

M. Salvat, L.L. Lengyel  
Ein analytisches Modell für die  
Heizung von Pellets mit Lasern

An analytical model for  
pellet heating by lasers

M. Salvat, L.L. Lengyel

IPP 4/136      Dezember 1975



**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**

**8046 GARCHING BEI MÜNCHEN**

# MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

## GARCHING BEI MÜNCHEN

Ein analytisches Modell für die  
Heizung von Pellets mit Lasern

An analytical model for  
pellet heating by lasers

M. Salvat, L.L. Lengyel

IPP 4/136      Dezember 1975

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem  
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die  
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP 4/136

Ein analytisches Modell für die  
Heizung von Pellets mit Lasern

An analytical model for pellet  
heating by lasers

M. Salvat, L.L. Lengyel

Dezember 1975

Abstract

Es werden analytische Lösungen für die Expansion (bzw. Kompression) von lasererzeugten Plasmen (mit Wärmezufuhr) gegeben und diskutiert.

Analytical solutions are presented for the compression and expansion of spherical targets illuminated by lasers with account for heat addition.

Die Erzeugung von Plasmen durch Bestrahlung von festen Targets mit Lasern läßt sich durch ein Deflagrationsmodell verhältnismäßig gut beschreiben (ebenes Target, stationäre Vorgänge u.s.w., siehe z.B. [1]). In dieser Approximation wird die Laserenergie am Ort der Trennfläche zwischen der geheizten und schnell expandierenden Plasmaschleife und dem dichten Pelletkern deponiert bzw. absorbiert. Die heiße, dünne Schleife (Dichte gleich kritischer Dichte) transportiert mit sich einen großen Teil der absorbierten Energie. Ein Teil des Pelletkerns wird durch Stoßwelle geheizt. Die geschockte Masse beinhaltet verhältnismäßig wenig Energie.

Die räumlich inhomogene Energieverteilung in lasererzeugten Plasmen könnte die Einschlußeigenschaften solcher Plasmen in Magnetfeldern stark beeinflussen. Eine homogene Aufheizung der gesamten Pelletmasse mag bei der Anwendung von mehreren Laserpulsen mit geeignet gewählten Zeitverzögerungen zwischen den einzelnen Pulsen möglich sein. Die Triggerzeiten der einzelnen Pulse werden durch die zeitliche Änderung der Dichteverteilung bestimmt. Es besteht deswegen Interesse an analytischen Modellen, die die Expansion von lasererzeugten Plasmen unter Berücksichtigung von unterschiedlichen Effekten beschreiben.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Erweiterung der in [2] gegebenen Analyse dar. Ziel dieser Analyse war es, eine analytische Lösung zur Beschreibung der Plasmaexpansion (bzw. Kompression) unter Berücksichtigung von Wärmezufuhr zu erstellen.

### Grundgleichungen und der "kosmologische Ansatz"

Kugelsymmetrie wird angenommen. Die Grundgleichungen lauten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{r}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \ddot{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (2)$$

$$\dot{u} + p \left( \frac{\dot{r}}{r} \right) = \dot{q} \quad (3)$$

$\dot{q}$  ist die Wärmezufuhr pro Einheitsmasse und Einheitszeit und

$$\begin{aligned} p &= 2n kT \\ \rho &= n \cdot m_i \\ u &= 2 \cdot \frac{3}{2} \frac{kT}{m_i} \end{aligned}$$

Der Faktor 2 berücksichtigt den Druck (bzw. die Energie) der Elektronen.

Zur Lösung des Gleichungssystems wird ein Modell mit dem "kosmologischen Ansatz" (siehe [2]) benutzt:

Der Ansatz lautet:

$$r(r_0, t) = r_0 \cdot f(t), \quad (4)$$

wobei  $r_0$  die Anfangslage eines Punktes des Plasmas darstellt.

