

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN

Numerische Behandlung von elliptischen Randwert-
problemen mit mehreren Lösungen und von MHD Gleich-
gewichtsproblemen

(Numerical Treatment of Elliptic BVP with Several
Solutions and of MHD Equilibrium Problems)

R. Meyer-Spasche

IPP 6/141

December 1975

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

We have found out empirically that Newton iteration and difference methods are very suitable for the numerical treatment of elliptic boundary value problems $(*) Lu = f(x,u)$ in $D \subset \mathbb{R}^2$, $u|_{\partial D} = g$ having several solutions. We therefore present some convergence theorems for these methods.

First we generalize some results of Simpson's [46], concerning the discretisation of $(*)$ for $L = -\Delta$ in the usual way. If the differential equation has an isolated solution, then the difference equations have a solution so that quadratic convergence occurs for $h \rightarrow 0$. If the difference equations have a bounded solution for each h , then the differential equation has a solution corresponding to it.

Now let L be uniformly elliptic. We prove some theorems on the convergence of the Newton iterates to isolated solutions, emphasis being placed on the specification of good initial guesses. In some cases there are also existence statements. Then we describe a strategy giving good initial guesses in those cases where the theorems do not apply.

We give some notable numerical examples, including bifurcation diagrams, which, on the one hand, are interesting in themselves and, on the other, show the applicability of the methods developed.

ZUSAMMENFASSUNG

Empirisch wurde gefunden, daß Differenzenverfahren und Newtonverfahren gut geeignet sind zur numerischen Behandlung elliptischer Randwertprobleme

$$(*) \quad (Lu)(x) = f(x, u(x)) \text{ in } D \subset \mathbb{R}^2, \quad u|_{\partial D} = g$$

mit mehreren Lösungen. Es werden deshalb einige Konvergenzsätze für diese Verfahren bewiesen.

Zunächst verallgemeinern wir einige Ergebnisse von Simpson [46] über die Diskretisierung von (*) mit $L = -\Delta$. Hat die Differentialgleichung eine isolierte Lösung, so hat die Differenzengleichung ebenfalls eine Lösung, und es tritt für $h \rightarrow 0$ quadratische Konvergenz ein. Hat umgekehrt das diskretisierte Problem Lösungen U_h mit $\|U_h\|_{\infty} \leq M$ für $h \rightarrow 0$, so hat (*) eine Lösung mit $\|u\|_{\infty} \leq M$.

Sei L nun gleichmäßig elliptisch. Wir beweisen einige Sätze über die Konvergenz des Newtonverfahrens gegen isolierte Lösungen, wobei besonderes Gewicht auf die Konstruktion von guten Startfunktionen gelegt wird. In einigen Fällen ergeben sich auch Existenzaussagen. Dann beschreiben wir ein Verfahren, das in den Fällen gute Startfunktionen liefert, in denen die Sätze nicht anwendbar sind.

Zum Abschluß diskutieren wir wichtige numerische Beispiele und zeigen berechnete Bifurkationsdiagramme. Einerseits sind diese Ergebnisse an sich interessant, andererseits zeigen sie die Effizienz der entwickelten Methoden.

InhaltsverzeichnisEinleitung

a) Problemstellung	1
b) Ergebnisse	3
<u>1) Einführung in die Problematik</u>	<u>7</u>
1.1 MHD-Gleichgewichtsrechnungen	7
1.2 Stabilität, Ober- und Unterlösungen	11
1.3 Ein einfaches Beispiel für ein physikalisches System mit mehreren Gleichgewichten: Stabknickung(Post buckling)	17
1.4 Kritische und isolierte Lösungen, Bifurkationstheorie	19
1.5 Bisher vorhandene numerische Erfahrungen	20
1.5.1 Die Picarditeration (Kontraktionssatz)	21
1.5.2 Das Verfahren von Hagenow-Lackner	22
1.5.3 Das Newton-Kantorowitsch-Verfahren	22
1.5.4 Sehnungsverfahren	24
1.5.5 Fixpunktsuche nach Allgower-Jeppson	25
1.5.6 Andere Verfahren (Potenzreihenansatz, SOR, monotone Operatoren, finite Elemente)	26
1.6 Eindeutige Lösbarkeit und Maximumprinzip	27
<u>2) Approximation der Lösungen mit Differenzenverfahren</u>	<u>30</u>
2.1 Vorbereitungen	30
2.2 Konvergenz gegen isolierte Lösungen der Differentialgleichung	32
2.3 Existenz von Lösungen der Differentialgleichung, wenn die Differenzgleichungen Lösungen haben	36
<u>3) Anwendung des Newtonverfahrens auf nichtlineare Differential-</u> <u>gleichungen</u>	<u>49</u>
3.1 Anwendbarkeit	50
3.2 Monotone Konvergenz bei eindeutig lösbaren Differentialgleichungen	52
3.3 Existenz von Lösungen benachbarter Probleme	56
3.4 Das Auffinden von Startfunktionen	61

