

**Berechnung des magnetischen
Feldes, der magnetischen Kräfte und des
Betriebsverhaltens großer Spulensysteme
für Fusionsexperimente**

**Calculation of the Magnetic Field,
Magnetic Forces and Behaviour of Large
Coil Systems for Fusion Experiments**

H. Preis

IPP III/24

April 1976



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

IPP III/24 H. Preis Calculation of the
MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
Magnetic Forces and
GARCHING BEI MÜNCHEN Behavior of Large Coil
Systems for Fusion Ex-
periments

**Berechnung des magnetischen
Feldes, der magnetischen Kräfte und des
Betriebsverhaltens großer Spulensysteme
für Fusionsexperimente**

**Calculation of the Magnetic Field,
Magnetic Forces and Behaviour of Large
Coil Systems for Fusion Experiments**

H. Preis

IPP III/24

April 1976

The calculation methods described in this paper serve as a basis for designing large coil assemblies, whereby the requirements designed for fusion experiments are incorporated. The calculation method is not restricted to specific coil configurations. The coil geometry may be largely arbitrary and the coils can be arranged in any possible spatial position.

Method of calculation of the magnetic field, the magnetic forces and the self- and mutual inductances of the coils in such coil assemblies is given. The principle of the calculation is the approximation of the winding turns by infinitely thin filaments, their numbers can be freely chosen depending on the desired calculation accuracy. From the field calculations it is possible to calculate magnetic field- and contour lines. As a rule this procedure is numerically very tedious thereby requiring a lot of computing time. The approximation method chosen

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Calculation of the
Magnetic Field,
Magnetic Forces and
Behaviour of Large Coil
Systems for Fusion Ex-
periments

Abstract

The calculation methods described in this paper serve as a basis for dimensioning large coil assemblies, whereby the requirements designed for fusion experiments are incorporated. The calculation method is not restricted to specific coil configurations. The coil geometry may be largely arbitrary and the coils can be arranged in any possible spatial position.

First a method of calculating the magnetic field, the magnetic forces and the self- and mutual inductances of the coils in such coil assemblies is given. The principle of the calculation is the approximation of the winding form by infinitely thin filaments. Their numbers can be freely chosen depending on the desired calculation accuracy. From the field calculations it is possible to calculate magnetic field - and contour lines. As a rule this procedure is numerically very tedious thereby requiring a lot of computing time. The approximation method chosen

here appreciably simplifies matters. The field- and contour line charts provide the clarity indispensable to the design of magnet systems for confinement experiments in fusion research.

For the practical numerical calculations the "HEDO" computer program, which includes all the various calculation possibilities, was developed. Compared with existing methods 14,16,17, which are limited to either the calculation of circular coils or to one of the above mentioned calculation possibilities, this program constitutes a major improvement. The comparison with special cases which can be calculated analytically demonstrates that the accuracy can easily be kept below 1 %.

In a second section of this report calculations are presented which analyse the behaviour of the coils under normal operation and in cases of malfunctioning. For this purpose the time dependence of the currents, voltages and magnetic forces in the coils are investigated. Allowance is thereby made for all inductive couplings, the type of circuits, mode of operation and the other components of the electrical circuit by means of the program "NETZ 3" developed for this purpose. Including switching operations it is possible with this program to calculate the transient branch currents and voltages. On the basis of the instantaneous values of the coil currents the mechanical forces in the coil assembly are then analysed according to magnitude and time behaviour.

In the last section of this report the design criteria for the toroidal coil configuration of the ASDEX tokamak experiment are derived from the calculation methods described. First the fields, forces and inductances are calculated. Then the performance of the coil assembly is analysed in regular operation and in the case of a sudden shorting of one of the coils.

A short results in additional forces being exerted on the coils in directions changing during the discharge. It is shown how the size and direction of these forces depend on the particular form of the discharge of the magnet and by what circuit modifications these forces can be prevented. Since shorting cannot be ruled out generally and as the resulting forces are almost impossible to handle mechanically this consideration is of general interest.

64	4.1 Rechenprogramm
69	4. Numerische Lösung des Netzwerks-Differentialgleichungs-Systems
74	3.4 Fehleranalyse
80	3.3 Numerisches Rechenprogramm
85	3.25 Feldlinien - Niveaulinien
89	3.24 Berechnung der Selbst- und Gegeninduktivitäten
97	3.23 Berechnung der magnetischen Kräfte im Spulenkörper
104	3.22 Feldzerlegung der Linienleiter
108	3.21 Mathematische Beschreibung der Linienleiter im Wicklungskörper
116	3.2 Die Filament-Methode
120	3.1 Überlegungen zur Wahl der Berechnungsmethode
120	3. Numerische Berechnung der magnetischen Felder und Kräfte
128	2.3 Die Analyse transienter Vorgänge in elektrischen Netzwerken
132	2.22 Entwicklung des Netzwerks-Differentialgleichungensystems
135	2.21 Topologische Zusammenhänge
138	2.2 Die Analyse transienter Vorgänge in elektrischen Netzwerken
142	2.13 Die Induktivitäten
145	2.12 Die magnetischen Kräfte
148	2.11 Die magnetische Feldstärke
150	2.1 Die magnetischen Grundgesetze
152	2. Theoretische Grundlagen
158	1.2 Konkrete Berechnung der Kräfte
162	1.1 Physikalischer Hintergrund und technische Zusammenhänge
168	1. Einleitung
172	Inhalt
178	0. Zusammenfassung
182	0. Zusammenfassung
188	0. Zusammenfassung
192	0. Zusammenfassung
198	0. Zusammenfassung
202	0. Zusammenfassung
208	0. Zusammenfassung
212	0. Zusammenfassung
218	0. Zusammenfassung
222	0. Zusammenfassung
228	0. Zusammenfassung
232	0. Zusammenfassung
238	0. Zusammenfassung
242	0. Zusammenfassung
248	0. Zusammenfassung
252	0. Zusammenfassung
258	0. Zusammenfassung
262	0. Zusammenfassung
268	0. Zusammenfassung
272	0. Zusammenfassung
278	0. Zusammenfassung
282	0. Zusammenfassung
288	0. Zusammenfassung
292	0. Zusammenfassung
298	0. Zusammenfassung
302	0. Zusammenfassung
308	0. Zusammenfassung
312	0. Zusammenfassung
318	0. Zusammenfassung
322	0. Zusammenfassung
328	0. Zusammenfassung
332	0. Zusammenfassung
338	0. Zusammenfassung
342	0. Zusammenfassung
348	0. Zusammenfassung
352	0. Zusammenfassung
358	0. Zusammenfassung
362	0. Zusammenfassung
368	0. Zusammenfassung
372	0. Zusammenfassung
378	0. Zusammenfassung
382	0. Zusammenfassung
388	0. Zusammenfassung
392	0. Zusammenfassung
398	0. Zusammenfassung
402	0. Zusammenfassung
408	0. Zusammenfassung
412	0. Zusammenfassung
418	0. Zusammenfassung
422	0. Zusammenfassung
428	0. Zusammenfassung
432	0. Zusammenfassung
438	0. Zusammenfassung
442	0. Zusammenfassung
448	0. Zusammenfassung
452	0. Zusammenfassung
458	0. Zusammenfassung
462	0. Zusammenfassung
468	0. Zusammenfassung
472	0. Zusammenfassung
478	0. Zusammenfassung
482	0. Zusammenfassung
488	0. Zusammenfassung
492	0. Zusammenfassung
498	0. Zusammenfassung
502	0. Zusammenfassung
508	0. Zusammenfassung
512	0. Zusammenfassung
518	0. Zusammenfassung
522	0. Zusammenfassung
528	0. Zusammenfassung
532	0. Zusammenfassung
538	0. Zusammenfassung
542	0. Zusammenfassung
548	0. Zusammenfassung
552	0. Zusammenfassung
558	0. Zusammenfassung
562	0. Zusammenfassung
568	0. Zusammenfassung
572	0. Zusammenfassung
578	0. Zusammenfassung
582	0. Zusammenfassung
588	0. Zusammenfassung
592	0. Zusammenfassung
598	0. Zusammenfassung
602	0. Zusammenfassung
608	0. Zusammenfassung
612	0. Zusammenfassung
618	0. Zusammenfassung
622	0. Zusammenfassung
628	0. Zusammenfassung
632	0. Zusammenfassung
638	0. Zusammenfassung
642	0. Zusammenfassung
648	0. Zusammenfassung
652	0. Zusammenfassung
658	0. Zusammenfassung
662	0. Zusammenfassung
668	0. Zusammenfassung
672	0. Zusammenfassung
678	0. Zusammenfassung
682	0. Zusammenfassung
688	0. Zusammenfassung
692	0. Zusammenfassung
698	0. Zusammenfassung
702	0. Zusammenfassung
708	0. Zusammenfassung
712	0. Zusammenfassung
718	0. Zusammenfassung
722	0. Zusammenfassung
728	0. Zusammenfassung
732	0. Zusammenfassung
738	0. Zusammenfassung
742	0. Zusammenfassung
748	0. Zusammenfassung
752	0. Zusammenfassung
758	0. Zusammenfassung
762	0. Zusammenfassung
768	0. Zusammenfassung
772	0. Zusammenfassung
778	0. Zusammenfassung
782	0. Zusammenfassung
788	0. Zusammenfassung
792	0. Zusammenfassung
798	0. Zusammenfassung
802	0. Zusammenfassung
808	0. Zusammenfassung
812	0. Zusammenfassung
818	0. Zusammenfassung
822	0. Zusammenfassung
828	0. Zusammenfassung
832	0. Zusammenfassung
838	0. Zusammenfassung
842	0. Zusammenfassung
848	0. Zusammenfassung
852	0. Zusammenfassung
858	0. Zusammenfassung
862	0. Zusammenfassung
868	0. Zusammenfassung
872	0. Zusammenfassung
878	0. Zusammenfassung
882	0. Zusammenfassung
888	0. Zusammenfassung
892	0. Zusammenfassung
898	0. Zusammenfassung
902	0. Zusammenfassung
908	0. Zusammenfassung
912	0. Zusammenfassung
918	0. Zusammenfassung
922	0. Zusammenfassung
928	0. Zusammenfassung
932	0. Zusammenfassung
938	0. Zusammenfassung
942	0. Zusammenfassung
948	0. Zusammenfassung
952	0. Zusammenfassung
958	0. Zusammenfassung
962	0. Zusammenfassung
968	0. Zusammenfassung
972	0. Zusammenfassung
978	0. Zusammenfassung
982	0. Zusammenfassung
988	0. Zusammenfassung
992	0. Zusammenfassung
998	0. Zusammenfassung

Berechnung des magnetischen Feldes, der magnetischen Kräfte und des Betriebsverhaltens großer Spulensysteme für Fusionsexperimente

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
1. Einleitung	4
1.1 Plasmaphysikalischer und technischer Hintergrund	4
1.2 Konkretisierung der Aufgabenstellung	6
2. Theoretische Grundlagen	10
2.1 Die magnetischen Grundgesetze	10
2.11 Die magnetische Feldstärke	10
2.12 Die magnetischen Kräfte	12
2.13 Die Induktivitäten	13
2.2 Die Analyse transienter Vorgänge in elektrischen Netzwerken	15
2.21 Topologische Zusammenhänge	15
2.22 Entwicklung des Netzwerks-Differentialgleichungs-Systems	18
3. Numerische Berechnung der magnetischen Felder und Kräfte	20
3.1 Überlegungen zur Wahl der Berechnungsmethode	20
3.2 Die Filament-Methode	26
3.21 Mathematische Beschreibung der Linienleiter im Wicklungskörper	28
3.22 Felddarstellung der Linienleiter	34
3.23 Berechnung der magnetischen Kräfte im Spulenkörper	37
3.24 Berechnung der Selbst- und Gegeninduktivitäten	39
3.25 Feldlinien - Niveaulinien	45
3.3 Numerisches Rechenprogramm	50
3.4 Fehleranalyse	54
4. Numerische Lösung des Netzwerks-Differentialgleichungs-Systems	60
4.1 Rechenprogramm	64

	Seite
5. Berechnungsbeispiel - Das toroidale Hauptfeldspulensystem des Tokamak-Experimentes ASDEX	66
5.1 Das toroidale magnetische Feld	68
5.2 Die Induktivitäten und die gespeicherte magnetische Energie	81
5.3 Beschreibung des Impulszyklus	82
5.4 Numerische Auswertung der magnetischen Kräfte	87
5.41 Ungestörter Betrieb bei voller Erregung	87
5.42 Auswirkungen eines Spulenkurzschlusses	90
6. Schlußbemerkungen	99
7. Zusammenfassung	100
8. Literaturverzeichnis	102

1. Einleitung

1.1 Plasmaphysikalischer und technischer Hintergrund

Das Fernziel der Plasmaphysik ist die Entwicklung eines wirtschaftlich arbeitenden Fusionsreaktors [1, 2, 3]. Zur Erreichung dieses Ziels arbeitet man seit etwa 20 Jahren daran, Wasserstoffplasmen zu erzeugen, deren Temperaturen, Dichten und Lebensdauern die zur Erzielung einer positiven Energiebilanz notwendigen Kriterien erfüllen [4]. Zur Zeit werden zwei verschiedene Wege zur kontrollierten Kernfusion als aussichtsreich betrachtet:

Plasmaeinschluß durch Trägheitskräfte (Laserfusion und Elektronenstrahlfusion) und

Plasmaeinschluß durch magnetische Felder [5].

Beide Linien werden weltweit mit beträchtlichem finanziellen und personellen Aufwand verfolgt. In Deutschland setzt man zur Zeit vorwiegend auf den magnetischen Einschluß und bearbeitet dabei alle wesentlichen Spielarten der sogenannten geschlossenen, toroidalen Anordnungen. Diese Konfigurationen sind folgerichtig aus den zunächst untersuchten linearen Anordnungen entstanden, um deren schwerwiegenden und prinzipiellen Nachteil zu vermeiden. Dieser besteht darin, daß ein Plasma durch ein Magnetfeld zwar stark in seiner Querbewegung behindert wird, jedoch längs des Feldes frei beweglich ist. Die Zeitskala dieses axialen Plasmaverlustes ist durch die thermische Geschwindigkeit der Plasmateilchen und durch die Lineardimension der Maschine festgelegt und folglich sehr klein. Verbesserungen durch Verstärkung des Magnetfeldes an beiden Enden der Maschine (sog. magnetische Spiegel) sind nur graduell und können den prinzipiell auftretenden Verlust nur vermindern, nicht aber verhindern [2,5].

Zur Vermeidung der Endverluste hat man nun die Magnetfeldlinien toroidal geführt und damit eine geschlossene Anordnung geschaffen. Dabei tritt aber ein neues Problem auf: toroidale Magnetfelder nehmen grundsätzlich mit Annäherung an die Symmetrieachse des Torus zu. Deshalb ist die magnetische Kraftdichte in den achsennahen Plasma-

bereichen größer als in den achsenfernen. Um trotzdem ein Gleichgewicht herzustellen, muß man dem toroidalen Hauptfeld ein meridionales Feld überlagern, so daß das resultierende Feld helikal um die Torussele verläuft. Man erzeugt auf diese Weise Flächen, auf denen sich die magnetischen Kräfte und der gaskinetische Plasma- druck gerade die Waage halten. Zu den Einschlußkonzepten dieser Art gehören u.a. die Stelleratoren [5,6] und die Tokamaks [7,8,9]. Bei den letzteren werden die meridionalen Magnetfelder durch einen im Plasma selbst induzierten Ringstrom erzeugt, der gleichzeitig aufgrund der Jouleschen Wärme eine Aufheizung des Plasmas bewirkt. Da diese Ohmsche Heizung mit steigender Plasmatemperatur zunehmend ineffektiv wird, muß man zusätzliche Heizverfahren anwenden, um die erforderlichen Plasmatemperaturen von größenordnungsmäßig 100 Millionen Grad zu erreichen. Das Tokamak wird nach heutigem Wissensstand als Reaktorkonzept favorisiert.

Die beschriebenen magnetischen Felder müssen in Volumina von einigen Kubikmetern bei Flußdichten um 5T über mehrere Sekunden aufrecht erhalten werden. Hinzu kommt, daß zur Erzeugung der Gleichgewichtskonfigurationen enge Toleranzgrenzen eingehalten werden müssen. Die technologischen Probleme beim Aufbau von Fusionsexperimenten liegen deshalb in erster Linie in der Herstellung dieser komplizierten Magnetsysteme (s. Abb.18), die ihrerseits aus einer Vielzahl von Einzelspulen aufgebaut werden müssen. Zunächst entstehen Schwierigkeiten durch die außerordentlich großen magnetischen Kräfte (typisch 1000 Mp), mit denen die Spulen belastet werden und deren Beherrschung große konstruktive Anstrengungen erfordert. Ferner sind zur Erzeugung der großvolumigen Magnetfelder mit den oben angegebenen Flußdichten leistungsstarke Energiequellen notwendig, die in vorgeschriebenen Zyklen innerhalb einiger Sekunden Energien von mehreren GJ abgeben können. Außer der Bereitstellung derart großer Energien stellen auch deren Transfer in die Magnetsysteme und die damit verbundenen dynamischen Vorgänge große Probleme dar. Zur Verminderung der mechanischen Spannungen und des Energiebedarfs werden beispielsweise einige Fusionsexperimente dieser Generation mit speziell geformten nichtkreisförmigen toroidalen Feldspulen ausgerüstet (sog. D-Spulen [35]).

Beim Entwurf von Fusionsmaschinen kann man aus den oben aufgeführten Gründen nicht auf detaillierte numerische Berechnungen ihrer Magnetsysteme und deren Betriebsverhalten verzichten. Dazu müssen neue Berechnungsverfahren verwendet werden, mit denen der im folgenden Abschnitt näher spezifizierten Aufgabenstellung entsprochen werden kann. Da keine geeigneten Verfahren existierten, gab die Projektierung des Garching Tokamak-Experimentes "ASDEX" den Anlaß zur vorliegenden Arbeit.

1.2 Konkretisierung der Aufgabenstellung

Es soll eine Methode entwickelt werden, mit der das stationäre magnetische Feld einer Spulenanordnung, die auf die Spulen ausgeübten magnetischen Kräfte und die Selbst- und Gegeninduktivitätskoeffizienten der Spulen berechnet werden können. Die Spulenanordnung soll aus N Spulen weitestgehend beliebiger Kontur bestehen, die sich in beliebiger räumlicher Lage zueinander befinden (Abb.1). Ihre jeweils w_q Windungen werden von stationären Strömen I_q durchflossen, so daß bei konstanter Querschnittsfläche a_q der Windung überall in ihr eine konstante Stromdichte von

$$G_q = \frac{I_q}{a_q} \text{ für } q = 1(1)N \quad (1)$$

herrscht. Das Berechnungsverfahren soll weitgehendst allgemein gestaltet und anschließend als FORTRAN-Programm formuliert werden. In diesem Programm sollen Unterprogramme zur Bestimmung der magnetischen Feld- und Niveaulinien (Linien konstanter Feldstärke) enthalten sein. Bei der Allgemeinheit des hier zu konzipierenden FORTRAN-Programms ist besonders darauf zu achten, daß ihre Handhabung in möglichst einfacher und übersichtlicher Weise gewährleistet ist.

Zugunsten der Benutzerfreundlichkeit des Programmes werden den Spulen selbst gewisse Voraussetzungen auferlegt, bei deren Festlegung herstellungstechnische Aspekte besonderen Einfluß nehmen sollen. Von den Spulen wird gefordert, daß sie ebene und parallel zueinander verlaufende Stirnseiten besitzen. Damit haben ihre

Wicklungskörper immer rechteckige Querschnittsflächen. Außerdem wird ein mindestens zu einer Achse symmetrischer Spulenkörper vorausgesetzt, der eine beliebige, nur glatte Kontur haben darf. Entlang seines Umfangs sind also keine Ecken erlaubt, z.B. müßte eine Rechteckspule an ihren vier Ecken abgerundet sein (Abb.1). Aus fertigungstechnischen Gründen ist dies ohnehin notwendig, wenn man bedenkt, daß im allgemeinen der Spulenkörper ein- oder mehrlagig aus mehreren, gegeneinander isolierten Windungen spiralförmig gewickelt ist. Die für Fusionsexperimente nötigen Hochstromspulen werden üblicherweise aus Profilstangen hergestellt. Daher werden hier gemäß der anwendungsorientierten Programmkonzeption derartige Spulen gegenüber Drahtspulen bevorzugt behandelt.

Außerdem soll sich das Berechnungsverfahren an den Forderungen der Plasmaphysik orientieren, d. h. es soll vorzugsweise Berechnungen an den dort üblichen Spulenanordnungen ermöglichen. Dabei sind toroidale Spulensysteme, wie sie bei Stellarator- wie auch bei Tokamak-Experimenten üblich sind, von besonderem Interesse. Entsprechend den von den Fusionsexperimenten gestellten Forderungen wird das Berechnungsverfahren für Anordnungen bis zu $N = 50$ Spulen ausgebaut.

Weiterhin soll das elektrische und mechanische Betriebsverhalten der Spulen sowohl im ungestörten Betrieb wie auch im Falle einer Betriebsstörung (plötzlicher Spulenkurzschluß) untersucht werden, d.h. es müssen die zeitlichen Verläufe des Spulenstromes, der Spulenspannung und der magnetischen Kräfte berechnet werden. Diese Aufgabe erfordert die Strom- und Spannungsanalyse des elektrischen Schaltkreises, der die Spulen und ihre Energiequelle miteinander verknüpft. Bei der Analyse müssen neben der individuellen Bestückung des Schaltkreises und der speziellen Betriebs- und Schaltungsart der Spulen auch Schaltvorgänge Berücksichtigung finden. Es muß also ein Berechnungsverfahren aufgestellt werden, mit dem das transiente Verhalten von Strom und Spannung in beliebig vermaschten und beschalteten elektrischen Netzwerken berechnet werden kann.

Aus den Momentanwerten der zu verschiedenen Zeitpunkten in den Spulen herrschenden Stromstärken wird ferner das zeitliche Verhalten der auf die Spulen ausgeübten magnetischen Kräfte bestimmt. Der zeitliche Verlauf der magnetischen Kräfte gibt Aufschluß über die in verschiedenen Betriebsfällen entstehende, dynamische Belastungsart der Spulen.

Auf der Grundlage dieser Berechnungsverfahren wird schließlich der toroidale Spulenverband des derzeit im Aufbau befindlichen Tokamak-Experiments ASDEX konzipiert.

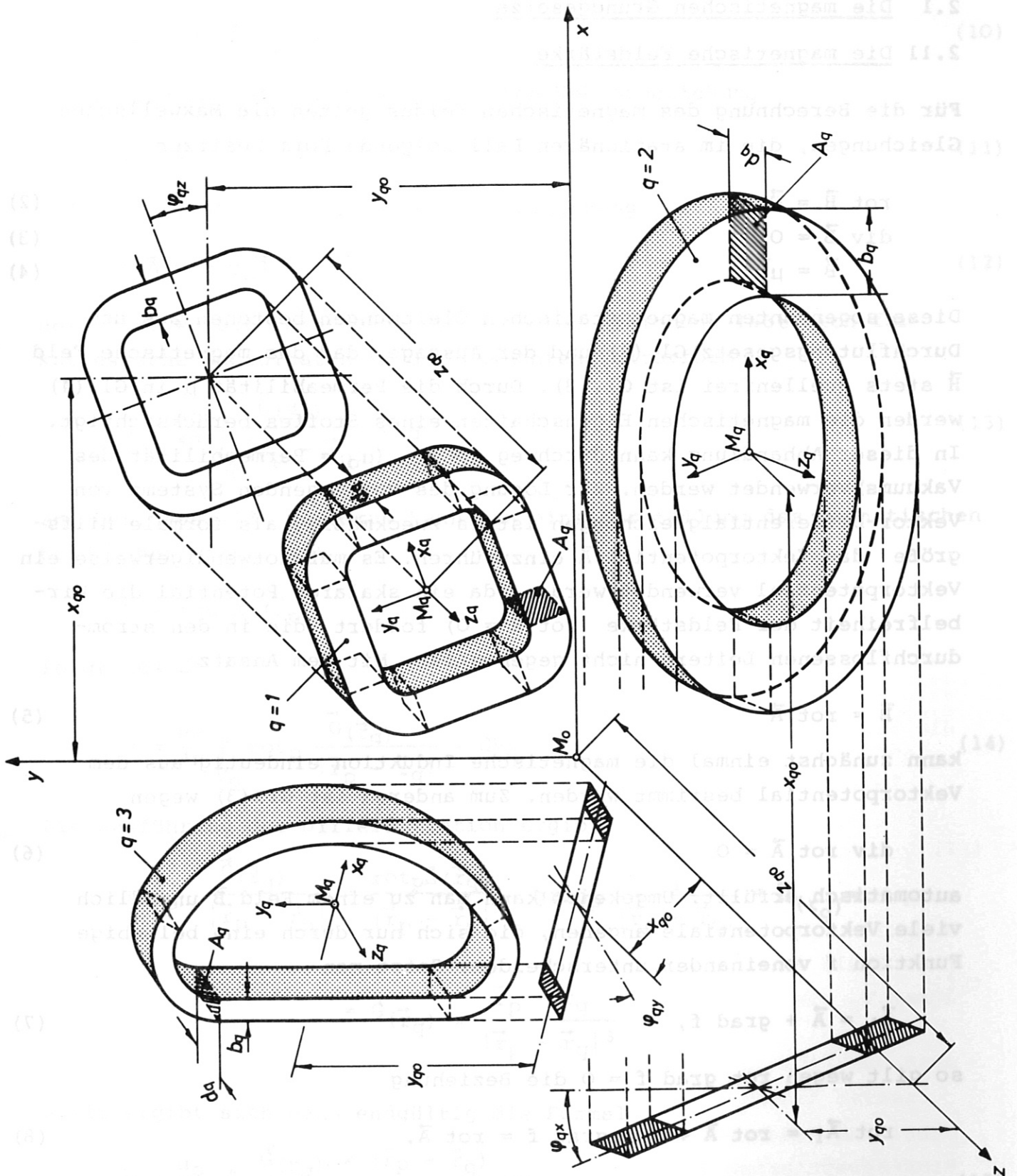


Abb. 1. Beliebige Spulenanordnung

2. Theoretische Grundlagen

2.1 Die magnetischen Grundgesetze

2.11 Die magnetische Feldstärke

Für die Berechnung des magnetischen Feldes gelten die Maxwellschen Gleichungen, die im stationären Fall folgende Form besitzen

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{C}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (4)$$

Diese sogenannten magnetostatischen Gleichungen bestehen aus dem Durchflutungsgesetz Gl.(2) und der Aussage, daß das magnetische Feld \vec{H} stets quellenfrei ist Gl.(3). Durch die Permeabilität μ in Gl.(4) werden die magnetischen Eigenschaften eines Stoffes berücksichtigt. In dieser Abhandlung kann durchweg $\mu = \mu_0$ (μ_0 = Permeabilität des Vakuums) verwendet werden. Zur Lösung des vorliegenden Systems von Vektor-Differentialgleichungen ist es zweckmäßig, als formale Hilfsgröße das Vektorpotential \vec{A} einzuführen. Es muß notwendigerweise ein Vektorpotential verwendet werden, da ein skalares Potential die Wirbelfreiheit der Feldstärke ($\operatorname{rot} \vec{H} = 0$) fordert, die in den stromdurchflossenen Leitern nicht gegeben ist. Mit dem Ansatz

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (5)$$

kann zunächst einmal die magnetische Induktion eindeutig aus dem Vektorpotential bestimmt werden. Zum anderen ist Gl.(3) wegen

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0 \quad (6)$$

automatisch erfüllt. Umgekehrt kann man zu einem Feld \vec{B} unendlich viele Vektorpotentiale angeben, die sich nur durch eine beliebige Funktion f voneinander unterscheiden. Setzt man

$$\vec{A}_1 = \vec{A} + \operatorname{grad} f, \quad (7)$$

so gilt wegen $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ die Beziehung

$$\operatorname{rot} \vec{A}_1 = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (8)$$

Unterwirft man das Vektorpotential \vec{A} der zusätzlichen Bedingung

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (9)$$

so findet man eine besonders einfache Darstellung von \vec{A} . Nach Einsetzen von Gl.(4) und (5) in (2) ergibt sich nämlich

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{G} \quad (10)$$

eine Gleichung, die mit der bekannten Vektorbeziehung

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \quad (11)$$

und der Gl.(9) in die Poisson'sche Gleichung

$$\nabla^2 \vec{A} = - \mu_0 \vec{G} \quad (12)$$

überführt werden kann. Die Lösung dieser Gleichung läßt sich für kartesische Koordinaten in der bekannten Vektorform

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_q} \frac{\vec{G}(\vec{r}_q)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|} dV_q \quad (13)$$

angeben. Aus (13) wiederum kann man eine Darstellung des magnetischen Feldes herleiten. Mit

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} (\vec{r}_p)$$

folgt aus Gl.(13)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_q} \text{rot}_p \frac{\vec{G}(\vec{r}_q)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|} \cdot dV_q \quad (14)$$

Die Ausführung der Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} \text{rot}_p \frac{\vec{G}(\vec{r}_q)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|} &= \frac{\text{rot}_p \vec{G}(\vec{r}_q)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|} + \text{grad}_p \frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|} \times \vec{G}(\vec{r}_q) = \\ &= \vec{G}(\vec{r}_q) \times \frac{\vec{r}_p - \vec{r}_q}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|^3} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann endgültig die Formel

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_q} \frac{\vec{G}(\vec{r}_q) \times (\vec{r}_p - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|^3} dV_q, \quad (15)$$

mit der die Magnetfelder beliebiger Ströme berechnet werden können. Gl. (15) ist die allgemeinste Form des Biot-Savart'schen Gesetzes. Die darin verwendeten Bezeichnungen gehen aus Abb. 3 hervor. Sie besagt, daß sich das Magnetfeld in einem beliebigen Aufpunkt P aus der Integration des Kreuzproduktes von Stromdichte \vec{G} mit dem Vektor \vec{r}/r^3 , ($\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_q$ der Verbindungsvektor zwischen Aufpunkt P und Quellpunkt Q) über das stromführende Leitervolumen ergibt.

Mit der Darstellung der magnetischen Induktion nach Gl.(15) läßt sich nun das resultierende Feld eines Verbandes aus N Spulen aus der Superposition der N Feldanteile berechnen:

$$B_r = \sum_{q=1}^N B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{q=1}^N \int_{V_q} \frac{\vec{G}(\vec{r}_q) \times (\vec{r}_p - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|^3} dV_q. \quad (16)$$

Darin kennzeichnet der Quellpunktindex q gleichzeitig den Feldanteil der q-ten Spule im willkürlich vorgegebenen Aufpunkt P.

2.12 Die magnetischen Kräfte

Zur Berechnung der auf die N Spulen wirkenden magnetischen Kräfte wird ein infinitesimales Volumenelement dV_p des p-ten Leiters in dem die Stromdichte \vec{G}_p herrscht, betrachtet. Auf dieses Volumenelement wird bei Anwesenheit eines magnetischen Feldes die magnetische Kraft

$$d\vec{F}_p = (\vec{G}_p \times \vec{B}_r) dV_p \quad (17)$$

ausgeübt. Dabei ist \vec{B}_r die resultierende magnetische Induktion aller N Spulen, die nach Gl. (16) zu bestimmen ist. Die Gesamtkraft auf die p-te Spule folgt dann aus der Integration über ihr ganzes Leitervolumen V_p aus

$$\vec{F}_p = \int_{V_p} (\vec{G}_p \times \vec{B}_r) dV_p. \quad (18)$$

Dabei muß beachtet werden, daß zur Bestimmung von \vec{B}_r mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes schon eine Volumenintegration über alle Leitervolumina vorausgegangen war. Wird in Gl.(18) die resultierende magnetische Induktion \vec{B}_r durch diejenige der q-ten Spule \vec{B}_q ersetzt,

so ist

$$\vec{F}_{pq} = \int_{V_p} (\vec{G}_p \times \vec{B}_q) dV_p \quad (19)$$

der Anteil an der Kraft F_p , der von der q -ten Spule herrührt.

2.13 Induktivitäten

Ausgehend von der magnetischen Energie W_m sollen in diesem Abschnitt die Induktivitätskoeffizienten *) L_{pq} der aus N Spulen bestehenden Anordnung ermittelt werden.

Bei konstanter Permeabilität μ_0 wird die im Spulenverband gespeicherte Energie beschrieben durch

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B}_r \vec{H}_r dV. \quad (20)$$

Darin kennzeichnet der Index r wie bisher das resultierende Feld aller Spulen. In Gl.(20) ist über den gesamten Raum zu integrieren, weil sich das magnetische Feld bis ins Unendliche erstreckt. Diese unhandliche Integration kann man durch eine bequemere ersetzen, wenn man Gl.(5) in Gl.(20) einsetzt und außerdem die Identität

$$\text{div}(\vec{H}_r \times \vec{A}_r) = \vec{A}_r \text{rot} \vec{H}_r - \vec{H}_r \text{rot} \vec{A}_r \quad (21)$$

benutzt. Man erhält dann

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A}_r \text{rot} \vec{H}_r dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\vec{H}_r \times \vec{A}_r) dV \quad (22)$$

In dieser Beziehung kann man das zweite, über den unendlichen Raum zu erstreckende, Volumenintegral mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Hüllenintegral über die unendlich ferne Hülle überführen, auf der $|\vec{H}|$ mit r^{-2} und $|\vec{A}|$ mit r^{-1} gegen Null streben. Deshalb gilt:

*) Im folgenden kurz mit Induktivitäten bezeichnet.

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{H}_R \times \vec{A}_R) dV = \oint_F (\vec{H}_R \times \vec{A}_R) d\vec{F} = 0 \quad (23)$$

Unter Verwendung der 1. Maxwell'schen Gleichung (2) kann man das verbleibende Integral in Gl.(22) durch die Stromdichte ausdrücken und erhält

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A}_R \vec{G}_R dV \quad (24)$$

Dieses Integral liefert nur dort Beiträge, wo die Stromdichte $G_R \neq 0$ ist, also nur in den Leitervolumina V_q , ($q = 1(1)N$) der N Spulen. Es genügt demnach, die Integration über alle V_q anstatt über den unendlichen Raum V zu erstrecken. Wird weiterhin berücksichtigt, daß

$$\vec{A}_R = \sum_{p=1}^N \vec{A}_{pq}$$

das resultierende Vektorpotential infolge aller $p = 1(1)N$ Spulenströme gebildet in der q -ten Spule ist, so ergibt sich aus Gl.(24)

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^N \int_{V_q} \vec{A}_{pq} \cdot \vec{G}_q \cdot dV_q \quad (25)$$

die magnetische Energie der Spulenordnung. In (25) kann man noch das durch Gl.(13) gegebene Vektorpotential \vec{A}_{pq} einsetzen. Damit folgt die magnetische Energie

$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^N \int_{V_p} \int_{V_q} \frac{\vec{G}_p \cdot \vec{G}_q}{|\vec{r}_{pq}|} \cdot dV_p \cdot dV_q \quad (26)$$

aus der zweimaligen Integration über alle Leitervolumina der Spulen. In dieser Gleichung ist \vec{r}_{pq} der Abstand vom Aufpunkt P im p -ten Leiter zum Quellpunkt Q im q -ten Leiter.

Andererseits ist die magnetische Energie eines Spulensystems per Definition gegeben durch

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^N L_{pq} I_p I_q. \quad (27)$$

Vergleicht man die beiden Gln. (26) und (27) miteinander, nachdem die Gl. (26) mit den Spulenströmen $I_p \cdot I_q$ erweitert wurde, so erhält man eine Bestimmungsgleichung für die Induktivitätskoeffizienten

$$L_{pq} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_p} \int_{V_q} \frac{\vec{G}_p}{I_p} \cdot \frac{\vec{G}_q}{I_q} \cdot \frac{dV_p \cdot dV_q}{|\vec{r}_{pq}|}, \quad (28)$$

die für alle $p, q = 1(1)N$ gültig ist. Dabei wird unterschieden zwischen der Selbstinduktivität einer Spule im Falle $p = q$ und der Gegeninduktivität zwischen zwei Spulen im Falle $p \neq q$. Für $p \neq q$ ist die Reziprozität der Koeffizienten

$$L_{pq} = L_{qp} \quad (29)$$

unmittelbar aus Gl. (28) zu erkennen.

2.2 Die Analyse transients Vorgänge in elektrischen Netzwerken

Betrachtet werden beliebig vermaschte, lineare elektrische Netzwerke, deren Zweige willkürlich mit Induktivitäten L_{pq} , Kondensatoren C , Ohm'schen Widerständen R und Spannungsquellen u_0 beschaltet sind. Über Gegeninduktivitäten L_{pq} dürfen die Netzwerke zusätzlich induktiv miteinander verkoppelt sein. Außerdem sind zeitlich veränderliche Schaltelemente L_{pq} , C , R und u_0 zulässig. Unter besonderer Berücksichtigung von Schaltvorgängen soll in derartigen Netzwerken das transiente Verhalten der Zweigströme $i(t)$ und Spannungen $u(t)$ analysiert werden.

2.21 Topologische Zusammenhänge

Ein Netzwerk beliebiger Struktur bestehe aus n Zweigen die in p Knotenpunkten miteinander verbunden sind. Als Demonstrationsbeispiel sei das Netzwerk von Abb.2 herangezogen. In Abb.2 wird für alle passiven Schaltelemente einheitlich das Symbol der komplexen Impedanz z verwendet. Unabhängig von dem speziellen Aufbau der

Netzzweige kann die Struktur eines Netzwerks durch einen sogenannten Streckenkomplex dargestellt werden. Ohne die eingetragenen Schaltelemente vermittelt er gewissermaßen ein vereinfachtes Schaltbild des Netzwerks, in dem jeder Netzzweig durch eine orientierte Strecke repräsentiert wird (Abb.2). Die Orientierung erfolgt entsprechend der willkürlich wählbaren Richtung der Zweigströme. Der Streckenkomplex ermöglicht die anschauliche Interpretation der topologischen Zusammenhänge eines Netzwerks.

