

Kinetische Beschreibung  
der Neutralteilchenrandschicht

S. Rehker

IPP 2/232

August 1976



**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**

**8046 GARCHING BEI MÜNCHEN**



**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**  
**GARCHING BEI MÜNCHEN**

Kinetische Beschreibung  
der Neutralteilchenrandschicht

S. Rehker

IPP 2/232

August 1976

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

S. Rehker

August 1976

Abstract

The interaction between plasma and wall is a topic of continuous interest. The cold neutral particles coming from the wall have a great influence on the energy balance of the plasma. Also the fast neutral atoms created by charge exchange on the plasma represent the ion energy distribution. In contrast to our earlier work the kinetic description of the neutral sheath has now been extended to inhomogeneous plasma parameters and cylindrical coordinates. The calculation of the neutral sheath start from the Boltzmann equation and an integral equation for the neutral density is derived. These calculations are done in plane and cylindrical coordinates and the integral equation is solved numerically. In addition to the neutral density the distribution and function is calculated. The relationship between these functions which are measured in plasma experiments and plasma density and temperature is examined.

The approximate solution shows that the usual procedure for obtaining the ion temperature (from a plot of the logarithm of the distribution function, versus energy) is valid only if the neutral density is constant. In larger experiments where the neutral sheath is small the ion temperature should be obtained from a plot of the flux function of outgoing neutrals versus energy.

## INHALTSVERZEICHNIS

- I. Einleitung
- II. Kinetische Gleichung in ebenen Koordinaten
  - a) Ableitung der Integraltransportgleichung
  - b) Zusammenhang zwischen Plasmagrößen und Energieverteilung der Neutralteilchen
- III. Transporttheorie in der Neutronenphysik und die Analogie mit Neutralteilchen
- IV. Die Integralgleichung für Neutralteilchen in Ebenen und Zylinderkoordinaten abgeleitet aus der allgemeinen Integralgleichung
  - a) Ebene Geometrie
  - b) Äquivalenz der Integralgleichungen in ebener, eindimensionaler Geometrie
  - c) Integralgleichung in Zylinderkoordinaten
  - d) Integralgleichung in Zylinderkoordinaten bei konstanter Plasmadichte und Temperatur
- V. Die Betrachtung der Neutralteilchenrandschicht bei russischen Autoren sowie im Düchs'schen Transportcode
- VI. Numerische Berechnungen
  - a) Das Verfahren
  - b) Ionenverteilung
  - c) Reflexionsmechanismen
  - d) Quellen
  - e) Rechnungen in ebener, eindimensionaler Geometrie
  - f) Rechnungen in Zylindersymmetrie mit konstanten Plasmametern
  - g) Variable Plasmametern
- VII. Zusammenfassung



## I. Einleitung

Die Wechselwirkung zwischen Plasma und Neutralteilchenrandschicht in der Nähe der Wand ist aus mehreren Ursachen von fortwährendem Interesse. Einerseits tragen die von der Wand in das Plasma strömenden kalten Neutralteilchen wesentlich zur Energiebilanz des Plasmas bei. Andererseits sucht man aus Messungen der Energieverteilung der aus dem Plasma herausströmenden, durch Umladung erzeugten, schnellen Neutralteilchen Aufschlüsse über die Ionentemperatur oder gar über das Temperaturprofil des Plasmas zu gewinnen. Insbesondere hierfür ist es erforderlich, den genauen Zusammenhang zwischen Verteilungsfunktion der Neutralteilchen und den Plasmaeigenschaften zu kennen.

Neben den Betrachtungen der Neutralteilchenrandschicht im makroskopischen Flüssigkeitsbild (u.a. Lehnert<sup>1)</sup>) wurde von Dnestrovskii, Kostomarov und Pavlova<sup>2)</sup> sowie von Konstantinov und Perel<sup>3)</sup> eine kinetische Beschreibung der Neutralteilchenrandschicht gegeben. Bei diesen Autoren wird jedoch die Verteilungsfunktion der Ionen durch eine Deltafunktion  $f_i = \frac{1}{2} (\delta(v+v_i) + \delta(v-v_i))$  approximiert. In unserer früheren Arbeit<sup>6)</sup> wurde bereits in eindimensionaler, ebener Geometrie eine kinetische Beschreibung der Neutralteilchenrandschicht gegeben, bei der diese einschränkende Approximation nicht erforderlich war.

Quantitative Zusammenhänge zwischen Energieverteilung und Ionentemperatur wurden von Parsons und Medley<sup>14)</sup> mit Hilfe der Monte-Carlo Methode angegeben. Obwohl diese Methode in jeder Geometrie durchführbar ist, sind theoretische Zusammenhänge mit dieser rein numerischen Methode nicht erfaßbar.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die von uns früher verwendeten Verfahren auf die Untersuchung der Neutralteilchenrandschicht bei beliebigen Plasmadichte- und Temperaturprofilen in ebener, eindimensionaler Geometrie erweitert. Mit Hilfe einiger in der Neutronenphysik üblichen Verfahren werden Gleichungen angegeben, die das Problem der Neutralteilchenrandschicht auch

in Zylindergeometrie beschreiben. Die enge Verwandtschaft zwischen den Transportproblemen in der Neutronenphysik und den Problemen in der Neutralteilchenrandschicht war bereits Thema der Arbeit von Greenspan<sup>4)</sup>. Im Fall der Zylindergeometrie werden in Abschnitt VI numerische Lösungen angegeben, bei denen die Plasmaprofile jedoch als konstant vorausgesetzt werden.

Die kinetische Gleichung für Neutralteilchen wurde von uns bereits in früheren Arbeiten<sup>5, 6)</sup> betrachtet. Dabei wurde das Gewicht - insbesondere bei den numerischen Rechnungen - auf den Fall der räumlich konstanten Plasmaparameter gelegt. Im folgenden Abschnitt II wird die kinetische Gleichung bei beliebigen stationären Plasmaprofilen untersucht. Numerische Ergebnisse bei einigen angenommenen Profilen von Plasmatemperatur und Dichte werden hierfür in Abschnitt VI angegeben.

## II. Kinetische Gleichung in ebenen Koordinaten

### a) Ableitung der Integraltransportgleichung

Wie in unseren früheren Arbeiten werden auch hier einige Voraussetzungen getroffen, um die kinetische Gleichung der analytischen und numerischen Behandlung zugänglich zu machen.

aa) Unter den, in einem Wasserstoffplasma möglichen Teilchensorten werden nur neutrale Wasserstoffatome  $H^0$  und Ionen  $H^+$  betrachtet. Wasserstoffmoleküle  $H_2^0$  und  $H_2^+$  können vernachlässigt werden, da diese Moleküle in einer sehr kleinen Randschicht dissoziieren (vgl. Sigmar<sup>7)</sup>). Im Rahmen unserer Arbeit würden sich diese Teilchen lediglich als eine räumlich ausgedehnte Quelle von Neutralteilchen bemerkbar machen. Da hierbei die Gesamtzahl der erzeugten Neutralteilchen gleich bleibt, kann sich an der Struktur der Neutralteilchenrandschicht nichts wesentliches ändern.

bb) Die Wechselwirkung zwischen den Teilchensorten  $H^0$  und  $H^+(e)$  geschieht ausschließlich durch Ionisation durch Elektronen bzw. Ionenstoß oder durch



Ladungsaustauschstöße. Die elastischen Stöße zwischen  $H^0$  bzw. zwischen  $H^0$  und  $H^+$  werden vernachlässigt.

- cc) Die Profile von Plasmatemperatur und Plasmadichte bleiben über die Dauer der Neutralteilchentransportvorgänge konstant. Da sich die Plasmaeigenschaften bei den heutigen Experimenten im ms-Bereich ändern und die Zeiten für den Aufbau der Neutralteilchenrandschicht  $\mu s$  beträgt, erscheint diese Voraussetzung berechtigt.
- dd) Die Neutralteilchenrandschicht wird in eindimensionaler, ebener Geometrie betrachtet. Diese Voraussetzung ist nur gerechtfertigt, wenn die Gefäßdimensionen so groß sind, daß die Neutralteilchendichte im Plasmaminnern bereits auf verschwindend kleine Werte abgefallen ist.

Die Verlustrate von Neutralteilchen durch Ionisation ist:

$$- \int |\vec{v} - \vec{v}'| (\sigma_{e0} f_e + \sigma_{i0} f_i) d^3 v' f_0(\vec{v})$$

dabei ist  $f_0(\vec{v})$  die Verteilungsfunktion der Neutralteilchen.  $\sigma_{e0}$ ;  $\sigma_{i0}$  sind die Wirkungsquerschnitte für Ionisation durch Elektronen bzw. Ionenstoß.  $f_e$  und  $f_i$  sind die Verteilungsfunktionen für Elektronen bzw. Ionen.

Die Wechselwirkung zwischen Ionen und Neutralteilchen über den Ladungsaustauschprozeß wird - wie bereit früher <sup>5)</sup> diskutiert - durch den Term

$$\int |\vec{v} - \vec{v}'| \sigma_u [f_0(\vec{v}) f_i(\vec{v}) - f_0(\vec{v}) f_i(\vec{v}')] d^3 v'$$

beschrieben.

Um die Boltzmann-Gleichung für die Neutralteilchen zu lösen, muß entweder die Verteilungsfunktion der Ionen (bzw. Elektronen) über eine zweite gekoppelte Gleichung berechnet oder als bekannt vorausgesetzt werden. In dieser Arbeit werden für die Verteilungsfunktionen der Ionen bzw. Elektronen u.a. lokale Maxwell-Verteilungen angenommen. Die Rückwirkung der Neutralteilchen auf die

Verteilungsfunktion der Ionen wird daher vernachlässigt. Für die Elektronen und Ionen gilt dann im einzelnen:

$$f_e = n_i(x) \cdot \tilde{f}_e = n_i(x) \frac{1}{\pi^{3/2} v_e^3(x)} e^{-v^2/v_e^2(x)}$$

$$f_i = n_i(x) \cdot \tilde{f}_i = n_i(x) \frac{1}{\pi^{3/2} v_i^3(x)} e^{-v^2/v_i^2(x)} ; \quad v_i(x) = \sqrt{\frac{2 k T_i(x)}{m_i}}$$

Mit den Abkürzungen

$$\alpha(x, \bar{v}) = \int |\bar{v} - \bar{v}'| (\sigma_{e0} \tilde{f}_e + \sigma_{i0} \tilde{f}_i) d^3 v'$$

$$c_u = \int |\bar{v} - \bar{v}'| \sigma_u \tilde{f}_i(\bar{v}') d^3 v'$$

schreibt sich dann die Boltzmann-Gleichung:

$$\bar{v} \nabla_x f_0 = - n_i(x) \alpha(x, \bar{v}) f_0 - n_i(x) c_u f_0 + n_i(x) \tilde{f}_i \int |\bar{v} - \bar{v}'| \sigma_u f_0(\bar{v}') d^3 v' \quad (11.1)$$

Um den Ladungsaustauschterm zu vereinfachen, wird die Funktion  $|\bar{v} - \bar{v}'| \sigma_u(|\bar{v} - \bar{v}'|)$  durch eine Konstante angenähert. Diese Näherung ist bis zu einer Energie von ca. 50 keV der Relativbewegung sinnvoll. Bei sehr kleinen Energien ist die Näherung zwar nicht gültig jedoch wird die Verteilungsfunktion der Neutralteilchen durch Stöße in diesem Bereich praktisch nicht verändert.

Mit dieser Näherung gilt:

$$\int |\bar{v} - \bar{v}'| \sigma_u \tilde{f}_i(\bar{v}') d^3 v' = c_u$$

Die kinetische Gleichung reduziert sich damit im ebenen, eindimensionalen Fall auf

$$v_x \frac{\partial f_0}{\partial x} = - n_i(x) \left\{ \alpha(x, \bar{v}) + c_u \right\} f_0 + n_i(x) \tilde{f}_i c_u n_0(x)$$

Die Randbedingungen, unter denen diese Gleichung zu lösen ist, sind für

$$x=0 ; \quad f_0(0, \bar{v})|_{v_x > 0} = f_0^+(\bar{v}) + \int R(\bar{v}, \bar{v}') f_0^-(\bar{v}') d^3 v'$$

Hierbei ist  $f_0^+(\bar{v})$  ein echter Quellterm, der u.a. an der Wand rekombinierte Plasmateilchen, die als Neutrale wieder in die Randschicht zurückströmen,



beschreibt. Der zweite Term ist ein allgemeiner Ausdruck für die Reflexion von Neutralteilchen an der Wand. Diese Teilchen treffen mit der, aus der kinetischen Gleichung zu berechnenden, Verteilungsfunktion  $f_0^-(\vec{v})$  auf die Wand und strömen nach der Reflexion mit der Verteilungsfunktion

$$\int R(\vec{v}, \vec{v}') f_0^-(\vec{v}') d^3v' \quad \text{in die Randschicht zurück.}$$

Die zweite Randbedingung ist für  $x = \infty$

$$f_-(\infty, \vec{v})|_{v_x < 0} = 0$$

d.h. im hier betrachteten ebenen, eindimensionalen Modell gibt es in großer Entfernung von der Wand keine Neutralteilchen mehr, d.h. aus dem Unendlichen strömen keine Teilchen in das Plasma hinein.

