

November 1977

Theoretische Untersuchungen zu den  
MHD-Verlusten in einem lithium-  
gekühlten Fusionsreaktormantel

Gert Trommer

IPP 4/165

November 1977



**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**

**8046 GARCHING BEI MÜNCHEN**

**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**  
**GARCHING BEI MÜNCHEN**

Theoretische Untersuchungen zu den  
MHD-Verlusten in einem lithium-  
gekühlten Fusionsreaktormantel

Gert Trommer

IPP 4/165

November 1977

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem  
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die  
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Gert Trommer

November 1977

Abstract

This report deals with the theoretical analysis of MHD losses in flows of liquid lithium in tubes of circular cross-section. Using a combination of power series and Bessel functions, a solution was found which allows one to estimate pressure drop and losses in tubes with conducting walls exposed to magnetic fields with varying strength and direction along the duct.

Using these results, a computer programme was written which yields the pressure drop in tubes with liquid lithium flows in the blanket of a fusion reactor with a toroidal magnetic field configuration.

The investigations show the great dependence of MHD losses on paths chosen for the lithium flows with respect to the magnetic field direction.

34

35

38

40

41

42

43

## INHALT

### Symbole und Definitionen

<u>A. Einleitung</u>	1
<u>B. Theoretische Grundlagen</u>	2
1. Vorgänge in MHD-Strömungen	2
2. MHD-Grundgleichungen, Problemstellung	6
3. Verluste in einem von flüssigem Lithium durchströmten Rohr	10
3.1 Entkopplung der Grundgleichungen	13
3.2 Aufstellung und Lösung der Differentialgleichung für das Potential $\phi$	14
3.2.1 Lösung durch Potenzreihenansatz für $n = 0$	18
3.2.2 Lösung durch Potenzreihenansatz für $n \neq 0$	21
3.2.3 Grenzübergänge für kastenförmiges Geschwindigkeitsprofil	25
3.3 Festlegung des Parameters $k$	29
3.3.1 Berechnung der Verluste durch $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -Kräfte	29
3.3.2 Bestimmung der Verluste durch mechanische Reibung	31
3.3.3 Abhängigkeit der Verluste vom Parameter $k$	33
3.3.4 Abschätzung des Parameters $k$	34
3.3.4.1 Methode des "konstanten Druckgradienten"	35
3.3.4.2 Methode der "minimalen Entropieproduktion"	38
3.3.4.3 Numerischer Vergleich beider Methoden	40
3.4 Vergleich von Resultaten dieser Arbeit mit Ergebnissen von Hoffman & Carlson [3]	41
3.5 Abschätzung des induzierten Magnetfeldes	43
3.6 Zusammenfassung	48

C. Anwendung auf einen realen Fall 55

- 1. Beschreibung der Rohranordnung für ein gegebenes Blanket 55
- 2. Ergebnisse 59

D. Anhang 62

- 1. Eingabe-Daten des Computer-Programms 62
- 2. Programmbeschreibung 63
- 3. Vergleich verschiedener Rechenwege des Rechenprogramms 66
- 4. FORTRAN-Quellenprogramm 68

Literatur

## SYMBOLS UND DEFINITIONEN

### Vektor-Größen und Tensoren

$\vec{B}$	magnetische Flußdichte
$\vec{H}$	magnetisches Feld
$\vec{E}$	elektrisches Feld
$\vec{j}$	Stromdichte
$\vec{v}$	Strömungsgeschwindigkeit
$\underline{\underline{T}}$	Spannungstensor

### Skalare Größen

$R_i, R_a$	Rohrradien
$L$	Rohrlänge
$\sigma$	el. Leitfähigkeit
$\eta$	Zähigkeit des Lithiums
$\rho$	Dichte des Lithiums
$M$	magnetische Permeabilität des Lithiums
$\phi$	elektrisches Potential
$\langle v \rangle$	mittlere Strömungsgeschwindigkeit

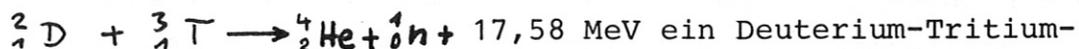
### Dimensionslose Größen

$H$	Hartmann-Zahl (elektromagn. Kraft/viskose Reibungskraft) <sup>1/2</sup>	$H = R_i B \sqrt{\frac{\sigma_{Li}}{\eta_{Li}}}$
$Re$	Reynolds-Zahl (Trägheitskraft/viskose Reibungskraft)	$Re = R_i \langle v \rangle \frac{\rho_{Li}}{\eta_{Li}}$
$R_m$	Magnetische Reynolds-Zahl (Induziertes Magnetfeld/angelegtes Magnetfeld)	$R_m = R_i \langle v \rangle \sigma_{Li} / \mu_{Li}$
$C$	Wand-Leitfähigkeitsverhältnis	$C = \frac{\sigma_w (R_a - R_i)}{\sigma_i R_i}$

Es wird durchgehend das MKSA-System verwendet.

## A. EINLEITUNG

In einem Kernfusionskraftwerk nach dem Konzept des magnetischen Einschlusses wird nach den gegenwärtigen Vorstellungen das Fusionsplasma durch Magnetfelder in einen toroidalen Vakuumbehälter eingeschlossen. Dabei soll nach der Reaktionsgleichung



ein Deuterium-Tritium-Gemisch bei hohen Temperaturen miteinander reagieren. Die hierbei gewonnene Reaktionsenergie von ca. 17,6 MeV besteht zum größten Teil in der kinetischen Energie der erzeugten Neutronen. Da Tritium auf Grund seiner kurzen Halbwertszeit (12,3 Jahre) ein natürlich kaum vorkommendes Isotop ist, muß man es in einem Lithium-Blanket durch  ${}^6\text{Li}(n,T)$ - und  ${}^7\text{Li}(n,n',T)$ -Reaktionen erzeugen. Gleichzeitig soll dieses Blanket die hohe Energie der Neutronen aufnehmen und in Wärme umwandeln, welche dann zur Stromerzeugung in einem Turbogenerator dienen soll.

Es wurde deshalb vorgeschlagen, flüssiges Lithium im Blanket sowohl als Brutmaterial wie auch als Kühlmittel zu verwenden, welches durch Rohre zu einem Wärmeaustauscher geleitet wird. Dort soll das Lithium die Wärme an das Arbeitsmedium des Energiewandlungssystems abgeben.

Die Spulen zur Erzeugung der Magnetfelder müssen außerhalb der Zone hoher Neutronenflüsse und damit auch außerhalb des Blankets liegen (Fig. 1). Das bedeutet aber, daß die Lithium-

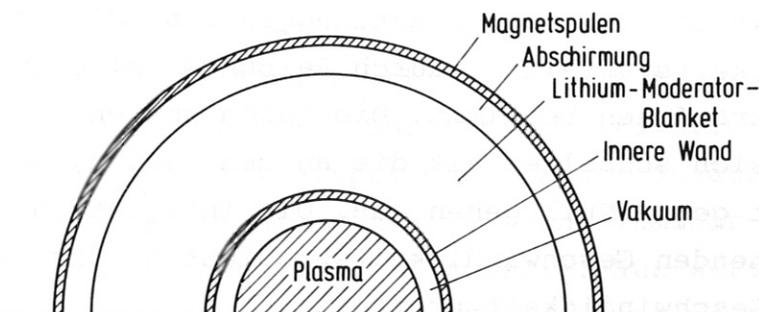


Fig. 1

Zuleitungsrohre durch Zonen starker Magnetfelder geführt werden müssen, was starke Auswirkungen auf die Lithium-Strömung zur Folge hat. Insbesondere führt dies zu einer Erhöhung der notwendigen Pumpleistungen.

Das Problem der Flüssigmetallströmung im Magnetfeld wird in der vorliegenden Arbeit behandelt. Sie soll es ermöglichen, Druckabfall und Pumpleistung für Zuleitungsrohre im Torus eines Fusionsreaktors mit gegebener Magnetfeldkonfiguration zu berechnen. Ein ferneres Ziel ist die Optimierung der Leitungsführung im Sinne einer Minimierung der Pumpleistung auf der Basis der Ergebnisse dieser Arbeit.

## B. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

### 1. Vorgänge in MHD-Strömungen

Wenn eine Flüssigkeit mit hoher elektrischer Leitfähigkeit durch ein Rohr gepumpt wird, so kann die Anwesenheit eines Magnetfeldes die Eigenschaften der Strömung und deren Geschwindigkeitsverteilung beträchtlich verändern.

Betrachten wir zunächst das Strömungsverhalten einer leitfähigen Flüssigkeit ohne Magnetfeld. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit hinreichend klein ist, wird jede Störung durch die Kräfte viskoser Reibung gedämpft. Die Strömung ist laminar. Man kann sie sich aus vielen Stromfäden zusammengesetzt denken, welche aneinander entlanggleiten. Hierbei wird die Geschwindigkeitsverteilung durch Reibungskräfte zwischen jedem dieser Stromfäden bestimmt. Die Fäden im Zentrum des Rohrs bewegen sich schneller als die an den Wänden, wo die Geschwindigkeit gegen Null gehen muß. Die Integration des dadurch entstehenden Geschwindigkeitsgradienten führt zum parabolischen Geschwindigkeitsprofil.

Liegt jedoch die Geschwindigkeit oberhalb eines bestimmten kritischen Wertes, so werden kleine Störungen der Strömung verstärkt und gleichzeitig durch Trägheitseffekte verändert; die Geschwindigkeit wird unregelmäßig, die Strömung wird turbulent.

Die parabolische Geschwindigkeitsverteilung der laminaren Strömung ändert sich dergestalt, daß sich eine nahezu orts-unabhängige Geschwindigkeit im Zentrum des Rohrs einstellt und ein Bereich schmaler Grenzschichten an den Wänden, wo die Geschwindigkeit steil und damit große Reibungskräfte verursachend gegen Null geht. Dieser Übergang des Geschwindigkeitsprofils zur Rechteckform wird durch turbulente Wirbel erzeugt, welche einen starken Impulsaustausch zwischen dem Zentrum und den Randbereichen der Strömung verursachen.

Ohne äußeres Magnetfeld wird die Grenze zwischen laminarer und turbulenter Strömung durch einen kritischen Zahlenwert der dimensionslosen Reynolds-Zahl  $R_e$  festgelegt, welche als das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften definiert ist. Für ein Rohr beträgt der kritische Wert etwa 1000 [1]. Nun betrachten wir den Fall, daß die Strömung durch ein äußeres Magnetfeld führt. Zunächst liegt dieses Magnetfeld senkrecht zur Rohrachse und damit zur Strömungsrichtung. Durch  $\vec{v} \times \vec{B}$ -Kräfte werden innere elektrische Ströme in der Flüssigkeit induziert, welche wiederum mit dem Magnetfeld wechselwirken und  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte auf die Strömung zur Folge haben. Außerdem rufen diese Ströme ein eigenes Magnetfeld hervor, welches hauptsächlich längs des Rohres gerichtet ist. Das Verhältnis von induziertem zu angelegtem Magnetfeld ist durch die magnetische Reynolds-Zahl  $R_m$  charakterisiert. Diese induzierten Ströme beeinflussen die Geschwindigkeitsverteilung wesentlich, wie folgendes Gedankenexperiment zeigt. Zunächst sei kein Magnetfeld vorhanden und die Strömung laminar mit einem parabolischen Geschwindigkeitsprofil. Nun werde plötzlich ein Magnetfeld eingeschaltet. Es werden dann überall Ströme induziert, welche nach  $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  einen Anteil besitzen, der proportional zur Geschwindigkeit ist. Diese

Ströme rufen  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte hervor, welche ebenfalls proportional  $\vec{v}$  sind und der Strömung entgegengerichtet sind. In der Mitte des Rohres, wo die Geschwindigkeit am größten war, wird diese daher am stärksten abgebremst. An den Rändern, wo die Geschwindigkeit geringer war, wird diese viel weniger gebremst bzw. durch Rückströme (durch sich aufbauende elektrische Felder) aus der Mitte sogar beschleunigt. Dadurch nähert sich das Geschwindigkeitsprofil je nach Stärke des Magnetfeldes mehr oder minder der Rechteckform.

Dieser Einfluß des Magnetfeldes auf das Geschwindigkeitsprofil wird durch die dimensionslose Hartmann-Zahl  $H$  charakterisiert, welche durch das Verhältnis von (elektromagnetischer zu viskoser Reibungskraft)<sup>1/2</sup> definiert ist. Wenn ein äußeres Magnetfeld Unterschiede im Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Strömung ausgleicht, so wird dies auch für Unregelmäßigkeiten der Geschwindigkeit in einer ursprünglich turbulenten Strömung gelten.

Das Hauptmerkmal turbulenter Strömungen war gerade die Existenz unregelmäßig verteilter Wirbel, welche sich alle mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen. Eine Unterdrückung dieser Geschwindigkeitsunterschiede durch ein Magnetfeld bedeutet also eine Unterdrückung der Turbulenz, die Strömung wird laminar.

Eine ausreichende Bedingung für die vollständige Unterdrückung von Turbulenzen durch das Magnetfeld ist  $R_e/H < 130$ . [1]

Die elektromagnetischen  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte auf die Flüssigkeit beeinflussen den Druckgradienten längs der Strömung indirekt und direkt. Zunächst rufen sie ein Geschwindigkeitsprofil mit großem Geschwindigkeitsgradienten an den Rohrwänden hervor, welches über die dadurch verstärkten Reibungskräfte zu einer Vergrößerung des Druckgradienten führt. Der zweite, dominierende Effekt soll hier etwas genauer besprochen werden, da er in der Literatur oft nur ungenau interpretiert wird.

Wenn die Rohrwände Isolatoren sind, fließen alle Ströme längs geschlossener Wege in der Flüssigkeit, was für  $\vec{B} = \text{const}$  zu  $\frac{1}{\text{Vol}} \int_{\text{Vol}} (\vec{j} \times \vec{B}) dV = 0$  führt. Das heißt zwar, daß die über das Rohrvolumen gemittelte Kraft auf die Flüssigkeit Null ist, daraus darf aber nicht gefolgert werden, daß die lokalen Kräfte keinen Anteil am Druckabfall längs des Rohres hätten. Der Grund liegt in der Tatsache, daß die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt nicht konstant ist. Zur Erreichung stationärer Verhältnisse muß deshalb der Strömung die Leistung  $\int_{\text{Vol}} (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dV \neq 0$  zugeführt werden. Obwohl der Mittelwert der  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte Null ist, entsteht also ein mittlerer Druckabfall längs des Rohres durch die  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte:

$$\Delta p = \frac{1}{\langle v \rangle R_i^2 \pi} \int_{\text{Vol}} (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dV$$

Diese Leistung dient zur Deckung der durch die ohmsche Heizung  $\int_{\text{Vol}} \vec{j}^2 / \sigma dV$  im Rohr pro Zeiteinheit erzeugten Wärme. Es führt also, wie man auch am Energieerhaltungssatz sehen kann, jeder Strom im Rohr zu einem effektiven Druckabfall, auch wenn die Stromlinien in der Flüssigkeit geschlossen sind.

Sind die Rohrwände jedoch gute Leiter, so schließen sich nicht alle Stromfäden in der Flüssigkeit, sondern durchsetzen nun zum Teil auch die Wände. Dies hat zur Folge, daß jetzt auch der Mittelwert  $\frac{1}{\text{Vol}} \int_{\text{Vol}} (\vec{j} \times \vec{B}) dV \neq 0$  wird und deshalb einen direkten Beitrag zum Druckgradienten liefert. Gewöhnlich dominiert dieser Effekt bei weitem über die beiden vorher beschriebenen.

Nun betrachten wir den Fall eines Magnetfeldes parallel zur Rohrachse. Unter der Voraussetzung, daß die Flüssigkeitsströmung stationär ist und keine Wirbel besitzt, ist dann die Geschwindigkeit parallel zum Magnetfeld und es findet keine  $\vec{v} \times \vec{B}$ -Induktion statt. Daher hat ein paralleles Magnetfeld keinen Einfluß auf den Druckgradienten einer stationären, laminaren Strömung. Falls die Strömung jedoch turbulent ist, existieren auch Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zum Magnetfeld, welche sofort durch die induzier-

ten  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte unterdrückt oder zumindest gedämpft werden. Daher kann auch ein paralleles Magnetfeld die Turbulenz dämpfen. Da aber ein solches Magnetfeld die Gradienten in dem über die Zeit gemittelten Geschwindigkeitsprofil nicht vermindert, welche die Energie für die Turbulenzen liefern, ist ein wesentlich stärkeres paralleles als senkrechtes Magnetfeld nötig, um die Turbulenzen in einer gegebenen Strömung zu unterdrücken.

## 2. MHD-Grundgleichungen, Problemstellung

Nach der mehr qualitativen Beschreibung der Effekte auf leitende Flüssigkeiten in Magnetfeldern des letzten Kapitels sollen die vorherrschenden Vorgänge nun quantitativ behandelt werden. Die wesentlichen Grundgleichungen sind:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad , \quad (2.1)$$

Impulsbilanz

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \operatorname{grad})\vec{v} = -\operatorname{grad} p - \operatorname{div} \underline{\underline{T}} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

Maxwell'sche Gleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{el}} \quad , \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad , \quad (2.4)$$

und ohmsches Gesetz

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad . \quad (2.5)$$

Dieses gekoppelte Gleichungssystem läßt sich in allgemeiner Form nicht analytisch lösen, doch können vereinfachende Annahmen auf relativ einfach zu behandelnde Differentialgleichungen führen.

In Hinblick auf das in Kapitel A kurz dargestellte technische Problem ergibt sich die folgende Fragestellung (siehe auch Fig. 2).

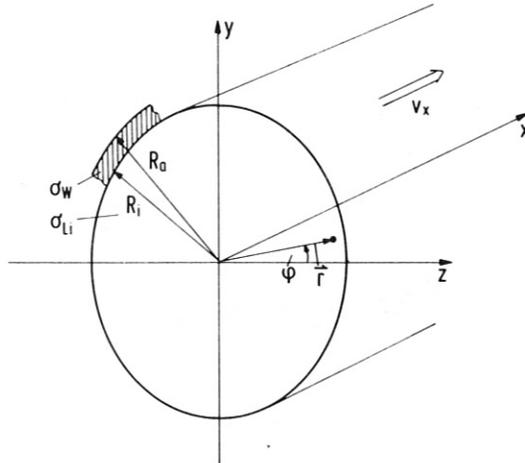


Fig. 2

Betrachtet wird ein Rohr der Länge  $L$  mit den Radien  $R_i$  und  $R_o$ . Im Rohr strömt flüssiges Lithium der mittleren Geschwindigkeit  $\langle v \rangle$  in  $x$ -Richtung. Die Leitfähigkeit des Lithiums beträgt  $\sigma_{Li}$ , die der Wand  $\sigma_w$ .

Zu bestimmen ist die Druckdifferenz, die sich längs des Rohres aufbaut, bzw. die zur Aufrechterhaltung der Strömung nötige Leistung.

Dazu werden die folgenden Annahmen gemacht.

- a) Die Strömung sei stationär, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

- b) Das Rohr sei isotherm; daraus folgt

$$\sigma_w = \text{const},$$

$$\sigma_{Li} = \text{const},$$

$$\zeta_{Li} = \text{const}.$$

- c) Es herrsche überall elektrische Neutralität, d.h.

$$\zeta_{el} = 0.$$

- d) Die Länge des Rohres sei wesentlich größer als die über die Länge  $L$  konstanten Radien:

$$R_i = \text{const},$$

$$R_a = \text{const},$$

$$R_a \ll L.$$

- e) Das angelegte Magnetfeld sei über den Rohrquerschnitt praktisch homogen, kann eine beliebige Orientierung besitzen und sei nur eine Funktion von  $x$

$$\frac{dB_0}{dy} R_0 \ll B_0, \quad \frac{dB_0}{dz} R_0 \ll B_0,$$

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_0(x).$$

- f) Das induzierte Magnetfeld sei vernachlässigbar gegenüber dem angelegten:

$$\frac{B_{\text{ind}}}{B_0} \ll 1, \quad \text{d.h. } R_m \ll 1.$$

- g) Die Strömung sei vollentwickelt und laminar. Rohreinlaufströmungen werden also nicht betrachtet. Wegen der Laminarität muß  $R_e/H < 130$  gelten.
- h) Die Strömungsgeschwindigkeit besitze nur eine  $x$ -Komponente. Abweichungen davon als Folge von  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräften werden als sekundäre Effekte vernachlässigt (z.B. Rotation infolge verdrehter Magnetfelder):

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x.$$

- i) Das Geschwindigkeitsprofil wird als um die  $x$ -Achse rotationssymmetrisch angenommen, d.h.

$$\vec{v} = v_x(x, r) \vec{e}_x.$$

Mit diesen Annahmen lassen sich die Grundgleichungen wesentlich vereinfachen.

Aus Gl. (2.1) folgt mit  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  und  $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$   
 $\oint \frac{dv_x}{dx} = 0$ . Wegen der Annahme (i) gilt deshalb  
 $v_x = v_x(r)$ . (2.6)

Die Strömungsgeschwindigkeit bleibt also längs der Stromlinien konstant und damit auch das Geschwindigkeitsprofil. Es gilt also

$$\text{grad } p = \vec{j} \times \vec{B} - \text{div } \underline{\underline{\epsilon}}. \quad (2.7)$$

Außerdem gilt

$$\text{div } \vec{j} = 0 \quad (\text{wegen } \text{rot } \vec{H} = \vec{j}) \quad (2.8)$$

und

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi \quad (\text{wegen } \text{rot } \vec{E} = 0). \quad (2.9)$$

Dazu kommt noch das ohmsche Gesetz (2.5), das hier der Vollständigkeit halber wiederholt wird:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.10)$$

Für gegebenes  $B(x)$  und  $\sigma$  folgen aus den Gln. (2.7 - 2.10) 10 skalare Gleichungen für die 13 Unbekannten

$$(\text{grad } p)_x, (\text{grad } p)_y, (\text{grad } p)_z, E_x, E_y, E_z,$$

$$j_x, j_y, j_z, v_x, v_y, v_z, \phi.$$

. Der Term  $\text{div } \underline{\underline{\epsilon}}$

ist eine bekannte Funktion von  $v_x$ .

Drei weitere Bestimmungsgleichungen liefert die Identität

$$\text{rot grad } p \equiv \text{rot}(\vec{j} \times \vec{B} - \text{div } \underline{\underline{\epsilon}}) \equiv 0. \quad (2.11)$$

Hier wird schon der Näherungscharakter der oben gemachten Annahmen deutlich, denn durch die Forderung (h) werden die Geschwindigkeitskomponenten  $v_y$  und  $v_z$  zu Null gemacht und damit die Zahl der Unbekannten auf 11 reduziert. Diese sind jedoch durch das System aus 13 skalaren Gleichungen überbestimmt.