4) Numerische Ergebnisse, Bifurkationsdiagramme für

$T[\lambda;u] := Lu - f(\lambda,u) = 0, u _{\partial D} = 0$	68
4.1 Das benützte Verfahren	68
4.2 $T[\lambda;u] = 0$ mit Verzweigungspunkt (λ^*, u^*) und $T[\lambda;u^*] = 0$ für alle $\lambda > 0$ am Beispiel $T[\lambda;u] = -\Delta u - \lambda u + u^3$	71
4.3 $T[\lambda;u] = 0$ mit Verzweigungspunkt (λ^*, u^*) und $T[\lambda;u^*] \neq 0$ für $\lambda \neq \lambda^*$ am Beispiel $T[\lambda;u] = -\Delta u - \lambda e^u$	76
4.4 $T[\lambda;u] = 0$ mit zwei Lösungsscharen, aber ohne Verzweigungs- punkt am Beispiel $T[\lambda;u] = -\Delta u - \lambda(u^2 - 6u + 5)$	79
<u>Bezeichnungen</u>	88
<u>Literatur</u>	90

EINLEITUNGa) Problemstellung

"In den vergangenen Jahrzehnten wurden in der Technik vorwiegend lineare Differentialgleichungen angewendet. Es war weitgehend üblich, durch kleine Vernachlässigungen oder durch die Betrachtung kleiner Bereiche linear zu approximieren. Es sei, um einige Stichworte zu geben, an das "Hookesche Gesetz", an Magnetisierungskurven, an Röhrencharakteristiken und an die Betrachtung kleiner Schwingungen mechanischer Systeme erinnert. Der technische Fortschritt unserer Zeit zwingt uns dazu, auch das Gebiet der nicht-linearen Differentialgleichungen mehr in den Kreis unserer Betrachtungen einzubeziehen. Man ist bei der Lösung derartiger Differentialgleichungen allerdings oft auf Näherungsverfahren angewiesen.",

schreibt Collatz in [12], S.123, in Zusammenhang mit dem Randwertproblem

$$(1) \quad -y'' = y^3 \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b.$$

Wir wollen uns im folgenden mit Randwertproblemen der Art

$$(2) \quad (Lu)(x) = f(x, u(x)) \quad \text{für alle } x \in D, \quad u(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial D$$

befassen, wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet sei, derart, daß der Gauss'sche Integralsatz gilt. L sei gleichmäßig elliptisch, und es existiere die zugehörige Greensche Funktion, vgl etwa [15]. Dabei stellen wir ausdrücklich nicht die in der Literatur sonst fast ausschließlich benötigte Bedingung

$$(3) \quad f_u(x, u) < (\text{minimaler Eigenwert } \lambda_0 \text{ von } L \text{ in } D)$$

oder gar $f_u(x, u) \leq 0$, da (3) bei wichtigen Problemen der Physik und Chemie verletzt ist. Genannt seien hier die Berechnung von magnetohydrodynamischen Gleichgewichten in der Plasmaphysik, der Einschluß von Ionen in einem Ring relativistischer Elektronen (Teilchenbeschleuniger vom Typ Smokatron) und chemische Reaktionsprozesse (z.B. thermische Selbstentzündung eines Gasgemisches in einem Kessel), siehe 1.1. Weitere Beispiele stehen z.B. in [28].

Wenn die Monotoniebedingung (3) nicht erfüllt ist, wird die Lösung des Problems (2) prinzipiell wesentlich schwieriger: Es ist nicht mehr sicher gestellt, daß (2) eindeutig lösbar ist (vgl 1.6).