Der Ansatz hat zur Folge, daß

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r_0 \dot{f} \\ \ddot{r} &= r_0 \ddot{f} \end{aligned}$$

Damit kann man die Grundgleichungen folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\dot{n}}{n} + 3 \frac{\dot{f}}{f} = 0 \quad (5)$$

$$m_i n r_0 \dot{f} = -\frac{\partial}{\partial r} (2n kT) \quad (6)$$

$$\dot{S} = \frac{\dot{q}}{T} = \frac{3k}{m_i} \frac{\dot{T}}{T} + \frac{6k}{m_i} \frac{\dot{f}}{f}, \quad (7)$$

wobei  $\dot{S}$  die Entropieänderung pro Masseneinheit und Zeiteinheit darstellt.

### Analytische Lösungen unter Benutzung der Entropie

Die Gleichungen (5) und (7) sind unmittelbar integrierbar und liefern

$$n = n_0 f^{-3} \quad (8)$$

$$T = T_0 f^{-2} e^{\frac{m_i \Delta S}{3k}} \quad (9)$$

Diese Ausdrücke für  $n$  und  $T$  werden in der Gleichung (6) eingeführt und man erhält

$$m_i n_0 r_0 f^3 \ddot{f} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( 2 n_0 k T_0 f^{-5} e^{\frac{m_i \Delta S}{3k}} \right) \quad (10)$$

$\frac{\partial}{\partial r}$  hat die Bedeutung  $\left( \frac{\partial}{\partial r} \right)_{t=c \cdot t}$

und

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \right)_t = \left( \frac{\partial}{\partial r_0} \right)_t \frac{\partial r_0}{\partial r}$$

Unter Berücksichtigung von  $r = r_0 f(t)$  erhält man

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \right)_t = \frac{1}{f} \left( \frac{\partial}{\partial r_0} \right)_t$$

Gleichung (10) lautet dann:

$$m_i n_0 r_0 f^3 \ddot{f} = -\left( \frac{\partial}{\partial r_0} \right)_t \left( 2 n_0 k T_0 e^{\frac{m_i \Delta S}{3k}} \right)$$

Nun ist allgemein  $\Delta S = \Delta S(r_0, t)$

Wir setzen voraus, daß  $\Delta S$  nur eine reine Zeitfunktion ist,

so daß man

$$f^3 \ddot{f} e^{-\frac{m_i \Delta S(t)}{3k}} = -\frac{1}{\beta r_0} \frac{\partial p_0}{\partial r_0}$$

erhält.

Diese Gleichung hat eine Lösung, wenn beide Glieder einer Konstante gleichgesetzt wurden.

$$-\frac{1}{\beta r_0} \frac{\partial p_0}{\partial r_0} = -C_0 \quad (11)$$

$$f^3 \ddot{f} e^{-\frac{m_i \Delta S}{3k}} = -C_0 \quad (12)$$

Zur weiteren Integration der Gl. (12) wird ein Potenzsatz angenommen:

$$e^{\frac{m_i \Delta S(t)}{3k}} = f^\beta(t)$$

oder

$$\frac{m_i}{3k} \dot{S} = \beta \frac{\dot{f}}{f}$$

Dieses führt zur Gleichung

$$f^{3-\beta} \ddot{f} = -C_0 \quad (13)$$

Die Bedeutung dieses Ansatzes für die Entropie wird sofort erkennbar, wenn man die Gl. (9) betrachtet. Sie lautet jetzt

$$T = T_0 f^{\beta-2} \quad (14)$$

Eliminiert man  $f$  zwischen (8) und (14), so erhält man

$$T n^{\frac{\beta-2}{3}} = c^{tc}$$

oder

$$T \rho^{\frac{\beta-2}{3}} = c^{tc}$$

und mit

$$\frac{p}{\rho} = \frac{2k}{m_i} T$$

$$\frac{p}{\rho^{\frac{5}{3}-\frac{\beta}{3}}} = c^{tc} = \frac{p_0}{\rho_0^{\frac{5}{3}-\frac{\beta}{3}}} \quad (15)$$