Durch  $V_y = V_z = 0$  und Gl. (2.6) wurde der Trägheitsterm  $\rho(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$  in Gl. (2.2) zu Null gemacht. Diese Vereinfachung gegenüber der Realität würde bei Verwendung der Gl. (2.11) dazu führen, daß zwei skalare Unbekannte formal eingeführt werden müßten, um die Überbestimmtheit zu beseitigen. Um dieser unübersichtlichen Situation zu entgehen, die praktisch einer nachträglichen iterativen Bestimmung von  $V_y$  und  $V_z$  entsprechen würde, erscheint es konsequenter, im Rahmen des ursprünglichen vereinfachten Modells zu bleiben und dieses der Realität bestmöglich anzugleichen. Dies kann dadurch geschehen, daß man die 10 skalaren Gleichungen, die aus (2.7 - 2.10) folgen, um das Prinzip der minimalen Entropieproduktion ergänzt. Dieses im Rahmen der irreversiblen Thermodynamik gefundene Prinzip gilt allgemein für stationäre Systeme nahe beim thermischen Gleichgewicht und kann deshalb auch auf den vorliegenden Fall angewendet werden (siehe Kap. 3.2.4.2).

### 3. Verluste in einem von flüssigem Lithium durchströmten Rohr

Die Leistung, die die Pumpen zur Aufrechterhaltung einer stationären Strömung aufbringen müssen, setzt sich nach den oben gemachten Annahmen aus zwei Teilen additiv zusammen

- a) durch mechanische Reibung erzeugte Wärme,
- b) durch ohmsche Heizung der induzierten Ströme freigesetzte Joulesche Wärme.

Unter Verwendung von  $\partial/\partial t = 0$  und Einführung des Poynting-Vektors  $\vec{S}$  ergibt sich die Energiebilanz für das Rohr der Länge L mit dem Volumen Vol und der Hüllfläche H

$$\begin{aligned} \oint_H \vec{S} \cdot d\vec{f} &= \int_{\text{vol}} \vec{E} \cdot \vec{j} dV = \int_{\text{vol}} -(\nabla\phi) \cdot \vec{j} dV && (3.1) \\ &= -\int_{\text{vol}} \nabla(\phi \vec{j}) dV + \int_{\text{vol}} \phi \overbrace{(\nabla \cdot \vec{j})}^{0 \text{ wegen Gl(2.8)}} dV \\ &= \oint_H (\phi \vec{j}) \cdot d\vec{f} \\ &= 0 \end{aligned}$$

für ein Rohr, aus dessen Hüllfläche keine Ströme ein- bzw. ausfließen, d.h.

$$(\vec{j} \cdot d\vec{f})_H = 0$$

auf der Hüllfläche. Für solch ein elektrisch abgeschlossenes Rohr ist eine periodische Fourierentwicklung des Potentials entlang des Rohres möglich (siehe Kapitel 3.2).

Damit bestimmt sich die pro Zeiteinheit freigesetzte Joulesche Wärme  $\dot{Q}$  mit

$$\vec{E} = \vec{j}/\sigma - \vec{v} \times \vec{B}$$

und

$$\text{zu } \int_{\text{vol}} j^2/\sigma dV - \int_{\text{vol}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{j} dV = \int_{\text{vol}} \vec{E} \cdot \vec{j} dV = 0$$

$$\dot{Q} = \int_{\text{vol}} j^2/\sigma dV = - \int_{\text{vol}} (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dV \quad (3.2)$$

Damit ist auch quantitativ gezeigt, daß jeder im Rohr fließende Strom unabhängig davon, ob sich dessen Stromfäden im strömenden Medium schließen oder nicht, einen Beitrag zu den Verlusten und damit zum effektiven Druckabfall leistet.

Es wird sich zeigen, daß die mathematisch einfachste Bestimmung der Verluste auf der direkten Bestimmung des Druckgradienten basiert. Dann gilt für die Verlustleistung

$$P_{\text{ow}} = \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} (\text{grad } p) \cdot \vec{v} d\varphi dx r dr \quad (3.3)$$

Da der Druck von Pumpen aufrechterhalten werden müßte, die wahrscheinlich außerhalb des Magnetfeldes liegen und in deren Zuführungsrohren eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung mit über  $r$  konstantem Druckgradienten vorliegt, ist es physikalisch am sinnvollsten, den Druckabfall längs des betrachteten Rohres unter der Annahme parabolischer Geschwindigkeitsprofile im Ein- und Ausgangsquerschnitt zu berechnen. Längs einer als sehr kurz angenommenen Strecke sollen diese Profile in die der MHD-Strömung übergehen. Der Zusammenhang zwischen Verlustleistung  $P_{\text{ow}}$  und effektiver Druckdifferenz  $\Delta p$  lautet dann

$$\Delta p = \frac{P_{\text{ow}}}{u_0^* \int_0^{R_i} 2\pi \left(1 - \frac{r^2}{R_i^2}\right) r dr} = \frac{P_{\text{ow}}}{u_0^* \frac{R_i^2}{2} \pi} \quad (3.4)$$

Außerdem gilt

$$v_0^* = 2 \langle v \rangle^* = 2 \langle v \rangle \frac{R_i^2}{R_i^{*2}} \quad (3.5)$$

mit

$$R_i = \text{Rohrinnenradius,}$$

$$\langle v \rangle = \frac{2\pi \int_0^{R_i} v r dr}{2\pi \int_0^{R_i} r dr} = \text{mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Rohr,}$$

$$R_i^* = \text{Innenradius der Pumpenzuleitung,}$$

$$\langle v \rangle^* = \text{analog mit } v^* \text{ mittlere Strömungsgeschwindigkeit der Pumpenzuleitung.}$$

Die durch die Pumpen aufzubringende Druckdifferenz beträgt also

$$\Delta p = \frac{\int_0^{R_i} \int_0^{2\pi} \int_0^L (\text{grad } p) \cdot \vec{v} \, d\varphi \, dx \, r \, dr}{\langle v \rangle R_i^2 \pi} \quad (3.6)$$

Damit sind alle Berechnungen auf die Bestimmung des Druckgradienten  $\text{grad } p$  zurückgeführt.

### 3.1 Entkopplung der Grundgleichungen

Zur Lösung der Gln. (2.7 - 2.10) ist es zweckmäßig, nach einer Entkopplung der Gleichungen voneinander zu suchen. Dies gelingt durch Einführung eines Parameters  $k$ , welcher die Form des unbekanntes Geschwindigkeitsprofils beschreibt:

$$v_x(r) = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_i} \right)^{k+1} \right] = v_0 f_v(r) \quad (3.7)$$

Für  $k = 1$  liegt das parabolische Geschwindigkeitsprofil einer Strömung ohne Magnetfeld vor. Mit wachsendem  $k$  nähert sich das Profil immer mehr einem Rechteck. Die Geschwindigkeit  $v_0$  im Zentrum des Rohres bestimmt sich mit Hilfe der Gleichung

$$\int_0^{R_i} \int_0^{2\pi} v_0 \left( 1 - \left( \frac{r}{R_i} \right)^{k+1} \right) d\varphi \, r \, dr = \langle v \rangle R_i^2 \pi \quad (3.8)$$

zu

$$v_0 = \langle v \rangle \frac{k+3}{k+1} \quad (3.9)$$

Mit diesem Ansatz werden nun die Gln. (2.7) und (2.8 - 2.10) getrennt gelöst. Erst hinterher wird eine Kopplung des Lösungspaares vorgenommen, welche zur Bestimmung des Parameters  $k$  führt und die endgültige Lösung darstellt.

### 3.2 Aufstellung und Lösung der DGL für das Potential $\phi$

Zur Bestimmung des Potentials  $\phi$  werden die Gln. (2.8 - 2.10) benötigt.

$$\text{div } \vec{j} = 0, \quad (3.10)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi, \quad (3.11)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.12)$$

$$\text{div} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0. \quad (3.13)$$

Für die Berechnung von  $\text{div}(\vec{v} \times \vec{B})$  in Zylinder-Koordinaten gehen wir von  $\vec{V} \times \vec{B}$  in kartesischen Koordinaten aus:

Mit

$$\vec{e}_y = \vec{e}_r \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \varphi,$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \varphi$$

(s. Fig. 3) ergibt sich

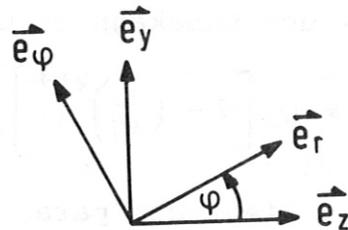


Fig. 3

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{B}) &= \nabla \cdot [(-v_x B_z \sin \varphi + v_x B_y \cos \varphi) \cdot \vec{e}_r \\ &\quad + (-v_x B_z \cos \varphi - v_x B_y \sin \varphi) \vec{e}_\varphi] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(-v_x B_z \sin \varphi + v_x B_y \cos \varphi)] \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} [-v_x B_z \cos \varphi - v_x B_y \sin \varphi] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$\operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{B}) = \left(-\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) B_z \sin \varphi + \left(\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) B_y \cos \varphi \quad (3.14)$$

Mit dem Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung

$v_x(r) = v_0 f_r(r)$  nach (3.7) und (3.11) ergibt sich aus (3.13) in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(x, r, \varphi)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi(x, r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi(x, r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \\ + B_z(x) v_0 \sin \varphi \frac{\partial f_r(r)}{\partial r} - B_y(x) v_0 \cos \varphi \frac{\partial f_r(r)}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Diese Differentialgleichung kann durch Fourier-Entwicklung in x-Richtung vereinfacht werden. Dazu wird  $\vec{B}(x)$  periodisch fortgesetzt und in eine Fourierreihe entwickelt.

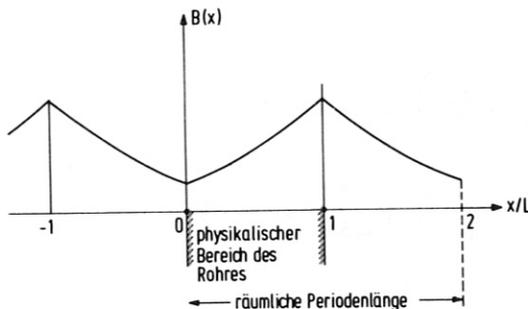


Fig. 4

Randeffekte an den Stellen  $x = 0, L$  werden vernachlässigt.

$$\left. \begin{aligned} v_0 B_z(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{zn} \cos \beta_n x, \\ -v_0 B_y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{yn} \cos \beta_n x, \\ \phi(x, r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r, \varphi) \cos \beta_n x \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

mit

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L} \quad (3.17)$$

$F_{yn}$  bzw.  $F_{zn}$  sind die Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihe (Gl. (3.16)).

Die Gln. (3.16) in (3.15) eingesetzt ergeben

$$-\beta_n^2 U_n + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U_n}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \varphi^2} + F_{zn} \sin \varphi \frac{\partial \rho_r}{\partial r} + F_{yn} \cos \varphi \frac{\partial \rho_r}{\partial r} = 0 \quad (3.18)$$

Für  $U_n(r, \varphi)$  wird nun angesetzt:

$$U_n(r, \varphi) = R_{sn}(r) \sin \varphi + R_{cn}(r) \cos \varphi \quad (3.19)$$

Gl. (3.19) in (3.18) eingesetzt ergibt die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 R_{cn}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{cn}(r)}{\partial r} - \left( \beta_n^2 + \frac{1}{r^2} \right) R_{cn}(r) = -F_{yn} \frac{\partial \rho_r}{\partial r}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 R_{sn}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{sn}(r)}{\partial r} - \left( \beta_n^2 + \frac{1}{r^2} \right) R_{sn}(r) = -F_{zn} \frac{\partial \rho_r}{\partial r} \quad (3.21)$$

für  $0 \leq r \leq R_i$ ,

$$\frac{\partial^2 R_{cn}^+(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{cn}^+(r)}{\partial r} - \left( \beta_n^2 + \frac{1}{r^2} \right) R_{cn}^+(r) = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 R_{sn}^+(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{sn}^+(r)}{\partial r} - \left( \beta_n^2 + \frac{1}{r^2} \right) R_{sn}^+(r) = 0 \quad (3.23)$$

für  $R_i < r \leq R_a$ .

Wegen der gegebenen Rohrgeometrie müssen diese vier Differentialgleichungen die folgenden vier Randbedingungen erfüllen:

- a) Beschränktheit des Potentials an der Stelle  $r = 0$ ,

- b) Stetigkeit des Potentials an der Stelle  $r = R_i$  für alle  $x$  und  $\varphi$ , d.h.  $\phi(R_i) = \phi^*(R_i)$ .  
Das führt wegen

$$\begin{aligned} & \sum_n (R_{sn}(r) \sin \varphi + R_{cn}(r) \cos \varphi) \cos \beta_n x \\ &= \sum_n (R_{sn}^*(R_i) \sin \varphi + R_{cn}^*(r) \cos \varphi) \cos \beta_n x \end{aligned}$$

$$\text{zu } R_{sn}(R_i) = R_{sn}^*(R_i) \text{ und } R_{cn}(R_i) = R_{cn}^*(R_i) \quad (3.24)$$

- c) Stetigkeit der radialen Stromdichte an der Stelle  $r = R_i$  für alle  $x$  und  $\varphi$  (wegen  $\text{div } \vec{j}^* = 0$ ).

Aus  $j_r(R_i) = j_r^*(R_i)$  folgt wegen  $j_r = \sigma_{Li} (E_r + (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_r)$  und  $j_r^* = \sigma_w (E_r^* + (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_r)$  und  $\vec{v}(R_i) = 0$   
Dies führt über

$$\sigma_{Li} \cdot E_r(R_i) = \sigma_w E_r^*(R_i)$$

$$\begin{aligned} & \sigma_{Li} \sum_n \left( \frac{\partial R_{sn}(R_i)}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial R_{cn}(R_i)}{\partial r} \cos \varphi \right) \cos \beta_n x \\ &= \sigma_w \sum_n \left( \frac{\partial R_{sn}^*(R_i)}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial R_{cn}^*(R_i)}{\partial r} \cos \varphi \right) \cos \beta_n x \end{aligned}$$

zu

$$\sigma_{Li} \frac{\partial R_{sn}(R_i)}{\partial r} = \sigma_w \frac{\partial R_{sn}^*(R_i)}{\partial r}$$

und  $\sigma_{Li} \frac{\partial R_{cn}(R_i)}{\partial r} = \sigma_w \frac{\partial R_{cn}^*(R_i)}{\partial r}$  (3.25)

- d) Verschwinden der radialen Feldstärke an der Stelle  $r = R_a$  für alle  $x$  und  $\varphi$  wegen  $j_r^*(R_a) = 0$   
Das führt über

$$\sum_n \left( \frac{\partial R_{sn}^*(R_a)}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial R_{cn}^*(R_a)}{\partial r} \cos \varphi \right) \cos \beta_n x = 0$$

zu

$$\frac{\partial R_{sn}^*(R_a)}{\partial r} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial R_{cn}^*(R_a)}{\partial r} = 0 \quad (3.26)$$

Die Funktionen  $R_{sn}(r)$  und  $R_{cn}(r)$  gehorchen den gleichen Randbedingungen und werden durch Differentialgleichungen beschrieben, welche bis auf den Störterm auf der

rechten Seite identisch sind. Da sich die beiden Störungen nur durch einen konstanten Faktor voneinander unterscheiden, braucht man nur eine Lösung zu bestimmen. Ist beispielsweise bekannt

$$R_{su}(r) = f(r) \quad (3.27)$$

so kann man setzen:

$$R_{cu}(r) = \frac{F_{2u}}{F_{2u}} R_{su}(r) \quad (3.28)$$

### 3.2.1 Lösung durch Potenzreihenansatz für $n=0$

Nach Gl. (3.21) gilt für  $0 \leq r \leq R$ :

$$\frac{\partial^2 R_{s0}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{s0}(r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} R_{s0}(r) = -F_{2u} \frac{\partial f_v(r)}{\partial r} \quad (3.29)$$

Für die Form der Geschwindigkeitsverteilung hatten wir nach (3.7) angesetzt:

$$f_v(r) = 1 - \frac{r^{k+1}}{R_i^{k+1}}$$

Die Ableitung nach  $r$  wird dann

$$\frac{\partial f_v(r)}{\partial r} = -\frac{k+1}{R_i^{k+1}} r^k \quad (3.30)$$

Also gilt unter Einführung des Faktors  $C_{60}$

$$-F_{2u} \frac{\partial f_v(r)}{\partial r} = F_{2u} \frac{k+1}{R_i^{k+1}} r^k = C_{60} r^k \quad (3.31)$$

Die Funktion  $R_{s0}(r)$  wird als Potenzreihe angesetzt von der Form

$$R_{s0}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{i0} r^i, \quad (3.32)$$

wobei Potenzen der Form  $1/r^i$  wegfallen (wegen der Randbedingung a) :  $\emptyset$  ( $r=0$ ) nicht singulär).

Einsetzen in (3.29) und Koeffizientenvergleich liefert:

$$b_{i0} = 0 \text{ für } i \neq 1 \text{ bzw. } i \neq k + 2$$

$$b_{10} = \text{beliebig} \quad (3.33)$$

$$b_{k+2,0} = \frac{c_{k0}}{(k+2)^2 - 1}$$

Man erhält also

$$R_{s0}(r) = b_{10} r + \frac{c_{k0}}{(k+2)^2 - 1} r^{k+2} \quad (3.34)$$

Für das Gebiet  $R_i < r \leq R_a$  bekommen wir nach Gl. (3.20) die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 R_{s0}^*(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{s0}^*(r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} R_{s0}^*(r) = 0 \quad (3.35)$$

Der Potenzreihenansatz der Form

$$R_{s0}^*(r) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_{i0} r^i \quad (3.36)$$

liefert nach Koeffizientenvergleich

$$R_{s0}^*(r) = a_{-10} r^{-1} + a_{10} r \quad (3.37)$$

Der Koeffizient  $a_{-10}$  läßt sich mit Hilfe der Randbedingung d)

$$\frac{\partial R_{s0}^*(R_a)}{\partial r} = 0 \quad \text{bestimmen: } a_{-10} = a_{10} R_a^2$$

Damit ergibt sich aus Gl. (3.37)

$$R_{s0}^*(r) = a_{10} \left( r + \frac{R_a^2}{r} \right) \quad (3.38)$$

Die Koeffizienten  $a_{10}$  und  $b_{10}$  lassen sich mit Hilfe der Randbedingungen b) und c) bestimmen.

Danach muß gelten:

$$R_{s0}(R_i) = R_{s0}^*(R_i) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial R_{s0}(R_i)}{\partial r} = \frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \frac{\partial R_{s0}^*(R_i)}{\partial r} \quad (3.40)$$

Einsetzen von Gl. (3.34) und Gl. (3.38) in Gl. (3.39) und (3.40) liefert

$$b_{10} R_i + \frac{C_{k0}}{(k+2)^2 - 1} R_i^{k+2} = a_{10} \left( R_i + \frac{R_a^2}{R_i} \right) \quad (3.41)$$

und

$$b_{10} + \frac{C_{k0}(k+2)}{(k+2)^2 - 1} R_i^{k+1} = \frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} a_{10} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) \quad (3.42)$$

Damit wird

$$a_{10} = \frac{\frac{C_{k0}}{k+3} R_i^{k+1}}{\frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) - \left( 1 + \frac{R_a^2}{R_i^2} \right)} \quad (3.43)$$

und

$$b_{10} = \frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} a_{10} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) - \frac{C_{k0}(k+2)}{(k+2)^2 - 1} R_i^{k+1} \quad (3.44)$$

Für den speziellen Ansatz der Geschwindigkeitsverteilung nach (3.7) wird  $C_{k0}$  nach Gl. (3.31)

$$C_{k0} = F_{z0} \frac{k+1}{R_i^{k+1}} \quad (3.45)$$

Dies liefert die endgültige Lösung der radialen Differentialgleichungen

$$R_{s0}(r) = b_{10} r + F_{z0} \frac{1}{k+3} \frac{r^{k+2}}{R_i^{k+1}} \quad 0 \leq r \leq R_i \quad (3.46)$$

und

$$R_{s0}^*(r) = a_{10} \left( r + \frac{R_a^2}{r} \right) \quad R_i < r \leq R_a \quad (3.47)$$

mit den Koeffizienten

$$a_{10} = \frac{F_{z0} \frac{k+1}{k+3}}{\frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left(1 - \frac{R_0^2}{R_i^2}\right) - \left(1 + \frac{R_0^2}{R_i^2}\right)} \quad (3.48)$$

und

$$b_{10} = a_{10} \frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left(1 - \frac{R_0^2}{R_i^2}\right) - F_{z0} \frac{k+2}{k+3} \quad (3.49)$$

### 3.2.2 Lösung durch Potenzreihenansatz für $n \neq 0$

Für den Bereich  $0 \leq r \leq R_i$  gilt nun die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R_{sn}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{sn}(r)}{\partial r} - \left(\beta_n^2 + \frac{1}{r^2}\right) R_{sn}(r) = -F_{zn} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \quad (3.50)$$

Es ist wieder

$$-F_{zn} \frac{\partial f(r)}{\partial r} = F_{zn} \frac{k+1}{R_i^{k+1}} r^k = C_{kn} r^k \quad (3.51)$$

Der Potenzreihenansatz für  $R_{sn}(r)$  lautet

$$R_{sn}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} b'_{in} r^i \quad (3.52)$$

(unter Berücksichtigung der Randbedingung a)).

Einsetzen in (3.50) und Koeffizientenvergleich liefert die Rekursionsformeln für die Koeffizienten  $b'_{in}$ :

$$\begin{aligned} b'_{0n} &= 0, \\ b'_{1n} &= \text{beliebig}, \\ b'_{in} &= \frac{\beta_n^2 b'_{i-2n}}{i^2 - 1} \quad \text{für } i \neq k+2 \\ b'_{k+2,n} &= \frac{\beta_n^2 b'_{kn} + C_{kn}}{(k+2)^2 - 1} \quad \text{für } i = k+2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dies läßt sich auf eine numerisch leichter zu handhabende Form bringen durch Aufspaltung der  $b'_n$  in zwei Anteile  $b_n$  und  $d_n$  nach folgendem Ansatz:

$$b_n = B_n b_{1n} \quad \text{mit} \quad B_n = 1 \quad \text{und} \quad B_n = \frac{\beta_n^2 B_{i-2n}}{i^2 - 1} \quad \text{für} \quad i \geq 3, \quad (3.54)$$

bzw.

$$d_n = D_n c_{kn} \quad \text{mit} \quad D_n = 0 \quad j < k+2,$$

$$D_{k+2n} = \frac{1}{(k+2)^2 - 1} \quad j = k+2, \quad (3.55)$$

$$D_n = \frac{\beta_n^2 D_{j-2n}}{j^2 - 1} \quad j > k+2.$$

Damit bekommen wir mit Gl. (3.52)

$$R_{sn}(r) = \sum_{\substack{i=1 \\ 4i=2}}^{\infty} B_n b_{1n} r^i + \sum_{\substack{j=k+2 \\ 4j=2}}^{\infty} D_n c_{kn} r^j \quad (3.56)$$

Für das Gebiet  $R_i < r \leq R_a$  hingegen haben wir die homogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R_{sn}^*(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{sn}^*(r)}{\partial r} - \left( \beta_n^2 + \frac{1}{r^2} \right) R_{sn}^*(r) = 0. \quad (3.57)$$

Das ist eine modifizierte Bessel'sche Differentialgleichung und hat als allgemeine Lösung

$$R_{sn}^*(r) = A_n I_1(\beta_n r) + B_n K_1(\beta_n r) \quad (3.58)$$

Den Koeffizienten  $B_n$  bestimmen wir mit Hilfe von Randbedingung d):

$$\frac{\partial R_{sn}^*(R_a)}{\partial r} = 0$$

zu

$$B_n = -A_n \frac{\frac{\partial I_1(\beta_n R_a)}{\partial r}}{\frac{\partial K_1(\beta_n R_a)}{\partial r}} = k_n A_n \quad (3.59)$$

unter Einführung des abkürzenden Faktors  $k_n$ .