Unser Hauptanliegen ist neben der funktionalanalytischen Untersuchung

von Näherungsverfahren für Differentialgleichungen (2) mit mehreren Lösungen die numerische Berechnung der verschiedenen Lösungen auf einer Rechenanlage. Wie in 1.1 und 1.5 noch begründet wird, kann es leider vorkommen, daß gerade für physikalisch interessante Lösungen die Bedingung (3) verletzt ist, so daß Standardverfahren nicht anwendbar sind.

In engem Zusammenhang mit diesem Problem steht die Behandlung nichtlinearer Eigenwertprobleme

$$(4) \quad (Lu)(x) = \lambda f(x, u(x)) \text{ für alle } x \in D, \quad u(x) = 0 \text{ für alle } x \in \partial D \\ f(x, 0) = 0 \text{ für alle } x \in D.$$

Wie an einem Beispiel in Kapitel 1 gezeigt wird, kann (wie im Spezialfall linearer Eigenwertprobleme) die Anzahl der Lösungen von (4) von λ abhängen.

Der augenblickliche Stand der Forschung kann etwa so umrissen werden: Über das Auffinden von Verzweigungspunkten und die Bestimmung der Anzahl der Lösungen gibt es eine rasch anwachsende mathematische Literatur. Bezüglich der numerischen Lösung von Differentialgleichungen mit mehreren Lösungen steht man vor folgender Situation: Bei den praktisch brauchbaren Verfahren fehlen die Konvergenzbeweise. Die theoretisch fundierten Verfahren sind in der Praxis kaum brauchbar.

Die vorliegende Arbeit soll ein Beitrag sein zur Änderung dieser Situation. Es werden Sätze bewiesen, die zur theoretischen Absicherung eines praktisch brauchbaren Verfahrens beitragen.

b) Ergebnisse

Kapitel 1 bringt eine Zusammenstellung vorhandener Ergebnisse, die aus ziemlich weit verstreuten und sehr unterschiedlichen Quellen zusammengetragen wurden bzw. sich in Gesprächen mit Plasmaphysikern ergaben. Eine einheitliche Darstellung dieser Dinge scheint bisher zu fehlen. Das äußert sich z.B. auch darin, daß Bezeichnungsweisen und Definitionen noch nicht einheitlich sind. Unsere Definitionen haben wir fast alle wörtlich übernommen (von Sattinger [40], [41] und von Keller [31]). Die Definition für kritische und isolierte Lösungen haben wir selbst formuliert, jedoch in Übereinstimmung mit dem, was andere Autoren unter diesen Begriffen verstehen ([39] und [34], S. 145). Für den Begriff "Ast eines Verzweigungsdiagramms" kennen wir keine Definition eines anderen Autors, jedoch entspricht unsere Definition wohl dem allgemeinen Sprachgebrauch (vgl. z.B. [5], S. 128)

In Kapitel 2 untersuchen wir den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Differentialgleichung $-\Delta u = f(x,u)$ in D , $u|_{\partial D} = 0$ ¹⁾ und denen der zugehörigen Differenzgleichungen (üblicher 5-Stern mit Shortley-Weller-Approximation am Rand). Es zeigt sich, daß das durch Diskretisierung entstandene nichtlineare Gleichungssystem für $h \rightarrow 0$ genauso viele Lösungen hat wie die Differentialgleichung. Es gehen also durch Diskretisierung keine Lösungen verloren, und es kommen auch keine hinzu. Diese Aussage ist nicht trivial: für $h > 0$ gibt es Beispiele für den Verlust (vgl. 4.3) und für das Hinzukommen (vgl. 4.2) von Lösungen. Außerdem wird gezeigt, daß der Diskretisierungsfehler bei der Approximation einer isolierten Lösung von der Ordnung h^2 ist. Diese Sätze sind als direkte Verallgemeinerung aus Ergebnissen von Simpson entstanden, durch Verzicht auf die Bedingungen $f_u(x,u) > 0$ und $f(x,0) \geq 0$, die z.B. bei der in 4.4 behandelten Differentialgleichung nicht erfüllt sind. Die Simpson'schen Beweisideen konnten beibehalten werden, jedoch mußten die gesamten Beweise überarbeitet werden und konnten z.T. vereinfacht werden.