Die Randbedingung an der Wand wird hier nicht allgemein, sondern in zwei Spezialfällen betrachtet:

a) "Ideale Reflexion"

$$x = 0$$

$$f_0(0, \vec{v})|_{v_x > 0} = f_0^+(\vec{v}) + R_i f_0^-(\vec{v})$$

b) "Diffuse Reflexion"

$$x = 0$$

$$f_0(0, \vec{v})|_{v_x > 0} = f_0^+(\vec{v}) + R_D f_w(v) \int_0^\infty v_x' f_0^-(\vec{v}') d^3v'$$

In der letzten Gleichung bedeutet das Integral den auf die Wand auftreffenden Neutralteilchenfluß und  $f_w(\vec{v})$  eine Geschwindigkeitsverteilung, mit der die Neutralteilchen wieder in das Plasma einströmen.

Formale Lösungen der kinetischen Gleichung, die diese Randbedingungen annehmen sind:

Für  $v_x > 0$

$$f^+(x, \vec{v}) = f_0(0, \vec{v}) e^{-\int_0^x \frac{n_i(x') \tilde{f}_i c_u}{v_x} dx'} + \int_0^x \frac{n_i(x') \tilde{f}_i c_u}{v_x} n_0(x') e^{\int_x^{x'} \frac{n_i(x'') \tilde{f}_i c_u}{v_x} dx''} dx' \quad (11.2)$$

Für  $v_x < 0$

$$f^-(x, \vec{v}) = \int_\infty^x \frac{n_i(x') \tilde{f}_i c_u}{v_x} n_0(x') e^{\int_x^{x'} \frac{n_i(x'') \tilde{f}_i c_u}{v_x} dx''} dx' \quad (11.3)$$

Diese zwei Lösungen werden durch

$$n_o(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} dv_y dv_z \left\{ \int_0^{\infty} dv_x (f_+(v_x) + f_-(-v_x)) \right\}$$

zu einer Integralgleichung für die Neutralteilchendichte zusammengefaßt:

$$n_o(x) = \int_0^{\infty} dv_x F^+(0, v_x) e^{-\int_0^x \frac{n_i(x')(\alpha + c_u)}{v_x} dx'} + \int_0^{\infty} dx' n_o(x') \int_0^{\infty} dv_x \left( \frac{n_i(x') \tilde{F}_i c_u}{v_x} e^{-\frac{1}{v_x} \left| \int_x^{x'} n_i(x'')(\alpha + c_u) dx'' \right|} \right) \quad (11.4)$$

Hierbei bedeutet:

$$\tilde{F}_i = \iint_{-\infty}^{\infty} dv_y dv_z \tilde{f}_i \left\{ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_i} e^{-v_i^2/v_i^2} \text{ im Fall der Maxwell-Verteilung} \right\}$$

$$F^+(0, v_x) = \iint_{-\infty}^{\infty} dv_y dv_z f^+(0, \vec{v})$$

Die obige Gleichung ist eine Integralgleichung für die Neutralteilchendichte.

Mit der Abkürzung

$$K(x, x') = \int_0^{\infty} dv_x \frac{n_i(x') \tilde{F}_i c_u}{v_x} e^{-\frac{1}{v_x} \left| \int_x^{x'} n_i(x'')(\alpha + c_u) dx'' \right|}$$

für den Kern und

$$g(x) = \int_0^{\infty} dv_x F^+(0, v_x) e^{-\int_0^x \frac{n_i(x')(\alpha + c_u)}{v_x} dx'}$$

schreibt sich die Gleichung  $n_o(x) = \int_0^{\infty} dx' n_o(x') K(x, x') + g(x)$

Die oben angegebenen Reflexionsmechanismen sind aus Gründen der Einfachheit in den Gleichungen nicht enthalten. Die Reflexion ändert lediglich den Kern der Integralgleichung, der weiter unten vollständig angegeben werden wird.

Durch die Transformation

$$\frac{v_x}{v_i(x)} = u$$

und

$$n_i(x) (\alpha + c_u) dx' = dy$$

$$\int_0^{x'} n_i(x'') (\alpha + c_u) dx'' = y$$



läßt sich die Integralgleichung für die Neutralteilchendichte vereinfachen:

$$n_0(y) = \int_0^{\infty} k(y, y') n_0(y') dy' + g(y)$$

Der transformierte Kern ist durch

$$K(y, y') = \beta \int_0^{\infty} \frac{\tilde{F}_i(y', v_x)}{v_x} e^{-\frac{|y-y'|}{v_x}} dv_x = \frac{\beta}{\sqrt{\pi} v_i(y')} \int_0^{\infty} e^{-u^2} \frac{e^{-\frac{|y-y'|}{u v_i(y')}}}{u} du \quad (11.5)$$

gegeben. Das zweite Gleichheitszeichen gilt im Fall einer Maxwell-Verteilung für die Ionen. Die Größe  $\beta$  ist ein Maß für die Umladung  $\beta \approx c_u / \alpha + c_u$

Dabei können die Ratenkoeffizienten der Arbeit von Rivière 15) oder auch 16)

entnommen werden. Bis zu Relativenergien von  $E \approx 50$  keV kann

$\alpha = 4 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}$  und  $c_u = 6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}$  angenommen werden.

Dann ergeben sich für die Größe  $\beta$  Werte zwischen 0.6 und 0.7. Die numerischen Rechnungen beziehen sich meist auf einen Wert von  $\beta = 0.6$ .

Das Verhalten des Kerns bestimmt das allgemeine Verhalten der Lösung. Im Fall räumlich veränderlicher Plasmaparameter ändert sich im Vergleich zu konstanten Plasmaparametern an der Struktur des Kerns kaum etwas. Die Integralgleichung ist zwar nicht mehr vom Wiener-Hopf Typ, jedoch ist dies für die numerische Rechnung von geringer Bedeutung. Daher kann auf unsere früher durchgeführte Diskussion <sup>(5, 6)</sup> zurückgegriffen werden. Für die numerischen Rechnungen ist insbesondere von Bedeutung, daß der Kern  $K(y, y')$  an der Stelle  $y = y'$  eine logarithmische Singularität besitzt. Jedoch existiert das Integral  $\int_0^{\infty} k(y, y') dy'$ .

Die oben angegebenen Reflexionsmechanismen verändern den Kern der Integralgleichung zu

$$K_3(y, y') = K(y, y') + R_i K_1(y, y') + R_o K_2(y, y')$$

Beide Fälle der hier betrachteten Reflexionsmechanismen sind hier zusammengefaßt, werden jedoch numerisch nur alternativ  $(R_i=1, R_o=0 ; R_i=0, R_o=1)$  betrachtet.

Für den Kern  $K_1$  (bei idealer Reflexion) gilt

$$K_1(\gamma, \gamma') = \beta \int_0^\infty \frac{\tilde{F}_i(\gamma', v_x)}{v_x} e^{-\frac{(\gamma + \gamma')}{v_x}} dv_x = \frac{\beta}{\sqrt{\pi} v_i(\gamma)} \int_0^\infty e^{-u^2} e^{-\frac{\gamma + \gamma'}{v_i(\gamma)u}} \frac{du}{u} \quad (11.6)$$

und für den Kern  $K_2$  (bei diffuser Reflexion):

$$\begin{aligned} K_2(\gamma, \gamma') &= \left\{ \int_0^\infty F_w(v_x) e^{-\gamma'/v_x} dv_x \right\} \cdot \left\{ \beta \int_0^\infty F_i(\gamma, v_x) e^{-\gamma/v_x} dv_x \right\} = \\ &= \left\{ \int_0^\infty \frac{2}{v_k^2} e^{-v_x^2/v_k^2} e^{-\gamma'/v_x} dv_x \right\} \cdot \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} e^{-\gamma'/v_i(\gamma) \cdot u} du \right\} \\ &= \left\{ \frac{2}{v_k} \int_0^\infty e^{-w^2} e^{-\gamma'/w \cdot v_k} dw \right\} \cdot \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} e^{-\gamma'/v_i(\gamma) \cdot u} du \right\} \end{aligned} \quad (11.7)$$

Für die jeweils zweite Klammer gelten die Gleichheitszeichen wieder bei einer Maxwell-Verteilung für die Ionen. Bei der ersten Klammer im Ausdruck für  $K_2$  wurde für die von der Wand in das Plasma kalt zurückströmenden Neutralteilchen ebenfalls eine Maxwell-Verteilung mit der mittleren Geschwindigkeit  $v_k$  angenommen:

$$F_w(v_x) = \frac{2}{v_k^2} e^{-v_x^2/v_k^2}$$

Andere Annahmen sind an dieser Stelle möglich. Für den inhomogenen Term der Integralgleichung gilt schließlich:

$$g_0(\gamma) = \int_0^\infty F_0^+(0, v_x) e^{-\gamma/v_x} dv_x$$

b) Zusammenhang zwischen Plasmagrößen und Energieverteilung der Neutralteilchen

Die passive Neutralteilchenanalyse ist in der Plasmadiagnostik zu einer Methode entwickelt worden, um die Ionentemperatur bzw. mittlere Geschwindigkeit des Plasmas zu bestimmen. Der Zusammenhang zwischen Meßgrößen - Energieverteilung der aus dem Plasma herauslaufenden Neutralteilchen - und zu bestimmender Plasmagröße ergibt sich hier aus

$$F_-(0, -v_x) = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_i(y') v_x} e^{-v_x^2/v_i^2(y')} n_0(y') e^{-y'/v_x} dy' \quad (11.8)$$

Um bei gemessener Funktion  $F_-$  diese Gleichung nach  $v_i(y')$  auflösen zu können, müßte das Neutralteilchenprofil zusätzlich bekannt sein. Bei bekanntem  $v_i$  könnte man umgekehrt das Neutralteilchenprofil errechnen. Wie jedoch die numerischen Rechnungen zeigen, hängt  $F_-$  über diese Integralbeziehung nur schwach von  $v_i$  ab. Daher dürften die unvermeidlichen Meßfehler im Experiment die Umkehrung der Integralbeziehung zu Auflösung nach  $v_i$  unmöglich machen. Umgekehrt kann die Gleichung 11.8 bei bekanntem Ionengeschwindigkeitsprofil als eine Integralgleichung für die Neutralteilchendichte  $n_0(y)$  betrachtet werden.

Nimmt man die Ionentemperatur  $v_i$  als konstant an, so läßt sich die Integralbeziehung in zwei Grenzfällen auflösen:

1. Das Neutralteilchenprofil ist konstant  $n_0(y') = n_0$ :

Dann gilt:

$$F_-(0, -v_x) = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_i v_x} n_0 e^{-v_x^2/v_i^2} \int_0^{\infty} e^{-y'/v_x} dy' = \frac{\beta}{\sqrt{\pi} v_i} n_0 e^{-v_x^2/v_i^2}$$

Also gilt  $\ln(F_-(0, -v_x)) \approx -v_x^2/v_i^2$

Die mittlere Geschwindigkeit  $v_i$  bzw. Plasmatemperatur läßt sich also in diesem Fall aus der Steigung des Graphen  $\ln(F_-(0, -v_x))$  vs Energie ablesen. Diese Darstellung der Meßergebnisse wird im allgemeinen <sup>13)</sup>

bei der Auswertung der Meßdaten der Neutralteilchenanalyse verwendet, um die Ionengeschwindigkeit bzw. Temperatur zu bestimmen.

2. In vielen Experimenten dürfte jedoch eher anzunehmen sein, daß die Neutralteilchen nur in einer sehr kleinen Randschicht existieren. Dann gibt es nur für sehr kleine  $y'$  Beiträge zum Integral. Für nicht zu große Geschwindigkeiten  $v_x$  kann dann  $e^{-y/v_x} = 1$  gesetzt werden.

Dann gilt 
$$\ln (v_x F_-(0, -v_x)) \approx -v_x^2/v_i^2$$

Will man also in diesem Fall die Ionentemperatur bestimmen, so ist der Logarithmus des Flusses gegen die Energie aufzutragen - im Gegensatz zum Grenzfall 1), wo der Logarithmus der Verteilungsfunktion aufgetragen wurde. Das Problem der Temperaturbestimmung ist prinzipiell durch Auflösung der Integralbeziehung zu lösen. Ob jedoch die Genauigkeit der Messungen hierzu ausreicht, erscheint fraglich. Bei bekannter Verteilungsfunktion der herauslaufenden Neutralteilchen können auch Teilchenfluß

$$A_- = \int_0^{\infty} v_x F_-(0, v_x) dv_x$$
 sowie Energiefluß 
$$S_- = \int_0^{\infty} (\bar{v})^2 v_x F_-(0, v_x) dv_x$$
  
dieser Teilchen auf die Wand mit errechnet werden.

