden als im Falle kleinerer Dichten. Unglücklicherweise beginnt auch gerade in diesem Dichtebereich die Ermittlung der Neutralgasdichte n_1 aus der Balmerlinien-Intensität etwas umständlicher und unsicherer zu werden, weil die einfache Proportionalität, und damit sowohl Fig.2 in der HJ-Arbeit als auch die Näherungsformel (6.8b) in dieser Arbeit, nicht mehr gelten. Dieser Zufall liegt begründet in der Termstruktur des H-Atoms, der zufolge die Stoßgrenze im lokalen Gleichgewicht gerade etwa bei $p = 4$ liegt, d.h. daß ohne Mitwirkung der Diffusion dieses Niveau nicht mehr stark genug mit dem Grundzustand verkoppelt ist, um "Korona-Verhältnisse" zu gewährleisten.

6. Näherungsformeln für J , D_3 , V_3 und R

Im letzten Teil wurde bereits zweimal Bezug genommen (bei der Herleitung von (5.12) und (5.18)) auf etwas andere Darstellungen der Stoßkoeffizienten. Auch bei der anschließenden Herleitung der formelmäßigen Wiedergabe der HJ-Ergebnisse (aus dem Gleichungssystem (3.9), mit den J-Koeffizienten (4.4) mit (4.7) aus [18]) beziehen wir uns ganz auf die bereits erwähnte Arbeit [20], in der die Besetzungsdichten wasserstoff- und alkaliähnlicher Verunreinigungs-Ionen in homogenen und stationären Wasserstoff-Plasmen berechnet wurden. Das Ziel jener Arbeit war, zu zeigen, daß bei der Berechnung des lokalen Ionisationsgrades, vor allem bei den Alkali-Ähnlichen, stufenweise

Prozesse über angeregte Niveaus unbedingt zu berücksichtigen sind (d.h. $n_1^{(s)} < n_1^{(k)}$, vgl. (3.15)). Dazu wurde ein Modell vorgeschlagen, das analytisch recht einfach beschreibbare Koeffizienten für die einzelnen Prozesse enthält. Mit Vorbehalt ist dieses Modell auch auf Wasserstoff übertragbar, doch die Koeffizienten - weil sie eine ganze Gruppe von verschiedenen Ionen gleichermaßen beschreiben sollen - haben einen viel pauschaleren Charakter und sind also für Wasserstoff sicher ungenauer als in [18], wo man die gesamte derzeitige Kenntnis von Querschnitten des Wasserstoffatoms zu verwerthen suchte.

Jedoch hilft ihre im Vergleich zu den J-Koeffizienten analytisch viel einfachere Struktur, recht einfache formelmäßige Darstellungen der HJ-Ergebnisse zu finden, d.h. von T_e und n_e abhängige Ausdrücke, die die exakten Lösungen des vollständigen Gleichungssystems mit den J-Koeffizienten befriedigend (mit einer Ungenauigkeit von nicht mehr als etwa 5%) wiedergeben.

Diese Näherungsformeln werden abgeleitet für den Fall der direkten Proportionalität zwischen n_1 und n_3 .

Fig.3 gibt die Gültigkeitsbereiche an, d.h. für jedes Paar (n_e, T_e) diejenige Neutralteilchendichte $(n_1)_{\text{grenz}}$, oberhalb derer V_3 durch n_1 nur weniger als 10% beeinflusst ist. Die anschließenden Tabellen zeigen die n_1 -Abhängigkeit von V_3 .

Die Koeffizienten aus [20] sind:

$$R_{pq}^{\downarrow} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{p^5} \cdot x_{pq} \quad , \quad (6.1)$$

$$R_p^{\downarrow} = \frac{1}{4} \cdot 2 \pi \alpha^3 \cdot s_p \cdot G(s_p) \quad , \quad (6.2)$$

$$C_{pq}^{\uparrow} = \frac{3}{2} \cdot \frac{p^5}{q^3} \cdot x_{pq}^{-9/2} \cdot \exp(-s_{pq}) \cdot G(s_{pq}) \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot s_{pq}^{1/2}}{3 \cdot G(s_{pq})} \right] \quad (6.3)$$

$$C_p^{\uparrow} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \exp(-s_p) \cdot G(s_p). \quad (6.4)$$

(Es wurde $\bar{p} \rightarrow \infty$ gesetzt. Die Normierungsfaktoren sind dieselben wie in (3.19).)

Die Größe G - von der Größenordnung 1 - :

$$G(s) \equiv 2 \cdot s^{1/2} \cdot \exp(s) \cdot \text{ei}(s)$$

$$(\text{ei}(s) \equiv \int_s^{\infty} \frac{1}{z} \exp(-z) dz)$$

wird in der Näherung benutzt:

$$G(s) \approx 1.3 \cdot [1 - 0.2 \cdot (\log s + 0.6)^2] \quad (6.5)$$

(log: dekadischer Logarithmus)

Um Größenordnungen abzuschätzen, läßt sich folgende grobe "Korona-Näherung" verwenden:

$$J_{\text{grob}}^{(k)} \approx n_e \cdot \bar{C}_1^{\uparrow} \approx 3 \cdot 10^{-8} \cdot n_e \cdot \frac{G(s)}{\exp(s)} \quad (6.6)$$

$$3_{D_{\text{grob}}}^{(k)} \approx \frac{\bar{R}_{31}^{\downarrow}}{n_e \cdot \bar{C}_{13}^{\uparrow}} \approx 2 \cdot 10^{16} \cdot \frac{1}{n_e} \cdot \frac{\exp(s)}{G(s)} \quad (6.7)$$

Damit ist dann (mit $\bar{R}_{32}^{\downarrow} \approx 0.5 \cdot 10^8 \text{sec}^{-1}$)

$$\boxed{3_{V_{\text{grob}}}^{(k)} = \frac{J_{\text{grob}}^{(k)} \cdot 3_{D_{\text{grob}}}^{(k)}}{\bar{R}_{32}^{\downarrow}} \approx 12} \quad (6.8)$$