Damit können wir für Gl. (3.58) schreiben:

$$R_{sn}^*(r) = A_n (I_1(\beta_n r) + k_n K_1(\beta_n r)) \quad (3.60)$$

Die beiden freien Koeffizienten  $b_{1n}$  und  $A_n$  werden durch die beiden Randbedingungen b) und c) festgelegt, d.h. es muß gelten

$$R_{sn}(R_i) = R_{sn}^*(R_i) \quad (3.61)$$

und

$$\frac{\partial R_{sn}(R_i)}{\partial r} = \frac{\sigma_w}{\sigma_L} \frac{\partial R_{sn}^*(R_i)}{\partial r} \quad (3.62)$$

Einsetzen von Gl. (3.56) und Gl. (3.60) in Gln. (3.61 - 3.62) liefert die Bestimmungsgleichungen für  $b_{1n}$  und  $A_n$ .

$$b_{1n} \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{\infty} B_{in} R_i^i + c_{kn} \sum_{\substack{j=k+2 \\ \Delta j=2}}^{\infty} D_{jn} R_i^j = A_n (I_1(\beta_n R_i) + k_n K_1(\beta_n R_i)) \quad (3.63)$$

und

$$b_{1n} \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{\infty} i B_{in} R_i^{i-1} + c_{kn} \sum_{\substack{j=k+2 \\ \Delta j=2}}^{\infty} j D_{jn} R_i^{j-1} = \frac{\sigma_w}{\sigma_L} A_n \left( \frac{\partial I_1(\beta_n R_i)}{\partial r} + k_n \frac{\partial K_1(\beta_n R_i)}{\partial r} \right) \quad (3.64)$$

Daraus lassen sich  $A_n$  und  $b_{1n}$  folgendermaßen berechnen:

$$A_n \left[ \frac{\sigma_w}{\sigma_L} \left( \frac{\partial I_1(\beta_n R_i)}{\partial r} + k_n \frac{\partial K_1(\beta_n R_i)}{\partial r} \right) - \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{\infty} i B_{in} R_i^{i-1}}{\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{\infty} B_{in} R_i^i} (I_1(\beta_n R_i) + k_n K_1(\beta_n R_i)) \right] \quad (3.65)$$

$$= c_{kn} \sum_{\substack{j=k+2 \\ \Delta j=2}}^{\infty} j D_{jn} R_i^{j-1} - \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{\infty} i B_{in} R_i^{i-1}}{\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{\infty} B_{in} R_i^i} \cdot c_{kn} \sum_{\substack{j=k+2 \\ \Delta j=2}}^{\infty} D_{jn} R_i^j$$

und

$$b_{1n} = \frac{1}{\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{\infty} B_{in} R_i^i} \left[ A_n (I_1(\beta_n R_i) + k_n K_1(\beta_n R_i)) - c_{kn} \sum_{\substack{j=k+2 \\ \Delta j=2}}^{\infty} D_{jn} R_i^j \right] \quad (3.66)$$

Für den speziellen Ansatz der Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. (3.7) hatten wir

$$C_{kn} = F_{2n} \frac{k+1}{R_i^{k+1}} \quad (3.67)$$

Damit ergibt sich aus Gl. (3.65) und Gl. (3.66) unter Anwendung einer Indexverschiebung für die  $D_{jn}$  :

$$\begin{aligned} & A_n \left[ \frac{\partial I_1(\beta_n R_i)}{\partial r} + k_n \frac{\partial K_1(\beta_n R_i)}{\partial r} \right] - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\Delta i=2}^{\infty} i \text{Bin} R_i^{i-1}}{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\Delta i=2}^{\infty} \text{Bin} R_i^i} \left( I_1(\beta_n R_i) + k_n K_1(\beta_n R_i) \right) \\ &= F_{2n} \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta j=2}}^{\infty} (j+k+1) D_{jn}^* R_i^{j-1} - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\Delta i=2}^{\infty} i \text{Bin} R_i^{i-1}}{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\Delta i=2}^{\infty} \text{Bin} R_i^i} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta j=2}}^{\infty} D_{jn}^* R_i^j \right] \quad (3.68) \end{aligned}$$

und

$$b_{1n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\Delta i=2}^{\infty} \text{Bin} R_i^i} \left[ A_n (I_1(\beta_n R_i) + k_n K_1(\beta_n R_i)) - F_{2n} \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta j=2}}^{\infty} D_{jn}^* R_i^j \right] \quad (3.69)$$

mit den neuen Rekursionsformeln für  $D_{jn}^*$

$$D_{1n}^* = \frac{1}{k+3} \quad \text{und} \quad D_{jn}^* = \frac{\beta_n^2 D_{j-2n}^*}{(j+k+1)^2 - 1} \quad (3.70)$$

Die Funktionen  $R_{sn}(r)$  und  $R_{sn}^*(r)$  lauten also endgültig:

$$R_{sn}(r) = \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{\infty} \text{Bin} b_{1n} r^i + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta j=2}}^{\infty} D_{jn}^* F_{2n} \frac{r^{j+k+1}}{R_i^{k+1}} \quad (3.71)$$

für  $0 \leq r \leq R_i$ ,

$$R_{sn}^*(r) = A_n (I_1(\beta_n r) + k_n K_1(\beta_n r))$$

für  $R_i < r \leq R_n$ ,

### 3.2.3 Grenzübergänge für kastenförmiges Geschwindigkeitsprofil

Da sich für starke Magnetfelder und damit für hohe Hartmannzahlen die Geschwindigkeitsverteilung des strömenden Metalls immer mehr einem Kastenprofil annähert, ist es nützlich, Potential und elektrische Feldstärke auch für den Grenzfall  $k \rightarrow \infty$  zu berechnen.

Für den Fall  $n = 0$  bekommen wir mit den Gln. (3.46 - 3.47)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{50}(r) = b_{10} r \quad \text{für } 0 \leq r \leq R_i \quad \text{und} \quad (3.73)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{50}^+(r) = a_{10} \left( r + \frac{R_a^2}{r} \right) \quad \text{für } R_i \leq r \leq R_a \quad (3.74)$$

mit den Koeffizienten

$$a_{10} = \frac{F_{20}}{\frac{\sigma_w}{\sigma_i} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) - \left( 1 + \frac{R_a^2}{R_i^2} \right)} \quad (3.75)$$

und

$$b_{10} = a_{10} \frac{\sigma_w}{\sigma_i} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) - F_{20}. \quad (3.76)$$

Die Ableitung von  $R_{50}(r)$  nach  $r$  genügt auch jetzt noch der Randbedingung c), da erst differenziert werden muß und dann erst der Grenzwert gebildet werden darf. Damit erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial R_{50}(r)}{\partial r} = b_{10} + F_{20} \cdot S(r - R_i) \quad (3.77)$$

$$\text{mit } S(r - R_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R_i \\ 1 & \text{für } r = R_i \\ (-\infty & \text{für } r > R_i) \end{cases}$$

Für den Fall  $n \neq 0$  gibt es zwei Lösungsmöglichkeiten. Die erste besteht im reinen Grenzübergang des Potenzreihenansatzes der Gln. (3.17 - 3.72);

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{sn}(r) = \sum_{\substack{i=1 \\ A_i=2}}^{\infty} B_i n b_{11} r^i \quad \text{für } 0 \leq r \leq R_i \quad \text{und} \quad (3.78)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{sn}^*(r) = A_{11} (I_1(\beta_n r) + k_n K_1(\beta_n r)) \quad \text{für } R_i < r \leq R_q \quad (3.79)$$

mit den Koeffizienten

$$A_{11} = \frac{F_{2n}}{\frac{\partial}{\partial r} (I_1(\beta_n R_i) + k_n \frac{\partial}{\partial r} K_1(\beta_n R_i))} = \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ A_i=2}}^{\infty} i B_i n R_i^{i-1}}{\sum_{\substack{i=1 \\ A_i=2}}^{\infty} B_i n R_i^i} \cdot (I_1(\beta_n R_i) + k_n K_1(\beta_n R_i)) \quad (3.80)$$

und

$$b_{11} = A_{11} \frac{I_1(\beta_n R_i) + k_n K_1(\beta_n R_i)}{\sum_{\substack{i=1 \\ A_i=2}}^{\infty} B_i n R_i^i} \quad (3.81)$$

Bei der Ableitung von  $R_{sn}(r)$  nach  $r$  ist wieder die Einhaltung der Reihenfolge von Differentiation und Grenzübergangsbildung zu beachten, welche auf folgendes Ergebnis führt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial R_{sn}(r)}{\partial r} = \sum_{\substack{i=1 \\ A_i=2}}^{\infty} i B_i n b_{11} r^{i-1} + F_{2n} \cdot S(r - R_i) \quad (3.82)$$

$$\text{mit } S(r - R_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R_i \\ 1 & \text{für } r = R_i \\ \rightarrow \infty & \text{für } r > R_i \end{cases}$$

Die andere Möglichkeit besteht darin, den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  direkt in den Differentialgleichungen (3.21) und (3.23) zu vollziehen. Für die Störfunktion bekommen wir nun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-F_{2n} \frac{\partial f(r)}{\partial r}) \rightarrow 0 \quad \text{für } r < R_i \quad (3.83)$$

Damit liegen für beide Gebiete

$$0 \leq r \leq R_i \quad \text{und} \quad R_i < r \leq R_q$$

Differentialgleichungen vom modifizierten Bessel'schen Typ vor mit den allgemeinen Lösungen:

$$R_{zy}(r) = B_{zy} I_1(\beta_n r) + C_{zy} K_1(\beta_n r) \quad \text{für } 0 \leq r < R_i \quad (3.84)$$

mit  $C_{zy} = 0$  wegen Randbedingung a) und

$$R_{zy}^+(r) = A_{zy} I_1(\beta_n r) + D_{zy} K_1(\beta_n r) \quad \text{für } R_i < r \leq R_a \quad (3.85)$$

Randbedingung d) liefert wieder

$$R_{zy}^+(r) = A_{zy} (I_1(\beta_n r) + k_n K_1(\beta_n r)) \quad (3.86)$$

mit 
$$k_n = - \frac{\frac{\partial I_1(\beta_n R_a)}{\partial r}}{\frac{\partial K_1(\beta_n R_a)}{\partial r}} \quad (3.87)$$

An der Stelle  $r = R_i$  gelten die der neuen Situation angepassten Randbedingungen:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_{zy}(R_i - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_{zy}^+(R_i + \epsilon) \quad (3.88)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial R_{zy}(R_i - \epsilon)}{\partial r} + F_{zn} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial R_{zy}^+(R_i + \epsilon)}{\partial r} \cdot \frac{\sigma_{zi}}{\sigma_{zi}} \quad (3.89)$$

Einsetzen von (3.84 - 3.85) liefert die Bestimmungsgleichungen für  $A_{zy}$  und  $B_{zy}$  :

$$B_{zy} I_1(\beta_n R_i) = A_{zy} (I_1(\beta_n R_i) + k_n K_1(\beta_n R_i)) \quad (3.90)$$

$$\text{und } B_{zy} \frac{\partial I_1(\beta_n R_i)}{\partial r} + F_{zn} = A_{zy} \frac{\sigma_{zi}}{\sigma_{zi}} \left( \frac{\partial I_1(\beta_n R_i)}{\partial r} + k_n \frac{\partial K_1(\beta_n R_i)}{\partial r} \right) \quad (3.91)$$

Daraus bekommen wir für die Gln. (3.84 - 3.85)

$$R_{zy}(r) = B_{zy} I_1(\beta_n r) \quad \text{für } 0 \leq r < R_i \quad (3.92)$$

$$\text{und } R_{zy}^+(r) = A_{zy} (I_1(\beta_n r) + k_n K_1(\beta_n r)) \quad \text{für } R_i < r < R_a \quad (3.93)$$

mit den Koeffizienten

$$A_{y\infty} = \frac{-F_{2n}}{\frac{\partial I_1(\beta_n R_i)}{\partial r} \left(1 + k_n \frac{K_1(\beta_n R_i)}{I_1(\beta_n R_i)}\right) - \frac{\sigma_w}{\sigma_i} \left(\frac{\partial I_1(\beta_n R_i)}{\partial r} + k_n \frac{\partial K_1(\beta_n R_i)}{\partial r}\right)} \quad (3.94)$$

und

$$B_{y\infty} = A_{y\infty} \left(1 + k_n \frac{K_1(\beta_n R_i)}{I_1(\beta_n R_i)}\right) \quad (3.95)$$

Ein numerischer Vergleich mit den Werten

$\langle u \rangle = 1 \text{ m/s}$

$L = 1 \text{ m}$

linearer Feldanstieg von  $B_2(x)$  :

$R_i = 0.025 \text{ m}$

$R_a = 0.026 \text{ m}$

$\sigma_w = 9.43 \cdot 10^5 \text{ (cm)}^{-1}$

$\sigma_i = 2.82 \cdot 10^6 \text{ (cm)}^{-1}$

$B_2(x) = B_0 + \frac{B_L - B_0}{L} x$

$B_0 = 3 \text{ Tesla}$

$B_L = 4 \text{ Tesla}$

ergibt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen beider Lösungsmöglichkeiten, wie die Fig. 5 zeigt.

ABLEITUNG DER FOURIERKOMPONENTEN DES POTENTIALS NACH R AN DER STELLE  $R=0.5 \cdot R_i$

	GRENZUEBERGANG	BESSEL-ANSATZ
DRS(0)=	-0.346710D+01	-0.346710D+01
DRS(1)=	0.399855D+00	0.399855D+00
DRS(3)=	0.442525D-01	0.442525D-01
DRS(5)=	0.158088D-01	0.158088D-01
DRS(7)=	0.797780D-02	0.797773D-02
DRS(9)=	0.476046D-02	0.476046D-02
DRS(11)=	0.313687D-02	0.313686D-02
CRS(2*I)=	0.	0.

Fig. 5

Vollkommen analog verläuft der Lösungsweg für den Term  $R_{cn}(r)$ .

Damit bekommen wir für das Potential nach Gl. (3.16) und (3.19)

$$\begin{aligned} \phi(x, r, \varphi) = & \sum_{n=0}^{\infty} R_{sn}(r) \cos \beta_n x \sin \varphi \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} R_{cn}(r) \cos \beta_n x \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.96)$$

### 3.3 Festlegung des Parameters k

Mit Hilfe des nun bekannten Potentials  $\phi(x, r, \varphi)$  läßt sich jetzt leicht der Beitrag  $\vec{p}_H = \vec{j} \times \vec{B}$  zum Druckgradienten abhängig vom Parameter k berechnen. Zur Festlegung von k gilt es nun noch, diesen Anteil mit dem durch die Zähigkeit des flüssigen Metalls hervorgerufenen Reibungsterm  $\vec{p}_R = -\text{div } \underline{\tau}$  zu koppeln. Dies soll im folgenden geschehen.

#### 3.3.1 Berechnung der Verluste durch $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte

Nach Gl. (3.2) berechnet sich die im Volumen des Rohrs durch  $(\vec{j} \times \vec{B})$ -Kräfte hervorgerufene Verlustleistung zu

$$\begin{aligned} P_H = & - \int_{\text{Vol}} (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} \, dV \\ = & - \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R (j_y B_z - j_z B_y) u_x \, d\varphi \, dx \, r \, dr \end{aligned} \quad (3.97)$$

Aus

$$j_y = -\sigma_{Li} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \cos \varphi + u_x B_z \right) \quad (3.98)$$

ergibt sich mit Gl. (3.96):

$$j_y = -\sigma_{Li} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\partial R_{sn}}{\partial r} \sin^2 \varphi + \frac{\partial R_{cn}}{\partial r} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{R_{sn}}{r} \cos^2 \varphi + \frac{R_{cn}}{r} \sin \varphi \cos \varphi \right) \cdot \cos \beta_n x + u_x B_z \right] \quad (3.99)$$

Analog ergibt sich

$$j_z = -\sigma_{zi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \sin \varphi - U_x B_y \right) \quad (3.100)$$

$$= -\sigma_{zi} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\partial R_{sn}}{\partial r} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial R_{cn}}{\partial r} \cos^2 \varphi - \frac{R_{sn}}{r} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{R_{cn}}{r} \sin^2 \varphi \right) \cos \beta_n x - U_x B_y \right] \quad (3.101)$$

Nach (3.16) gilt

$$U_x B_z = f_r(r) \sum_{n=0}^{\infty} F_{zn} \cos \beta_n x (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \quad (3.102)$$

und

$$-U_x B_y = f_r(r) \sum_{n=0}^{\infty} F_{yn} \cos \beta_n x (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \quad (3.103)$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0$$

fallen bei der Integration über das Volumen nach (3.97) alle Terme, die  $\sin \varphi \cdot \cos \varphi$  enthalten, weg.

Damit können wir für den ersten Term von Gl. (3.97) schreiben

$$-\int_0^L \int_0^L \int_0^{2\pi} j_y B_z U_x d\varphi dx r dr = -\int_0^L \int_0^L \int_0^{2\pi} -\sigma_{zi} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\partial R_{sn}(r)}{\partial r} + f_r(r) F_{zn} \right) \cos \beta_n x \right] \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} F_{zn} \cos \beta_n x \right] \cdot f_r(r) \sin^2 \varphi d\varphi dx r dr \quad (3.104)$$

$$-\int_0^L \int_0^L \int_0^{2\pi} -\sigma_{zi} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R_{sn}(r)}{r} + f_r(r) F_{zn} \right) \cos \beta_n x \right] \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} F_{zn} \cos \beta_n x \right] \cdot f_r(r) \cos^2 \varphi d\varphi dx r dr$$

Nach den Orthogonalitätssätzen für trigonometrische Funktionen gilt

$$\int_0^L \cos \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x dx = \begin{cases} L & \text{für } n = m = 0, \\ \frac{1}{2} L & \text{für } n = m \neq 0, \\ 0 & \text{für } n \neq m. \end{cases} \quad (3.105)$$

Damit fallen alle gemischten Produkte  $\cos\beta_m \times \cos\beta_n \times n \neq m$  weg und wir erhalten aus Gl. (3.104)

$$\begin{aligned}
 - \int_{\text{vol}} j_y B_z U_x dU = \sigma_{ci} \pi L \int_0^{R_i} & \left[ \left( \frac{\partial R_{s0}(r)}{\partial r} + \frac{R_{s0}(r)}{r} + 2 f_r(r) F_{z0} \right) F_{z0} \right] \\
 & + \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial R_{sn}(r)}{\partial r} + \frac{R_{sn}(r)}{r} + 2 f_r(r) F_{zn} \right) F_{zn} \right] f_r(r) r dr
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

Auf die gleiche Weise bestimmt sich der zweite Term von Gl. (3.97) zu

$$\begin{aligned}
 - \int_{\text{vol}} j_z B_y U_x dU = \sigma_{ci} \pi L \int_0^{R_i} & \left[ \left( \frac{\partial R_{c0}(r)}{\partial r} + \frac{R_{c0}(r)}{r} + 2 f_r(r) F_{y0} \right) F_{y0} \right] \\
 & + \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial R_{cn}(r)}{\partial r} + \frac{R_{cn}(r)}{r} + 2 f_r(r) F_{yn} \right) F_{yn} \right] f_r(r) r dr
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Die Anteile  $R_{cn}(r)$  und  $R_{sn}(r)$  des Potentials  $\phi$  sind also auch in dem Integral entkoppelt, das die Verluste beschreibt. Die Beiträge von  $B_y(x)$  und  $B_z(x)$  können daher in der später folgenden numerischen Berechnung völlig getrennt behandelt und erst am Ende der Rechnungen addiert werden.

### 3.3.2 Bestimmung der Verluste durch mechanische Reibung

Für eine radialsymmetrische Geschwindigkeitsverteilung läßt sich der Vektor  $-\text{div} \underline{I}$  leicht berechnen. Es gilt immer:

$$K = \eta F \frac{\partial v}{\partial r}, \tag{3.108}$$

wobei K die Reibungskraft zwischen zwei aufeinander gleitenden Körpern mit der Kontaktfläche F und  $\eta$  der Reibungskoeffizient ist.

Betrachtet wird ein Hohlzylinder mit den Radien r und r + dr mit der Länge dx aus einer Strömung der Geschwindigkeit  $\vec{v} = v_x(r) \vec{e}_x$ .

Die auf den Hohlzylinder von innen in x-Richtung wirkende Kraft ist:

$$K_1 = \eta 2\pi r dx \frac{\partial v_x}{\partial r}. \tag{3.109}$$

Die Kraft von außen ist:

$$\begin{aligned}
 K_2 &= -\eta 2\pi(r+dr)dx \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + d \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right) \\
 &= -\eta 2\pi(r+dr)dx \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} dr \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.110}$$

Die resultierende Kraft unter Vernachlässigung von Produkten von Differentialen ist

$$\begin{aligned}
 K_{res} &= K_1 + K_2 \\
 &= -\eta 2\pi dx \left( dr \frac{\partial u_x}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} dr \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.111}$$

Gleichzeitig wirkt auf den Hohlzylinder die Druckkraft

$$K_{druck} = -(p_x - p_{x+dx}) 2\pi r dx
 \tag{3.112}$$

Im Kräftegleichgewicht gilt wegen

$$K_{res} + K_{druck} = 0$$

$$\frac{p_{x+dx} - p_x}{dx} = \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)
 \tag{3.113}$$

Es tritt also nur eine Kraft in x-Richtung auf. Damit ergibt sich der Vektor  $-\text{div} \underline{\underline{I}}$  zu:

$$-\text{div} \underline{\underline{I}} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right) \underline{\underline{e}}_x
 \tag{3.114}$$

Die durch die Zähigkeit der Flüssigkeit hervorgerufene Verlustleistung ergibt sich dann mit  $\underline{\underline{v}} = u_x(r) \underline{\underline{e}}_x$  zu

$$\begin{aligned}
 P_R &= - \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_i} (-\text{div} \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{v}}) r dr d\varphi dx \\
 &= -2\pi L \eta \int_0^{R_i} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) u_x dr \\
 &= -2\pi L \eta \left[ r \frac{\partial u_x}{\partial r} u_x \Big|_0^{R_i} - \int_0^{R_i} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \frac{\partial u_x}{\partial r} dr \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.115}$$

Wegen  $u_x(R_i) = 0$

und  $\partial u_x / \partial r(0) = 0$

verschwindet der erste Term und wir bekommen

$$P_R = 2\pi L \eta \int_0^{R_i} \left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2 r dr \quad (3.116)$$

Die Geschwindigkeitsverteilung habe wieder die Form nach Gl. (3.7).

$$u_x(r) = u_0 \left[ 1 - \left(\frac{r}{R_i}\right)^{k+1} \right] \quad (3.117)$$

mit

$$u_0 = \langle u \rangle \frac{k+3}{k+1} \quad (3.118)$$

Damit ergibt sich aus Gl. (3.114)

$$-\text{div} \underline{\underline{\tau}} = -\eta \langle u \rangle (k+1)(k+3) \frac{r^{k+1}}{R_i^{k+1}} \underline{\underline{e}}_x \quad (\sim k^2 \text{ für } k \gg 1) \quad (3.119)$$

Für die Reibungsverluste bekommen wir mit Gl. (3.116)

$$P_R = \eta \langle u \rangle^2 \pi \frac{(k+3)^2}{k+1} \quad (\sim k \text{ für } k \gg 1) \quad (3.120)$$

### 3.3.3 Abhängigkeit der Verluste vom Parameter k

Zur Untersuchung des Einflusses des Parameters  $k$  auf die Verluste im Rohr wurden für zwei typische Testfälle numerische Berechnungen durchgeführt, deren Ergebnisse in Fig. 6 dargestellt sind.

