

**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**  
**GARCHING BEI MÜNCHEN**

Modell für die Aufheizung  
fester Materie mit Lasern

Model for laser heating of  
solid targets

M. Salvat

IPP IV/56

Januar 1975

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem  
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die  
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP IV/56

Modell für die Aufheizung  
fester Materie mit Lasern

Model for laser heating of  
solid targets

M. Salvat

Januar 1975

Abstract

Consideration is given to a one dimensional model for laser heating solid pellets with the aid of high energy lasers. Expressions are derived for the state parameters, the shock-wave and erosion front velocities as function of the laser lightwave length.

Die Heizung fester Materie mit Hilfe von Hochleistungslasern wird mit einem eindimensionalen Modell (Deflagrations-Modell) behandelt. Die Zustandsgröße hinter der Stoßwellenfront sowie die Geschwindigkeiten der Fronten und der Materie werden berechnet. Dieses ermöglicht den Vergleich mit den Gebieten, in denen die Materie geschockt und erodiert wird. Die Menge sowie die Energie der geschockten Materie wird mit den entsprechenden Größen der erodierten Materie verglichen.

Für die Füllung von Plasmaeinschluß-Apparaten (z.B. Stellaratoren) bietet die Anwendung von Hochleistungslasern die Möglichkeit, ein vollionisiertes Plasma ohne Berührung mit den Wänden produzieren zu können.

Experimente mit dem Ziel, Stellaratoren mit Hilfe von lasererzeugten Plasmen zu füllen, sind im IPP Garching in Vorbereitung (Projekt Laser-Pellet-Quelle).

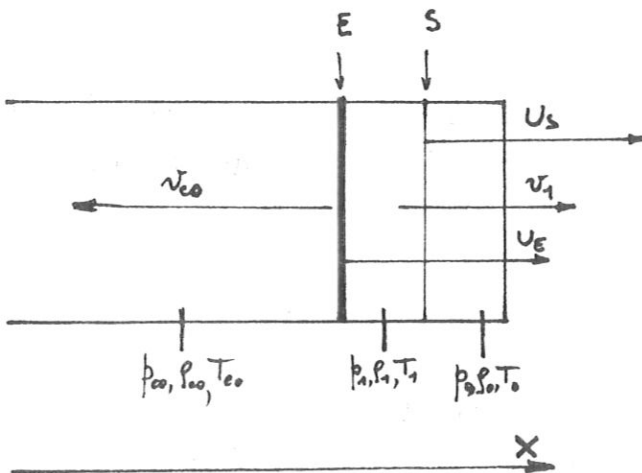
Als Targets werden Pellets aus festen Wasserstoff-Isotopen von einem Durchmesser von  $300 \mu$  angewendet.

In dem Prozeß der raschen Ionisierung der Materie durch das Laserlicht spielt die Wellenlänge der Strahlung eine Rolle, die wir mit Hilfe eines eindimensionalen Modells (Deflagrations-Modell) untersucht haben.

### I. Das Erosions-Modell (Deflagrationsmodell)

#### Ebene Behandlung der Aufheizung mit Stoßwellen

In dem Modell wird angenommen, daß die Materie nur entlang einer Achse expandieren kann (x-Achse des Bildes). Die Energie wird in der Erosionszone E deponiert. Eine Erosionsfront breitet sich aus mit der Geschwindigkeit  $U_E$ , während die aufgeheizte Materie mit der Geschwindigkeit  $v_{CO}$  (c.o. Geschwindigkeit) wegfliegt. Der Impuls der aufgeheizten Materie verursacht eine Stoßwelle S, deren Stoßfront sich mit der Geschwindigkeit  $U_S$  fortpflanzt.



Vor der Stoßfront herrschen die Bedingungen  $p_0, \rho_0, T_0$  der kalten Materie.

Hinter der Stoßfront hat die Materie die Geschwindigkeit  $v_1$  und der Materienzustand wird durch  $p_1, \rho_1, T_1$  dargestellt.

Hinter der Erosionsfront sind die Zustandswerte  $p_{co}, \rho_{co}, T_{co}$ .

Ziel dieser Arbeit ist, die Zustandswerte hinter der Stoßfront und hinter der Erosionsfront analytisch zu bestimmen. Dabei soll der Einfluß der Wellenlänge über den Aufheizungsprozeß hervorgehoben werden.

Zur Lösung des Problems hat man 8 Gleichungen zur Verfügung:

Die 3 Gleichungen für die Beschreibung der Stoßwelle, die 3 Gleichungen für die Beschreibung der Erosionswelle und 2 Zustandsgleichungen, nämlich

I	II	III
$\rho_0 U_3 = \rho_1 (U_3 - v_1) \quad (1)$	$\rho_1 (U_E - v_1) = \rho_{co} (U_E - v_{co}) \quad (1)$	$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{b}{m_i} T_1 \quad (1)$
$\rho_0 U_3^2 + p_0 = \rho_1 (U_3 - v_1)^2 + p_1 \quad (2)$	$\rho_1 (U_E - v_1)^2 + p_1 = \rho_{co} (U_E - v_{co})^2 + p_{co} \quad (2)$	$\frac{p_{co}}{\rho_{co}} = \frac{b}{m_i} T_{co} \quad (2)$
$\frac{1}{2} U_3^2 + h_0 = \frac{1}{2} (U_3 - v_1)^2 + h_1 \quad (3)$	$\frac{1}{2} (U_E - v_1)^2 + h_1 + q = \frac{1}{2} (U_E - v_{co})^2 + h_{co} \quad (3)$	

Bekannt sind:

$$p_0, \rho_0, T_0 \quad \text{und} \quad \rho_{co} \left( = \frac{\rho_0}{50 \lambda^2} \right) \quad (\text{mit } \lambda = 1 \text{ für Nd-Glaslicht})$$

Unbekannt sind:

$$p_1, h_1, T_1 \quad ; \quad p_{co}, T_{co} \quad ; \quad U_3, U_E, v_1, v_{co}$$

Die Wärmezufuhr pro Gramm  $q$  ist ein Parameter.