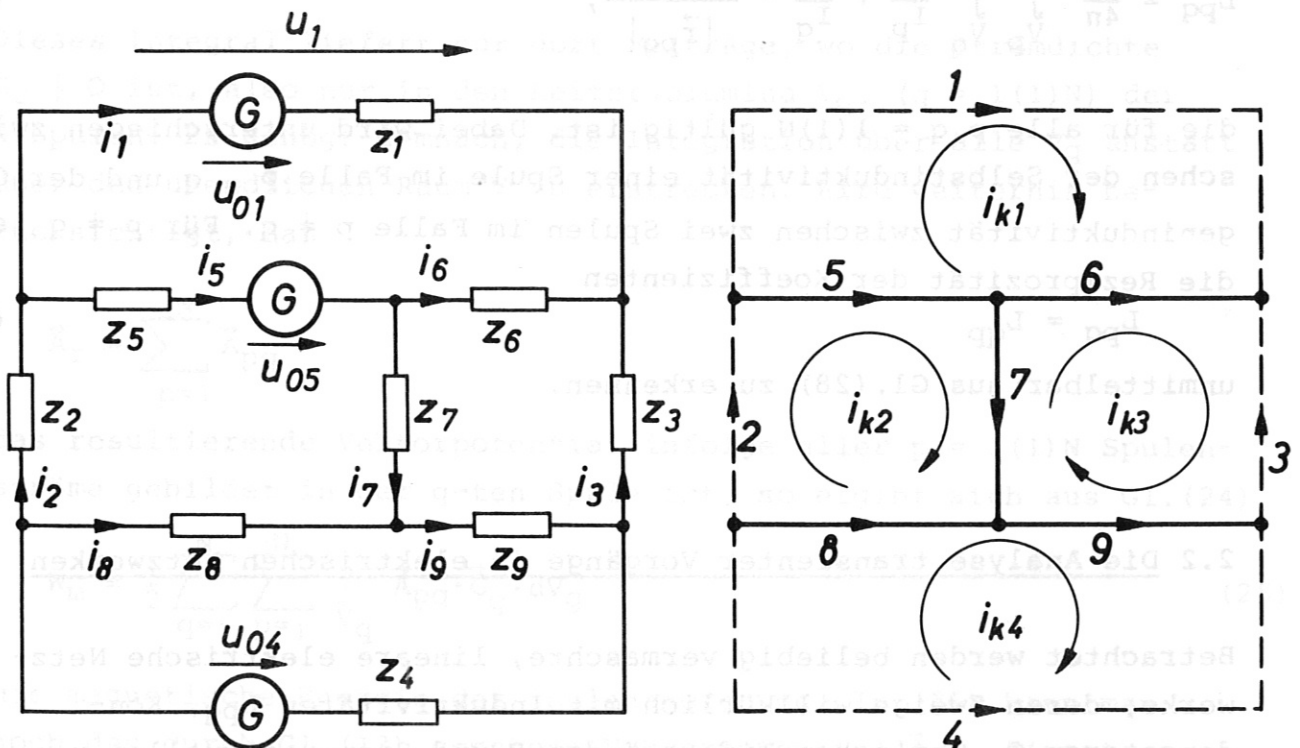


Abb. 2. Elektrisches Netzwerk ($n = 9$ Zweige, $p = 6$ Knoten) mit orientiertem Streckenkomplex.

- $p - 1 = 5$ Baumzweige
- - - $m = 4$ Verbindungszweige

Zur Ermittlung der n gesuchten Zweigströme des Netzwerks stehen die beiden Kirchhoffschen Sätze

$$\sum i_v = 0 \text{ Knotenpunktregel,}$$

$$\sum u_{uv} = 0 \text{ Maschenregel}$$

(30)

zur Verfügung, aus denen ein System von n linear unabhängigen Gleichungen gewonnen werden muß. Dazu wird das in [25,27] ange-

gebene Schema benutzt, nach dem jeder Streckenkomplex in "Baum- und Verbindungszweige" aufzuteilen ist. Als Baumzweige werden die $p-1$ Zweige bezeichnet die notwendig sind, um zwischen den p -Knotenpunkten eine leitende Verbindung herzustellen. Die so ausgewählten Strecken bilden gemeinsam den sogenannten "vollständigen Baum". Die restlichen $m = n - (p-1)$ Zweige sind somit die Verbindungszweige (Abb.2). Ohne die Kirchhoffschen Gleichungen zu verletzen, können in den m Verbindungszweigen unabhängige Ströme i_k (Kreisströme) und in den $p - 1$ Baumzweigen unabhängige Zweigspannungen u existieren. Über die Knotenpunktregel kann dann zwischen den n Zweigströmen (i) (Spaltenmatrix mit n Komponenten) und den m unabhängigen Strömen (i_k) (Spaltenmatrix mit m Komponenten) folgender Zusammenhang hergestellt werden.*)

$$(i) = (H) (i_k) \quad (31)$$

Darin ist (H) die $n \cdot m$ -Strukturmatrix, die allein die topologischen Eigenschaften des Netzwerks beschreibt und die Elemente ± 1 oder 0 besitzt. In Gl.(31) sind die $p - 1$ möglichen unabhängigen Knotengleichungen enthalten. Die fehlenden m Gleichungen müssen durch Anwenden der Maschenregel ermittelt werden. Für die Zweigspannungen (u) entstehen gerade m unabhängige Maschengleichungen

$$(H)^T \cdot (u) = 0 \quad (32)$$

wenn die Umläufe in den m Maschen gebildet werden, die jeweils einen anderen Verbindungszweig einbeziehen (Abb.2). In Gl.(32) ist $(H)^T$ die transponierte $m \cdot n$ -Strukturmatrix. Mit den beiden verallgemeinerten Kirchhoffschen Sätzen Gl.(31) und (32) sind n linear unabhängige Gleichungen gefunden, die zur Bestimmung der n Zweigströme bzw. -spannungen notwendig sind. Die Erfassung der topologischen Zusammenhänge von elektrischen Netzen ist damit auf das Auffinden der Strukturmatrix zurückgeführt, die wiederum unmittelbar unter Beachtung des "vollständigen Baumes" aus dem Streckenkomplex hervorgeht. Selbstverständlich können für Netzwerke mit mehr als zwei Knoten verschiedene "vollständige Bäume" konstruiert werden, zu denen zwar immer ein anderes, aber eindeutiges Gleichungssystem gehört.

*) Buschstaben in Klammern stehen symbolisch für Matrizen

Es bleibt anzumerken, daß nach jedem Schaltvorgang eine neue Strukturmatrix bestimmt werden muß, da durch ihn eine Änderung des Netzzustandes eintritt. Wie sich später zeigen wird, werden alle Matrizen durch die (H)-Matrix gebildet, so daß sich nach jedem Schaltvorgang zwar die Matrizen selbst, nicht aber ihre Zusammenhänge untereinander ändern.

2.22 Entwicklung des Netzwerks-Differentialgleichungs-Systems

Zur Analyse linearer, elektrischer Netzwerke können zwei voneinander unabhängige Verfahren, das Maschen- und Knotenpunktverfahren benutzt werden [25,26], von denen hier das erstgenannte wegen seiner größeren Übersichtlichkeit Anwendung finden soll. Beim Maschenverfahren werden die beiden Kirchhoffschen Sätze Gl. (31) und (32) so miteinander verknüpft, daß zunächst die m unabhängigen Ströme (i_k) berechnet werden müssen. Dazu ist in jedem Netzzweig der Zusammenhang zwischen den Momentanwerten von Strom und Spannung herzustellen. Je nach Art des Schaltelementes - nämlich Widerstand R , Induktivität L oder Kapazität C - lauten die Verknüpfungsgleichungen:*)

$$(u_R) = (R_d) (i), \quad (33)$$

$$(u_L) = \frac{d}{dt} \cdot [(L_k) \cdot (i)] = (L'_k) (i) + (L_k) (i'), \quad (34)$$

$$(i) = \frac{d}{dt} \cdot [(C_d) \cdot (u_C)], \quad (35)$$

wobei die mit d indizierten Matrizen n -dimensionale Diagonalmatrizen sind, während (u_R) , (u_L) und (u_C) die n -dimensionalen Spaltenmatrizen der resistiven, induktiven und kapazitiven Spannungsabfälle darstellen. Weiterhin ist (L_k) eine $n \cdot n$ -Matrix, die in der Hauptdiagonalen mit den Selbst- und außerhalb dieser mit den Gegeninduktivitäten belegt ist. In jedem der n Netzzweige ergibt sich somit die Zweigspannung (u) aus der Summe der Spannungsabfälle und der eingepprägten Quellspannung (u_0) zu

$$(u) = (u_R) + (u_L) + (u_C) + (u_0). \quad (36)$$

*) Die Argumente der Funktionen werden der einfacheren Schreibweise wegen weggelassen.

Zur Vermeidung der nach Einsetzen von Gl.(33) bis (35) in (36) entstehenden Integro-Differentialgleichung wird zuvor der Strom (i) durch die Ladung (q) ausgedrückt. Mit

$$(i) = \frac{d}{dt}(q) = (q') \quad (37)$$

und den Gleichungen (33) bis (35) folgt aus Gl.(36)

$$(u) = (L_k)(q'') + [(L'_k) + (R_d)](q') + (K_d)(q) + (u_{CO}) + (u_0). \quad (38)$$

Darin ist (u_{CO}) die Spaltenmatrix mit n Komponenten der Anfangsspannungen der Kondensatoren und $(K_d) = (C_d)^{-1}$. Wird Gl.(38) von links mit der transponierten Strukturmatrix $(H)^T$ multipliziert, verschwindet wegen Gl.(32) das Produkt. Um zusätzlich ein Differentialgleichungs-System für die unabhängigen Ladungen (q_k) zu bekommen, muß der durch die Ladung ausgedrückte 1.Kirchhoffsche Satz

$$(q) = (H)(q_k) \quad (39)$$

in die dann entstehende Gleichung eingesetzt werden. Mit der abgekürzten Schreibweise

$$\begin{aligned} (R) &= (H)^T(R_d)(H), \\ (L) &= (H)^T(L_k)(H), \\ (L') &= (H)^T(L'_k)(H), \\ (K) &= (H)^T(K_d)(H) \end{aligned} \quad (40)$$

für die Koeffizientenmatrizen ergibt sich schließlich

$$(L)(q_k'') + [(L') + (R)] \cdot (q_k') + (K)(q_k) = -(H)^T[(u_{CO}) + (u_0)]. \quad (41)$$

Das vorliegende m-dimensionale Differentialgleichungs-System 2. Ordnung ist notwendig und hinreichend zur vollständigen Beschreibung transienter Vorgänge in linearen Netzwerken. Es kann für vorgegebene Anfangswerte

$$\begin{aligned} (q_k(0)) &= (q_0), \\ (q_k'(0)) &= (i_0) \end{aligned} \quad (42)$$

eindeutig gelöst werden, wobei (q_0) und (i_0) m-dimensionale Spaltenmatrizen sind.

3. Numerische Berechnung der magnetischen Felder und Kräfte

3.1 Überlegungen zur Wahl der Berechnungsmethode

Im Prinzip ist mit den in Kapitel 2. hergeleiteten Formeln die gestellte Aufgabe gelöst. Die praktische Auswertung der dort gewonnenen Gleichungen erweist sich beim vorliegenden Problem jedoch als sehr schwierig. Selbst für einfachste Spulengeometrien sind analytisch geschlossene Lösungen sowohl im Falle der Feld- als auch der Kraft- und Induktivitätsberechnung nicht möglich. Bei der Vielfalt möglicher Spulenformen liegen die Schwierigkeiten einmal in der mathematischen Beschreibung der räumlichen Ströme im Wicklungskörper und zum anderen in der Integration über das geometrisch komplizierte Leitervolumen. Es wird gebildet aus einem spiralförmigen Wickel gegeneinander isolierter Leiter beliebiger Umfangskontur, der aus mehreren neben- oder übereinander gewickelten Lagen bestehen kann. Unter Berücksichtigung der beschriebenen Leitergeometrie wird wohl kaum ein allgemein gültiges Berechnungsverfahren abzuleiten sein, das nur einen vertretbaren numerischen Aufwand erfordert und welches außerdem eine übersichtliche Handhabung gewährleistet.

Notwendigerweise müssen also sinnvolle Näherungen eingeführt werden. Zunächst kann der Spulenkörper, ungeachtet des speziellen Wickels und der in ihm liegenden Isolierstoffgebiete, als ein in sich geschlossener räumlicher Leiter mit rechteckiger Querschnittsfläche A aufgefaßt werden. Darin soll ein stationärer Strom $\vec{I}_G = w\vec{i}$ fließen, der über die Querschnittsfläche A gleichmäßig verteilt ist, (keine Stromverdrängung). Im Leiter herrscht dann überall die konstante Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{w\vec{i}}{A} \quad (43)$$

Darin gibt w die Anzahl der Windungen pro Spule an. Unter diesen Annahmen sind für kreisförmige Spulen mehrere Berechnungsverfahren entwickelt worden [14,15,16]. Andererseits kann für beliebige Spulen ohne allzugroßen Aufwand eine stückweise mathematische Beschreibung ihrer Kontur vorgenommen werden, nachdem jede Spule durch nur einen räumlichen Leiter angenähert wird. Dazu denke man sich den Spulenkörper entlang seines Umfangs in n_a Teilstücke zer-

legt und zwar derart, daß entweder kreisförmige oder gerade Leiterelemente entstehen (s. Abb. 1). Aus diesen Grundelementen läßt sich jede beliebige Spulenform nachbilden, denn im Grenzfall können kreisförmige Leiter mit gegen Null strebender Bogenlänge angenommen werden. Zu beachten ist lediglich, daß aus Gründen der praktischen Durchführung der Rechnungen glatte Spulenkonturen vorausgesetzt sind. Dementsprechend müssen an der Trennstelle die Querschnittsflächen von zwei benachbarten Elementen parallel zueinander verlaufen.

Die Aufteilung des Leiters in geometrisch einfache Elemente ermöglicht nun die Berechnung der magnetischen Induktion ihrer räumlichen Ströme nach Gl. (15). Aus der anschließenden Superposition aller $n_a \cdot N$ Feldanteile ergibt sich dann die resultierende magnetische Induktion der aus N Spulen bestehenden Anordnung zu

$$\vec{B}_r = \sum_{q=1}^N \vec{B}_q = \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^{n_a} \vec{B}_{qn} \quad (44)$$

Darin ist \vec{B}_{qn} die magnetische Induktion des n -ten Leiterstücks der q -ten Spule, die im folgenden für kreisförmige und gerade Leiterelemente bestimmt werden soll:

a) Kreisförmiges Leiterelement

Gegeben sei also das zur q -ten Spule gehörende, in beliebiger räumlicher Lage befindliche kreisförmige Leiterelement n mit der Stromdichte \vec{G}_q und den in Abb. 3a angegebenen Abmessungen. Zur Berechnung von \vec{B}_{qn} werden zweckmäßigerweise Zylinderkoordinaten $(R_n, \alpha_n, \bar{y}_n^*)$ eingeführt, deren Ursprung im Krümmungsmittelpunkt M_n des Bogen-elementes liegen soll und deren $\bar{y}_n = 0$ Ebene mit der von der Leiterseele aufgespannten Ebene zusammenfällt. Diese Ebene liegt außerdem in der Ebene $y_q = 0$ des übergeordneten kartesischen (x_q, y_q, z_q) -Systems, welches zur q -ten Spule der Anordnung gehört.

Ein innerhalb des Volumens V_n liegender Quellpunkt Q mit der Stromdichte

$$\vec{G}_q = -G_q \cdot \sin \alpha_q \vec{e}_{x_q} + G_q \cdot \cos \alpha_q \vec{e}_{z_q} \quad (45)$$

*) Der Index n , der die Koordinaten des n -ten Leiterstücks kennzeichnet, wird der einfacheren Schreibweise wegen weggelassen.

wird dann durch

$$\vec{R}_q = R_q \cos \alpha_q \vec{e}_{x_q} + \bar{y}_q \vec{e}_{y_q} + R_q \sin \alpha_q \vec{e}_{z_q} \quad (46)$$

und ein beliebiger Aufpunkt P entsprechend durch

$$\vec{R}_p = R_p \cos \alpha_p \vec{e}_{x_q} + \bar{y}_p \vec{e}_{y_q} + R_p \sin \alpha_p \vec{e}_{z_q} \quad (47)$$

beschrieben. Dabei sind $\vec{e}_{x_q}, \vec{e}_{y_q}, \vec{e}_{z_q}$ die Einheitsvektoren in den Koordinatenrichtungen x_q, y_q, z_q . Daraus folgt dann der Verbindungsvektor zwischen Q und P zu (Abb.3a)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R}_p - \vec{R}_q \\ &= (R_p \cos \alpha_p - R_q \sin \alpha_q) \vec{e}_{x_q} + (\bar{y}_p - \bar{y}_q) \vec{e}_{y_q} + (R_p \sin \alpha_p - R_q \sin \alpha_q) \vec{e}_{z_q} \end{aligned} \quad (48)$$

mit dem Betrag

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{R_p^2 + R_q^2 - 2R_p R_q \cos(\alpha_p - \alpha_q) + (\bar{y}_p - \bar{y}_q)^2}. \quad (49)$$

Einsetzen von \vec{G}_q und \vec{r} in Gl. (15) und Bildung des Kreuzproduktes $\vec{G}_q \times \vec{r}$ führt schließlich zu den drei kartesischen Komponenten der magnetischen Induktion:

$$B_{x_q}(q_n) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{R_1}^{R_a} \int_{\alpha_1 - d/2}^{\alpha_2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-G_q(\bar{y}_p - \bar{y}_q) R_q \cos \alpha_q \cdot dR_q \cdot d\alpha_q \cdot d\bar{y}_q}{[R_p^2 + R_q^2 - 2R_p R_q \cos(\alpha_p - \alpha_q) + (\bar{y}_p - \bar{y}_q)^2]^{3/2}}, \quad (50)$$

$$B_{y_q}(q_n) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{R_1}^{R_a} \int_{\alpha_1 - d/2}^{\alpha_2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{G_q [R_p \cos(\alpha_p - \alpha_q) - R_q] R_q \cdot dR_q \cdot d\alpha_q \cdot d\bar{y}_q}{[R_p^2 + R_q^2 - 2R_p R_q \cos(\alpha_p - \alpha_q) + (\bar{y}_p - \bar{y}_q)^2]^{3/2}}, \quad (51)$$

$$B_{z_q}(q_n) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{R_1}^{R_a} \int_{\alpha_1 - d/2}^{\alpha_2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-G_q(\bar{y}_p - \bar{y}_q) R_q \sin \alpha_q \cdot dR_q \cdot d\alpha_q \cdot d\bar{y}_q}{[R_p^2 + R_q^2 - 2R_p R_q \cos(\alpha_p - \alpha_q) + (\bar{y}_p - \bar{y}_q)^2]^{3/2}}. \quad (52)$$

b) Gerades Leiterelement

Im Gegensatz zu den Ausführungen unter a) wird jetzt ein gerades Leiterstück mit der Stromdichte

$$\vec{G}_q = G_q \vec{e}_x \quad (53)$$

betrachtet. Es befinde sich ebenfalls in beliebiger räumlicher Lage und habe die in Abb. 3b angegebenen Abmessungen. Den Berechnungen wird ein kartesisches Koordinatensystem $\bar{x}_n, \bar{y}_n, \bar{z}_n$ *) zugrundegelegt, dessen \bar{x}_n Achse mit der Leiterachse zusammenfällt und dessen Ursprung im Leitermittelpunkt M_n liegt. Die Ortsvektoren \vec{R}_q und \vec{R}_p des Quellpunktes Q bzw. des Aufpunktes P und der Verbindungsvektor \vec{r} zwischen Q und P kann man in nachstehender Form schreiben:

$$\vec{R}_q = \bar{x}_q \vec{e}_x + \bar{y}_q \vec{e}_y + \bar{z}_q \vec{e}_z, \quad (54)$$

$$\vec{R}_p = \bar{x}_p \vec{e}_x + \bar{y}_p \vec{e}_y + \bar{z}_p \vec{e}_z, \quad (55)$$

$$\vec{r} = (\bar{x}_p - \bar{x}_q) \vec{e}_x + (\bar{y}_p - \bar{y}_q) \vec{e}_y + (\bar{z}_p - \bar{z}_q) \vec{e}_z. \quad (56)$$

Nach Einsetzen dieser Vektoren in Gl. (15) erhält man die Komponenten der magnetischen Induktion \vec{B}_{qn} in den Richtungen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Die Komponenten B_{xq}, B_{yq} und B_{zq} folgen daraus durch folgende Transformation:

$$\begin{aligned} B_{xq}(qn) &= B_{\bar{x}} \cos \vartheta_{qn} + B_{\bar{z}} \sin \vartheta_{qn}, \\ B_{yq}(qn) &= B_{\bar{y}}, \\ B_{zq}(qn) &= B_{\bar{x}} \sin \vartheta_{qn} + B_{\bar{z}} \cos \vartheta_{qn}. \end{aligned} \quad (57)$$

Ausführlich geschrieben erhält man:

$$B_{xq}(qn) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{-G_q (\bar{y}_p - \bar{y}_q) \sin \vartheta_{qn} \cdot d\bar{x}_q \cdot d\bar{y}_q \cdot d\bar{z}_q}{[(\bar{x}_p - \bar{x}_q)^2 + (\bar{y}_p - \bar{y}_q)^2 + (\bar{z}_p - \bar{z}_q)^2]^{3/2}}, \quad (58)$$

*) Der Index n, der die Koordinaten des n-ten Leiterstücks kennzeichnet, wird der einfacheren Schreibweise wegen weggelassen.

$$B_{YQ}(q_n) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{-G_q(\bar{z}_p - \bar{z}_q) \cdot d\bar{x}_q \cdot d\bar{y}_q \cdot d\bar{z}_q}{[(\bar{x}_p - \bar{x}_q)^2 + (\bar{y}_p - \bar{y}_q)^2 + (\bar{z}_p - \bar{z}_q)^2]^{3/2}}, \quad (59)$$

$$B_{ZQ}(q_n) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{G_q(\bar{y}_p - \bar{y}_q) \cos \vartheta_{qn} \cdot d\bar{x}_q \cdot d\bar{y}_q \cdot d\bar{z}_q}{[(\bar{x}_p - \bar{x}_q)^2 + (\bar{y}_p - \bar{y}_q)^2 + (\bar{z}_p - \bar{z}_q)^2]^{3/2}} \quad (60)$$

also die Darstellung im übergeordneten (x_q, y_q, z_q) -System. Dabei ist ϑ_{qn} der Winkel zwischen den Achsen \bar{x} und x_q .

Zur Bestimmung des resultierenden Feldes nach Gl.(44) sind noch die Spulenpositionen zu berücksichtigen. Dies geschieht, indem die bisher in den (x_q, y_q, z_q) -Systemen berechneten Feldkomponenten in ein, allen Spulen gemeinsames Koordinatensystem x, y, z transformiert werden. In ihm befinden sich die (x_q, y_q, z_q) -Systeme und damit die einzelnen Spulen in beliebiger Lage (Abb.3), so daß die Transformation die später angegebene Form bekommt. Umgekehrt müssen die Koordinaten der Aufpunkte die im x, y, z System gegeben sind vor der Berechnung von \vec{B}_{qn} in das dem Leiterelement eigene Koordinatensystem transformiert werden.

Mit den Gleichungen (50) bis (52) bzw. (58) bis (60) und der zu ihrer Herleitung notwendigen azimuthalen Unterteilung des Spulenkörpers ist eine Basis zur Feldberechnung von Spulen verschiedenster Kontur geschaffen. In analoger Weise müßte die Berechnung der magnetischen Kräfte \vec{F}_p nach Gl.(18) und der Induktivitäten L_{pq} nach Gl.(28) erfolgen, d.h. dazu müßten ihre Wicklungskörper ebenfalls in geometrisch einfach zu beschreibende Elemente unterteilt werden. Damit ist eine Lösungsmethode aller drei Aufgaben dargelegt. Bei ihrer Anwendung muß jedoch ein beträchtlicher numerischer Aufwand betrieben werden, der vor allem durch die zweimalige Volumenintegration im Falle der Kräfte- und Induktivitätsberechnung verursacht wird.

Bei der Diskussion des numerischen Aufwands der oben umrissenen Berechnungsmethode in Verbindung mit der gegebenen Aufgabenstellung - Berechnung von \vec{B} , \vec{F}_p und L_{pq} - darf außerdem die Größenordnung der zu betrachtenden Spulenordnungen nicht außer acht gelassen werden.

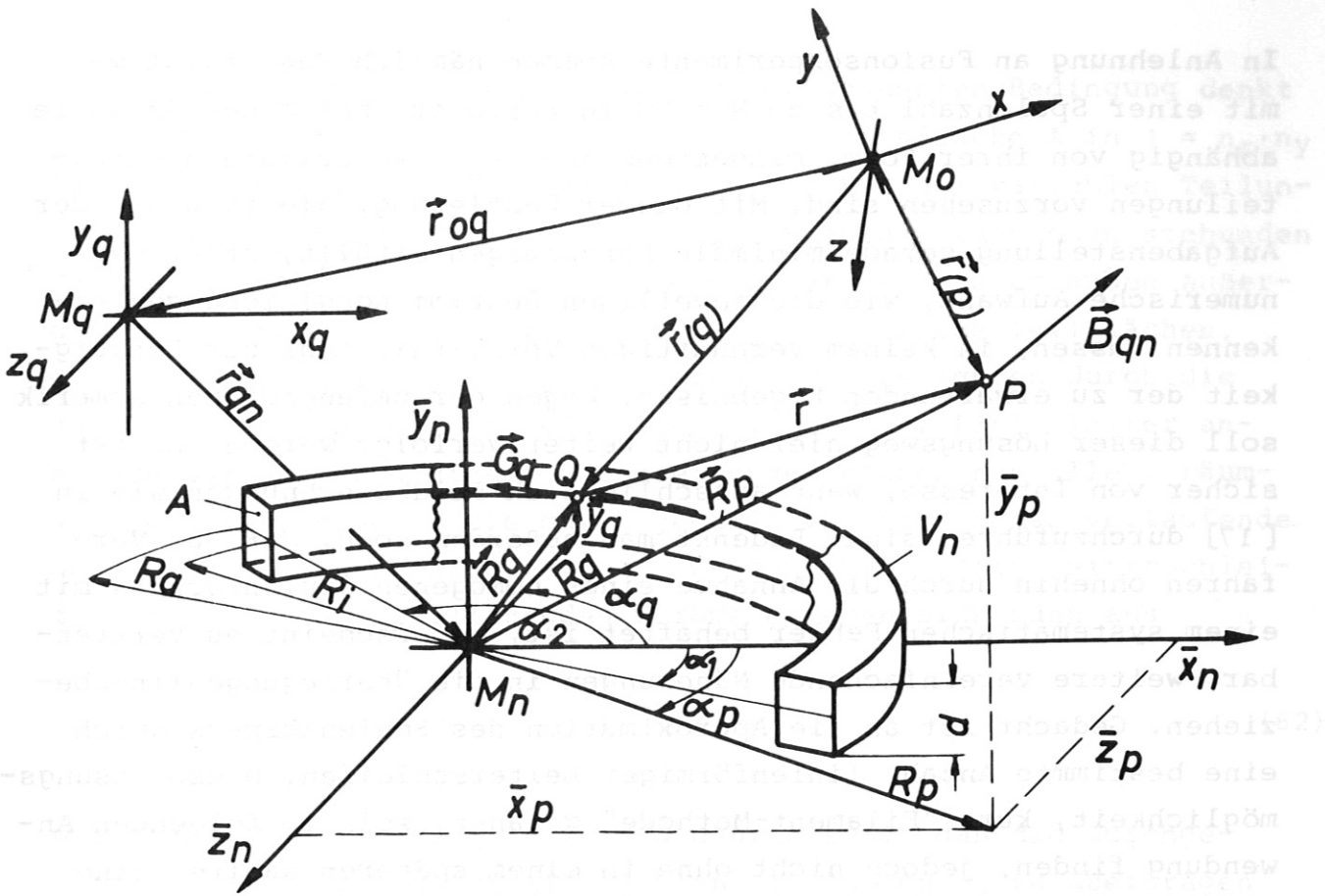


Abb. 3a. Kreisförmiges Leiterelement in beliebiger räumlicher Lage.

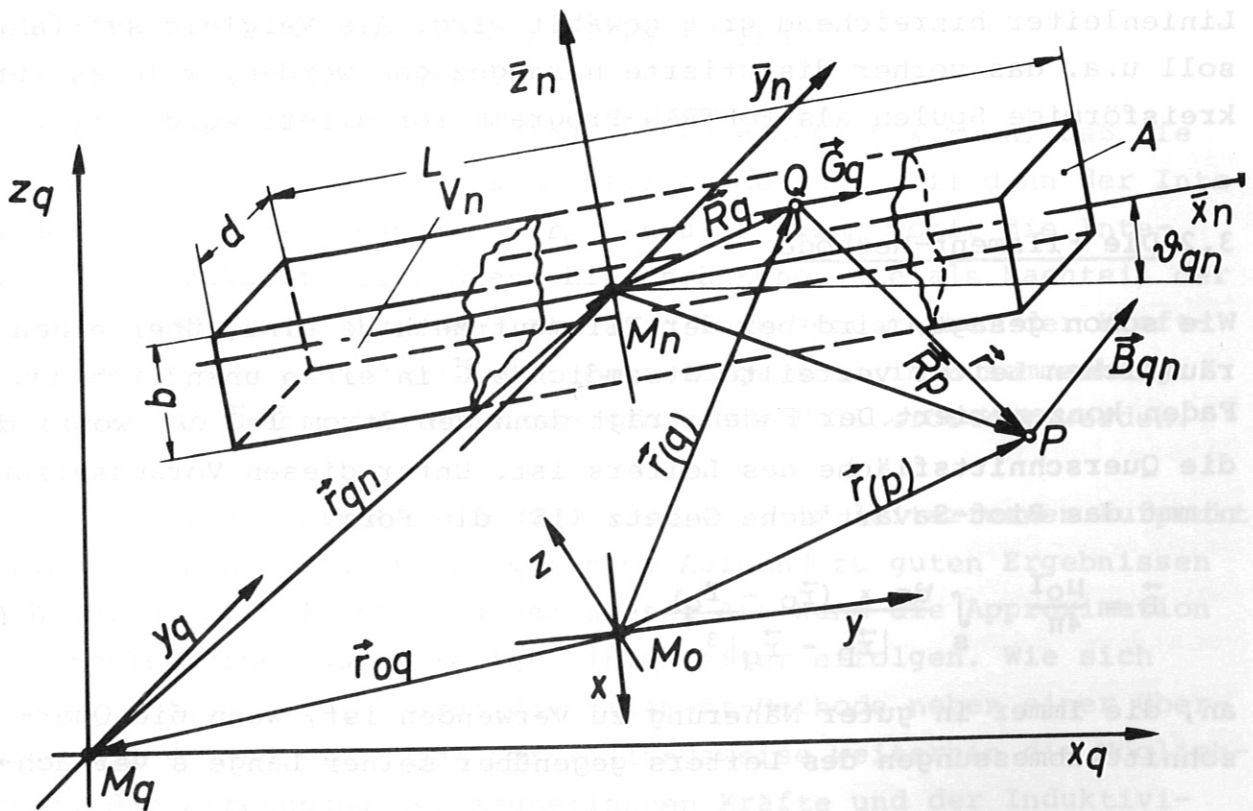


Abb. 3b. Gerades Leiterelement in beliebiger räumlicher Lage.

In Anlehnung an Fusionsexperimente kommen nämlich Magnetsysteme mit einer Spulenzahl bis zu $N = 50$ in Betracht, bei denen je Spule abhängig von ihrer Form, mindestens aber $n_a = 40$ azimutale Unterteilungen vorzusehen sind. Mit dieser Festlegung, die im Sinne der Aufgabenstellung gerade minimale Forderungen erfüllt, steht der numerische Aufwand, wie die jeweiligen Bestimmungsgleichungen erkennen lassen, in keinem vernünftigen Verhältnis mehr zur Genauigkeit der zu erwartenden Ergebnisse. Wegen der umfangreichen Numerik soll dieser Lösungsweg hier nicht weiter verfolgt werden. Er ist sicher von Interesse, wenn ausschließlich Feldberechnungen wie in [17] durchzuführen sind. Bedenkt man außerdem noch, daß das Verfahren ohnehin durch die Annahme eines homogenen Spulenkörpers mit einem systematischen Fehler behaftet ist, so erscheint es vertretbar, weitere vereinfachende Näherungen in die Überlegungen einzubeziehen. Gedacht ist an die Approximation des Spulenkörpers durch eine bestimmte Anzahl linienförmiger Leiterschleifen. Diese Lösungsmöglichkeit, kurz "Filament-Methode" genannt, soll im folgenden Anwendung finden, jedoch nicht ohne in einem späteren Kapitel eine Fehleranalyse durchzuführen. Dort wird sich zeigen, in welchen engen Grenzen die Fehler gehalten werden können, wenn die Anzahl der Linienleiter hinreichend groß gewählt wird. Als Vergleichsverfahren soll u.a. das vorher diskutierte herangezogen werden, welches für kreisförmige Spulen als FORTRAN-Programm formuliert wurde [14].

3.2 Die Filament-Methode

Wie schon gesagt, wird bei der Filament-Methode eine, über einen räumlichen Leiter verteilte Stromdichte \vec{G} in einen unendlich dünnen Faden konzentriert. Der Faden trägt dann den Strom $\vec{I} = \vec{G} \, dA$, wobei dA die Querschnittsfläche des Leiters ist. Unter diesen Voraussetzungen nimmt das Biot-Savart'sche Gesetz (15) die Form

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_S \frac{d\vec{s} \times (\vec{r}_p - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|^3} \quad (61)$$

an, die immer in guter Näherung zu verwenden ist, wenn die Querschnittsabmessungen des Leiters gegenüber seiner Länge \vec{s} vernach-

lässigt werden können. Zur Erfüllung der genannten Bedingung denkt man sich den Spulenkörper mit der Querschnittsfläche A in $l = n_r \cdot n_y$ Leiter mit den Teilflächen dA unterteilt. Mit den variablen Teilungen n_r und n_y in radialer bzw. axialer Richtung kann oben stehenden Forderungen beliebig genau entsprochen werden. Sie erlauben außerdem die Aufteilung von A in möglichst quadratische Teilflächen, die sich ihrerseits außer Kreisflächen am günstigsten durch die gegen Null strebenden kreisförmigen Flächen der Linienleiter annähern lassen. Nach diesen Vorbereitungen können nun alle l räumlichen Leiter einer Spule durch jeweils in ihrer Achse verlaufende geschlossene Linienleiter ersetzt werden. Die in den Leiterschleifen der q -ten Spule fließenden Ströme ergeben sich dann aus

$$\vec{I}_{q1} = \frac{\vec{G}_q A_q}{n_{qr} \cdot n_{qy}} \quad (62)$$

wobei der Spulenindex $q = 1(1)N$ andeuten soll, daß die durchgeführte Approximation auf alle Spulen der Anordnung zu übertragen ist. Das Feld aller Linienströme läßt sich schließlich aus Gl.(61) bestimmen, deren Feldanteile in jedem Aufpunkt zum resultierenden Feld des Spulensystems superponierbar sind.

Zur Wahl der Aufpunkte muß einschränkend gesagt werden, daß sie mit keinem Linienleiter zusammenfallen dürfen, weil dann der Integrand von Gl.(61) wegen $\vec{r}_p = \vec{r}_q$ singulär wird, womit die Integration unzulässig ist. Diese Einschränkung, die als Nachteil der Filament-Methode zu werten ist, wird insbesondere bei der Kraftberechnung von Bedeutung sein. Demzufolge soll im Zusammenhang mit ihr der soeben beschriebene singuläre Fall erörtert werden.

Der Vorteil der Filament-Methode ist, daß im leiterfernen Aufpunkt Feldberechnungen schon mit geringem Aufwand zu guten Ergebnissen führen, d. h. bei Berechnungen dieser Art kann die Approximation der Spulenkörper durch wenige Linienleiter erfolgen. Wie sich später zeigen wird, bietet die Filament-Methode neben einer übersichtlichen und einfachen Darstellungsweise weiterhin die Möglichkeit, die Berechnung der magnetischen Kräfte und der Induktivitäten auf der Feldberechnung aufzubauen.

3.21 Mathematische Beschreibung der Linienleiter im Spulenkörper

Es sei S_{qmi} die m -te radiale und i -te axiale linienförmige Leiterschleife der q -ten Spule, die je nach Spulenlage in einer vorgegebenen Ebene verläuft und voraussetzungsgemäß von beliebiger, der Spulenform angepaßten, Kontur sein kann. Zur vollständigen Approximation aller N Spulen sind

$$l_N = \sum_{q=1}^N n_{qr} \cdot n_{qy}$$

Leiterschleifen S_{qmi} mit $m = 1(1)n_{qr}$ und $i = 1(1)n_{qy}$ notwendig, die mathematisch beschrieben werden müssen. Dazu bietet sich zunächst die punktweise Vorgabe aller Kurven S_{qmi} an, die jedoch bei der Vielzahl der darzustellenden Kurven, die Vorgabe großer Datensätze erfordert. Aus diesem Grund soll im Hinblick auf die Eingabe in ein Rechenprogramm dieses Verfahren nicht weiter betrachtet werden. Viel zweckmäßiger ist es die im Kapitel 3.1 benutzte Darstellungsform anzuwenden. Dort ist eine beliebige, in sich geschlossene Kurve stückweise analytisch beschrieben worden, indem sie in kreisförmige und gerade Kurvenstücke aufgeteilt wurde. Dadurch eröffnet sich die Möglichkeit, alle Leiterschleifen einer Spule aus einer Bezugslinie S_q zu bestimmen. Denn ist S_q gegeben, so können aus ihr durch Vergrößerung oder Verkleinerung ihrer Teilkreisradien um jeweils ΔR alle radialen Schleifen S_{qm} gewonnen werden, während sich aus denen durch einfache Parallelverschiebung um jeweils Δy alle S_{qmi} ergeben (Abb.4). Ersteres ist durchführbar, weil bei der gewählten Darstellungsform in jedem Punkt von S_q auch die Normalenrichtung der Kurve bekannt ist, was z.B. bei einer punktweisen Vorgabe von S_q nicht der Fall wäre. Diese Darstellungsform bietet außerdem den Vorteil bei Spulen einfacher, beispielsweise kreisförmiger Kontur, mit der Angabe weniger Parameter auszukommen. Andererseits kann jede Kontur hinreichend genau durch genügend viele verschiedene kreisförmige und gerade Kurvenstücke angenähert werden. Im Grenzfall ist S_q punktweise darstellbar, weil Kurvenstücke mit gegen Null gehender Bogenlänge zulässig sind.