### III. Transporttheorie der Neutronenphysik und die Analogie mit Neutralteilchen

Ähnliche Probleme wie die der Neutralteilchenrandschicht entstehen auch beim Neutronentransport in einem Spaltungsreaktor, worauf bereits Greenspan<sup>4)</sup> in seiner Arbeit hingewiesen hat. Dem Verlust an Teilchen durch Neutroneneinfang steht der Verlust an Neutralteilchen durch Ionisation gegenüber. Den Prozessen der unelastischen Streuung oder induzierten Spaltung bei Neutronen steht der Ladungsaustausch bei Neutralteilchen gegenüber. Wesentlich verschieden sind bei diesen beiden physikalischen Problemen die Randbedingungen. Bei konkreten Problemen können die Randbedingungen der Neutralteilchenrandschicht durch zusätzliche Quellen simuliert werden.



Die ähnliche Problematik bringt es mit sich, daß in der Neutronenphysik eine stationäre Gleichung abgeleitet wird, die unserer kinetischen Gleichung für die Neutralteilchen verwandt ist:

$$v \bar{\Omega} \bar{\nabla} N + \frac{v N}{\ell_{tot}(v)} = \int \frac{v' c(v') dv'}{\ell_{tot}(v')} \iint N(\bar{r}, v' \bar{\Omega}') f(v' \bar{\Omega}' \rightarrow v \bar{\Omega}) d\bar{\Omega}' + S \quad (III.1)$$

Hierbei ist  $N$  die Verteilungsfunktion der Neutronen. Die Normierung ist jedoch zu  $n(\bar{r}) = \iiint N(\bar{r}, v \bar{\Omega}) dv d\bar{\Omega}$  ( $n(\bar{r})$  Neutronendichte) angenommen.  $v \bar{\Omega}$  ist der Geschwindigkeitsvektor  $\bar{v}$ ;  $\ell_{tot}(v)$  ist die "gesamte freie Weglänge";  $f(v' \bar{\Omega}' \rightarrow v \bar{\Omega}) dv d\bar{\Omega}$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron mit der Geschwindigkeit  $v' \bar{\Omega}'$  in den Bereich  $dv d\bar{\Omega}$  gestreut wird.  $S$  ist eine zusätzliche Quelle.

Setzt man hier die entsprechenden Größen der Neutralteilchenprozesse ein:

$$\frac{v}{\ell_{tot}(v)} = n_i(\bar{r}) [\alpha + c_u]$$

$$\int dv' \frac{v' c(v')}{\ell_{tot}(v')} \iint N(\bar{r}, v' \bar{\Omega}') f(v' \bar{\Omega}' \rightarrow v \bar{\Omega}) d\bar{\Omega}' = \int |v - v'| \sigma_u f_0(v') dv' f_i(v)$$

und identifiziert die Größe  $N(\bar{r}, v \bar{\Omega})$  mit  $f_0(\bar{v})$ , so erhält man die kinetische Gleichung für Neutralteilchen:

$$\bar{v} \bar{\nabla} f_0 + n_i(\bar{r}) [\alpha + c_u] f_0 = \int |v - v'| \sigma_u f_0(v') dv' f_i(v)$$

wie sie in Abschnitt II Ausgangspunkt der Betrachtungen war. Aus der obigen Transportgleichung für Neutronen leitet Davisson<sup>12)</sup> eine Integralgleichung unter den folgenden Voraussetzungen ab:

1. Es liegt ein homogenes Gebiet vor, das so beschaffen ist, daß die Neutronen nicht wieder in das Gebiet hineinkommen. Die Randbedingungen der Neutralteilchenrandschicht müssen also durch die zusätzlichen Quellen  $S$  erfaßt werden.

2. Die Quellen  $S(\bar{r}, v, \Omega')$  sind isotrop  $S(\bar{r}, v, \bar{\Omega}) = S(\bar{r}, v)$
3. Die Größe  $f(v, \Omega' \rightarrow v, \Omega)$  ist unabhängig von  $\Omega'$ ;  $\Omega$  wie es bereits hier bei der Äquivalenzbetrachtung vorausgesetzt wurde.

Die Integralgleichung wird dann abgeleitet für  $n_o(\bar{r}, v) = \iint N(\bar{r}, v, \bar{\Omega}) d\bar{\Omega}$  und lautet:

$$n_o(\bar{r}, v) = \frac{1}{v} \iiint_v \frac{dV'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} \exp\left\{-\frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{l_{tot}(v)}\right\} \cdot Q(\bar{r}', v) \quad (III.2)$$

mit

$$Q(\bar{r}, v) = \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{c(v')v'}{l_{tot}(v')} n_o(\bar{r}, v') f(v' \rightarrow v) + S'(\bar{r}, v)$$

$$\hat{=} \frac{1}{4\pi} c_u n_o(\bar{r}) n_i(\bar{r}) f_i(v) + S'(\bar{r}, v)$$

und

$$l_{tot}(v) \hat{=} \frac{v}{n_i(\alpha + c_u)}$$

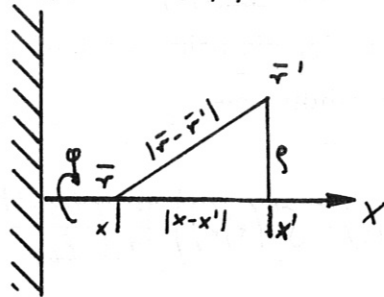
Zu bemerken ist, daß diese Gleichungen in beliebigen Koordinaten gilt, während die Integralgleichung in Abschnitt II nur für den ebenen, eindimensionalen Fall abgeleitet wurde. Weiter ist die Größe  $v$  der Betrag der Geschwindigkeit, statt die Komponente  $v_x$ . Außerdem müssen die Quellen  $S(\bar{r}, v)$  (Randbedingungen) isotrop angesetzt werden, um der Bedingung 2) zu genügen.

IV. Die Integralgleichung für Neutralteilchen in ebenen und Zylinderkoordinaten abgeleitet aus der allgemeinen Integralgleichung

a) Ebene Geometrie

In ebener Geometrie sind die Dichte  $n$  und die Quelle  $Q$  nur Funktion von  $x$

d.h.  $n(\vec{r}, \nu) = n(x, \nu); \quad Q(\vec{r}, \nu) = Q(x, \nu)$



Führt man um die  $x$ -Achse Zylinderkoordinaten ein, so gilt:

$$dV' = dx' \rho d\varphi \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{|x - x'|^2 + \rho^2}$$

Damit vereinfacht sich die Integralgleichung zu

$$n(x, \nu) = \frac{1}{\nu} \iiint \frac{dx' \rho d\varphi}{|x - x'|^2 + \rho^2} Q(x', \nu) e^{-\frac{\sqrt{|x - x'|^2 + \rho^2}}{\ell_{tot}(\nu)}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\nu} \int dx' Q(x', \nu) \cdot \{I\}$$

mit  $\{I\} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho d\varphi \frac{e^{-\frac{\sqrt{|x - x'|^2 + \rho^2}}{\ell_{tot}(\nu)}}}{|x - x'|^2 + \rho^2}$

Transformiert man in diesem Integral

$$u = \frac{\sqrt{|x - x'|^2 + \rho^2}}{\ell_{tot}(\nu)}$$

so gilt

$$\underline{I} = \int_{\frac{|x - x'|}{\ell_{tot}(\nu)}}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = E_1 \left( \frac{|x - x'|}{\ell_{tot}(\nu)} \right)$$

Hierbei ist

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (\text{vgl. }^{10)} \text{ p.228})$$

Damit gilt für die Dichte  $n(x) = \int_0^{\infty} n(x, v) dv$  die Integralgleichung

$$n(x) = 2\pi \int_0^{\infty} dx' \left\{ \int_0^{\infty} \frac{Q(x', v)}{v} E_1\left(\frac{|x-x'|}{l_{\text{tot}}(v)}\right) dv \right\}$$

Setzt man für  $Q$  und  $l_{\text{tot}}$  die Ausdrücke ein, die beim Vergleich im vorhergehenden Abschnitt gewonnen wurden, so erhält man

$$n_0(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx' \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{v} (c_u n_0(x') f_i(v) + S'(x', v)) E_1\left(\frac{|x-x'|}{l_{\text{tot}}(v)}\right) dv \right\}$$

Setzt man für  $f_i(v)$  die entsprechend normierte Maxwell-Verteilung

$$f_i(v) = n_i \frac{1}{\sqrt{\pi} v_i} e^{-v^2/v_i^2}$$

ein, so gilt

$$n_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} n_0(x') \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{v} c_u n_i(x') \frac{1}{v_i} e^{-v^2/v_i^2} E_1\left(\frac{n_i(\alpha+c)}{v} |x-x'|\right) dv \right\} dx' + g(x) \quad (\text{IV.1})$$

$$\text{mit } g(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx' \int_0^{\infty} \frac{1}{v} S'(x', v) E_1\left(\frac{n_i(\alpha+c)}{v} |x-x'|\right) dv$$

Im homogenen Fall  $n_i = \text{const}$ ,  $v_i = \text{const}$  führt die Transformation  $z = \frac{n_i(\alpha+c)}{v_i} x$  und  $v/v_i = u$  diese Integralgleichung in

$$n_0(z) = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} n_0(z') dz' \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} E_1\left(\frac{|z-z'|}{u}\right) du \right\} + g(z) \quad (\text{IV.2})$$

mit  $\beta = c_u / (\alpha + c_u)$  über.

Im Kern der Integralgleichung tritt also statt der Funktion  $e^{-|z-z'|/u}$  die Funktion  $E_1\left(\frac{|z-z'|}{u}\right)$  auf. Das ist - wie im nächsten Unterabschnitt



gezeigt wird - eine Folge der anderen Betrachtung im Geschwindigkeitsraum. Hier wird mit dem Betrag der Geschwindigkeit  $v$  und im Abschnitt II mit der Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  gerechnet.

b) Äquivalenz der Integralgleichungen in ebener, eindimensionaler Geometrie

Der Kern der Integralgleichung aus Abschnitt II (Gl. II.5) lautet:

$$K(|x-x'|) = \beta \int_0^{\infty} n_i \frac{e^{-\frac{n_i(\alpha+c_u)}{v_x} |x-x'|}}{v_x} F_i(v_x) dv_x$$

mit der Verteilungsfunktion  $F_i(v_x) = \iint dv_y dv_z f_i(\vec{v})$  der Ionen. Führt man  $f_i(\vec{v})$  sowie im  $v$ -Raum Kugelkoordinaten ein, so gilt:

$$\begin{aligned} K(|x-x'|) &= \beta \iint \int_0^{\infty} n_i \frac{e^{-\frac{n_i(\alpha+c_u)}{v_x} |x-x'|}}{v_x} f_i(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = \\ &= \beta \iint \int_0^{\pi/2} n_i \frac{e^{-\frac{n_i(\alpha+c_u)}{v_x} |x-x'|}}{v_x} f_i(\vec{v}) v^2 dv d\varphi \sin\vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

Die Integration über  $\vartheta$  läuft von 0 bis  $\pi/2$  da die Integration über  $v_x$  nur über alle positiven Werte läuft. Setzt man voraus, daß  $f_i(\vec{v}) = f_i(v)$  isotrop ist, so gilt:

$$K(|x-x'|) = \beta \cdot 2\pi \int f_i(v) v^2 dv n_i \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\frac{n_i(\alpha+c_u)}{v_x} |x-x'|}}{v_x} \sin\vartheta d\vartheta$$

Setzt man  $v_x = v \cos\vartheta$  und transformiert  $\cos\vartheta = 1/t$ , so gilt:

$$K(|x-x'|) = \beta \cdot 2\pi \int n_i f_i(v) v dv \left\{ \int_1^{\infty} e^{-\frac{n_i(\alpha+c_u)}{v} |x-x'| t} \frac{dt}{t} \right\}$$

Die Größe in der geschweiften Klammer ist die  $E_1$ -Funktion:

$$K(|x-x'|) = \beta \cdot 2\pi \int n_i f_i(v) v dv E_1\left(\frac{n_i(\alpha+c_u)}{v} |x-x'|\right)$$

Berücksichtigt man die in der Neutronenphysik übliche Normierung

$$\int d\nu \left\{ \tilde{f}_i(\nu) \right\}_{\text{Neutronenphysik}} = 1 \quad \left( f_i = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\nu^2}{\nu_i^3} e^{-\nu^2/\nu_i^2} \right)$$

im Gegensatz zu

$$\int d^3\nu \left\{ f_i(\bar{\nu}) \right\}_{\text{Neutralteilchen Abschnitt II}} = 1 \quad \left( \tilde{f}_i = \frac{1}{\pi^{3/2} \nu_i^3} e^{-\nu^2/\nu_i^2} \right)$$

so gilt

$$\left\{ f_i(\nu) \right\}_{\text{Neutronenphysik}} = \left\{ \tilde{f}_i(\bar{\nu}) \right\}_{\text{Neutralteilchen Abschnitt II}} \cdot \nu^2 \cdot 4\pi$$

und damit

$$K(|x-x'|) = \frac{c_u}{2} \int_0^\infty n_i \frac{f_i(\nu)}{\nu} E_1 \left( \frac{n_i (\alpha + c_u) |x-x'|}{\nu} \right) d\nu$$

Dieser Kern hat die oben angegebene Form. Die Integralgleichungen, die im ebenen, eindimensionalen Fall abgeleitet wurden, sind damit äquivalent.