In Kapitel 3 wird die Anwendung des Newtonverfahrens auf nichtlineare Differentialgleichungen des Typs $Lu - f(x,u) = 0$, $u|_{\partial D} = 0$, L gleich-

¹⁾Hier und im folgenden wird diese abkürzende Schreibweise für die Randwertprobleme benutzt.

mäßig elliptisch, untersucht. Diese Sätze wurden im wesentlichen neu formuliert. Die Beweise stützen sich meistens auf den Newton-Kantorowitsch-Satz für Operatoren. Es zeigt sich, daß jede isolierte Lösung mit dem Newtonverfahren berechnet werden kann, wenn die Startfunktion hinreichend dicht bei der Lösung liegt. Das Hauptproblem ist also, geeignete Startfunktionen zu finden. Jeder weitere Satz dieses Kapitels liefert hierzu einen Beitrag. Für Differentialgleichungen mit mehreren Lösungen gibt es hierzu unseres Wissens noch keine Ergebnisse anderer Autoren, wenn man von der Fixpunktsuche Allgower-Jeppson's absieht. Verschiedene Autoren weisen jedoch darauf hin, daß das ein sehr schwieriges Problem sei ([30], [1], [46]). Unter gewissen Voraussetzungen folgt Existenz genau einer Lösung und monotone Konvergenz des Newtonverfahrens, wenn eine Unterlösung als Startfunktion genommen wird. Dieser Satz ist eine Fortführung von Ergebnissen von Schryer, Kalaba und Collatz [11]. Zum Beweis brauchen wir das Maximumprinzip, das wir deshalb in der von uns benötigten Fassung beweisen. Außerdem werfen einige hiermit zusammenhängende Überlegungen ein neues Licht auf die Tatsache, daß manche Lösungen leichter zu berechnen sind als andere: es sind häufig diejenigen, für die die Parter'schen Abänderungen der Differentialgleichung zulässig sind und eine eindeutig lösbare Differentialgleichung liefern.

Hängt die rechte Seite der Differentialgleichung stetig von einem Parameter μ ab, so kann eine isolierte Lösung für $\mu = 0$ als Startfunktion zur Lösung der Differentialgleichung für $|\mu| \leq \mu_0$ dienen. Einerseits folgt aus diesem Satz die Existenz von Lösungen benachbarter Probleme, andererseits hat er auch praktische Bedeutung, da er in vielen Fällen das Auffinden einer geeigneten Startfunktion sehr erleichtert. So kann man z.B. bei Kenntnis einer einzigen isolierten Lösung den ganzen Ast eines Bifurkationsdiagramms berechnen. Diese Vorgehensweise wurde durch die Wacker'schen Arbeiten angeregt.

Für die Fälle, in denen man immer noch keine Startfunktion weiß, geben wir eine Suchstrategie an, von der wir nicht beweisen können, daß sie zum Erfolg führt, die jedoch praktisch immer erfolgreich war. (vgl. Kapitel 4). In Kapitel 4 zeigen wir einige der gerechneten Beispiele, auf die die Sätze aus den beiden vorangegangenen Kapiteln anwendbar sind. Die erste Differentialgleichung ist theoretisch befriedigend behandelt, sodaß es nur um das numerische Auffinden der Lösungen ging. Beim zweiten Beispiel

kann man leicht die Existenz der einen Lösung beweisen, von der zweiten kennt man einige Eigenschaften, die wir für die numerisch gefundene Lösung bestätigt finden. Außerdem gibt es numerische Ergebnisse anderer Autoren, mit denen wir gute Übereinstimmung erzielt haben, und die wir z.T. übertreffen konnten. Beim 3. Beispiel war uns zu Beginn der Untersuchungen nur der ungefähre Verlauf der Lösungen des eindimensionalen Problems für $\lambda = 1$ bekannt, deshalb haben wir zu diesem Beispiel auch einige Lemmata bewiesen.

Insgesamt zeigen die Rechnungen, daß das Newtonverfahren recht gut geeignet ist zur Behandlung von Differentialgleichungen mit mehreren Lösungen, und daß es mit den in Kapitel 3 ausgeführten Überlegungen auch in kritischen Fällen möglich ist, brauchbare Startfunktionen zu konstruieren. Wir haben jede beliebige Lösung berechnen können, von deren Existenz wir wußten, und haben auch manchmal experimentell recht schnell Lösungen gefunden, wenn wir nicht wußten, ob noch weitere existierten.