Jedes Teilvolumen des Plasmas hat eine Polytropen-Expansion mit dem Polytropenkoeffizienten

$$\frac{5}{3} - \frac{\beta}{3}$$

Wir integrieren jetzt die Gl.

$$f \ddot{f}^{3-\beta} = -c_0$$

Es folgt dann

$$\dot{f}^2 = \dot{f}_0^2 - \frac{2}{\beta-2} c_0 (f^{\beta-2} - 1)$$

(Der Fall  $\beta = 2$  muß getrennt betrachtet werden.)

$$t = \int_1^f \frac{df}{\sqrt{af^{\beta-2} + b}} \quad (16)$$

wobei

$$a = -\frac{2}{\beta-2} c_0 \quad (17)$$

$$b = \dot{f}_0^2 + \frac{2}{\beta-2} c_0 \quad (18)$$

Der adiabatische Fall ( $\beta = 0$ )

Die Integration von (16) liefert

$$t = \int_1^f \frac{df}{\sqrt{af^2+b}} = \int_1^f \frac{f df}{\sqrt{c_0 + (\dot{f}_0^2 - c_0) f^2}}$$

$$t = \sqrt{(1 + \dot{f}_0 t)^2 - c_0 t^2} \quad (19)$$

Der polytrope Fall  $\beta = 4$

$$t = \int_1^f \frac{df}{\sqrt{af^2+b}} = \int_1^f \frac{df}{\sqrt{-c_0 f^2 + (\dot{f}_0^2 + c_0)}}$$

Wenn  $c_0 < 0$  lautet die Lösung

$$f = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\dot{f}_0}{\sqrt{-c_0}} + 1 \right) e^{\sqrt{-c_0} t} - \left( \frac{\dot{f}_0}{\sqrt{-c_0}} - 1 \right) e^{-\sqrt{-c_0} t} \right\} \quad (20)$$

und wenn  $c_0 > 0$ , findet man

$$f = \sqrt{1 + \frac{\dot{f}_0^2}{c_0}} \cdot \sin(\sqrt{c_0} t + \varphi_0) \quad (21)$$

wobei

$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\dot{f}_0^2}{c_0}}}$$

Verlauf der Lösungen

Die Anfangsbedingungen

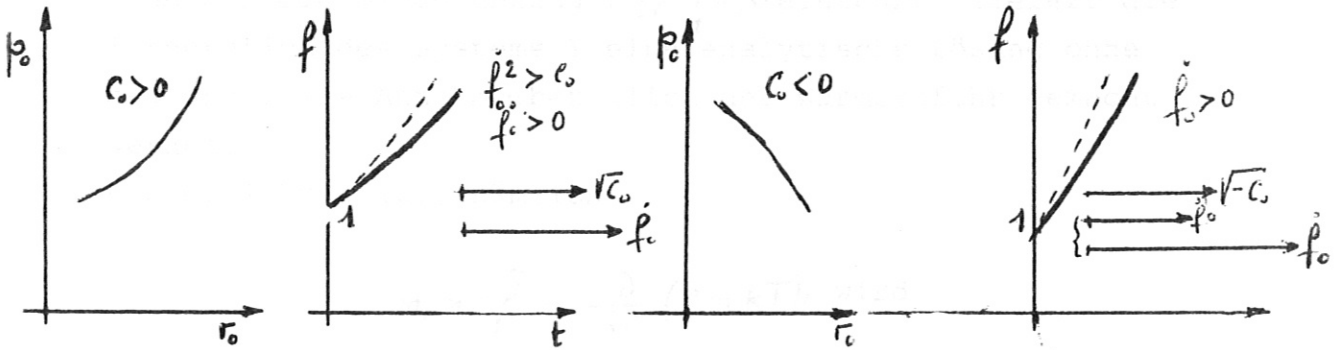
$$c_0 = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial r_0} \quad \text{und} \quad \dot{f}_0$$

bestimmen den Verlauf der Lösungen. Als Beispiel für den Verlauf der Lösungen wollen wir die Ergebnisse für den adiabatischen Fall geben. Die zu studierende Funktion lautet

$$f = \sqrt{(1 + \dot{f}_0 t)^2 - c_0 t^2} = \sqrt{(\dot{f}_0^2 - c_0) t^2 + 2\dot{f}_0 t + 1}$$