Kurve **2** gilt für ein homogenes, über die Rohrlänge konstantes Magnetfeld von

$$B_z = 3.5 \text{ Tesla,}$$

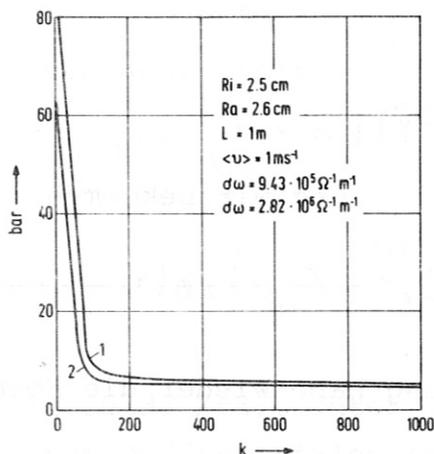


Fig. 6

während Kurve 1 für einen linearen Feldanstieg längs des Rohres

$$B_z = 7 \cdot x/L \text{ Tesla}$$

gilt.

In beiden Fällen hängen die Verluste im weiten Bereich  $200 < k < 5000$  kaum noch vom Parameter  $k$  ab. Da aber, wie die weiteren Rechnungen noch zeigen werden, die im Blanket von Fusionsreaktoren vorherrschenden Bedingungen zu Werten von  $k$  gerade in diesem Bereich führen, genügt schon eine sehr grobe Abschätzung von  $k$ , um auf einen relativ genauen Wert der Verluste zu kommen. Dies ist eine wesentliche Voraussetzung für die in den folgenden Kapiteln behandelten Verfahren zur Bestimmung von  $k$ .

### 3.3.4 Abschätzung des Parameters k

Bisher hatten wir die durch Reibung bzw. elektromagnetische Kräfte hervorgerufenen Verluste abhängig vom bisher noch freien Parameter  $k$  getrennt voneinander betrachtet. Zur Bestimmung von  $k$  müssen nun die beiden Anteile gekoppelt werden, was je nach den gegebenen Annahmen auf zwei Arten möglich ist. Bei  $\vec{B}(x) = \text{const}$  kann die "Methode des konstanten Druckgradienten", bei beliebigem  $\vec{B}(x)$  die "Methode der minimalen Entropieproduktion" angewendet werden.

### 3.3.4.1 Methode des konstanten Druckgradienten

Diese Methode lässt sich nur exakt anwenden, wenn das Rohr in einem homogenen, räumlich konstanten Magnetfeld liegt ( $\partial/\partial x = 0$ ) und große Hartmann-Zahlen vorliegen ( $H > 200$ ). Es ist nach Gl. (2.7)

$$\text{grad } p_k = (\vec{j} \times \vec{B})_k - \text{div} \underline{\underline{\tau}}_k \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{p}_{Hk}(r, \varphi) + \vec{p}_{Rk}(r) \quad (3.121)$$

Unter der gemachten Annahme  $\partial/\partial x = 0$  ist das eine skalare Gleichung für Komponenten in x-Richtung. Unbekannte sind dabei  $\partial p/\partial x$  und der Parameter k. Die zweite zur Lösung dieser beiden Unbekannten nötige Gleichung finden wir in der mathematischen Identität:

$$\text{rot grad } p \equiv 0 \quad (3.122)$$

In Komponenten zerlegt ist nur für  $n = 0$  (d.h. B hängt nicht von x ab),  $B_x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{j} \times \vec{B} \perp \vec{e}_r \quad \text{d.h. } (\text{grad } p)_r = 0 \\ \vec{j} \times \vec{B} \perp \vec{e}_\varphi \quad \text{d.h. } (\text{grad } p)_\varphi = 0 \end{array} \right\} \rightarrow v_y = v_z = 0 \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{r \partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.124)$$

Daraus folgt wegen  $\partial/\partial x = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=\text{const}} = \text{const.} \quad (3.125)$$

Da nun  $\vec{j} \times \vec{B}$  und  $-\text{div} \underline{\underline{\tau}}$  Funktionen von r sind, müssen sich deren r-Anteile gegenseitig kompensieren, um die Beziehung (3.125) zu erfüllen. Für  $k > 1$  gilt an der Stelle  $r = 0$  nach Gl. (3.119)

$$\vec{p}_{Rk}(r=0) = 0 \quad (3.126)$$

Also muß sein

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \vec{p}_{Hk}(r=0) \quad (3.127)$$

An den Stellen  $r = 0$  müssen sich die  $r$ -abhängigen Komponenten von  $\vec{p}_{Hk}$  und  $\vec{p}_{Rk}$  gegenseitig aufheben. Das Verfahren bekommt nun auch für  $\partial/\partial x = 0$  den Charakter einer Näherung, da  $\vec{j} \times \vec{B}$  sowohl von  $r$  als auch vom Winkel  $\varphi$  abhängt,  $-\text{div} \underline{\underline{\tau}}$  aber nur von  $r$ , wir aber  $(\vec{j} \times \vec{B})(r, \varphi)$  über  $\varphi$  mitteln werden. Wir verwenden also

$$\overline{\vec{p}_{Hk}}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\vec{j} \times \vec{B})_k(r, \varphi) d\varphi \quad (3.128)$$

anstelle von  $\vec{p}_{Hk}(r, \varphi)$ .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man in dieser Betrachtung das Koordinatensystem des Rohrs so legen, daß

$$B_y(x) = 0$$

$$B_z(x) = B_z = \text{const}$$

gilt.

Zusammen mit den Gleichungen (3.99), (3.49) ergibt sich aus (3.128) mit  $\overline{\vec{p}_{Hk}}(r) = p_{Hk}(r) \vec{e}_x$

$$\begin{aligned} p_{Hk}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\sigma_{Li} \left( \frac{\partial R_{s0}(r)}{\partial r} \sin^2 \varphi + \frac{R_{s0}(r)}{r} \cos^2 \varphi + u_x B_z \right) B_z d\varphi \\ &= -\sigma_{Li} B_z \left( \frac{1}{2} \frac{\partial R_{s0}(r)}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{R_{s0}(r)}{r} + F_{z0} \left( 1 - \frac{r^{k+1}}{R_i^{k+1}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$= -\sigma_{Li} B_z \left( b_{10} + F_{z0} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{r^{k+1}}{R_i^{k+1}} \right) \right)$$

Nach Gl. (3.119) ist

$$p_{Rk}(r) = -\gamma \langle u \rangle (k+1)(k+3) \frac{r^{k-1}}{R_i^{k+1}} \quad (3.130)$$

Es gilt mit Gl. (3.9)  $F_{z0} = v_0 B_z = \frac{k+3}{k+1} \langle v \rangle B_z$

Um Gleichung (3.125) zu erfüllen, muß für die r-abhängigen Terme von  $p_{Rk}(r)$  und  $p_{Hk}(r)$  gelten:

$$\eta \langle v \rangle (k+1)(k+3) \frac{r^{k-1}}{R_i^{k+1}} = \overline{\sigma_{Li}} \langle v \rangle B_z^2 \frac{1}{2} \frac{k+3}{k+1} \frac{r^{k+1}}{R_i^{k+1}} \quad (3.131)$$

Für alle r ist diese Forderung nicht zu erfüllen. Dies liegt daran, daß die Geschwindigkeitsverteilung nicht als unendliche Potenzreihe angenommen wurde, sondern nur den einen Term  $r^{k+1}$  enthält. (3.131) könnte so eine Rekursionsformel für die Koeffizienten einer Potenzreihe für  $f_v(r)$  liefern.

Doch auch für unsere vereinfachten Annahmen läßt sich eine sinnvolle Näherung finden, wenn man bedenkt, daß bei höheren Werten von  $B_z$  ( $H > 200$ ) die r-abhängigen Terme erst bei  $r \approx R_i$  einen nennenswerten Beitrag liefern können und sonst gegenüber dem konstanten Anteil vernachlässigbar sind. Näherungsweise können wir also in (3.131)  $r = R_i$  setzen und schreiben:

$$\overline{\sigma_{Li}} B_z^2 \frac{R_i^2}{2} \approx \eta (k+1)^2 \quad (3.132)$$

Damit berechnet sich k zu

$$k \approx B_z R_i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\overline{\sigma_{Li}}}{\eta}} - 1$$

$$k+1 \approx \frac{H}{\sqrt{2}} \quad (3.133)$$

Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, daß diese Formel für k nur für  $\vec{B} = \text{const}$  und für Hartmann-Zahlen  $H > 200$  sinnvoll ist.

### 3.3.4.2 Methode der minimalen Entropieproduktion

Diese Methode ist nicht der Forderung  $\partial/\partial x = 0$  unterworfen. Sie gilt ganz allgemein, doch sind die Ergebnisse natürlich nicht genauer, als es die in Kapitel 3. diskutierten idealisierten Annahmen zulassen. (Dies gilt vor allem für die Annahme der Konstanz der Form des Geschwindigkeitsprofils entlang des Rohres).

Zugrunde liegt ein allgemeiner Satz der irreversiblen Thermodynamik für Zustände nahe des thermodynamischen Gleichgewichts, welcher die nötige zusätzliche Gleichung zur Kopplung der maxwell'schen und hydrodynamischen Gleichung liefert. Er lautet [2]:

"Der stationäre Nichtgleichgewichtszustand eines thermodynamischen Systems ist ausgezeichnet durch einen (positiven) Minimalwert der Entropieproduktion".

Da wir es mit einem stationären Zustand und nicht der Einstellung eines Gleichgewichtszustandes zu tun haben, ist nicht die Entropiezunahme das entscheidende Gesetz, welches den Ablauf des Prozesses regelt, sondern die Tendenz einer minimalen (stets positiven) Entropieproduktion. Unter Einführung der Entropie-Änderung  $ds$  und der Änderung der Wärmemenge  $dQ$  bei der absoluten Temperatur  $T$  gilt  $ds = dQ/T$ . Da das betrachtete Rohr ein isothermes System darstellt (siehe Forderung b)), gilt  $ds \sim dQ$ ,

$$\text{bzw. } \dot{S} \sim (P_R + P_H)_k \quad (3.135)$$

Die Entropieproduktion ist also proportional der Summe der Verluste durch Reibung und durch elektromechanische Kräfte abhängig von  $k$ . Nach Gl. (3.135) muß also gelten

$$\frac{d}{dk} (P_{Hk} + P_{Rk}) = 0. \quad (3.136)$$

Daraus bestimmt sich dann der Parameter  $k$  und damit

$$P_{Ges} = P_{Hk} + P_{Rk}. \quad (3.137)$$

Analytisch läßt sich dies allgemein nur sehr schwer berechnen, doch bietet eine numerische Bestimmung keine Schwierigkeiten und wird im weiteren noch durchgeführt werden.

Einen einfachen analytischen Test dieses Verfahrens läßt der Fall  $\vec{B} = 0$  zu. Es gilt dann:

$$\frac{dP_{Rk}}{dk} = 0. \quad (3.138)$$

Mit Gleichung (3.120) bekommen wir

$$\frac{d}{dk} \left( \eta L \langle v \rangle^2 \pi \frac{(k+3)^2}{k+1} \right) = 0 \quad \text{und damit} \quad (3.139)$$

$$\frac{2(k+3)}{k+1} - \frac{(k+3)^2}{(k+1)^2} = 0.$$

Damit bestimmt sich k zu

$$k = 1 \quad (k = -3). \quad (3.140)$$

Das Leistungsminimum für eine laminare Strömung ohne äußeres Magnetfeld ist also bei  $k = 1$  erreicht, d.h. es liegt eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung vor:

$$f_v(r) = 1 - \frac{r^2}{R_i^2}. \quad (3.141)$$

In diesem Fall ist nach Gl. (2.7) und Gl. (3.119)

$$\text{grad } p = -\text{div } \underline{\underline{\tau}} = -\eta \langle v \rangle \frac{8}{R_i^2} \vec{e}_r. \quad (3.142)$$

Damit ist auch die Forderung

$$\text{rot grad } p = 0$$

erfüllt. Die Methode des konstanten Druckgradienten hätte also notwendigerweise auf das gleiche Ergebnis geführt. Beide Methoden sind also konsistent.

Die Methode der minimalen Entropieproduktion ist im Gegensatz der vorher diskutierten auf beliebige Hartmann-Zahlen und beliebige Magnetfeldverteilung anwendbar.

### 3.3.4.3 Numerischer Vergleich beider Methoden

Zur Kontrolle der Konsistenz der beiden oben beschriebenen Methoden wurden zwei typische Testfälle numerisch mit Hilfe beider Methoden berechnet. Mit den Testwerten

$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ m}, & \langle v \rangle &= 1 \text{ m/s}, \\ R_i &= 2,5 \text{ cm}, & \bar{\omega}_i &= 2.82 \cdot 10^6 (\Omega \text{ m})^{-1} \\ R_a &= 2,6 \text{ cm}, & \gamma_i &= 0.35 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (\text{ms})^{-1}, \\ B_z &= \text{const} = 3.5 \text{ Tesla} \end{aligned}$$

errechneten sich die Druckdifferenzen zwischen Rohranfang und Rohrende

$$\begin{aligned} \text{für } \bar{\omega} &= 9.43 \cdot 10^5 (\Omega \text{ m})^{-1} \\ \text{zu } \Delta p_1 &= 4.534 \text{ bar} \quad k = 5550 \\ \Delta p_2 &= 4.532 \text{ bar} \quad k = 4950 \end{aligned}$$

und für isolierende Rohrwände

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= 0 (\Omega \text{ m})^{-1} \\ \text{zu } \Delta p_1 &= 6.217 \cdot 10^{-2} \text{ bar} \quad k = 5550 \\ \Delta p_2 &= 6.205 \cdot 10^{-2} \text{ bar} \quad k = 5550 \end{aligned}$$

wobei  $\Delta p_1$  nach der "Methode des konstanten Druckgradienten" und  $\Delta p_2$  nach der "Methode der minimalen Entropieproduktion" berechnet wurde. Die gute Übereinstimmung der Werte zeigt, daß trotz der gemachten Näherungen beide Wege zu hinreichend genauen Ergebnissen führen.

3.4 Vergleich von Resultaten dieser Arbeit mit Ergebnissen von Hoffman & Carlson [3]

Betrachtet wird wieder der Fall  $B_y = 0$ ,  $B_z = \text{const.}$   
 Mit Gleichung (3.129) bekommen wir für den über den Winkel  $\varphi$  gemittelten j x B-Anteil am Druckgradienten

$$P_{Hk}(r) = -\sigma_{Li} B_z \left[ b_{10} + F_{z0} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_i} \right)^{k+1} \right) \right] \quad (3.143)$$

mit dem Koeffizienten  $b_{10}$  nach Gl. (3.48)

$$\begin{aligned} b_{10} &= \frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) \frac{F_{z0} \frac{k+1}{k+3}}{\frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) - \left( 1 + \frac{R_a^2}{R_i^2} \right)} - F_{z0} \frac{k+2}{k+3} \\ &= \frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) \frac{\langle u \rangle B_z}{\frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) - \left( 1 + \frac{R_a^2}{R_i^2} \right)} - \langle u \rangle B_z \frac{k+2}{k+1} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich  $p_{Hk}(r)$  zu

$$\begin{aligned} P_{Hk}(r) &= -\sigma_{Li} B_z \left[ -\langle u \rangle B_z \frac{k+2}{k+1} + \langle u \rangle B_z \frac{k+3}{k+1} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_i} \right)^{k+1} \right) \right] \\ &\quad - \sigma_{Li} B_z^2 \langle u \rangle \frac{\frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right)}{\frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) - \left( 1 + \frac{R_a^2}{R_i^2} \right)} \end{aligned} \quad (3.144)$$

Analog zu Kapitel 3.3.4.1 nehmen wir wieder an, daß der r-abhängige Term in  $\overline{p_{Hk}}(r)$  durch den r-abhängigen Anteil des Reibungsterms  $\overline{p_{Rk}}(r)$  nach der Methode des konstanten Druckgradienten kompensiert wird, d.h.

$$\text{grad } p = \overline{p_{Hk}}(r) + \overline{p_{Rk}}(r) = \text{const.}$$

Mit dem daraus folgenden Wert für den Parameter k

$$k+1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} H$$

wird der erste Term in (3.144) zu

$$-\sigma_{Li} B_z \left( \langle u \rangle B_z \frac{\sqrt{2}}{H} \right)$$

was nach Multiplikation mit  $H/H$  zu

$$-\sigma_{Li} B_z^2 \langle u \rangle \frac{\sqrt{z}}{R_i^2 B_z^2 \sigma_{Li} / \eta_{Li}} H$$

$$= \eta \frac{\langle u \rangle}{R_i^2} \sqrt{z} H$$

führt.

Multipliziert man Zähler und Nenner des zweiten Terms in (3.144) mit  $-\frac{R_i}{R_a + R_i}$ , so ergibt sich dafür

$$-\sigma_{Li} B_z^2 \langle u \rangle \frac{\frac{\sigma_{Li}}{\eta_{Li}} \left( \frac{R_a - R_i}{R_i} \right)}{\frac{\sigma_{Li}}{\eta_{Li}} \left( \frac{R_a - R_i}{R_i} \right) + \left( \frac{R_a^2 + R_i^2}{R_a R_i + R_i^2} \right)^2},$$

was nach Multiplikation mit  $\left(\frac{H}{H}\right)^2$  und Einführung des Wandleitfähigkeitsverhältnisses  $C$

$$-\sigma_{Li} B_z^2 \langle u \rangle \frac{H^2}{R_i^2 B_z^2 \sigma_{Li} / \eta_{Li}} \cdot \frac{C}{C + \frac{R_a^2 + R_i^2}{R_a R_i + R_i^2}}$$

liefert.

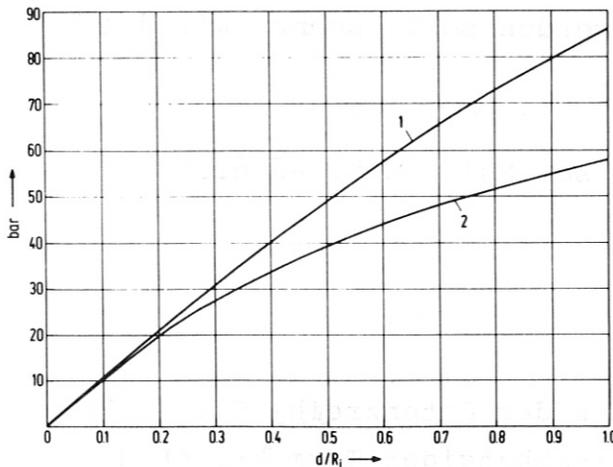
Damit bekommen wir schließlich für den Druckgradienten:

$$\text{grad } p = -\eta \frac{\langle u \rangle}{R_i^2} \left( \sqrt{z} H + H^2 \frac{C}{C + \frac{R_a^2 + R_i^2}{R_a R_i + R_i^2}} \right) \quad (3.145)$$

Hoffmann & Carlson in [2] kommen mit einem heuristischen Vorgehen, das auf Ergebnisse für ein Rohr mit rechteckigem Querschnitt zurückgreift, für den gleichen Fall zu folgendem Ergebnis:

$$\text{grad } p = -\eta \frac{\langle u \rangle}{R_i^2} \left( H + H^2 \frac{C}{C+1} \right) \quad (3.146)$$

Beide Formeln stimmen für große Hartmann-Zahlen dann sehr gut überein, wenn  $R_i \approx R_a$  gilt. Die Abweichungen voneinander für einen typischen in Fusionsreaktoren vorliegenden Fall als Funktion der Variablen  $d = R_a - R_i$  zeigt die Fig. 7.



$$\begin{aligned}
 L &= 1 \text{ m} \\
 R_i &= 2,5 \text{ cm} \\
 \langle v \rangle &= 1 \text{ m/s} \\
 \sigma_{Li} &= 2.82 \cdot 10^6 \text{ (}\Omega\text{m)}^{-1} \\
 \sigma_w &= 9.43 \cdot 10^5 \text{ (}\Omega\text{m)}^{-1} \\
 B_z &= 3.5 \text{ Tesla} \\
 \eta_{Li} &= 0.35 \cdot 10^{-3} \text{ kg (ms)}^{-1}
 \end{aligned}$$

Fig. 7

Kurve 1:  $\Delta p$  nach Hoffmar & Carlson

Kurve 2:  $\Delta p$  nach Gl. (3.145)

### 3.5 Abschätzung des induzierten Magnetfeldes

Eine wesentliche Voraussetzung für alle Resultate war die Forderung, daß das sekundär durch die inneren Ströme erzeugte Magnetfeld gegenüber dem primären, von außen angelegten Magnetfeld vernachlässigbar ist. Wie schon in Kapitel 1. dargelegt worden ist, trägt eine Magnetfeldkomponente parallel zur Strömungsgeschwindigkeit nicht zur Induktion elektrischer Ströme bei. Dies können nur Komponenten senkrecht zur Geschwindigkeit bewirken. Ein Einfluß auf die Stromdichte durch sekundäre Felder senkrecht zu  $\langle v \rangle$  kann damit nur in Bereichen auftreten, in denen  $j_x$ -Ströme infolge starker Änderung von  $\vec{B}$  entlang  $x$  existieren. Dieser Fall inhomogener primärer Magnetfelder soll im folgenden untersucht werden.