### c) Integralgleichung in Zylinderkoordinaten

Die im vorangegangenen Abschnitt gemachte Voraussetzung der Homogenität des Gebietes ist im zylindersymmetrischen Plasma nicht mehr gegeben. Plasmadichte und Temperatur sind im Inneren des Zylinders höher als am Rand. In diesem Fall läßt sich eine "optische Tiefe" der Neutralteilchen einführen:

$$\beta(\bar{r}, \bar{r}', \nu) = \frac{1}{\nu} \int_0^{|\bar{r}-\bar{r}'|} (\alpha + c_u) n_i \left( \bar{r} - R' \frac{(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|} \right) dR'$$

Die Integralgleichung lautet dann

$$n_o(\bar{r}, \nu) = \frac{1}{\nu} \iiint_V \frac{dV'}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2} e^{-\beta(\bar{r}, \bar{r}', \nu)} Q(\bar{r}', \nu) \quad (\text{IV.3})$$

wobei

$$\frac{4\pi}{v} Q(\bar{r}, v) = \frac{1}{v} c_u n_o(\bar{r}) n_i(\bar{r}) \tilde{f}_i(\bar{r}, v) + \frac{1}{v} S(\bar{r}, v)$$

ist.

Wenn, wie auch früher vorausgesetzt,  $\alpha + c_u = \text{const}$  ist, so gilt für die optische Tiefe

$$\begin{aligned} \beta(\bar{r}, \bar{r}', v) &= \frac{\alpha + c}{v} \int_0^{|\bar{r} - \bar{r}'|} n_i(\bar{r} - R' \frac{(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|}) dR' = \frac{\alpha + c_u}{v} \sqrt{z'^2 + t^2} \int_0^1 n_i(\bar{r} - u(\bar{r} - \bar{r}')) du \\ &= \frac{\alpha + c}{v} \sqrt{z'^2 + t^2} H_N \end{aligned}$$

mit  $u = \frac{R'}{\sqrt{z'^2 + t^2}}$  sowie  $t^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi$ ;  $H_N = \int_0^1 n_i(\bar{r} - u(\bar{r} - \bar{r}')) du$

Im Fall  $n_i = \text{const}$  gilt  $H_N = n_i$  und damit

$$\beta = \frac{\alpha + c}{v} \sqrt{z'^2 + t^2} n_i = \frac{\alpha + c}{v} n_i |\bar{r} - \bar{r}'|$$

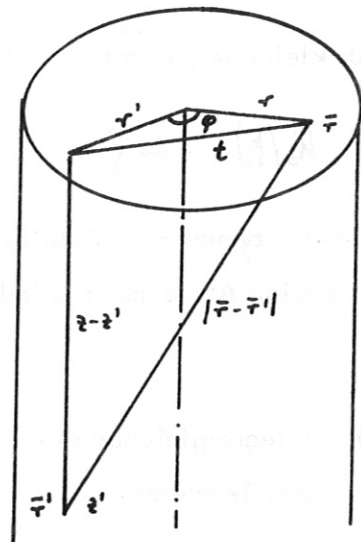
also der früher erhaltene Ausdruck.

Führt man in die Integralgleichung Zylinderkoordinaten ein, so gilt unter der Voraussetzung, daß alle physikalischen Größen nur vom Radius abhängen:

$$n_o(\bar{r}, v) = \frac{1}{v} \int r' dr' Q(r', v) K(r, r')$$

mit  $K(r, r') = \int d\varphi' \int dz' \frac{e^{-\beta(r, r', v)}}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} =$

$$= \int d\varphi' \int dz' \frac{e^{-\frac{\alpha + c}{v} \sqrt{z'^2 + t^2} H_N}}{z'^2 + t^2} = 2 \frac{\alpha + c}{v} \int_0^{2\pi} d\varphi H_N(r, r', \varphi) \int_1^\infty K_0\left(\frac{\alpha + c}{v} t H_N \gamma\right) d\gamma$$



Für die Größe  $H_N$  gilt in Zylindersymmetrie:

$$H_N(r, r', \mu) = \int_0^1 n_i(\bar{r} - u(\bar{r} - \bar{r}')) du = \int_0^1 n_i \left( [r^2 + u^2 t^2 - 2ru] \sqrt{t^2 - r'^2(1 - \mu^2)} \right)^{1/2} du$$

mit  $\mu = \cos \varphi$

Setzt man in den Ausdruck für die Quelle  $Q$  und für die Ionen eine lokale Maxwell-Verteilung  $\tilde{f}_i(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_i^3(r)} e^{-v^2/v_i(r)^2}$  ein, so erhält man für die Neutralteilchendichte  $n_o(r)$  die Integralgleichung

$$n_o(r) = \int_0^R r' dr' \bar{K}(r, r') n_o(r') + g(r)$$

mit 
$$\bar{K}(r, r') = \frac{4c_{ei}}{\pi^{3/2}} \int dv n_i(r') \frac{e^{-v^2/v_i(r)^2}}{v_i(r)^3} \left\{ (\alpha + c) \int_0^{\pi} d\varphi' H_N \int_1^{\infty} K_0\left(\frac{\alpha + c}{v} t H_N y\right) dy \right\}$$

(IV.4)

und 
$$g(r) = \frac{1}{\pi} \int \frac{dv}{v} \int r' dr' S(r', v) \left[ \frac{\alpha + c}{v} \int_0^{\pi} d\varphi' H_N \int_1^{\infty} K_0\left(\frac{\alpha + c}{v} t H_N y\right) dy \right]$$

Für kleine Argumente gilt für die Besselfunktion  $K_0(\xi)$

$$K_0(\xi) \approx -\ln \xi \quad \text{für} \quad \xi \rightarrow 0$$

Die im ebenen Fall diskutierte logarithmische Singularität des Kerns tritt hier für kleine Abstände  $t$  wieder auf.

- d) Integralgleichung in Zylinderkoordinaten bei konstanter Plasmadichte- und Temperatur

Im Fall konstanter Plasmaparameter vereinfacht sich die Integralgleichung in Zylinderkoordinaten erheblich. Es gilt  $H_N = n_i$  und damit

$$K(r, r') = 2 \frac{\alpha + c}{v} \int_0^{\pi} d\varphi' n_i \int_1^{\infty} K_0\left(\frac{\alpha + c}{v} t n_i y\right) dy$$



Mit der Beziehung

$$K_0(\alpha|\xi - \xi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\vartheta} \begin{cases} K_n(\xi\alpha) I_n(\xi'\alpha) & \xi > \xi' \\ I_n(\xi\alpha) K_n(\xi'\alpha) & \xi' > \xi \end{cases}$$

gilt für den Kern

$$k(r, r') = 2 \frac{\alpha+c}{v} n_i \int_1^{\infty} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \begin{cases} K_n(r \frac{\alpha+c}{v} n_i y) I_n(r' \frac{\alpha+c}{v} n_i y) \\ I_n(\cdot) K_n(\cdot) \end{cases} \right\} dy \begin{matrix} r > r' \\ r' > r \end{matrix} = \quad (IV.5)$$

$$= 4\pi \frac{\alpha+c}{v} n_i \int_1^{\infty} \begin{cases} K_0(r \frac{\alpha+c}{v} n_i y) I_0(r' \frac{\alpha+c}{v} n_i y) \\ I_0(\cdot) K_0(\cdot) \end{cases} dy \begin{matrix} r > r' \\ r' > r \end{matrix}$$

Wie auch im ebenen Fall ist eine Koordinatentransformation möglich:

$$u = \frac{v}{v_i} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{n_i(\alpha+c)}{v_i} r$$

Es ergibt sich die Integralgleichung

$$n_o(\xi) = \frac{4\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi R} \xi' d\xi' \left\{ \int_0^{\infty} du e^{-u^2} \begin{cases} K_0(\frac{\xi}{u} y) I_0(\frac{\xi'}{u} y) \\ I_0(\cdot) K_0(\cdot) \end{cases} dy \right\} n_o(\xi') + \begin{matrix} \xi > \xi' \\ \xi' > \xi \end{matrix}$$

$$+ g(\xi)$$

V. Die Betrachtung der Neutralteilchenrandschicht bei russischen Autoren  
sowie im Düchs'schen Transportcode

Im Zusammenhang mit Messungen der Energieverteilung der aus dem Plasma herauslaufenden Neutralteilchen wurde die Randschicht bereits von verschiedenen russischen Autoren untersucht<sup>(2,3)</sup>. Diese Autoren leiten für die Neutralteilchendichte ebenfalls eine Integralgleichung ab, die für die spezielle Ionenverteilung

$$\tilde{f}_i(v) = \frac{1}{2} (\delta(v+v_i) + \delta(v-v_i))$$

gelöst wird. In einer früheren Arbeit haben wir die Gültigkeit dieser speziellen Verteilung untersucht und zum Teil befriedigende Übereinstimmung mit numerischen Rechnungen gefunden, bei denen die Maxwell-Verteilung für die Ionen angenommen wurde.

Eine Betrachtung der Neutralteilchenrandschicht ist auch bei den großen Plasmatransportcodes von Boujot, Mercier, Morera und Soubbaramayer<sup>17)</sup> sowie bei Düchs<sup>9)</sup> erforderlich, da die Neutralteilchen über den Ladungsaustauschprozeß in die Energiebilanz eingehen. Während Mercier und Soubbaramayer eine Integralgleichungsmethode verwenden, lassen sich die Düchs'schen Ansätze als verschiedene Glieder der zur Integralgleichung gehörenden Neumannschen Reihe interpretieren.

Dieser Zusammenhang soll hier näher betrachtet werden. Ein Vergleich der Düchs'schen Gleichungen<sup>9)</sup> (Gl. 18, 19) mit Gl. IV.3 zeigt zunächst, daß der Exponent bei Düchs  $[\frac{1}{v} \int_0^l n_i(\alpha+c) dl']$  gerade die optische Tiefe  $\beta(\bar{r}, \bar{r}', v)$  ist.

Geht man von der Integralgleichung (III.2) aus, so ist die erste Näherung der Neumannschen Reihe

$$n_1(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{v} \iiint_V \frac{dV'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} e^{-\beta(\bar{r}, \bar{r}', v)} S(\bar{r}, v)$$

Der DÜCHS'sche Ansatz für die Quelle kalter Neutralteilchen ist:

$$S(\bar{r}, v) = \delta(v - v_0) \cdot v_0 \cdot n_{c0} \delta(\bar{r} - \bar{r}_{RAND})$$

Für die erste Näherung der Integralgleichung gilt dann

$$n_1(r) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{dV'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} e^{-\beta(\bar{r}, \bar{r}', v_0)} n_{c0} \delta(\bar{r} - \bar{r}_{RAND})$$

Führt man hier um den Punkt  $\bar{r}$  Kugelkoordinaten ein, so geht mit

$$dV' = |\bar{r} - \bar{r}'|^2 d(|\bar{r} - \bar{r}'|) \sin\varphi d\varphi d\vartheta = l^2 dl \sin\varphi d\varphi d\vartheta$$

das Volumenintegral in

$$n_1(r) = \frac{n_{c0}}{\pi} \int_0^\pi d\vartheta e^{-\beta(r, \bar{r}_{RAND}, v_0)}$$

über. Diese Form ist mit der DÜCHS'schen Gl. 18 identisch. Das zweite Glied der Neumannschen Reihe der Integralgleichung ist:

$$\begin{aligned} n_2(r) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{v} \iiint_V \frac{dV'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} e^{-\beta(\bar{r}, \bar{r}', v)} Q(r', v) \Big|_{n_0=n_1} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{v} \iiint_V \frac{dV'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} e^{-\beta(\bar{r}, \bar{r}', v)} c_u n_1 n_i \tilde{f}_i(\bar{r}, v) \end{aligned}$$

Nimmt man für die Ionenverteilung eine einheitliche Geschwindigkeit an, die der Temperatur an diesem Ort entspricht, ( $\tilde{f}_i(\bar{r}, v) = \delta(v - v_{h1}(\bar{r}))$ ) so gilt:

$$n_2(r) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{dV'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} e^{-\beta(\bar{r}, \bar{r}', v_{h1}(\bar{r}'))} \frac{1}{v_{h1}(\bar{r}')} c_u n_1 n_i$$

Führt man nun wieder um den Punkt  $r'$  Kugelkoordinaten ein, so ergibt sich mit

$$n_2(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{\ell_{AP}} c_u n_1 n_i e^{-\beta(\bar{r}, \bar{r}', v_{n_1}(\ell))} \frac{d\ell}{v_{n_1}(\ell)}$$

die Düchs'sche Gl. 19 als weitere Näherung der Neumannschen Reihe. Der beschriebene Formalismus kann bis zu beliebigen Ordnungen der Neumannschen Reihe fortgesetzt werden. Im Düchs'schen Programm können bis zu 20 Ordnungen berechnet werden, wobei ia. 5 Ordnungen ausreichend sind. Von den Eigenschaften einer Neumann-Reihe ist bei größeren Werten von  $\beta = c_u / \alpha + c_u$  schlechtere Konvergenz zu erwarten.