Die nächste Näherung besteht darin, zwar noch in "Korona-Näherung" zu verbleiben, jedoch - unter Beibehaltung der Struktur in (6.6) und (6.7) - die Ausdrücke den "Korona-Ergebnissen" mit J-Koeffizienten anzupassen; dabei schreiben wir gleichzeitig die Elektronendichte in Einheiten von 10^{13}cm^{-3} :

$$\hat{n}_e \equiv \frac{n_e}{10^{13}} \quad (6.9a)$$

$$\boxed{J^{(k)} = 4.1 \cdot 10^5 \cdot \hat{n}_e \cdot \frac{1 - 0.19 \cdot (\log s + 0.31)^2}{\exp(1.46 \cdot s)}} \quad (6.6a)$$

$$\boxed{D_3^{(k)} = \frac{1.14 \cdot 10^3}{\hat{n}_e} \cdot \frac{\exp(s)}{1 - 0.2 \cdot (\log s + 0.4)^2}} \quad (6.7a)$$

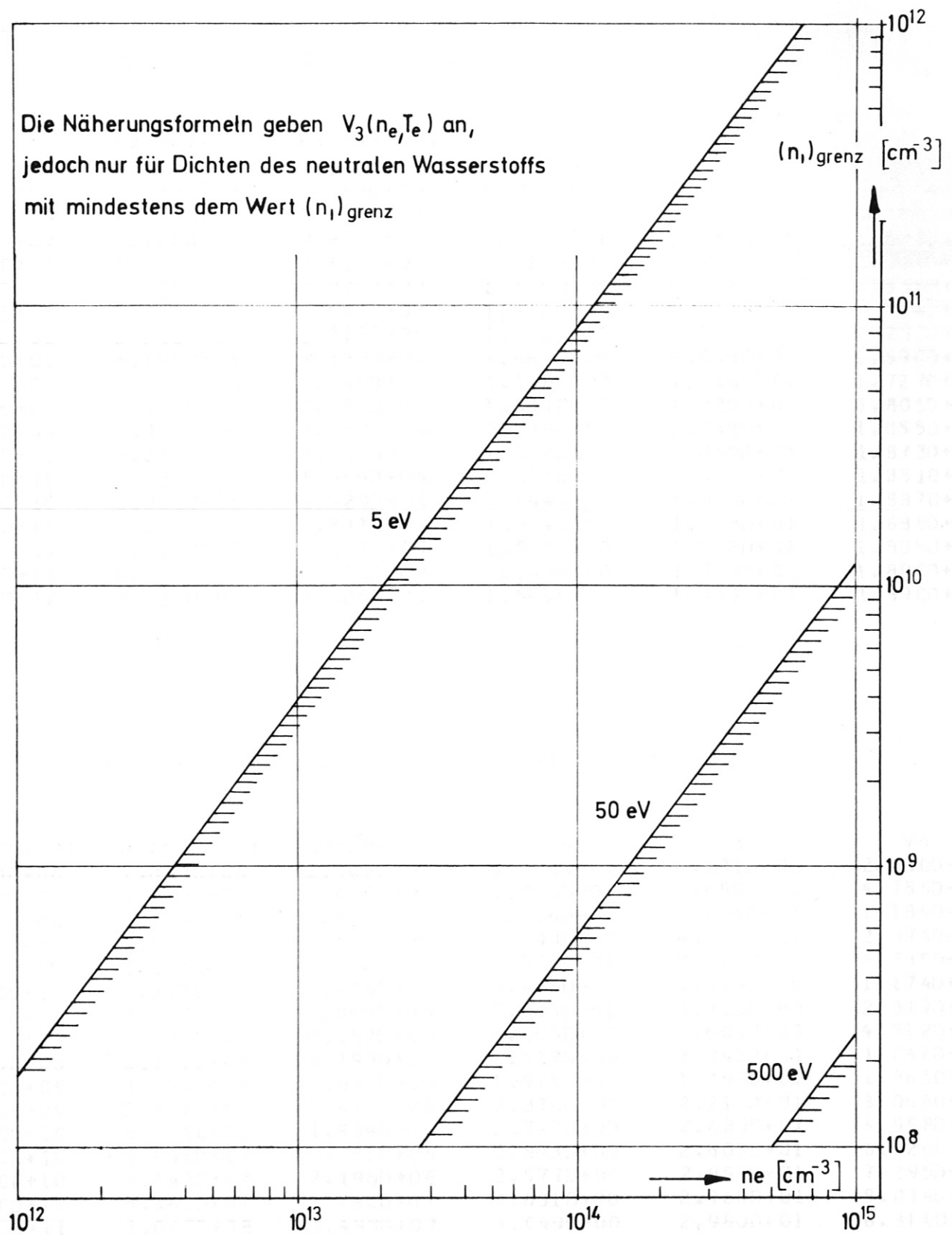


Fig. 3

KTE(EV) = 1.0000+01 NE(CM**-3) = 5.0000+12

| N1(CM**-3) | N2(CM**-3) | N3(CM**-3) | N2/N3 | V3 | V4 |
|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| 1.00D+06 | 1.091D+03 | 2.190D+03 | 4.982D-01 | 3.732D-01 | 1.977D-01 |
| 2.00D+06 | 1.212C+03 | 2.268D+03 | 5.343D-01 | 7.207D-01 | 3.914D-01 |
| 5.00D+06 | 1.575D+03 | 2.503D+03 | 6.292D-01 | 1.632D+00 | 9.489D-01 |
| 1.00D+C7 | 2.180D+03 | 2.895D+03 | 7.531D-01 | 2.823D+00 | 1.807D+00 |
| 2.00D+07 | 3.391D+03 | 3.679D+03 | 9.217D-01 | 4.444D+00 | 3.299D+00 |
| 5.00D+07 | 7.022D+03 | 6.029D+03 | 1.165D+00 | 6.778D+00 | 6.536D+00 |
| 1.00D+08 | 1.307D+04 | 9.947D+03 | 1.314D+00 | 8.217D+00 | 9.714D+00 |
| 2.00D+08 | 2.518D+04 | 1.778D+04 | 1.416D+00 | 9.193D+00 | 1.283D+01 |
| 5.00D+08 | 6.149D+04 | 4.129D+04 | 1.489D+00 | 9.898D+00 | 1.590D+01 |
| 1.00D+09 | 1.220D+05 | 8.046D+04 | 1.516D+00 | 1.016D+01 | 1.727D+01 |
| 2.00D+09 | 2.430D+05 | 1.588D+05 | 1.530D+00 | 1.029D+01 | 1.805D+01 |
| 5.00D+09 | 6.061D+05 | 3.939D+05 | 1.539D+00 | 1.038D+01 | 1.855D+01 |
| 1.00D+10 | 1.211D+06 | 7.856D+05 | 1.542D+00 | 1.040D+01 | 1.873D+01 |
| 2.00D+10 | 2.422D+06 | 1.569D+06 | 1.543D+00 | 1.042D+01 | 1.881D+01 |
| 5.00D+10 | 6.053D+06 | 3.920D+06 | 1.544D+00 | 1.043D+01 | 1.887D+01 |
| 1.00D+11 | 1.210D+07 | 7.837D+06 | 1.544D+00 | 1.043D+01 | 1.888D+01 |
| 2.00D+11 | 2.421D+07 | 1.567D+07 | 1.545D+00 | 1.043D+01 | 1.889D+01 |
| 5.00D+11 | 6.052D+C7 | 3.918D+07 | 1.545D+00 | 1.043D+01 | 1.890D+01 |
| 1.00D+12 | 1.210D+08 | 7.835D+07 | 1.545D+00 | 1.043D+01 | 1.890D+01 |