Gl. (3.96) liefert für die  $x$ -Komponente der Stromdichte

$$\begin{aligned}
 j_x = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sigma \left( \sum_{n=1}^{\infty} R_{sn}(r) \beta_n \sin \beta_n x \sin \varphi \right. \\
 \left. + \sum_{n=1}^{\infty} R_{cn}(r) \beta_n \sin \beta_n x \cos \varphi \right) \quad (3.147)
 \end{aligned}$$

Da die Größenordnung des induzierten sekundären Magnetfeldes nur grob abgeschätzt werden soll, nehmen wir die folgenden Vereinfachungen an.

Das Magnetfeld in y-Richtung sei Null, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} B_y &= 0, \\ B_z(x) &\neq 0. \end{aligned}$$

Wegen der schnellen Konvergenz der Potenzreihe Gl. (3.7) (siehe auch Fig. 5) für den r-abhängigen Term  $R_{sn}(r)$  des Potentials  $\phi$  kann man annehmen, daß  $\phi$  etwa proportional zu r ist. Damit konzentriert sich der Hauptteil des Stromes in x-Richtung auf die Randzonen des Rohres. Berücksichtigt man nun noch die Winkelabhängigkeit des Stromes ( $\sim \sin\psi$ ), so findet man die in Fig. 8 schraffierten Bereiche, in denen wesentliche Längsströme fließen.

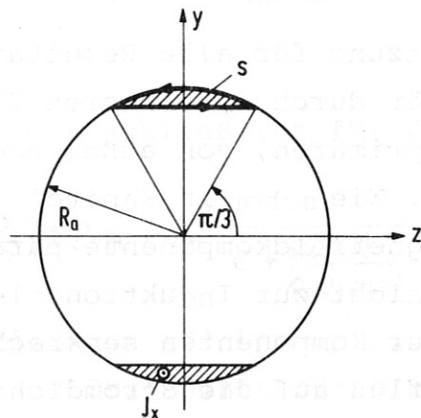


Fig. 8

Der Gesamtstrom  $J_x$  ist nach Gl. (3.148) maximal an der Stelle

$$\beta_4 x = \pi/2$$

d.h.

$$x = L/2$$

Damit gilt

$$I_{x \max} = \pm \int_0^{R_0} \int_0^{\pi} \sigma \cdot \sum_{u=1}^{\infty} R_{su}(r) \beta_u \sin \varphi \, d\varphi \, r \, dr \quad (3.148)$$

mit

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_i & \text{für } 0 \leq r \leq R_i \\ \sigma_w & \text{für } R_i < r \leq R_0 \end{cases} \quad (3.149)$$

Für  $\partial/\partial t$  gilt

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad (3.150)$$

bzw.

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu I. \quad (3.151)$$

Unter den Annahmen, daß das induzierte sekundäre Magnetfeld  $B_{\perp}$  etwa parallel zum Integrationsweg  $s$  nach Fig. 8 und dort konstant ist, ergibt sich

$$B_{\perp \text{ind} \max} \approx \frac{\mu I_{x \max}}{s} \quad (3.152)$$

$$\text{mit } s = R_0 (\pi/3 + 1/2). \quad (3.153)$$

Damit berechnet sich das Verhältnis aus dem senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit induzierten sekundären Magnetfeld  $B_{\perp \text{ind}}$  und dem angelegten Magnetfeld  $B_z$  zu

$$\left| \frac{B_{\perp \text{ind}}}{B_z} \right|_{\max} = \left| \frac{B_{\perp \text{ind}}(x=L/2)}{B_z(x=L/2)} \right| \quad (3.154)$$

$$= \frac{2}{\pi/3 + 1/2} \cdot \frac{1}{R_0} \cdot \left| \int_0^{R_0} \sigma \sum_{u=1}^{\infty} R_{su}(r) \beta_u \, r \, dr \right|$$

Für die Testwerte

$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ m,} & \sigma_i &= 2.82 \cdot 10^6 \text{ (Qm)}^{-1}, \\ R_i &= 2.5 \text{ cm,} & \sigma_w &= 9.43 \cdot 10^5 \text{ (Qm)}^{-1}, \\ R_0 &= 2.6 \text{ cm,} & \langle v \rangle &= 1 \text{ m/s,} \end{aligned}$$

bei linearem Feldanstieg entlang  $x$  ( $B_z(x) = 7 \cdot x/L$  Tesla)

ergaben numerische Berechnungen ein Verhältnis von

$$\left| \frac{B_{\perp \text{ind}}}{B_z} \right|_{\text{max}} = 3.9 \cdot 10^{-3}$$

Da im Blanket von Fusionskraftwerken ausgenommen der Feldeintritts- und Feldaustrittszonen viel geringere Feldgradienten als der oben angenommene erwartet werden, ist für diesen Anwendungsfall die dieser Arbeit zugrunde liegende Vernachlässigung induzierter sekundärer Magnetfelder gerechtfertigt.

Es soll nun noch die Größe der Komponente  $B_{\parallel \text{ind}}$  des induzierten sekundären Magnetfelds parallel zur Strömung für den Fall  $B_y = 0$  und  $B_z = \text{const}$  abgeschätzt werden. Diese parallele Feldkomponente hat zwar, wie in Kapitel 1. schon erläutert, keinen direkten Einfluß auf die induzierten elektrischen Ströme bzw. die Form der Geschwindigkeitsverteilung, sie kann jedoch zur Unterdrückung von Turbulenzen mit beitragen.

Mit Gl. (3.99) und Gl. (3.46) ergibt sich die Stromdichte  $j_y$  zu

$$j_y = -\sqrt{c_i} \left( \frac{\partial R_{s0}(r)}{\partial r} \sin^2 \varphi + \frac{R_{s0}(r)}{r} \cos^2 \varphi + F_{z0} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_i} \right)^{k+1} \right] \right) \quad (3.155)$$

mit

$$\frac{\partial R_{s0}(r)}{\partial r} = b_{10} + F_{z0} \frac{k+2}{k+3} \left( \frac{r}{R_i} \right)^{k+1} \quad (3.156)$$

und

$$\frac{R_{s0}(r)}{r} = b_{10} + F_{z0} \frac{1}{k+3} \left( \frac{r}{R_i} \right)^{k+1} \quad (3.157)$$

Für hohe Hartmann-Zahlen und damit für hohe Werte von  $k$  sind die Terme  $(r/R_i)^{k+1}$  für  $r < R_i$  vernachlässigbar. Zusammen mit den Gln. (3.49) und (3.155 - 3.157) bekommen wir

$$j_y = -\sqrt{c_i} \left( B_z \langle v \rangle \frac{c}{c + \frac{R_a^2 + R_i^2}{R_a R_i + R_i^2}} + F_{z0} \left( 1 - \frac{k+2}{k+3} \right) \right) \quad (3.158)$$

Eine Umformung des zweiten Terms liefert mit  $k + 1 = H/\sqrt{2}$  nach Kapitel 3.3.4.1,

$$j_y = -\sigma_i B_z \langle v \rangle \left( \frac{c}{c + \frac{R_a^2 + R_i^2}{R_a R_i + R_i^2}} + \frac{\sqrt{2}}{H} \right) \quad (3.159)$$

Die Stromdichte ist also angenähert konstant im gesamten Rohrrinnenraum. Damit tritt ein maximales sekundäres Magnetfeld  $B_x$  an den Stellen  $r = R_i$  und  $\varphi = 0, \pi$  auf (siehe Fig. 9).

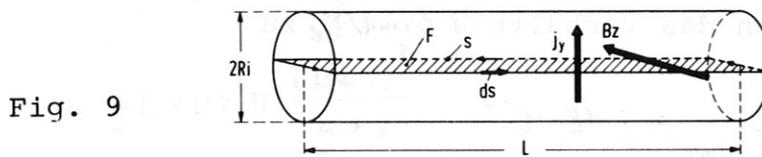


Fig. 9

Mit

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \int_V \vec{j} \cdot d\vec{V} \quad (3.160)$$

gilt für  $L \gg 2R_i$  angenähert

$$B_{\text{ind}} \cdot 2L = j_y 2R_i L \quad (3.161)$$

Damit können wir das Verhältnis  $B_{\text{ind}} / B_z$  bestimmen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{B_{\text{ind}}}{B_z} \right|_{\text{max}} &= \mu \sigma_i R_i \left( \frac{c}{c + \frac{R_a^2 + R_i^2}{R_a R_i + R_i^2}} + \frac{\sqrt{2}}{H} \right) \\ &= R_m \left( \frac{HC}{c + \frac{R_a^2 + R_i^2}{R_a R_i + R_i^2}} + \sqrt{2} \right) \cdot \frac{1}{H} \quad (3.162) \end{aligned}$$

Dies entspricht in guter Näherung dem Ergebnis von Hoffmann & Carlson [3] für hohe Hartmann-Zahlen:

$$\left| \frac{B_x}{B_0} \right|_{\text{max}} = R_m \left( \frac{1 + \frac{HC}{c+1}}{H} \right) \quad (3.163)$$

Daraus folgt, daß das induzierte Magnetfeld in x-Richtung nicht nur für kleine magnetische Reynoldszahlen vernachlässigbar ist, wie häufig angenommen wird. Für

kleine  $C$  und große  $H$ , wie sie im Blanket von Fusionsreaktoren erwartet werden, ist vielmehr das Verhältnis von  $B_{\text{ind}}/B_2$  wesentlich kleiner als  $R_m$ .

Für ein typisches Beispiel mit den Werten

$$\begin{aligned} C &= 1.34 \cdot 10^{-2}, & R_i &= 2.5 \text{ cm}, \\ H &= 7850, & R_o &= 2.6 \text{ cm}, \\ R_m &= 0.09 \end{aligned}$$

ergibt sich das Verhältnis  $B_{\text{ind}}/B_2$  zu

$$\left| \frac{B_{\text{ind}}}{B_2} \right|_{\text{max}} = 1.18 \cdot 10^{-3}$$

Damit ist gezeigt, daß sekundäre, induzierte Magnetfelder sowohl senkrecht als auch parallel zur Strömungsrichtung gegenüber dem angelegten Magnetfeld vernachlässigbar sind und keinen wesentlichen Einfluß auf die Strömung haben. Die für die vorliegende Arbeit wichtige Annahme vernachlässigbarer Sekundärfelder ist damit in einem für die Praxis ausreichenden Maße gerechtfertigt.

### 3.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel sollen die zur Berechnung der MHD-Verluste in einem Rohr nötigen Ergebnisse der vorhergehenden Kapitel noch einmal zusammengestellt werden. Ausgangspunkt sind wieder die in Kapitel 2 aufgestellten Grundgleichungen und Annahmen. Unter diesen Voraussetzungen errechnen sich die Verluste mit den Gln. (3.97 - 3.107) und Gl. (3.120)

$$\begin{aligned}
 P_{\text{Ges}} = & \sigma_{Li} \pi L \left[ \int_0^{R_i} \left[ \left( \frac{\partial R_{s0}(r)}{\partial r} + \frac{R_{s0}(r)}{r} + 2 f_v(r) F_{z0} \right) F_{z0} \right] + \right. \\
 & \left. + \left[ \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{\partial R_{su}(r)}{\partial r} + \frac{R_{su}(r)}{r} + 2 f_v(r) F_{zu} \right) F_{zu} \right] f_v(r) r dr + \right. \\
 & + \int_0^{R_i} \left[ \left( \frac{\partial R_{c0}(r)}{\partial r} + \frac{R_{c0}(r)}{r} + 2 f_v(r) F_{y0} \right) F_{y0} \right] + \\
 & \left. + \left[ \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{\infty} \left( \frac{\partial R_{cu}(r)}{\partial r} + \frac{R_{cu}(r)}{r} + 2 f_v(r) F_{yu} \right) F_{yu} \right] f_v(r) r dr \right] \quad (3.164) \\
 & + \eta L \langle v \rangle^2 \pi \frac{(k+3)^2}{k+1}
 \end{aligned}$$

mit  $f_v(r) = 1 - \left(\frac{r}{R_i}\right)^{k+1}$  nach Gl. (3.7) (3.165)

Dabei gilt nach den Gln. (3.46 - 3.49)

$$R_{s0}(r) = b_{10} r + F_{z0} \frac{1}{k+3} \frac{r^{k+2}}{R_i^{k+1}} \quad (3.166)$$

für  $0 \leq r \leq R_i$

und

$$R_{s0}^*(r) = \sigma_{10} \left( r + \frac{R_a^2}{r} \right) \quad (3.167)$$

für  $R_i < r \leq R_a$

mit den Koeffizienten

$$\sigma_{10} = \frac{F_{z0} \frac{k+1}{k+3}}{\frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) - \left( 1 + \frac{R_a^2}{R_i^2} \right)} \quad (3.168)$$

und

$$b_{10} = \sigma_{10} \frac{\sigma_w}{\sigma_{Li}} \left( 1 - \frac{R_a^2}{R_i^2} \right) - F_{z0} \frac{k+2}{k+3} \quad (3.169)$$

Für  $n \neq 0$  gilt nach den Gln. (3.68 - 3.72)

$$R_{Sn}(r) = \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta_i=2}}^{\infty} B_{in} b_{in} r^i + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta_j=2}}^{\infty} D_{jn}^+ F_{2n} \frac{r^{j+k+1}}{R_i^{k+1}} \quad (3.170)$$

für  $0 \leq r \leq R_i$

und

$$R_{Sn}^+(r) = A_n (I_1(\beta_n r) + k_n K_1(\beta_n r)) \quad (3.171)$$

für  $R_i < r \leq R_n$

mit den Koeffizienten

$$A_n = F_{2n} \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta_j=2}}^{\infty} (j+k+1) D_{jn}^+ R_i^{j-1} - \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta_i=2}}^{\infty} i B_{in} R_i^{i-1}}{\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta_i=2}}^{\infty} B_{in} R_i^i} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta_j=2}}^{\infty} D_{jn}^+ R_i^j \right] \quad (3.172)$$

$$\cdot \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \left( \frac{\partial I_1(\beta_n R_i)}{\partial r} + k_n \frac{\partial K_1(\beta_n R_i)}{\partial r} \right) - \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta_i=2}}^{\infty} i B_{in} R_i^{i-1}}{\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta_i=2}}^{\infty} B_{in} R_i^i} \cdot \left( I_1(\beta_n R_i) + k_n K_1(\beta_n R_i) \right) \right]^{-1}$$

und

$$b_{in} = \frac{1}{\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta_i=2}}^{\infty} B_{in} R_i^i} \left[ A_n (I_1(\beta_n R_i) + k_n K_1(\beta_n R_i)) - F_{2n} \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta_j=2}}^{\infty} D_{jn}^+ R_i^j \right] \quad (3.174)$$

Dabei gilt

$$D_{jn}^+ = \frac{1}{k+3} \quad \text{und} \quad D_{jn}^+ = \frac{\beta_n^2 D_{j-2,n}}{(j+k+1)^2 - 1} \quad \text{für } j \geq 3, \quad (3.175)$$

$$B_{1n} = 1 \quad \text{und} \quad B_{in} = \frac{\beta_n^2 B_{i-2,n}}{i^2 - 1} \quad \text{für } i \geq 3 \quad (3.176)$$

und

$$k_n = - \frac{\frac{\partial I_1(\beta_n R_0)}{\partial r}}{\frac{\partial K_1(\beta_n R_0)}{\partial r}}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (3.177)$$

Die Funktionen  $R_{co}(r)$  und  $R_{cu}(r)$  berechnen sich nach Gl. (3.28) zu

$$R_{co}(r) = \frac{F_{y0}}{F_{z0}} R_{so}(r) \quad (3.178)$$

und

$$R_{cu}(r) = \frac{F_{yn}}{F_{zn}} R_{su}(r). \quad (3.179)$$

Die Koeffizienten  $F_{yn}$  bzw.  $F_{zn}$  sind die Fourierkoeffizienten von  $v_0 B(x)$  nach Gl. (3.16)

$$\left. \begin{aligned} v_0 B_z(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{zn} \cos \beta_n x \\ -v_0 B_y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{yn} \cos \beta_n x. \end{aligned} \right\} \quad (3.180)$$

Der noch freie Parameter  $k$  berechnet sich allgemein durch die Beziehung (3.136)

$$\frac{dP_{ges}}{dk} = 0, \quad (3.181)$$

was nur numerisch möglich ist.

Für  $\vec{B} \approx \text{const}$  kann man nach Gl. (3.133) näherungsweise setzen

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{2} H - 1. \quad (3.182)$$

Die Druckdifferenz zwischen den Rohrenden bestimmt sich nach Gl. (3.6) zu

$$\Delta p = \frac{P_{ges}}{v_0 R_i^2 \pi}. \quad (3.183)$$

In den meisten Fällen ist es jedoch nicht nötig, so exakt wie oben beschrieben zu rechnen. Fig. 6 hat schon gezeigt, daß für ein hinreichend hohes Wandleitfähigkeitsverhältnis ( $C \approx 1,34 \cdot 10^{-2}$ ), wie es im Rohrsystem eines Fusionsreaktors erwartet wird, die Verluste im Rohr bei Vorliegen eines inhomogenen Magnetfeldes etwa gleich denen bei einem homogenen Magnetfeld sind, welches gleich dem Mittelwert des Betrages des inhomogenen ist.

Für leitende Rohrwände erscheint es deshalb sinnvoll, als rechnerische Vereinfachung das angelegte Magnetfeld über die Rohrlänge zu mitteln und mit diesem konstanten Mittelwert konstant weiterzurechnen.

Damit berechnet sich die Druckdifferenz für große Hartmann-Zahlen und hohes Wandleitfähigkeitsverhältnis ( $C \approx 1 \cdot 10^{-2}$ ) nach Gl. (3.145) zu

$$\Delta p = \eta \frac{\langle u \rangle}{R_i^2} \left( \sqrt{2} \langle H \rangle + \langle H \rangle^2 \frac{C}{C + \frac{R_a^2 + R_i^2}{R_a R_i + R_i^2}} \right) L \quad (3.184)$$

$$\text{mit } \langle H \rangle = \sqrt{R_i^2 \frac{G_{Li}}{\eta u}} \frac{1}{L} \int_0^L (B_y^2(x) + B_z^2(x))^{\frac{1}{2}} dx \quad (3.185)$$

Die Verluste werden dann zu

$$\hat{P}_{G_{Li}} = \eta \langle u \rangle^2 L \pi \left( \sqrt{2} \langle H \rangle + \langle H \rangle^2 \frac{C}{C + \frac{R_a^2 + R_i^2}{R_a R_i + R_i^2}} \right) \quad (3.186)$$

Da  $\langle u \rangle$  proportional  $1/R_i^2$  bei konstantem Massendurchsatz ist, und  $\langle H \rangle$  proportional  $R_i$ , gilt dies auch für die Verluste bzw. Druckdifferenzen

$$\Delta p \sim \frac{1}{R_i^2} \text{ für } u_0 = \text{const.}$$

Um die Strömungsverluste im Rohrsystem des Blankets möglichst gering zu halten, sollte also neben einer Verminderung des Wandleitfähigkeitsverhältnisses und kurzen Rohren versucht werden, die Strömungsgeschwindigkeit durch Vergrößern des Rohrradius  $R_i$  soweit wie möglich zu verringern.

In Fig. 10 wurden noch für den Grenzfall isolierender Rohrwände die Druckdifferenzen zwischen den Rohrenden für konstantes Magnetfeld  $B_z = 3.5$  Tesla (Kurve 1) und für linearen Feldanstieg entlang x  $B_z(x) = 7x/L$  Tesla (Kurve 2) abhängig vom Parameter k aufgetragen. Man sieht,

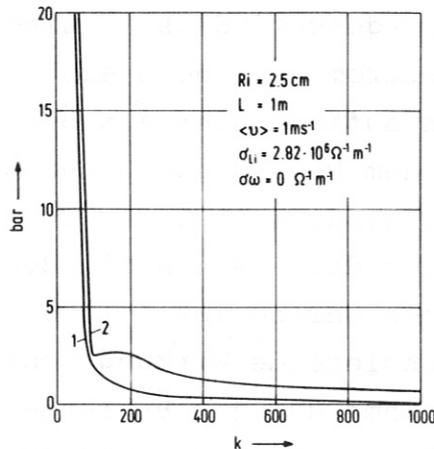


Fig. 10

daß ähnlich wie in Fig. 6 die Druckdifferenz für große Werte von k nur noch wenig von k abhängen. Es wird deutlich, daß im Fall isolierender Rohrwände die Verluste nur noch einen Bruchteil von denen im Falle leitender Wände betragen. Für die Werte

$$\begin{array}{ll}
 L = 1 \text{ m} & \sigma_{ii} = 2.82 \cdot 10^6 (\Omega \text{ m})^{-1} \\
 R_i = 2,5 \text{ cm} & \langle v \rangle = 1 \text{ m/s} \\
 R_a = 2.6 \text{ cm} & B = \text{const} = 3.5 \text{ Tesla}
 \end{array}$$

beträgt das Verhältnis von  $\Delta P_{\text{isolator}} / \Delta P_{\text{leiter}}$  bei  $k = 1000$

$$\frac{\Delta P_{\text{isolator}}}{\Delta P_{\text{leiter}}} = 3.7 \cdot 10^{-2}.$$

Bemerkenswert ist hier das Nebenminimum an der Stelle  $k = 100$  in Kurve 2. Es konnte nicht festgestellt werden, ob dieses einen physikalischen Hintergrund besitzt oder nur ein Produkt numerischer Ungenauigkeiten darstellt. Als mögliche Erklärung bietet sich die folgende Vermutung an. Die Druckdifferenz baut sich aus zwei gegenläufigen Effekten auf. Der erste besteht in der Abnahme induzierter Ströme in der Strömung mit wachsendem k aufgrund geringer

werdender Geschwindigkeitsinhomogenitäten. Dieser Effekt liegt sowohl bei homogenem als auch bei inhomogenem Magnetfeld vor. Der zweite, nur im homogenen Fall auftretende Effekt besteht darin, daß bei kleinen Werten von  $k$  der größte Teil des in der Mitte des Rohrquerschnittes aufsteigenden Stromes in der breiten Randzone niedriger Strömungsgeschwindigkeit wieder zurückfließen kann. Dieser Rückstrom kann noch einen Teil der in den Rohrquerschnitten auftretenden  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte kompensieren. Mit größer werdendem  $k$  wird die Grenzschicht mit geringer Strömungsgeschwindigkeit immer dünner. Rückströme können nun nur über die Stellen fließen, an denen das Magnetfeld nur noch gering ist. Diese Rückströme haben daher keine kompensierende Wirkung mehr. Dies bedeutet eine relative Zunahme der  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte. Die Überlagerung beider Effekte könnte also zu einem Zwischenminimum führen. Im Falle gut leitender Rohrwände hingegen würde fast der gesamte Rückstrom durch die Rohrwände fließen, weshalb der beschriebene zweite Effekt überdeckt würde. Dies zeigt auch Fig. 6, in welcher kein Zwischenminimum auftaucht.