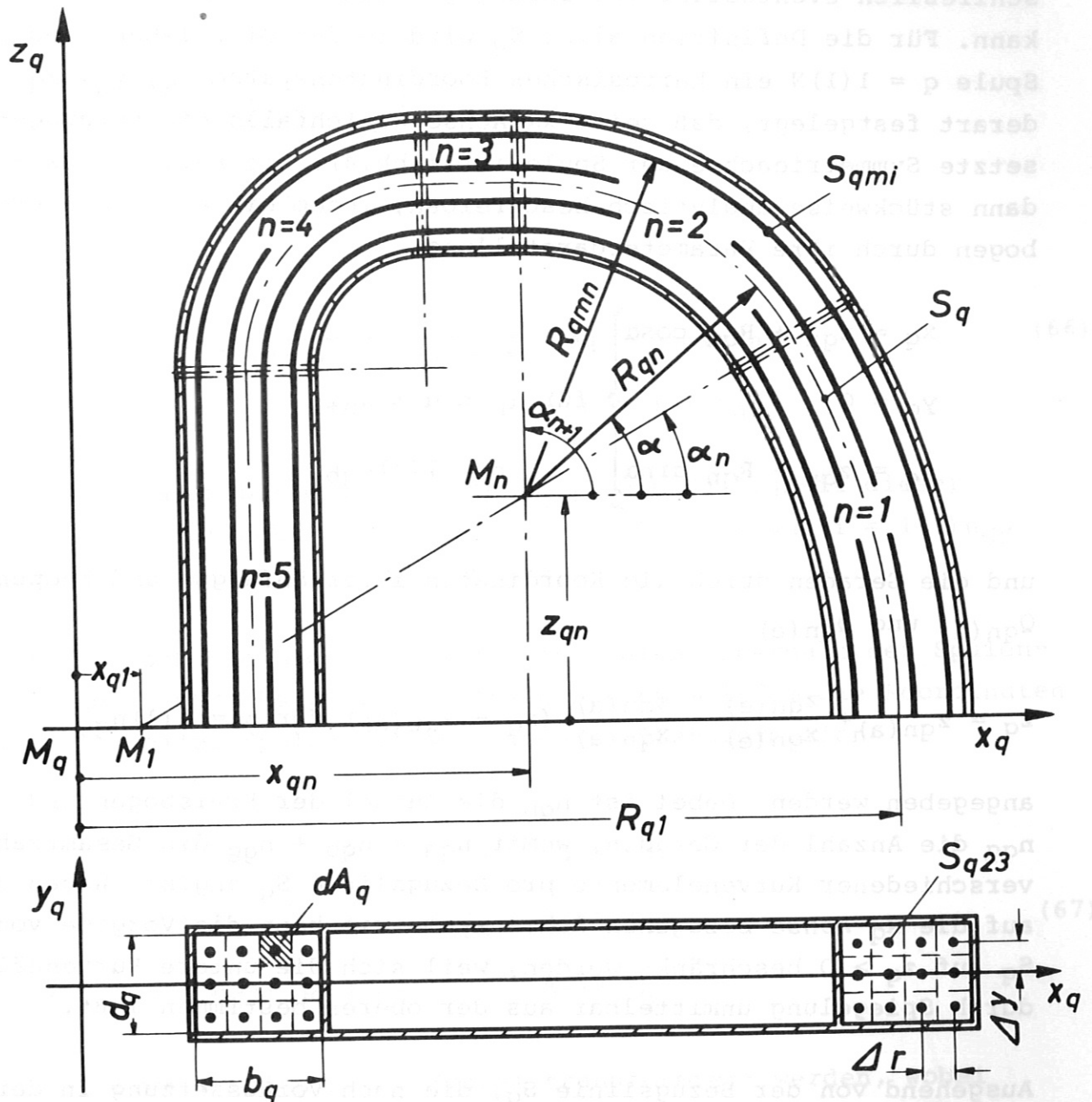


Abb. 4. Placierung der Linienleiter im Spulenkörper

Zur Placierung und eindeutigen mathematischen Darstellung aller Leiterschleifen einer Spule ist also lediglich die Vorgabe ihrer rechteckigen Querschnittsfläche $A_q = b_q d_q$, die radiale wie axiale Teilung n_{qr} bzw. n_{qy} und eine im Spulenkörper entlang seines Umfangs verlaufende Bezugslinie notwendig. Als Bezugslinie S_q soll die geometrische Mittelkurve des Spulenkörpers herangezogen werden, die man sich aus n_{qa} Kreisbogen verschiedener Radien R_{qn} und Mittelpunktkoordinaten x_{qn} , y_{qn} , z_{qn} ein-

schließlich eventueller Verbindungsgeraden zusammengesetzt denken kann. Für die Definition aller S_q wird in der Mittelebene jeder Spule $q = 1(1)N$ ein kartesisches Koordinatensystem x_q, y_q, z_q , derart festgelegt, daß seine x_q -Achse gleichfalls die vorausgesetzte Symmetrieachse der Spule ist (Abb.4). Die Kurven lassen sich dann stückweise analytisch beschreiben, indem die einzelnen Kreisbogen durch ihre Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} x_q &= x_{qn} + R_{qn} \cos \alpha \\ y_q &= 0 \\ z_q &= z_{qn} + R_{qn} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{für } \alpha_n \leq \alpha \leq \alpha_{n+1} \\ &n = 1(1)n_{qb} \end{aligned} \quad (63)$$

und die Geraden durch die Koordinaten ihrer Anfangs- und Endpunkte $Q_{qn}(a)$ und $Q_{qn}(e)$

$$z_q = z_{qn}(a) + \frac{z_{qn}(e) - z_{qn}(a)}{x_{qn}(e) - x_{qn}(a)} (x_q - x_{qn}(a)) \quad \text{für } n = 1(1)n_{qg} \quad (64)$$

angegeben werden. Dabei ist n_{qb} die Anzahl der Kreisbogen und n_{qg} die Anzahl der Geraden, womit $n_{qa} = n_{qb} + n_{qg}$ die Gesamtzahl verschiedener Kurvenelemente pro Bezugslinie S_q angibt. Wegen der auf die x_q -Achse bezogenen Achsensymmetrie kann die Vorgabe von S_q auf $z_q \geq 0$ beschränkt werden, weil sich die untere Kurvenhälfte durch Spiegelung unmittelbar aus der oberen bestimmen läßt.

Ausgehend von der Bezugslinie S_q , die nach Voraussetzung in der Ebene $y_q = 0$ verläuft, kann man nun die Gleichungen der Leiterschleife S_{qmi} angeben. Abhängig von der radialen und der axialen Teilung n_{qr} bzw. n_{qy} gilt:

$$\left. \begin{aligned} x_q &= x_{qn} + R_{qmn} \cos \alpha \\ y_q &= \frac{d_q}{2} \left(\frac{2i-1}{n_{qy}} - 1 \right) \\ z_q &= z_{qn} + R_{qmn} \sin \alpha \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{für } \alpha_n \leq \alpha \leq \alpha_{n+1} \\ &n = 1(1)n_{qb} \end{aligned} \quad (65)$$

mit

$$R_{qmn} = R_{qn} + \frac{b_q}{2} \left(\frac{2m-1}{n_{qr}} - 1 \right)$$

für alle kreisförmigen Leiterstücke

und mit

$$z_q = z_{qmin}(a) + \frac{z_{qmin}(e) - z_{qmin}(a)}{x_{qmin}(e) - x_{qmin}(a)} \cdot (x_q - x_{qmin}(a)) \quad (66)$$

$$n = 1(1)n_{qg}$$

für alle geraden Leiterstücke von S_{qmi} . Die Gültigkeit dieser Gleichungen erstreckt sich über alle $m = 1(1)n_{qr}$ und $i = 1(1)n_{qy}$ Leiterschleifen der $q = 1(1)N$ Spulen.

Es bleibt noch die Lage der einzelnen Spulen innerhalb der Spulen-anordnung zu berücksichtigen. Dies geschieht, indem die Koordinaten x_q, y_q, z_q aller Spulen mit der linearen Transformation

$$\begin{aligned} x &= x_{q0} + A_{q11} x_q + A_{q12} y_q + A_{q13} z_q, \\ y &= y_{q0} + A_{q21} x_q + A_{q22} y_q + A_{q23} z_q, \\ z &= z_{q0} + A_{q31} x_q + A_{q32} y_q + A_{q33} z_q \end{aligned} \quad (67)$$

in ein übergeordnetes (x, y, z) -System transformiert werden, wobei x_{q0}, y_{q0}, z_{q0} die Lage des Koordinatenursprungs der (x_q, y_q, z_q) -Systeme angibt. Da sich die Spulen in willkürlicher räumlicher Lage zueinander befinden können, haben die Transformations-Koeffizienten nachstehende allgemeine Form

$$\begin{aligned} A_{q11} &= \cos\varphi_{qy} \cdot \cos\varphi_{qz} - \sin\varphi_{qx} \cdot \sin\varphi_{qy} \cdot \sin\varphi_{qz}, \\ A_{q12} &= -\cos\varphi_{qx} \cdot \sin\varphi_{qz}, \\ A_{q13} &= \sin\varphi_{qy} \cdot \cos\varphi_{qz} + \sin\varphi_{qx} \cdot \cos\varphi_{qy} \cdot \sin\varphi_{qz}, \\ A_{q21} &= \cos\varphi_{qy} \cdot \sin\varphi_{qz} + \sin\varphi_{qx} \cdot \sin\varphi_{qy} \cdot \cos\varphi_{qz}, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned}
 A_{q22} &= \cos\varphi_{qx} \cdot \cos\varphi_{qz} , \\
 A_{q23} &= \sin\varphi_{qy} \cdot \sin\varphi_{qz} - \sin\varphi_{qx} \cdot \cos\varphi_{qy} \cdot \cos\varphi_{qz} , \\
 A_{q31} &= -\cos\varphi_{qx} \cdot \sin\varphi_{qy} , \\
 A_{q32} &= \sin\varphi_{qx} , \\
 A_{q33} &= \cos\varphi_{qx} \cdot \cos\varphi_{qy} .
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

Darin beschreiben die Winkel φ_{qx} , φ_{qy} , φ_{qz} die Koordinatendrehung der (x_q, y_q, z_q) -Systeme gegenüber dem (x, y, z) -System um die x-, y- bzw. z-Achse. Ausgehend von den letztgenannten Achsen werden die Winkel positiv gezählt, wenn eine Drehung um sie im Sinne einer Rechtsschraube vorliegt. Im Sonderfall einer toroidalen Anordnung aus N gleichen, gleichmäßig über den Torusumfang verteilten Spulen reduzieren sich die Transformationsgleichungen (67) auf

$$\begin{aligned}
 x &= x_q \cdot \cos\varphi_{qz} - y_q \cdot \sin\varphi_{qz} , \\
 y &= x_q \cdot \sin\varphi_{qz} + y_q \cdot \cos\varphi_{qz} , \\
 z &= z_q .
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

Dann haben die (x_q, y_q, z_q) -Koordinatensysteme der einzelnen Spulen einen gemeinsamen Ursprung in $M_q = M_0$ und befinden sich in den um die z-Achse gedrehten Positionen

$$\varphi_{qz} = \frac{2\pi}{N} (q-1) \text{ für } q = 1(1)N ,
 \tag{70}$$

wobei wegen $\varphi_{qx} = \varphi_{qy} = 0$ alle x_q - und y_q -Achsen der Spulen in der Äquatorebene $z = 0$ des Systems liegen (Abb. 19).

Zur Feldberechnung der Linienströme nach Gl.(61) muß über jede in sich geschlossene Leiterschleife S_{qmi} integriert werden. Bei der vorgenommenen Aufspaltung von S_{qmi} bedeutet das, daß die Integration sowohl über kreisförmige, als auch über gerade Leiterstücke zu erstrecken ist. Im ersten Fall entstehen vom Typ her unvollständige elliptische Integrale, die nur mit Hilfe von numeri-

schen Quadraturformeln lösbar sind. Andererseits kann die Integration über die geraden Leiterstücke in geschlossener Form durchgeführt werden. Um diesen Vorteil auf die Lösung des geschlossenen Linienintegrals ausdehnen zu können, müßten die kreisförmigen Integrationswege durch Polygone mit jeweils $n_{q\alpha n}$ Geraden ersetzt werden. Durch Erhöhen der Zahl $n_{q\alpha n}$ läßt sich S_{qmi} beliebig genau durch ein Polygon annähern. Damit stehen grundsätzlich zwei alternative Lösungsmethoden von Gl. (61) zur Verfügung, die - wie in Kapitel 3.4 bewiesen wird - in etwa die gleiche Rechengenauigkeit liefern. Aus diesem Grund wird der formal einfachere zweite Lösungsweg vorgezogen. Jede Leiterschleife S_{qmi} wird also durch einen geschlossenen Streckenzug approximiert, dessen Eckpunkte Q_{qmik} auf S_{qmi} liegen und dessen Geraden S_{qmik} Sehnen des jeweiligen Teilkreises von S_{qmi} sind (Abb. 5).

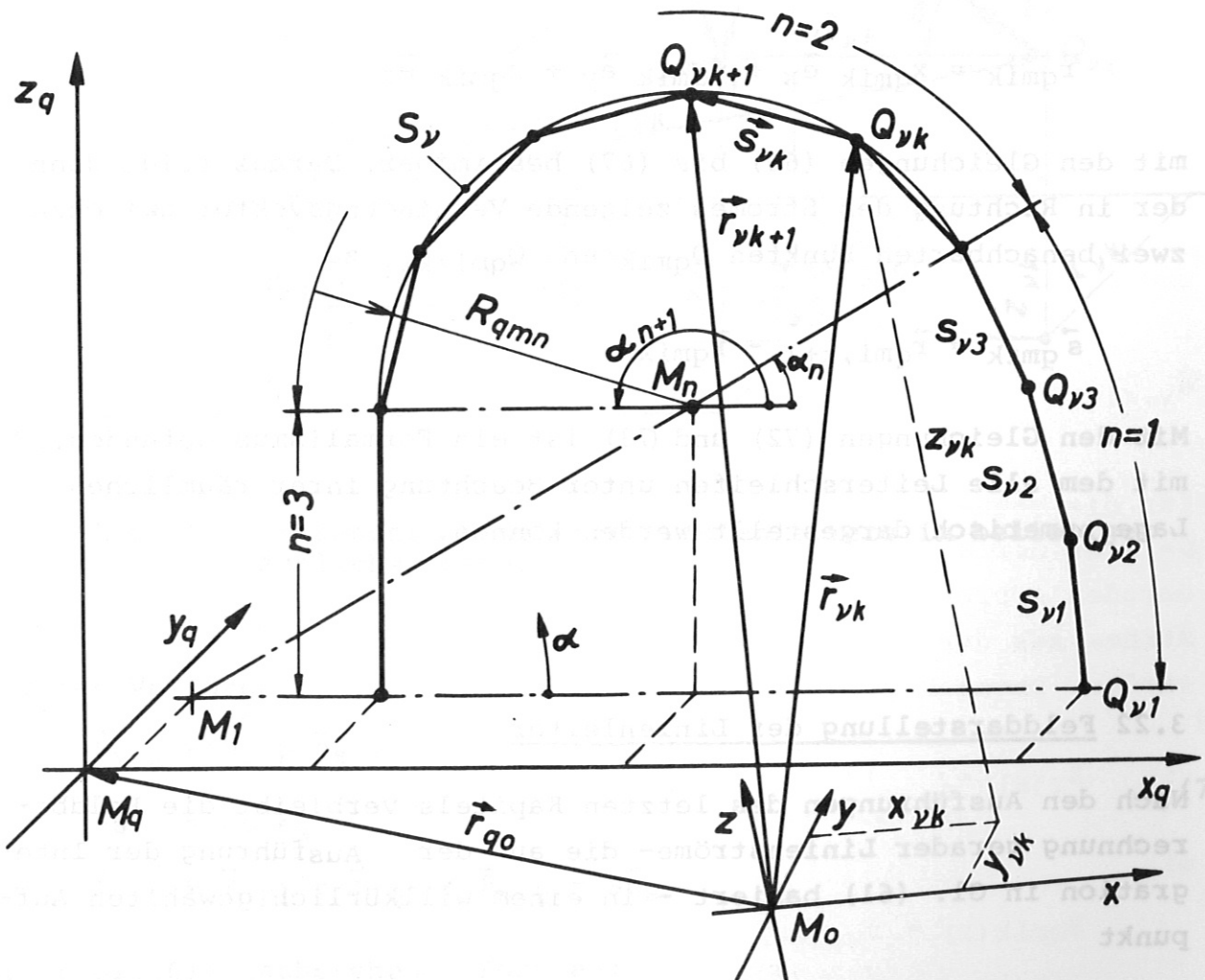


Abb. 5 Approximation der Leiterschleife $S_v = S_{qmi}$ durch ein Polygon.

Mit dem Index k erfolgt die bei $\alpha = 0$ beginnende, durchgehende Numerierung von Punkten und Geraden des Polygons. Die Anzahl der Geraden soll über die variabel einzuführende azimutale Teilung $n_{q\alpha}$ festgelegt werden, wobei die verschiedenen Teilkreise $n = 1(1)n_{q\alpha}$ einer Leiterschleife S_{qmi} unterschiedliche Teilungen $n_{q\alpha n}$ bekommen können. Jedes zur q -ten Spule gehörende Polygon hat somit

$$n_{q\alpha} = \sum_{n=1}^{n_{q\alpha}} n_{q\alpha n} \quad (71)$$

Geraden, deren Anzahl von Spule zu Spule frei gewählt werden kann. Darin wird $n_{q\alpha n} = 1$ gesetzt, wenn das n -te Teilstück von S_{qmi} ohnehin eine Gerade ist.

Da alle Eckpunkte Q_{qmik} , für $k = 1(1)n_{q\alpha}$ des Polygons auf S_{qmi} liegen, sind die Komponenten ihrer Ortsvektoren

$$\vec{r}_{qmik} = x_{qmik} \vec{e}_x + y_{qmik} \vec{e}_y + z_{qmik} \vec{e}_z \quad (72)$$

mit den Gleichungen (65) bis (67) bestimmbar. Daraus folgt dann der in Richtung des Stromes zeigende Verbindungsvektor zwischen zwei benachbarten Punkten Q_{qmik} und $Q_{qmi,k+1}$ zu

$$\vec{s}_{qmik} = \vec{r}_{qmi,k+1} - \vec{r}_{qmik} \quad (73)$$

Mit den Gleichungen (72) und (73) ist ein Formalismus gefunden, mit dem alle Leiterschleifen unter Beachtung ihrer räumlichen Lage numerisch dargestellt werden können.

3.22 Felddarstellung der Linienleiter

Nach den Ausführungen des letzten Kapitels verbleibt die Feldberechnung gerader Linienströme - die auf der Ausführung der Integration in Gl. (61) basiert - in einem willkürlich gewählten Aufpunkt

$$\vec{r}_{(p)} = x(p) \vec{e}_x + y(p) \vec{e}_y + z(p) \vec{e}_z \quad (74)$$

vorzunehmen. Es ist \vec{s}_{qmik} ein in Richtung des Stromes gerichteter, in beliebiger räumlicher Lage befindlicher gerader Linienleiter, der durch die Ortsvektoren \vec{r}_{qmik} und \vec{r}_{qmik+1} seines Anfangs- und Endpunkts Q_{qmik} bzw. Q_{qmik+1} beschrieben wird und in dem ein Strom I_{Q1} fließt (Abb. 6) *)

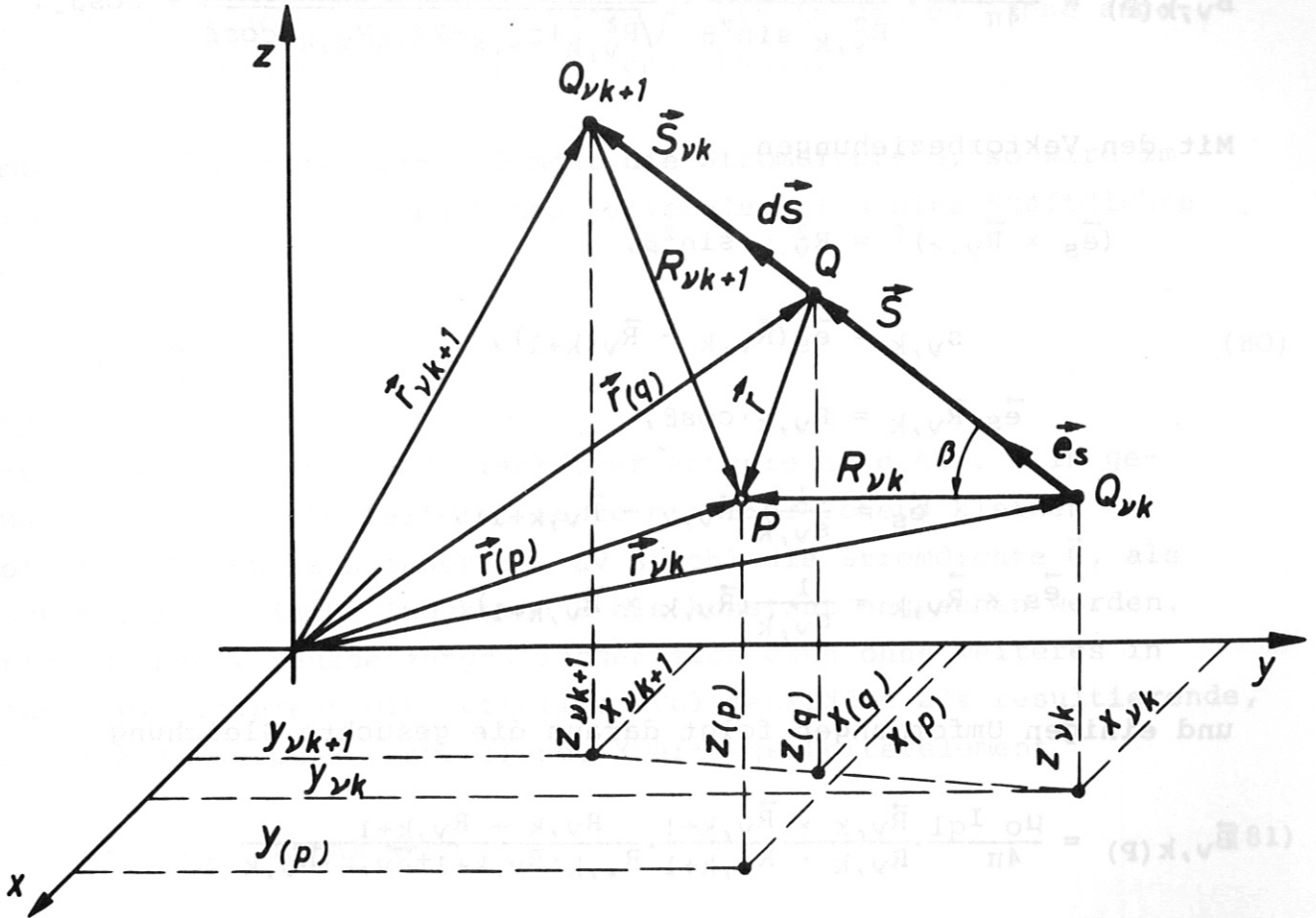


Abb. 6. Zur Beschreibung eines Linienleiters in beliebiger räumlicher Lage.

Mit den Vektoren

$$\vec{s}_{\nu,k} = s_{\nu,k} \vec{e}_s ,$$

$$d\vec{s} = ds \vec{e}_s$$

$$\vec{r} = \vec{r}(p) - \vec{r}(q) = \vec{R}_{\nu,k} - s\vec{e}_s$$

(75)

nimmt Gl. (61) nachstehende Form an:

*) Zugunsten einer anschaulicheren Darstellung wird das Index-triplet qmi vorübergehend durch den einfacheren Index ν ersetzt.

$$\vec{B}_{v,k}(P) = \frac{\mu_0 I_{q1}}{4\pi} \cdot (\vec{e}_s \times \vec{R}_{v,k}) \cdot \int_0^{s_{v,k}} \frac{ds}{(R_{v,k}^2 + s^2 - 2R_{v,k} s \cos\beta)^{3/2}} \quad (76)$$

Daraus folgt nach Integration:

$$\vec{B}_{v,k}(P) = \frac{\mu_0 I_{q1}}{4\pi} \cdot \frac{\vec{e}_s \times \vec{R}_{v,k}}{R_{v,k}^2 \sin^2\beta} \cdot \left[\frac{s_{v,k} - R_{v,k} \cos\beta}{\sqrt{R_{v,k}^2 + s_{v,k}^2 - 2s_{v,k}R_{v,k} \cos\beta}} + \cos\beta \right] \quad (77)$$

Mit den Vektorbeziehungen

$$(\vec{e}_s \times \vec{R}_{v,k})^2 = R_{v,k}^2 \cdot \sin^2\beta,$$

$$s_{v,k} = \vec{e}_s (\vec{R}_{v,k} - \vec{R}_{v,k+1}),$$

$$\vec{e}_s \cdot \vec{R}_{v,k} = R_{v,k} \cdot \cos\beta,$$

$$\vec{e}_s = \frac{1}{s_{v,k}} (\vec{R}_{v,k} - \vec{R}_{v,k+1}),$$

$$\vec{e}_s \times \vec{R}_{v,k} = \frac{1}{s_{v,k}} (\vec{R}_{v,k} \times \vec{R}_{v,k+1})$$

und einigen Umformungen folgt daraus die gesuchte Gleichung

$$\vec{B}_{v,k}(P) = \frac{\mu_0 I_{q1}}{4\pi} \cdot \frac{\vec{R}_{v,k} \times \vec{R}_{v,k+1}}{R_{v,k} \cdot R_{v,k+1}} \cdot \frac{R_{v,k} + R_{v,k+1}}{R_{v,k} \cdot R_{v,k+1} + \vec{R}_{v,k} \cdot \vec{R}_{v,k+1}} \quad (78)$$

für die magnetische Induktion eines geraden Linienstromes I_{q1} .

Da jede der N Spulen durch $n_{qr} \cdot n_{qv}$ Leiterschleifen mit je n_{qa} Geraden approximiert wird, ergibt sich das magnetische Feld ihrer Ströme aus der Summation der Feldanteile aller geraden Linienströme. Demnach gilt für jeden Aufpunkt P

$$\vec{B}_r(P) = \sum_{q=1}^N \sum_{m=1}^{n_{qr}} \sum_{i=1}^{n_{qv}} \sum_{k=1}^{n_{qa}} B_{qmik}(P) \quad (79)$$

mit

$$B_{qmik}(P) = B_{v,k}(P)$$

nach Gl. (78) für $v = qm$.

3.23 Berechnung der magnetischen Kräfte im Spulenkörper

Ausgangspunkt ist die beschriebene Approximation des stromdurchflossenen Spulenkörpers durch eine Anzahl von geraden Linienströmen. Deshalb tritt anstelle eines finiten Leiterelementes ΔV mit der Querschnittsfläche ΔA und der Länge Δs ein in dessen Achse angebrachter Linienleiter \vec{s}_{vk} mit gleicher Länge.

Trägt das räumliche Leiterelement die Stromdichte \vec{G} , so wird im magnetischen Feld innerhalb des Leiterelementes eine Kraftdichte von

$$\Delta \vec{f} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V} = \vec{G} \times \vec{B} \quad (80)$$

wirksam.

Unterteilt man nun den Spulenkörper entsprechend Abb. 7 in genügend viele finite Leiterelemente mit hinreichend kleinen Volumina ΔV , so kann innerhalb ΔV sowohl die Stromdichte \vec{G} , als auch die magnetische Induktion \vec{B} als konstant angesehen werden. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich dann ohne weiteres in jedem Leiterelement die verteilten Volumenkräfte als resultierende, in ihrem Schwerpunkt angreifende Kräfte je Leiterelement

$$\Delta \vec{F} = (\vec{G} \times \vec{B}) \cdot \Delta A \cdot \Delta s \quad (81)$$

oder als Kraft pro Längeneinheit des Leiterelementes

$$\Delta \vec{F}_s = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta s} = (\vec{G} \times \vec{B}) \cdot \Delta A \quad (82)$$

angeben. Das ist aber gerade die Kraft

$$\Delta \vec{F} = (\vec{I} \times \vec{B}) \Delta s \quad (83)$$

bzw. die Kraft je Längeneinheit

$$\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta s} = \vec{I} \times \vec{B} , \quad (84)$$

die auf den, das jeweilige Leiterelement repräsentierenden Linienstrom \vec{I} , ausgeübt wird. Beachtet man noch die bei der Definition

der Linienleiter \vec{s}_{vk} benutzte Indizierung, so ergibt sich die Kraft auf das vk -te Volumenelement bzw. den vk -ten Linienleiter des Spulenkörpers aus

$$\Delta \vec{F}_{vk} = I_{q1} \cdot (\vec{s}_{vk} \times \vec{B}_R) \text{ für } v = qm1 \quad (85)$$

Für die auf die q -te Spule wirkende Gesamtkraft folgt daraus:

$$\vec{F}_q = \sum_{m=1}^{n_{qr}} \sum_{i=1}^{n_{qy}} \sum_{k=1}^{n_{qq}} \Delta \vec{F}_{qmik} \quad (86)$$

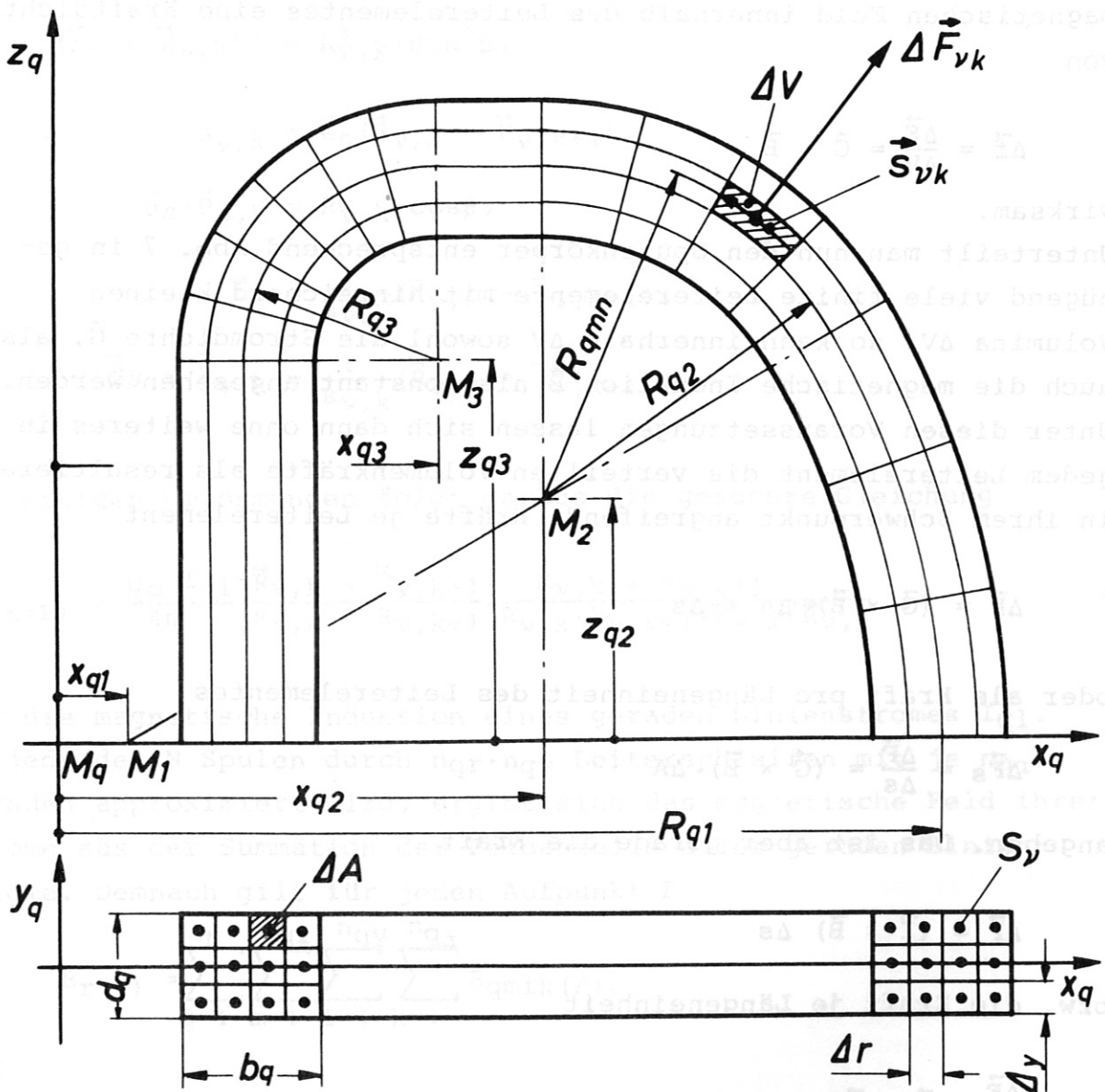


Abb. 7. Aufteilung des Spulenkörpers in finite Leiterelemente.

Darin ist \vec{B}_r die resultierende magnetische Induktion aller Linienströme, die mit Gl.(79) im Schwerpunkt der einzelnen Leiter-elemente zu bestimmen ist. Da der Schwerpunkt des ν_k -ten Volumenelementes gleichfalls auf dem Linienleiter $\vec{s}_{\nu k}$ liegt, wird das Integral (76) für $R_{\nu k} = s$ und $\beta = 0$ (Siehe Abb.6) singular und damit zur Berechnung des ν_k -ten Feldanteils nicht verwendbar. Man kann aber zeigen, daß der Feldanteil $\vec{B}_{\nu k}$ bezüglich der auf $\vec{s}_{\nu k}$ wirkenden Kraft ohne Einfluß ist, weil auf einen stromdurchflossenen Leiter durch sein eigenes Feld keine resultierende Kraft ausgeübt wird. Deshalb kann die Berechnung von \vec{B}_r auf dem Linienleiter $\vec{s}_{\nu k}$ ohne dessen eigenen Feldanteil $\vec{B}_{\nu k}$ vorgenommen werden, indem formal $\vec{B}_{\nu k}$ nach Gl.(79) ausgeschlossen wird.

3.24 Berechnung der Selbst- und Gegeninduktivitäten

Betrachtet wird die q -te und p -te Spule eines Spulenverbandes deren Induktivitäten L_{qp} mit Hilfe der Filament-Methode berechnet werden sollen. Dabei ist zu unterscheiden zwischen der Selbstinduktivität für $q = p$ und der Gegeninduktivität für $q \neq p$. Nach Kapitel 3.2 wird der Wicklungskörper jeder Spule entsprechend Abb. 8 in l fiktive Leiterschleifen S_{qim} mit den Querschnittsflächen ΔA_q unterteilt, so daß man sich jede Spule aus n_{qy} Scheiben (engl.: "Pancakes") mit jeweils n_{qr} Leitern zusammengesetzt denken kann. Wie bisher kennzeichnet das Indextripel qim bzw. pjn die m -te (n -te) Leiterschleife im i -ten (j -ten) Pancake der q -ten (p -ten) Spule.

Die Induktivitäten der Spulen sind nun exakt aus der Linearkombination

$$L_{pq} = \sum_{i=1}^{n_{qy}} \sum_{j=1}^{n_{qy}} L_{ij} \quad (87)$$

mit

$$L_{ij} = \sum_{m=1}^{n_{qr}} \sum_{n=1}^{n_{pr}} L_{imjn} \quad (88)$$

aller Selbst- und Gegeninduktivitäten L_{imjn} der einzelnen Leiter bestimmbar, wobei zur Berechnung von L_{imjn} Gl.(28) herangezogen wird.*)

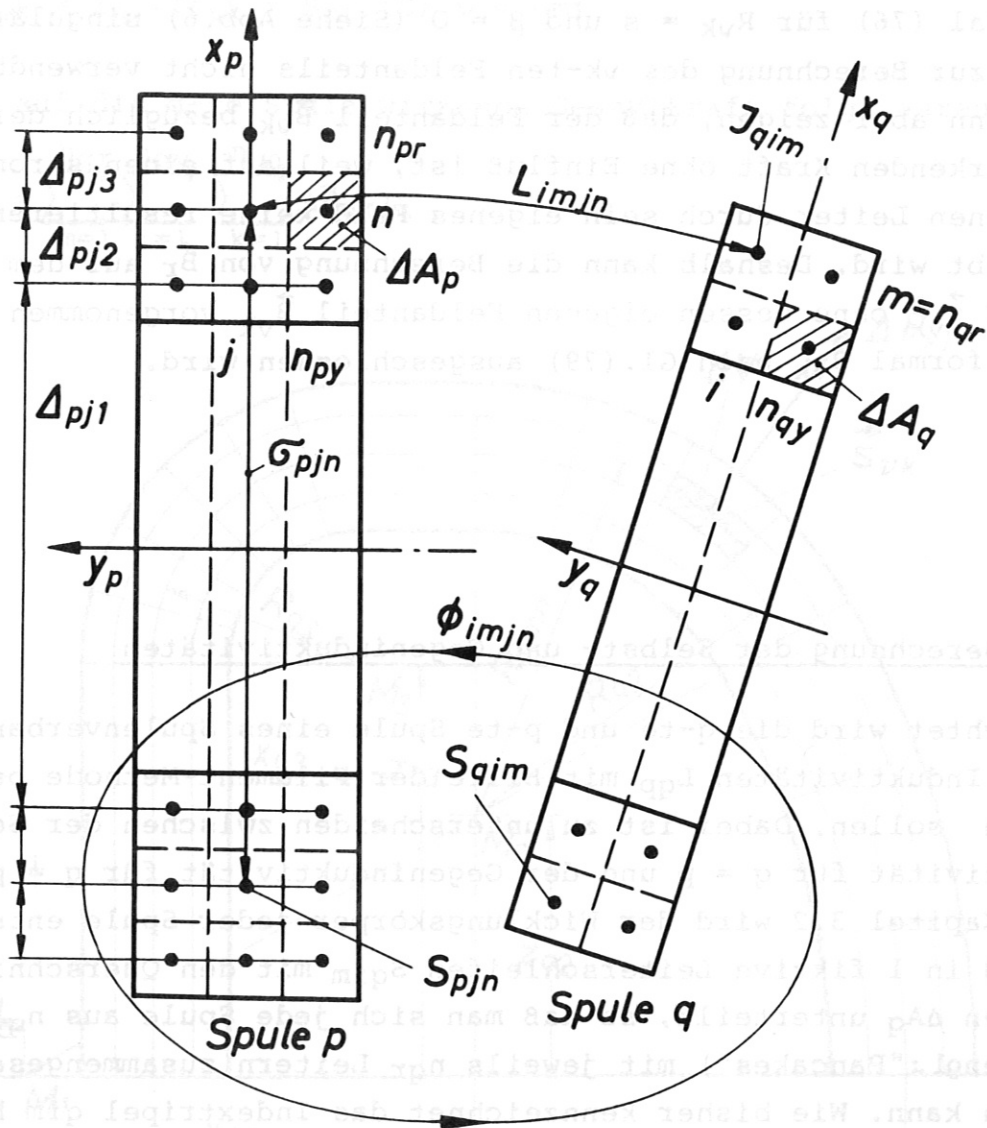


Abb. 8. Zur Berechnung der Induktivitäten

Selbstverständlich fordert die Benutzung von Gl.(28) nicht die vorherige Aufteilung des Spulenkörpers, sondern diese erfolgt ausschließlich im Hinblick auf die Verwendung der Filament-Methode.