KTE(EV) = 1.0000+01 NE(CM**-3) = 5.0000+13

| N1(CM**-3) | N2(CM**-3) | N3(CM**-3) | N2/N3 | V3 | V4 |
|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| 1.00D+06 | 1.052D+05 | 2.465D+05 | 4.268D-01 | 4.231D-02 | 2.380D-02 |
| 2.00D+06 | 1.063D+05 | 2.469D+05 | 4.306D-01 | 8.450D-02 | 4.759D-02 |
| 5.00D+06 | 1.095D+05 | 2.479D+05 | 4.416D-01 | 2.104D-01 | 1.189D-01 |
| 1.00D+07 | 1.148D+05 | 2.496D+05 | 4.599D-01 | 4.178D-01 | 2.374D-01 |
| 2.00D+C7 | 1.255D+C5 | 2.531D+05 | 4.957D-01 | 8.241D-01 | 4.735D-01 |
| 5.00D+07 | 1.575D+05 | 2.635D+05 | 5.975D-01 | 1.979D+00 | 1.174D+00 |
| 1.00D+08 | 2.108D+05 | 2.809D+05 | 7.503D-01 | 3.713D+00 | 2.317D+00 |
| 2.00D+08 | 3.174D+C5 | 3.157D+05 | 1.005D+00 | 6.608D+00 | 4.512D+00 |
| 5.00D+08 | 6.372D+05 | 4.199D+05 | 1.517D+00 | 1.242D+01 | 1.046D+01 |
| 1.00D+09 | 1.170D+C6 | 5.936D+05 | 1.971D+00 | 1.757D+01 | 1.865D+01 |
| 2.00D+09 | 2.236D+06 | 9.411D+05 | 2.376D+00 | 2.216D+01 | 3.066D+01 |
| 5.00D+09 | 5.434D+06 | 1.984D+06 | 2.740D+00 | 2.629D+01 | 4.998D+01 |
| 1.00D+10 | 1.076D+C7 | 3.721D+06 | 2.893D+00 | 2.803D+01 | 6.326D+01 |
| 2.00D+10 | 2.143D+07 | 7.196D+06 | 2.977D+00 | 2.899D+01 | 7.295D+01 |
| 5.00D+10 | 5.341D+07 | 1.762D+07 | 3.031D+00 | 2.960D+01 | 8.034D+01 |
| 1.00D+11 | 1.067D+08 | 3.499D+07 | 3.049D+00 | 2.980D+01 | 8.314D+01 |
| 2.00D+11 | 2.133D+08 | 6.974D+07 | 3.059D+00 | 2.991D+01 | 8.462D+01 |
| 5.00D+11 | 5.331D+08 | 1.740D+08 | 3.064D+00 | 2.997D+01 | 8.553D+01 |
| 1.00D+12 | 1.066D+09 | 3.477D+08 | 3.066D+00 | 2.999D+01 | 8.584D+01 |

KTE(EV)= 1.000D+02 NE(CM**-3)= 5.000D+12

| N1(CM**-3) | N2(CM**-3) | N3(CM**-3) | N2/N3 | V3 | V4 |
|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| 1.00D+06 | 4.590D+02 | 4.094D+02 | 1.121D+00 | 1.069D+01 | 1.201D+01 |
| 2.00D+06 | 8.507D+02 | 7.071D+02 | 1.203D+00 | 1.238D+01 | 1.538D+01 |
| 5.00D+06 | 2.026D+C3 | 1.600D+03 | 1.266D+00 | 1.368D+01 | 1.849D+01 |
| 1.00D+07 | 3.984D+03 | 3.089D+03 | 1.290D+00 | 1.418D+01 | 1.982D+01 |
| 2.00D+07 | 7.900D+03 | 6.066D+03 | 1.302D+00 | 1.444D+01 | 2.056D+01 |
| 5.00D+07 | 1.965D+04 | 1.500D+04 | 1.310D+00 | 1.460D+01 | 2.104D+01 |
| 1.00D+08 | 3.923D+C4 | 2.988D+04 | 1.313D+00 | 1.465D+01 | 2.120D+01 |
| 2.00D+08 | 7.840D+04 | 5.965D+04 | 1.314D+00 | 1.468D+01 | 2.128D+01 |
| 5.00D+08 | 1.959D+05 | 1.490D+05 | 1.315D+00 | 1.470D+01 | 2.133D+01 |
| 1.00D+09 | 3.917D+05 | 2.978D+05 | 1.315D+00 | 1.470D+01 | 2.135D+01 |
| 2.00D+09 | 7.833D+05 | 5.955D+05 | 1.315D+00 | 1.470D+01 | 2.136D+01 |
| 5.00D+09 | 1.958D+C6 | 1.489D+06 | 1.316D+00 | 1.471D+01 | 2.136D+01 |
| 1.00C+10 | 3.916D+06 | 2.977D+06 | 1.316D+00 | 1.471D+01 | 2.136D+01 |
| 2.00D+10 | 7.833C+C6 | 5.954D+06 | 1.316D+00 | 1.471D+01 | 2.136D+01 |
| 5.00D+10 | 1.958D+C7 | 1.488D+07 | 1.316D+00 | 1.471D+01 | 2.137D+01 |
| 1.00C+11 | 3.916D+07 | 2.977D+07 | 1.316D+00 | 1.471D+01 | 2.137D+01 |
| 2.00D+11 | 7.833D+07 | 5.954D+07 | 1.316D+00 | 1.471D+01 | 2.137D+01 |
| 5.00D+11 | 1.958D+C8 | 1.488D+08 | 1.316D+00 | 1.471D+01 | 2.137D+01 |
| 1.00D+12 | 3.916D+C8 | 2.977D+08 | 1.316D+00 | 1.471D+01 | 2.137D+01 |