C. ANWENDUNG AUF EINEN REALEN FALL

1. Beschreibung der Rohranordnung für ein gegebenes Blanket

Es soll in diesem Kapitel untersucht werden, welche Druckdifferenz sich in Rohrsystemen aufbaut, welche sich im Blanket eines torusförmigen Fusionsreaktors befinden und den dort herrschenden Magnetfeldern ausgesetzt sind (siehe Fig. 11).

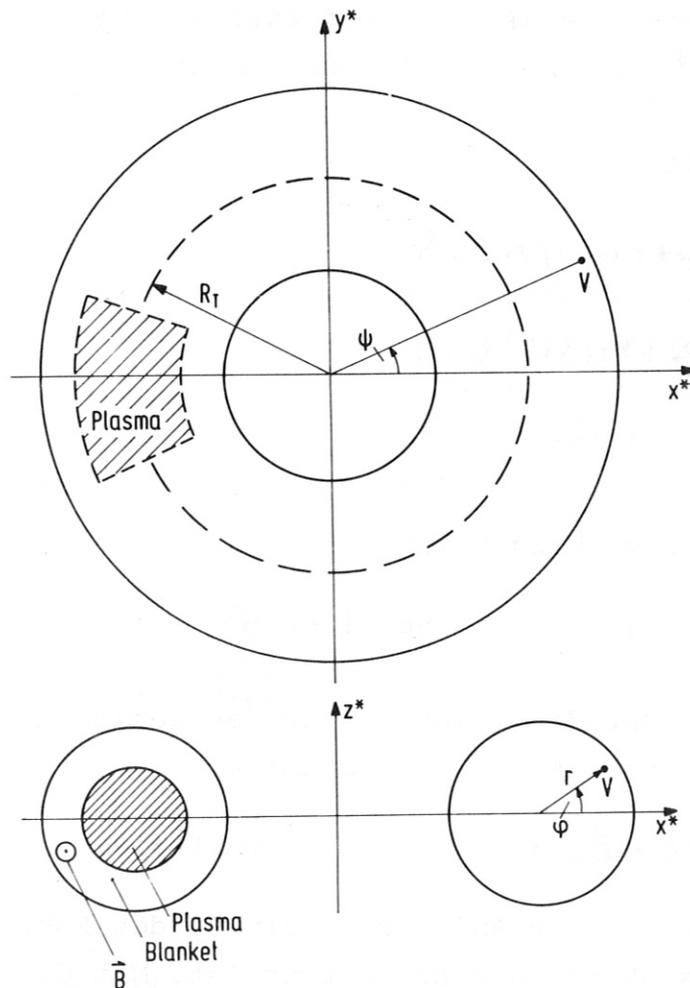


Fig. 11

Dabei wird die Geometrie der als gerade angenommenen Rohre durch deren Anfangs- und Endkoordinaten vorgegeben. Eingabeparameter sind  $(\psi_1, \psi_1, r_1)$ ,  $(\psi_2, \psi_2, r_2)$ ,

$$\begin{array}{l} R_i \quad , \quad R_a, \\ \sigma_{Li} \quad , \quad \sigma_w. \end{array}$$

Als bekannt vorausgesetzt ist der große Torusradius  $R_T$ .

Als konstant angesehen werden  $R_i, R_a, \sigma_i, \sigma_w, \eta_{Li}, S_{Li}$ .  
Die Strömung des Lithiums im Rohr sei stationär.

Zur Ermittlung der Druckverluste im Rohr müssen erst die Verhältnisse im Torus auf den in Kapitel 3. behandelten Fall übertragen werden.

Es erscheint am günstigsten, für den Fall gerader Rohrleitungen eine Koordinatentransformation von den Toruskordinaten  $(\psi, \varphi, r)$  auf kartesische Koordinaten  $(x^*, y^*, z^*)$  nach Fig. 11 vorzunehmen.

Dann gilt

$$\begin{aligned}x^* &= (R_T + r \cos \varphi) \cos \psi \\y^* &= (R_T + r \cos \varphi) \sin \psi \\z^* &= r \sin \varphi\end{aligned} \quad (1)$$

Aus den zwei Eingabevektoren

$$(\psi_1, \varphi_1, r_1) \quad \text{und} \quad (\psi_2, \varphi_2, r_2)$$

wird die Geradengleichung für das gerade Rohr in kartesischen Koordinaten mit Parameter  $x$

$$\vec{V}(x) = \vec{V}_1 + \vec{e}_{xL} \cdot x \quad \text{ermittelt,}$$

wobei  $\vec{V}_1$  die Anfangskoordinate des Rohrs und  $\vec{e}_{xL}$  der Einheitsvektor in Rohrrichtung ist. Mit Gleichung (1) bekommen wir für Gl. (2) in Komponentendarstellung

$$\begin{aligned}x^*(x) &= x_1^* + \frac{x_2^* - x_1^*}{L} x, \\y^*(x) &= y_1^* + \frac{y_2^* - y_1^*}{L} x, \\z^*(x) &= z_1^* + \frac{z_2^* - z_1^*}{L} x.\end{aligned} \quad (3)$$

mit der Rohrlänge XL

$$XL = \sqrt{(x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2 + (z_2^* - z_1^*)^2} \quad (4)$$

Das Rohr ist einem Magnetfeld im Torus ausgesetzt, welches allgemein durch

$$\vec{B}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} B_{x^*}(x^*, y^*, z^*) \\ B_{y^*}(x^*, y^*, z^*) \\ B_{z^*}(x^*, y^*, z^*) \end{pmatrix} \quad (5)$$

gegeben ist.

Dieses Magnetfeld muß nun in die kartesischen Rohrkoordinaten (x, y, z) von Kapitel B transformiert werden. Nach den Ausführungen der letzten Kapitel genügen zur Bestimmung der Verluste schon die Komponenten  $B_y(x)$  und  $B_z(x)$ . Es sei hier nochmals betont, daß eine eventuelle Rotation des Lithiums im Rohr bei verdrehtem äußeren Magnetfeld nicht berücksichtigt wurde und daß der Rohrdurchmesser ausreichend gering sein muß ( $\frac{dB}{dr} R_i \ll B$ ).

Es werden die Rohrkoordinaten so definiert, daß

$$\vec{e}_x = \vec{e}_{xL}, \quad (6)$$

$$\vec{e}_y = (\vec{e}_{xL} \times \vec{B}(\vec{V}(x=0))) \cdot \frac{1}{|\vec{B}(\vec{V}(x=0))|}, \quad (7)$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_{xL} \times \vec{e}_y \quad (8)$$

gilt.

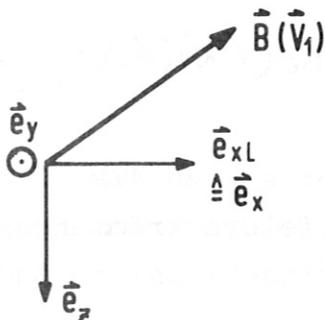


Fig. 12

In Einzelkomponenten zerlegt ergeben die Gln. (6-8):

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} x_2^* - x_1^* \\ y_2^* - y_1^* \\ z_2^* - z_1^* \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{xL} \quad (9)$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} (\vec{e}_x)_y^* B_{z^*}(\vec{v}_1) - (\vec{e}_x)_{z^*} B_{y^*}(\vec{v}_1) \\ (\vec{e}_x)_{z^*} B_{x^*}(\vec{v}_1) - (\vec{e}_x)_{x^*} B_{z^*}(\vec{v}_1) \\ (\vec{e}_x)_{x^*} B_{y^*}(\vec{v}_1) - (\vec{e}_x)_y^* B_{x^*}(\vec{v}_1) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|\vec{B}(\vec{v}_1)|} \quad (10)$$

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} (\vec{e}_x)_y^* (\vec{e}_y)_{z^*} - (\vec{e}_x)_{z^*} (\vec{e}_y)_y^* \\ (\vec{e}_x)_{z^*} (\vec{e}_y)_{x^*} - (\vec{e}_x)_{x^*} (\vec{e}_y)_{z^*} \\ (\vec{e}_x)_{x^*} (\vec{e}_y)_y^* - (\vec{e}_x)_y^* (\vec{e}_y)_{x^*} \end{pmatrix} \quad (11)$$

mit  $|\vec{B}(\vec{v}_1)| = \sqrt{B_{x^*}^2(\vec{v}_1) + B_{y^*}^2(\vec{v}_1) + B_{z^*}^2(\vec{v}_1)}$  (12)

Nun muß noch  $\vec{B}(\vec{v}(x))$  in die Komponenten  $B_y(x)$  und  $B_z(x)$  senkrecht zu  $\vec{e}_{xL}$  zerlegt werden. Dies geschieht durch das skalare Vektorprodukt:

$$B_y(x) = \vec{B}(\vec{v}(x)) \cdot \vec{e}_y \quad (13)$$

$$B_z(x) = \vec{B}(\vec{v}(x)) \cdot \vec{e}_z \quad (14)$$

Damit gilt im Koordinatensystem des Rohres:

$$B_y(x) = B_{x^*}(\vec{v}(x))(\vec{e}_y)_{x^*} + B_{y^*}(\vec{v}(x))(\vec{e}_y)_{y^*} + B_{z^*}(\vec{v}(x))(\vec{e}_y)_{z^*} \quad (15)$$

$$B_z(x) = B_{x^*}(\vec{v}(x))(\vec{e}_z)_{x^*} + B_{y^*}(\vec{v}(x))(\vec{e}_z)_{y^*} + B_{z^*}(\vec{v}(x))(\vec{e}_z)_{z^*} \quad (16)$$

In erster Näherung herrscht im Blanket ein zu  $1/R$  proportionales Magnetfeld. Die Magnetfeldverkrümmungen in der Nähe der Einzelspulen seien vernachlässigt. Damit gilt:

$$\vec{B}(\vec{v}) = \frac{(BR)}{\sqrt{x^{*2} + y^{*2}}} \vec{e}_\psi \quad (17)$$

mit  $\vec{e}_\psi = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$

und  $\psi = \arctan \frac{y^*}{x^*}. \quad (19)$

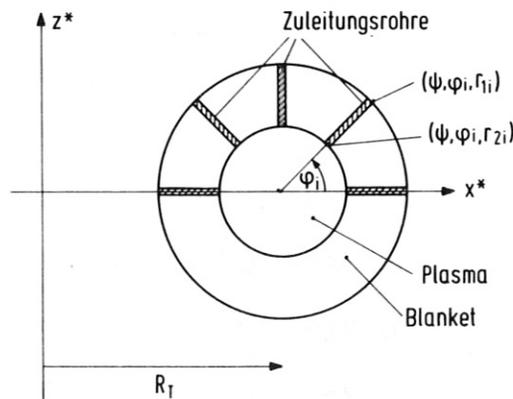
Mit den Gln. (1), (3), (4), (9-12), (15-19) kann nun die Transformation der Eingabeparameter

$$(\psi_1, \psi_i, r_i), (\psi_2, \psi_2, r_2), R_T, (BR)$$

auf die in Kapitel B definierten Rohrparameter XL,  $B_y(x), B_z(x)$  erfolgen.

Es soll nun numerisch untersucht werden, welchen Einfluß der Neigungswinkel von Lithiumzuleitungsrohren nach Fig. 13 auf die MHD-Verluste in diesen Rohren hat.

Fig. 13



## 2. Ergebnisse

Dazu wurde ein Computer-Programm erstellt, welches die Formeln von Kapitel B auswertet. (Das Flußdiagramm wird im Anhang erläutert).

Es waren folgende Eingabeparameter vorgegeben:

Torusradius	$R_T = 1560 \text{ cm}$
Produkt aus Radius und Magnetfeld	$(BR) = 5570 \text{ T} \cdot \text{cm}$
Rohrrinnenradius	$R_i = 25 \text{ cm}$
Rohrwandstärke	$d = 0.25 \text{ cm}$

Massendurchsatz

$$\dot{m} = 250 \text{ g/s}$$

Lithium:

-Dichte

$$\rho_{Li} = 0.5 \text{ g/cm}^3$$

-dyn. Zähigkeit

$$\eta_{Li} = 0.0041 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$$

- spez. el. Widerstand

$$\rho_{el, Li} = 31.5 \mu\Omega \text{ cm}$$

Wandmaterial mit dem spez. el. Widerstand

$$\rho_{el, w} = 105 \mu\Omega \text{ cm}$$

Lage der Rohre:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = 830 \text{ cm} \quad \varphi_1 = 0 \\ r_2 = 650 \text{ cm} \quad \varphi_2 = 0 \end{array} \right\} \varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 180^\circ$$

Es ergaben sich die folgenden Werte (siehe Fig. 14):

$\varphi$ (Grad)	$P_{\text{ow}}$ (Watt)	$\Delta p$ (Pa)	$\langle H \rangle$	
0	$0.129 \cdot 10^3$	$0.258 \cdot 10^6$	5545	
10	$0.130 \cdot 10^3$	$0.261 \cdot 10^6$	5569	
20	$0.134 \cdot 10^3$	$0.268 \cdot 10^6$	5644	
30	$0.140 \cdot 10^3$	$0.280 \cdot 10^6$	5772	
40	$0.149 \cdot 10^3$	$0.298 \cdot 10^6$	5955	
50	$0.161 \cdot 10^3$	$0.322 \cdot 10^6$	6196	
60	$0.177 \cdot 10^3$	$0.355 \cdot 10^6$	6500	
70	$0.198 \cdot 10^3$	$0.397 \cdot 10^6$	6875	
80	$0.225 \cdot 10^3$	$0.450 \cdot 10^6$	7325	
90	$0.259 \cdot 10^3$	$0.517 \cdot 10^6$	7854	
100	$0.300 \cdot 10^3$	$0.601 \cdot 10^6$	8467	
110	$0.352 \cdot 10^3$	$0.703 \cdot 10^6$	9160	
120	$0.413 \cdot 10^3$	$0.826 \cdot 10^6$	9922	
130	$0.482 \cdot 10^3$	$0.963 \cdot 10^6$	10728	
140	$0.557 \cdot 10^3$	$0.111 \cdot 10^7$	11538	
150	$0.632 \cdot 10^3$	$0.126 \cdot 10^7$	12290	
160	$0.696 \cdot 10^3$	$0.139 \cdot 10^7$	12909	
170	$0.742 \cdot 10^3$	$0.148 \cdot 10^7$	13321	
180	$0.758 \cdot 10^3$	$0.151 \cdot 10^7$	13466	
L = 1.8 m	$R_e = 7764$	$R_m = 0.025$	$C = 0.03$	$\langle u \rangle = 0.25 \text{ m/s}$

Mit den gleichen Eingabedaten wie oben wurde die Abhängigkeit der Verluste vom Winkel  $\psi$  untersucht.

Es war

$$\begin{array}{ll} \psi_1 = 0 \text{ Grad} & \psi_2 = 0, 5, 10, \dots, 45 \text{ Grad} \\ \psi_1 = 0 \text{ Grad} & \psi_2 = 0 \text{ Grad} \\ R_1 = 6.5 \text{ m} & R_2 = 8.3 \text{ m} \end{array}$$

Dabei ergaben sich die folgenden Werte (siehe Fig. 15):

$\psi_2$ (Grad)	$P_{ow}$ (Watt)	$\Delta p$ (Pa)	L (m)	$\langle H \rangle$
0	$0.129 \cdot 10^3$	$0.258 \cdot 10^6$	1.8	5545
5	$0.317 \cdot 10^2$	$0.635 \cdot 10^5$	2.7	2231
10	$0.389 \cdot 10^1$	$0.778 \cdot 10^4$	4.4	593
* 15	$0.192 \cdot 10^1$	$0.384 \cdot 10^4$	6.2	137
* 20	$0.205 \cdot 10^{-1}$	$0.411 \cdot 10^2$	8.2	11
* 25	$0.247 \cdot 10^{-1}$	$0.495 \cdot 10^2$	11	10
* 30	$0.112 \cdot 10^1$	$0.223 \cdot 10^4$	12	75
35	$0.148 \cdot 10^1$	$0.296 \cdot 10^4$	14	181
40	$0.431 \cdot 10^1$	$0.862 \cdot 10^4$	16	318
45	$0.104 \cdot 10^2$	$0.208 \cdot 10^5$	18	479

$$R_m = 0.025$$

$$Re = 7763$$

$$c = 0.03$$

$$\langle v \rangle = 0.255 \text{ m/s}$$

(\*  $H < 150$ , es wird parabolische Geschw. Verteilung angenommen)

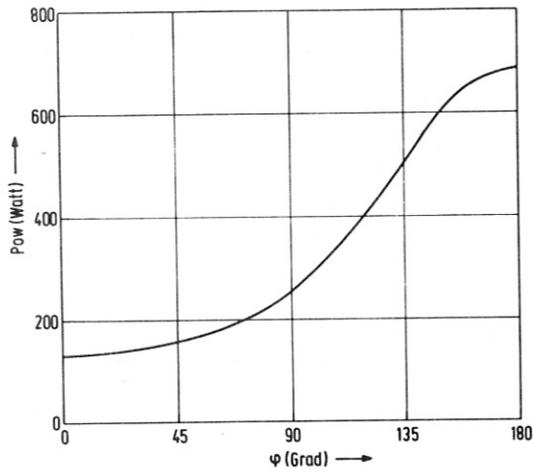


Fig. 14

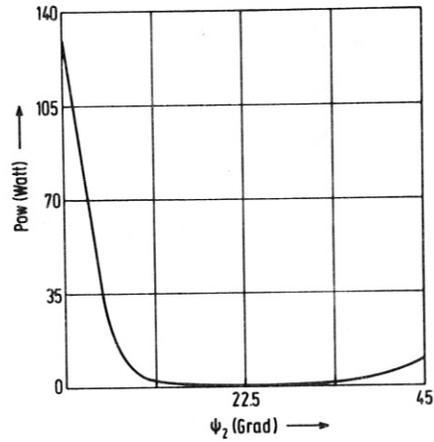


Fig. 15

Die Kurven zeigen, in welchem starkem Maße die MHD-Verluste von der Rohrführung im Blanket abhängen. Mit einer Führung der Rohre möglichst parallel zu den toroidalen Magnetfeldern können Verluste bzw. Druckdifferenzen um mehrere Größenordnungen reduziert werden.

D. ANHANG

Die in Kapitel C ermittelten Ergebnisse wurden numerisch mit einem Computerprogramm nach Fig. 16 berechnet.

Es sollen zunächst die benötigten Eingabedaten kurz charakterisiert werden

1. Eingabe-Daten des Computer-Programms

Karte Nr. 1 (6 F 10.4)

CXI1 :  $\varphi_1$  (Radian)  
PHI1 :  $\varphi_1$  (Radian) Koordinaten-Rohranfang  
R1 :  $R_1$  (m)

CXI2 :  $\varphi_2$  (Radian)  
PHI2 :  $\varphi_2$  (Radian) Koordinaten-Rohrende  
R2 :  $R_2$  (m)

Karte Nr. 2 (4 E 12.5)

RI :  $R_i$  (m) Rohrrinnenradius  
D :  $d$  (m) Rohrwanddicke  
XVX :  $\langle v \rangle$  (m/s) mittlere Strömungsgeschwindigkeit  
DMDT :  $\dot{m}$  (kg/s) Massendurchsatz

Es genügt, wahlweise nur DMDT oder XVX einzugeben; der unbestimmte andere Werte ist Null zu setzen.

Karte Nr. 3 (4 E 12.5)

ETA :  $\eta$  ( $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ ) Zähigkeit des Lithiums  
RO :  $\rho$  ( $\text{kg m}^{-3}$ ) Dichte des Lithiums  
SLI :  $\sigma_i$  ( $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ ) el. Leitfähigkeit des Lithiums  
SW :  $\sigma_w$  ( $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ ) el. Leitfähigkeit der Rohrwand

Karte Nr. 4 (2 E 12.5)

RT :  $R_T$  (m) großer Torusradius  
BRT : (BR) (Tm) Produkt aus Magnetfeld und Torusradius

Karte Nr. 5 (E 12.5, 3J5)

ERRCVB : Genauigkeitsschranke für Bildung der  
Fourierkoeffizienten ( $F_{nmax}/F_1 < ERRCVB$ )  
IN : = 0 Mittelung des Magnetfeldes,  
keine Fourier-Entwicklung  
= 1 Fourierentwicklung bis  $F_{nmax}$   
IREK : = - 1 Grenzwert  $k \rightarrow \infty$  durch Grenzübergang  
= 0 Grenzwert  $k \rightarrow \infty$  durch Bessel-Ansatz  
= 1 Bestimmung von k durch Methode des  
konstanten Druckgradienten (MKDG)  
= 3 Näherungsrechnung und Mittelung des  
Magnetfeldverlaufs  
= 2 Bestimmung von k durch Rekursion nach  
der Methode der minimalen Entropie-  
produktion  
IERROR : = 0 Ausgabe interner Kontrollparameter  
= 1 Unterdrückung der Ausgabe

2. Programmbeschreibung

Das Hauptprogramm setzt sich aus 9 Unterprogrammen zusammen, welche kurz charakterisiert werden sollen:

BF : Unterprogramm zur Berechnung der drei Komponenten  
 $B_x^*, B_y^*, B_z^*$  des Magnetfeldes im Torus  
FOUR : Unterprogramm zur Berechnung der Fourier-  
koeffizienten der Magnetfeldkomponenten senk-  
recht zur Rohrachse

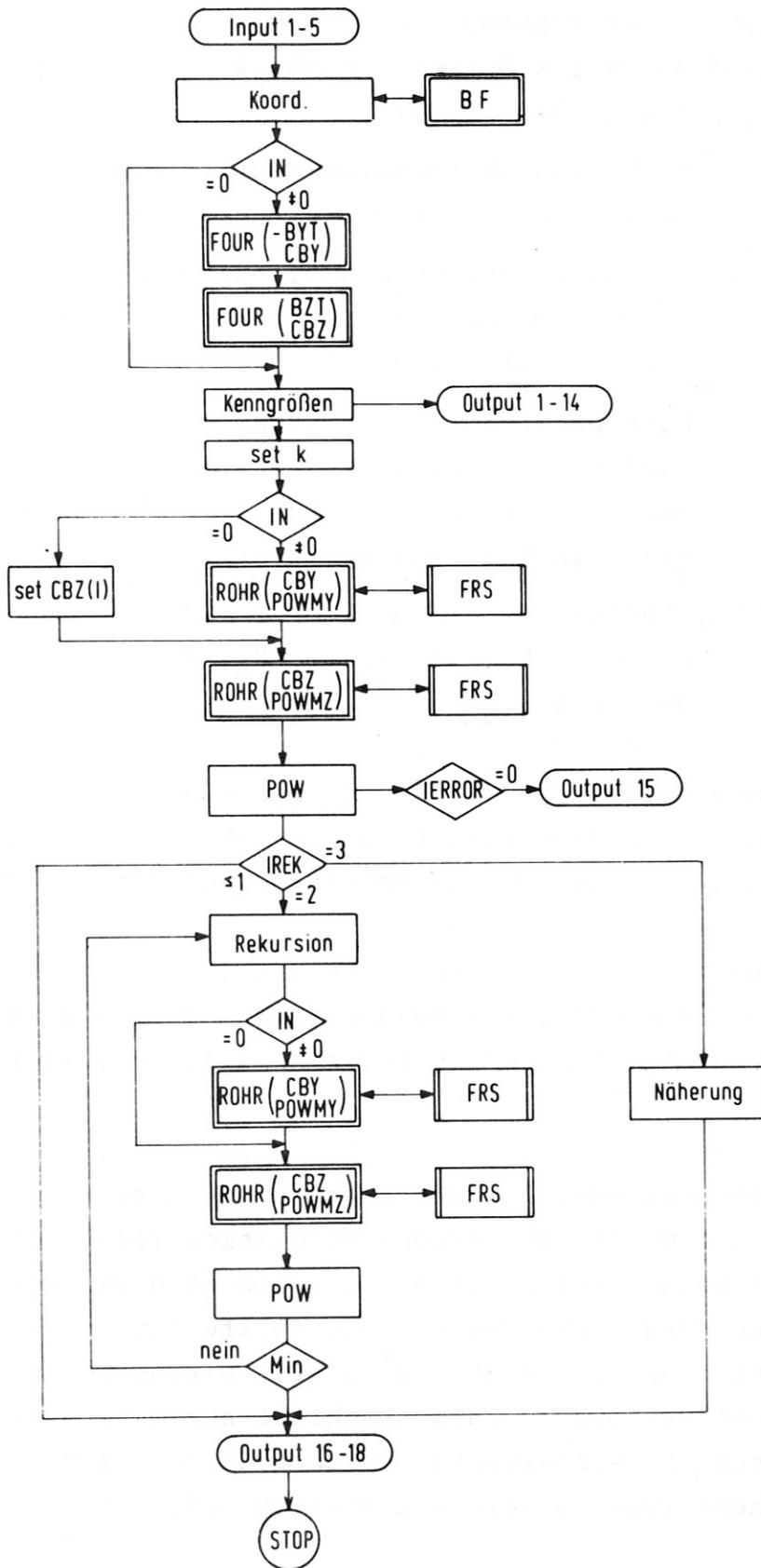


Fig. 16

- ROHR : Unterprogramm zur Berechnung der Verluste durch  $j \times B$ -Kräfte abhängig vom Parameter  $k$  analog Gl. (3.164)
- DCADRE : Funktionsunterprogramm zur Integration mit variabler Schrittweite, aufgerufen von ROHR
- FRS : Funktionsunterprogramm, aufgerufen von DCADRE, welches den Integranden analog Gl. (3.164) liefert
- FELD : Unterprogramm, aufgerufen von FRS, welches analog den Gln. (3.166 - 3.180) die  $r$ -abhängigen Komponenten des sich im Rohr aufbauenden elektrischen Feldes liefert.
- DIO, DINUE, DBESK: Unterprogramme zur Berechnung der Besselfunktionen  $I_0, I, K_0, K_1$ , aufgerufen von FELD.