*) Bei der Berechnung der Selbstinduktivität $q = p$ liegt entgegen Abb. 8 das j-te Pancake mit seinen Leitern n ebenfalls in der Spule, in der das i-te Pancake mit seinen Leitern m liegt.

Nach den unter 3.2 getroffenen Voraussetzungen kann bei hinreichend feiner Unterteilung des Spulenkörpers jeder Leiter als Linienleiter aufgefaßt werden, für die die Gl.(28) nachstehende Gestalt

$$L_{imjn} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_{S_{qim}} \oint_{S_{pjn}} \frac{d\vec{S}_{qim} \cdot d\vec{S}_{pjn}}{|\vec{r}_{imjn}|} \quad (89)$$

annimmt. Zur Lösung der Umlaufintegrale kommen nur numerische Integrationsverfahren in Betracht. Es erscheint daher numerisch günstiger, L_{imjn} durch die ohnehin berechnete magnetische Induktion auszudrücken. Dazu wird in Gl.(89) das Vektorpotential \vec{A}_{imjn} nach Gl.(13) eingesetzt, womit sich das verbleibende Linienintegral

$$L_{imjn} = \frac{1}{I_{qim}} \cdot \oint_{S_{pin}} \vec{A}_{imjn} \cdot d\vec{S}_{pin} \quad (90)$$

mit Hilfe des Stoke'schen Satzes und Gl.(5) in ein Flächenintegral

$$L_{imjn} = \frac{1}{I_{qim}} \cdot \int \vec{B}_{qim} \cdot d\vec{\sigma}_{pjn} = \frac{\Phi_{imjn}}{I_{qim}} \quad (91)$$

überführen läßt. Die letzte Gleichung zeigt die bekannte Proportionalität zwischen dem die Fläche σ_{pjn} durchsetzenden magnetischen Fluß Φ_{imjn} und dem Strom I_{qim} in S_{qim} , der diesen Fluß hervorruft. Dabei ist σ_{pjn} diejenige Fläche, die von der Leiterschleife S_{pjn} aufgespannt wird. Ist die Windungszahl pro Flächenelement ΔA_q bzw. ΔA_p nicht eins, sondern w_q in der q-ten und w_p in der p-ten Spule, so ist die rechte Seite von Gl.(91) noch mit dem Produkt der Windungszahlen $w_q \cdot w_p$ zu multiplizieren. Weiterhin folgt nach Einsetzen von Gl.(91) in Gl.(88):

$$L_{ij} = \sum_{n=1}^{n_{pr}} w_p \int \sum_{m=1}^{n_{qr}} \frac{w_q \vec{B}_{qim}}{I_{qim}} \cdot d\sigma_{pjn} \quad (92)$$

Jeder Term dieser Gleichung enthält ein Flächenintegral, welches als Summe immer wiederkehrender Teilflächenintegrale angegeben

werden kann, wenn die Fläche

$$\sigma_{pjn} = \sum_{k=1}^n \Delta_{pjk} \quad (93)$$

in die zwischen den Leitern liegenden Teilflächen Δ_{pjk} aufgespaltet wird (Abb. 8). Die Ausnutzung dieser Eigenschaft, verbunden mit der Umsortierung der Summanden, führt dann zu

$$L_{ij} = \sum_{n=1}^{n_{pr}} w_p (n_{pr} - n + 1) \int_{\Delta_{pin}} \sum_{m=1}^{n_{qr}} \frac{w_q \vec{B}_{qim}}{I_{pim}} d\Delta_{pjn} \quad (94)$$

Entgegen der ursprünglichen Darstellungsform Gl.(92), bietet letztere den Vorteil, die numerisch aufwendige Integration über jede Teilfläche nur einmal ausführen zu müssen. Nach Einsetzen von Gl. (94) in Gl.(87) erhält man schließlich mit

$$L_{qp} = \sum_{i=1}^{n_{qy}} \sum_{j=1}^{n_{py}} \sum_{n=1}^{n_{pr}} w_p (n_{pr} - n + 1) \int_{\Delta_{pjn}} \sum_{m=1}^{n_{qr}} \frac{w_q \vec{B}_{qim}}{I_{qim}} \cdot d\Delta_{pjn} , \quad (95)$$

eine allgemeine Beziehung, mit der die Selbst- und Gegeninduktivitäten der Spulen berechnet werden können. Ohne Verzicht auf Allgemeinheit läßt sich Gl.(75) nicht weiter vereinfachen. Lediglich bei der Berechnung der Selbstinduktivität kann die Reziprozität der Koeffizienten $L_{ij} = L_{ji}$ ausgenutzt werden, wodurch Gl.(87) in

$$L_{qq} = n_{qy} L_{ii} + 2 \cdot \sum_{i=2}^{n_{qy}} (n_{qy} - i + 1) L_{ii} \quad (96)$$

übergeht. Bei symmetrisch aufgebauten Spulenordnungen wird sich die Symmetrie auch bei der Berechnung der Gegeninduktivitäten in ähnlich vereinfachender Weise auf Gl.(87) auswirken. Aus Gründen der Rechenzeiterparnis solle man deswegen von Fall zu Fall Gl.(87) auf diesen Aspekt hin überprüfen.

Die in Gl. (95) auftretenden Flächenintegrale sind Integrale des Typs

$$I = \int_{\Delta} \int f(x, z) \cdot dx \cdot dz, \quad (97)$$

die über eine in der Ebene $y = \text{const}$ liegende, beliebig berandete Fläche Δ erstreckt werden müssen. Jeder dieser Flächen Δ läßt sich in η finite Teilflächen Δ_v zerlegen, die ebenfalls beliebig berandet sein dürfen und durch acht Punkte P_1 bis P_8 ihres Randes beschrieben werden (Abb.9). Das Integral (97) ergibt sich dann aus einer Summe von Integralen

$$I = \sum_{v=1}^{\eta} I_v = \sum_{v=1}^{\eta} \int_{\Delta_v} \int f(x, z) \cdot dx \cdot dz, \quad (98)$$

deren Anzahl η je nach gewünschter Rechengenauigkeit frei wählbar ist.

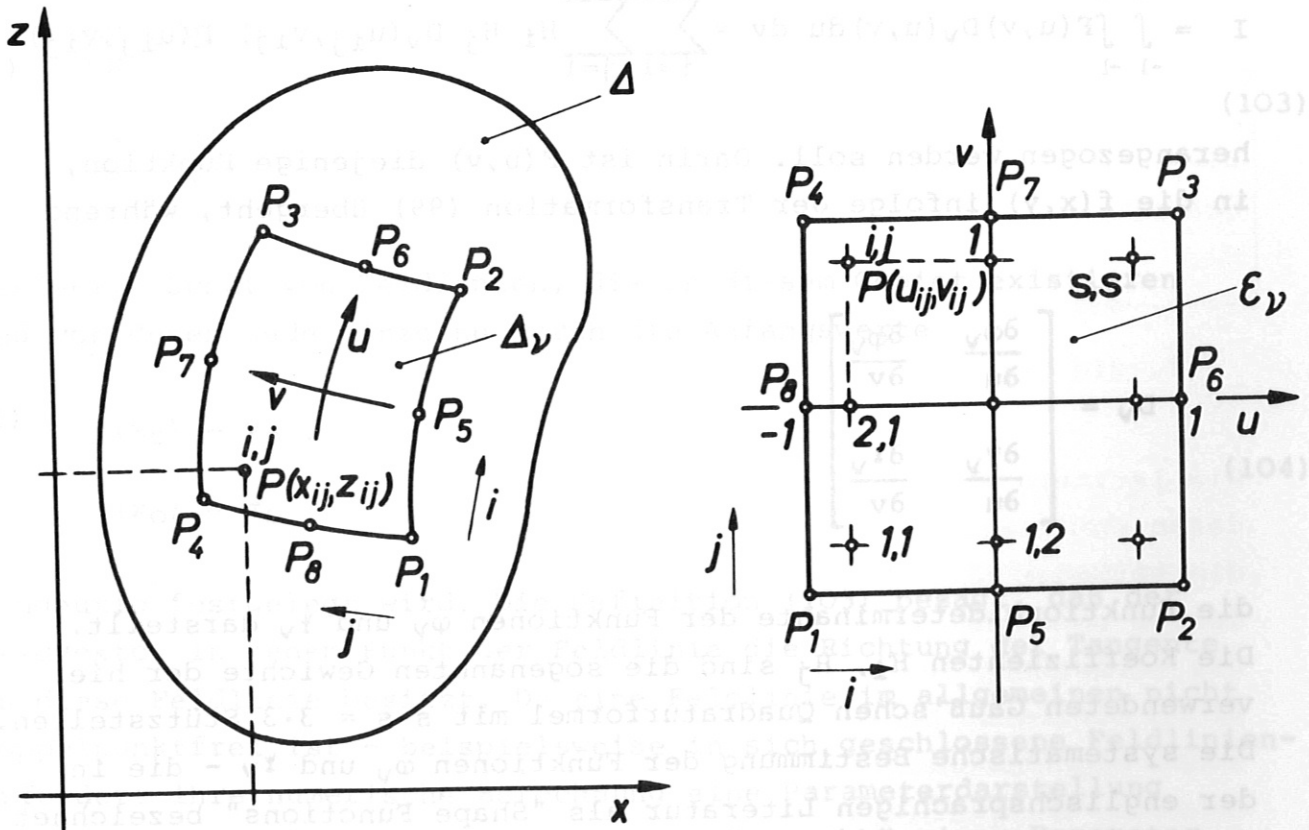


Abb. 9. Zur Berechnung des Flächenintegrals.

Mit der eindeutig umkehrbaren Transformation

$$\begin{aligned} x &= \varphi_v(u, v) & u &= g_v(x, z) \\ & & \text{bzw.} & \\ z &= \Psi_v(u, v) & v &= h_v(x, z) \end{aligned} \quad (99)$$

kann nun jede Teilfläche Δ_v der xz -Ebene in ein quadratisches Gebiet ϵ_v - mit den Eckpunkten $u = \pm 1, v = \pm 1$ - der uv -Ebene transformiert werden [20]. Damit geht jeder Punkt $P(x_{ij}, y_{ij})$ aus Δ_v einschließlich des Randes eindeutig in einen Punkt $P(u_{ij}, v_{ij})$ des Gebietes ϵ_v über. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die Teilflächenintegrale in der Form

$$I_v = \iint_{\Delta_v} f(x, z) \cdot dx \cdot dz = \iint_{\epsilon_v} F(u, v) \cdot D_v(u, v) \cdot du \cdot dv \quad (100)$$

angeben, für deren Lösung die bekannte Approximation [21]

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(u, v) D_v(u, v) du dv = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s H_i H_j D_v(u_{ij}, v_{ij}) F(u_{ij}, v_{ij}) \quad (101)$$

herangezogen werden soll. Darin ist $F(u, v)$ diejenige Funktion, in die $f(x, y)$ infolge der Transformation (99) übergeht, während

$$D_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_v}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_v}{\partial v} \\ \frac{\partial \Psi_v}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_v}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (102)$$

die Funktionaldeterminante der Funktionen φ_v und Ψ_v darstellt. Die Koeffizienten H_i, H_j sind die sogenannten Gewichte der hier verwendeten Gauß'schen Quadraturformel mit $s \cdot s = 3 \cdot 3$ Stützstellen. Die systematische Bestimmung der Funktionen φ_v und Ψ_v - die in der englischsprachigen Literatur als "Shape Functions" bezeichnet werden - basiert auf der quadratischen Interpolation zwischen den acht Punkten P_1 bis P_8 des Flächenrandes Δ_v und ist in [22, 23]

ausführlich hergeleitet.

Mit der soeben kurz umrissenen Integrationsmethode können die Flächenintegrale von Gl.(95) in einfacher und zweckmäßiger Weise berechnet werden.

3.25 Feldlinien - Niveaulinien

a) Feldlinien

Feldlinien vermitteln eine anschauliche Vorstellung von einem Vektorfeld $\vec{B}(x,y,z)$, das in jedem Punkt eines räumlichen Gebietes durch seine Komponenten B_x, B_y, B_z gegeben sein möge. Per Def. beschreibt das Differentialgleichungs-System (Dgl.-System)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} ,$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{B_z}{B_x}$$

(103)

diejenige Schar von Feldlinien, die in diesem Gebiet existieren und von denen jede einzelne durch die Anfangswerte

$$y(x_0) = y_0 ,$$
$$z(x_0) = z_0$$

(104)

eindeutig festgelegt wird. Die Definition (103) besagt, daß der Feldvektor in jedem Punkt der Feldlinie die Richtung der Tangente an diese Feldlinie besitzt. Da eine Feldlinie im allgemeinen nicht doppelpunktfrei ist - beispielsweise in sich geschlossene Feldlinien - erfordert ihre numerische Berechnung eine Parameterdarstellung oberstehender Differentialgleichungen. Als unabhängiger Parameter bietet sich die Bogenlänge s der Kurve an. Die gesuchte räumliche Feldlinie

$$\begin{aligned}x &= x(s), \\y &= y(s), \\z &= z(s)\end{aligned}\tag{105}$$

geht dann aus der Parameterform von Gl. (103)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \cos\alpha(s) = \frac{B_x(s)}{|B(s)|} = f_1(s), \\ \frac{dy}{ds} &= \cos\beta(s) = \frac{B_y(s)}{|B(s)|} = f_2(s), \\ \frac{dz}{ds} &= \cos\gamma(s) = \frac{B_z(s)}{|B(s)|} = f_3(s)\end{aligned}\tag{106}$$

mit den Anfangswerten $x(s_0) = x_0$, $y(s_0) = y_0$, $z(s_0) = z_0$ und

$$|B(s)| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

hervor, deren Herleitung unmittelbar aus Abb. 10 zu erkennen ist [19].

Die Lösbarkeit des Differentialgleichungs-Systems (106) setzt zwei Bedingungen voraus:

1. die Stetigkeit der Funktionen $f_v(s)$, $v = 1(1)3$
2. die Erfüllung der Lipschitz-Bedingung [20, 24].

Die letztere ist in singulären Punkten des Vektorfeldes und in deren unmittelbarer Umgebung nicht erfüllbar. In solchen Punkten, die entweder Wirbelpunkte (WP) oder Sattelpunkte (SP) des Vektorfeldes sein können, verschwinden die Feldkomponenten B_x , B_y , B_z . Die Verletzung der Lipschitz-Bedingung kann am einfachsten an einem konkreten Beispiel veranschaulicht werden. Dazu soll das ebene magnetische Feldlinienbild (Abb. 10) zweier unendlich ausgehnter, antiparallel zur z -Achse verlaufender Linienströme I_1 und I_2 dienen. Aus Abb. 10 geht hervor, daß Feldlinien um WP innerhalb einer Grenzlinie s_g lokal zu stark gekrümmt sind und somit gegen das 2. Lösbarkeits-Kriterium der Differentialgleichung verstoßen. Entsprechendes gilt für Feldlinien die beliebig nahe

an SP verlaufen, so daß die durch SP laufende, physikalisch oft wichtige Separatrix nur angenähert berechnet werden kann. Verlaufen also Feldlinien durch die oben diskutierten unerlaubten Gebiete, ist ihre Berechnung unmöglich.

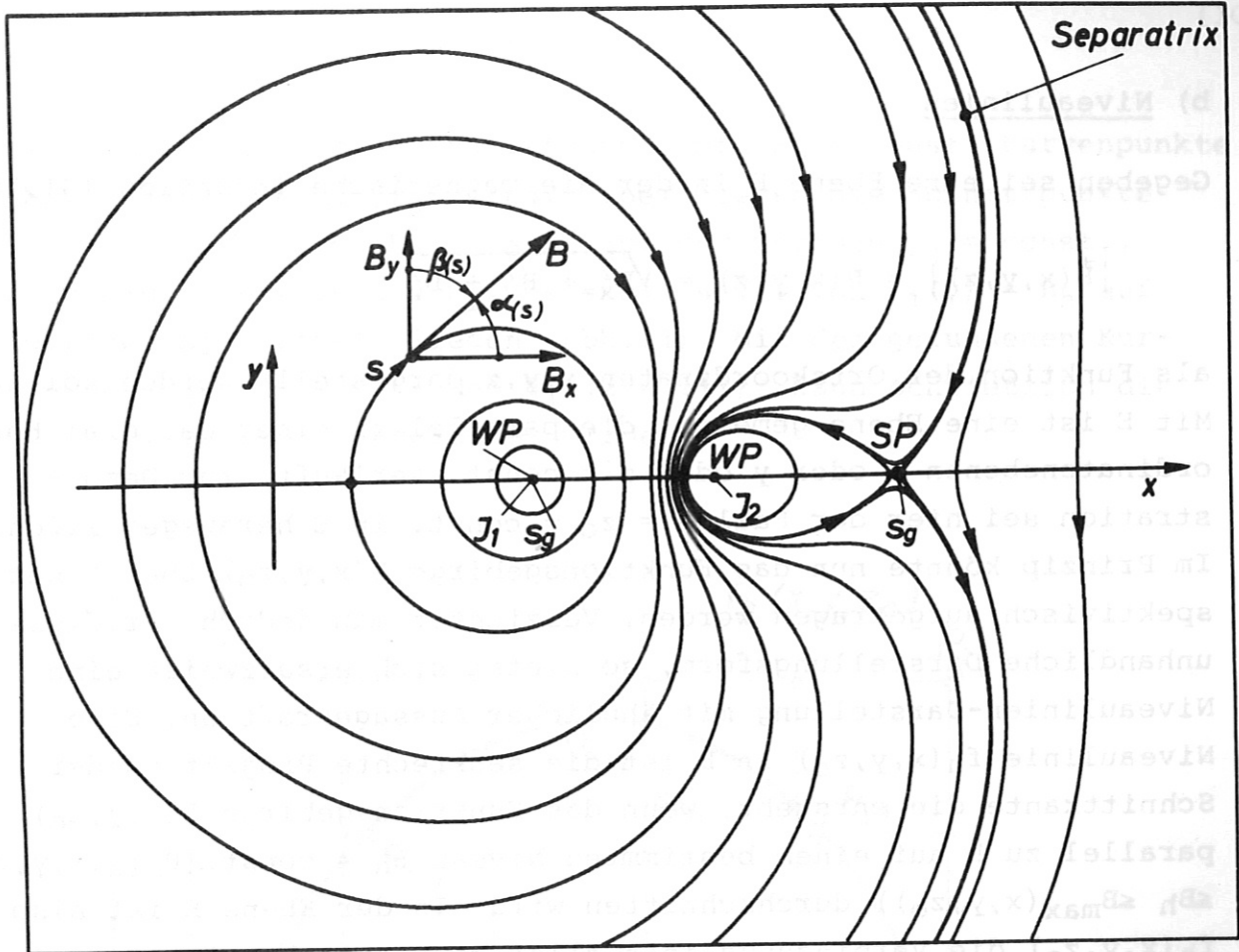


Abb. 10. Magnetische Feldlinien von zwei parallelen Linienströmen I_1 und I_2 für $I_2 = -I_1/2$

Es wurde bereits angedeutet, daß zur Lösung von Gl. (106) nur numerische Verfahren in Frage kommen. Dies gilt schon deshalb, weil die rechte Seite f_v von Gl. (106), die hier aus den Komponenten des magnetischen Feldes B_x , B_y , B_z nach Gl. (79) berechnet wird, nur in numerischer Form vorliegt. Der speziellen Problemstellung am besten angepaßt scheint das Mehrschritt-Integrationsverfahren nach Adams-Bashford [24] zu sein. Dieses Verfahren ist für hinreichend kleine Inkremente Δs stabil, von der globalen Fehlerordnung $(\Delta s)^4$ und verlangt pro Integrationsschritt als einziges Verfahren nur einen Funktionsaufruf f_v . Die letztgenannte Eigenschaft

ermöglicht bei umfangreichen Berechnungen von f_v (z.B. bei Anordnungen mit vielen Spulen) und vielen Integrationsschritten eine beträchtliche Verminderung der Rechenzeit gegenüber anderen Verfahren [21,24].

b) Niveaulinien

Gegeben sei eine Ebene E in der die magnetische Induktion (Gl.79)

$$|\vec{B}(x,y,z)| = B(x,y,z) = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (107)$$

als Funktion der Ortskoordinaten x,y,z dargestellt werden soll. Mit E ist eine Ebene gemeint, die parallel zu einer der drei Koordinatenebenen x oder y oder $z = \text{const.}$ verläuft. Zur Demonstration sei hier der Fall $z = z_0 = \text{const.}$ in E herausgegriffen. Im Prinzip könnte nun das Funktionsgebirge $B(x,y,z_0)$ über E perspektivisch aufgetragen werden. Verzichtet man jedoch auf diese unhandliche Darstellungsform, so bietet sich ersatzweise eine Niveaulinien-Darstellung mit ähnlicher Aussagekraft an. Eine Niveaulinie $f_h(x,y,z_0)$ in E ist die senkrechte Projektion der Schnittkante die entsteht, wenn das Funktionsgebirge $B(x,y,z_0)$ parallel zu E auf einem bestimmten Niveau $B_h = \text{const.}$, ($B_{\min}(x,y,z_0) \leq B_h \leq B_{\max}(x,y,z_0)$) durchschnitten wird. In der Ebene E ist also $f_h(x,y,z_0)$ die Verbindungslinie aller geometrischen Orte, in denen $B(x,y,z_0) = B_h$ ist. Für verschiedene Werte B_h , $h = 1(1)h_1$ erhält man somit eine Schar von Niveaulinien $f_h(x,y,z_0)$, die in E die Ortsabhängigkeit von $B(x,y,z_0)$ in Gestalt diskreter Werte B_h wiedergeben.

Für die numerische Berechnung von $f_h(x,y,z_0)$ wird zunächst die betrachtete Ebene E mit einem äquidistanten Netz von Gitterpunkten P_{ij} , $i = 1(1)\xi$, $j = 1(1)\eta$ überdeckt und in ihnen $B(x_i, y_j, z_0)$ berechnet (Abb. 11). Aus den zu einer $\xi \cdot \eta$ Matrix

$$(B) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1\eta} \\ B_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ B_{\xi 1} & \dots & \dots & B_{\xi \eta} \end{bmatrix} \quad (108)$$

zusammengefaßten Größen B_{ij} können dann nacheinander zeilen- und spaltenweise Interpolationspolynome

$$P_j(x) = B_j(x, y_j), \quad j = 1(1)n \quad (109)$$

$$P_i(y) = B_i(x_i, y), \quad i = 1(1)\xi$$

entwickelt werden, deren Schnittpunkte mit $B_h = \text{const.}$ Kurvenpunkte der Niveaulinie $f_h(x, y, z_0)$ sind. Dabei liegen die Schnittpunkte P_{js} , $s = s_1, s_2 \dots$ von $P_j(x) = B_h$ auf der Geraden $y_j = \text{const.}$, während die Schnittpunkte P_{is} , $s = s_1, s_2 \dots$ von $P_i(y) = B_h$ auf der Geraden $x_i = \text{const.}$ liegen (Abb. 11). Mit den gefundenen Kurvenpunkten P_{js} , $j = 1(1)n$ und P_{is} , $i = 1(1)\xi$ kann schließlich die gesuchte Niveaulinie gezeichnet werden.

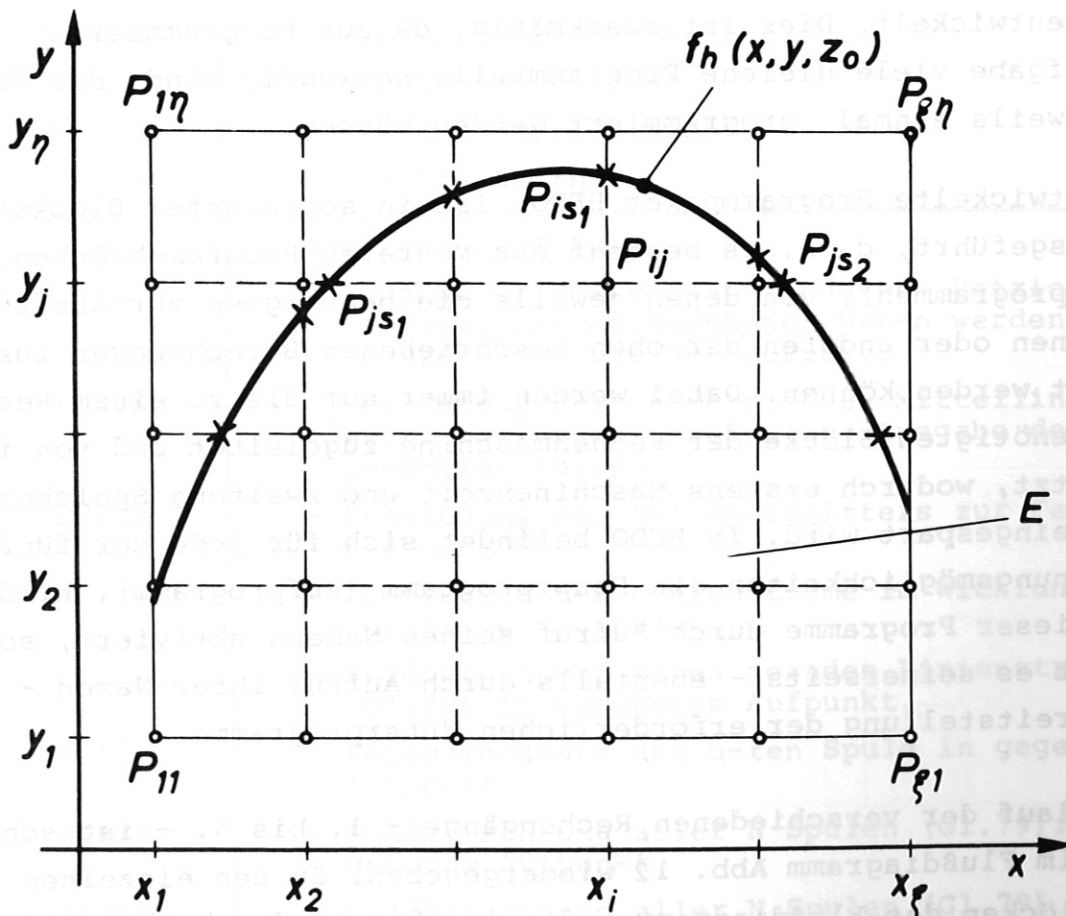


Abb. 11. Niveaulinie f_h der Funktion $B(x, y, z_0)$.

3.3 Rechenprogramm

Im folgenden werden einige grundlegende Erläuterungen zum Rechenprogramm gegeben. Es wird bewußt auf eine umfassende Darlegung programmtechnischer Details verzichtet, da sie im Rahmen dieser Abhandlung nicht angebracht erscheinen^{*)}.

Mit dem Rechenprogramm soll die numerische Berechnung

1. des magnetischen Feldes
2. der magnetischen Kräfte
3. der Induktivitäten
4. der Feldlinien
5. der Niveaulinien

einer beliebigen Spulenanordnung vorgenommen werden können. Für alle fünf Aufgaben wurde ein gemeinsames FORTRAN-Programm mit dem Namen HEDO entwickelt. Dies ist zweckmäßig, da zur Programmierung jeder Teilaufgabe viele gleiche Programmteile notwendig sind, die dann nur jeweils einmal programmiert werden müssen.

Das entwickelte Programmpaket HEDO ist in sogenannter Blockstruktur ausgeführt, d. h. es besteht aus mehreren Programmblöcken, (Unterprogrammen), von denen jeweils die benötigten zur Ausführung der einen oder anderen der oben beschriebenen Berechnungen zusammengesetzt werden können. Dabei werden immer nur die zu einem Rechengang benötigten Blöcke der Rechenmaschine zugeleitet und von ihr übersetzt, wodurch erstens Maschinenzeit und zweitens Speicherplatz eingespart wird. In HEDO befindet sich für jede der fünf Berechnungsmöglichkeiten ein Hauptprogramm (Rufprogramm). Wird eins dieser Programme durch Aufruf seines Namens aktiviert, so besorgt es seinerseits - ebenfalls durch Aufruf ihrer Namen - die Bereitstellung der erforderlichen Unterprogramme.

Der Ablauf der verschiedenen Rechengänge - 1. bis 5. - ist schematisch im Flußdiagramm Abb. 12 wiedergegeben. Zu den einzelnen Programmblöcken des Flußdiagramms, die in Abb. 12 durch ihre Namen

^{*)} Eine ausführliche Programmbeschreibung wird in Kürze als IPP-Report veröffentlicht.

gekennzeichnet sind, wird in Tabelle 1 eine kurze Erklärung gegeben. Den Kopf des Flußdiagramms bilden die fünf nebeneinander dargestellten Hauptdiagramme. Unter ihnen sind spaltenweise die jeweils erforderlichen Unterprogramme angeordnet, die bei Ausführung der betreffenden Berechnung in der dort gezeichneten Reihenfolge durchlaufen werden. Ist ein Programmblock mit einem Beipäß versehen, so kann er wahlweise angesteuert werden oder nicht. Die außerhalb der Vertikalen gezeichneten Programmblöcke sind Subroutinen die von den Unterprogrammen aufgerufen werden.

Tabelle 1: Kurzbeschreibung zum FORTRAN-Programm "HEDO"

Nr.	Programmname	Kurzbeschreibung
1	MAINFE	Hauptprogramm zur Berechnung - des magnetischen Feldes - der magnetischen Kräfte - der Induktivitäten - der Magnetfeldlinien - der Niveaulinien
2	MAINKR	
3	MAININ	
4	MAINLI	
5	MAINNI	
6	DATA	Unterprogramm zur - Eingabe der Daten (Spulendaten, Betriebsgrößen). Die eingegebenen Daten werden kontrolliert und ausgedruckt.
7	KURVE	- Bestimmung der geometrischen Mittellinie im Wicklungskörper der Spulen. Ausgabe der berechneten Kurven.
8	PFELD	- Festlegung des Aufpunktegitters zur Feldberechnung.
9	SPULE	- Festlegung der Linienströme im Wicklungskörper der N Spulen.
10	LIEGEL	- Feldberechnung eines geraden Linienstromes (Gl.78) in gegebenem Aufpunkt.
11	FELD	- Feldberechnung der q-ten Spule in gegebenem Aufpunkt.
12	FUNKT	- Feldberechnung aller N Spulen (Gl.79) in gegebenem Aufpunkt.
13	GAUSS	- Feldberechnung aller N Spulen (Gl.79) in dem gegebenen Aufpunktegitter
14	RIPPLE	- Berechnung der Feldhomogenität (Definitionsgl. Siehe Kapitel 5.2) als Funktion einer Ortskoordinate

Fortsetzung von Tabelle 1:

Nr.	Programmname	Kurzbeschreibung
		Unterprogramm zur
15	TAPO	- Magnetbandspeicherung der Aufpunkte und der in ihnen berechneten Feldkomponenten.
16	DIFFGL	- Lösung der Feldlinien-Differentialgleichung (Gl.106).
17	TAPIN	- Übernahme der auf Magnetband gespeicherten Feldwerte.
18	NIVEAU	- Berechnung und graphischen Darstellung der Niveaulinien
19	KPK	- Berechnung der Aufpunkte innerhalb des Wicklungskörpers derjenigen Spule für welche die magnetischen Kräfte berechnet werden sollen.
20	NEWTON	- Berechnung der magnetischen Kräfte und des magnetischen Feldes in den mit der Routine KPK berechneten Aufpunkten.
21	BANDO	- Magnetbandspeicherung der berechneten Kraftkomponenten.
22	HENRY	- Berechnung der Selbst- und Gegeninduktivitäten der Spulen (Gl.95).
23	PK	- Berechnung der Aufpunkte im Falle der Induktivitätsberechnung (innerhalb des Integrationsgebietes).
24	INTEG	- Lösung des Flächenintegrals (Gl.98).
		Plot-Programm (Unterprogramm) zum Plotten
25	FEPLOT	- einer beliebigen Feldkomponente als Funktion einer beliebigen Ortskoordinate.
26	RIPLOT	- des Feldripples eines toroidalen Magnetfeldes als Funktion vom Torusradius.
27		- der magnetischen Feldlinien
28	PLOT	- der Kraftverteilung im Wicklungskörper der Spule.
29	INFO	Informations-Routine die auf Wunsch aufgerufen werden kann. Sie enthält alle zur Benutzung von HEDO erforderlichen Informationen.

3.4 Fehleranalyse

In diesem Kapitel soll der an die Filament-Methode geknüpfte Verfahrensfehler untersucht werden. Zum Vergleich wird das in [15] angegebene, als FORTRAN-Programm vorliegende Berechnungsverfahren herangezogen. Es wurde speziell für kreisförmige Spulen mit rechteckiger Querschnittsfläche entwickelt und basiert auf der Berechnung der in 3.1 dargelegten Integrale Gl. (50) bis (51). Als Testobjekt dient die in Abb. 13 skizzierte kreisförmige Spule mit $w = 12$ Windungen von der das magnetische Feld ihres Stromes $I = 10$ KA in einem willkürlich gewählten Aufpunktegitter $P(x, y, z)$ mit $x = 0(10)100$, $y = 0(10)100$ und $z = 0$ nach beiden Methoden berechnet werden soll.

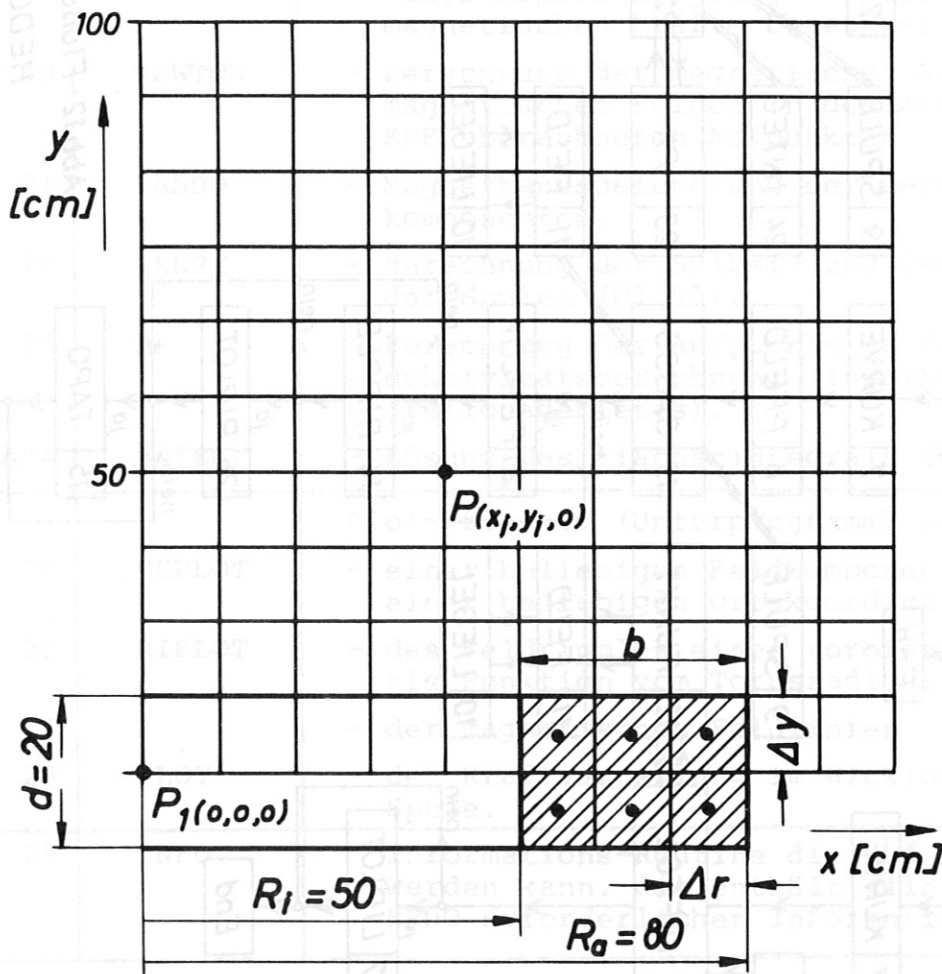


Abb. 13. Aufpunktegitter der kreisförmigen Testspule.