## VI. Numerische Berechnungen

### a) Das Verfahren

Die Standardverfahren zur Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung, wie sie hier vorliegt, werden in vielen Textbüchern beschrieben. Dabei wird zunächst das Integral durch eine Summe angenähert. Wird die entstandene Gleichung an den Aufpunkten der Summe betrachtet, entsteht ein algebraisches Gleichungssystem.

Wegen der bereits früher erwähnten logarithmischen Singularität des Kerns an den Stellen  $y' = y$  läßt sich das Standardverfahren jedoch nicht direkt durchführen. In unserer früheren Arbeit wurden die singulären Diagonalelemente bei  $y = y'$  durch ein Mittel aus den Nachbarwerten ersetzt. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch die Tatsache, daß das Integral  $\int_0^\infty k(y, y') dy'$  existiert, dazu verwendet die Diagonalelemente auf befriedigende Weise zu berechnen.

Die Integralgleichung

$$n_0(y) = \int_0^\infty k(y, y') n_0(y') dy' + g(y)$$



wird zunächst in die Form

$$n_0(y) = \sum_{j=1}^N \int_{\Delta y_j} K(y, y') n_0(y') dy' + g(y)$$

umgeschrieben. Dabei werden die Intervalle  $\Delta y_j$  so ausgewählt, daß sich das ursprüngliche Gebiet  $(0, \infty)$  aus diesen Intervallen zusammensetzt. Diese Intervalle werden dann als so klein angenommen, daß die Neutralteilchendichte  $n_0(y')$  im jeweiligen Gebiet  $\Delta y_j$  durch eine Konstante  $n_0(y_j)$   $y_j \in \Delta y_j$  ersetzt werden kann:

$$n_0(y) = \sum_{j=1}^N n_0(y_j) \int_{\Delta y_j} K(y, y') dy' + g(y)$$

Wählt man für  $y$  gerade die Stellen  $y = y'$ , so entsteht wie bei dem Standardverfahren ein Gleichungssystem

$$n_0(y_i) = \sum_{j=1}^N n_0(y_j) \left\{ \int_{\Delta y_j} K(y_i, y') dy' \right\} + g(y_i) \quad i=1, N$$

Jedes der einzelnen Integrale  $\int_{\Delta y_j} K(y_i, y') dy'$  existiert und zwar auch dann wenn das Integral  $\Delta y_j$  die singuläre Stelle  $y_i$  enthält. Da die einzelnen Integrale analytisch ausgewertet werden können, ist das Verfahren für das hier vorliegende Problem besonders günstig.

## b) Ionenverteilung

Die Ionenverteilung wurde hier nicht von vornherein spezialisiert. Jedoch bietet sich die Annahme zweier Funktionen an. Es ist einerseits die von den russischen Autoren bevorzugte Verteilungsfunktion  $f_i = \frac{1}{2} (\delta(v_i - v_x) + \delta(v_i + v_x))$ . Die Integralgleichung ist in diesem Fall analytisch lösbar. In dieser Arbeit wird jedoch für die Ionen eine Maxwell-Verteilung angenommen:

$$f_i(v) = \frac{1}{v_i^3 \pi^{3/2}} e^{-v^2/v_i^2}$$

bzw. in der Normierung der Neutronenphysik

$$f_i(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_i^3} e^{-v^2/v_i^2}$$

Ein Vergleich zwischen dem analytisch lösbaeren Fall und der Maxwell-Verteilung wurde in unserer früheren Arbeit durchgeführt.

c) Reflexionsmechanismen

Neben einer Festsetzung der Reflexionskoeffizienten  $R_i$  und  $R_D$  ist im Falle der diffusen Reflexion auch eine Annahme über die Verteilung  $F_W(v_x)$  zu treffen. Diese Verteilungsfunktion beschreibt, wie die an der Wand reflektierten Neutralteilchen wieder ins Plasma zurückkommen. Für diese Verteilung wird hier eine - im Vergleich zum Plasma - kalte Maxwell-Verteilung angenommen:

$$F_w(v_x) = \frac{2}{v_k^2} e^{-v_x^2/v_k^2}$$

Dabei wird die Größe  $v_k$  im allgemeinen zu  $v_k/v_i = 0.1$  angenommen.

d) Quellen

Die vorliegende Integralgleichung ist nur lösbar, wenn der inhomogene Term  $g(y) \neq 0$  ist. Zur Spezifikation der Quellen, die dieser Term enthält, ist in ebener Geometrie die Angabe der Verteilungsfunktion  $F_o^+(0, v_x)$  bzw. in Zylindergeometrie die Angabe der Funktion  $S(x, v)$  erforderlich. Diese Funktionen enthalten an der Wand rekombinierte und als Neutrale ins Plasma zurückströmende Plasmateilchen.

Für  $F_o^+$  wurden gewählt:

$$F_o^+(0, v_x) = \frac{1}{v_{k0}} \delta(v_x - v_{x0})$$

und

$$F_o^+(0, v_x) = \frac{2}{v_{k0}^2} e^{-v_x^2/v_{k0}^2}$$

In ebener Geometrie werden stets beide Fälle gerechnet. Die Geschwindigkeit, mit der die Teilchen von der Wand in das Plasma strömen, wird auch hier zu  $v_{k0}/v_i = 0.1$  gesetzt.

Da die genaue Form der physikalischen Quellen von Neutralteilchen nicht bekannt ist, erscheint die allgemeine Form für den inhomogenen Term im Fall der Zylinderkoordinaten zu aufwendig. Daher wird dieser Term durch einige Näherungen vereinfacht.

Für die Quellfunktion wird zunächst

$$S = \langle \sigma v \rangle_{FC} n_i \int (v - v_{k0}) n_{H_2} e^{-\frac{\langle \sigma v \rangle_{FC} n_i}{v_{k0}} (R-r)}$$

angesetzt.  $\langle \sigma v \rangle_{FC}$  ist eine Rate mit der kalte Wasserstoffatome in der Randschicht erzeugt werden, z.B. Frank-Condon Prozesse. Durch Koordinatentransformation und einen Grenzübergang für  $\langle \sigma v \rangle_{FC} \gg \alpha + C$  erhält man für den inhomogenen Term der Integralgleichung bei konstanten Plasmaprofilen:

$$g(f) = \frac{n_{H_2}}{u_{k0}} f_R \int_1^\infty K_0\left(\frac{f_R}{u_{k0}} y\right) I_0\left(\frac{f}{u_{k0}} y\right) dy$$

e) Rechnungen in ebener, eindimensionaler Geometrie

Die Ergebnisse werden durch die Neutralteilchendichteprofile, die Verteilungsfunktion und die Flußfunktion der herauslaufenden Neutralteilchen wiedergegeben. In Abb. 1 ist zunächst der Einfluß des Umladungsprozesses auf das Dichteprofil der Neutralteilchen zu erkennen. Hierbei ist noch die Plasmatemperatur konstant gehalten und Reflexion nicht berücksichtigt. Die Verteilungsfunktion der in das Plasma hineinlaufenden Neutralteilchen ist monochromatisch  $F_0^+ = F_L \frac{1}{v_{k0}} \delta(v_x - v_{k0})$  mit einem Gesamtfluß von  $F_L = 1 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ . Diese Zahl, die etwa experimentellen Werten entspricht, wird auch bei den folgenden Rechnungen angenommen. Bei einem anderen Wert sind die errechneten Kurven in der gewählten halblogarithmischen Darstellung lediglich nach oben oder unten zu verschieben. Die in den Abbildungen stets mit eingezeichnete Kurve " $\beta = 0.0$ " erhält man,

wenn Ionisation und Ladungsaustausch lediglich als Verlustprozeß betrachtet und den Transporteffekt des Umladungsprozesses vernachlässigt. Diese Kurve repräsentiert die "kalten" Neutralteilchen.

Das Neutralteilchendichteprofil bei einer angenommenen Plasmadichte und einem Temperaturprofil ist in Abb.2 aufgezeichnet. Plasmadichte und Temperatur steigen in der eingezeichneten parabolischen Form auf einen Maximalwert an. Bei den ausgezogenen Kurven wurden die hereinlaufenden Neutralteilchen monochromatisch angenommen und bei den gestrichelten Kurven eine "kalte" Maxwell-Verteilung. Bei der Maxwellschen Verteilungsfunktion für die hereinlaufenden Neutralteilchen gibt es eine Anzahl sehr langsamer und sehr schneller Teilchen. Daher ist die Neutralteilchendichte durch die sehr langsamen Teilchen an der Wand und durch die sehr schnellen Teilchen bei größerer Entfernung von der Wand höher als bei der vergleichbaren monochromatischen Verteilungsfunktion. Die Unterschiede zwischen beiden Randbedingungen sind jedoch nicht sehr groß.

In Bild 3 werden Einfluß des Temperaturprofils der Ionen sowie Einfluß der Reflexion auf das Neutralteilchendichteprofil untersucht. Die im Profilverfall in der Nähe der Wand geringen Ionentemperaturen haben zur Folge, daß die Neutralteilchen nicht so weit in das Plasma hineindringen. In jedem Fall wird die Neutralteilchendichte an der Wand durch Reflexion erhöht.

In den nächsten Abbildungen ist die Verteilungsfunktion bzw. der Fluß der herauslaufenden Neutralteilchen als Funktion der Energie aufgetragen, wobei die Abzisse mit der Maximalenergie normiert wurden. Die gestrichelten Linien mit der Steigung 1 würden sich ergeben, wenn die Verteilungsfunktion der herauslaufenden Teilchen eine Maxwell-Verteilung mit der Ionengeschwindigkeit  $v_i^L$  wäre. Aus Abb.6, wo der Fluß der herauslaufenden Neutralteilchen gegen die Energie aufgetragen ist, ist zu erkennen, daß ein Ablesen der Ionentemperatur aus diesem Graphen zu besseren Resultaten führt, als ein Ablesen aus der Verteilungsfunktion.

In Abb.7 und 8 sind der normierte Teilchen- und Energiefluß auf die Wand als Funktion von  $\beta = \frac{c_u}{\alpha + c_u}$  aufgetragen. Verschiedene Plasmadichte- und Temperaturprofile wurden bei den folgenden Abbildungen angenommen. Die Plasmaprofile parabolischer Form sind in der Abb.9 mit eingezeichnet.

Abb.10 enthält die hierzu gehörenden Verteilungs- und Flußfunktionen als Funktion der Energie. Die Unterschiede zwischen den verschiedenen Plasmaprofilfunktionen bewegen sich in diesem Fall allerdings innerhalb der Strichstärke der Graphen. Da die experimentellen Meßfehler jedoch wesentlich größer sein dürften, scheint es nicht möglich zu sein, in diesem Fall aus der Verteilungs- bzw. Flußfunktion auf das Ionenprofil zu schließen. Bei der folgenden Abb.11 wurde dieselbe Form der Profile, jedoch mit höherer Plasmadichte

( $n_{i \text{ max}} = 1 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ;  $T_{i \text{ max}} = 300 \text{ eV}$ ) und kleinerer Temperatur angenommen.