KTE(EV)= 1.000C+02 NE(CM**-3)= 5.000D+13

| N1(CM**-3) | N2(CM**-3) | N3(CM**-3) | N2/N3 | V3 | V4 |
|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| 1.00D+06 | 9.767D+03 | 1.075D+04 | 9.088D-01 | 4.747D+00 | 3.494D+00 |
| 2.00D+06 | 1.324D+04 | 1.227D+04 | 1.080D+00 | 8.320D+00 | 6.699D+00 |
| 5.00D+06 | 2.367D+04 | 1.682D+04 | 1.407D+00 | 1.517D+01 | 1.490D+01 |
| 1.00D+07 | 4.105D+04 | 2.441D+04 | 1.682D+00 | 2.091D+01 | 2.518D+01 |
| 2.00D+07 | 7.580D+04 | 3.958D+04 | 1.915D+00 | 2.578D+01 | 3.843D+01 |
| 5.00D+07 | 1.801D+05 | 8.511D+04 | 2.116D+00 | 2.997D+01 | 5.617D+01 |
| 1.00D+08 | 3.538D+05 | 1.610D+05 | 2.198D+00 | 3.169D+01 | 6.638D+01 |
| 2.00D+08 | 7.014D+05 | 3.128D+05 | 2.243D+00 | 3.263D+01 | 7.302D+01 |
| 5.00D+08 | 1.744D+06 | 7.680D+05 | 2.271D+00 | 3.322D+01 | 7.768D+01 |
| 1.00D+09 | 3.482D+C6 | 1.527D+06 | 2.280D+00 | 3.342D+01 | 7.936D+01 |
| 2.00D+09 | 6.957D+06 | 3.044D+06 | 2.285D+00 | 3.352D+01 | 8.024D+01 |
| 5.00D+09 | 1.738D+C7 | 7.597D+06 | 2.288D+00 | 3.358D+01 | 8.077D+01 |
| 1.00D+10 | 3.476D+07 | 1.519D+07 | 2.289D+00 | 3.360D+01 | 8.095D+01 |
| 2.00D+10 | 6.952D+C7 | 3.036D+07 | 2.290D+00 | 3.361D+01 | 8.104D+01 |
| 5.00D+10 | 1.738D+08 | 7.589D+07 | 2.290D+00 | 3.362D+01 | 8.109D+01 |
| 1.00D+11 | 3.476D+08 | 1.518D+08 | 2.290D+00 | 3.362D+01 | 8.111D+01 |
| 2.00D+11 | 6.951D+08 | 3.035D+08 | 2.290D+00 | 3.362D+01 | 8.112D+01 |
| 5.00D+11 | 1.738D+09 | 7.588D+08 | 2.290D+00 | 3.362D+01 | 8.112D+01 |
| 1.00D+12 | 3.475D+C9 | 1.518D+09 | 2.290D+00 | 3.362D+01 | 8.113D+01 |

KTE(EV)= 1.000D+03 NE(CM**-3)= 5.000C+12

| N1(CM**-3) | N2(CM**-3) | N3(CM**-3) | N2/N3 | V3 | V4 |
|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| 1.00D+06 | 2.830D+02 | 2.280D+02 | 1.241D+00 | 1.230D+01 | 1.412D+01 |
| 2.00D+06 | 5.623D+02 | 4.505D+02 | 1.248D+00 | 1.245D+01 | 1.439D+01 |
| 5.00D+06 | 1.400D+03 | 1.118D+03 | 1.253D+00 | 1.254D+01 | 1.455D+01 |
| 1.00D+07 | 2.797D+03 | 2.230D+03 | 1.254D+00 | 1.257D+01 | 1.460D+01 |
| 2.00D+07 | 5.590D+03 | 4.455D+03 | 1.255D+00 | 1.259D+01 | 1.463D+01 |
| 5.00D+07 | 1.397D+04 | 1.113D+04 | 1.255D+00 | 1.260D+01 | 1.465D+01 |
| 1.00D+08 | 2.794D+04 | 2.225D+04 | 1.256D+00 | 1.260D+01 | 1.465D+01 |
| 2.00D+08 | 5.587D+04 | 4.450D+04 | 1.256D+00 | 1.260D+01 | 1.466D+01 |
| 5.00D+08 | 1.397D+05 | 1.112D+05 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |
| 1.00D+09 | 2.793D+05 | 2.225D+05 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |
| 2.00D+09 | 5.587D+05 | 4.449D+05 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |
| 5.00D+09 | 1.397D+06 | 1.112D+06 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |
| 1.00D+10 | 2.793D+06 | 2.225D+06 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |
| 2.00D+10 | 5.587D+06 | 4.449D+06 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |
| 5.00D+10 | 1.397D+07 | 1.112D+07 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |
| 1.00D+11 | 2.793D+07 | 2.225D+07 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |
| 2.00D+11 | 5.587D+07 | 4.449D+07 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |
| 5.00D+11 | 1.397D+08 | 1.112D+08 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |
| 1.00D+12 | 2.793D+08 | 2.225D+08 | 1.256D+00 | 1.261D+01 | 1.466D+01 |