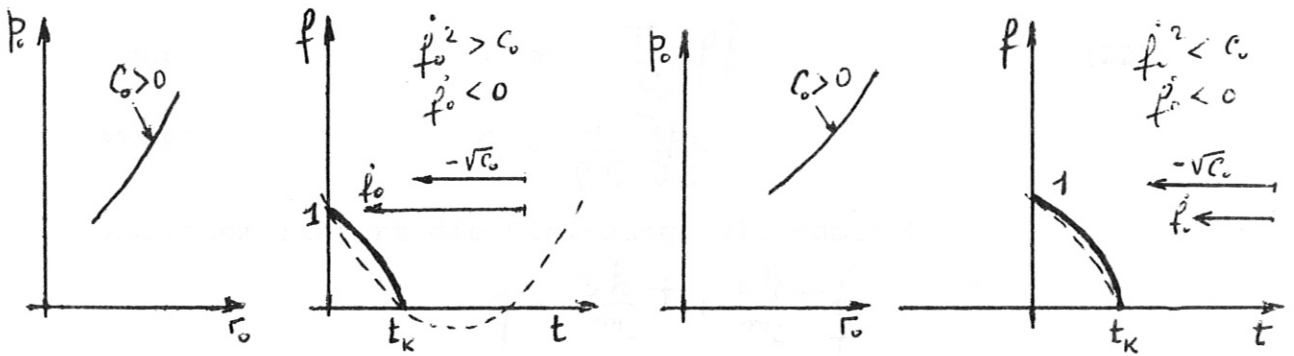


Man findet folgende Fälle:



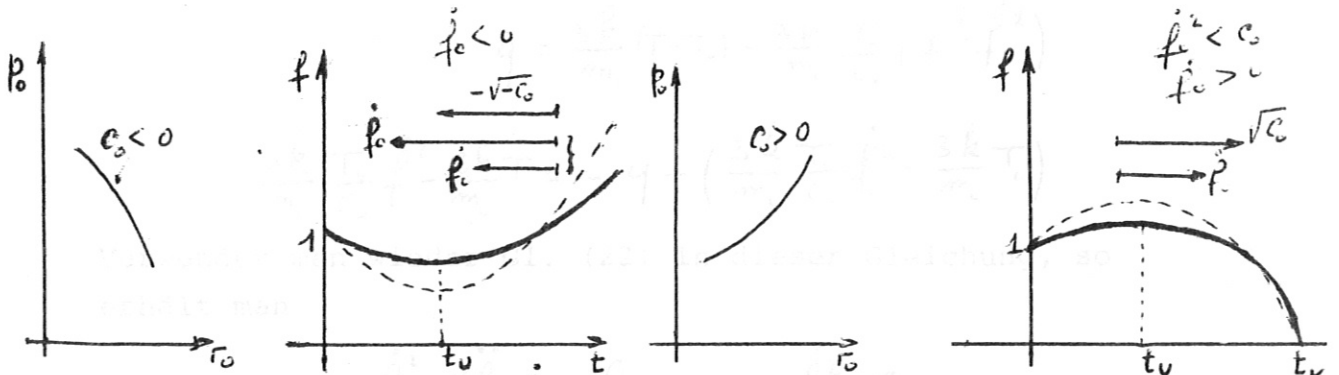
Asymptotische Geschwindigkeit

$$f_{\infty} = \sqrt{f_0^2 - c_0}$$



Kollapszeit

$$t_K = \frac{1}{\sqrt{c_0} - f_0}$$



Umkehrzeit  $t_U = \frac{f_0}{c_0 - f_0^2}$

Umkehrradius  $f_U = \sqrt{\frac{c_0}{c_0 - f_0^2}}$

Asympt. Geschwind.  $f_{\infty} =$

Umkehrzeit  $t_U = \frac{f_0}{c_0 - f_0^2}$

Umkehrradius  $f_U = \sqrt{\frac{c_0}{c_0 - f_0^2}}$

Kollapszeit  $t_K = \frac{1}{\sqrt{c_0} - f_0}$

Lösung im Falle einer homogenen Verteilung der Temperatur

Wenn man die Beschränkung  $\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_t = 0$  einführt, liefert die Integration des Systems I eine analytische Lösung ohne daß spezielle Annahmen bezüglich der Wärmezufuhr gemacht werden.

Die Gleichung (6), nämlich

$$m_i n_0 \ddot{f} = -\frac{\partial}{\partial r} (2n kT), \text{ wird}$$

$$m_i n_0 \ddot{f} = -2kT \frac{\partial n}{\partial r} = -2kT \frac{\partial n}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial r}$$

Mit

$$n = n_0 f^{-3}$$

und

$$r = r_0 f$$

erhält man

$$f \ddot{f} = -\frac{2kT}{m_i n_0 r_0} \frac{\partial n_0}{\partial r_0}$$

oder

$$T = -\frac{T_0}{C_0} f \ddot{f} \quad (22)$$

wobei

$$C_0 = \frac{1}{\rho_0 r_0} \frac{\partial p_0}{\partial r_0}$$

Außerdem liefert die Gleichung (7), nämlich

$$\dot{q} = \frac{3k}{m_i} \dot{T} + \frac{6k}{m_i} T \frac{\dot{f}}{f}$$

durch Benutzung der Gleichung (22)

$$\dot{q} = \frac{3k}{m_i} \dot{T} - \frac{6k}{m_i} \frac{T_0}{C_0} f \ddot{f}$$

und durch Integration

$$q = \frac{3k}{m_i} (T - T_0) - \frac{3k}{m_i} \frac{T_0}{C_0} (f^2 - f_0^2)$$

$$\frac{3k}{m_i} \frac{T_0}{C_0} f^2 - \frac{3k}{m_i} T = -q + \left( \frac{3k}{m_i} \frac{T_0}{C_0} f_0^2 - \frac{3k}{m_i} T_0 \right)$$

Verwendet man wieder Gl. (22) in dieser Gleichung, so erhält man

$$f^2 + f \ddot{f} = -\frac{C_0}{\frac{3k}{m_i} T} q + f_0^2 - C_0$$

Diese Gleichung lässt sich 2mal integrieren und man erhält:

$$f = \sqrt{(1 + \dot{f} t)^2 - c_0 t^2 - c_0 \int dt \int q^* dt} \quad (23)$$

wobei

$$q^* = \frac{q}{\frac{3}{2} \frac{k T_0}{m_i}} \quad (24)$$

$$c_0 = \frac{1}{\rho_0 r_0} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial r_0} \quad (25)$$

Die Lösung (23) ist die allgemeine Lösung für den Fall der Wärmezufuhr mit homöthärer Verteilung der Temperatur.

Man findet wieder die Lösung des adiabatischen Falls, nämlich die Gl. (19), wenn  $q^* = 0$  in (23) gesetzt wird.

Alle Fälle können mit der Lösung (23) studiert werden, wenn man  $q^* = q^*(t)$  als gegebene Wärmezufuhr betrachtet, außer den isothermen Fall, der einer getrennten Behandlung bedarf. Man sieht außerdem: Wenn  $c_0 > 0$  ( $\frac{\partial p_0}{\partial r_0} > 0$ ), verlangsamt die Wärmezufuhr die Expansion, wenn  $c_0 < 0$  ( $\frac{\partial p_0}{\partial r_0} < 0$ ), beschleunigt die Wärmezufuhr die Expansion.