Es sind 9 Unbekannte und 8 Gleichungen. Wir müssen eine zusätzliche Beziehung addieren, damit das System die Unbekannten als Funktionen von  $q$  allein liefert. Wir werden später diese zusätzliche Beziehung untersuchen. Es ist bekannt, daß die Lösung der beiden Systeme wie folgt lautet:

Lösung I:

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{1 + \mu y}{\mu + y} \quad (4)$$

$$U_3^2 = c_0^2 \frac{\mu + y}{\mu + 1} \quad (5)$$

$$v_1^2 = U_3^2 (1 - \mu)^2 \frac{(y - 1)^2}{(y + \mu)^2} \quad (6)$$

oder 
$$v_1^2 = c_0^2 \frac{(1 - \mu)^2}{1 + \mu} \frac{(y - 1)^2}{y + \mu} \quad (7)$$

mit  $y = \frac{p_1}{p_0}$  Stärke der Stoßwelle

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$$

$$\mu = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

Lösung II:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{1 + \mu y' + q^*}{\mu + y'} \quad (4)$$

$$(u_E - u_1)^2 = c_1^2 \frac{(y' - 1)(y' + \mu)}{(\mu + 1) \left\{ (y' - 1) - \frac{q^*}{1 - \mu} \right\}} \quad (5)$$

$$(v_a - u_1)^2 = (u_E - u_1)^2 (1 - \mu)^2 \frac{\left\{ (y' - 1) - \frac{q^*}{1 - \mu} \right\}^2}{(y' + \mu)^2} \quad (6)$$

$$(v_a - u_1)^2 = c_1^2 \frac{(1 - \mu)^2}{1 + \mu} \frac{(y' - 1) \left\{ (y' - 1) - \frac{q^*}{1 - \mu} \right\}}{y' + \mu} \quad (7)$$

mit  $y' = \frac{p_1}{p_1}$

$$c_1^2 = \gamma \frac{p_1}{\rho_1}$$

$$q^* = \frac{2\mu q}{\frac{p_1}{\rho_1}}$$

$$= \frac{2\mu q}{\frac{p_0}{\rho_0} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{p_0}{\rho_1}} = \frac{2\mu q'}{xy}$$

wobei  $q' = \frac{q}{\frac{p_0}{\rho_0}}$ ,  $x = \frac{p_0}{p_1} = \frac{1 + \mu y}{\mu + y}$

Zur vollständigen Lösung des Problems fügen wir die Bedingung hinzu, daß die Verbrennung am Jouquet-Punkt stattfindet.

Dieses wird durch die Beziehung  $v_{c_0} + c_{c_0} = U_E$  ausgedrückt.

Zur Bestimmung der Koordinaten des J-Punktes kann man folgendermaßen verfahren:

Aus der Gleichung L.II(5) kann man

$$y' = f\left\{\frac{u_E - u_2}{c_1}, q^*\right\} = f(M_1, q^*) \quad \text{ausdrücken}$$

und mit Hilfe von Gl. L.II(4) findet man auch

$$x' = g(M_1, q^*)$$

Diese Rechnungen führen zu dem klassischen Ergebnis

$$x' = 1 + \frac{1}{2}(1-\mu)\left(\frac{1}{M_1^2} - 1\right) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q^*}{(1-\mu^2)\left(M_1 - \frac{1}{M_1}\right)^2}} \right\} \quad (8)$$

$$y' = 1 + \frac{1}{2}(1+\mu)\left(M_1^2 - 1\right) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q^*}{(1-\mu^2)\left(M_1 - \frac{1}{M_1}\right)^2}} \right\} \quad (9)$$

Der J-Punkt gehört zu der Lösung, bei der die Wurzel gleich Null gesetzt wird:

$$1 = \frac{4q^*}{(1-\mu^2)\left(M_1 - \frac{1}{M_1}\right)^2} \quad (10)$$

Damit erhält man

$$x' = 1 + \frac{1}{2}(1-\mu)\left(\frac{1}{M_1^2} - 1\right) \quad (11)$$

$$y' = 1 + \frac{1}{2}(1+\mu)\left(M_1^2 - 1\right) \quad (12)$$

Setzt man in diesen Ergebnissen die Bedingung (10), so erhält man

$$x' = 1 + \frac{q^*}{1+\mu} \left\{ 1 \mp \sqrt{1 + \frac{1-\mu^2}{q^*}} \right\} \quad (13)$$

(Das +-Zeichen gehört zur Verbrennung am J-Punkt.)

$$y' = 1 + \frac{q^*}{1-\mu} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1-\mu^2}{q^*}} \right\} \quad (14)$$

(Das - Zeichen gehört zur Verbrennung am J-Punkt.)

Einen 2. Ausdruck für  $y'$  erhält man durch Kombinieren von L.I(4) und L.II(4). Multipliziert man beide Gleichungen, so erhält man

$$p' = \frac{p_0}{p_{\infty}} = x x' = x \frac{1 + \mu y' + q^*}{\mu + y'} \quad (15)$$

oder

$$\frac{p'}{x} = \frac{1 + \mu y' + q^*}{\mu + y'} \quad (16)$$

oder

$$y' = \frac{1 - \mu \frac{p'}{x} + q^*}{\frac{p'}{x} - \mu} \quad (17)$$

Wir vergleichen die Ergebnisse (14) und (17)

$$\frac{1 - \mu \frac{p'}{x} + q^*}{\frac{p'}{x} - \mu} = 1 + \frac{q^*}{1 - \mu} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{1 - \mu^2}{q^*}} \right\}$$

und erhalten

$$q^* = (1 + \mu) \frac{\left(\frac{p'}{x} - 1\right)^2}{\left[\left(\frac{p'}{x} - 1\right) + \left(\frac{p'}{x} - \mu\right)\right]} \quad (18)$$

oder mit

$$q^* = \frac{2\mu q'}{x y}$$

$$x y = \frac{2\mu}{1 + \mu} \frac{\left[\left(\frac{p'}{x} - 1\right) + \left(\frac{p'}{x} - \mu\right)\right]}{\left(\frac{p'}{x} - 1\right)^2} q' \quad (19)$$

(mit  $q' = \frac{q}{\frac{p_0}{p_0}}$ )

Die Gl. (19) (mit  $y = \frac{1 - \mu x}{x - \mu}$ ),

$$\text{d.h.:} \quad x \frac{1 - \mu x}{x - \mu} = \frac{2\mu q'}{1 + \mu} \frac{\left[\left(\frac{p'}{x} - 1\right) + \left(\frac{p'}{x} - \mu\right)\right]}{\left(\frac{p'}{x} - 1\right)^2} \quad (20)$$

ist eine Gleichung zur Bestimmung von

$$x = f(p', q')$$

Sie ist eine Gleichung dritten Grades in die Unbekannte  $x$ .  
 Man kann ein einfaches Ergebnis erhalten, wenn  $x - \mu$  genug  
 klein wird. Man findet

$$\frac{x}{\mu} = 1 + \frac{1-\mu^2}{2} \frac{(1+\mu) \left(\frac{\rho'}{x} - 1\right)^2}{\left[\left(\frac{\rho'}{x} - 1\right) + \left(\frac{\rho'}{x} - \mu\right)\right]} \quad (21)$$

mit  $\alpha = \frac{2\mu q'}{1+\mu}$

Ferner führt man das Ergebnis (18) in der Gleichung (17) ein,  
 so findet man

$$y' = 1 - \mu \frac{\frac{\rho'}{x}}{\left[\left(\frac{\rho'}{x} - 1\right) + \left(\frac{\rho'}{x} - \mu\right)\right]} = (1 - \mu) \frac{x'}{\left[(x' - 1) + (x' - \mu)\right]} \quad (22)$$

Damit und mit Gl. (20) kann man die Größe  $(U_E - v_1)^2$ ,  $(v_{CO} - v_1)^2$ ,  
 $E_{CO}$ ,  $h_{CO}$ , berechnen. Diese Größen (siehe L.II(5) und L.II(7))  
 enthalten die Ausdrücke  $y' - 1$ ,  $y' - \mu$ ,  $y' - 1 - \frac{q^*}{1 - \mu}$ .