Das Hauptprogramm (MAIN) weist vier verschiedene Möglichkeiten auf, die MHD-Verluste zu berechnen. Der gewünschte Lösungsweg wird mit dem Eingabeparameter IREK gewählt.

Die größte, aber schnellste Version ist die Näherungsrechnung (IREK = 3), welche über das Magnetfeld längs des Rohres mittelt und die Formeln (3.184 - 3.186) verwendet.

Die genaueste, aber längste Version ist die, welche der Methode der minimalen Entropieproduktion folgt (IREK = 2). Zur Ermittlung des Leistungsminimums wird ein Rekursionsverfahren verwendet, dessen Intervallteilung nach dem "Goldenen Schnitt" gewählt wird [4]. Dieses Verfahren ermöglicht es, pro Iterationsschritt nur eine Berechnung eines neuen Funktionswertes durchzuführen. Dadurch wird der Rechenaufwand soweit wie möglich reduziert.

Die beiden Möglichkeiten IREK = 0 und IREK = -1 lassen es zu, eine Grenzwertbestimmung für ein kastenförmiges Geschwindigkeitsprofil durchzuführen, wobei die Lösung wahlweise über den direkten Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  oder über einen Bessel-Ansatz analog Gl. (3.92 - 3.95) erfolgen kann.

Wenn nicht allzu große Magnetfeldgradienten vorliegen, ist der Lösungsweg nach der Methode des konstanten Druckgradienten am günstigsten, denn er verbindet hohe Genauigkeit mit relativ kurzer Rechenzeit (IREK = 1).

Für mehr qualitative Parameterstudien ist es möglich, durch Mittelung des Magnetfeldverlaufs entlang des Rohres (IN = 0) die Rechenzeit wesentlich zu verkürzen, da in diesem Fall keine Fourierentwicklung stattfindet und die Berechnung aller y-Komponenten übersprungen wird.

### 3. Vergleich der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten des Programms

Zum Vergleich der möglichen Lösungswege wurden mit den Eingabedaten von Kapitel C und den Rohrkoordinaten

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = 0 \text{ rad} & \varphi_2 = 0 \text{ rad} \\ \varphi_1 = 3.14 \text{ rad} & \varphi_2 = 3.14 \text{ rad} \\ R_1 = 8.3 \text{ m} & R_2 = 6.5 \text{ m} \end{array}$$

die Verluste nach allen im Programm vorgesehenen Berechnungsmethoden ermittelt. Es ergaben sich für

IN = 0	IREK = -1	P = 0.7551 · 10 <sup>3</sup>	T = 3.95''
IN = 1	IREK = -1	P = 0.7571 · 10 <sup>3</sup>	T = 14.85''
IN = 0	IREK = 0	P = 0.7551 · 10 <sup>3</sup>	T = 3.99''
IN = 1	IREK = 0	P = 0.7571 · 10 <sup>3</sup>	T = 15.21''
IN = 0	IREK = 1	P = 0.7580 · 10 <sup>3</sup>	T = 4.28''
IN = 1	IREK = 1	P = 0.7583 · 10 <sup>3</sup>	T = 11.19''
IN = 0	IREK = 2	P = 0.7577 · 10 <sup>3</sup>	T = 4.40''
IN = 1	IREK = 2	P = 0.7580 · 10 <sup>3</sup>	T = 1' 40.70''
IN = 0	IREK = 3		
IN = 1	IREK = 3	P = 0.7569 · 10 <sup>3</sup>	T = 4.07''

Dabei sind

P : Rohrverluste in Watt,

T : Gesamtrechenzeit

4. FORTRAN-Quellenprogramm

\*GET:GERT.MONIKA

LAST MODIFIED 26.10.77

```

100 /*CONTROL REST=Y,LNES=5
200 // EXEC FORTRANH
300 //C.SYSIN DD *
400 C SEGMENT MONIKA -----
500 C
600 C MAIN
700 REAL MUE
800 REAL*8 BYT(2001),BZT(2001),CBY(101),CBZ(101) ,
900 >CXL,CRI,CRA,CSLI,CSW,CCVBO,CCVB
1000 DIMENSION PK(4),INTK(4)
1100 COMMON/C/CXL,CRI,CRA,CSLI,CSW,CCVBO,CCVB(100),KC/PAR/IMAX,IER,NMAX
1200 COMMON/CBF/BR0
1300 C
1400 READ(5,999) CXI1,PHI1,R1,CXI2,PHI2,R2
1500 READ(5,998) RI,D,XVX,DMDT
1600 READ(5,997) ETA,RO,SLI,SW
1700 READ(5,996) RT,BRT
1800 READ(5,995) ERRCVB,IN,IREK,IERROR
1900 C INTERNE DATEN
2000 PI=3.141592654
2100 MUE=1.257E-6
2200 RERR=1.E-2
2300 AERR=0.
2400 BRO=BRT
2500 RA=RI+D
2600 IF(XVX.EQ.0.) XVX=DMDT/(RI*RI*PI*RO)
2700 IF(DMDT.EQ.0.) DMDT=XVX*RI*RI*PI*RO
2800 INMAX=IN
2900 IF(IREK.GE.3) INMAX=0
3000 IF(INMAX.EQ.0) NMAX=0
3100 C
3200 C
3300 C DO 55 ICXI=1,11
3400 C
3500 C
3600 C KOORDINATENTRANSFORMATION
3700 XS1=(RT+R1*COS(PHI1))*COS(CXI1)
3800 XS2=(RT+R2*COS(PHI2))*COS(CXI2)
3900 YS1=(RT+R1*COS(PHI1))*SIN(CXI1)
4000 YS2=(RT+R2*COS(PHI2))*SIN(CXI2)
4100 ZS1=R1*SIN(PHI1)
4200 ZS2=R2*SIN(PHI2)
4300 XL=SQRT((XS2-XS1)**2+(YS2-YS1)**2+(ZS2-ZS1)**2)
4400 C
4500 EXXS=(XS2-XS1)/XL
4600 EXYS=(YS2-YS1)/XL
4700 EXZS=(ZS2-ZS1)/XL
4800 C
4900 CALL BF(BV1XS,BV1YS,BV1ZS,XS1,YS1,ZS1)
5000 XBV1=SQRT(BV1XS**2+BV1YS**2+BV1ZS**2)
5100 C
5200 EYXS=(EXYS*BV1ZS-EXZS*BV1YS)/XBV1
5300 EYYS=(EXZS*BV1XS-EXXS*BV1ZS)/XBV1
5400 EYZS=(EXXS*BV1YS-EXYS*BV1XS)/XBV1
5500 C
5600 EZXS=EXYS*EYZS-EXZS*EYYS
5700 EZYS=EXZS*EYXS-EXXS*EYZS

```

```
5800      EZZS=EXXS*EYYS-EXYS*EYXS
5900 C
6000      X=0.
6100      XBX=0.
6200      IXMAX=1001
6300      IF(INMAX.EQ.0) IXMAX=101
6400      DO 1 IX=1,IXMAX
6500      XS=XS1+EXXS*X
6600      YS=YS1+EXYS*X
6700      ZS=ZS1+EXZS*X
6800      CALL BF(BXS,BYS,BZS,XS,YS,ZS)
6900      BYT(IX)=DBLE ((BXS*EYXS+BYS*EYYS+BZS*EYZS)*(-1.))
7000      BZT(IX)=DBLE (BXS*EZXS+BYS*EZYS+BZS*EZZS)
7100      XBX=XBX+SNGL(DSQRT(BYT(IX)**2+BZT(IX)**2))
7200      IXX=IX-1
7300      BYT(2001-IXX)=BYT(IX)
7400      BZT(2001-IXX)=BZT(IX)
7500      1 CONTINUE
7600      XBX=XBX/IXMAX
7700 C
7800      IF(INMAX.EQ.0) GOTO 2
7900      IF(CX11.NE.CX12.AND.PHI1.NE.PHI2) CALL FOUR(BYT,1000,100,CBY,IERF)
8000      CALL FOUR(BZT,1000,100,CBZ,IERF)
8100      2 CCNTINUE
8200 C
8300 C      KENNGRCESSEN
8400      H=RI*XBX*SQRT(SLI/ETA)
8500      RM=RI*XVX*SLI*MUE
8600      RE=RI*XVX*RO/ETA
8700      C=SW*(RA-RI)/(SLI*RI)
8800 C
8900 C      DATA CUT1
9000      WRITE(7,101) RT,BRT
9100      WRITE(7,102) CX11,PHI1,R1
9200      WRITE(7,103) CX12,PHI2,R2
9300      WRITE(7,104) SLI,SW,ETA,RO
9400      WRITE(7,105) XL,RI,RA
9500      WRITE(7,106) XVX,DMDT
9600      WRITE(7,100)
9700      IF(IN.EQ.0) WRITE(7,107)
9800      IF(IREK.LT.0) WRITE(7,108)
9900      IF(IREK.EQ.0) WRITE(7,109)
10000     IF(IREK.EQ.1) WRITE(7,110)
10100     IF(IREK.EQ.2) WRITE(7,111)
10200     IF(IREK.GE.3) WRITE(7,112)
10300     WRITE(7,100)
10400     WRITE(7,113) H
10500     WRITE(7,114) RM
10600     WRITE(7,115) RE
10700     WRITE(7,116) C
10800     WRITE(7,100)
10900 C
11000 C      SET K
11100     K=IFIX(H/1.4142-1.)
11200     IF(K.LT.100) WRITE(7,117)
11300     IF(K.LT.100) K=1
11400     IF(K.LT.100 .AND. IREK.EQ.3) WRITE(7,118)
```

```
11500      IF(K.LT.100 .AND. IREK.EQ.3) IREK=1
11600      KOUT=K
11700 C
11800      IF(IREK.GE.3) GOTO 98
11900      IF(IREK.LT.1) K=IREK
12000      IF(INMAX.EQ.0 .OR. CXI1.EQ.CXI2 .OR. PHI1.EQ.PHI2) GOTO 3
12100      CALL ROHR(XL,RI,RA,XVX,SLI,SW,CBY,POWMY,
12200 >AERR,RERR,ERRCVB,IER1Y,ERRORY,IER2Y,INMAX,K)
12300      GOTO 4
12400 3 POWMY=0.
12500      IF(INMAX.EQ.0) CBZ(1)=DBLE(XBX)
12600      IER2Y=0
12700      IER1Y=0
12800      ERRORY=0.
12900 4 CALL ROHR(XL,RI,RA,XVX,SLI,SW,CBZ,POWMZ,
13000 >AERR,RERR,ERRCVB,IER1Z,ERRORZ,IER2Z,INMAX,K)
13100 C      PGES
13200      POWR=0.DO
13300      IF(K.GT.0) POWR=ETA*XL*XVX**2*PI*((K+3.)**2/(K+1.))
13400      POW=POWMY+POWMZ+POWR
13500      DELTAP=POW/(RI*RI*PI*XVX)
13600 C
13700 C      DATA OUT2
13800      IF(IERROR.EQ.0) WRITE(7,200)
13900      IF(IERROR.EQ.0) WRITE(7,201) IER1Y,IER2Y,IER2Y,IER2Z,ERRORY,ERRORZ
14000 C
14100      IF(IREK.LE.1) GOTO 99
14200 C      REKURSION
14300      K10=10
14400      K40=IFIX(K*1.5)
14500      IF(K40.LT.100) GOTO 99
14600      EPSK=100.
14700      TETA=(SQRT(5.)-1.)/2.
14800      K20=K40-IFIX(TETA*(K40-K10))
14900      K30=K10+IFIX(TETA*(K40-K10))
15000      INTK(1)=K10
15100      INTK(2)=K20
15200      INTK(3)=K30
15300      INTK(4)=K40
15400 C
15500      DO 5 I=1,4
15600      INTKI=INTK(I)
15700      IF(INMAX.EQ.0 .OR. CXI1.EQ.CXI2 .OR. PHI1.EQ.PHI2) GOTO 6
15800      CALL ROHR(XL,RI,RA,XVX,SLI,SW,CBY,POWMY,
15900 >AERR,RERR,ERRCVB,IER1Y,ERRORY,IER2Y,INMAX,INTKI)
16000      GOTO 7
16100 6 POWMY=0.
16200 7 CALL ROHR(XL,RI,RA,XVX,SLI,SW,CBZ,POWMZ,
16300 >AERR,RERR,ERRCVB,IER1Z,ERRORZ,IER2Z,INMAX,INTKI)
16400      PK(I)=POWMY+POWMZ+ETA*XL*XVX**2*PI*((INTKI+3.)**2/(INTKI+1.))
16500 5 CONTINUE
16600 C
16700      PK10=PK(1)
16800      PK20=PK(2)
16900      PK30=PK(3)
17000      PK40=PK(4)
17100      JREK=0
```

```

17200 C
17300 14 CONTINUE
17400 IF(PK20.LT.PK30) GOTO 8
17500 K11=K20
17600 K21=K30
17700 K41=K40
17800 K31=K11+IFIX(TETA*(K41-K11))
17900 C
18000 PK11=PK20
18100 PK21=PK30
18200 PK41=PK40
18300 IF(INMAX.EQ.0 .OR. CXI1.EQ.CXI2 .OR. PHI1.EQ.PHI2) GOTO 9
18400 CALL ROHR(XL,RI,RA,XVX,SLI,SW,CBY,POWMY,
18500 >AERR,RERR,ERRCVB,IERY,ERRORY,IERY,INMAX,K31)
18600 GOTO 10
18700 9 POWMY=0.
18800 10 CALL ROHR(XL,RI,RA,XVX,SLI,SW,CBZ,POWMZ,
18900 >AERR,RERR,ERRCVB,IERY,ERRORZ,IERY,INMAX,K31)
19000 PK31=POWMY+POWMZ+ETA*XL*XVX**2*PI*((K31+3.)**2/(K31+1.))
19100 GOTO 11
19200 C
19300 8 K11=K10
19400 K31=K20
19500 K41=K30
19600 K21=K41-IFIX(TETA*(K41-K11))
19700 C
19800 PK11=PK10
19900 PK31=PK20
20000 PK41=PK30
20100 IF(INMAX.EQ.0 .OR. CXI1.EQ.CXI2 .OR. PHI1.EQ.PHI2) GOTO 12
20200 CALL ROHR(XL,RI,RA,XVX,SLI,SW,CBY,POWMY,
20300 >AERR,RERR,ERRCVB,IERY,ERRORY,IERY,INMAX,K21)
20400 GOTO 13
20500 12 POWMY=0.
20600 13 CALL ROHR(XL,RI,RA,XVX,SLI,SW,CBZ,POWMZ,
20700 >AERR,RERR,ERRCVB,IERY,ERRORZ,IERY,INMAX,K21)
20800 PK21=POWMY+POWMZ+ETA*XL*XVX**2*PI*((K21+3.)**2/(K21+1.))
20900 C
21000 11 K10=K11
21100 K20=K21
21200 K30=K31
21300 K40=K41
21400 PK10=PK11
21500 PK20=PK21
21600 PK30=PK31
21700 PK40=PK41
21800 JREK=JREK+1
21900 IF((K41-K11).GT.EPSK .AND. JREK.LT.10) GOTO 14
22000 C
22100 POW=AMIN1(PK11,PK21,PK31,PK41)
22200 DELTAP=POW/(RI*RI*PI*XVX)
22300 KOUT=IFIX((K11+K41)/2.)
22400 GOTO 99
22500 C
22600 C NAEHERUNG
22700 98 WERT=C/(C+(RA**2+RI**2)/(RA*RI+RI**2))
22800 DELTAP= ETA*XVX/(RI*RI)*(H/SQRT(2.)+H**2*WERT)*XL

```

```

22900      POW=DELTAP*RI*RI*PI*XVX
23000 C
23100      99 CONTINUE
23200 C      DATA OUT4
23300      WRITE(7,100)
23400      WRITE(7,400) POW
23500      WRITE(7,401) DELTAP
23600      WRITE(7,402) KOUT
23700      WRITE(7,403)
23800      WRITE(7,100)
23900      WRITE(7,100)
24000      WRITE(7,100)
24100 C
24200 C      CXI2=CXI2+3.141592/180.*5.
24300 C      55 CONTINUE
24400 C
24500 C
24600      STOP
24700 C
24800      100 FORMAT(' ')
24900      999 FORMAT(2F10.2,F10.4,2F10.2,F10.4)
25000      998 FORMAT(4E12.5)
25100      997 FORMAT(4E12.5)
25200      996 FORMAT(2E12.5)
25300      995 FORMAT(E12.5,3I5)
25400      400 FORMAT(' POW=',E16.5)
25500      401 FORMAT(' DELTAP=',E13.6)
25600      402 FORMAT(' K=',I10)
25700      403 FORMAT(' ALLE GROESSEN IM MKSA-SYSTEM,WINKEL IN RADIAN')
25800      200 FORMAT(' INTERNE FEHLERINDIKATOREN')
25900      201 FORMAT(1X4I10,2E12.5)
26000      101 FORMAT(' RT=',E17.5,' BRT=',E15.5)
26100      102 FORMAT(' CXI1=',F15.5,' PHI1=',F14.5,' R1=',F16.5)
26200      103 FORMAT(' CXI2=',F15.5,' PHI2=',F14.5,' R2=',F16.5)
26300      104 FORMAT(' SLI=',E16.5,' SW=',E16.5,' ETA=',E15.5,' RO=',E16.5)
26400      105 FORMAT(' XL=',E17.5,' RI=',E16.5,' RA=',E16.5)
26500      106 FORMAT(' XVX=',E16.5,' DMDT=',E14.4)
26600      107 FORMAT(' BERECHNUNG UEBER MITTELWERT VON ABS(B)')
26700      108 FORMAT(' KEINE REKURSION, K->UNENDLICH,GRENZUEBERGANG')
26800      109 FORMAT(' KEINE REKURSION, K->UNENDLICH,BESSEL-ANSATZ')
26900      110 FORMAT(' KEINE REKURSION, K WIRD NACH MKDG GESETZT')
27000      111 FORMAT(' REKURSION NACH GOLDENEM SCHNITT')
27100      112 FORMAT(' KEINE REKURSION,NAEHERUNGSRECHNUNG')
27200      113 FORMAT(' H=',E18.5)
27300      114 FORMAT(' RM=',E17.5)
27400      115 FORMAT(' RE=',E17.5)
27500      116 FORMAT(' C=',E18.5)
27600      117 FORMAT(' H<150,ES WIRD PARABOLISCHE GESCHW.VERTEILUNG ANGENOMMEN,
27700      >K=1')
27800      118 FORMAT(' NAEHERUNGSRECHNUNG NICHT MEHR ANWENDBAR, RECHNUNG NACH
27900      >MKDG')
28000      END
28100 C
28200 C      SUBROUTINE BF(BX,BY,BZ,X,Y,Z) -----
28300 C      EIN: BRO (COMMON): PRODUKT AUS MAGNETFELD UND TORUSRADIUS
28400 C      X,Y,Z : AUFUNKTKOORDINATEN
28500 C      AUS: BX,BY,BZ : MAGNETFELDKOMPONENTEN AM AUFUNKT