Die errechneten Neutralteilchendichteprofile zeigen hier im Bereich von der Wand bis zu  $x = 10 \text{ cm}$  untereinander größere Unterschiede als im niedrigeren Dichtefall von Abb.9. Im Abstand von 10 cm von der Wand, wo Plasmadichte und Temperatur ihr Maximum erreichen, ist die Neutralteilchendichte verschwindend klein. Daher gestattet die in Abb.12 aufgezeichnete Flußfunktion das Ablesen der Maximaltemperatur nicht. Jedoch sind hier größere Unterschiede zwischen den einzelnen Plasmaprofilen vorhanden. Im Fall der höheren Neutralteilchendichte (niedrigere Plasmadichte) verläuft die Steigung der Flußfunktion bei kleinerem  $(v/v_{iL})^2$  steiler, und bei größerem  $(v/v_{iL})^2$  flacher als im Fall der niedrigen Plasmadichte. Zwar deutet die stärkere Krümmung dieser Kurve auf das flache, parabel-förmige Iontemperaturprofil hin, jedoch lassen die Meßfehler auch hier eine Auflösung der Integralgleichung II.8 nach dem Iontemperaturprofil wenig erfolgversprechend erscheinen.

f) Rechnungen in Zylindersymmetrie mit konstanten Plasmaparametern

Bei konstanten Plasmaprofilen läßt sich die allgemeine Integralgleichung nicht nur stark vereinfachen, es lassen sich auch die gleichen numerischen Methoden anwenden wie im ebenen, eindimensionalen Fall. Dabei bilden die auftretenden Bessel-Funktionen keine zusätzlichen Schwierigkeiten. In Abb.13 sind die Neutralteilchenprofile bei verschiedenen  $\beta = \frac{c_u}{\alpha + c_u}$  aufgetragen. Die Profile zeigen das "Zulaufen" des Plasmazyinders durch ladungsausgetauschte Neutralteilchen. Die realen Werte der Ratenkoeffizienten entsprechen einem Wert von  $\beta = 0.6$ . Die Neutralteilchenprofile, die sich bei verschiedenen Werten von Plasmadichte und Temperatur ergeben, sind in Abb.14 aufgezeichnet. Ein Neutralteilchenprofil gehört stets zu zwei Paaren von Plasmadichte und Temperatur. In der Abb.15 ist der Einfluß der Zylindergeometrie, d.h. von verschiedenen Plasmaradien erkennbar. Die Neutralteilchendichten sind bei den gewählten Plasmadichten und Temperaturen bei kleinen Radien merklich höher als bei einem Plasmaradius von 80 cm, der dem ebenen Fall entspricht.

g) Variable Plasmaparameter

Numerische Rechnungen wurden auch im Fall der Zylindergeometrie und variablen Plasmaprofilen durchgeführt. Hier lassen sich die numerischen Methoden, die für den ebenen Fall erarbeitet wurden, jedoch nicht ohne weiteres übertragen. Daher sind die numerischen Fehler, die sich bei diesen Rechnungen ergeben, erheblich.



## VII. Zusammenfassung

Die kinetische Beschreibung der Randschicht wurde in dieser Arbeit auf inhomogene Plasmaparameter sowie auf Zylinderkoordinaten ausgedehnt. Die Berechnung der Neutralteilchenrandschicht wird bei fest angenommenen Plasmaparametern durch Lösung einer Integralgleichung für die Neutralteilchendichte durchgeführt. Dabei gibt die Gl. II.8 die Beziehung zwischen Verteilungsfunktion der herauslaufenden Teilchen einerseits und Plasmaprofilen sowie dem Neutralteilchenprofil andererseits wieder. Diese Beziehung stellt eine Integralgleichung für das Ionentemperaturprofil (Profil der mittleren Geschwindigkeit) bei bekannter Verteilungsfunktion der herauslaufenden Neutralteilchen und bekanntem Neutralteilchenprofil - oder eine Integralgleichung für das Neutralteilchenprofil, wenn die Verteilungsfunktion der herauslaufenden Neutralteilchen und das Ionentemperaturprofil bekannt ist - dar. Diese Beziehung ist insbesondere in der Neutralteilchendiagnostik von besonderer Bedeutung. Diese Diagnostik, bei der die Energieverteilung der herausströmenden, ladungsausgetauschten Neutralteilchen gemessen wird, ist heute ein Standardverfahren der Ionentemperaturbestimmung. Die näherungsweise Auswertung dieser Integralbeziehung in Abschnitt II zeigt, daß das bisher übliche Verfahren, wo der Logarithmus der Verteilungsfunktion als Funktion der Energie aufgetragen wird und die Ionentemperatur aus der Steigung dieses Graphen bestimmt wird, nur dann Gültigkeit besitzt, wenn die Neutralteilchendichte konstant ist. Dies ist aber nur bei kleineren Experimenten oder niedrigen Plasmadichten der Fall. Bei größeren Experimenten ist jedoch ein starker Abfall der Neutralteilchendichte nach innen zu erwarten. In diesen Fällen muß jedoch zur Bestimmung der Ionentemperatur der Fluß der herauslaufenden Neutralteilchen aufgetragen und die Temperatur aus der Steigung dieses Graphen bestimmt werden. Die durchgeführten numerischen Rechnungen (Abb. 4, 5, 6, 10, 12) zeigen auch deutlich, daß die Steigung des Graphen  $\ln (v_x F_e(o, v_x))$  vs. Energie die Ionentemperatur (gestrichelte Linien) besser wiedergibt, als die Steigung der Verteilungsfunktion. Gleichzeitig machen die Abbildungen jedoch auch deutlich, daß eine Berechnung des Ionentemperaturprofils, also eine Umkehrung der Integralbeziehung II.8, nicht in allen Fällen

erfolgreich sein dürfte. So liegt z.B. der Einfluß der in Abb.9 angegebenen Temperaturprofile beim Graphen  $\ln(v_x F_-)$  vs. Energie (Abb.10) innerhalb der Strichstärke des Graphen. Hierbei handelt es sich um einen Fall, wo das Neutralteilchenprofil noch weit in das Plasma hineinreicht (Plasmadichte  $n_{\max} = 1 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ). In einem anderen Fall, wo die Neutralteilchendichte stark abfällt (Plasmadichte  $n_{\max} = 1 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ), ist der Einfluß der Temperaturprofile auf die Flußfunktion größer. Um das Temperaturprofil zu bestimmen, muß jedoch sowohl Flußfunktion als auch Neutralteilchendichte gemessen werden. Die unvermeidlichen Meßfehler lassen jedoch auch in diesem Fall die Umkehrung der Integralbeziehung II.8 als schwierig erscheinen.

In Anlehnung an die von der Neutronentransporttheorie üblichen Verfahren wird in Abschnitt III und IV die kinetische Theorie für die Neutralteilchenrandschicht in Zylindergeometrie entwickelt. Für den Fall konstanter Plasmaparameter wird die in Zylindergeometrie gültige Integralgleichung für die Neutralteilchendichte gelöst. Dabei können die gleichen numerischen Verfahren wie in ebener Geometrie verwendet werden, die insbesondere das Problem der logarithmischen Singularität des Kerns umgehen. Obwohl dies im Fall der variablen Plasmaparameter in Zylindergeometrie nicht mehr möglich ist, wurde versucht, die Integralgleichung auch in diesem Fall zu lösen. Das Auftreten der logarithmischen Singularität im Kern sowie zusätzliche Integrationen haben jedoch numerische Ungenauigkeiten zur Folge, so daß die Ergebnisse dieser Rechnungen hier nicht angegeben werden. Mit einer einfachen Methode, die der Neumannschen Reihe der hier betrachteten Integralgleichung äquivalent ist (Abschnitt V), wird das Problem der Neutralteilchenrandschicht auch innerhalb des Düchs'schen Transportcodes gelöst. Die Optimierung unseres Programms in Zylinderkoordinaten wurde daher nicht weitergeführt, zumal die gewonnene Information in ebener Geometrie insbesondere bei höheren Plasmadichten und in bezug auf die Neutralteilchenanalyse von Bedeutung ist.

Herrn Dr. H. Wobig möchte ich für zahlreiche Diskussionen, Anregungen und für die Unterstützung bei dieser Arbeit besonders herzlich danken sowie Fräulein Weikmann für das Schreiben des Manuskripts.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1) Lehnert B., TRITA-EPP-72-05 Report of the Royal Institute of Technology, Stockholm (1972).
- 2) Dnestrovskii Y.N., Kostomarov D.P., and Pavlova N.L. (1972), Atom. Energ. 32, 301 (French Translation EUR-CEA-FC-645-TR)
- 3) Konstantinov O.V., Perel V.I., Soviet Physics-Technical Physics (1961) 5, 1403.
- 4) Greenspan E., Nuclear Fusion (1974), 14, 771.
- 5) Rehker S., Wobig H. Report IPP 2/208 (1973).
- 6) Rehker S., Wobig H. Plasma Physics (1973) 15, 1083.
- 7) Clarke J.F., Sigmar D.J. VIIIth Fusion Lausanne (1975) Vol.1, 134.
- 8) Hackmann J., Kim Y.C., Reuters H., Uhlenbusch, J. Report LuPP (1974)
- 9) Düchs D.F., Furth H.P., Rutherford P.H. Technical Memo TM-265, (January, 1973) Princeton University.
- 10) Abramowitz M., Stegun J.A. Handbook of Mathematical Functions.
- 11) Williams M.M., Mathematical Methods in Particle Transport Theory.
- 12) Davisson, Neutron Transport Theory, Oxford University Press (1958).
- 13) Coharton C.B., Paper presented at the Int. School of Plasma Physics, Varenna (1975).
- 14) Parsons, C.R. and S.S. Medky, Plasma Physics 16, 267 (1974).
- 15) Rivière A.C., Nuclear Fusion 11 (1971) 363.
- 16) Rehker S., Speth E., Report IPP 2/217 (1974).
- 17) Boujot J.P., C. Mercier, J.P. Merera, Soubbaramayer, Report EUR-CEA-FC-683 (1973).

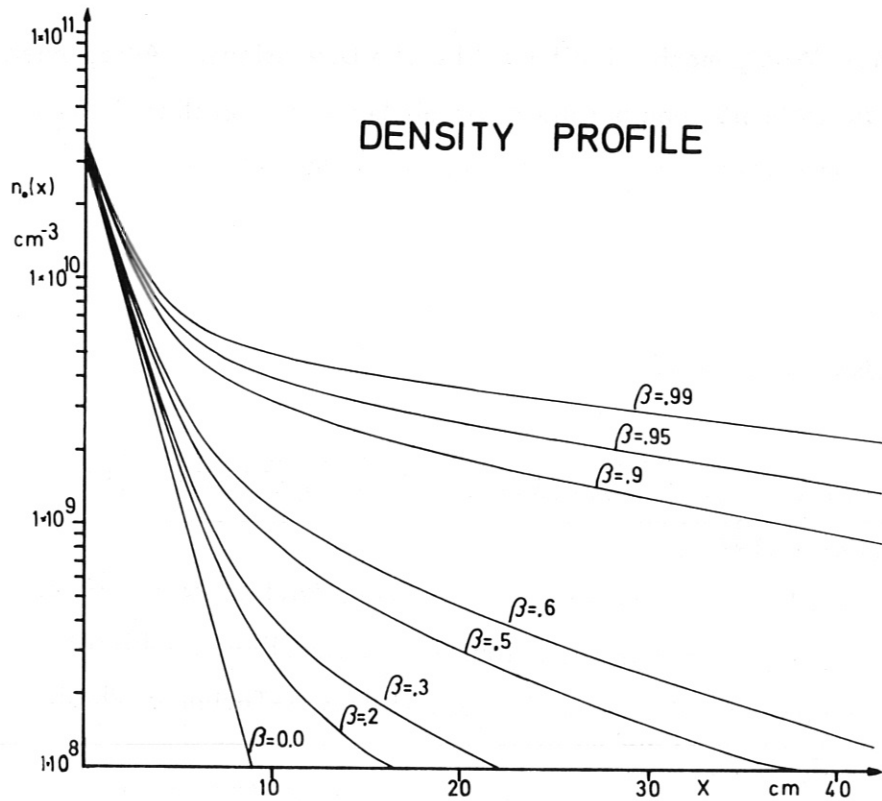


Fig.1: Neutralteilchendichteprofile als Funktion des Abstandes von der Wand. Der Einfluß der Umladung auf das Profil ist zu erkennen. Reellen Werten der Ratenkoeffizienten von Umladung  $c_u$  und Ionisation  $\alpha$  entspricht  $\beta = 0.6$ .

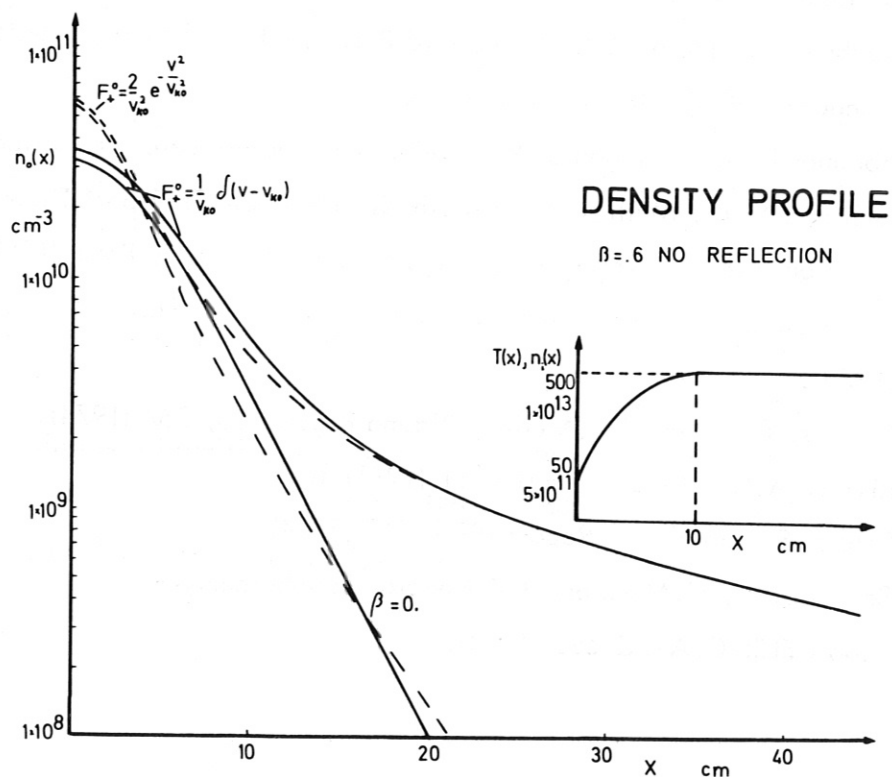


Fig.2: Neutralteilchendichteprofil. Einfluß der Verteilungsfunktion der in das Plasma hineinströmenden kalten Neutralteilchen auf das Profil. Plasmadichte und Temperatur haben den angegebenen, in Wandnähe parabolischen Verlauf.