Man findet

$$y' - 1 = - (1 + \mu) \frac{\left(\frac{\rho'}{x} - 1\right)}{\left[\left(\frac{\rho'}{x} - 1\right) + \left(\frac{\rho'}{x} - \mu\right)\right]} \quad (23)$$

$$y' + \mu = (1 + \mu) \frac{\left(\frac{\rho'}{x} - \mu\right)}{\left[\left(\frac{\rho'}{x} - 1\right) + \left(\frac{\rho'}{x} - \mu\right)\right]} \quad (24)$$

$$y' - 1 - \frac{q^*}{1 - \mu} = - \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\left(\frac{\rho'}{x} - 1\right) \left(\frac{\rho'}{x} - \mu\right)}{\left[\left(\frac{\rho'}{x} - 1\right) + \left(\frac{\rho'}{x} - \mu\right)\right]} \quad (25)$$

Mit Hilfe von (23), (24) und (25) erhält man für die zur Ver-  
 brennungszone gehörende Größe

$$(U_E - v_1)^2 = \frac{2\mu q}{\left(\frac{\rho'}{x} - 1\right)^2} \quad (26)$$

$$(v_{CO} - v_1)^2 = 2\mu q \quad (27)$$

und weiter

$$T_{CO} = \rho' y y' T_0 = \frac{\rho'}{x} \cdot x y \cdot y' T_0$$



und folglich die innere Energie pro Gramm

$$\varepsilon_{co} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{k}{m_i} T_{co} = \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \frac{\left(\frac{\rho'}{x}\right)^2}{\left(\frac{\rho'}{x}-1\right)^2} \cdot 9 \quad (28)$$

und die Enthalpie pro Gramm

$$h_{co} = (1-\mu) \frac{\left(\frac{\rho'}{x}\right)^2}{\left(\frac{\rho'}{x}-1\right)^2} \cdot 9 \quad (29)$$

Für die zum Stoßwellenbereich gehörende Größe geben wir die Ergebnisse für starke Stoßwellen; man findet aus (19), wenn  $y$  genug groß wird, d.h. wenn  $x \approx \mu$  wird:

$$y = \frac{2}{1-\mu} \frac{\left[\left(\frac{\rho'}{x}-1\right) + \left(\frac{\rho'}{x}-\mu\right)\right]}{\left(\frac{\rho'}{x}-1\right)^2} \cdot 9 \quad (30)$$

Damit kann man die Ausdrücke L.I(5) und L.I(6) berechnen:

$$U_s^2 = c_0^2 \frac{y}{1+\mu} = \frac{2}{1-\mu^2} \frac{\left[\left(\frac{\rho'}{x}-1\right) + \left(\frac{\rho'}{x}-\mu\right)\right]}{\left(\frac{\rho'}{x}-1\right)^2} \cdot 9 \quad (31)$$

$$v_1^2 = U_s^2 (1-\mu)^2 = 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\left[\left(\frac{\rho'}{x}-1\right) + \left(\frac{\rho'}{x}-\mu\right)\right]}{\left(\frac{\rho'}{x}-1\right)^2} \cdot 9 \quad (32)$$

und weiter unter Berücksichtigung von

$$T_1 = xy T_0$$

kann man die innere Energie pro Gramm hinter der Stoßwelle ausdrücken:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\gamma-1} \frac{k}{m_i} T_1 = \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\left[\left(\frac{\rho'}{x}-1\right) + \left(\frac{\rho'}{x}-\mu\right)\right]}{\left(\frac{\rho'}{x}-1\right)^2} \cdot 9 \quad (33)$$

Man sieht sofort, daß

$$\frac{1}{2} v_1^2 (x=\mu) = \varepsilon_1 (x=\mu)$$

Exakte Lösung	Lösung mit $y$ groß $x = \mu + \epsilon$ ( $\epsilon$ klein)	Lösung mit $y$ groß $x = \mu$ $\frac{p'}{\mu}$ groß
$x \frac{1-\mu x}{x-\mu} = \frac{2\mu q'}{1+\mu} \frac{[(\frac{p'}{\mu}-1)+(\frac{p'}{\mu}-\mu)]}{(\frac{p'}{\mu}-1)^2}$	$\frac{x}{\mu} = 1 + \frac{1-\mu^2}{\frac{2\mu q'}{1+\mu}} \frac{(\frac{p'}{\mu}-1)^2}{[(\frac{p'}{\mu}-1)+(\frac{p'}{\mu}-\mu)]}$	$x = \mu \quad (34)$
<p>Gl. dritten Grades zur Bestimmung von <math>x</math>.</p>	$y = \frac{[(\frac{p'}{\mu}-1)+(\frac{p'}{\mu}-\mu)]}{(\frac{p'}{\mu}-1)^2} \cdot \frac{2q'}{1+\mu}$	$y = \frac{2}{1+\mu} \cdot \frac{2\mu q'}{p'} \quad (35)$
$y = \frac{1-\mu x}{x-\mu} \quad q' = \frac{q}{\frac{p_0}{p_1}}$		
$U_3^2 = c_0^2 \frac{\mu+y}{\mu+1}$	$U_3^2 = \frac{2q}{1-\mu^2} \frac{[(\frac{p'}{\mu}-1)+(\frac{p'}{\mu}-\mu)]}{(\frac{p'}{\mu}-1)^2}$	$U_3^2 = \frac{2}{1-\mu^2} \frac{2\mu q}{p'} \quad (36)$
$v_1^2 = U_3^2 (1-x)^2$	$v_1^2 = U_3^2 (1-\mu)^2$	$v_1^2 = 2 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{2\mu q}{p'} \quad (37)$
$T_1 = xy T_0$ $\epsilon_1 = \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{[(\frac{p'}{\mu}-1)+(\frac{p'}{\mu}-\mu)]}{(\frac{p'}{\mu}-1)^2}$	$T_1 = \mu y T_0$ $\epsilon_1 = \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{[(\frac{p'}{\mu}-1)+(\frac{p'}{\mu}-\mu)]}{(\frac{p'}{\mu}-1)^2} \cdot q$	$T_1 = \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{2\mu q'}{p'} \cdot T_0$ $\epsilon_1 = \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{2\mu q}{p'} \quad (38)$
$y' = (1-\mu) \frac{\frac{p'}{\mu}}{[(\frac{p'}{\mu}-1)+(\frac{p'}{\mu}-\mu)]}$	$y' = (1-\mu) \frac{\frac{p'}{\mu}}{[(\frac{p'}{\mu}-1)+(\frac{p'}{\mu}-\mu)]}$	$y' = \frac{1-\mu}{2} \quad (39)$
$U_E = \frac{\sqrt{2\mu q}}{(\frac{p'}{\mu}-1)} + v_1$	$U_E = \frac{\sqrt{2\mu q}}{(\frac{p'}{\mu}-1)} + v_1$	$U_E = \frac{\sqrt{2\mu q}}{\frac{p'}{\mu}-1} + v_1 \quad (40)$
$ v_{co}  = \sqrt{2\mu q} - v_1$	$ v_{co}  = \sqrt{2\mu q} - v_1$	$ v_{co}  = \sqrt{2\mu q} - v_1 \quad (41)$
$T_{co} = p' y y' T_0$ $\epsilon_{co} = \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \frac{(\frac{p'}{\mu})^2}{(\frac{p'}{\mu}-1)^2} \cdot q$	$T_{co} = \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{(\frac{p'}{\mu})^2}{(\frac{p'}{\mu}-1)^2} \cdot 2\mu q' \cdot T_0$ $\epsilon_{co} = \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \frac{(\frac{p'}{\mu})^2}{(\frac{p'}{\mu}-1)^2} \cdot q$	$T_{co} = \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot 2\mu q' \cdot T_0 \quad (42)$
$h_{co} = (1-\mu) \frac{(\frac{p'}{\mu})^2}{(\frac{p'}{\mu}-1)^2} \cdot q$	$h_{co} = (1-\mu) \frac{(\frac{p'}{\mu})^2}{(\frac{p'}{\mu}-1)^2} \cdot q$	$\epsilon_{co} = \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu} \cdot q \quad (43)$
		$h_{co} = (1-\mu) \cdot q \quad (44)$