Dabei sind die nach [15] erzielten Feldwerte $B^s(p)$ als Sollwerte und die mit der Filament-Methode erzielten Feldwerte $B^i(p)$ als Istwerte anzusehen. Der relative Fehler in Prozent beträgt

$$\Delta B(P) = \frac{B^i(P) - B^s(P)}{B^s(P)} \cdot 100 \% \quad (110)$$

und soll abhängig von der Anzahl l der linienförmigen Leiterschleifen im Wicklungskörper dargestellt werden. Vorbereitend muß jedoch geklärt werden, in welchen Fehlerschranken sich die Feldwerte eines geschlossenen Linienstromes bewegen, wenn dieser durch ein Polygon gerader Linienströme approximiert wird. Diese Untersuchung soll an einem in der Ebene $y = 0$ verlaufenden kreisförmigen Linienstrom I mit $2R = 130$ cm Durchmesser vorgenommen werden, dessen Mittelpunkt P_1 im Koordinatenursprung liegt. Nach [11] ist die von diesem Strom hervorgerufene magnetische Induktion $B(x, y, z)$ exakt bekannt. Sie besitzt in der Ebene $y = 0$ lediglich die Komponente B_y deren exakter Verlauf entlang der x -Achse in Abb. 14 dargestellt ist.

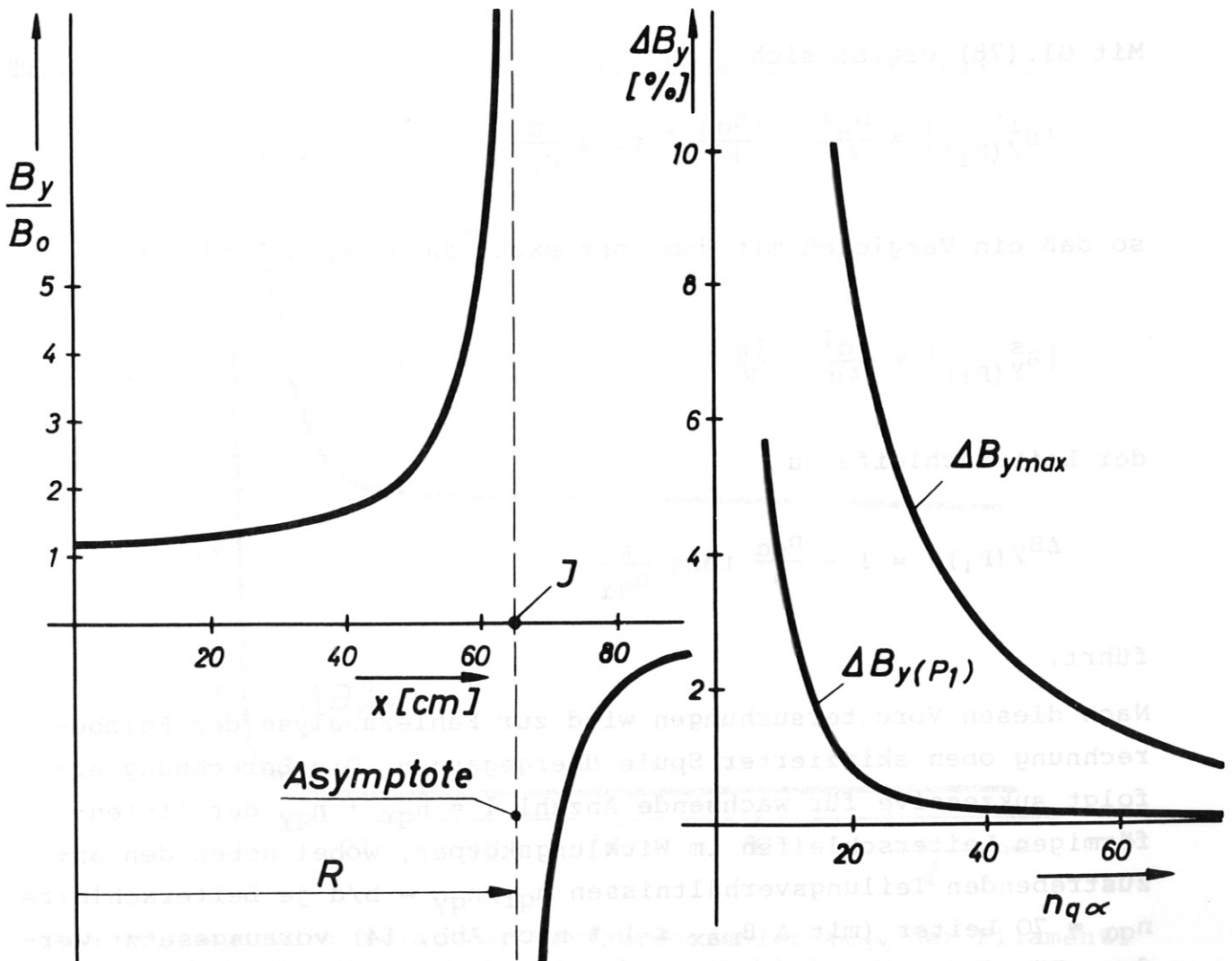


Abb. 14. Magnetfeldverlauf eines kreisförmigen Linienstromes mit relativem Fehler ΔB_y als Funktion der Leiterzahl $nq\alpha$ des Polygons.

Außerdem erfolgt die Berechnung dieser Funktion nach Gl. (79) für verschieden gute Approximationen, die durch Variation der Leiterzahl $n_{q\alpha}$ des Polygons entstehen. Aus dem Vergleich der so erhaltenen Kurven mit der exakten Kurve geht unmittelbar der maximale relative Fehler $\Delta B_{y\max}$ abhängig von der Leiterzahl $n_{q\alpha}$ hervor (Abb. 14). Der Maximalwert $\Delta B_{y\max}$ befindet sich jeweils in der direkten Umgebung des Linienstromes. Naturgemäß ist für $x \rightarrow R$ die angenäherte Berechnung des gegen unendlich strebenden Magnetfeldes besonders kritisch. Mit größer werdender Entfernung vom Linienstrom werden deutlich bessere Ergebnisse erzielt. Sie sind in etwa mit dem Fehler $\Delta B_Y(P_1)$, der im Mittelpunkt P_1 als Funktion von $n_{q\alpha}$ analytisch beschrieben werden kann (Abb. 14). Für den Aufpunkt $P_1(0,0,0)$ folgt aus Gl. (79):

$$|B_{Y(P_1)}^i| = \sum_{k=1}^{n_{q\alpha}} |B_{Yk}| = n_{q\alpha} \cdot B_{Y1} .$$

Mit Gl. (78) ergibt sich

$$|B_{Y(P_1)}^i| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2n_{q\alpha}}{R} \cdot \operatorname{tang} \frac{\pi}{n_{q\alpha}} ,$$

so daß ein Vergleich mit dem dort exakt angebbaren Feldwert

$$|B_{Y(P_1)}^s| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{R}$$

der Leiterschleife zu

$$\Delta B_Y(P_1) = 1 - \frac{n_{q\alpha}}{\pi} \operatorname{tang} \frac{\pi}{n_{q\alpha}}$$

führt.

Nach diesen Voruntersuchungen wird zur Fehleranalyse der Feldberechnung oben skizzierter Spule übergegangen. Die Berechnung erfolgt sukzessive für wachsende Anzahl $l = n_{qr} \cdot n_{qy}$ der linienförmigen Leiterschleifen im Wicklungskörper, wobei neben den anzustrebenden Teilungsverhältnissen $n_{qr}/n_{qy} \approx b/d$ je Leiterschleife $n_{q\alpha} = 70$ Leiter (mit $\Delta B_{\max} \leq 1\%$ nach Abb. 14) vorausgesetzt werden. Für jedes l läßt sich dann der relative Fehler (Gl. 110) in

allen Punkten $P(x_1, y_1, 0)$ des Aufpunktgitters (Abb.13) die außerhalb und innerhalb der Wicklung gelegenen Maximalwerte ΔB_{max}^a und ΔB_{max}^i herausgegriffen und in Abhängigkeit der Leiterzahl l dargestellt (Tab.2 bzw. Abb. 15).

Test Nr.	Anzahl der Leiter-schleifen			$\frac{\Delta y}{\Delta r}$	Maximaler relativer Fehler	
	n_{qr}	n_{qy}	$l = n_{qr} \cdot n_{qy}$		innerhalb der Wicklung ΔB_{max}^i [%]	außerhalb der Wicklung ΔB_{max}^a [%]
1	1	1	1	0,33	./.	10,8
2	3	2	6	1	9,5	0,7
3	6	3	18	1,33	10,7	0,41
4	6	4	24	1	4,9	0,4
5	9	6	54	1	4,8	0,4
6	12	8	96	1	4,7	0,4

Tabelle 2. Maximaler relativer Fehler in Abhängigkeit von der Leiterzahl.

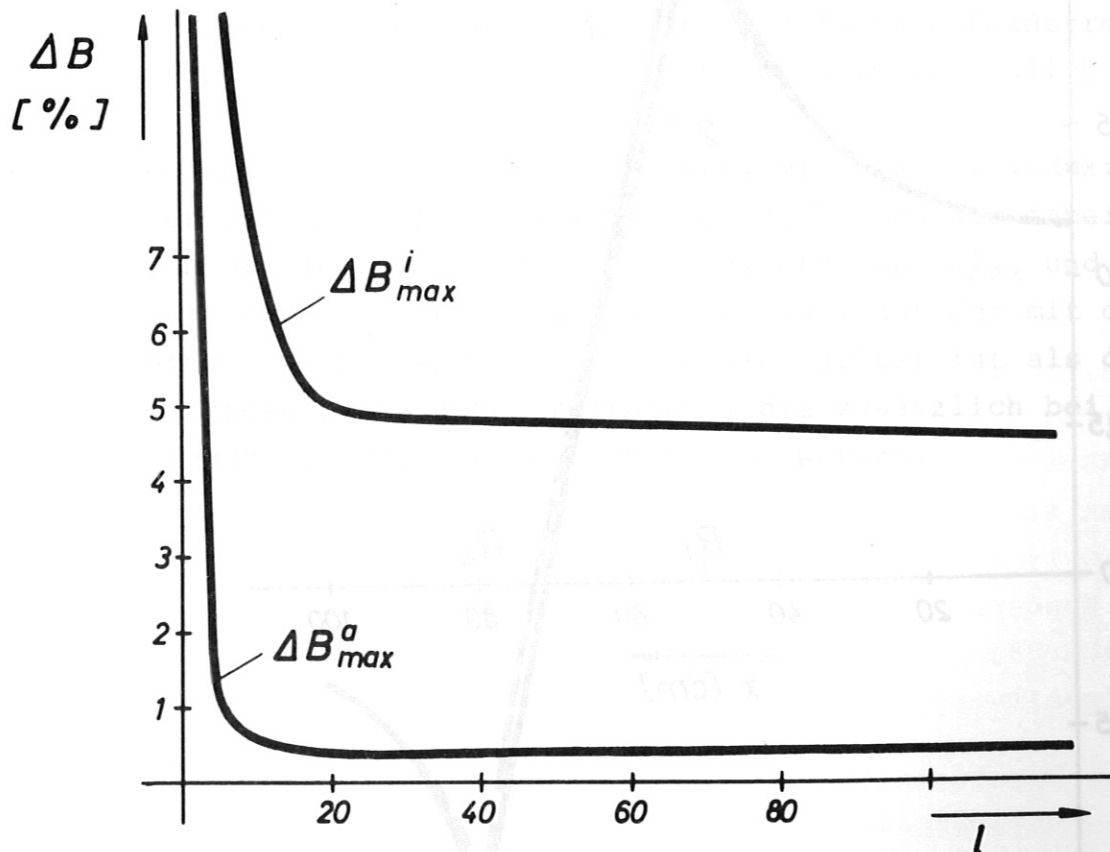


Abb.15. Maximaler relativer Verfahrensfehler ϵ_{max} der Filament-Methode als Funktion der Leiterzahl $l = n_{qr} \cdot n_{qy}$.

Das erhaltene Ergebnis zeigt, daß bei Anwendung der Filament-Methode die Magnetfeldberechnung der Spule schon mit verhältnismäßig geringer Leiterzahl in sehr engen Fehlergrenzen durchgeführt werden kann. Dies gilt insbesondere für Bereiche außerhalb des Wicklungskörpers, in denen der relative Fehler mühelos unter 1 % (in diesem Beispiel schon durch eine Approximation mit $l = 6$ Leitern) zu halten ist. Größere Genauigkeit kann und wird im allgemeinen nicht gefordert werden, weil der durch Störfelder - von Zuleitungen, Überstiegen in der Wicklung und dergl. - hervorgerufene Fehler meist mehr als 1 % beträgt. Zur Veranschaulichung dieser Aussage sei die Kurven-darstellung Abb.16 gegeben, die den Feldverlauf der Spule in der Ebene $y = 0$ einmal exakt (Kurve 1) und zum anderen nach der Filament-Methode berechnet (Kurve 2) wiedergibt. Abb. 16 zeigt, daß die Kurven außerhalb der Wicklung praktisch zusammenfallen.

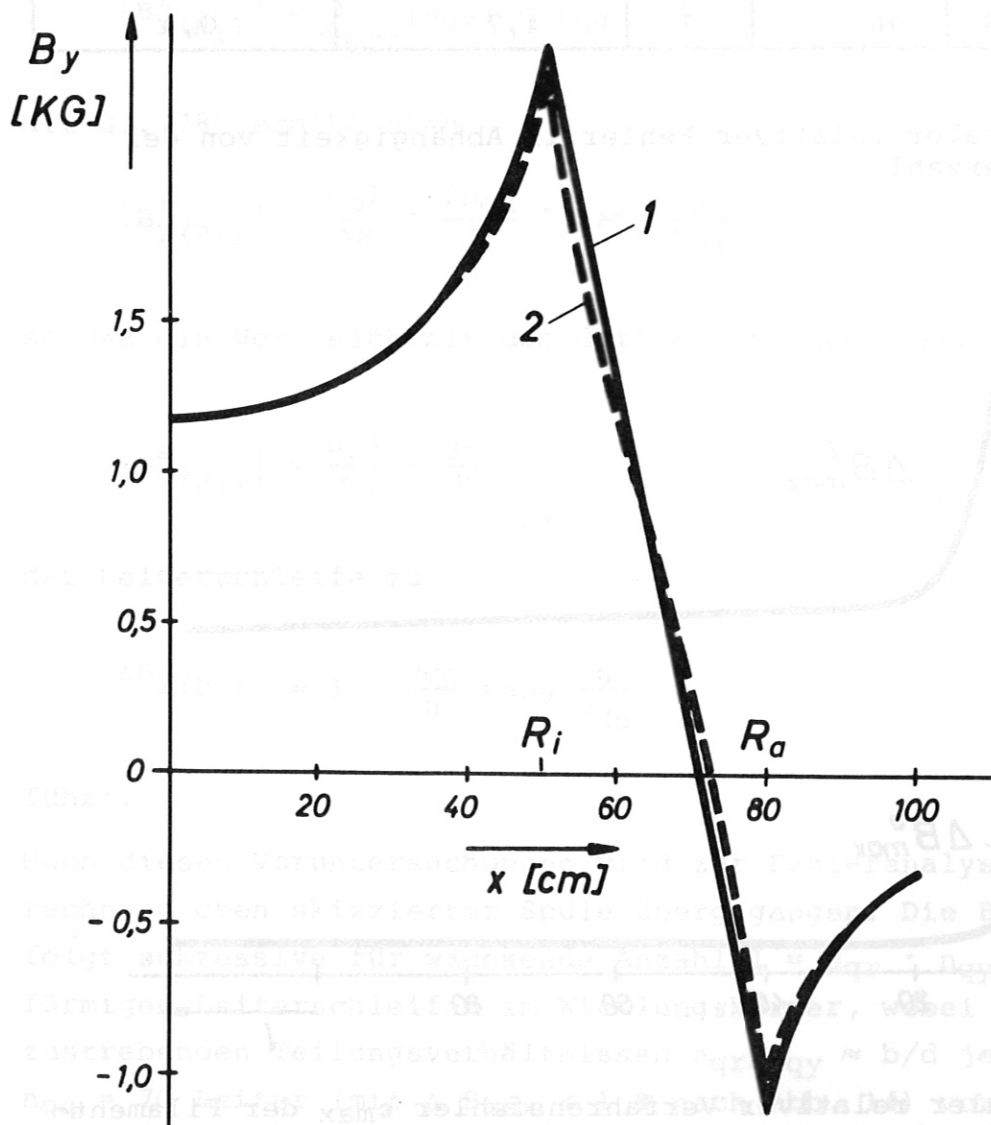


Abb. 16. Magnetfeldverlauf der Testspule
1 exakte Berechnung, 2 Approximation mit $l = 6$.

Ferner sei erwähnt, daß Feldberechnungen in spulenfernen Aufpunkten mit sehr geringem numerischen Aufwand innerhalb der angegebenen Fehlergrenze durchgeführt werden können, d. h. in solchen Fällen ist die Filament-Methode schon bei Verwendung weniger Linienleiter vorteilhaft zu verwenden.

Nicht so günstig wie außerhalb, verlaufen Feldberechnungen innerhalb der Wicklung, da ihnen dort ein deutlich größerer Verfahrensfehler anhaftet (Abb. 15). Naturgemäß ist die Filament-Methode für Feldberechnungen innerhalb der Wicklung nicht besonders geeignet. Es besteht die Gefahr, daß ein Aufpunkt beliebig nahe an einer Polstelle liegt, wodurch die Genauigkeit der Berechnung stark herabgesetzt wird. Dies erklärt gleichfalls die unwesentliche Verbesserung von ΔB_{\max}^i bei den Testrechnungen Nr. 4 bis 6 (Tab. 2). Weiterhin ist aus Testrechnung Nr. 3, Tab. 2 zu entnehmen, daß Näherungen mit $\Delta y/\Delta r \neq 1$ (Abb. 13) trotz erhöhter Leiterzahl schlechtere Ergebnisse liefern als solche mit $\Delta y/\Delta r = 1$. Daher sollte $\Delta y/\Delta r = 1$ in den Grenzen $\pm 10\%$ erfüllt werden. Dementsprechend ist die Wahl von n_{gr} bzw. n_{gy} vorzunehmen. Innerhalb der Wicklung dürften Feldberechnungen mit den in Tabelle 1 gegebenen Fehlerschranken immer möglich sein.

Da die Berechnung der magnetischen Kräfte, wie die der Induktivitäten auf der Feldberechnung aufgebaut sind, können die dabei auftretenden Fehler kleiner als 3% (\approx Mittelwert von ΔB_{\max}^i und ΔB_{\max}^a) vorausgesetzt werden. Denn es hat sich gezeigt, daß der mit der Filament-Methode verbundene Fehler sehr viel größer ist als die Fehler der übrigen numerischen Verfahren, die zusätzlich bei der Kraft- und Induktivitätsberechnung benötigt werden.

4. Numerische Lösung des Netzwerks-Differentialgleichungs-Systems

In Kapitel 2.2 wurde die Entwicklung des Netzwerks-Differentialgleichungs-Systems (41) dargelegt. Die dort beschriebenen Zusammenhänge sind allgemein gültig und somit auf jedes Netzwerk übertragbar. Lediglich die Belegung der Koeffizientenmatrizen und die Dimension des Differentialgleichungs-Systems muß dem jeweiligen Netzwerk angepaßt werden. Ihre systematische Bestimmung erfolgt mit Hilfe des eindeutigen Bildungsgesetzes (40), welches neben den Zweigimpedanzen nur die Vorgabe der Strukturmatrix (H) fordert. Für ein spezielles Netzwerk ist also mit der Matrix (H) gleichzeitig das zugehörige Differentialgleichungs-System festgelegt. Diese Eigenschaft läßt sich bei der Behandlung von Schaltvorgängen vorteilhaft ausnutzen. Da l hintereinander ablaufende Schaltvorgänge zugelassen werden sollen, muß der betrachtete Integrationsbereich $T = t_e - t_a$ der Differentialgleichung in l Teilintervalle $T_s = t_{s+1} - t_s$, $s = 1(1)l$ unterteilt werden. In jedem Intervall T_s muß die Netzwerks-Differentialgleichung (41) der dann vorliegenden Netzstruktur angepaßt werden. Nach dem oben Gesagten ist das durch Vorgabe der dem jeweiligen Netzzustand entsprechenden Strukturmatrix (H) in den Schaltzeitpunkten t_s und durch Verwendung von (40) zu erreichen. Außerdem muß in allen Schaltzeitpunkten t_s der Anfangszustand für das im Intervall T_s , $s = 1(1)l$ gültige Netzwerk vorgegeben werden. Dabei ist zu beachten, daß die grundsätzlich frei wählbaren Anfangswerte $(q_0), (i_0)$ das Schaltgesetz nicht verletzen. Durch das Schaltgesetz wird ausgedrückt, daß sich die Energie in Energiespeichern (Spulen, Kondensatoren) nicht sprunghaft ändern kann. Da die gespeicherte Energie $E \sim i^2$ in Spulen und $E \sim q^2$ in Kondensatoren ist, müssen in ihnen nach einem Schaltvorgang die Ströme bzw. die Ladungen stetig übergehen. Für alle Schaltzeitpunkte t_s , $s = 1(1)l$ muß also $i_I = i_{II}$ in mit Spulen besetzten Netzzweigen und $q_I = q_{II}$ in mit Kondensatoren besetzten Netzzweigen gelten. Dabei indiziert "I" die Größen unmittelbar vor und "II" die Größen unmittelbar nach einem Schaltvorgang.

Nach der Bereitstellung der für die einzelnen Zeitintervalle T_s gültigen Netzwerks-Differentialgleichungen wird nun das vorliegende Differentialgleichungs-System 2. Ordnung mit der Transformation

$$(v) = (q_k),$$

$$(w) = (q_k').$$

in ein Differentialgleichungs-System 1. Ordnung

$$(v') = (w),$$

$$(w') = -(L)^{-1} (K) (v) - (L)^{-1} [(R) + (L')] (w) - (L)^{-1} (H)^T [(u_{CO}) + (u_O)] \quad (116)$$

überführt. Unter Einführung einer neuen Variablen (y) und gleichzeitiger Normierung auf dimensionslose Größen

$$x = \omega_n t,$$

$$(V) = \frac{1}{q_n} (v) = \frac{1}{q_n} (q_k), \quad (W) = \frac{d}{dx} (V) = (V'), \quad (117)$$

$$(U) = \frac{1}{u_n} (u),$$

kann man Gl.(116) in zusammengefaßter Form angeben. Mit

$$(y) = \begin{bmatrix} (V) \\ (W) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (y') = \begin{bmatrix} (V') \\ (W') \end{bmatrix} \quad (118)$$

folgt aus Gl. (116)

$$(y') = (A) (y) + (F) = (f(x, y)), \quad (119)$$

wobei die Matrizen (A) und (F) nachstehende Gestalt annehmen.

$$(A) = \begin{bmatrix} (o) & (E) \\ -\frac{1}{\omega_n^2} \cdot (L)^{-1} (K) & -(L)^{-1} \left[\frac{1}{\omega_n} \cdot (R) + (L') \right] \end{bmatrix}$$

$$(F) = \begin{bmatrix} (o) \\ -\frac{1}{\omega_n^2 q_n} \cdot (L)^{-1} (H)^T [(u_{CO}) + (u_O)] \end{bmatrix} \quad (120)$$

Darin ist (o) die Null- und (E) die Einheitmatrix. Dementsprechend können die Anfangswerte nach Gl.(42) durch eine 2m-dimensionale

Spaltenmatrix

$$(y_0) = \begin{bmatrix} (V_0) \\ (W_0) \end{bmatrix}$$

mit

$$(V_0) = \frac{1}{q_n} (q_0) \quad (121)$$

und

$$(W_0) = \frac{(i_0)}{\omega_n q_n}$$

dargestellt werden.

Aus der Lösungsmatrix (y) und deren Ableitung (y') kann man nun in einfacher Weise die gesuchten Zweigströme bzw. -spannungen der n-Netzzweige berechnen. Es gilt:

$$(I)_1^n = (H) \cdot (y)_{m+1}^{2m}, \quad (122)$$

$$(U_R)_1^n = \frac{q_n \omega_n}{u_n} \cdot (R_d) \cdot (I)_1^n, \quad (123)$$

$$(U_L)_1^n = \frac{q_n \omega_n^2}{u_n} \cdot [(L'_k) \cdot (I)_1^n + (L_k) \cdot (H) (y')_{m+1}^{2m}], \quad (124)$$

$$(U_C)_1^n = \frac{1}{u_n} \cdot (u_{CO})_1^n + \frac{q_n}{u_n} \cdot (K_d) \cdot (H) \cdot (y)_1^m, \quad (125)$$

$$(U)_1^n = \frac{1}{u_n} (u_0) + (u_R) + (u_L) + (u_C). \quad (126)$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Lösung des Differentialgleichungs-Systems (119) die Inversion der Matrix (L) fordert, d.h. es muß $\det(L) \neq 0$ gelten. Diese Bedingung ist bei sogenannten sprungfähigen Netzwerken [28] nicht erfüllt. Das sind Netzwerke, in denen nach einem Schaltvorgang sprunghafte Änderungen einzelner Systemgrößen q_k, i_k entstehen können. Dann sind p, ($p \leq m$) von den m Zeilen der (L)-Matrix ausschließlich mit Nullelementen belegt, so daß nicht nur $\det(L) = 0$ gilt, sondern daß außerdem p Gleichungen verschwindende zweite Ableitungen besitzen. Diese p Gleichungen

sind also Differentialgleichungen 1. Ordnung, die jeweils nur einen Anfangswert benötigen und nicht der Transformation (115) unterworfen werden müssen. Die Transformation (115) ist somit nur auf die verbleibenden $m - p$ Differentialgleichungen 2. Ordnung anzuwenden. Anschließend kann man die $j = 2 \cdot (m - p) + p$ Gleichungen wieder zu einem eindeutig lösbares j -dimensionales Differentialgleichungs-System 1. Ordnung der Gestalt (119) zusammenfassen [29]. Damit ist die Analyse transients Vorgänge auch im Sonderfall sprungfähiger Netzwerke auf die Lösung von Gl. (119) zurückgeführt.

Zur numerischen Lösung des Differentialgleichungs-Systems (119) mit seinen Anfangswerten (121) wird die von Hamming angegebene Predictor-Corrector-Methode verwendet [21]. Sie ist für große komplizierte Differentialgleichungs-Systeme mit umfangreicher Berechnung von $(f(x,y))$ geeignet, da sie hohe Schrittgenauigkeit besitzt, nur zwei Berechnungen von $(f(x,y))$ pro Integrations-schritt verlangt und stabil ist. Diese Methode beruht auf der iterativen Integration und verlangt im einzelnen folgende Schritte:

1. Schätzung der Werte (y) für $x = x_{i+1}$ *); sie seien $(\bar{y})_{i+1}$
2. Berechnung von $(\bar{y}')_{i+1} = (f(x_{i+1}))$ unter Verwendung des Differentialgleichungs-Systems (119).
3. Berechnung neuer Werte $(y)_{i+1}$ mit der iterativen Formel.
4. Wiederholung von 2. und 3., solange, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Dieses Integrationsverfahren erlaubt, eine sich selbst korrigierende Schrittweite Δx zu benutzen, d. h. Δx wird automatisch verkleinert oder vergrößert, wenn der Schrittabbrechfehler zu groß bzw. viel kleiner als nötig wird. Insgesamt werden maximal zehn aufeinanderfolgende Halbierungen respektive Verdopplungen von Δx vorgesehen. Diese Maßnahme sichert auch dann konvergierende Lösungen, wenn die Eigenwerte des Systems sehr verschieden voneinander sind. Bei Vorgabe eines starren Inkrementes Δx , das zu groß oder zu klein gewählt wird, ergibt sich entweder keine konvergierende Lösung oder

*) Index i kennzeichnet den i -ten Integrationsschritt

sie fordert unnötig viel Rechenzeit.

4.1 Rechenprogramm

Eine Übersicht über das in FORTRAN ausgeführte Rechenprogramm "NETZ 3" zur Analyse transients Vorgänge in elektrischen Netzwerken vermittelt das Flußdiagramm Abb. 17 mit den dazu gehörenden Erklärungen von Tab. 3. Das Programm NETZ 3 ist in mehrere Unterprogramme gegliedert, deren Namen in Abb. 17 angegeben sind.

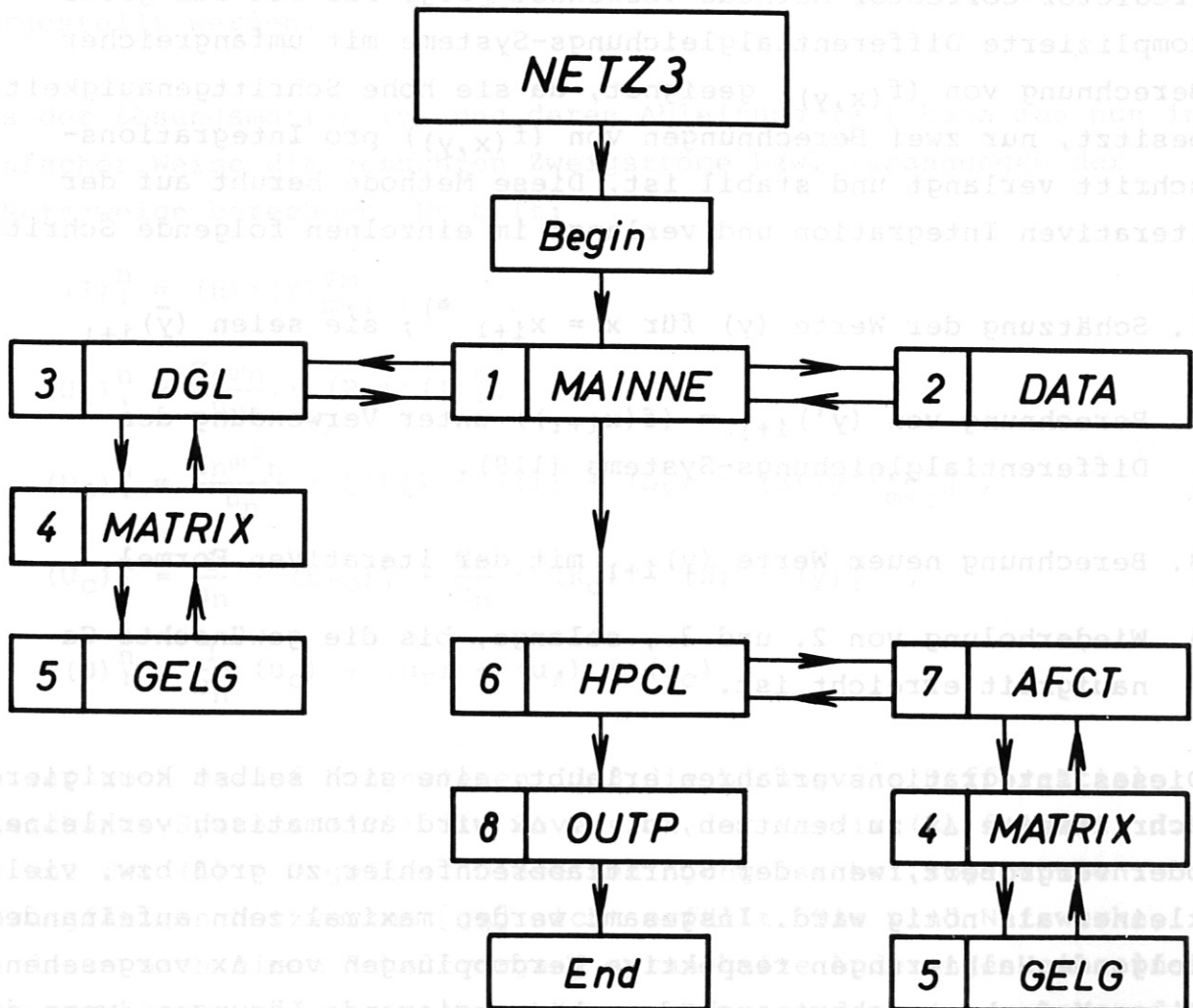


Abb. 17. Flußdiagramm des Programms NETZ 3

Nr.	Programmname	Kurzbeschreibung
		<p>Programm zur</p>
1	MAINNE	<ul style="list-style-type: none"> - Berechnung der transienten Ströme und Spannungen in linearen elektrischen Netzwerken.
2	DATA	<ul style="list-style-type: none"> - Eingabe der Daten: Integrationsgrenzen x_a, x_e; Schrittweite Δx; Fehlergrenze ϵ; Normfaktoren q_n, ω_n, u_n; Schaltzeitpunkte $x_s, s = 1(1)l$. Außerdem in jedem x_s: Dimension der Matrizen m, n; die Elemente der Matrizen $(R), (L), (L'), (K), (u_0), (u_{c0})$; Strukturmatrix (H); Anfangswerte (y_0).
3	DGL	<ul style="list-style-type: none"> - automatische Dimensionierung des für die einzelnen Definitionsbereiche X_s geltenden Differentialgleichungs-Systeme.
4	MATRIX	<ul style="list-style-type: none"> - Berechnung der Koeffizientenmatrizen (A) und (F).
5	GELG	<ul style="list-style-type: none"> - Berechnung der inversen Matrix $(L)^{-1}$
6	HPCL	<ul style="list-style-type: none"> - Lösung des Differentialgleichungs-Systems
7	AFCT	<ul style="list-style-type: none"> - Definition der zeitabhängigen Matrixelemente von $(R), (L), (L'), (K), (u_0), (u_{c0})$. Sind diese alle konstant, dann wird AFCT automatisch kurzgeschlossen.
8	OUTP	<ul style="list-style-type: none"> - Ausgabe von (y) und (y'), sowie zur Berechnung der Zweigströme (I) und -spannungen (U) nach Gl.(122) bis(126) als Funktion von x

Tabelle 3. Kurzbeschreibung von FORTRAN -Programm "NETZ 3"

5. Berechnungsbeispiel - Das toroidale Hauptfeldspulensystem des Tokamak-Experimentes A S D E X

Bei der Größenordnung heutiger Fusionsexperimente werden an ihre Magnetsysteme außerordentlich hohe Anforderungen gestellt. Es werden großvolumige Magnetfelder mit Flußdichten um 5T verlangt, die über einige Sekunden aufrecht erhalten werden müssen. Ausgehend von der physikalischen Aufgabenstellung gelangt man bei der technischen Realisierung derartiger Magnetsysteme in mancherlei Hinsicht (z. B. Energieversorgung, Festigkeitsprobleme) in den Grenzbereich des heutigen "Standes der Technik". Beim Entwurf solcher Spulenanordnungen wird man also ohne detaillierte Berechnungen nicht auskommen können. Dabei werden Berechnungen sowohl zum Nachweis der an die Apparatur gestellten physikalischen Forderungen als auch zur technischen Auslegung der Spulenanordnung notwendig sein. Diesem Zwecke dienen auch die hier entwickelten Berechnungsverfahren, die nun am toroidalen Spulenverband des im Aufbau befindlichen Garching Tokamak-Experimentes ASDEX (Axial-symmetrisches Divertor Experiment) demonstriert werden sollen.

Der prinzipielle Aufbau dieses Experimentes, von dem man die Klärung des in [10] umrissenen plasmaphysikalischen Fragenkomplexes erhofft, geht aus Abb. 18 hervor. Kernstück eines Tokamaks sind die Hauptfeldspulen (2), die das ringartige Vakuumgefäß (4) umschließen und zur Erzeugung des toroidalen Magnetfeldes dienen. Für den stabilen Plasmaeinschluß ist außerdem ein meridionales Magnetfeld notwendig [7], das in Tokamaks durch einen im Plasma induzierten Strom erzeugt wird. Die Einkopplung des Plasmastroms erfolgt elektrodenlos über den OH-Transformator (6)*), dessen einwindige Sekundärwicklung das Plasma ist. Da das Induktionsprinzip stationäre Ströme verbietet, muß ein Tokamak gepulst betrieben werden [8], d. h. seine Magnetsysteme werden in bestimmten Zyklen auferregt und entregt. Zur Beeinflussung der Gleichgewichtslage des Plasmaringes werden ferner dynamische Zusatzfelder benötigt, die von regelbaren Strömen in den Korrekturwindungen (7), den sogenannten Vertikalfeld- und Multipolkompensationsspulen (MC) hervorgerufen werden. Weiterhin sind aus Abb. 18 die für ASDEX typischen Multipolspulen (5) zu erkennen. Ihre Ströme dienen zur Erzeugung einer Se-

*) OH ist die Abkürzung von Ohmic Heating

paratrix (magnetische Blende) entlang der die verunreinigte Plasmarandschicht in den Divertor geleitet wird [10].