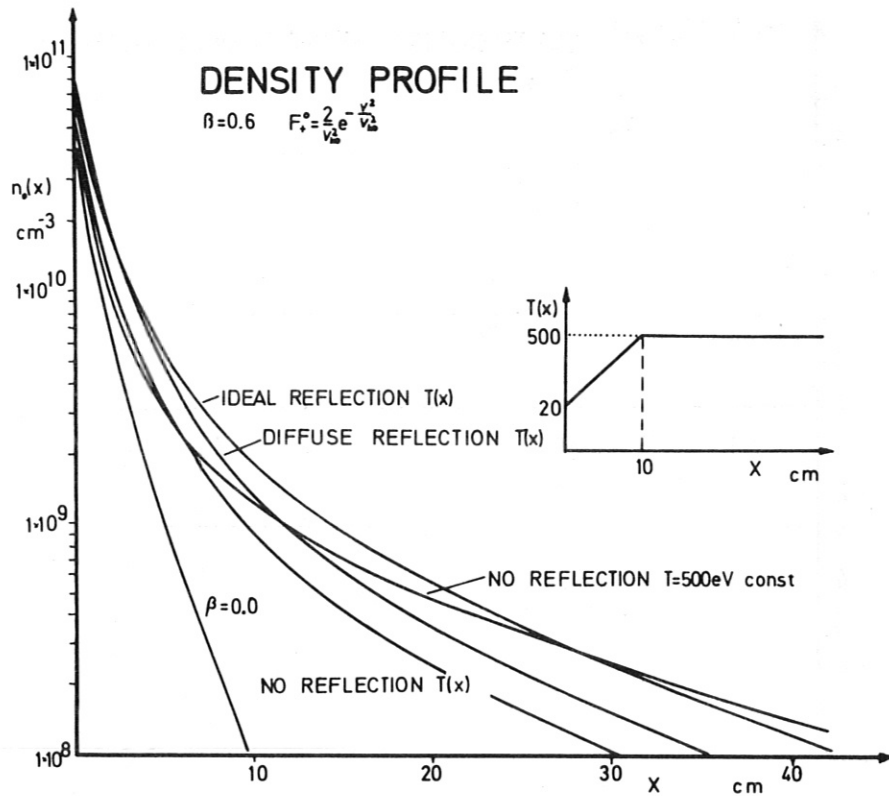


Fig.3: Einfluß von diffuser und idealer Reflexion sowie eines angenommenen Temperaturprofils auf das Neutralteilchendichteprofil.

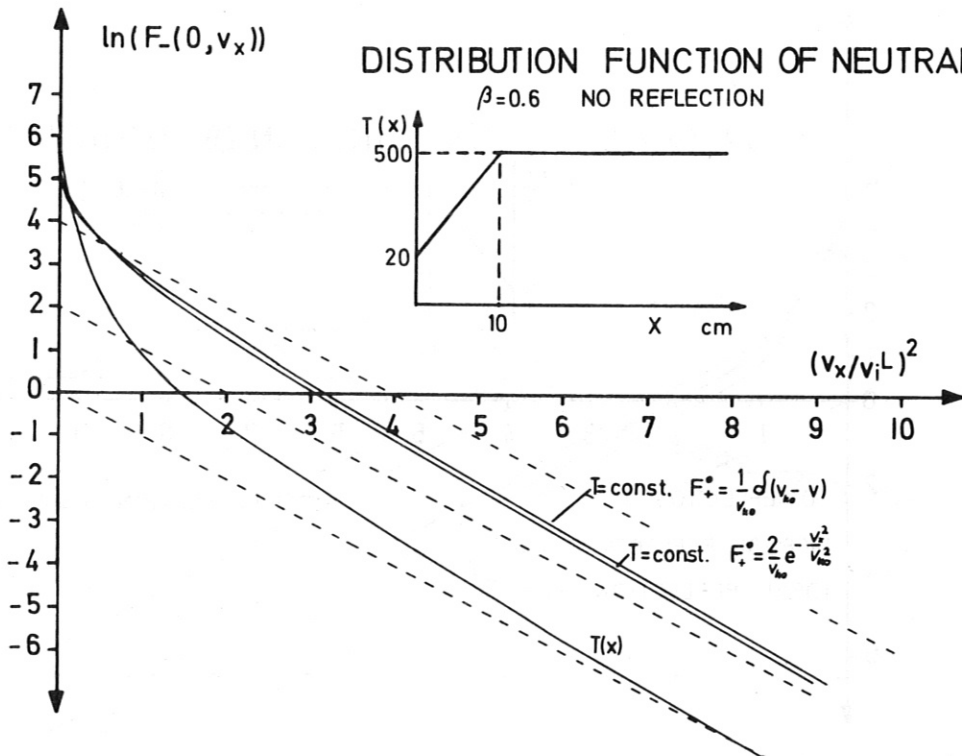


Fig.4: Verteilungsfunktion der herauslaufenden Neutralteilchen als Funktion der Energie. Die Abbildung zeigt den Einfluß der Verteilungsfunktion der hineinströmenden kalten Neutralteilchen sowie eines angenommenen Temperaturprofils.

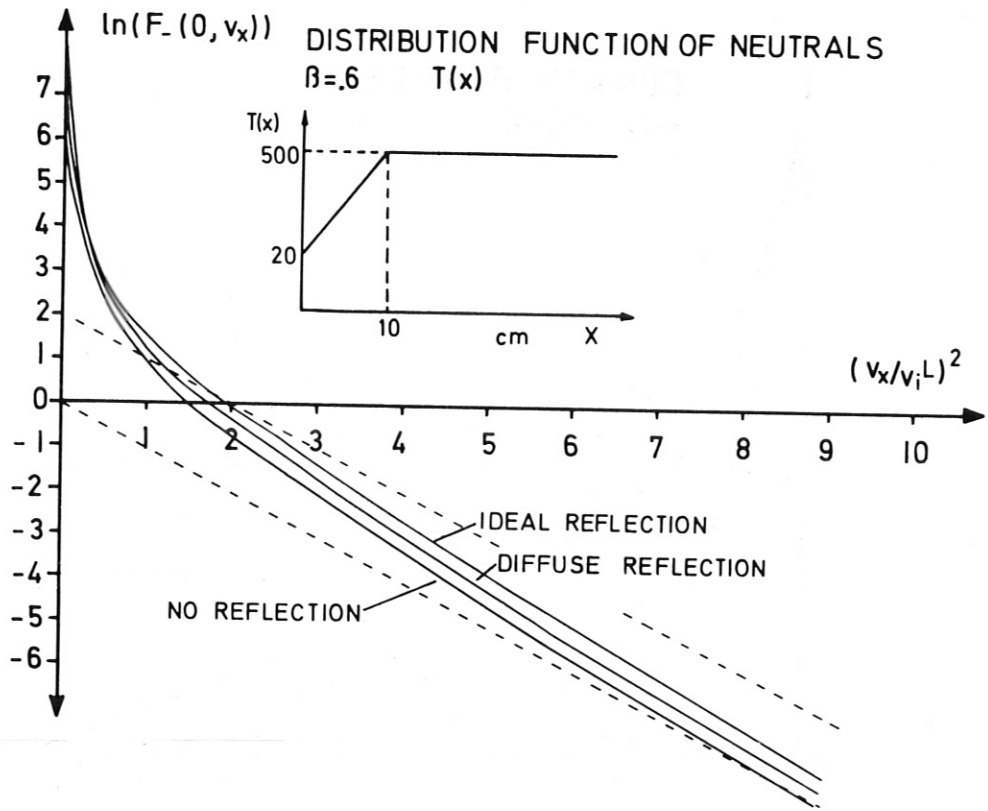


Fig.5: Verteilungsfunktion der herauslaufenden Neutralteilchen als Funktion der Energie. Die Abbildung zeigt den Einfluß der Reflexion auf die Verteilungsfunktion.

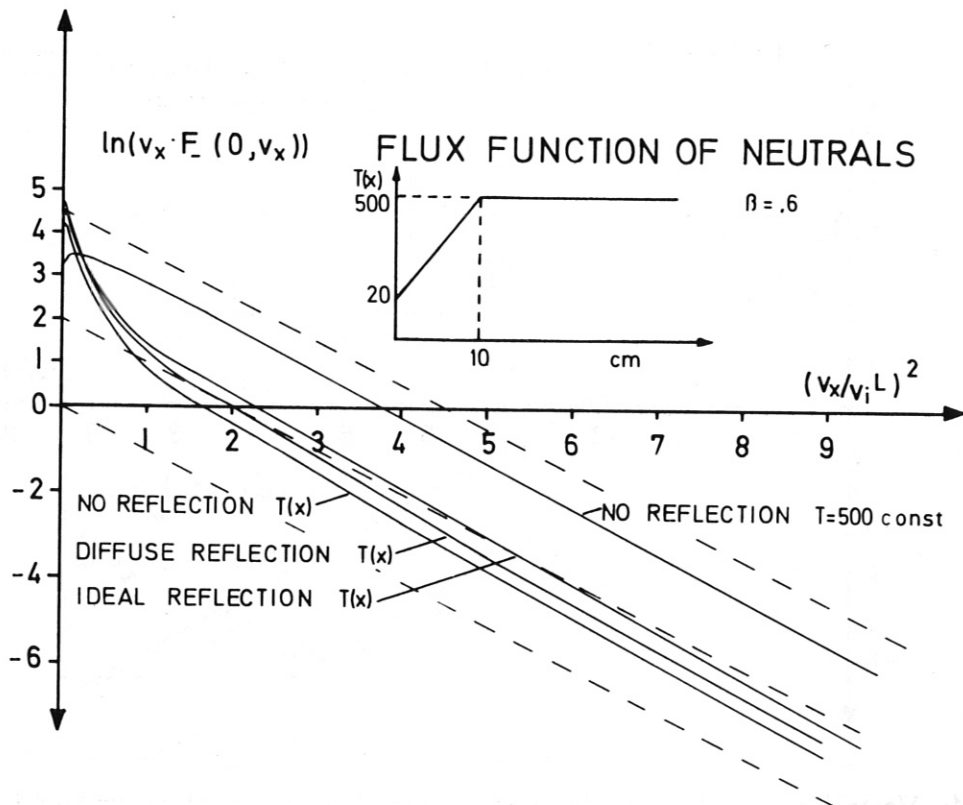


Fig.6: Flußfunktion der herauslaufenden Neutralteilchen als Funktion der Energie. Die Abbildung zeigt den Einfluß eines angenommenen Temperaturprofils sowie der Reflexion auf die Flußfunktion.