$$x = \frac{p_0}{p_1}, \quad y = \frac{p_1}{p_0}, \quad x' = \frac{p_1}{p_{co}}, \quad y' = \frac{p_{co}}{p_1}, \quad p' = \frac{p_0}{p_{co}} = 50 \lambda^2$$

Die erhaltenen Ergebnisse werden somit mit Hilfe der Parameter  $q$  und  $g'$  ausgedrückt.

Die Formeln geben eindeutig den Einfluß der Wellenlänge (durch  $g' = g\lambda^2$ ) auf die Zustandsgrößen wie auf die Geschwindigkeiten wieder.

Was den Parameter  $q$  anbelangt, ist es zweckmäßig, statt der Wärme pro Grammdie Bestrahlungsstärke  $\phi$  ( $\frac{\text{Energie}}{\text{Fläche-Zeit}}$ ) des Lasers einzuführen. Dieser Punkt wird im folgenden behandelt unter der Rubrik 'Energiebilanz'.

Eine andere Frage ist die Massenbilanz; damit ist das Verhältnis zwischen der hinter der Verbrennungsfront "erodierten" Massen und der zwischen Stoßwellen und Verbrennungsfront "geschockten" Massen gemeint. Diese Massenbilanz wird zunächst untersucht.

### Massenbilanz

Wir vergleichen:  $\rho_{co}(|v_{co}| + U_E)$  und  $\rho_1(U_S - U_E)$

wobei

$$|v_{co}| = \sqrt{2\mu q} - v_1$$

$$U_E = \frac{\sqrt{2\mu q}}{\left(\frac{g'}{f} - 1\right)} + v_1$$

$$U_S = \frac{\sqrt{2\mu q}}{1 - \mu^2} \frac{\left[\sqrt{\left(\frac{g'}{f} - 1\right) + \left(\frac{g'}{f} - \mu\right)}\right]}{\left(\frac{g'}{f} - 1\right)}$$

und

$$v_1 = (1 - \mu) U_S$$

so daß

$$|v_{co}| + U_E = \sqrt{2\mu q} + \frac{\sqrt{2\mu q}}{\left(\frac{g'}{f} - 1\right)}$$

$$U_S - U_E = U_S - \frac{\sqrt{2\mu q}}{\left(\frac{g'}{f} - 1\right)} - (1 - \mu) U_S$$

$$U_S - U_E = \mu U_S - \frac{\sqrt{2\mu q}}{\left(\frac{g'}{f} - 1\right)}$$

Das Verhältnis zwischen erodierter und geschockter Materie wird dann:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{co} (v_{co} + u_E)}{\rho_1 (u_S - u_E)} &= \frac{\rho_{co}}{\rho_1} \frac{\sqrt{2\mu g} + \frac{\sqrt{2\mu g}}{(\frac{\rho'}{\rho} - 1)}}{\mu \sqrt{1-\mu^2} \frac{\sqrt{(\frac{\rho'}{\rho} - 1) + (\frac{\rho'}{\rho} - \mu)}}{(\frac{\rho'}{\rho} - 1)} - \frac{\sqrt{2\mu g}}{(\frac{\rho'}{\rho} - 1)}} \\ &= \frac{\rho_{co}}{\rho_1} \frac{(\frac{\rho'}{\rho} - 1)\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu}}{\frac{\mu}{1-\mu^2} \sqrt{(\frac{\rho'}{\rho} - 1) + (\frac{\rho'}{\rho} - \mu)} - \sqrt{\mu}} \\ &= \frac{\rho_{co}}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{\frac{\rho'}{\rho}}{\sqrt{\frac{\mu}{1-\mu^2} \sqrt{(\frac{\rho'}{\rho} - 1) + (\frac{\rho'}{\rho} - \mu)} - 1}} \end{aligned}$$

$$A = \frac{\rho_{co} c_{co}}{\rho_1 (u_S - u_E)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{1-\mu^2} \sqrt{(\frac{\rho'}{\rho} - 1) + (\frac{\rho'}{\rho} - \mu)} - 1}} \quad (45)$$

Ferner fragen wir, bei welcher Wellenlänge so viel Materie erodiert wie geschockt wird. Es muß gelten:

$$\sqrt{\frac{\mu}{1-\mu^2} \left[ \left( \frac{\rho'}{\rho} - 1 \right) + \left( \frac{\rho'}{\rho} - \mu \right) \right]} - 1 = 1$$

$$\frac{\mu}{1-\mu^2} \left[ \left( \frac{\rho'}{\rho} - 1 \right) + \left( \frac{\rho'}{\rho} - \mu \right) \right] = 4$$

$$2\rho' = 4 + \mu - 3\mu^2$$

$$\rho' \approx 2$$

$$\sqrt{0} \lambda^2 \approx 2$$

$$\lambda \approx \frac{1}{5} \text{ Mikron}$$

Im Rahmen dieses eindimensionalen Modells findet man dann, daß für eine Wellenlänge von  $0,2 \mu$  soviel Materie erodiert wie geschockt wird.