Allen, die mit mir über die hier behandelte Thematik diskutiert haben, bin ich zu Dank verpflichtet. Besonders herzlich möchte ich Prof. Dr. Collatz, Prof. Dr. Sachs und Dr. v. Hagenow danken, die durch ihr Interesse und ihre Anregungen das Wachstum der Arbeit sehr gefördert haben. Frau Schwarz danke ich für die sorgfältige Ausführung der Programmierarbeiten und Frau Bertlein für das Schreiben des Manuskripts. Schließlich danke ich auch Dr. B. Green, der mich mit Hartnäckigkeit dazu überredet hat, mich den bei MHD-Gleichgewichtsrechnungen auftretenden mathematischen Problemen zuzuwenden.

Kapitel 1

Einführung in die Problematik

In diesem Kapitel wird zunächst die Beschäftigung mit dem schon kurz geschilderten Problem motiviert durch sein Auftreten in der Plasmaphysik. Anhand der verhältnismäßig gut erforschten Gleichung

$$-\Delta u = \lambda e^u \text{ in } D, u|_{\partial D} = 0$$

wird der Leser mit einem Teil der zu erwartenden Schwierigkeiten vertraut gemacht.

Die Stabknickungsgleichung, das wohl älteste und berühmteste Beispiel für eine Differentialgleichung mit mehreren Lösungen, dient anschließend dazu, andere Aspekte des Problems zu schildern und etwas über Bifurkationstheorie zu sagen.

Dann wird ein Überblick gegeben über bereits vorhandene numerische Ergebnisse anderer Autoren, und es wird berichtet über die Schwierigkeiten bei der Anwendung von Verfahren, die zur Lösung von eindeutig lösbaren Differentialgleichungen entwickelt wurden.

Zum Abschluß wird eine hinreichende Bedingung für eindeutige Lösbarkeit gegeben und eine später häufig benutzte Verallgemeinerung des Maximumprinzips bewiesen.

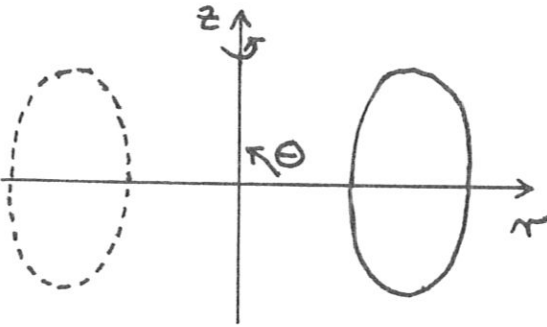
1.1 MHD-Gleichgewichtsrechnungen

Zur Energiegewinnung durch Kernfusion muß man Wasserstoff auf Temperaturen um 100 Mill. Grad aufheizen. Bei solchen Temperaturen befindet sich Materie im Plasmazustand. Nach außen ist ein Plasma elektrisch neutral, doch sind die in ihm enthaltenen Teilchen alle elektrisch geladen. Deshalb lassen sich Plasmen mit Hilfe von Magnetfeldern einschließen.

Ein schwieriges Problem ist das Auffinden von Magnetfeldkonfigurationen, die Plasmagleichgewichte im Torus erlauben. Natürlich sollen diese Gleichgewichte auch noch stabil sein, d.h. unempfindlich gegen kleine Störungen.

Von Magnetohydrodynamik (MHD-Theorie) spricht man, wenn das Plasma als magnetisierte, kompressible Flüssigkeit behandelt wird. Im folgenden geht es um Gleichgewichtsrechnungen in der MHD-Theorie.

Nimmt man an, daß die zu untersuchende Konfiguration rotationssymmetrisch ist, und macht man einige andere vereinfachende Annahmen, z.B. Ladungsneutralität, so erhält man aus der stationären Wlasowgleichung folgendes 2-dimensionale elliptische Randwertproblem (siehe [35], S. 435 f):



$$(1.1) \quad \Delta^* \psi := \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = F(r, z, \psi)$$

dabei ist

r der Abstand von der z -Achse, also $r > r_0$ und Δ^* gleichmäßig elliptisch, da $r_0 > 0$ gilt,

$\psi(r, z) = r A_\Theta(r, z)$, wobei $A = (A_\Theta, A_r, A_z)$ das Vektorpotential des Magnetfeldes B bedeutet, $A_r = A_z = 0$

$B = (B_\Theta, B_r, B_z)$ gegeben durch
 $B_\Theta = 0, B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$.