### Der isotherme Fall

Betrachtet man wieder die Gl.

$$m_i n_0 \ddot{f} = - \frac{\partial}{\partial r} (2 n k T)$$

$$\dot{q} = \frac{3k}{m_i} \dot{T} - \frac{2kT}{m_i} \frac{\dot{n}}{n}$$

so wird aufgrund der Annahme  $T \equiv T_0$ .

$$m_i n_0 \ddot{f} = - 2kT_0 \frac{\partial n}{\partial r} \quad (26)$$

$$\dot{q} = - \frac{2kT_0}{m_i} \frac{\dot{n}}{n} \quad (27)$$

Mit  $n = n_0 f^{-3}$  und  $\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{\partial n}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial r}$  erhält man für Gl. (24)

$$f \ddot{f} = -\frac{1}{g_0 r_0} \frac{\partial p_0}{\partial r_0} = -c_0$$

Die Integration von  $f \ddot{f} = -c_0$

liefert

$$t = \int_1^f \frac{df}{\sqrt{f^2 - c_0 h f}} \quad (28)$$

Für die Berechnung der Integrale hat man die 2 Fälle zu unterscheiden:  $c_0 > 0$  und  $c_0 < 0$ .

Der Fall  $c_0 > 0$  liefert

$$t = -\frac{2}{\sqrt{c_0}} e^{\frac{f_0}{c_0}} \int_{\frac{f_0}{\sqrt{c_0}}}^{\sqrt{\frac{f_0^2}{c_0} - h f}} e^{-x^2} dx \quad (29)$$

Der Fall  $c_0 < 0$  liefert

$$t = \frac{2}{\sqrt{-c_0}} e^{\frac{f_0}{c_0}} \int_{\frac{f_0}{\sqrt{-c_0}}}^{\sqrt{\frac{f_0^2}{c_0} + h f}} e^{x^2} dx \quad (30)$$

Außerdem ermöglicht es die Bedingung  $T = T_0$ , (26) zu integrieren. Man findet:

$$n_0 = n_0(0) e^{\frac{1}{2} \frac{r_0^2}{c_0} \frac{m \cdot c_0}{2 k T_0}} \quad (31)$$

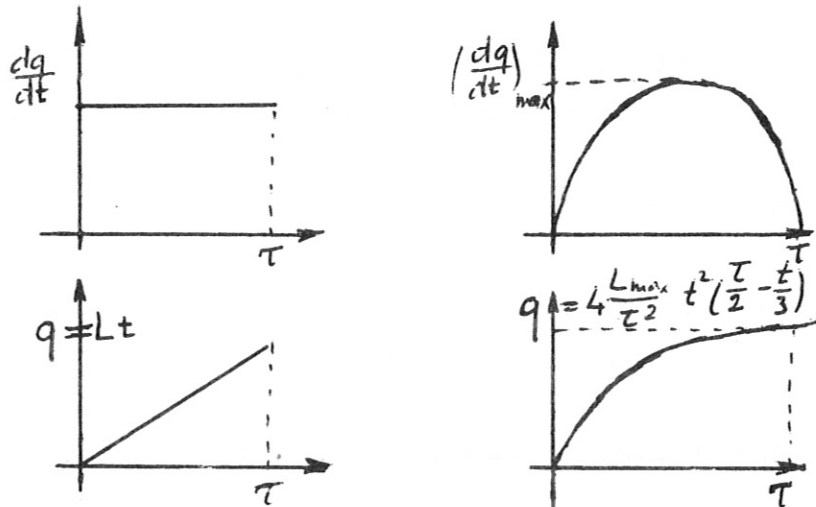
Über die Integrale  $\int_0^\tau dt \int_0^t q^* dt$

Diese Integrale, oder mit Weglassen des Faktors die Integrale

$$\int_0^\tau dt \int_0^t q^* dt,$$

wobei  $q$  die Wärmezufuhr pro Gramm darstellt, werden in 2 Fällen berechnet.