Der Verlauf von  $A(\lambda)$  wird angegeben (Bild 1)

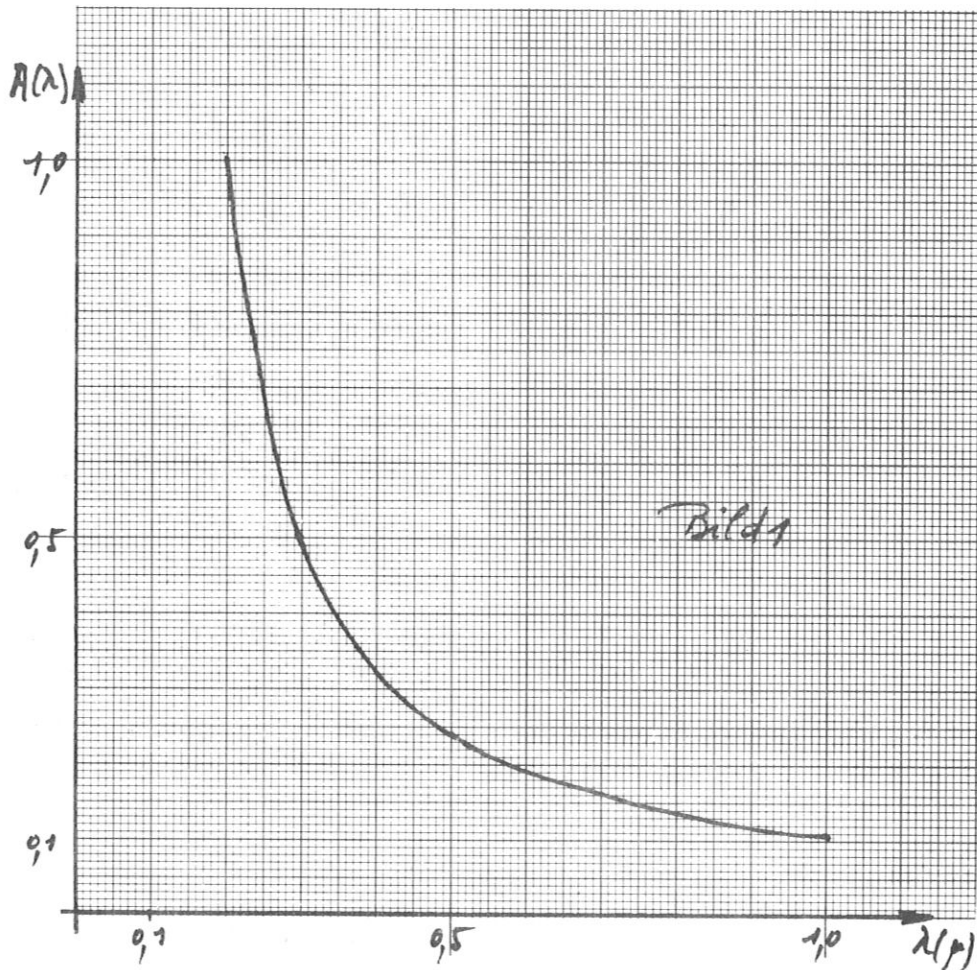
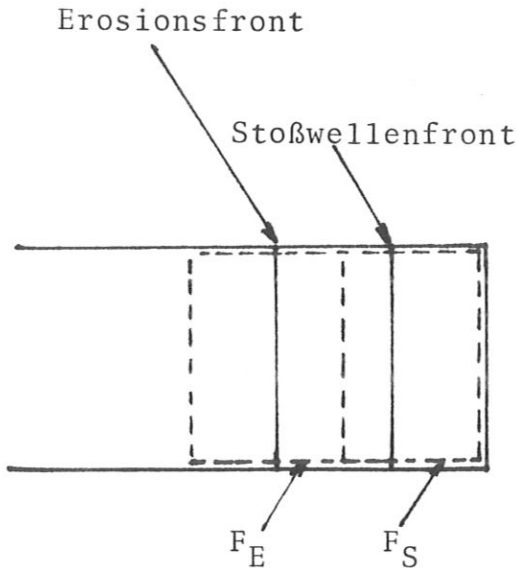


Bild 1: Verhältnis zwischen erodierter Masse und geschockter Masse als Funktion von  $\lambda$ .

### Energiebilanz

Wir untersuchen jetzt die Energiebilanz mit dem Ziel, die in der erodierten Materie enthaltene Energie mit der in der geschockten Materie enthaltenen Energie zu vergleichen.

Dieses geschieht wie folgt: Wir zeichnen eine Kontrollfläche  $F_s$ , in der sich die Stoßwellenfront bewegt, und eine anliegende Kontrollfläche  $F_e$ , in der sich die Erosionsfront bewegt, und schreiben für jede Kontrollfläche die Energiebilanz.



Für die Kontrollfläche  $F_s$  kann man folgende Bilanz herstellen:

Arbeit der äußeren Kräfte:

$$p_1 v_1 - p_0 v_0$$

Leistungsfluß:

$$p_1 v_1 \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1 \right) - p_0 v_0 \left( \frac{1}{2} v_0^2 + \varepsilon_0 \right)$$

Interne Energieänderung:

$$p_1 u_s \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1 \right) - p_0 u_s \left( \frac{1}{2} v_0^2 + \varepsilon_0 \right)$$

Dies gibt die gesamte Bilanz:

$$p_1 v_1 + p_1 (v_1 - u_s) \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1 \right) = p_0 v_0 + p_0 (v_0 - u_s) \left( \frac{1}{2} v_0^2 + \varepsilon_0 \right)$$

Man kann zeigen, daß dieses Ergebnis eine Folge der Erhaltungsgleichungen I (1), (2) und (3) ist.

Man findet nämlich, daß ein Ausdruck wie

$$p v + p (v - u_s) \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right)$$

eine Kombination der Ausdrücke

$$p (v - u_s), \quad p + p (v - u_s)^2, \quad \frac{1}{2} (v - u_s)^2 + \varepsilon$$

ist, und zwar:

$$p v + p (v - u_s) \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) = p (v - u_s) \left[ \frac{1}{2} (v - u_s)^2 + \varepsilon \right] + u_s \left[ p + p (v - u_s)^2 \right] + \frac{1}{2} u_s^2 + p (v - u_s)$$

Die hergestellte Bilanz (Formel 146) stimmt mit den Erhaltungssätzen überein.