B wird sowohl durch den Strom in äußeren Spulen als auch durch im Plasma fließenden Strom erzeugt.

F bestimmt das Druckprofil, beschreibt also die Verteilung des Plasmas über den Torusquerschnitt. Vereinfachend kann für F eine Funktion $f(r, z, \psi)$ eingesetzt werden, z.B. $\lambda e^{-\psi}$, wobei λ ein positiver Parameter ist.

Zu untersuchen ist also

$$(1.2) \quad \Delta^* \psi = \lambda e^{-\psi} \quad \text{in } D, \quad \psi|_{\partial D} = g$$

Bei Smokatron (Einschluß von Ionen in einem Ring relativistischer Elektronen) kann man nicht von Ladungsneutralität ausgehen, hat verschiedene Dichteverteilungen für Ionen und Elektronen und kommt so auf zwei gekoppelte Gleichungen vom Typ (1.2). [26]

In der Theorie chemischer Reaktionsprozesse (z.B. thermische Selbstentzündung eines Gasgemisches in einem Kessel) kommt man ebenfalls auf zwei gekoppelte Gleichungen, die man aber durch oft erfüllte Annahmen

auf eine Gleichung vom Typ (1.2) zurückführen kann (siehe [21])

Wegen ihres Vorkommens bei verschiedenen Problemen haben sich schon viele Autoren mit Variationen von Gleichung (1.2) befaßt, z.B. Bratu (um 1910, siehe [16] S. 432-434) Gel'fand, Barenblatt (59), Fujita (69), Marder, Weitzner (70), Fisher (70), Simpson (72), Hagenow, Lackner (73), Allgower, Jeppson (73), Bandle (74).

Gel'fand untersucht die Existenz von symmetrischen Lösungen von (1.2) in symmetrischen Kesseln: im Kessel mit ebenen Wänden, im zylindrischen und im kugelförmigen Kessel.

Die Gel'fand'schen Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen (vgl [19]):

Ist $n \leq 2$, so gibt es einen kritischen Wert $\lambda^*(D)$, für den

$$(1.3) \quad -\Delta u = \lambda e^u \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ kugelförmig

genau eine Lösung hat¹⁾. Ist $0 < \lambda < \lambda^*$, so hat (1.3) zwei Lösungen, während für $\lambda > \lambda^*$ keine Lösung existiert. Für $n = 3$ kann es in Abhängigkeit von λ jede Anzahl von Lösungen zwischen 0 und ∞ geben.

Inzwischen kennt man die symmetrischen Lösungen im Kreis auch explizit ([4], S.21), die Lösungen des eindimensionalen Problems sind schon länger bekannt ([35], S. 437. Vgl. (1.12) weiter unten):

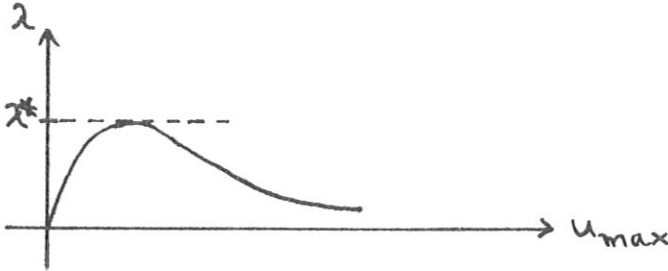
Satz 1.1 Sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < R\}$. Dann ist $\lambda^* = \frac{2}{R^2}$ und die Lösungen von (1.3) sind für $0 < \lambda \leq \lambda^*$ gegeben durch

$$(1.4) \quad u(r) = \ln \frac{b}{\left(1 + \frac{\lambda b r^2}{8}\right)^2}$$

$$b_{1,2} = \frac{32}{\lambda^2 R^4} \left(1 - \frac{\lambda R^2}{4} \pm \sqrt{1 - \frac{\lambda R^2}{2}} \right).$$

1) u ist genau dann Lösung von (1.3), wenn $v := -u$ Lösung von $\Delta v = \lambda e^{-v}$, $v|_{\partial D} = 0$ ist.