```

```

28600 C
28700 C
28800 SUBROUTINE BF(BX,BY,BZ,X,Y,Z)
28900 COMMON/CBF/BRO
29000 IF(X.EQ.0. .AND. Y.GE.0.) CXI=3.141592/2.
29100 IF(X.EQ.0. .AND. Y.LT.0.) CXI=3.141592*3./2.
29200 IF(X.NE.0) CXI=ATAN(Y/X)
29300 R=SQRT(X**2+Y**2)
29400 BX=BRO/R*(-SIN(CXI))
29500 BY=BRO/R*COS(CXI)
29600 BZ=0.
29700 RETURN
29800 END
29900 C
30000 C SUBROUTINE ROHR -----
30100 C UP ZUR BERECHNUNG DER VERLUSTE DURCH J X B-KRAEFTE IN EINEM ROHR
30200 C EIN:XL: ROHRLAENGE
30300 C RI: ROHRINNENRADIUS
30400 C RA: ROHRAUSSENRADIUS
30500 C SLI : LEITFAEHIGKEIT DES LITHIUMS
30600 C SW : LEITFAEHIGKEIT DER ROHRWAND
30700 C CB : DOPPELTGENAU,FOURIERKOEFFIZIENTEN DES MAGNETFELDES
30800 C AERR: ABSOLUTE GENAUIGKEIT DES INTEGRALS DCADRE
30900 C RERR: RELATIVE GENAUIGKEIT DES INTEGRALS DCADRE
31000 C ERRCVB:ABBRUCHSKRITERIUM ZUR UEBERNAHME DER FOURIERKOEFF.
31100 C K: INTEGER,PARAMETER K ZUR KENNZEICHNUNG DES GESCHW.PROFILS
31200 C AUS:POWM:VERLUSTLEISTUNG DURCH J X B-KRAEFTE
31300 C IER1:INTEGER,KONTROLLPARAMETER VON UP FELD
31400 C IER2:INTEGER,KONTROLLPARAMETER VON UP DCADRE
31500 C
31600 SUBROUTINE ROHR(XL,RI,RA,XVX,SLI,SW,CB,POWM,
31700 >AERR,RERR,ERRCVB,IER1,ERROR,IER2,INMAX,K)
31800 REAL*8 CXL,CRI,CRA,CSLI,CSW,CCVBO,CCVB,CVBH1,CVBH2,CMAX1,CMAX2,
31900 >DRO,DRI,DAERR,DRER,DERROR,FRS,DCADRE,CB(1)
32000 EXTERNAL FRS
32100 COMMON/C/CXL,CRI,CRA,CSLI,CSW,CCVBO,CCVB(100),KC/PAR/IMAX,IER,NMAX
32200 C
32300 PI=3.141592654
32400 CXL=XL
32500 CRI=RI
32600 CRA=RA
32700 CSLI=SLI
32800 CSW=SW
32900 C
33000 VO=XVX
33100 IF(K.GT.0) VO=XVX*((K+3.)/(K+1.))
33200 KC=K
33300 C
33400 C UEBERNAHME DER FOURIERKOEFFIZIENTEN UND KONVERGENZTEST
33500 CCVBO=CB(1)*VO
33600 IF(INMAX.EQ.0) NMAX=0
33700 IF(INMAX.EQ.0) GOTO 1
33800 NMAX=100
33900 CVBH2=0.DO
34000 CCVB(1)=CB(2)*VO
34100 CCVB(2)=CB(3)*VO
34200 CMAX1=DMAX1(DABS(CCVB(1)),DABS(CCVB(2)))

```

```

34300      DO 2 N=4,101
34400      CCVB(N-1)=CB(N)*VO
34500      CVBH1=CVBH2
34600      CVBH2=CCVB(N-1)
34700      CMAX2=DMAX1(DABS(CVBH1),DABS(CVBH2))
34800      IF(CMAX1.LT.1.D-20) GOTO 3
34900      IF(CMAX2/CMAX1.LT.ERRCVB) NMAX=N-1
35000      3 CONTINUE
35100      2 CONTINUE
35200      1 CONTINUE
35300 C
35400      DRO=0.DO
35500      DRI=RI*(1.DO-1.D-5)
35600      DAERR=AERR
35700      DRERR=RERR
35800      POWM=SLI*PI*XL*DCADRE(FRS,DRO,DRI,DAERR,DRERR,DERROR,IER2)
35900      ERROR=SNGL(DERROR) *SLI*PI*XL
36000      IER1=IER
36100 C
36200      RETURN
36300      END
36400 C
36500 C      REAL FUNCTION FRS*8(R) -----
36600 C      FUP ZUR BILDUNG DES INTEGRANTEN IN FUP DCADRE
36700 C      EIN: R:DOPPELTGENAU,FUNKTIONSARGUMENT,AUFGERUFEN VON FUP DCADRE
36800 C      COMMON:XL:DOPPELTGENAU,ROHRLAENGE
36900 C              RI:DOPPELTGENAU,ROHRINNENRADIUS
37000 C              RA:DOPPELTGENAU,ROHRAUSSENRADIUS
37100 C              SLI:DOPPELTGENAU,LI-LEITFAEHIGKEIT
37200 C              SW:DOPPELTGENAU,WANDLEITFAEHIGKEIT
37300 C              CVBO:DOPPELTGENAU,FOURIERKOEFF.CVBO(0) DES MAGNETFELDES
37400 C              CVB:DOPPELTGENAU,FOURIERKOEFF.CVBN(N) N=1,NMAX
37500 C              NMAX:INTEGER,MAXIMALE ORDNUNG DER FOURIERKOEFF.
37600 C              K:INTEGER,PARAMETER K ZUR DEF. DES GESCHWIND.PROFILS
37700 C
37800 C      REAL FUNCTION FRS*8(R)
37900      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
38000      DIMENSION RS(100),DRS(100)
38100      COMMON/C/XL,RI,RA,SLI,SW,CVBO,CVB(100),K/PAR/IMAX,IER,NMAX
38200      PI=3.141592654DO
38300      FVR=1.DO
38400      IF(K.GT.0) FVR=FVR*(1.DO-(R/RI)**(K+1))
38500      CALL FELD(R,RSO,DRSO,RS,DRS)
38600      FUN=DRSO*R+RSO
38700      FKO=2.DO*FVR*CVBO*R
38800      FUN=(FUN+FKO)*CVBO
38900      FRSH=0.DO
39000      IF(NMAX.EQ.0) GOTO 2
39100      DO 1 N=1,NMAX
39200      FKN=2.DO*FVR*CVB(N)*R
39300      FRSH=FRSH+(DRS(N)*R+RS(N)+FKN)*CVB(N)
39400      1 CONTINUE
39500      2 CONTINUE
39600      FRSH=(0.5DO*FRSH+FUN)*FVR
39700      FRS=FRSH
39800      RETURN
39900

```

```

40000      END
40100 C
40200 C      SUBROUTINE FELD(R,RSO,DRSO,RS,DRS) -----
40300 C      EIN: R:DOPPELTGENAU,FUNKTIONSARGUMENT,AUFGERUFEN VON FUP DCADRE
40400 C      EIN: R:DOPPELTGENAU,KOORDINATE R DES GES.POTENTIALS
40500 C      COMMON:DOPPELTGENAU,SIEHE FUP FRS(R)
40600 C      AUS: RSO,RS:DOPPELTGENAU,FOURIERKOEFF. DES EL.POTENTIALS
40700 C      DRSO,DRS:DOPPELTGENAU,ABLEITUNG VON RSO BZW. RS(N) NACH R
40800 C      IER:COMMON,INTEGER,KONTROLLPARAMETER VON UP DBESK IN FELD
40900 C      IMAX:COMMON,INTEGER,MAX.ORDNUNG DER POTENZREIHEN IN FELD
41000 C
41100 C
41200      SUBROUTINE FELD(R,RSO,DRSO,RS,DRS)
41300      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
41400      DIMENSION RS(100),DRS(100),B(100),D(100)
41500      COMMON/C/XL,RI,RA,SLI,SW,CVBO,CVB(100),K/PAR/IMAX,IER,NMAX
41600      PI=3.141592654D0
41700      IER=0
41800      IMAX=0
41900      RH=R
42000 C
42100 C      NORMIERUNG
42200      FAKTOR=1.D0/RA
42300      XL=XL*FAKTOR
42400      RI=RI*FAKTOR
42500      RA=RA*FAKTOR
42600      R=R*FAKTOR
42700 C
42800 C      RELATIVE GENAUIGKEIT DER POTENZREIHEN : SI
42900      SI=1.D-3
43000 C
43100      IF(R.LT.1.D-4) R=1.D-4
43200      IF(K.GT.0) GOTO 1
43300      A10=CVBO/((SW/SLI-1.D0)-(SW/SLI+1.D0)*(RA/RI)**2)
43400      B10=A10*SW/SLI*(1.D0-(RA/RI)**2)-CVBO
43500      IF(R.GT.RI) GOTO 5
43600      RSO=B10*R/FAKTOR
43700      DRSO=B10
43800      GOTO 6
43900      5 RSO=A10*(R+RA*RA/R)/FAKTOR
44000      DRSO=A10*(1.D0-(RA/R)**2)
44100      6 CONTINUE
44200      GOTO 2
44300      1 A10=CVBO*((K+1.D0)/(K+3.D0))
44400      A10=A10/((SW/SLI-1.D0)-(SW/SLI+1.D0)*(RA/RI)**2)
44500      B10=A10*SW/SLI*(1.D0-(RA/RI)**2)-CVBO*((K+2.D0)/(K+3.D0))
44600      IF(R.GT.RI) GOTO 3
44700      RSO=(B10*R+CVBO/(K+3.D0)*(R/RI)**(K+1)*R)/FAKTOR
44800      DRSO=B10+CVBO*((K+2.D0)/(K+3.D0))*(R/RI)**(K+1)
44900      GOTO 4
45000      3 RSO=A10*(R+RA*RA/R)/FAKTOR
45100      DRSO=A10*(1.D0-(RA/R)**2)
45200      4 CONTINUE
45300      2 CONTINUE
45400      IF(NMAX.EQ.0) GOTO 10
45500 C
45600 C

```

```
45700 C      N IST UNGLEICH NULL
45800      IF(K.LT.1) GOTO 11
45900 C      K IST ENDLICH
46000 C
46100 C      BESTIMMUNG VON      BETAN, DKN
46200      DO 12 N=1, NMAX
46300      BETAN=N*PI/XL
46400      ARG=BETAN*RA
46500      CALL DIO(ARG, BIO)
46600      CALL DINUE(ARG, 1, BIO, BI1)
46700      CALL DBESK(ARG, 0, BKO, IERA 0)
46800      CALL DBESK(ARG, 1, BK1, IERA1)
46900      DKN=(BIO-BI1/ARG)/(BKO+BK1/ARG)
47000 C
47100 C      BESTIMMUNG VON B(IB), D(ID)
47200      B(1)=1.DO
47300      IB=3
47400      13 B(IB)=BETAN**2*B(IB-2)/((IB*IB-1.DO)
47500      IF(IB.GE.99.OR.B(IB).LT.SI) GOTO 14
47600      IB=IB+2
47700      GOTO 13
47800      14 IBMAX=IB
47900      IMAX=IBMAX
48000      D(1)=1.DO/(K+3.DO)
48100      ID=3
48200      15 D(ID)=BETAN**2*D(ID-2)/((ID+K+1.DO)**2-1.DO)
48300      IF(ID.GE.99.OR.D(ID).LT.SI) GOTO 16
48400      ID=ID+2
48500      GOTO 15
48600      16 IDMAX=ID
48700      IF(IDMAX.GT.IMAX) IMAX=IDMAX
48800 C
48900 C      BESTIMMUNG VON AN UND BIN
49000      QZ=1.DO
49100      QN=RI
49200      DO 17 IB=3, IBMAX, 2
49300      QZ=QZ+IB*B(IB)*RI**((IB-1)
49400      QN=QN+B(IB)*RI**IB
49500      17 CONTINUE
49600      QDZ=1.DO*D(1)*(K+2.)
49700      QDN=RI*D(1)
49800      DO 18 ID=3, IDMAX, 2
49900      QDZ=QDZ+(ID+K+1.DO)*D(ID)*R**((ID-1)
50000      QDN=QDN+D(ID)*RI**ID
50100      18 CONTINUE
50200      AN=CVB(N)*(QDZ-QZ/QN*QDN)
50300      ARG=BETAN*RI
50400      CALL DIO(ARG, BIO)
50500      CALL DINUE(ARG, 1, BIO, BI1)
50600      CALL DBESK(ARG, 0, BKO, IERIO)
50700      CALL DBESK(ARG, 1, BK1, IERI1)
50800      FAKT1=(BETAN*BIO-BI1/RI-DKN*(BETAN*BKO+BK1/RI))*SW/SLI
50900      FAKT2=BI1+DKN*BK1
51000      AN=AN/(FAKT1-QZ/QN*FAKT2)
51100      BIN=(AN*FAKT2-CVB(N)*QDN)/QN
51200 C
51300 C      BESTIMMUNG VON RS(N) UND DRS(N)
```

```

51400      IF(R.GT.RI) GOTO 19
51500      RSN=0.DO
51600      DRSN=0.DO
51700      DO 20 IB=1,IBMAX,2
51800      RSN=RSN+B(IB)*R**IB
51900      DRSN=DRSN+B(IB)*IB*(R**IB/R)
52000  20 CONTINUE
52100      RSN=RSN*BIN
52200      DRSN=DRSN*BIN
52300      DO 21 ID=1,IDMAX,2
52400      RSN=RSN+CVB(N)*D(ID)*(R/RI)**(K+1)*R**ID
52500      DRSN=DRSN+CVB(N)*(ID+K+1.DO)*D(ID)*(R/RI)**(K+1)/R*R**ID
52600  21 CONTINUE
52700      RS(N)=RSN/FAKTOR
52800      DRS(N)=DRSN
52900      GOTO 22
53000  19 ARG=BETAN*R
53100      CALL DIO(ARG,BIO)
53200      CALL DINUE(ARG,1,BIO,BI1)
53300      CALL DBESK(ARG,0,BKO,IERO)
53400      CALL DBESK(ARG,1,BK1,IER1)
53500      RS(N)=AN*(BI1+CKN*BK1)/FAKTOR
53600      DRS(N)=AN*(BETAN*BIO-BI1/R-DKN*(BETAN*BKO+BK1/R))
53700  22 CONTINUE
53800      IERH=IERA0+IERA1+IERI0+IERI1
53900      IF(R.GT.RI) IERH=IERH+(IERO+IER1)
54000  12 CONTINUE
54100      IF(IERH.GT.0) IER=IERH+100
54200      GOTO 10
54300 C
54400 C      K IST UNENDLICH,GRENZUEBERGANG
54500  11 CONTINUE
54600      IF(K.EQ.0) GOTC 24
54700      DO 25 N=1,NMAX
54800      BETAN=N*PI/XL
54900      ARG=BETAN*RA
55000      CALL DIO(ARG,BIO)
55100      CALL DINUE(ARG,1,BIO,BI1)
55200      CALL DBESK(ARG,0,BKO,IERA0)
55300      CALL DBESK(ARG,1,BK1,IERA1)
55400      DKN=(BIO-BI1/ARG)/(BKO+BK1/ARG)
55500 C
55600 C      BESTIMMUNG VON B(IB)
55700      B(1)=1.DO
55800      IB=3
55900  26 B(IB)=BETAN**2*B(IB-2)/(IB*IB-1.DO)
56000      IF(IB.GE.99.OR.B(IB).LT.SI) GOTO 27
56100      IB=IB+2
56200      GOTO 26
56300  27 IBMAX=IB
56400      IMAX=IBMAX
56500 C
56600 C      BESTIMMUNG VON AN UND BIN
56700      QZ=1.DO
56800      QN=RI
56900      DO 28 IB=3,IBMAX,2
57000      QZ=QZ+IB*B(IB)*RI**(IB-1)

```

```

57100      QN=QN+B(IB)*RI**IB
57200      28 CONTINUE
57300      ARG=BETAN*RI
57400      CALL DIO(ARG,BIO)
57500      CALL DINUE(ARG,1,BIO,BI1)
57600      CALL DBESK(ARG,0,BKO,IERIO)
57700      CALL DBESK(ARG,1,BK1,IERI1)
57800      FAKT1=(BETAN*BIO-BI1/RI-DKN*(BETAN*BKO+BK1/RI))*SW/SLI
57900      FAKT2=BI1+DKN*BK1
58000      AN=CVB(N)/(FAKT1-QZ/QN*FAKT2)
58100      BIN=AN*FAKT2/QN
58200 C
58300 C      BESTIMMUNG VON RS(N) UND DRS(N)
58400      IF(R.GT.RI) GOTO 23
58500      RSN=0.DO
58600      DRSN=0.DO
58700      DO 29 IB=1,IBMAX,2
58800      RSN=RSN+B(IB)*R**IB
58900      DRSN=DRSN+B(IB)*IB*(R**IB/R)
59000      29 CONTINUE
59100      RS(N)=RSN*BIN/FAKTOR
59200      DRS(N)=DRSN*BIN
59300      GOTO 30
59400      23 ARG=BETAN*R
59500      CALL DIO(ARG,BIO)
59600      CALL DINUE(ARG,1,BIO,BI1)
59700      CALL DBESK(ARG,0,BKO,IERO)
59800      CALL DBESK(ARG,1,BK1,IER1)
59900      RS(N)=AN*(BI1+DKN*BK1)/FAKTOR
60000      DRS(N)=AN*(BETAN*BIO-BI1/R-DKN*(BETAN*BKO+BK1/R))
60100      30 CONTINUE
60200      IERH=IERAO+IERA1+IERIO+IERI1
60300      IF(R.GT.RI) IERH=IERH+(IERO+IER1)
60400      25 CONTINUE
60500      IF(IERH.GT.0) IER=IERH+200
60600      GOTO 10
60700 C
60800 C      K IST UNENDLICH, BESSELENTWICKLUNG
60900      24 CONTINUE
61000      DO 31 N=1,NMAX
61100 C
61200 C      BESTIMMUNG VON DKN
61300      BETAN=N*PI/XL
61400      ARG=BETAN*RA
61500      CALL DIO(ARG,BIO)
61600      CALL DINUE(ARG,1,BIO,BI1)
61700      CALL DBESK(ARG,0,BKO,IERAO)
61800      CALL DBESK(ARG,1,BK1,IERA1)
61900      DKN=(BIO-BI1/ARG)/(BKO+BK1/ARG)
62000 C
62100 C      BESTIMMUNG VON AN UND BN
62200      ARG=BETAN*RI
62300      CALL DIO(ARG,BIO)
62400      CALL DINUE(ARG,1,BIO,BI1)
62500      CALL DBESK(ARG,0,BKO,IERIO)
62600      CALL DBESK(ARG,1,BK1,IERI1)
62700      FAKT1=(BETAN*BIO-BI1/RI-DKN*(BETAN*BKO+BK1/RI))*SW/SLI

```

```

62800      AN=-CVB(N)/((1.DO+DKN*BK1/BII)*(BETAN*BIO-BII/RI)-FAKT1)
62900      BN=AN*(1.DO+DKN*BK1/BII)
63000 C
63100 C      BESTIMMUNG VON RS(N) UND DRS(N)
63200      ARG=BETAN*R
63300      CALL DIO(ARG,BIO)
63400      CALL DINUE(ARG,1,BIO,BII)
63500      CALL DBESK(ARG,0,BKO,IER0)
63600      CALL DBESK(ARG,1,BK1,IER1)
63700      IF(R.GT.RI) GOTO 32
63800      RS(N)=BN*BII/FAKTOR
63900      DRS(N)=BN*(BETAN*BIO-BII/R)
64000      GOTO 33
64100      32 RS(N)=AN*(BII+DKN*BK1)/FAKTOR
64200      DRS(N)=AN*(BETAN*BIO-BII/R-DKN*(BETAN*BKO+BK1/R))
64300      33 CONTINUE
64400      IERH=IERA0+IERA1+IERI0+IERI1+IERO+IER1
64500      31 CONTINUE
64600      IF(IERH.GT.0) IER=IERH+300
64700      10 CONTINUE
64800      IF(IMAX.GE.99) IER=IER+1000
64900 C
65000 C      ENTNORMIERUNG
65100      XL=XL/FAKTOR
65200      RI=RI/FAKTOR
65300      RA=RA/FAKTOR
65400      R=RH
65500 C
65600      RETURN
65700      END
65800 C
65900 C      FOURIERKOEFFIZIENTEN FUER EINE GERADE PERIODISCHE FUNKTION FNT
66000 C      FNT:ARRAY DER LAENGE 2N+1
66100 C      N:INTERVALL VCN 2N+1 PUNKTEN ZWISCHEN 0 UND 2PI
66200 C      M:MAXIMALE ORDNUNG DER COSINUSKOEFFIZIENTEN
66300 C      A:RESULTIERENDER VEKTOR DER COSINUSKOEFFIZIENTEN DER LAENGE M+1
66400 C      IER:FEHLERMELDUNG MIT IER=0 KEIN FEHLER
66500 C      IER=1 N KLEINER M
66600 C      IER=2 M KLEINER NULL
66700 C
66800 C      M MUSS GROESSERGLEICH NULL SEIN
66900 C      N MUSS GROESSERGLEICH M SEIN
67000 C
67100 C
67200      SUBROUTINE FOUR(FNT,N,M,A,IER)
67300      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
67400      DIMENSION A(1),FNT(1)
67500 C
67600 C
67700      IER=0
67800      20 IF(M) 30,40,40
67900      30 IER=2
68000      RETURN
68100      40 IF(M-N) 60,60,50
68200      50 IER=1
68300      RETURN
68400 C

```

```

68500 C
68600      60 AN=N
68700      COEF=2.0D0/(2.0D0*AN+1.0D0)
68800      CONST=3.141592654D0*COEF
68900      S1=DSIN(CONST)
69000      C1=DCCS(CONST)
69100      C=1.D0
69200      S=0.D0
69300      J=1
69400      FNTZ=FNT(1)
69500      70 U2=0.D0
69600      U1=0.D0
69700      I=2*N+1
69800 C
69900 C
70000      75 U0=FNT(I)+2.0D0*C*U1-U2
70100      U2=U1
70200      U1=U0
70300      I=I-1
70400      IF(I-1) 80,80,75
70500      80 A(J)=COEF*(FNTZ+C*U1-U2)
70600      IF(J-(M+1)) 90,100,100
70700      90 Q=C1*C-S1*S
70800      S=C1*S+S1*C
70900      C=Q
71000      J=J+1
71100      GO TO 70
71200      100 A(1)=A(1)*0.5D0
71300      RETURN
71400      END
71500 //G.SYSLIB DD
71600 //          DD
71700 //          CC  DSNAME=SYS1.IMSLD,DISP=SHR
71800 //          DD  DSNAME=SYS1.IMSLS,DISP=SHR
71900 //*.FT06F001 DD DUMMY
72000 //G.FTG7FC01 DD SYSCUT=A,DCB=(RECFM=FBA,LRECL=133,BLKSIZE=1330)
72100 //G.SYSIN DD *
72200      0.00      0.00      6.5      0.00      0.00      8.3
72300      2.5E-2      1.E-3      0.E0      0.25E0
72400      0.41E-3      0.50E3      3.175E6      9.524E5
72500      15.6EC      55.7E0
72600      1.E-2      1      1      0

```

## Literatur

- 1 HUNT, J.C.R. und HANCOX, R.  
The Use of Liquid Lithium as coolant in a Toroidal Fusion Reactor. Part 1: Calculations of Pumping Power.  
CLM-R 115 (1971)
  
- 2 PETERS, TH.  
Über den Zusammenhang des Steenbeckschen Minimumprinzips mit dem thermodynamischen Prinzip der minimalen Entropieerzeugung.  
Z. Physik 144, 614 (1956)
  
- 3 HOFFMAN , H.A. und CARLSON, G.A.  
Calculation Techniques for Estimating the Pressure Losses for Conducting Fluid Flows in Magnetic Fields.  
UCRL-51010 (1971)
  
- 4 ENTENMANN, W.  
Optimierungsverfahren.  
Heidelberg 1976