Ähnlich lauten die Teilbilanzen für die Kontrollfläche  $F_e$ :

Arbeit der äußeren Kräfte:

$$-p_1 v_1 + p_{\infty} v_{\infty} \quad v_{\infty} < 0$$

Leistungsfluß:

$$-\left(\frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1\right) p_1 v_1 + \left(\frac{1}{2} v_{\infty}^2 + \epsilon_{\infty}\right) p_{\infty} v_{\infty} + \phi$$

Interne Änderungen:

$$-p_1 U_E \left(\frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1\right) + p_{\infty} U_E \left(\frac{1}{2} v_{\infty}^2 + \epsilon_{\infty}\right)$$

Dieses gibt die gesamte Bilanz für die Kontrollfläche  $F_e$ :

$$\phi + p_{\infty} v_{\infty} + p_{\infty} v_{\infty} \left(\frac{1}{2} v_{\infty}^2 + \epsilon_{\infty}\right) - p_1 U_E \left(\frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1\right) = p_1 v_1 + p_1 v_1 \left(\frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1\right) - p_1 U_E \left(\frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1\right)$$

Mit der oben erwähnten Umformung des Ausdruckes  $p v + p(v-U) \left(\frac{1}{2} v^2 + \epsilon\right)$  kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \phi + p_{\infty} (v_{\infty} - U_E) \left[ \frac{1}{2} (U_E - v_{\infty})^2 + h_{\infty} \right] + U_E [p_{\infty} + p_{\infty} (v_{\infty} - U_E)^2] + \frac{1}{2} U_E^2 p_{\infty} (v_{\infty} - U_E) = \\ p_1 (v_1 - U_E) \left[ \frac{1}{2} (U_E - v_1)^2 + h_1 \right] + U_E [p_1 + p_1 (v_1 - U_E)^2] + \frac{1}{2} U_E^2 p_1 (v_1 - U_E) \end{aligned}$$

und dieses reduziert sich wegen II (1) und (2) auf

$$\frac{\phi}{p_{\infty} (v_{\infty} - U_E)} + \frac{1}{2} (U_E - v_{\infty})^2 + h_{\infty} = \frac{1}{2} (U_E - v_1)^2 + h_1 \quad (46)$$

Damit ist eine andere Form der Energiegleichung II (3) gefunden, die die Bestrahlungsstärke  $\phi$  enthält.

Es gilt die Beziehung zwischen zugeführter Energie pro Gramm  $q$  und die Bestrahlungsfläche

$$q = - \frac{\phi}{p_{\infty} (v_{\infty} - U_E)} \quad (47)$$

und im Falle der Deflagrationsbedingungen  $v_{\infty} + c_{\infty} = U_E$ , ( $v_{\infty} < 0$ )

$$q = \frac{\phi}{p_{\infty} c_{\infty}}, \quad (48)$$

so daß die Gleichung II (3) wird

$$\frac{\phi}{p_{\infty} c_{\infty}} + \frac{1}{2} (U_E - v_1)^2 + h_1 = \frac{1}{2} (U_E - v_{\infty})^2 + h_{\infty} \quad (49)$$

Mit Hilfe der Beziehung  $\phi = p_{\infty} c_{\infty} q$  kann man die Beziehung  $q(\phi)$  berechnen. Es gilt nämlich

$$c_{\infty} = \sqrt{\gamma \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}} = \sqrt{\gamma \frac{p_{\infty}}{p_1} \frac{p_1}{p_0} \frac{p_0}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho_{\infty}}}$$

und mit Hilfe der Ergebnisse der Spalte 2, Seite 8

und für  $\frac{\rho'}{\rho}$  genug groß

$$c_0 = \frac{\rho'}{\rho - 1} \sqrt{2\mu g}$$

$$c_\infty = \sqrt{2\mu g}$$

Damit rechnet man

$$\phi = \frac{\rho_0}{\rho'} \sqrt{2\mu g} \cdot g$$

oder

$$2\mu g = \left( \frac{2\mu \phi}{\rho_0 \rho'} \right)^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{2\mu \phi}{\rho_\infty} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (50)$$

$$\left( \text{mit } \mu = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)$$

Dieses ermöglicht, die Ergebnisse der Seite 8 als Funktion der Bestrahlungsstärke und der c.o.-Dichte (oder Wellenlänge des Lichtes) auszudrücken. Dabei werden die c.o.-Zustandsgröße sowie die Zustandsgröße in der geschockten Materie Funktionen von  $\phi$  und  $\rho'$ .

Dieses ändert nicht die Schlußfolgerungen, die man auf Seite 8 bezüglich des Einflusses der Wellenlänge zusammengefaßt hat.

Zum Beispiel gilt zwischen Temperatur der geschockten Materie und Temperatur der erodierten Materie immer noch  $\frac{T_1}{T_0} \approx \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{50\lambda^2}$  etc.

Wir behandeln jetzt die Energiebilanz weiter. Addiert man beide Gleichungen (46) und (48), so erhält man

$$\phi = \rho_0 v_0 \left( \frac{1}{2} v_0^2 + h_0 \right) - \rho_\infty v_\infty \left( \frac{1}{2} v_\infty^2 + h_\infty \right) + \rho_1 (U - U_E) \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1 \right) + \rho_2 U_E \left( \frac{1}{2} v_2^2 + \epsilon_2 \right) - \rho_3 U_S \left( \frac{1}{2} v_3^2 + \epsilon_3 \right) \quad (51)$$

mit

$$\epsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\phi}{\rho}, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\phi}{\rho}, \quad \left( \gamma = \frac{\gamma + \mu}{\gamma - \mu} \right)$$

In dem besonderen Fall, den wir betrachten, wird  $v_0 = 0$ , so daß

$$\phi = -\rho_\infty v_\infty \left( \frac{1}{2} v_\infty^2 + h_\infty \right) + \rho_1 (U - U_E) \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1 \right) + \rho_2 U_E \left( \frac{1}{2} v_2^2 + \epsilon_2 \right) - \rho_3 U_S \epsilon_3 \quad (52)$$

Man kann den Term  $\rho_3 U_S \epsilon_3$  dieser Gleichung vernachlässigen, weil er proportional zur inneren Energie der kalten Materie ist. Wir vergleichen dann den Energieinhalt der "erodierten" Materie mit dem Energieinhalt der "geschockten" Materie.

Dafür berechnen wir den Bruch:



$$B = \frac{-p_{\infty} v_{\infty} \left( \frac{1}{2} v_{\infty}^2 + h_{\infty} \right) + p_{\infty} U_E \left( \frac{1}{2} v_{\infty}^2 + \varepsilon_{\infty} \right)}{p_1 (U_S - U_E) \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1 \right)} = \frac{p_{\infty} |v_{\infty}| \left( \frac{1}{2} v_{\infty}^2 + h_{\infty} \right) + p_{\infty} U_E \left( \frac{1}{2} v_{\infty}^2 + \varepsilon_{\infty} \right)}{p_1 (U_S - U_E) \left( \frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1 \right)}$$