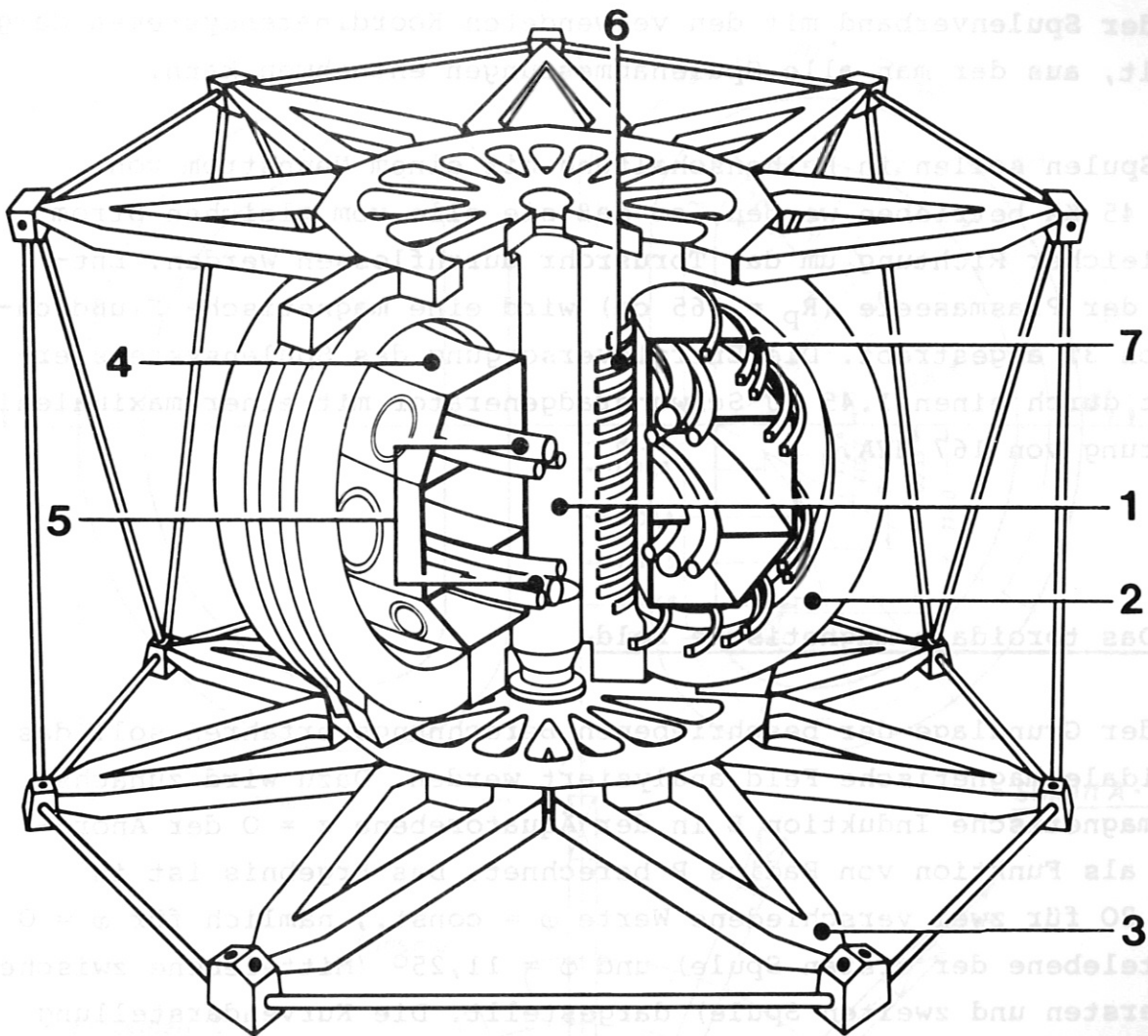


Abb.18. Prinzipieller Aufbau des Experimentes ASDEX nach [34]:

- 1 Zentrale Stützsäule
- 2 Hauptfeldspulen
- 3 Stützkonstruktion
- 4 Vakuumpfäß
- 5 Multipolspulen
- 6 OH-Transformator
- 7 Vertikalfeld- und MC-Spulen

Der toroidale Spulenverband ist aus $N = 16$ gleichen, D-förmigen Spulen aufgebaut, die gleichmäßig über den Torusumfang verteilt angeordnet sind. Die wassergekühlten Spulen werden aus Kupferstangen

mit rechteckigem Querschnitt in jeweils zwei nebeneinander liegenden Lagen (Pancakes) gewickelt. Jedes Pancake hat 16 Windungen, womit die Windungszahl einer Spule $w_q = 32$ beträgt. In Abb. 19 ist der Spulenverband mit den verwendeten Koordinatensystemen dargestellt, aus der man alle Spulenabmessungen entnehmen kann.

Die Spulen sollen in Reihenschaltung mit einem Nennstrom von $I_q = 45$ KA betrieben werden, so daß sie alle vom gleichen Strom in gleicher Richtung um das Torusrohr durchflossen werden. Entlang der Plasmaseele ($R_p = 165$ cm) wird eine magnetische Flußdichte von 3T angestrebt. Die Energieversorgung des Spulensystems erfolgt durch einen 1.45 GJ Schwungradgenerator mit einer maximalen Leistung von 167 MVA.

5.1 Das toroidale magnetische Feld

Auf der Grundlage der beschriebenen Berechnungsverfahren soll das toroidale magnetische Feld analysiert werden. Dazu wird zunächst die magnetische Induktion B in der Äquatorebene $z = 0$ der Anordnung als Funktion von Radius R berechnet. Das Ergebnis ist in Abb. 20 für zwei verschiedene Werte $\varphi = \text{const.}$, nämlich für $\varphi = 0$ (Mittellebene der ersten Spule) und $\varphi = 11,25^\circ$ (Mittellebene zwischen der ersten und zweiten Spule) dargestellt. Die Kurvendarstellung Abb. 20 zeigt innerhalb des Toroiden praktisch zusammenfallende Kurven, die mit größer werdendem Radius proportional R^{-1} abnehmen. Außerdem geht daraus hervor, daß die geforderte Flußdichte $B_\varphi(R_p) = 3T$ auf der Plasmaseele $R_p = 165$ cm erreicht wird und daß im Bereich des Plasmas ($125 \text{ cm} \leq R \leq 205 \text{ cm}$) das Feld offensichtlich einen hinreichend kleinen Gradienten in azimuthaler Richtung aufweist, auf den später noch ausführlicher eingegangen werden soll.

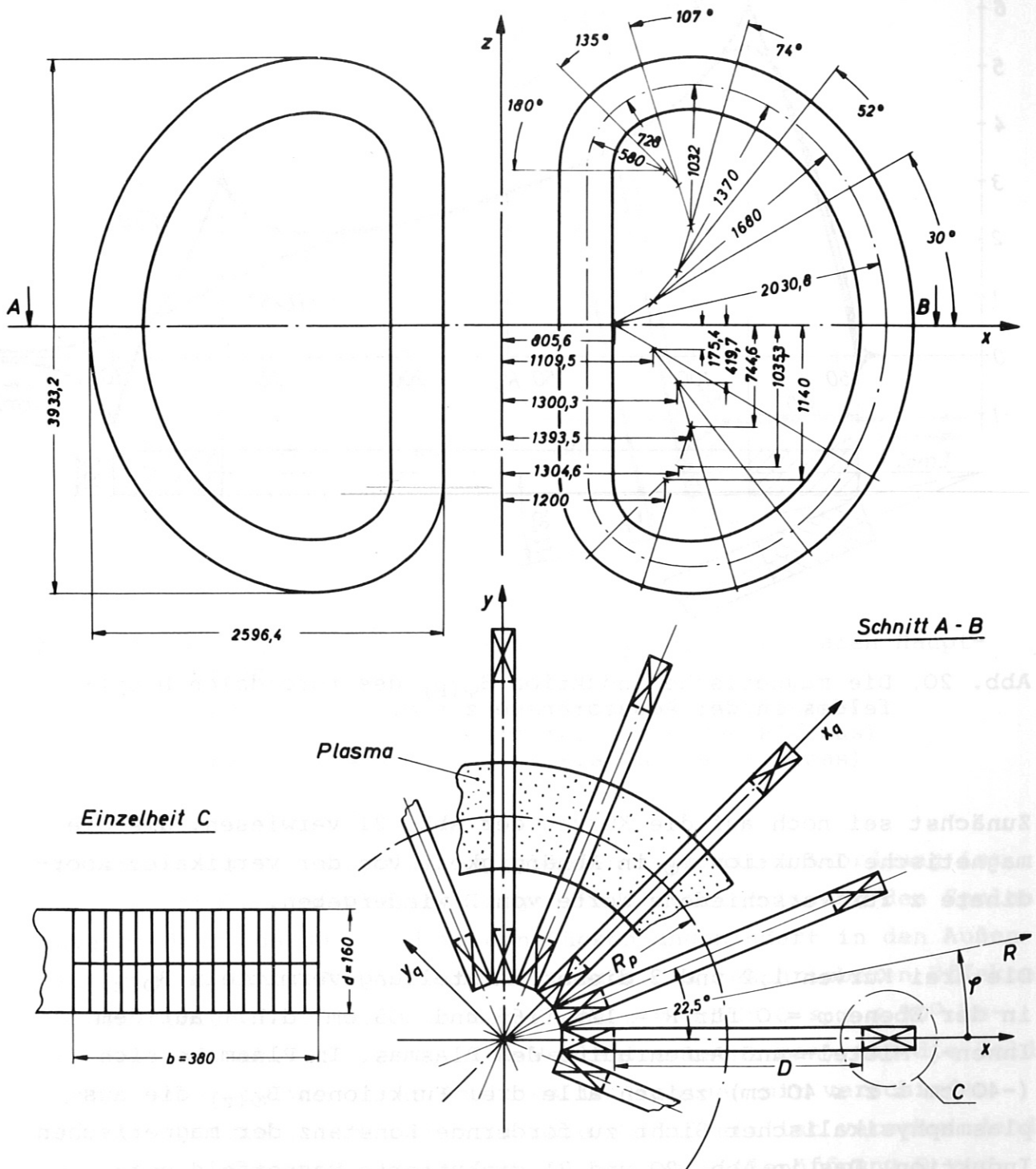


Abb. 19. Das toroidale Spulensystem ASDEX

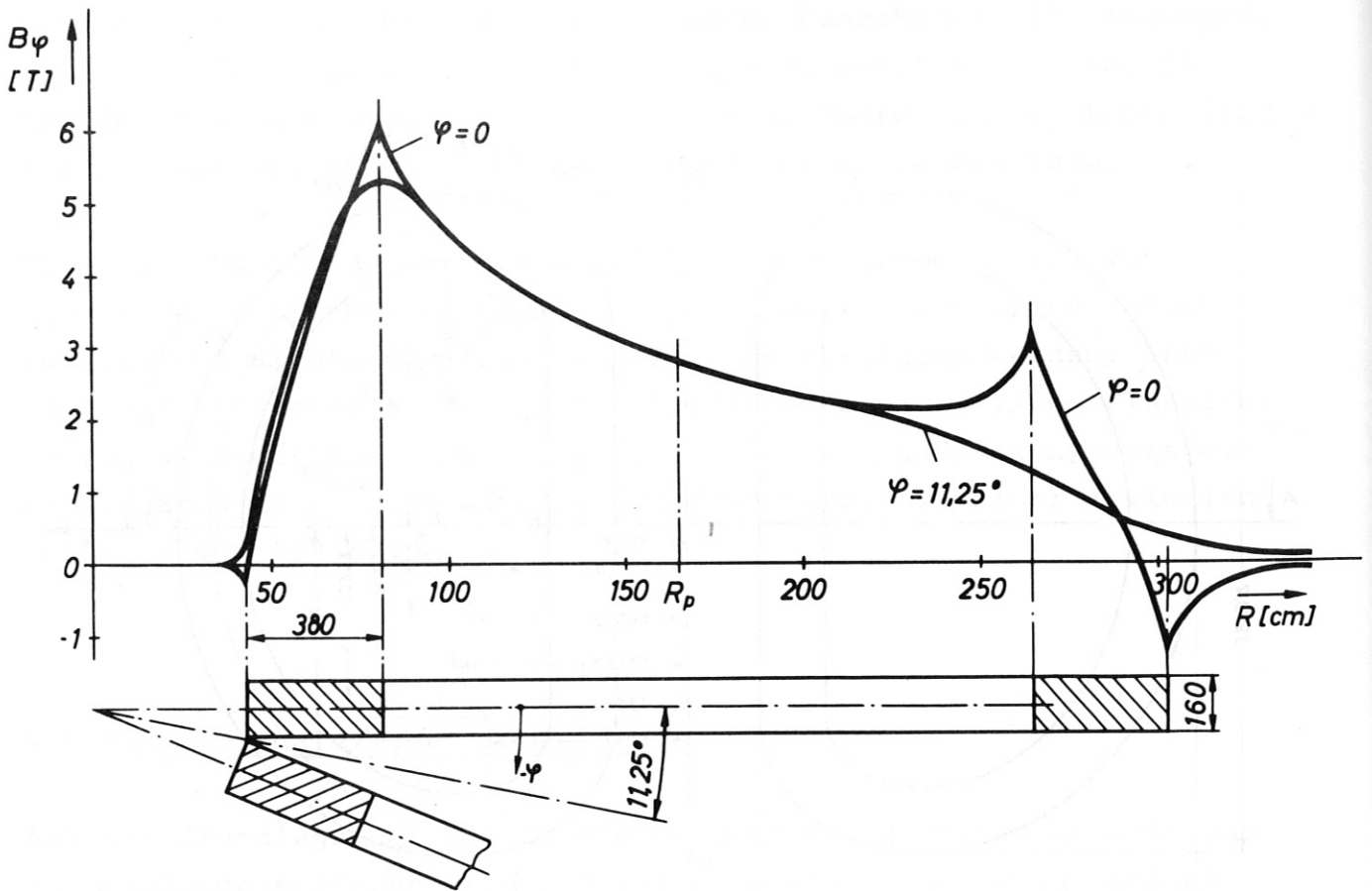


Abb. 20. Die magnetische Induktion $B_\varphi(R)$ des toroidalen Hauptfeldes in der Äquatorebene $z = 0$.

Zunächst sei noch auf die Kurven der Abb. 21 verwiesen, die die magnetische Induktion B_φ in Abhängigkeit von der vertikalen Koordinate z für verschiedene Werte von R wiedergeben.

Die drei Kurven 1, 2 und 3 dieser Darstellung vermitteln $B_\varphi(z)$ in der Ebene $\varphi = 0$ für $R = 125, 165$ und 205 cm, d.h. auf dem Innen-, Mittel- und Außenradius des Plasmas. Im Plasmapbereich ($-40 \text{ cm} \leq z \leq 40 \text{ cm}$) zeigen alle drei Funktionen $B_\varphi(z)$ die aus plasmaphysikalischer Sicht zu fordernde Konstanz der magnetischen Induktion. Das in Abb. 20 und 21 diskutierte Magnetfeld entspricht qualitativ dem einer dichtgewickelten Toroidspule, deren Feldlinien innerhalb des Toroiden als konzentrische Kreise um ihre Symmetrieachse verlaufen. Ein magnetisches Feld dieser Beschaffenheit wird auch in der hier betrachteten Konfiguration angestrebt. Natürlich kann dies nur annähernd erreicht werden.

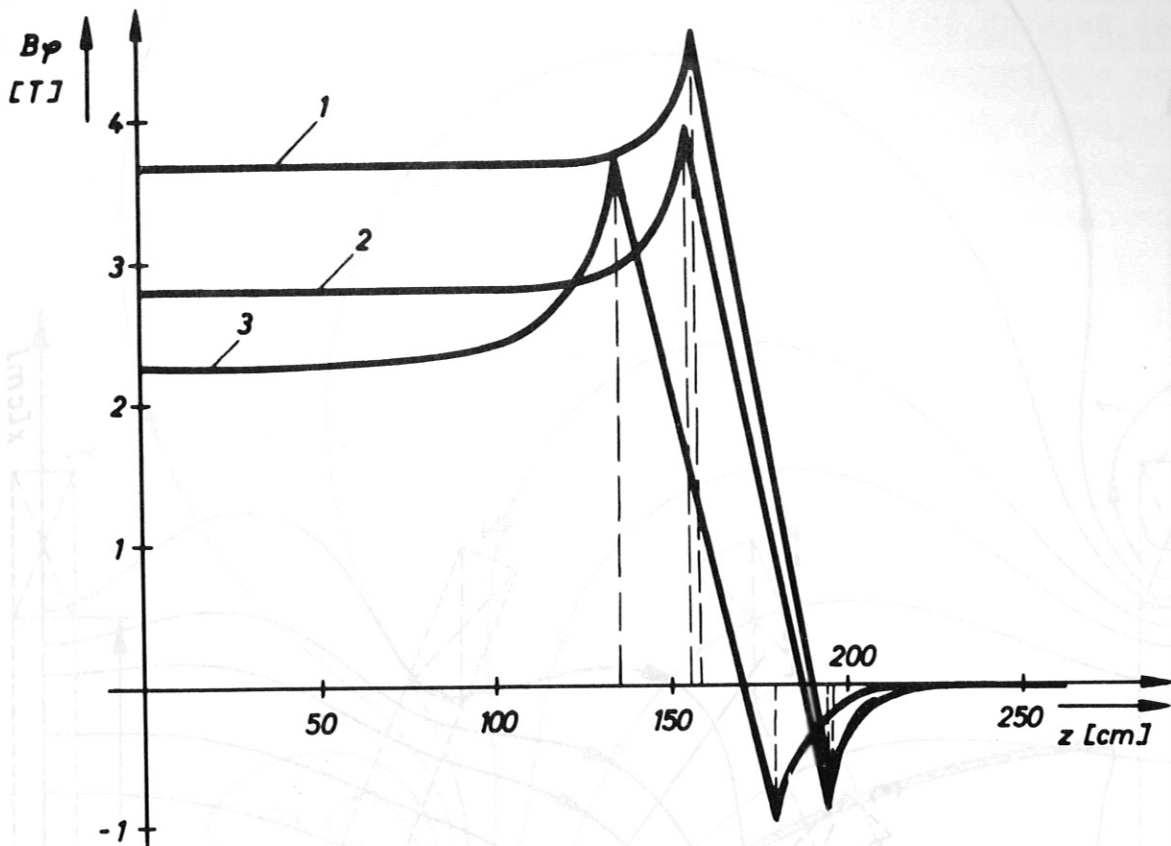


Abb. 21. Die magnetische Induktion $B_\varphi(z)$ des toroidalen Hauptfeldes in der Ebene $\varphi = 0$.

- Kurve 1: $R = 125$ cm (Innenradius des Plasmas)
- Kurve 2: $R = 165$ cm (Mittelpunkt des Plasmas)
- Kurve 3: $R = 205$ cm (Außenradius des Plasmas)

Bei einer aus Einzelspulen aufgebauten toroidalen Anordnung ist eine Ausbeulung der kreisförmigen Feldlinien zwischen den Spulen unvermeidbar, da das Feld in den Lücken ungehindert in den Außenraum treten kann. Zur Veranschaulichung des beschriebenen Effektes werden einige Feldlinien in der Ebene $z = 0$ für $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ berechnet (s. Abb. 22). Aus ihrem Verlauf erkennt man, daß die Feldlinien abhängig von ihrer Position im Toroiden mit verschieden großer Welligkeit behaftet sind. Die Welligkeit ist verschwindend klein bei Feldlinien, die in der Mitte der Spulenöffnung D verlaufen; während sie ansteigt, je näher die Position der Feldlinien an den Innen- und Außenrand der Spulenöffnung heranrückt. In solchen Anordnungen wird man also nur in einem beschränkten Bereich des Toroiden annähernd kreisförmige Feldlinien erwarten können.

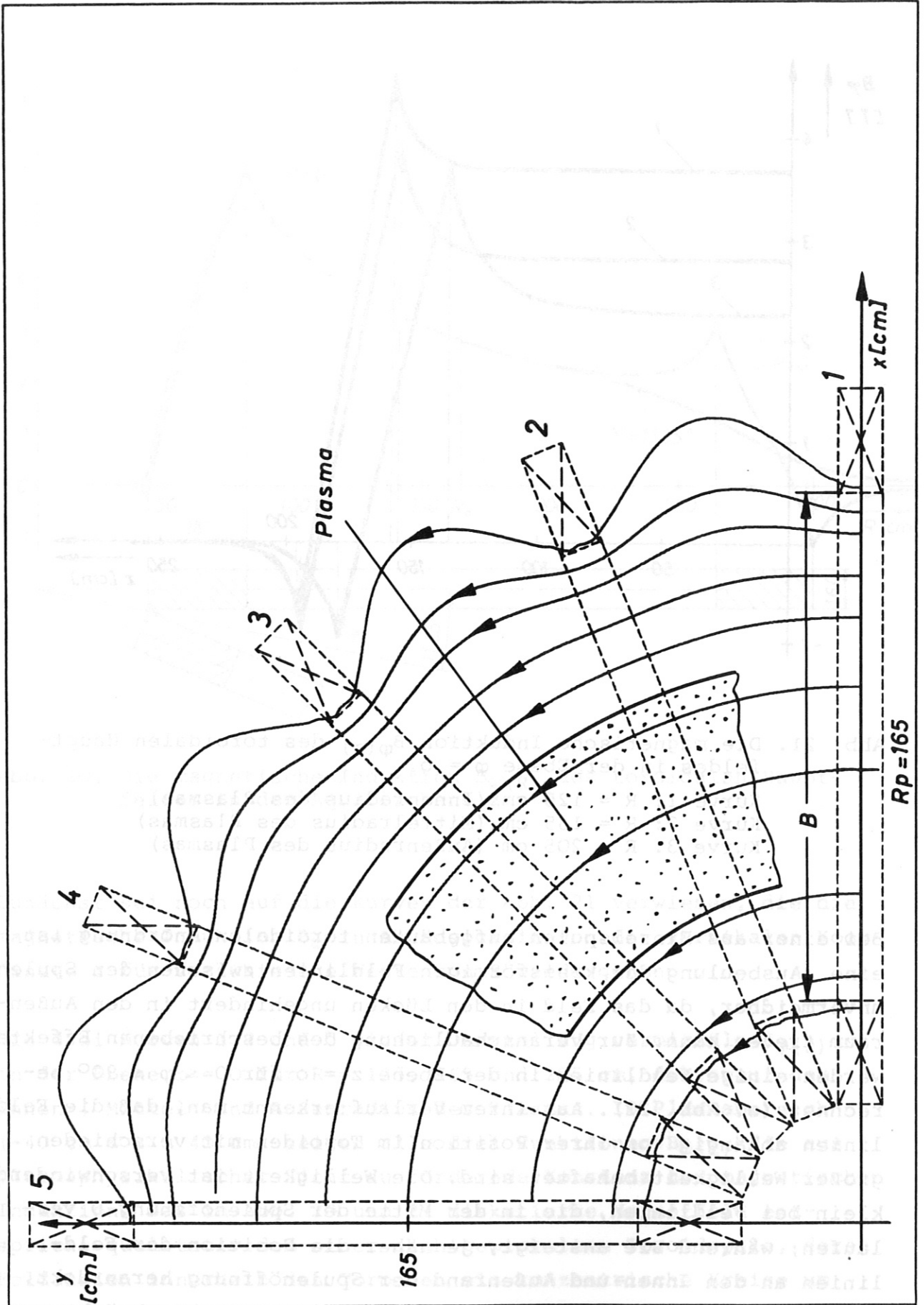


Abb. 22. Feldlinien des toroidalen Feldes in der Ebene $z = 0$

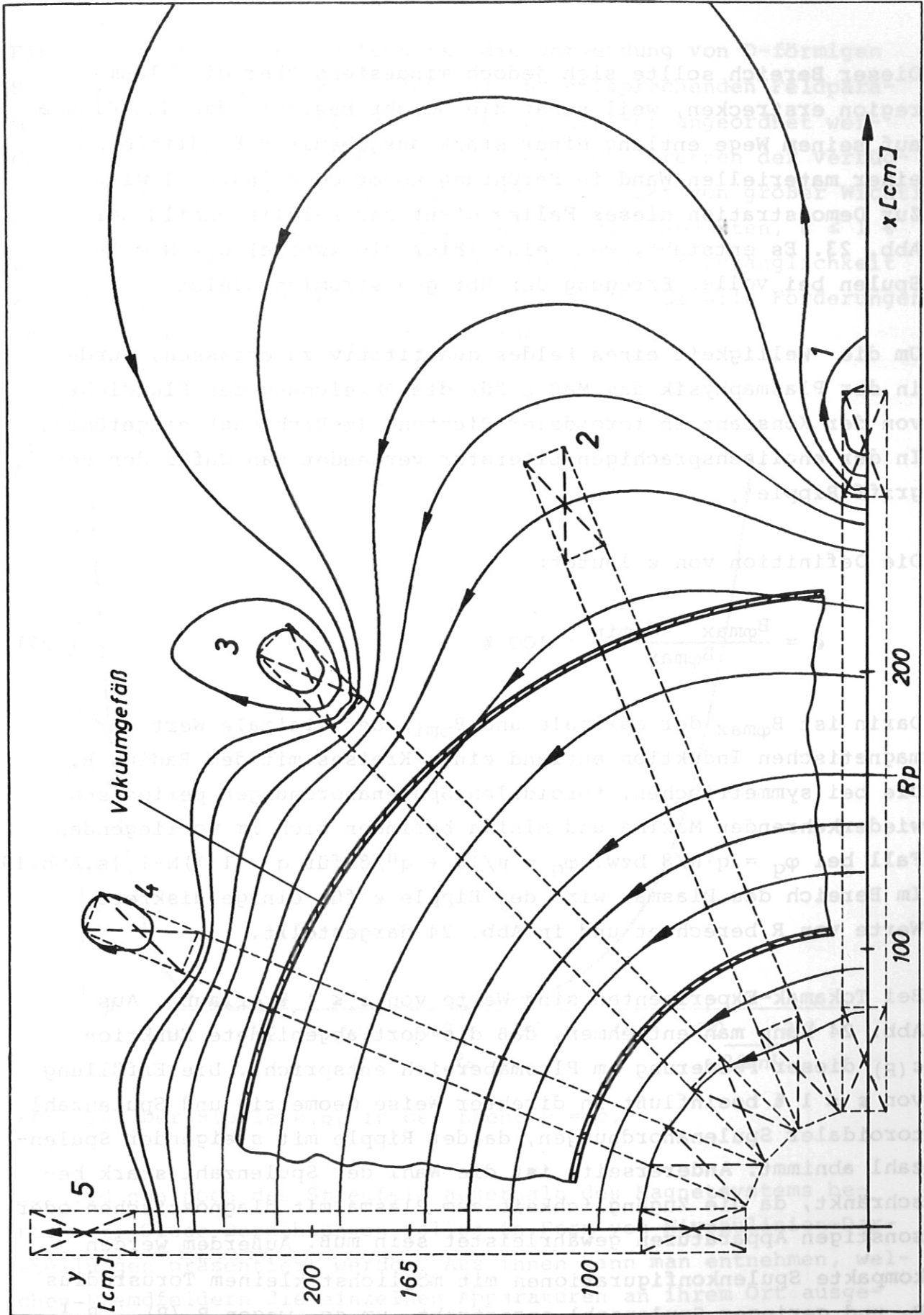


Abb. 23. Feldlinien des toroidalen Feldes in der Ebene $z = 0$ bei stromloser Spule 2.

Dieser Bereich sollte sich jedoch mindestens über die Plasma-region erstrecken, weil sonst die Gefahr besteht, daß das Plasma auf seinem Wege entlang einer stark ausgebeulten Feldlinie mit einer materiellen Wand in Berührung kommt oder instabil wird. Zur Demonstration dieses Falles dient das Feldlinienbild der Abb. 23. Es entsteht, wenn eine (hier die zweite) der $N = 16$ Spulen bei voller Erregung der übrigen stromlos bleibt.

Um die Welligkeit eines Feldes quantitativ zu erfassen, wurde in der Plasmaphysik das Maß ϵ für die Abweichung der Flußdichte von der Konstanz in toroidaler Richtung (φ -Richtung) eingeführt. In der englischsprachigen Literatur verwendet man dafür den Begriff "Ripple".

Die Definition von ϵ lautet:

$$\epsilon = \frac{B_{\varphi\max} - B_{\varphi\min}}{B_{\varphi\max}} \cdot 100 \% \quad (127)$$

Darin ist $B_{\varphi\max}$ der maximale und $B_{\varphi\min}$ der minimale Wert der magnetischen Induktion entlang eines Kreises mit dem Radius R . Die bei symmetrischen, toroidalen Spulenordnungen periodisch wiederkehrenden Maxima und Minima befinden sich im vorliegenden Fall bei $\varphi_q = q \cdot \pi/8$ bzw. $\varphi_q = \pi/16 + q\pi/8$ für $q = 1(1)N-1$ (s. Abb. 19). Im Bereich des Plasmas wird der Ripple ϵ für einige diskrete Werte von R berechnet und in Abb. 24 dargestellt.

Bei Tokamak-Experimenten sind Werte von $\epsilon \leq 1 \%$ erlaubt. Aus Abb. 24 kann man entnehmen, daß die dort abgebildete Funktion $\epsilon(R)$ dieser Forderung im Plasmabereich entspricht. Die Erfüllung von $\epsilon \leq 1 \%$ beeinflusst in direkter Weise Geometrie und Spulenzahl toroidaler Spulenordnungen, da der Ripple mit steigender Spulenzahl abnimmt. Andererseits ist die Wahl der Spulenzahl stark beschränkt, da die Zugänglichkeit zum Plasma mit diagnostischen oder sonstigen Apparaturen gewährleistet sein muß. Außerdem werden kompakte Spulenkonfigurationen mit möglichst kleinem Torusradius R_p und geringer Spulenzahl angestrebt, um so, wegen $B_\varphi(R) \sim R^{-1}$ ein Nutzvolumen mit hoher Flußdichte bereitzustellen.

Ein Schritt in diese Richtung ist die Verwendung von D-förmigen Spulen, die bei gleicher Spulenzahl und entsprechenden Feldparametern auf einem Torus mit kleinerem Durchmesser angeordnet werden können als kreisförmige Spulen. Wegen der Grenzen der verfügbaren Energiequelle ist der angesprochene Aspekt von großer Wichtigkeit. Zwischen den sich widerstrebenden Gesichtspunkten, $\epsilon \leq 1\%$ auf der einen Seite und hohe Flußdichte bei guter Zugänglichkeit zum Plasma auf der anderen, muß letztlich ein für alle Forderungen verträglicher Kompromiß gefunden werden.

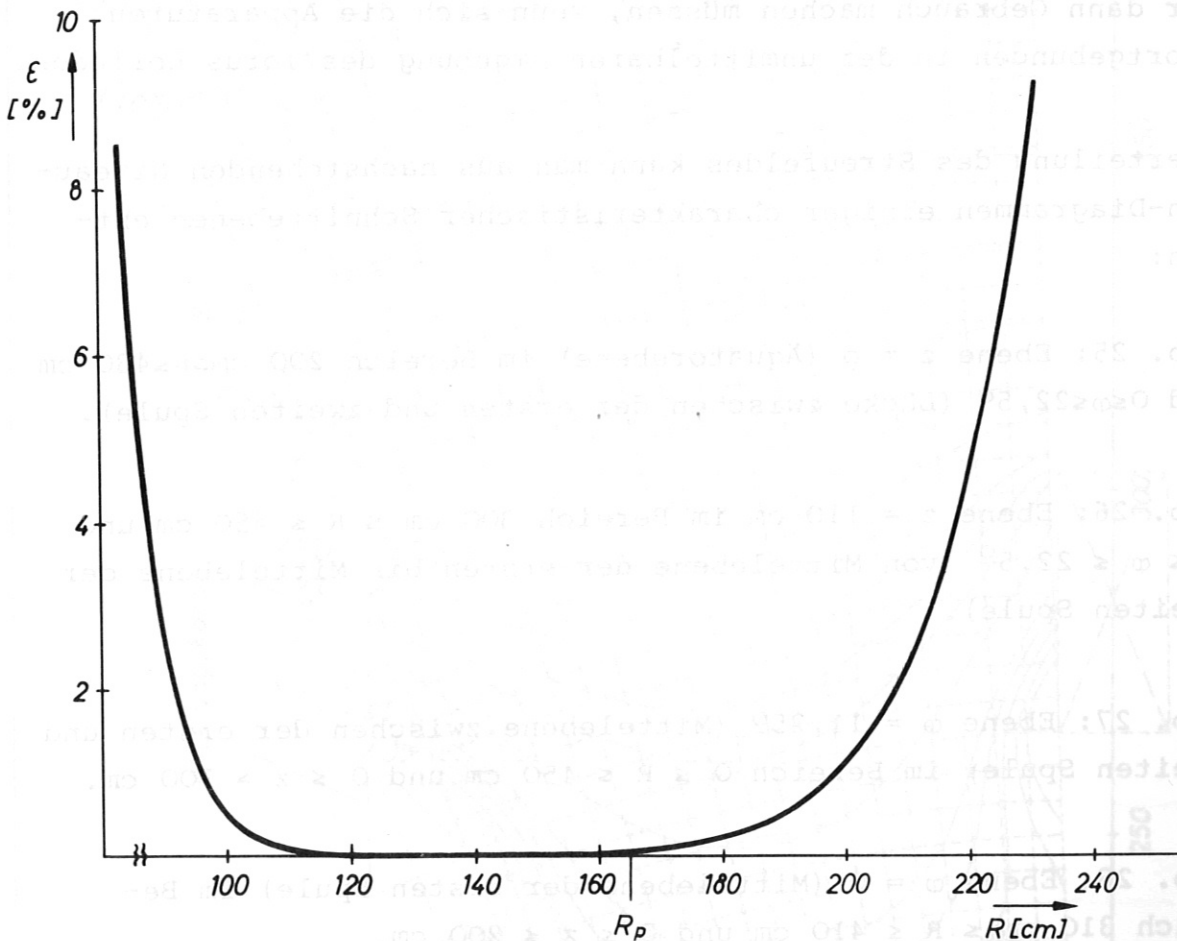


Abb. 24. Der Ripple $\epsilon(R)$ in der Ebene $z = 0$.

Es wird nun noch das Streufeld außerhalb des Magnetsystems berechnet. Diese Berechnungen sollen in Form von Niveaulinien-Darstellungen präsentiert werden. Aus ihnen kann man entnehmen, welchen Fremdfeldern die einzelnen Apparaturen an ihrem Ort ausgesetzt sind. Besonders wichtig ist diese Aussage für die Projektierung der umfangreichen diagnostischen Einrichtungen, die größtenteils sehr empfindlich gegen äußere Magnetfelder sind und daher ihrem

störenden Einfluß entzogen werden müssen. Das gleiche gilt auch für Schaltrelais, elektrische Maschinen oder sonstige Apparaturen aus ferromagnetischen Materialien. Um einen störungsfreien Experimentier-Betrieb mit diesen Einrichtungen zu gewährleisten, dürfen die äußeren Felder die jeweils zulässigen Flußdichten nicht überschreiten.

Dies wird erreicht, indem man die Apparaturen entweder in entsprechend feldschwachen Regionen ansiedelt oder sie gegen Fremdfelder abschirmt. Von der letztgenannten Möglichkeit wird man sicher dann Gebrauch machen müssen, wenn sich die Apparaturen standortgebunden in der unmittelbaren Umgebung des Torus befinden.

Die Verteilung des Streufeldes kann man aus nachstehenden Niveaulinien-Diagrammen einiger charakteristischer Schnittebenen entnehmen:

1. Abb. 25: Ebene $z = 0$ (Äquatorebene) im Bereich $200 \text{ cm} \leq R \leq 430 \text{ cm}$ und $0 \leq \varphi \leq 22,5^\circ$ (Lücke zwischen der ersten und zweiten Spule).
2. Abb. 26: Ebene $z = 110 \text{ cm}$ im Bereich $300 \text{ cm} \leq R \leq 450 \text{ cm}$ und $0 \leq \varphi \leq 22,5^\circ$ (von Mittelebene der ersten bis Mittelebene der zweiten Spule).
3. Abb. 27: Ebene $\varphi = 11,25^\circ$ (Mittelebene zwischen der ersten und zweiten Spule) im Bereich $0 \leq R \leq 450 \text{ cm}$ und $0 \leq z \leq 300 \text{ cm}$.
4. Abb. 28: Ebene $\varphi = 0$ (Mittelebene der ersten Spule) im Bereich $310 \text{ cm} \leq R \leq 410 \text{ cm}$ und $0 \leq z \leq 200 \text{ cm}$.