KTE(EV)= 1.000D+03 NE(CM**-3)= 5.000D+13

| N1(CM**-3) | N2(CM**-3) | N3(CM**-3) | N2/N3 | V3 | V4 |
|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| 1.00D+06 | 2.938D+03 | 1.888D+03 | 1.556D+00 | 1.677D+01 | 2.567D+01 |
| 2.00D+06 | 5.535D+03 | 3.343D+03 | 1.656D+00 | 1.894D+01 | 3.254D+01 |
| 5.00D+06 | 1.333D+04 | 7.707D+03 | 1.729D+00 | 2.054D+01 | 3.877D+01 |
| 1.00D+07 | 2.632D+04 | 1.498D+04 | 1.757D+00 | 2.113D+01 | 4.141D+01 |
| 2.00D+07 | 5.229D+04 | 2.953D+04 | 1.771D+00 | 2.144D+01 | 4.287D+01 |
| 5.00D+07 | 1.302D+05 | 7.317D+04 | 1.780D+00 | 2.163D+01 | 4.380D+01 |
| 1.00D+08 | 2.601D+05 | 1.459D+05 | 1.783D+00 | 2.170D+01 | 4.412D+01 |
| 2.00D+08 | 5.198D+05 | 2.914D+05 | 1.784D+00 | 2.173D+01 | 4.428D+01 |
| 5.00D+08 | 1.299D+06 | 7.278D+05 | 1.785D+00 | 2.175D+01 | 4.438D+01 |
| 1.00D+09 | 2.598D+06 | 1.455D+06 | 1.785D+00 | 2.176D+01 | 4.441D+01 |
| 2.00D+09 | 5.195D+06 | 2.910D+06 | 1.785D+00 | 2.176D+01 | 4.442D+01 |
| 5.00D+09 | 1.299D+07 | 7.274D+06 | 1.785D+00 | 2.176D+01 | 4.443D+01 |
| 1.00D+10 | 2.598D+07 | 1.455D+07 | 1.786D+00 | 2.176D+01 | 4.444D+01 |
| 2.00D+10 | 5.195D+07 | 2.910D+07 | 1.786D+00 | 2.176D+01 | 4.444D+01 |
| 5.00D+10 | 1.299D+08 | 7.274D+07 | 1.786D+00 | 2.176D+01 | 4.444D+01 |
| 1.00D+11 | 2.598D+08 | 1.455D+08 | 1.786D+00 | 2.176D+01 | 4.444D+01 |
| 2.00D+11 | 5.195D+08 | 2.909D+08 | 1.786D+00 | 2.176D+01 | 4.444D+01 |
| 5.00D+11 | 1.299D+09 | 7.274D+08 | 1.786D+00 | 2.176D+01 | 4.444D+01 |
| 1.00D+12 | 2.597D+09 | 1.455D+09 | 1.786D+00 | 2.176D+01 | 4.444D+01 |

Damit ist dann

$$V_3^{(k)} = \frac{J^{(k)} \cdot D_3^{(k)}}{R_{32}} = 11 \cdot A_V(T_e) \quad , \quad (6.8a)$$

wobei A_V eine schwache T_e -Abhängigkeit und die Größenordnung 1 besitzt:

$$A_V(T_e) = \exp(-0.1 \cdot s) \cdot [1 - 0.18 \cdot (\log s + 1.3)^2] \quad . \quad (6.8b)$$

Zumindest dann, wenn die Plasmadichte 10^{13} cm^{-3} überschreitet, ist jedoch diese "Korona-Näherung" nicht mehr sehr genau und es müssen bei $J^{(k)}$ und $D_3^{(k)}$ Korrekturen angebracht werden, die den Einfluß stufenweiser Prozesse wiedergeben:

$$J = A_J \cdot J^{(k)} \quad , \quad (6.6b)$$

$$D_3 = A_D \cdot D_3^{(k)} \quad . \quad (6.7b)$$

Um die Struktur dieser Korrekturfaktoren zu erhalten, berücksichtigt man in nächster Näherung noch die Ionisation oder Anregung von $p = 2$ aus:

$$n_1 \cdot J_{\text{verbessert}} = n_e (n_1 \bar{C}_1^{\uparrow} + n_2 \bar{C}_2^{\uparrow}) ;$$

mit

$$n_2 \approx n_1 \cdot n_e \frac{\bar{C}_{12}^{\uparrow}}{R_{21}^{\downarrow}}$$

folgt daraus

$$J_{\text{verbessert}} = J^{(k)} \cdot \left[1 + n_e \frac{\bar{C}_{12}^{\uparrow} \cdot \bar{C}_2^{\uparrow}}{R_{21}^{\downarrow} \cdot \bar{C}_1^{\uparrow}} \right] \quad . \quad (6.6c)$$

Damit wird aber der Einfluß von n_e überschätzt. Wiederum unter Beibehaltung der Struktur und mit entsprechender Überlegung für D_3 setzt man daher

$$A_{J,D} = 1 + n_e^{\alpha_{J,D}} \cdot \varphi_{J,D}(T_e) \quad , \quad (6.9)$$

mit

$$\alpha_{J,D} < 1 \quad ,$$

wobei man gleichzeitig mit

$$\varphi_{J,D}(T_e) = s^{\beta_{J,D}} + \gamma_{J,D} \cdot s \quad (6.10)$$

die T_e -Abhängigkeit des zweiten Summanden der rechten Seite von (6.6c) einfach wiederzugeben versucht.

Anpassung an die HJ-Ergebnisse bringt:

$$A_J(n_e, T_e) = 1 + 0.23 \cdot \hat{n}_e^{0.38} \cdot (s^{0.14} + 0.4 \cdot s) \quad , \quad (6.6d)$$

$$A_D(n_e, T_e) = 1 + 0.8 \cdot \hat{n}_e^{0.76} \cdot (s^{0.31} - 0.28 \cdot s) \quad . \quad (6.7c)$$

Damit ist schließlich

$$V_3 = \frac{J \cdot D_3}{R_{32} \downarrow} = 11 \cdot A_V \cdot A_J \cdot A_D \quad . \quad (6.8c)$$

Diese Näherungen geben

J im Bereich: $10^{12} \text{ cm}^{-3} \leq n_e \leq 5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ und $10 \text{ eV} \leq kT_e \leq 1000 \text{ eV}$
mit höchstens 5%,

D_3 im Bereich: $10^{12} \text{ cm}^{-3} \leq n_e \leq 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ und $10 \text{ eV} \leq kT_e \leq 1000 \text{ eV}$
mit höchstens 5%,

V_3 im Bereich: $10^{12} \text{ cm}^{-3} \leq n_e \leq 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ und $3 \text{ eV} \leq kT_e \leq 2000 \text{ eV}$
mit höchstens 8% und
im Bereich: $10^{12} \text{ cm}^{-3} \leq n_e \leq 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ und $5 \text{ eV} \leq kT_e \leq 1000 \text{ eV}$
mit höchstens 5 %

Abweichung vom genauen Wert wieder.

V_3 - nach (6.8c) - ist in Fig.4 als Funktion von kT_e für verschiedene Werte von n_e dargestellt (vgl. Fig.2 in [12]).