Dies kann weitergeschrieben werden:

$$B = \frac{p_{\infty}}{p_1} \frac{|v_{\infty}| + U_E}{U_S - U_E} \frac{\frac{1}{2} v_{\infty}^2}{\frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1} + \frac{p_{\infty}}{p_1} \frac{|v_{\infty}| + U_E}{U_S - U_E} \frac{\varepsilon_{\infty}}{\frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1} + \frac{p_{\infty} |v_{\infty}|}{p_1 (U_S - U_E)} \frac{\frac{p_{\infty}}{p_{\infty}}}{\frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1}$$

$$B = \frac{p_{\infty}}{p_1} \frac{|v_{\infty}| + U_E}{U_S - U_E} \left\{ \frac{\frac{1}{2} v_{\infty}^2}{\frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_{\infty}}{\frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1} + \frac{|v_{\infty}|}{|v_{\infty}| + U_E} \frac{\frac{p_{\infty}}{p_{\infty}}}{\frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1} \right\}$$

und da  $\frac{p_{\infty}}{p_1} = (\gamma - 1) \varepsilon_{\infty} = \frac{2\mu}{1-\mu} \varepsilon_{\infty}$

$$B = \frac{p_{\infty}}{p_1} \frac{|v_{\infty}| + U_E}{U_S - U_E} \left\{ \frac{\frac{1}{2} v_{\infty}^2}{\frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_{\infty}}{\frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1} + \frac{|v_{\infty}|}{|v_{\infty}| + U_E} \frac{2\mu}{1-\mu} \frac{\varepsilon_{\infty}}{\frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1} \right\} \quad (53)$$

Wir berechnen diesen Ausdruck im obenerwähnten Fall, d.h.

wenn  $\frac{p_{\infty} |v_{\infty}| + U_E}{p_1 (U_S - U_E)} = 1$  wird. Zu dieser Bedingung gehört  $\beta' \approx 2$

Da, mit  $\frac{1}{\mu} = 4$ ,  $\frac{\beta'}{\mu} = 8$  genügend groß ist, kann man die Ergebnisse der 3. Spalte der Tabelle benutzen. Man findet:

$$v_1^2 = \frac{3}{10} 9, \quad \frac{1}{2} v_1^2 + \varepsilon_1 = \frac{3}{10} 9$$

$$|v_{\infty}| = \sqrt{\frac{9}{2}} (1 - \sqrt{0,6}) \approx \frac{1}{4} \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$\frac{1}{2} v_{\infty}^2 = \frac{9}{64}, \quad \varepsilon_{\infty} = \frac{9}{20} 9$$

weiter

$$|v_{\infty}| + U_E = \sqrt{\frac{9}{2}}, \quad \frac{|v_{\infty}|}{|v_{\infty}| + U_E} = \frac{1}{4}$$

und

$$\frac{2\mu}{1-\mu} \frac{|v_{\infty}|}{|v_{\infty}| + U_E} = \frac{1}{6}$$

Insgesamt hat man:

$$B = \frac{1}{20} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{36}{20} \approx 2$$

Der größte Term ist  $\frac{\epsilon_{\infty}}{\frac{1}{2}v^2 + \epsilon_1} = \frac{3}{2}$

Es sind 2/3 der Energie in der erodierten Materie und 1/3 in der geschockten Materie gespeichert, während die erodierte Masse gleich der geschockten Masse wird. Der größte Teil der Energie in der erodierten Masse befindet sich in der inneren Energie. Die Materie fließt langsam aus dem Pellet heraus. Dies ist sehr günstig für eine effektive Heizung der Materie.

Berechnet man numerisch die Funktion  $B(\lambda)$ , so stellt man fest, daß der Term  $\epsilon_{\infty}$  die größte Rolle spielt, so daß in erster Näherung die Funktion  $B$  lautet:

$$B(\lambda) \approx \frac{\rho_{\infty} c_{\infty}}{\rho_1 (v_s - v_c)} \frac{\epsilon_{\infty}}{\frac{1}{2}v^2 + \epsilon_1}$$

und bei starker Stoßwelle

$$B(\lambda) \approx \frac{\rho_{\infty} c_{\infty}}{\rho_1 (v_s - v_c)} \frac{\epsilon_{\infty}}{2\epsilon_1}$$

Die Funktion  $B(\lambda)$  ist in Bild 2 angegeben.

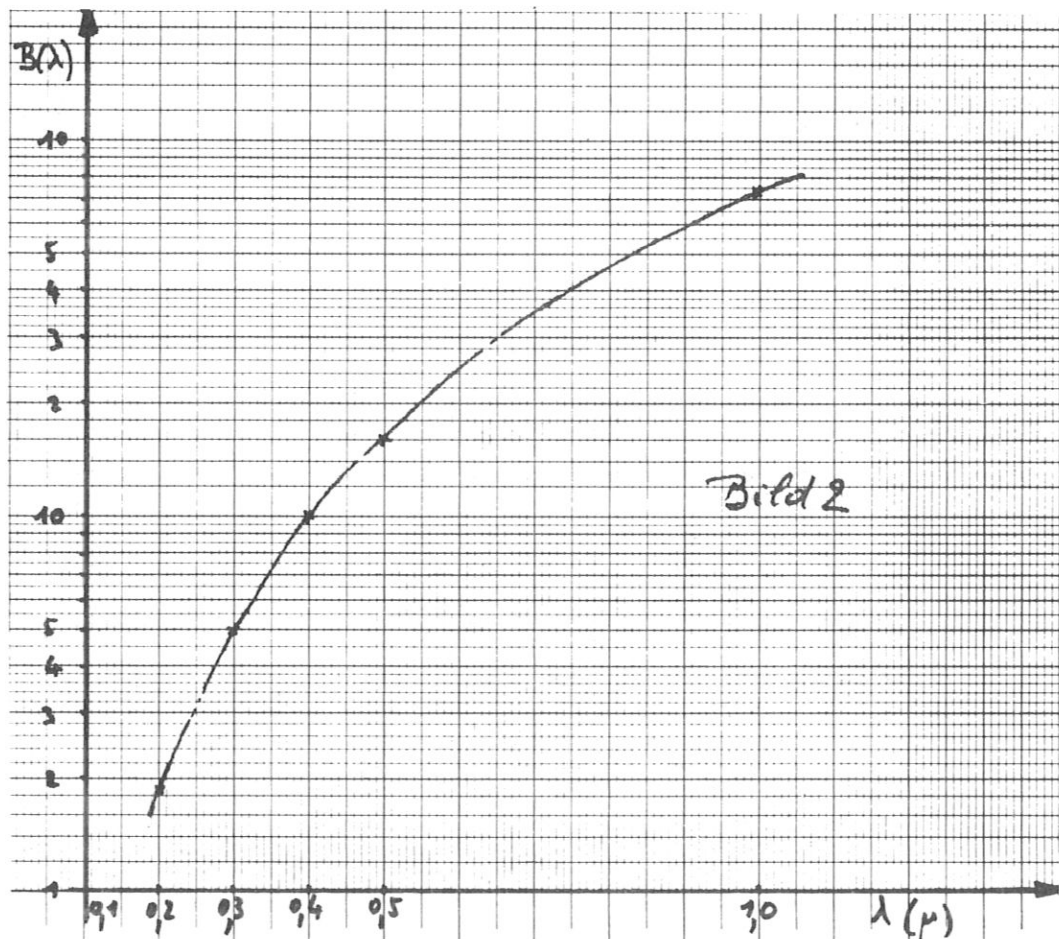


Bild 2: Verhältnis zwischen der in der erodierten Masse und in der geschockten Masse enthaltenen Energien als Funktion von  $\lambda$ .