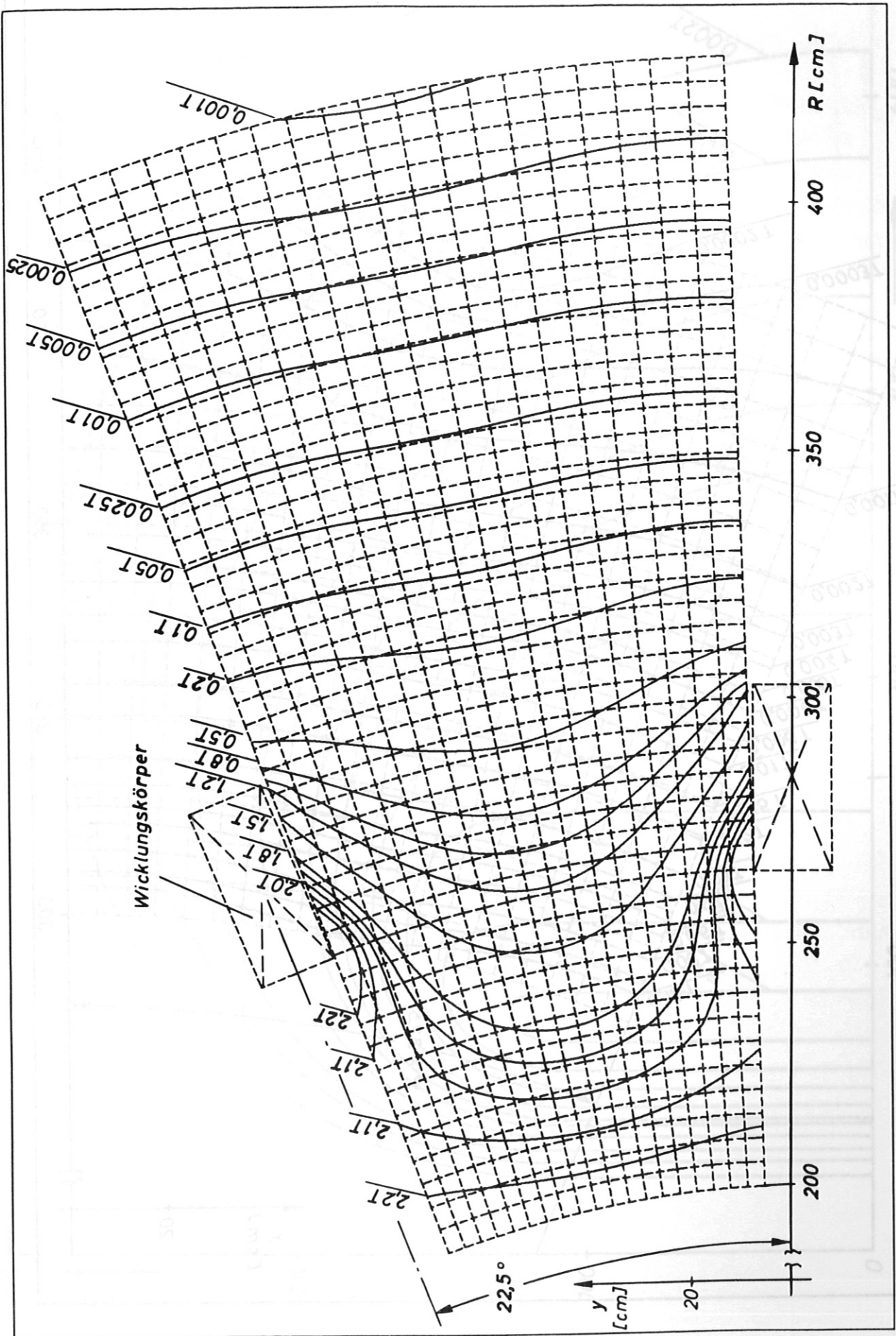


Abb. 25. Hauptfeld-Niveaulinien in der Ebene $z = 0$

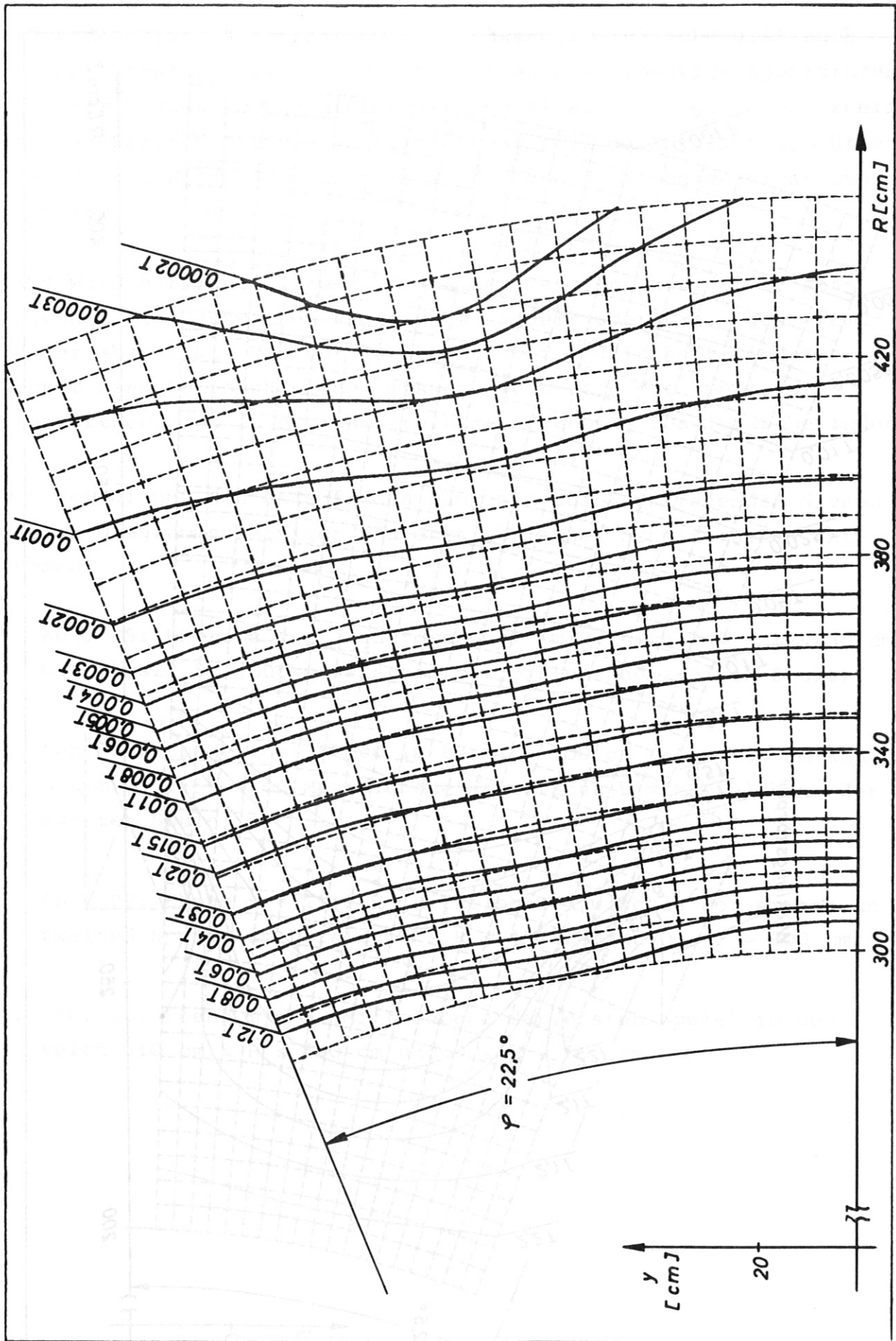


Abb. 26. Hauptfeld-Niveaulinien in der Ebene $z = 110$ cm

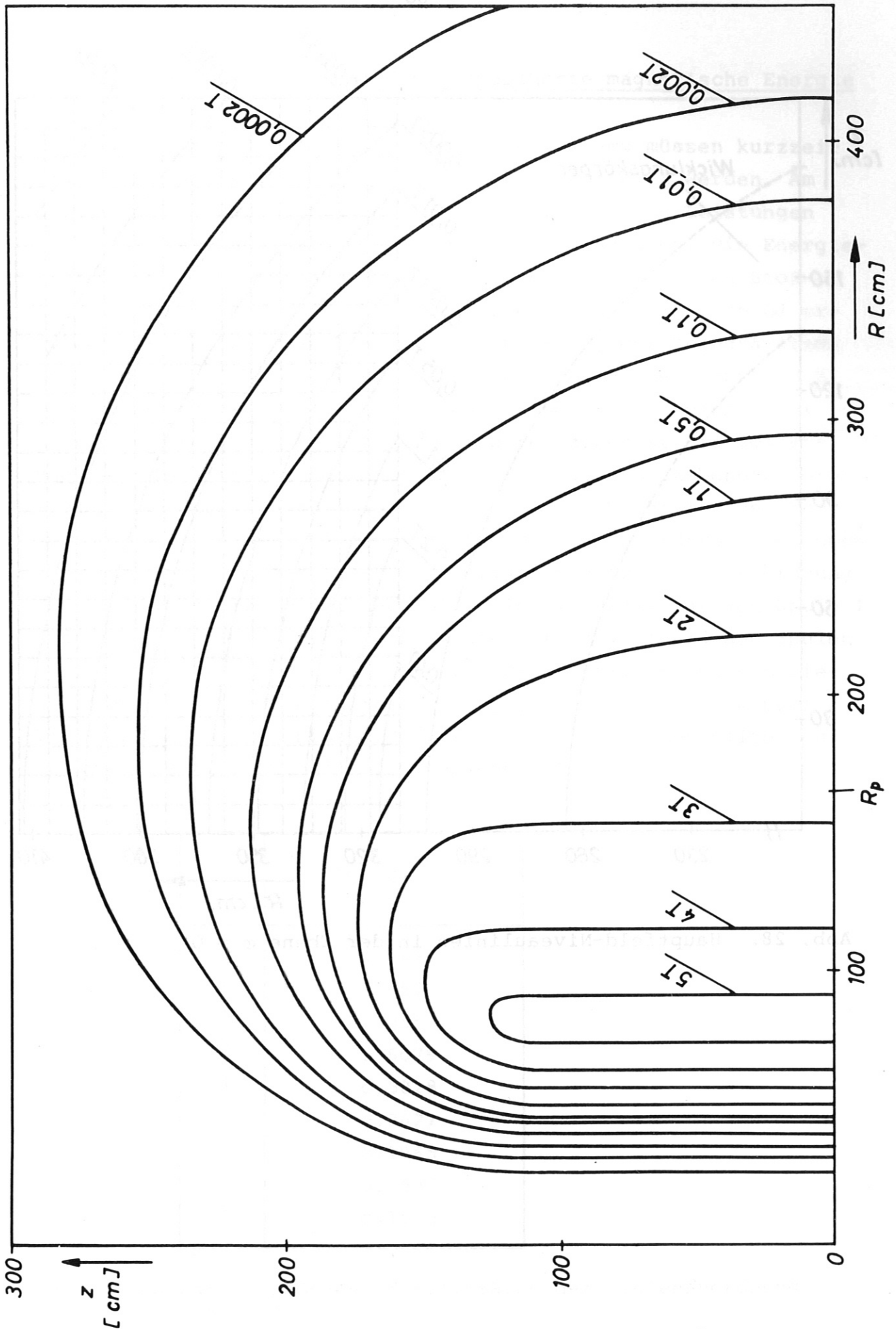


Abb. 27. Hauptfeld-Niveaulinien in der Ebene $\varphi = 11,25^\circ$

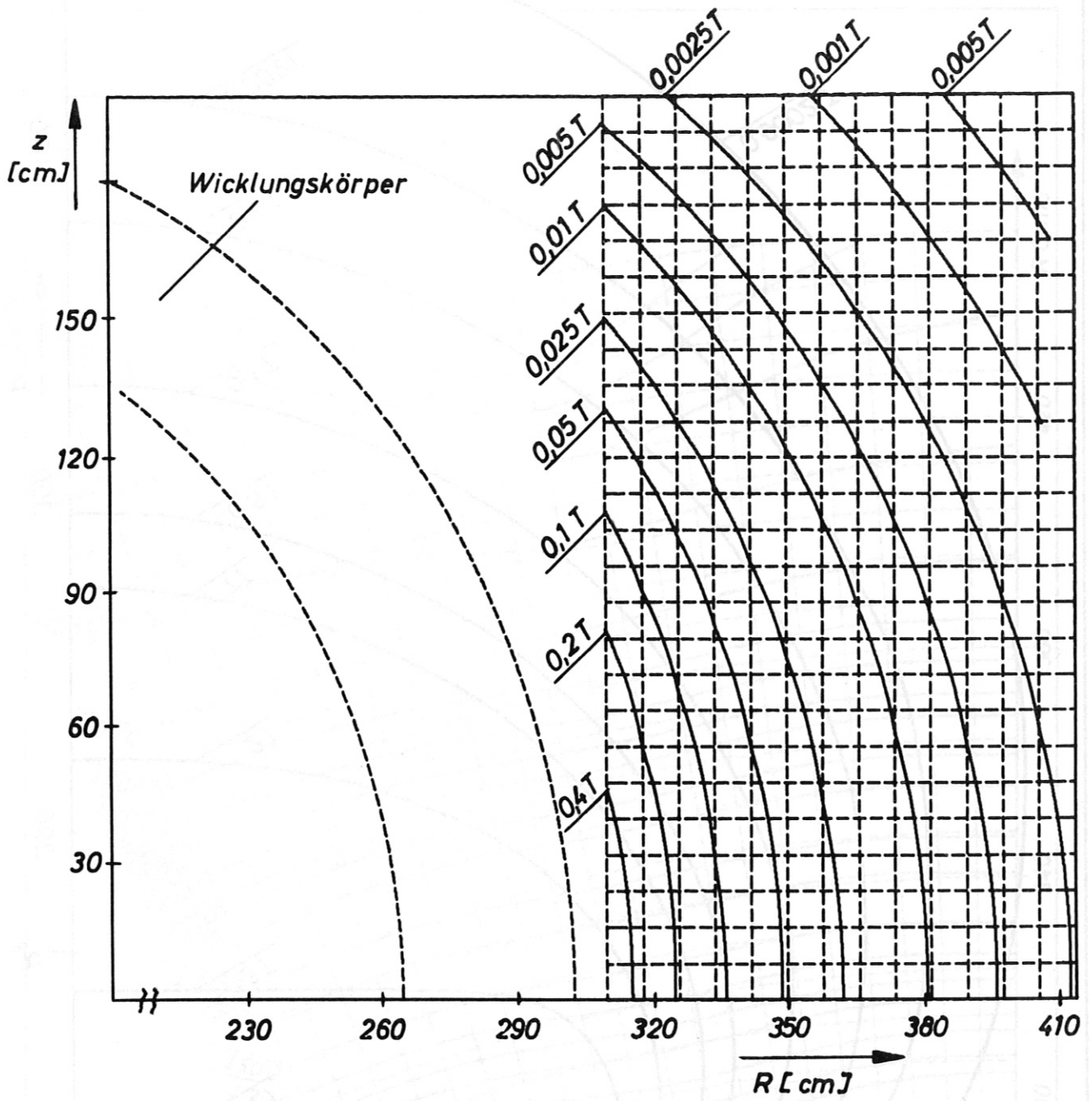


Abb. 28. Hauptfeld-Niveaulinien in der Ebene $\varphi = 0$.

5.2 Die Induktivitäten und die gespeicherte magnetische Energie

Für den Betrieb des betrachteten Spulensystems müssen kurzzeitig Leistungen von mehr als 100 MW bereitgestellt werden. Am vorgesehenen ASDEX-Standort kann man derart große Leistungen nicht aus dem vorhandenen elektrischen Netz beziehen. Die Energieversorgung wird also auch durch den hier installierten Stoßleistungsgenerator mit einer nutzbaren Energie von 1,45 GJ erfolgen müssen. Bei der Planung und Auslegung des Magnetsystems ist dieser Gesichtspunkt von ausschlaggebender Bedeutung, d.h. der Energiebedarf ist der verfügbaren Energie anzupassen. Es müssen daher neben den resistiven Lasten zunächst die Selbst- und Gegeninduktivitäten der aus $N = 16$ Spulen bestehenden toroidalen Anordnung berechnet werden. Dies geschieht mit der dafür entwickelten FORTRAN-Routine "HEDO". Zur Ausführung sei noch erwähnt, daß sich wegen des symmetrischen Aufbaus der Anordnung die numerische Berechnung auf die Selbstinduktivität von Spule 1 und die Gegeninduktivitäten zwischen der Spule 1 und den Spulen 2 bis 9 beschränkt, da alle anderen mit jeweils einer von diesen identisch sind (beispielsweise gilt $L_{12} = L_{23} = L_{34}$ usw). Die erhaltenen Ergebnisse für das in Abb. 19 dargestellte Spulensystem sind in Tabelle 4 zusammengefaßt.

P	$L_{q, q+p}$ [mH]
0	4,943
1	2,057
2	1,055
3	0,6079
4	0,3828
5	0,2621
6	0,1965
7	0,1637
8	0,1538

Tab. 4. Selbst- und Gegeninduktivitäten der Spulenordnung nach Abb. 19.

Daraus läßt sich unmittelbar die Gesamtinduktivität der $N = 16$ in Reihenschaltung betriebenen Spulen angeben. Es gilt

$$L_h = N (L_{11} + L_{1, N/2+1} + 2 \cdot \sum_{p=2}^{N/2} L_{1p}) \quad (128)$$

$$\underline{\underline{L_h = 232,77 \text{ mH}}}$$

In dem Magnetsystem ist somit bei voller Erregung ($I_Q = 45 \text{ KA}$) eine magnetische Energie von

$$W_{mh} = \frac{1}{2} \cdot L_h \cdot I_Q^2 \quad (129)$$

$$\underline{\underline{W_{mh} = 235,68 \text{ MJ}}}$$

gespeichert.

5.3 Beschreibung des Impulszyklus

Zur mathematischen Beschreibung des Impulszyklus muß man den Lastkreis der Stoßleistungsanlage nach Abb. 29 analysieren. Aus Abb. 29 erkennt man, daß der Schwungradgenerator als Synchronmaschine mit zwei voneinander getrennten dreiphasigen Wicklungssystemen ausgeführt ist und die Energieeinspeisung in das toroidale Magnetsystem über zwei dreiphasige Lastgleichrichter erfolgt. In dieser Ersatzschaltung werden die $N = 16$ in Reihe geschalteten Hauptfeldspulen durch ihre resultierenden Kenngrößen

$$R_h = \sum_{q=1}^N R_q = 57 \text{ m}\Omega,$$

$$L_h = \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^N L_{qp} = 232,77 \text{ mH}$$

berücksichtigt, während durch

$$R_a = 8 \text{ m}\Omega,$$

$$L_a = 1,23 \text{ mH}$$

ersatzweise die zusammengefaßten Kenngrößen von Multipol-, MC- und Vertikalfeldspulen eingehen.

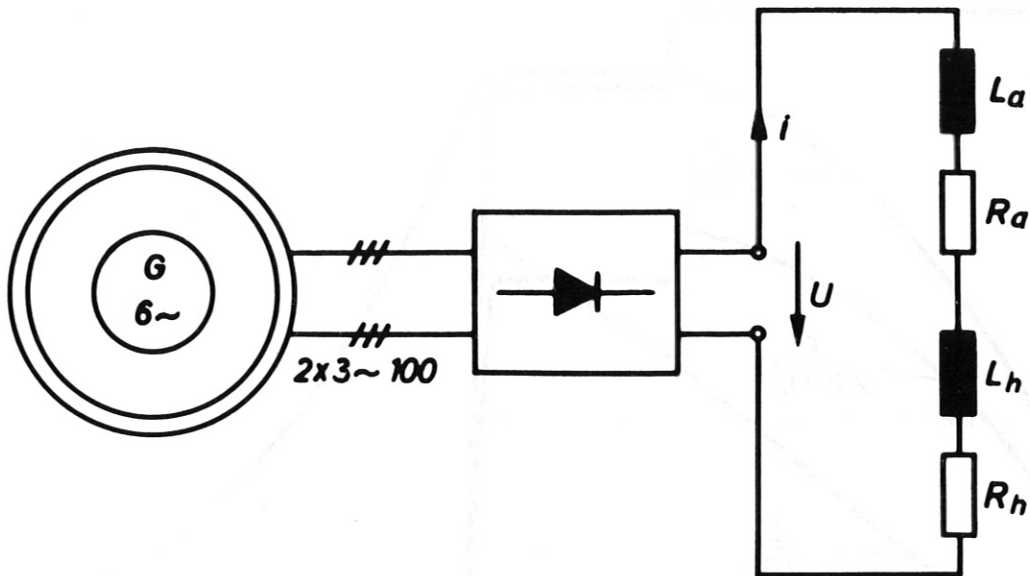


Abb. 29 Lastkreis des Stoßgenerators.

Am Gleichrichterausgang stehen folgende Betriebsgrößen zur Verfügung:

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| 1. Nutzbare Energie | $E_0 = 1,45 \text{ GJ}$ |
| 2. Maximale Gleichspannung | $U_1 = 3,3 \text{ kV}$ |
| 3. Maximaler Gleichstrom | $I_q = 45 \text{ kA}$ |

Außerdem kann dort durch eine Spannungs- bzw. Stromregelung im Erregerkreis des Generators [34] ein zeitlicher Spannungsverlauf der Gestalt

$$U(t) = \begin{cases} at & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ U_1 & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ U_2 & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \\ U_2 - a(t - t_3) & \text{für } t_3 \leq t \leq t_4 \\ 0 & \text{für } t_4 \leq t \leq t_e \end{cases} \quad (130)$$

erzeugt werden (s. Abb. 30). Darin ist U_1 die maximale Gleichspannung und U_2 diejenige Spannung, die eingestellt werden muß, damit während der Dachphase des Impulses der Betriebsstrom von $i = I_q$ fließt.

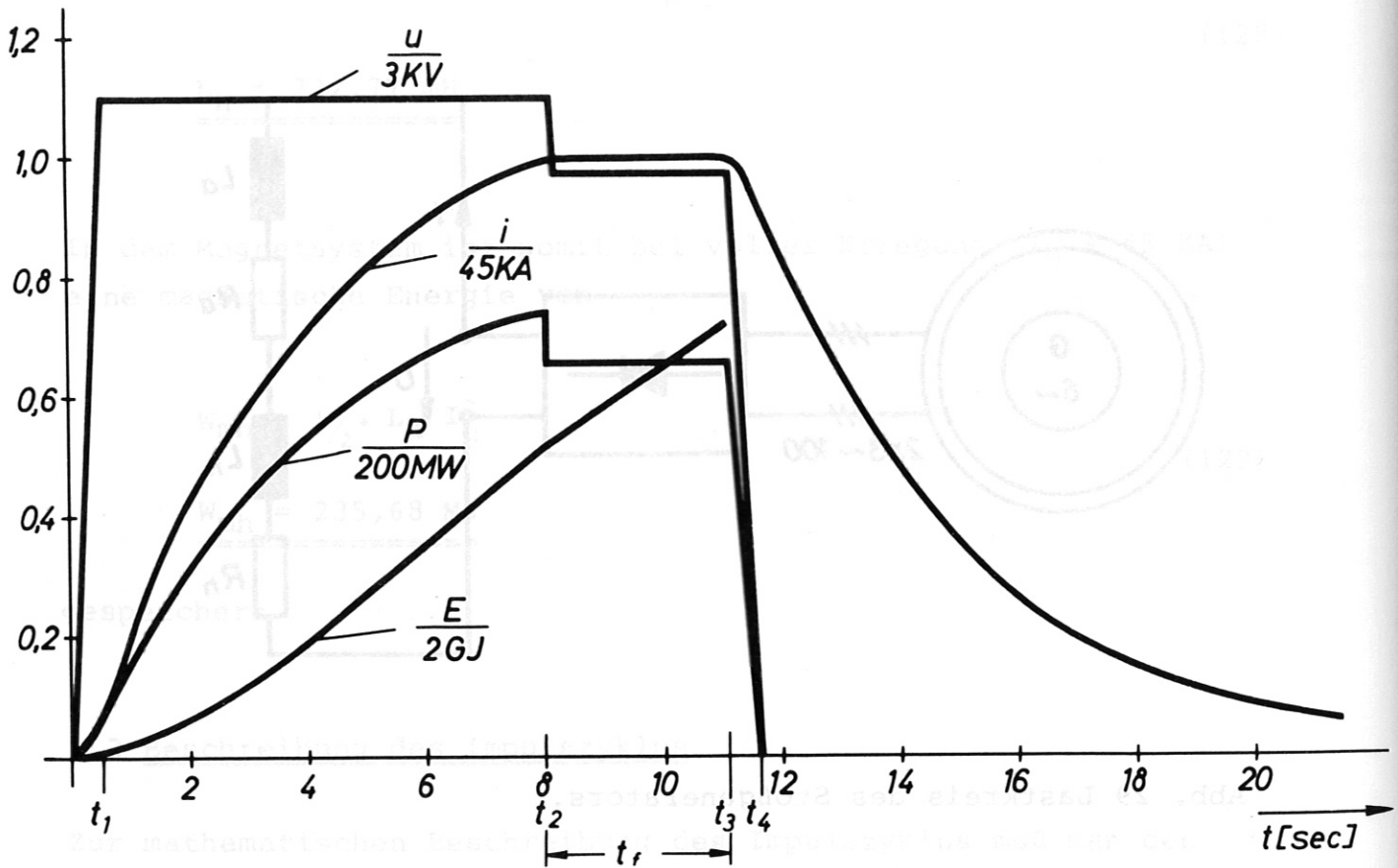


Abb. 30. Strom, Spannung, Leistung und Energie am Gleichrichter-
ausgang der Stoßleistungsanlage während eines Impuls-
zyklus.

Weiterhin ist

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = 6 \text{ kV/sec} \quad (131)$$

die vom Hersteller angegebene maximal mögliche Spannungsänderung, die nicht sprunghaft erfolgen kann, da im Erregerkreis der Maschine keine unendlich schnellen Stromänderungen möglich sind.

Der Spannungsverlauf nach Gl. (130) gestattet einen schwingungsfreien Übergang des Stromes $i(t)$ in die Dachphase ("Flat-top"-Phase) des Pulses bei optimal schneller Auferregung des Magneten. Dies wird unmittelbar ersichtlich, wenn man die für Abb. 29 geltende Maschen-Differentialgleichung

$$\frac{di(t)}{dt} + \delta i(t) = \frac{u(t)}{L_g} \quad (132)$$

mit

$$\delta = \frac{R_g}{L_g}, \quad R_g = R_h + R_a, \quad L_g = L_h + L_a \quad (133)$$

betrachtet. Die Spezialisierung ihrer allgemeinen Lösung

$$i(t) = e^{-\delta(t-t_v)} \left[i(t_v) + \frac{1}{L_g} \int_{t_v}^t u(x) e^{\delta(x-t_v)} dx \right] \quad (134)$$

für den Spannungspuls nach Gl. (130) ergibt bei Beachtung der Bedingung, daß der Strom $i(t)$ in den Punkten t_v , $v = 1(1)4$ von einer Pulsphase in die andere stetig übergehen muß, folgende Resultate:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{a}{L_g \delta^2} (\delta \cdot t - 1 + e^{-\delta t}) & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{U_1}{R_g} + (i(t_1) - \frac{U_1}{R_g}) e^{-\delta(t-t_1)} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \frac{U_2}{R_g} + (i(t_2) - \frac{U_2}{R_g}) e^{-\delta(t-t_2)} & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \\ \frac{U_2}{R_g} - \frac{a}{L_g \delta^2} [1 + \delta(t-t_3) + e^{-\delta(t-t_3)}] & \text{für } t_3 \leq t \leq t_4 \\ i(t_4) e^{-\delta(t-t_4)} & \text{für } t_4 \leq t \leq t_e \end{cases} \quad (135)$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$U_2 = i(t_2) R_g = I_q R_g \quad (136)$$

so entsteht

$$i(t) = I_q = \text{const. für } t_2 \leq t \leq t_3 \quad (137)$$

die Flat-top Phase des Impulses, wobei

$$t_2 = t_1 - \frac{1}{\delta} \ln \frac{\frac{U_2}{R_g} - \frac{U_1}{R_g}}{i(t_1) - \frac{U_1}{R_g}} \quad (138)$$

die Auferregungszeit ist. Der Pulsverlauf $i(t)$ ist in Abb. 30 graphisch dargestellt. Aus den Kurven $u(t)$ und $i(t)$ läßt sich dann die vom Generator abgegebene, zeitlich veränderliche Leistung

$$P(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (139)$$

während eines Impulszyklus berechnen (s. Abb. 30). Ebenso ist bei Stoßleistungsanlagen die vom Generator abgegebene Energie E von Interesse. Sie setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, aus der im magnetischen Feld gespeicherten Energie W_{mh} , W_{ma} und der dissipierten Jouleschen Energie E_v . Es gilt

$$E(t) = W_{mh} + W_{ma} + E_v \quad (140)$$

oder

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot (L_h + L_a) \cdot i^2(t) + R_g \cdot \int_0^t i^2(t) \cdot dt \quad (141)$$

Die numerische Auswertung von Gl. (141) führt dann zu der in Abb. 30 gegebenen Kurvendarstellung. Sie zeigt, daß am Pulsende bei $t = t_3$ die notwendige Bedingung

$$E(t_3) \leq E_0 = 1,45 \text{ GJ} \quad (142)$$

erfüllt ist. Aus ihr kann man die Pulsdauer

$$t_3 = t_2 + t_f \quad (143)$$

mit der Flat-top-Zeit

$$t_f = \frac{E_0 - E(t_2)}{I_q^2 \cdot R_g} \quad (144)$$

unmittelbar bestimmen. Nach Ablauf eines Impulses wird eine Pausenzeit von 7 Minuten benötigt, um den Schwunradgenerator wieder auf Nenndrehzahl und seine Nutzenergie E_0 zu bringen.

5.4 Numerische Auswertung der magnetischen Kräfte

5.4.1 Ungestörter Betrieb bei voller Erregung

Bei voller Erregung durch 45 KA wirken auf die ASDEX-Hauptfeldspulen resultierende magnetische Kräfte, die je Spule größer als 1000 Mp sind. Durch Kräfte dieser Größenordnung wird das Wicklungsmaterial bis an die zulässige mechanische Belastungsgrenze beansprucht. Zur Vermeidung des damit verbundenen Risikos wird im vorliegenden Fall die Kupferwicklung in ein antimagnetisches Stahlgehäuse eingebettet. Dabei kann man davon ausgehen, daß unter Belastung die Formänderung des Stahlgehäuses wesentlich kleiner ist als die des Kupfers und so die Haupttragwirkung vom Stahlrahmen übernommen wird. Kupfer und Isolierstoff der Wicklung sind dann überwiegend einer leicht zu beherrschenden Druckbeanspruchung ausgesetzt. Außerdem läßt sich durch entsprechende Formgebung der Spulen ihre mechanische Beanspruchung vermindern. Dieser Weg wurde erstmals von Mills beschritten. In seinem vor einigen Jahren veröffentlichten Tokamak-Entwurf [35] sind anstelle kreisförmiger

Hauptfeldspulen D-förmige vorgesehen. Hierbei verfolgt man die Idee, die Spulenkontur möglichst der "Seillinie" anzupassen, wodurch der Spulenkörper weitestgehend biegemomentenfrei wird und dominant einer Zugbeanspruchung ausgesetzt ist [35]. Dies gilt jedoch nur für den gekrümmten Teil des D-förmigen Spulenkörpers, weil sein gerades Teilstück nicht der Seillinie angepaßt werden kann. Wegen der geringen Biegebeanspruchung der Spulen, in Verbindung mit den Argumenten zur Energieökonomie (s. 5.1) hat man sich beim Entwurf von ASDEX für eine technisch einfache Annäherung der Hauptfeldspulen an die Mills-Form entschieden (s. Abb. 19). Bei der Auswahl der Spulenform wurden die zwischen den Windungen herrschenden Schubbeanspruchungen minimalisiert.

Grundlage für die Erstellung eines Festigkeitsnachweises ist die Berechnung der im Wicklungskörper angreifenden thermischen und magnetischen Volumenkräfte. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Bestimmung der magnetischen Kräfte auf die Spulen vorgenommen werden. Auf der Basis der unter 3.23 dargelegten Methode geschieht dies mit Hilfe des Rechenprogrammes "HEDO", wobei die numerische Auswertung der Kräfte auf die Spule 1 der Anordnung beschränkt wird. Daran ist keine Einschränkung der Vollständigkeit geknüpft, denn im ungestörten Betrieb (d. h. gleiche Stromstärken in allen Spulen) unterliegen alle Spulen wegen der gegebenen Symmetrie den gleichen Belastungen.

Entsprechend Abb. 7 wird der Wicklungskörper von Spule 1 in $n_{gr} \cdot n_{gy} \cdot n_g = 16 \cdot 2 \cdot 70 = 2240$ finite Volumenelemente unterteilt und in ihnen jeweils die Kraft je cm Azimutlänge berechnet. Die sich nach Größe und Richtung ergebende Kraftverteilung ist in Abb. 31 entlang bestimmter, parallel zur Spulenkontur verlaufender Linien eingetragen. Durch die getroffene Wahl von $n_{gr} = 16$ bei 16 Windungen pro Pancake verbinden hier die gestrichelt eingezeichneten Konturlinien jeweils die Angriffspunkte der Volumenkräfte je Windung. Aus der Position der Konturlinie im Wicklungskörper kann man also unmittelbar erkennen, entlang welcher Windung die Kraftverteilung berechnet wurde. In Abb. 31 sind die Windungen eins, acht und fünfzehn ausgewählt worden. Entlang der ersten und achten Windung sind die Kräfte durchweg nach außen gerichtet und

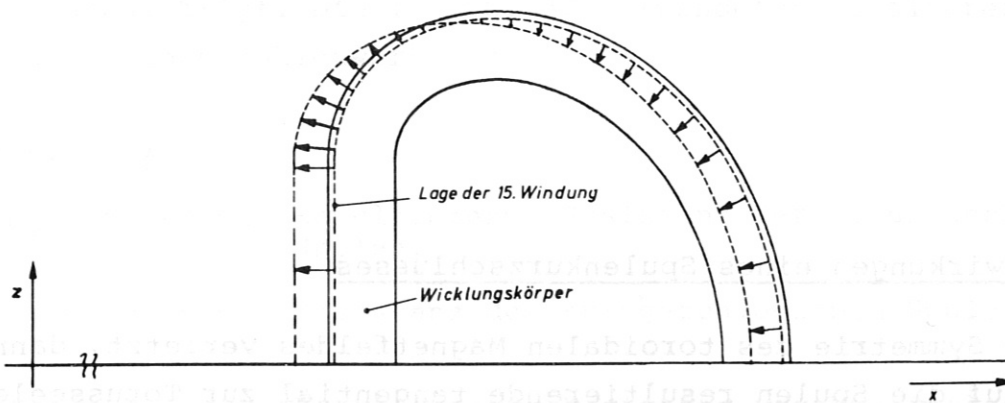
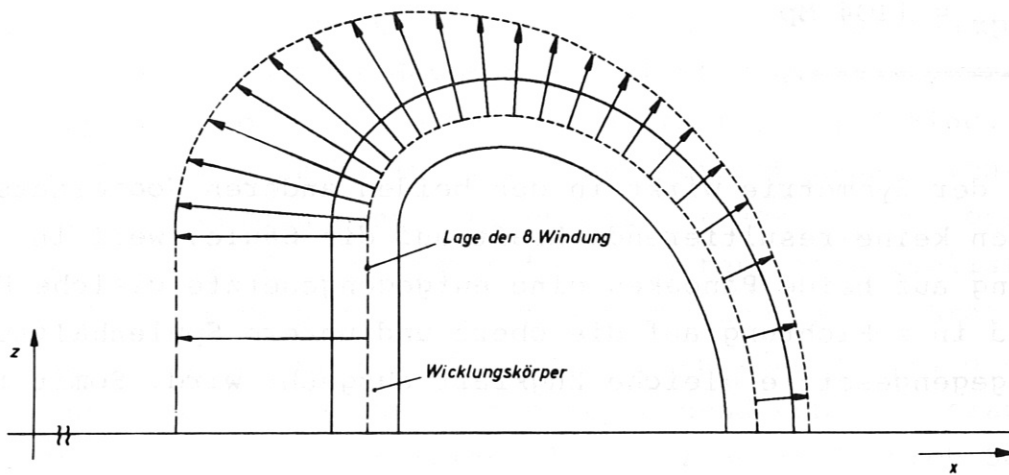
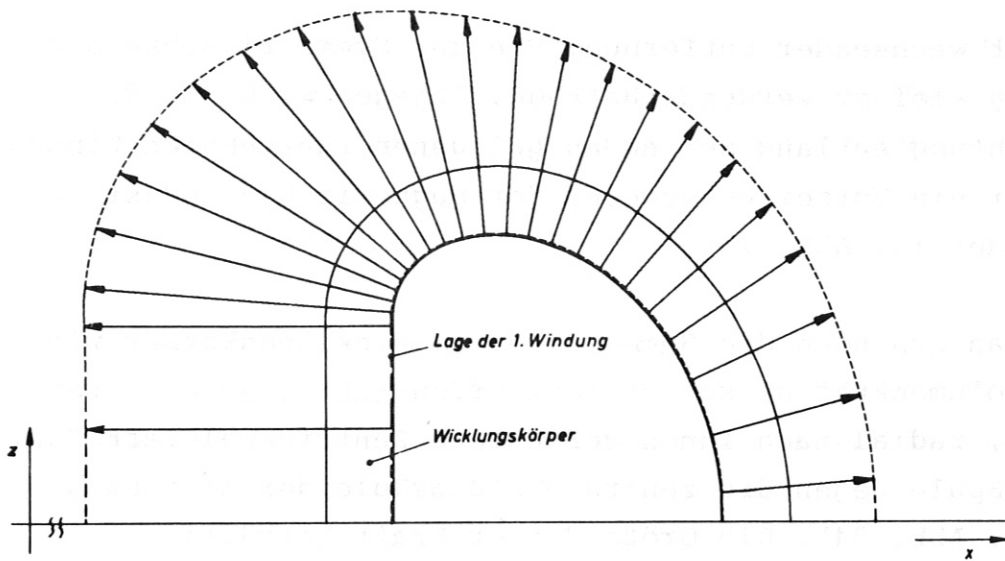


Abb. 31. Verteilung der magnetischen Volumenkräfte im Wicklungskörper.

- a) entlang der 1. Windung
- b) entlang der 8. Windung
- c) entlang der 15. Windung

haben mit wachsender Entfernung von der Symmetrieachse der Anordnung kleiner werdende Beträge. Dagegen wechselt die Kraftrichtung entlang der außen gelegenen fünfzehnten Windung, da in ihr ein Vorzeichenwechsel der magnetischen Induktion stattfindet (s. Abb. 20).

Bildet man nun noch die Summe aller im Wicklungskörper wirkenden Volumenkräfte, so entsteht offensichtlich eine resultierende, radial nach innen gerichtete Zentripetalkraft F_{qr} , die die Spule gegen die zentrale Stützsäule der Anordnung preßt (s. Abb. 34). Die Größe dieser Kraft beträgt:

$$\underline{F_{qr} = 1104 \text{ Mp}}$$

Aufgrund der Symmetrie wirkt in den beiden anderen Koordinatenrichtungen keine resultierende Kraft auf die Säule, weil in φ -Richtung auf beide Pancakes eine entgegengesetzte gleiche Druckkraft und in z-Richtung auf die obere und untere Spulenhälfte eine entgegengesetzte gleiche Zugkraft ausgeübt wird. Somit ist

$$\underline{F_{q\varphi} = F_{qz} = 0}$$

5.42 Auswirkungen eines Spulenkurzschlusses

Wird die Symmetrie des toroidalen Magnetfeldes verletzt, dann wirken auf die Spulen resultierende tangential zur Torusseelen-gerichtete Kräfte $F_{q\varphi}$. Geht man davon aus, daß Unsymmetrie des Feldes durch Montagefehler ausgeschlossen werden kann, so ist ihre Ursache auf verschiedene Stromstärken in den Spulen zurückzuführen. Um beispielsweise den Einfluß einer lokalen Feldstörung auf die Verformung der magnetischen Flächen zu untersuchen,

könnte es von Interesse sein, eine der sechzehn Hauptfeldspulen bei voller Erregung der übrigen stromlos zu halten (s. Abb. 23). Auf die beiden benachbarten Spulen wirken dann Tangentialkräfte von

$$\underline{\underline{F_{q\phi} = 682 \text{ Mp}}}$$

die ohne Verzicht auf jede Zugänglichkeit zum Plasma mechanisch nicht beherrscht werden können. Dieser Betriebszustand soll und darf deshalb nicht zugelassen werden.