Die 2 Fälle sind wie folgt:



Man erhält folgende Tabelle:

$\frac{dq}{dt}$	$L = \text{konst.}$	$4 \frac{L_{\max}}{\tau^2} t (\tau - t)$
$q(t)$	$L \cdot t$	$4 \frac{L_{\max}}{\tau^2} t^2 \left(\frac{\tau}{2} - \frac{t}{3}\right)$
$\int_0^t q(t) dt$	$L \frac{t^2}{2}$	$4 \frac{L_{\max}}{\tau^2} t^3 \left(\frac{\tau}{2 \cdot 3} - \frac{t}{3 \cdot 4}\right)$
$\int_0^\tau dt \int_0^t q(t) dt$	$\frac{1}{6} L \tau^3$	$4 \frac{L_{\max}}{\tau^2} \tau^5 \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}\right) = \frac{1}{10} L_{\max} \tau^3$

Wir vergleichen die Ergebnisse der Integration, nämlich  $\frac{1}{6} L \tau^3$  (für eine lineare Wärmezufuhr) mit  $\frac{1}{10} L_{\max} \tau^3$  (für eine Funktion dritten Grades der Wärmezufuhr) indem wir zusätzlich setzen, daß am Ende des Prozesses gleiche Energiezufuhr erreicht wird, d.h. unter der Annahme (L bezeichnet die Wärmezufuhr rate)

$$L \tau = 4 \frac{L_{\max}}{\tau^2} \tau^3 \left(\frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{3}\right)$$

Dieses erfordert  $L_{\max} = \frac{3}{2} L$

Mit diesem Wert von  $L_{\max}$  wird der Ausdruck  $\frac{1}{10} L_{\max} \tau^3$  gleich  $\frac{3}{20} L \tau^3$ .

Bei gleicher Energiezufuhr unterscheiden sich die Ergebnisse sehr wenig, nämlich

$\frac{1}{6} L \tau^3$  mit linearer Funktion der Wärmezufuhr

$\frac{3}{20} L \tau^3$  mit einer Funktion dritten Grades der Wärmezufuhr.

Der zeitliche Verlauf der Wärmezufuhr beeinflusst ziemlich wenig die Ergebnisse.

#### Ergebnisse mit linearer Funktion $q = L \cdot t$

Führt man die Funktion  $\frac{1}{6} L t^3$  anstatt der Integrale in der Formel (23), so erhält man

$$f = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{6} \frac{q}{kT_e}\right)^2 - C_0 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{q}{\frac{3}{2} \frac{kT_e}{m_i}}\right) t^2} \quad (32)$$

und die Ergebnisse der Diskussion der Fälle, die man bei dem adiabatischen Fall fand, bleiben als Fälle der Wärmezufuhr bestehen.

Der Koeffizient  $C_0$  wird nun durch den Koeffizienten

$$C_0 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{q}{\frac{3}{2} \frac{kT_e}{m_i}}\right) = C_0 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{L \cdot t}{\frac{3}{2} \frac{kT_e}{m_i}}\right)$$

ersetzt.

Eine ausführliche Liste von Referenzen findet man z.B. in dem Bericht von P. Mulser, R. Sigel und S. Witkowski: Plasma production by lasers, Physics Letters, Vol. 6c, No. 3, Januar 1975

Literatur

- [1] M. Salvat: Modell für die Aufheizung fester Materie mit Lasern, Max-Planck-Inst. für Plasmaphysik, Report No. 4/56, Jan. 1975
  
- [2] L.L. Lengyel: Applicability of the uniformly expanding universe model to laser produced plasmas. Z. Naturforsch. 30a, 1577-1580 (1975)