Im Bild 3 ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse wiedergegeben.

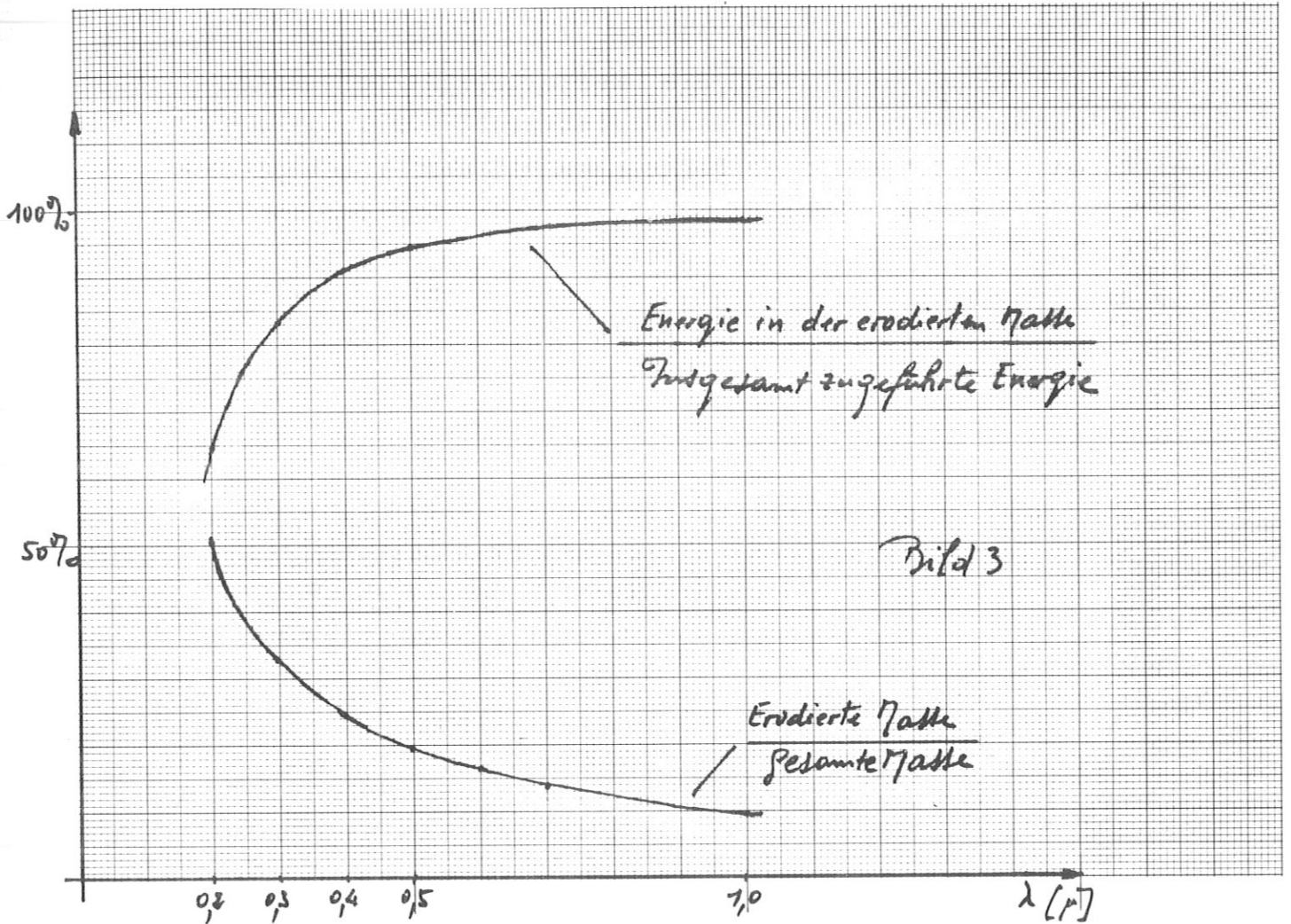


Bild 3

Man sieht, und das ist in Bild 3 wieder zu erkennen, daß es im Rahmen dieses eindimensionalen Modells eine Wellenlänge gibt ( $\lambda = 0,2 \mu$ ), bei der so viel Materie erodiert wie geschockt wird. Dieser erodierte Teil transportiert zweimal soviel Energie wie in dem geschockten Teil zugeführt worden ist.

Vergrößert man die Wellenlänge, dann verkleinert sich der Massenprozentsatz der erodierten Materie. Diese Materie transportiert aber einen höheren Prozentsatz an Energie.

Die Wellenlänge des Nd-Lasers (  $1 \mu$  ) ist für die Heizung des Kerns des Pellets ungünstig, aber viel günstiger als die Wellenlänge des  $\text{CO}_2$ -Lasers (  $10 \mu$  ).

Dieser Schuß, betreffend die Uneffektivität der langen Wellenlänge zur Heizung des Pelletkerns, muß gemildert werden: Eindimensionale Rechnungen mit der Rechenmaschine zeigen, daß wegen der Wärmeleitfähigkeit und des langsamen Aufbaus der Materie eine bessere Übertragung der Energie am Kern möglich wird.

Ich danke besonders den Herren Lengyel und Mulser für zahlreiche Diskussionen während dieser Arbeit.

Referenzen

- K. Oswatitsch: Gasdynamik, Seite 55, Springer 1952
- B. Ahlborn: Über die Aufheizung von Strömungen mit veränderlichen spezifischen Wärmen (Doktorarbeit)
- B. Ahlborn und M. Salvat: Calculation of shock front parameters in a plasma. Zeitschr. f. Naturf., Vol. 22a, 260-63 (1967)
- M. Salvat und S. Witkowski: Gasströmung mit Wärmezufuhr. Interner Arbeitsbericht IABT 6 der Abteilung Prof. Wienecke im IPP Garching
- P. Mulser, R. Sigel und S. Witkowski: Plasma production by laser. Physics reports, Vol. 6C (195), 1973
- L.L. Lengyel: One-dimensional calculations to pellet heating and expansion in magnetic field (IPP 4/... (in Vorbereitung)).
- C. Fauquignon: Creation of an intense shock in solid deuterium by a pulsed laser beam. 5th Symp. on detonation 1970
- C. Fauquignon und F. Floux: Hydrodynamic behaviour of solid deuterium under laser heating. Phys. of Fluids, 13, 386 (1970)
- Caruso und R. Gratton: Some properties of the plasmas produced by irradiating light solids by laser pulses. Plasma phys. 10 (867) 1968

J.P. Babuel-Peyrissac, C. Fauquignon und F. Floux: Effect of powerful laser pulse on low z solid material. Physics Letters 30A, 290 (1969)

J. L. Bobin: Flame propagation and overdense heating of a laser created plasma. Physics Fluids 14, 2341 (1971)

G. Tonon: Etude de l'éconlement de plasma créé par l'interaction du rayonnement laser sur une cible solide (Thesis, 1973)