Andererseits kann während des Betriebes ein plötzlich eintretender Kurzschluß über einer oder mehreren Spulen nicht ausgeschlossen werden. Der dann über die Kurzschlußresistenz R_k vorzeitig einsetzende Entladevorgang bewirkt ungleiche Stromstärken in den Spulen, wodurch die Tangentialkräfte $F_q \neq 0$ sind. Da eine vollerrregte Spule nach Eintritt eines Kurzschlusses nicht sprunghaft stromlos werden kann, werden die Beträge $F_{q\phi}$ den oben berechneten Wert von 682 Mp deutlich unterschreiten. Eine realistische Aussage über Größe und dynamisches Verhalten dieser Kräfte verlangt zuvor die Analyse der transienten Spulenströme $i_q(t)$, $q = 1(1)16$. Dazu kann eine Ersatzschaltung entsprechend Abb. 32 vorausgesetzt werden, in der ein Kurzschluß über Spule 2 durch Schließen des Schalters s simuliert wird. In dieser Schaltung werden alle induktiven Kopplungen durch die in Tabelle 4 gegebenen Koeffizienten berücksichtigt. Die in Abb. 32 verwendeten Schaltkreiselemente nehmen folgende Zahlenwerte an:

a) Resistenzen

$R_{h1} = 53,44 \text{ m}\Omega$ Resultierende Resistanz der 15 unbeschädigten Spulen.

$R_{h2} = 3,56 \text{ m}\Omega$ Resistanz der kurzgeschlossenen Spule.

$R_a = 8 \text{ m}\Omega$ Resultierende Resistanz von Multipol-, MC- und Vertikalfeldspulen.

$R_k = 0$ Resistanz eines idealen Kurzschlusses (ungünstigster Fall). Später wird der Einfluß verschiedener Werte R_k untersucht.

b) Induktivitäten

$$L_{h11} = \sum_1^{15} \sum_1^{15} L_{qp} \\ = 208,62 \text{ mH}$$

Resultierende Selbstinduktivität der 15 unbeschädigten Spulen.

$$L_{h12} = \sum_1^{15} \sum_{16}^{16} L_{qp} \\ = 9,6 \text{ mH}$$

Resultierende Gegeninduktivität zwischen den 15 unbeschädigten Spulen und der kurzgeschlossenen Spule.

$$L_{h22} = 4,94 \text{ mH}$$

Selbstinduktivität der kurzgeschlossenen Spule.

$$L_a = 1,23 \text{ mH}$$

Resultierende Induktivität von Multipol-, MC- und Vertikalfeldspulen.

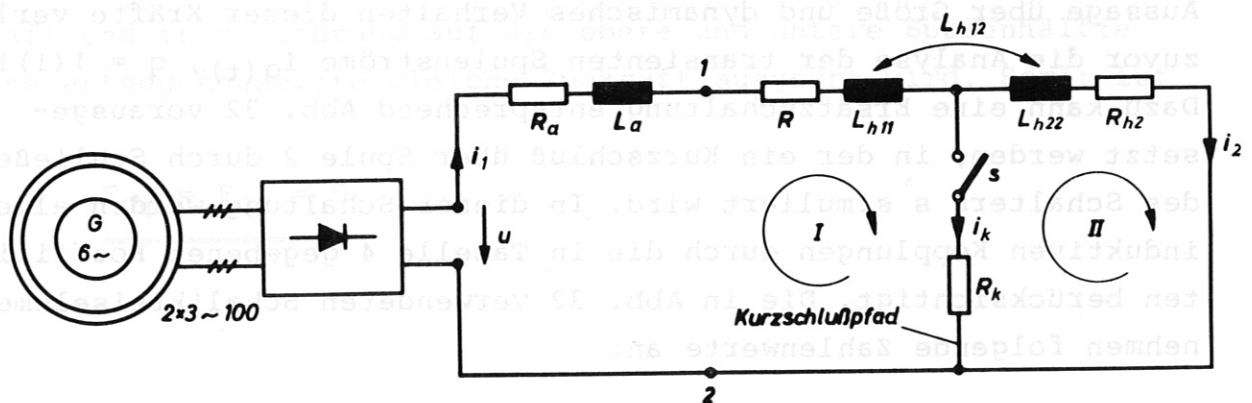


Abb. 32. Ersatzschaltung der ASDEX-Hauptfeldspulen:

ungestörter Betrieb	s	offen
Spulenkurzschluß	s	geschlossen

Es wird angenommen, daß der Kurzschluß bei voller Erregung ($I_Q = 45 \text{ kA}$) des Spulensystems, d. h. in der Flat-top-Phase des Impulses ($8,1 \text{ sec} \leq t \leq 11 \text{ sec}$) eintritt. Dementsprechend wird der Kurzschlußzeitpunkt bei $t_k = 8,5 \text{ sec}$ festgelegt.

Hinsichtlich der am Magnetsystem liegenden treibenden Spannung $u(t)$ muß für $t \geq t_k$ zwischen zwei möglichen Betriebsfällen unterschieden werden:

- a) keine vorzeitige Generatorentregung. Der unter 5.3 beschriebene Spannungszyklus (130) wird trotz des Kurzschlusses beibehalten.
- b) Generatorentregung unmittelbar nach Kurzschlußbeginn. $u(t)$ wird in $\Delta t = 0,5 \text{ sec}$ *) von U_2 auf Null abgesenkt.

Die sich unter diesen Voraussetzungen einstellenden Spulenströme $i_q(t)$, $q = 1(1)16$ werden mit Hilfe des FORTRAN-Programms "NETZ 3" berechnet. Ihr Verlauf ist für beide Fälle in Abb. 33 dargestellt. Darin wird Bezeichnung und Orientierung der Ströme bzw. Spannungen entsprechend der Ersatzschaltung Abb. 32 vorgenommen. Im ungestörten Betrieb, d. h. bis Eintritt des Kurzschlusses (schließen von s) werden alle Spulen vom gleichen Strom $i_1(t) = i_2(t)$ durchflossen. Nach dem Kurzschluß ($t \geq t_k$) ist:

- $i_1(t)$ die Stromstärke in allen unbeschädigten Spulen,
- $i_2(t)$ die Stromstärke in der kurzgeschlossenen Spule und
- $i_k(t)$ die Stromstärke im Kurzschlußpfad.

Aus Abb. 33a und 33b geht hervor, daß die Kurven $i_1(t)$ und $i_2(t)$ bei $t = t_m$ die größte Abweichung voneinander haben. Im Zeitpunkt t_m , in dem gleichzeitig der Kurzschlußstrom $i_k(t)$ sein Maximum erreicht, wird also die Unsymmetrie des toroidalen Feldes und damit verbunden die Tangentialkraft $F_{q\varphi}$ auf die Spulen maximal werden. Dabei sind die der kurzgeschlossenen Spule 2 benachbarten Spulen 1 und 3 den größten Tangentialkräften ausgesetzt, sie vermindern sich rasch mit wachsendem Abstand der Spulen von der Störstelle, d. h.

$$|F_{1\varphi}| = |F_{3\varphi}| > |F_{4\varphi}| = |F_{16\varphi}| > |F_{5\varphi}| = |F_{15\varphi}| \text{ usw.} \quad (145)$$

*) Angabe des Herstellers (siehe Gl. 131).

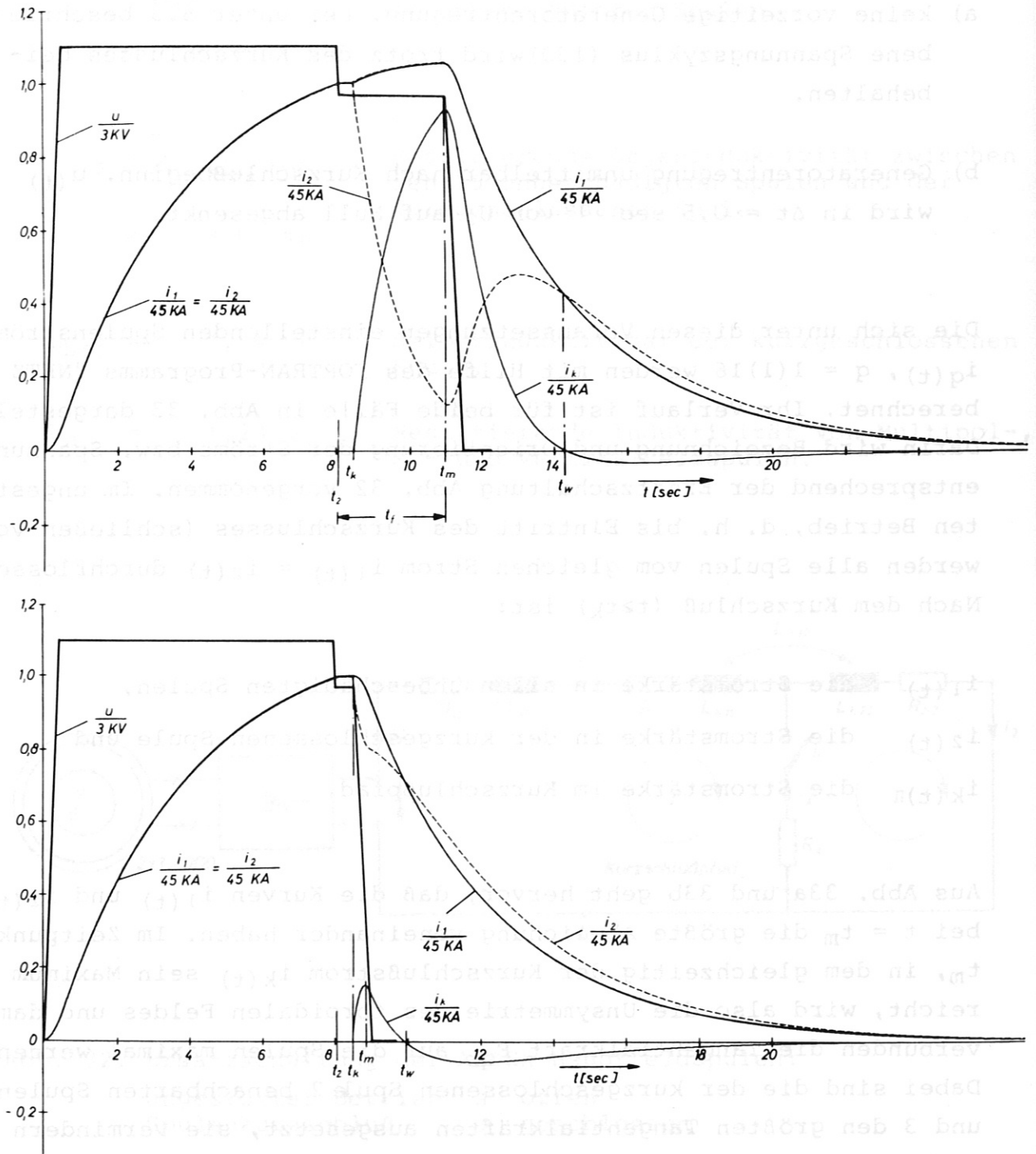


Abb. 33. Spulenströme und Gleichrichterspannung bei einem Spulenkurzschluß in der Flat-top-Phase des Impulses (Bezeichnungen siehe Text):

- a) ohne vorzeitige Generatorentregung
- b) Generatorentregung unmittelbar nach Kurzschlußbeginn

Außerdem gilt wegen Symmetrie

$$|F_{2\varphi}| = |F_{9\varphi}| = 0 \quad (146)$$

Deshalb ist es hinreichend, jeweils die resultierenden Tangentialkräfte auf die Spulen 1 und 3 zu ermitteln. In den vorliegenden Fällen ergeben sich für die zur Zeit $t = t_m$ herrschenden Stromstärken $i_1(t_m)$ bzw. $i_2(t_m)$ Kräfte von

$$\text{Fall a) } |F_{1\varphi}| = |F_{3\varphi}| = 666,3 \text{ Mp}$$

$$\text{Fall b) } |F_{1\varphi}| = |F_{3\varphi}| = 100,9 \text{ Mp}$$

deren Richtung in Abb. 34 eingetragen ist. Tangentialkräfte der unter a) gegebenen Größenordnung müssen aus konstruktiven Gründen vermieden werden. Es ist daher zwingend notwendig, unmittelbar nach Kurzschlußbeginn die Schnellentregung des Generators einzuleiten. Die Entladung des Magnetsystems verläuft dann gemäß Abb. 33b, bei der die Stromstärkenunterschiede in den Spulen, gemessen am Fall a), deutlich kleiner sind und somit auch die auftretenden Tangentialkräfte.

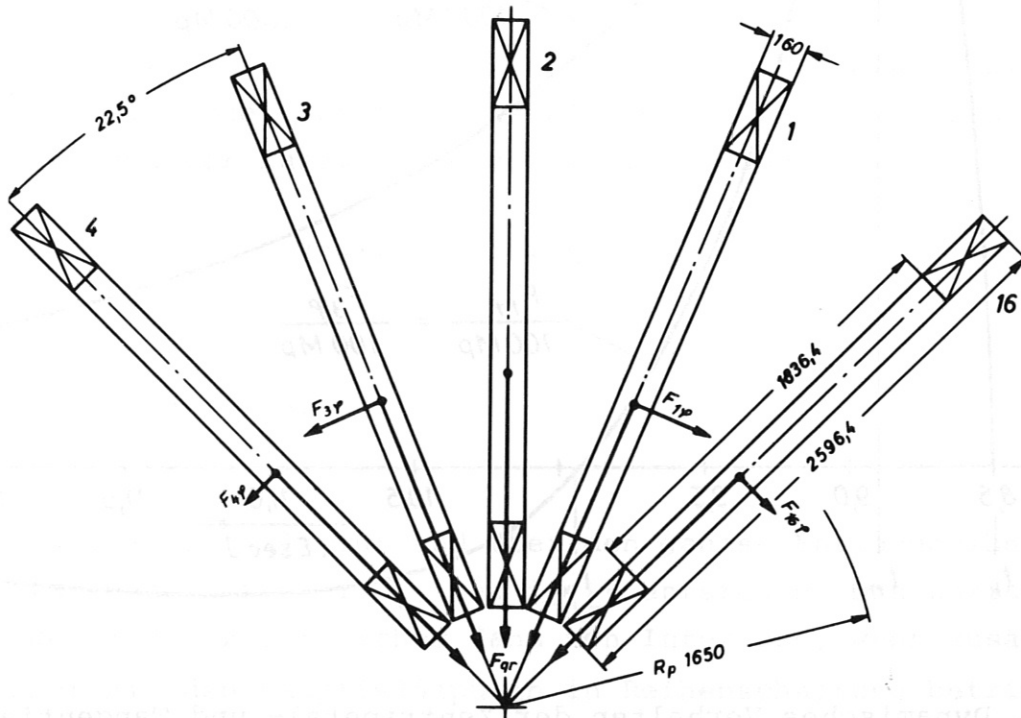


Abb. 34. Ausschnitt aus der toroidalen Spulenordnung mit resultierenden Kräften auf die Spulen 1 und 3, nachdem Spule 2 kurzgeschlossen ist.

Wegen der Relevanz von Entladungsform b) soll für diesen Fall auch das dynamische Verhalten der resultierenden Kräfte untersucht werden. Dazu muß man die Kräfte als Funktion der Zeit über den ganzen, in t_k beginnenden Zeitbereich berechnen. Dies erfolgt in konkreten Zeitpunkten t_v für die jeweils dann in den Spulen herrschenden Stromstärken $i_1(t_v)$ bzw. $i_2(t_v)$. Die während der Entladung auf die Spulen 1 und 3 wirkenden Zentripetal- wie Tangentialkräfte (s. Abb.34) sind in Abb. 35 über der Zeit aufgetragen. Aus ihrem zeitlichen Verhalten erkennt man, daß die Spulen nach einem Kurzschluß infolge der Zentripetalkräfte einer monoton gegen Null strebenden und infolge der Tangentialkräfte einer wechselnden Beanspruchung ausgesetzt sind.

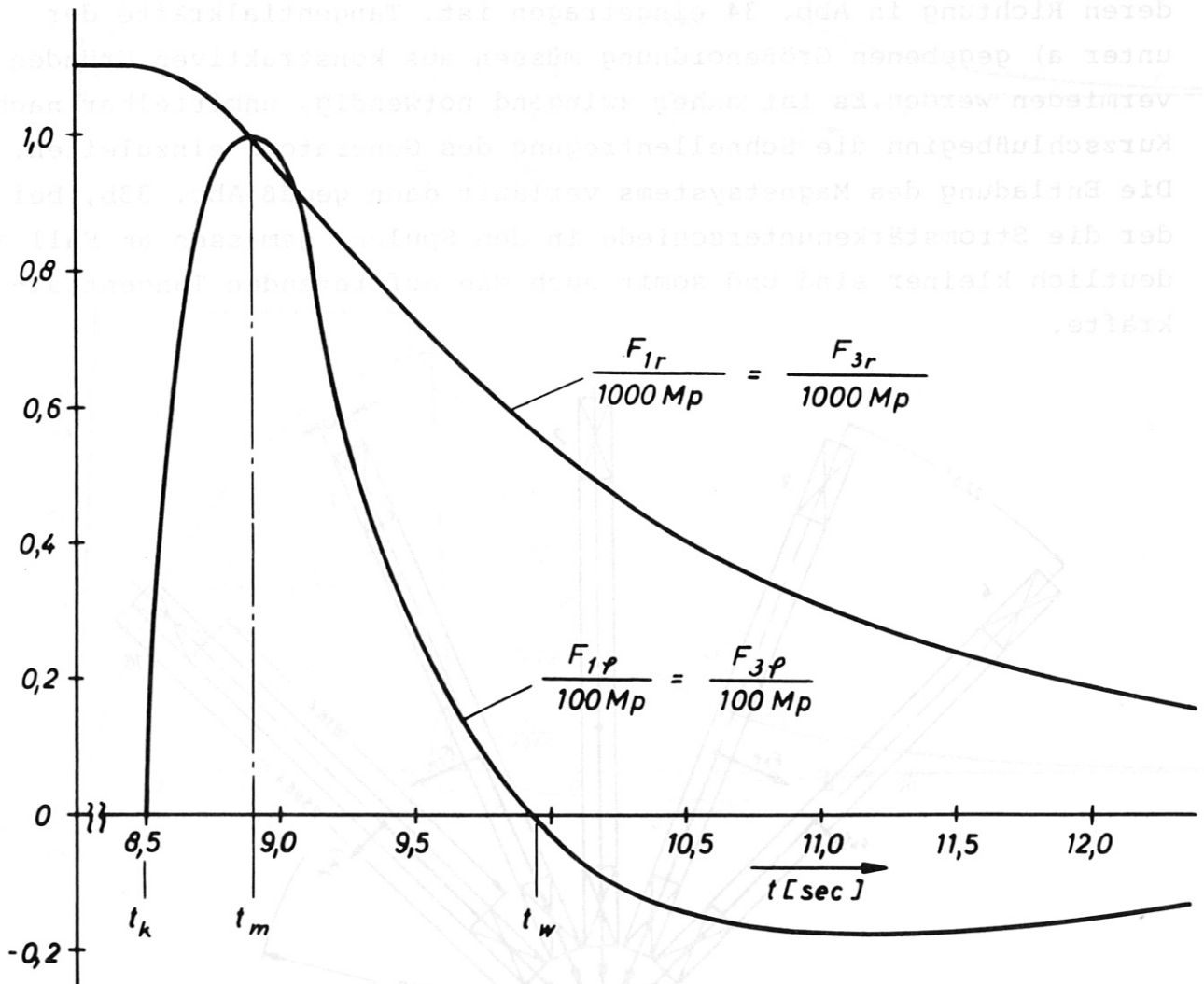


Abb. 35. Dynamisches Verhalten der Zentripetal- und Tangentialkräfte auf die Spulen 1 und 3 im Fall b), nachdem Spule 2 kurzgeschlossen ist.

Die Kräfte $F_{q\phi}$ wirken in wechselnden Richtungen, weil nach Abb. 33 für $t_k \leq t \leq t_w$ der Strom $|i_1| > |i_2|$ und für $t > t_w$ der Strom $|i_2| > |i_1|$ ist. Um die Kräfte $F_{q\phi}$ zu minimalisieren müßte eine symmetrisch verlaufende Entladung angestrebt werden, d. h. für alle t müßte $\Delta i(t) = i_1(t) - i_2(t)$ gegen Null gehen. Ausschlaggebend dafür ist, daß die Zeitkonstante

$$\tau_1 = \frac{L_{h11} + L_{h12} + L_a}{R_{h1} + R_a} \quad (147)$$

der I. Masche gleich ist der Zeitkonstanten

$$\tau_2 = \frac{L_{h22} + L_{h12}}{R_{h2}} \quad (148)$$

der II. Masche der in Abb. 32 skizzierten Schaltung. Für einen symmetrisch aufgebauten, toroidalen Spulenverband ist die Bedingung

$$\tau_1 = \tau_2 \quad (149)$$

immer erfüllbar, wenn entweder R_a und L_a vernachlässigbar sind oder im Kurzschlußzeitpunkt t_k die Klemmen 1 und 2 der Schaltung 32 über einen Schalter kurzgeschlossen werden. Dann gilt

$$L_{h11} + L_{h12} = (N-1) \cdot (L_{h22} + L_{h12}) \quad (150)$$

und

$$R_{h1} = (N-1) \cdot R_{h2} \quad (151)$$

womit Gl. (149) erfüllt ist und über den ganzen Entladungsbereich zusammenfallende Kurven $i_1(t)$ und $i_2(t)$ entstehen. Das Kurzschließen der Klemmen 1 und 2 ist sicher dann von Interesse, wenn zusätzliche Verbraucher mit den Hauptfeldspulen in Reihenschaltung betrieben werden, deren Kenngrößen R_a bzw. L_a gegenüber R_{h1} bzw. $L_{h11} + L_{h12}$ nicht vernachlässigt werden können. Bei ASDEX ist diese Maßnahme nicht notwendig, da $\tau_1 = 3,57$ sec unwesentlich kleiner als $\tau_2 = 4,08$ sec

ist und die Tangentialkräfte

$$|F_{1\varphi}| = |F_{3\varphi}| = 100 \text{ Mp}$$

unter der zulässigen Grenze liegen.

Die bisherigen Untersuchungen wurden unter Annahme eines idealen Kurzschlusses durchgeführt. Da die absolute Größe der Kurzschlußresistenz R_k im voraus nicht festgelegt werden kann, sind in Abb. 36 die im Zeitpunkt t_m entstehenden maximalen Tangentialkräfte als Funktion von R_k dargestellt. Die Funktion $|F_{1\varphi}|_{\max} = |F_{3\varphi}|_{\max} = f(R_k)$ bestätigt die Annahme, daß im Falle eines idealen Kurzschlusses $R_k = 0$ die ungünstigsten Belastungsverhältnisse vorliegen.

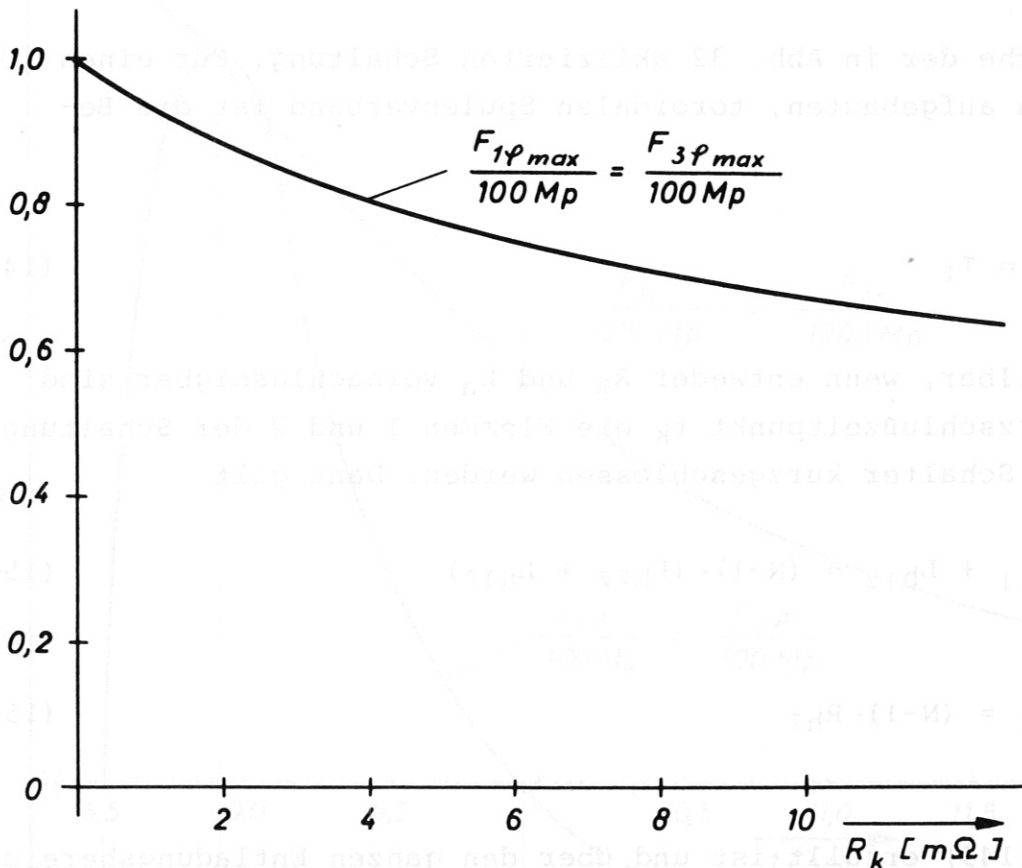


Abb. 36. Maximale Tangentialkräfte auf die Spulen 1 und 3 nachdem Spule 2 kurzgeschlossen ist als Funktion der Kurzschlußresistenz R_k .

6. Schlußbemerkungen

Die vorliegende Abhandlung wurde im Rahmen der Projektierung des großen Tokamak-Experimentes ASDEX des Max-Planck-Instituts für Plasmaphysik ausgearbeitet. Die hier vorgestellten Berechnungsverfahren wurden in enger Wechselwirkung mit den physikalischen und technischen Aktivitäten des Projektes aufgebaut. Sie legen insgesamt die Grundlage für die Auslegung der großen und komplizierten Spulenverbände der derzeitigen und der nächsten Generation großer Fusionsmaschinen mit magnetischem Einschluß. Sie werden inzwischen auch schon zur Projektierung weiterer Anlagen wie beispielsweise des europäischen großen Tokamak-Experimentes JET verwendet.

7. Zusammenfassung

Die in der vorliegenden Arbeit aufgestellten Berechnungsverfahren dienen als Grundlage der Dimensionierung großer Spulenanordnungen. Bei ihrer Ausarbeitung wurden die Aspekte berücksichtigt, die sich aus den zunehmend größer und komplexer werdenden Magnetsystemen der Fusionsexperimente ergeben. Besonders charakteristisch ist dabei die Tatsache, daß die betrachteten Spulensysteme aus Spulen weitestgehend beliebiger Geometrie bestehen können, die, wiederum in beliebiger räumlicher Lage zueinander angeordnet sein dürfen.

Für solche Spulenanordnungen wird zunächst ein Verfahren zur Berechnung des magnetischen Feldes, der magnetischen Kräfte und der Selbst- und Gegeninduktivitäten der Spulen angegeben. Es basiert auf der Approximation der Wicklungskörper durch Linienleiter, deren Anzahl je nach gewünschter Rechengenauigkeit frei wählbar ist. Auf den Feldberechnungen aufbauend können Feld- und Niveaulinien berechnet werden. Diese Aufgabe ist üblicherweise numerisch sehr aufwendig und erfordert viel Rechenzeit. Die hier gewählte Approximations-Methode erleichtert diese Aufgabe beträchtlich. Die Feldlinien- und Niveaulinienbilder, vermitteln die beim Entwurf von Magnetsystemen für Einschlußexperimente der Fusionsforschung unerläßliche Anschaulichkeit.

Für die praktischen numerischen Berechnungen wurde das Computer-Programm "HEDO" entwickelt, in dem die verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten zusammengefaßt sind. Gegenüber den bisher bekannten Verfahren [14, 16, 17], die entweder auf die Berechnung kreisförmiger Spulen oder auf je eine der vorstehend aufgezählten Berechnungsmöglichkeiten beschränkt sind, stellt das vorliegende Programm eine wesentliche Erweiterung dar. Ein Vergleich mit analytisch berechenbaren Spezialfällen zeigt, daß der Rechenfehler ohne wesentlichen Aufwand unter 1 % gehalten werden kann.

Das Ziel weiterer Berechnungen ist die Analyse des Verhaltens der Spulen im Normalbetrieb und im Störfall. Dazu werden die zeitlichen Verläufe der Ströme, der Spannungen und magnetischen Kräfte in den Spulen untersucht. Dies geschieht unter Berücksichtigung aller in-

duktiven Kopplungen, der Schaltungs- und Betriebsart sowie der übrigen Komponenten des elektrischen Schaltkreises mit Hilfe des dafür entwickelten Programms "NETZ 3". Unter Einbeziehung von Schaltvorgängen können mit diesem Programm die transienten Zweigströme bzw. -spannungen berechnet werden. Auf der Basis der Momentanwerte der Spulenstromstärken wird dann die praktisch sehr wichtige Untersuchung der mechanischen Kräfte im Spulenverband nach Größe und Zeitverhalten analysiert.

Im letzten Teil der Abhandlung werden mit den dargelegten Berechnungsverfahren die Grundlagen für die Auslegung der toroidalen Spulenordnung des Tokamak-Experimentes "ASDEX" erstellt. Zunächst wird die Berechnung der Felder, Kräfte und Induktivitäten durchgeführt. Danach wird das Betriebsverhalten des Spulenverbandes im ungestörten Betrieb wie im Falle eines plötzlichen Spulenkurzschlusses analysiert. Gegenüber dem ungestörten Betrieb werden nach einem Kurzschluß zusätzliche Kräfte in wechselnden Richtungen auf die Spulen ausgeübt. Es wird gezeigt, wie Größe und Richtung dieser Kräfte von der jeweiligen Entladungsform des Magneten abhängen und durch welche schaltungstechnischen Maßnahmen ihre Entstehung verhindert werden kann. Da einerseits ein Kurzschluß nicht auszuschließen ist und andererseits die dann entstehenden Kräfte mechanisch kaum beherrscht werden können, ist dieser Vorschlag von allgemeinem Interesse.

[9] I.P. Shkarovskiy, Proceedings of the 1st International Tokamak Conference, NCA Limited, Culham, Oxford, Research Report No. EX/77/1, 1974.

[10] Projektgruppe ASDEX, Vorschlag für ein Tokamak-Experiment mit magnetischer Einschlussachse, Teil 1, ASDEX-Report, 1974.

[11] K. Sipschyl, Theoretische Elektrotechnik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974.

(*) IFF - Max-Planck-Gesellschaft für Physik und Astronomie

8. Literaturverzeichnis

- [1] K.H. Schmitter, Fusionsreaktoren. Umschau Heft 24 (1970).
- [2] G.W. Lehner, A. Schlüter: Plasmaphysik und Fusionsreaktor. ETZ-A Bd.92 H.5 (1971).
- [3] R. Bünde: "Memorandum über die technologischen Probleme des Fusionsreaktors" und das "Fusionsreaktor-Technologie-Programm". Brennstoff-Wärme-Kraft 26 (1974) Nr. 8.
- [4] K.H. Steuer: Der Wasserstoffreaktor - Probleme bei der Erschließung einer neuen Energiequelle. VVA-Bulletin 4/1974.
- [5] H. Wobig: Wege zur kontrollierten Kernfusion. Naturwissenschaften 61 (1974).
- [6] G. v. Gierke: Die Stellarator - "Wendelstein"-Versuche im Institut für Plasmaphysik Garching. Physikalische Blätter 25. Jahrg. H.8 (1969).
- [7] V.S. Mukhovatov, V.D. Shafranov, I.V. Kurchatov: Plasma Equilibrium in a Tokamak. Nuclear Fusion 11 (1971).
- [8] L.A. Artsimovich, I.V. Kurchatov: Tokamak Devices. Nuclear Fusion 12 (1972).
- [9] I.P. Shkarofsky: Present and Planned Tokamak Machines. RCA Limited, Quebec, Canada. Research Report No. FXC72-2. Lab. Report No. PSP-112, September 1974.
- [10] Projektgruppe ASDEX: Vorschlag für ein Tokamak-Experiment mit magn. Limiter und axialsymmetrischem Divertor. ASDEX-Design Proposal Part I und II. IPP-Ber.*1973.
- [11] K. Simonyi: Theoretische Elektrotechnik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.

*) IPP = Max-Planck-Institut für Plasmaphysik Garching

- [12] F. Ollendorff: Berechnung magnetischer Felder. Springer-Verlag, Wien 1952.
- [13] J. Hak: Eisenlose Drosselspulen. K.F. Kohler Verlag, Leipzig 1939.
- [14] R. Pöhlchen: Berechnung des stationären Magnetfeldes kreiszylindrischer Spulen mit rechteckigem Wicklungsquerschnitt und gleichmäßiger Stromdichte. IPP-Ber. Nr. 4/23, Garching 1967.
- [15] G.V. Brown, L. Flax: Superposition of Semi-Infinite Solenoids for Calculating Magnetic Fields of Thick Solenoids, J. of Applied Physics, Vol. 35 No. 6 (1964).
- [16] M.W. Garrett: Calculation of Fields, Forces and Mutual Inductances of Current Systems by Elliptic Integrals. J. of Applied Physics Vol. 34 No. 9, (1963).
- [17] T.F. Yang: A MAGNETIC FIELD CODE FOR HANDLING GENERAL CURRENT CARRYING CONDUCTORS IN THREE DIMENSIONS - MAFCO-W. Proc. Int. Conference on Magnet Technology, Rom 1975.
- [18] R. Pöhlchen: Computation of self-inductances of thick air-core solenoids, mutual inductances and axial forces between such coils in coaxial system by aid of a digital computer. Proc. Int. Conference on Magnet Technology, Hamburg 1970.
- [19] G. Greving: Eine Methode zur numerischen Berechnung räumlicher Feldlinien. AEÜ Bd. 28 (1974) Heft 7/8.
- [20] W.J. Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik Bd. 2 VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.
- [21] A. Ralston, H.S. Wilf: Mathematische Methoden für Digitalrechner. Bd. I und Bd. II. R. Oldenbourg Verlag München-Wien 1969.

- [22] R.D. Cook: Concepts and Applications of Finite Element Analysis. J. Wiley and Sons, Inc. New York 1974.
- [23] I. Ergatoudis, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz: Curved, Isoparametric, "Quadrilateral" Elements for Finite Element Analysis. Int. J. Solids Structures Vol. 4 (1963).
- [24] G. Jordan-Engeln, F. Reuter: Numerische Mathematik für Ingenieure. Bibliographisches Institut AG., Mannheim 1972.
- [25] M. Promberger: Anwendung von Matrizen und Tensoren in der theoretischen Elektrotechnik. Akademie Verlag Berlin 1960.
- [26] A. v. Weiss: Einführung in die Matrizenrechnung zur Anwendung in der Elektrotechnik. R. Oldenbourg, München 1971.
- [27] R. Priemer, A.C. Petersen, T. Murata: A computer algorithm for extrating trees and directed trees from the incidence matrix. Int. J. Electronics Vol. 36 No.1(1974).
- [28] G. Doetsch: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Birkhäuser-Verlag, Basel 1970.
- [29] H. Preis: Die Analyse transienter Vorgänge in linearen elektrischen Netzwerken. IPP-Ber. Nr. 4/87, Garching 1971.
- [30] W. Jentsch: Zur Aufstellung des mathematischen Modells eines dynamischen elektrischen Netzwerks über den "normalen Baum". ETZ-A Bd. 95 (1974) H.2.
- [31] F.F. Kuo: Network Analysis by Digital Computer. Proc. of the IEEE Vol. 54/6 (1966).
- [32] K.P. Dikshit: An analysis of time-varying circuits. Int. J. Electronics Vol. 35, No. 4 (1973).

- [33] H. Preis: Das transiente Verhalten von Strömen und Kräften im toroidalen Spulensystem des Stellarators Wendelstein VII insbesondere bei Betriebsstörungen. Archiv für Elektrotechnik 56 (1974).

- [34] G. Vau: Gepulste Stromversorgungen großer Leistung für Kernfusionsexperimente. Zusammenfassung von Aufsätzen aus der "Siemens-Zeitschrift" 9/75.

- [35] J. File, R.G. Mills, and G.V. Sheffield: Large Superconducting Magnet Designs for Fusion Reactors. Princeton University Plasma Physics Laboratory Princeton, New Jersey. Matt-848 (1971).

- [36] A. Knobloch, K.H. Schmitter und S.L. Wipf: Elektrotechnische Probleme in Fusionsmaschinen. ETZ-A Bd. 92 H.5 (1971).

- [37] Projekt-Gruppe "TEXTOR" der KFA-Jülich: Report on the Planing of "TEXTOR". KFA-Report 1975.

- [38] JET-Gruppe: Design Proposal "The JET" (Joint European Torus). EUR-JET-R5 (1975).

Ich danke Herrn Prof. Dr. R. Wienecke, dem wissenschaftlichen Direktor des Max-Planck-Institutes für Plasmaphysik in Garching, für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine stets großzügige Unterstützung.

Außerdem danke ich den Herren Dr. G.v.Gierke und Dr. M. Keilhacker für die Zustimmung, diese Arbeit im Rahmen des von ihnen geleiteten Projektes anfertigen zu können.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Priv. Doz. Dr. J. Raeder, der die Arbeit betreute. Er hat mir durch die zügige Durchsicht des Manuskriptes die Arbeit wesentlich erleichtert.

Zum Schluß möchte ich mich bei Herrn P. Martin für die ideenreich ausgeführte Programmierung, bei Frau R. Kiesel und Herrn T. Henningsen für das sorgfältige Anfertigen von Zeichnungen bzw. Fotografien und bei meiner Frau für das mühevollen Schreiben des Manuskriptes bedanken.