Die Rekombinationsrate R ist bereits recht gut angenähert durch

$$R \approx n_e \cdot \bar{R}_1 \downarrow \approx R^{(k)} \quad , \quad (6.11)$$

mit

$$R^{(k)} = \hat{n}_e \cdot 0.5 \cdot s \cdot [1 - 0.22 \cdot (\log s + 0.55)^2] \quad (6.12)$$

(wie bereits in (5.18) benutzt: dort wurde gesetzt: $[1 - 0.22 \cdot (\log s + 0.55)^2] \approx 0.5$).

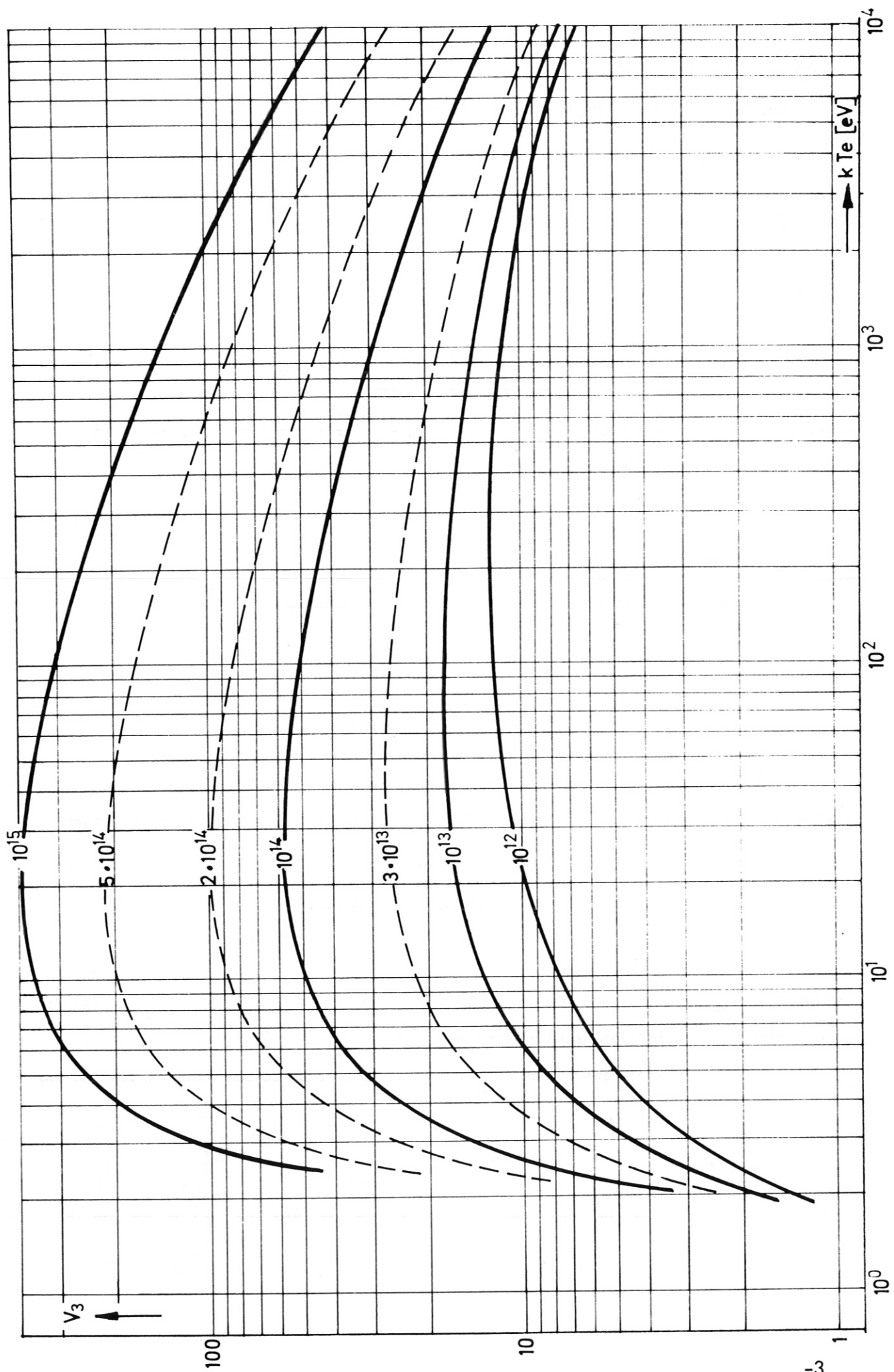


Fig. 4: Parameter ist $n_e \text{ cm}^{-3}$

Aus (3.23) ist nämlich ersichtlich, daß der Anteil der Dreierstoß-Rekombinationen für $n_e < 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ vernachlässigbar ist, und - mit Hilfe von (6.2) - daß der Anteil der Strahlungs-Rekombinationen in angeregte Niveaus etwa mit p^{-2} abnimmt.

Der Vollständigkeit halber sei jedoch trotzdem noch eine Näherung angegeben, die (6.11) verbessert:

$$R = A_R \cdot R^{(K)} \quad , \quad (6.12a)$$

vor allem, indem sie die n_e -Abhängigkeit besser berücksichtigt:

$$A_R(n_e, T_e) = 2 + \hat{n}_e \cdot \left\{ s^{0.1} - [1 - 0.2 (\log s + 0.6)^2] \right\} \quad . \quad (6.12b)$$

Diese Näherung gibt

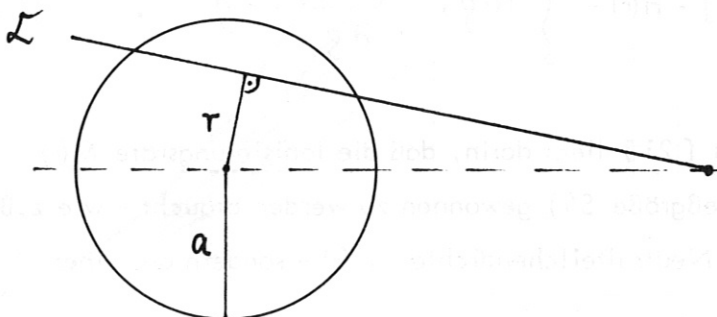
R im Bereich: $10^{12} \text{ cm}^{-3} \leq n_e \leq 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ und $10 \text{ eV} \leq kT_e \leq 1000 \text{ eV}$
mit höchstens 10% Abweichung vom genauen Wert wieder.