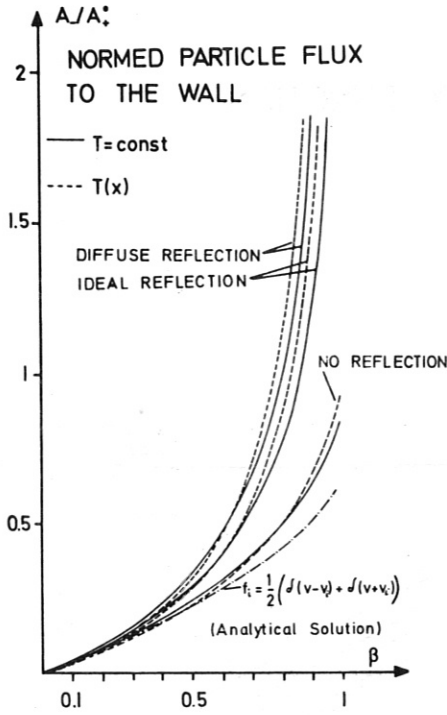


Fig.7: Teilchenfluß auf die Wand

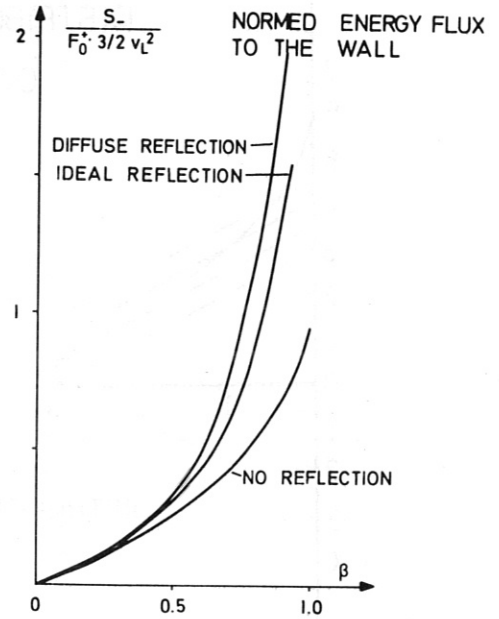


Fig.8: Energiefluß auf die Wand

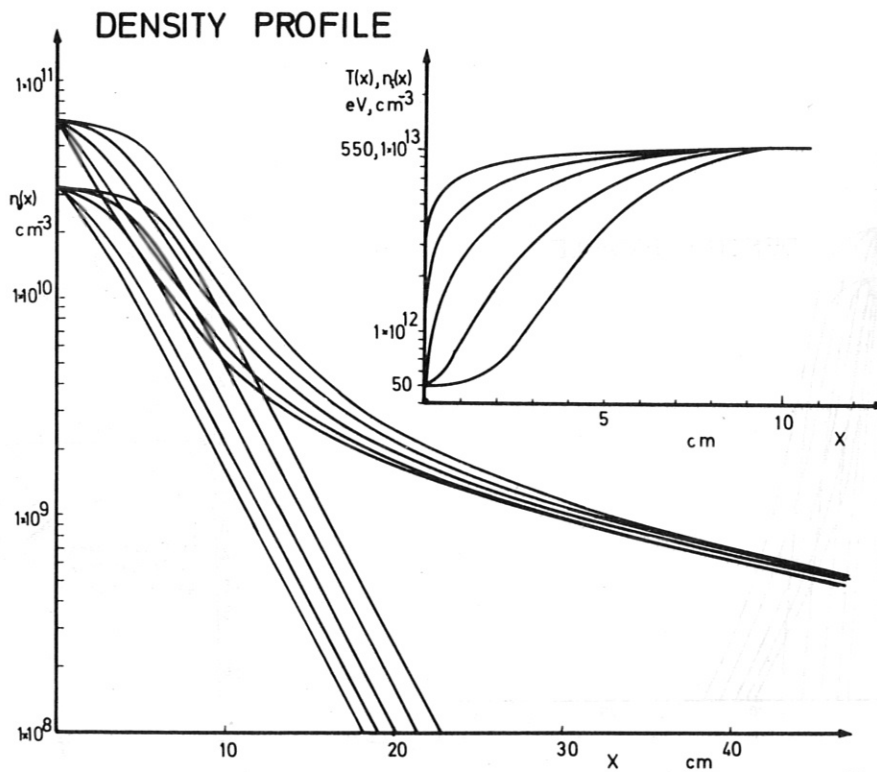


Fig.9: Neutralteilchendichteprofil bei verschiedenen angenommenen Plasmaidichten und Temperaturprofilen.

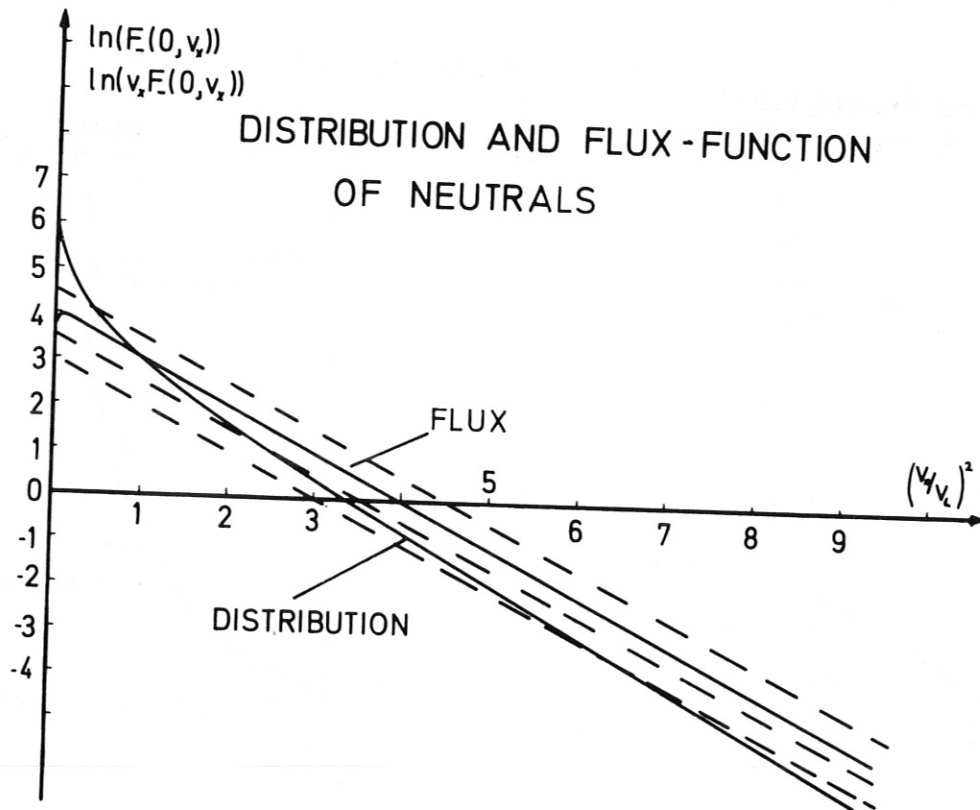


Fig.10: Verteilungs- und Flußfunktion der herauslaufenden Neutralteilchen als Funktion der Energie. Plasmadichte und Temperaturprofile entsprechen der Abb.9, jedoch liegen die Unterschiede innerhalb der Strichstärke der Kurven.

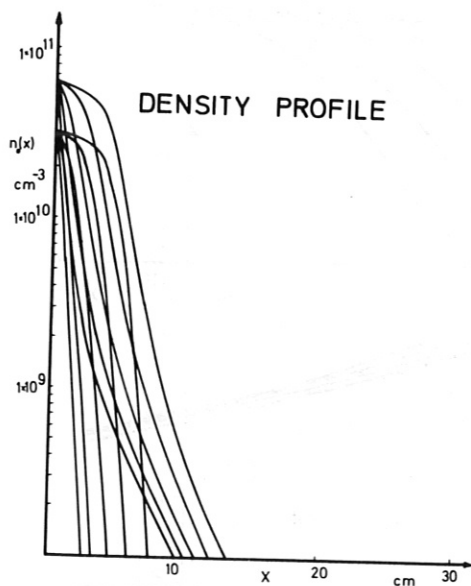


Fig.11: Neutralteilchendichteprofile. Die Form der hierzu gehörenden Plasmadichte und Temperaturprofile ist wie in Abb.9 angenommen, jedoch mit  $T_{i,max} = 300 \text{ eV}$ ;  $n_{i,max} = 1 \cdot 10^{+14} \text{ cm}^{-3}$

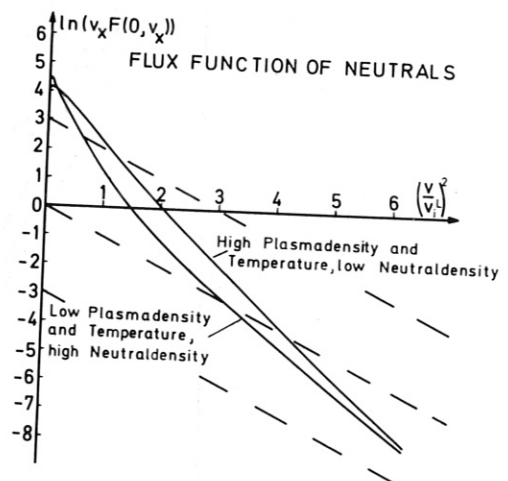


Fig.12: Flußfunktion der herauslaufenden Neutralteilchen. Die beiden Kurven gehören zum kleinsten bzw. größten Neutralteilchenprofil aus Fig.11.

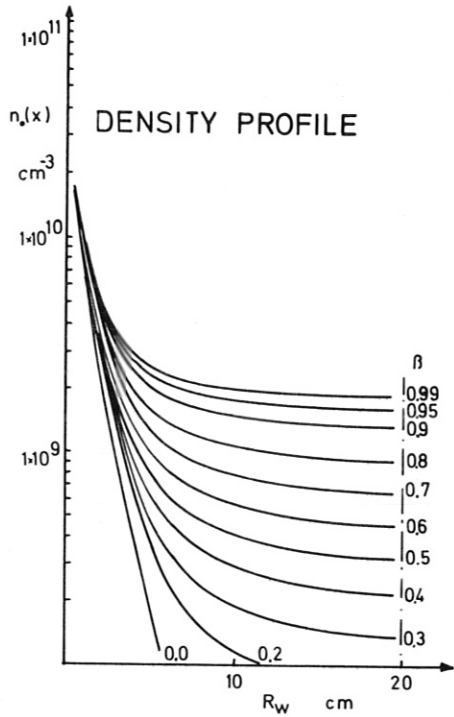


Abb.13: Neutralteilchendichteprofil in Zylinderkoordinaten bei verschiedenen Werten von  $\beta$ . Der Gefäßradius beträgt 20 cm.

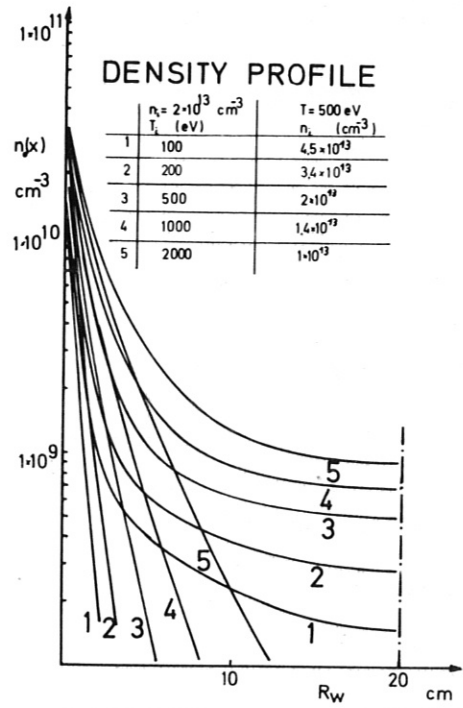


Abb.14: Neutralteilchendichteprofil in Zylinderkoordinaten bei verschiedenen Wertepaaren von Plasmadichte und Temperatur.

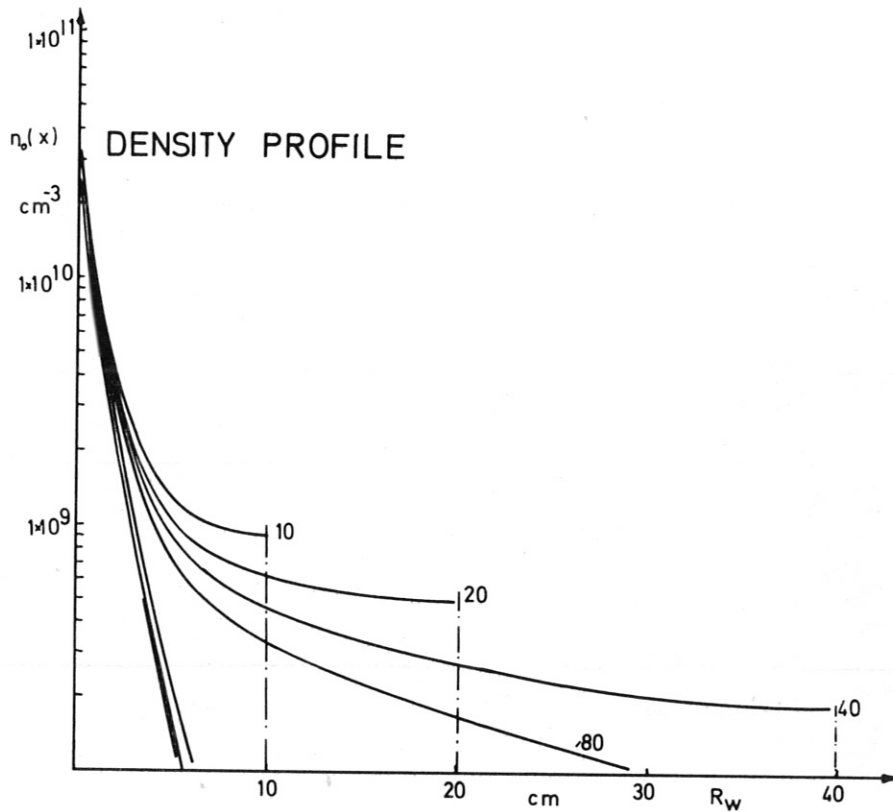


Abb.15: Neutralteilchendichteprofil in Zylinderkoordinaten bei verschiedenen Plasmaradien.