7. Bemerkung zur Auswertetechnik der H_{α} -Signale

Solange die H_{α} -Strahlungsverteilung in einer Poloidal-Ebene ($\varphi = \text{const}$) Zylindersymmetrie aufweist oder auf eine solche zurückführbar ist [21], läßt sich die "Entabelung" der Meßsignale

$$S(r) = \int_{\mathcal{L}(r)} i_3(s) ds$$

umgehen. i_3 ist die lokale Strahlungsdichte, verknüpft mit der lokalen H_{α} -Photonenerzeugungsrates z_3 mittels (3.10); s ist hier der Integrationsparameter auf der Sehne \mathcal{L} , des Kreises mit dem Radius a , im Abstand r vom Kreismittelpunkt:



Die zur Einschlußzeit $\tau(r)$ führende Größe ist - gemäß Gl. (2.4b) - die Teilchenproduktion $M(r)$ innerhalb des Volumens vom Radius r :

$$M(r) = \int_0^r \tilde{z}_3 \cdot V_3 \cdot \varrho \, d\varrho \quad [\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (7.1)$$

In [21] wird nun gezeigt, daß für die entsprechende H_{α} -Photonen-Produktion $H(r)$ die Beziehung gilt:

$$\int_0^r \tilde{i}_3(\varrho) \cdot \varrho \, d\varrho \equiv H(r) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-a}^{+a} S(r) \, dr - \int_{\tau(r)} S(s) \, ds \right]. \quad (7.2)$$

Wenn das Verhältnis zwischen Teilchenproduktion (Ionisationsrate) $M(r)$ und H_{α} -Photonen-Produktion (Anregungsrate) $H(r)$ unabhängig wäre von n_e und T_e und damit unabhängig von r , so wäre $M(r) = V_3^* \cdot H(r)$.

Die allgemeine Beziehung erhält man, wenn man die Definitionen von $M(r)$ und $H(r)$ in (7.1) bzw. (7.2) nach r differenziert und beide Ergebnisse mittels (3.10) verbindet:

$$\frac{\partial M}{\partial r} = V_3^* \cdot \frac{\partial H}{\partial r}, \quad (7.3)$$

wobei

$$V_3^* = \frac{4\pi}{h\nu_{23}} \cdot V_3 \quad (h\nu_{23} = E_{23}). \quad (7.4)$$

Die gesuchte Funktion

$$M(r) = \int_0^r V_3^* [n_e(\varrho), T_e(\varrho)] \cdot \frac{\partial H}{\partial \varrho} \cdot d\varrho \quad (7.5)$$

ergibt sich durch partielle Integration ($H(0) = 0$ nach (7.2)):

$$M(r) = V_3^* [n_e(r), T_e(r)] \cdot H(r) - \int_0^r H(\varrho) \cdot \frac{\partial V_3^*}{\partial \varrho} \cdot d\varrho. \quad (7.6)$$

Der Vorteil dieser Darstellung aus [21] liegt darin, daß die Ionisierungsrate $M(r)$ nicht durch Differentiation der Meßgröße $S(r)$ gewonnen zu werden braucht - wie z.B. nötig zur Berechnung der lokalen Neutralteilchendichte $n_1(r)$ - sondern aus einer

Integration $H(r)$ der Meßgröße. Die Berechnung der Ortsabhängigkeit von $V_3 - \frac{\partial V_3^*}{\partial \xi}$ im Integranden von (7.6) - wird sehr erleichtert dadurch, daß dieser Bericht einen analytischen, d.h. auch differenzierbaren, Ausdruck für V_3 angibt.

8. Vergleich der Ionisationskoeffizienten \hat{J} nach verschiedenen Autoren

Als Vergleich für Meßergebnisse - z.B. gemessener Neutralteilchen-Profile über dem Plasma-Querschnitt - dient häufig das numerische Modell von Düchs [22]. Die dort benutzten Ionisierungskoeffizienten entstammen der Arbeit von Lotz [23] und sind nur in "Korona"-Näherung berechnet, d.h. enthalten keine n_e -Abhängigkeit. Zum Vergleich zeigen wir in Fig. 5 die Koeffizienten nach Lotz und nach Johnson, der Vollständigkeit wegen auch noch den vielfach zitierten Koeffizienten von Drawin [24] .

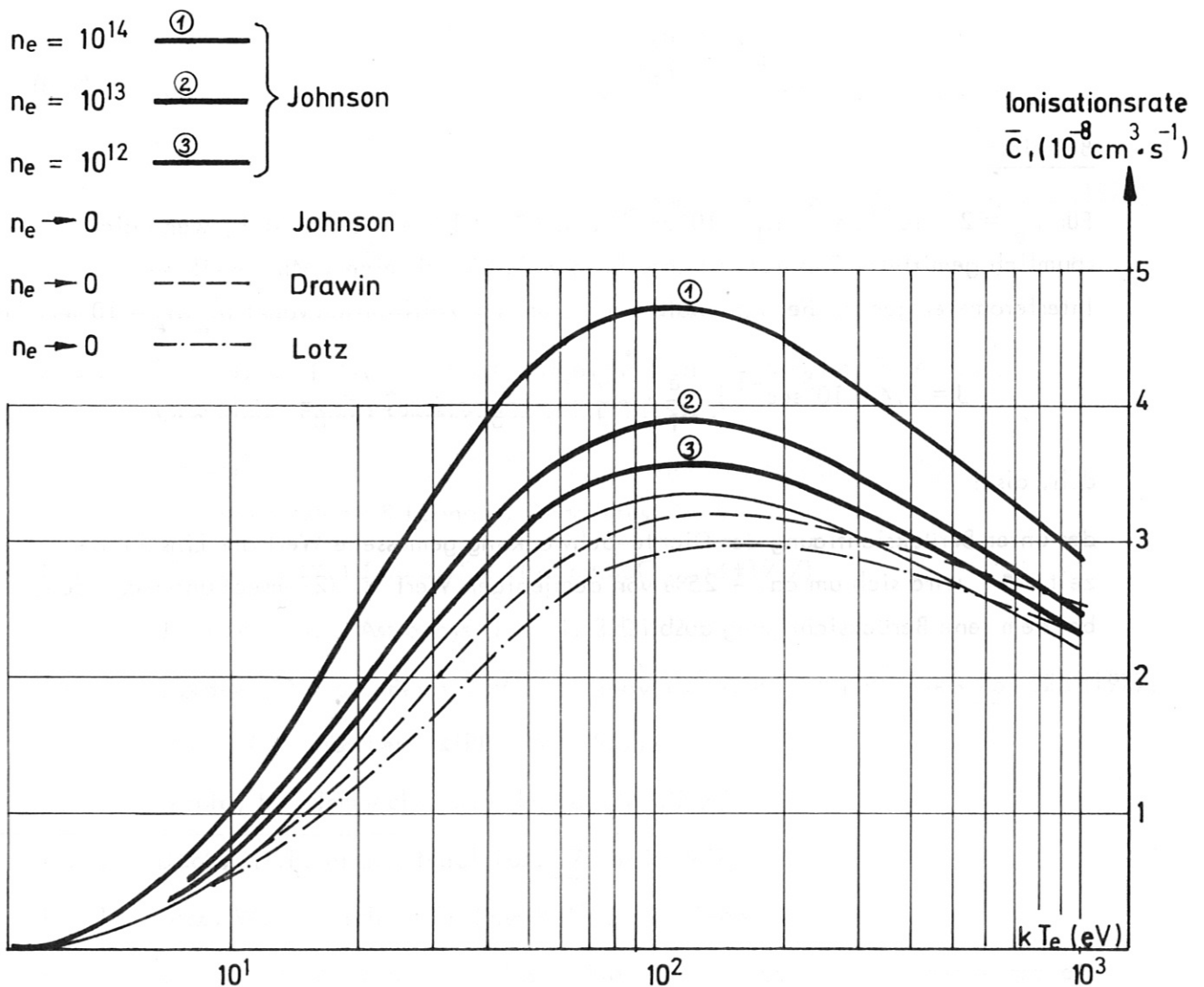


Fig. 5

9. Bemerkung zur Annahme der Stationarität bei der Auswertung der H_{α} -Ergebnisse

Bei Mitnahme des Terms \dot{n}_e erhält man aus (2.4b):

$$\frac{1}{\tau} = \frac{n_1}{n_e} \cdot J - \frac{n_+}{n_e} \cdot R - \frac{\dot{n}_e}{n_e} \quad , \quad (9.1)$$

wobei J und R sowie die Dichten n_1, n_e und n_+ die gleichen räumlichen Mittelwerte wie in (5.17a) bedeuten sollen.

Für den Bereich niederer Plasmadichten ($< 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) ist $\tau R \ll 1$ (s. S.27) und daher die Volumen-Rekombinationsrate gegenüber derjenigen der Ionisation vernachlässigbar:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau'} \cdot \left(1 - \frac{n_e}{n_1} \cdot \frac{\dot{n}_e/n_e}{J} \right) \quad , \quad (9.2)$$

mit

$$\tau' = \frac{n_e}{n_1 J} \quad (9.3)$$

Beispiel:

Für $n_e = 2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $n_1 = 10^9 \text{ cm}^{-3}$ und $kT_e = 100 \text{ eV}$ ergibt sich, wenn die räumlich gemittelte Elektronendichte (also z.B. die mit einem Mikrowellen-Interferometer gemessene) innerhalb 1 msec um 1% zeitlich schwankt ($\dot{n}_e/n_e = 10 \text{ sec}^{-1}$):

$$J = 7.4 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1} ; \quad \frac{n_e}{n_1} \cdot \frac{\dot{n}_e/n_e}{J} = \frac{1}{3.7} ; \quad \tau' = \frac{1}{37} \text{ sec} \quad ,$$

d.h. also:

der unter Berücksichtigung der Dichte-Schwankung gemessene Wert der Einschlußzeit τ wird sich um ca. $\pm 25\%$ von demjenigen Wert τ' (27 msec) unterscheiden, bei dem jene Berücksichtigung ausblieb.

Literaturverzeichnis

- [1] Abramov, V.A., et al.: Plasma Physics 10, 428 (1968) (Konf.1967 Stockholm)
- [2] Kaisai, S., et al.: Japanese Journal of Applied Physics 17, 903 (1978)
- [3] Equipe TFR (De Michelis, Magyar): Nucl.Fus. 18, 647 (1978)
- [4] Woolley, R.v.d.R.: Mon.Not.Roy.Astr.Soc. 94, 631 (1934)
- [5] Pannekoek, A.: Mon.Not.Roy.Astr.Soc. 95, 725 (1935)
- [6] Baker, J.G., Menzel, D.H.: Astrophys.J. 88, 52 (1938)
- [7] Giovanelli, R. G.: Australian J.Sci.Research A 1 , 275, 289 (1948)
- [8] D'Angelo, N.: Phys.Rev. 121, 505 (1961)
- [9] Bates, D.R., Kingston, A.E., McWhirter, R.W.P.: Proc.Roy.Soc. A 267, 297 (1962)
- [10] Drawin, H.W.: Ann.d.Physik 14, 262 (1964)
- [11] Abramov, V.A., Kuznetsov, E.I., Kogan, V.I.: Atomnaya Energiya 26, 516 (1969) (Übersetzung in Sov.Atom.Energy 26, 599 (1969))
- [12] Hinnov, E., Johnson, L.C.: J.Quant.Spectrosc.Radiat.Transfer 13, 333 (1973)
- [13] Abramov et al.: Atomnaya Energiya 33, 845 (1972)
- [14] Hearn, A.G., McWhirter, R.W.P.: CLM-P 23, 1963
- [15] Barnett, C.F. et al.: "Atomic Data for Controlled Fusion Research", Oak Ridge-Report ORNL-5206 (Vol.I) (1977)
- [16] McWhirter, R.W.P.: S.235 in "Plasma Diagnostic Techniques", Ed.: Huddleston & Leonard, Acad.Press 1965
- [17] Drawin, H.W., Emard, F.: Physica 85C , 333 (1977)
- [18] Johnson, L.C.: Astrophys.J. 174, 227 (1972)
- [19] Gordeev, Yu.S., Petrov, M.P., Zinov'ev, A.N.: JET P Letters 25, 223 (1977)
- [20] Mahn, C. Laborbericht IPP 3/52 (1967)
- [21] Wobig, H.: demnächst als Laborbericht IPP 2/
- [22] Düchs, D.F. et al.: Nucl.Fus. 17, 565 (1977)
- [23] Lotz, W.: Zeitschrift für Physik 216, 241 (1968)
- [24] Drawin, H W.: S.846 in "Plasma Diagnostics", Ed.: W.Lochte-Holtgreven, North Holland Publ.Comp., Amsterdam (1968)