Daraus sieht man durch Entwickeln der Wurzel, daß für $\lambda \rightarrow \lambda^*$ beide Lösungen gegen dieselbe Lösung u^* konvergieren, während für $\lambda \rightarrow 0^+$ das Maximum der einen Lösung gegen 0, das der anderen aber gegen ∞ strebt. Trägt man λ gegen u_{\max} ab, bekommt man etwa folgendes Bild (vgl. Abb. 4.4)



Ein solches Diagramm heißt Verzweigungs- oder Bifurkationsdiagramm: jeder Punkt auf der Kurve repräsentiert die Lösung einer Differentialgleichung.

Ist D nicht kreisförmig, so gibt es meines Wissens bisher keine theoretischen Ergebnisse über die Lösungen von (1.3), wegen der starken konvexen Nichtlinearität (vgl. [46], S. 372). Für rechteckige Gebiete gibt es jedoch numerische Ergebnisse verschiedener Autoren ([35], [18], [46], [24], [1], Abschnitt 4.3 hier).

Bei der numerischen Lösung von (1.2) stellte sich heraus, daß es überhaupt kein Problem ist, die "flache" Lösung ($\psi_{\min}(\lambda) > \psi_{\min}(\lambda^*)$)*) zu berechnen, es sind praktisch alle Standardmethoden anwendbar. Anders ist es mit der tiefen Lösung. Sie machte bisher erhebliche numerische Schwierigkeiten. Für einige Standardmethoden läßt sich sogar zeigen, daß sie grundsätzlich nicht anwendbar sind (vgl. 1.5).

Die tiefe Lösung von (1.2) ist aber gerade die physikalisch interessanteste (vgl. [18], S. 963), da sie besseren Plasmaeinschluß bedeutet. Die Elektronendichte n hat an dem Ort sein Maximum n_m , an dem ψ sein Minimum ψ_{\min} annimmt. Bezeichnet man mit n_w die Elektronendichte an der Wand, so ergibt sich $n_w/n_m = \exp(\psi_{\min} - c)$, und diese relative Dichte in Wandnähe ist umso kleiner, je größer $|\psi_{\min}|$ ist, da $\psi \leq 0$ gilt.

Im folgenden wird sich zeigen, daß die numerischen Schwierigkeiten größtenteils davon kommen, daß die tiefe Lösung von (1.2) im mathematischen Sinn instabil ist. Daraus kann man aber nicht folgern, daß es uninteressant

*) Dabei ist $\psi_{\min}(\lambda) := \min_{x \in D} \psi(x)$, ψ Lösung von (1.2) zum Parameterwert λ .

sei, sie zu berechnen. Grund: Die zu (1.2) gehörende zeitabhängige MHD-Gleichung lautet anders als die zeitabhängige Gleichung, die zur mathematischen Definition der Stabilität herangezogen wird [22]. Das der tiefen Lösung entsprechende MHD-Gleichgewicht kann also durchaus stabil sein.

1.2 Stabilität, Ober- und Unterlösungen

Wir wollen nun den in der mathematischen Literatur üblichen Stabilitätsbegriff einführen, der natürlich immer dann mit dem physikalischen Stabilitätsbegriff übereinstimmt, wenn die zwei zeitabhängigen Gleichungen übereinstimmen. Wir folgen der Darstellung von Sattinger (in [40] , S.979f)

$$(1.5) \quad Lu = f(x,u) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = g$$

sei gegeben, wobei L gleichmäßig elliptisch sei mit hölderstetigen Koeffizienten a_{ij}, b_i

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (a_{ij}) \text{ gleichmäßig positiv definit auf } \bar{D}.$$

D sei beschränkt und zusammenhängend, $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $f \in C^{1+\alpha}(D \times \mathbb{R})$,

g sei fortsetzbar zu $\hat{g} \in C^{2+\alpha}(D)$. Die Bedingungen an ∂D und f können etwas abgeschwächt werden ([40], S. 979).

Definition 1.1 Sei $u(x,t)$ Lösung von

$$(1.6) \quad u_t = -Lu + f(x,u) \quad u|_{\partial D} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

Eine Lösung U von (1.5) heißt in der Maximumnorm stabil, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodaß aus $\|u_0 - U\|_{\infty} < \delta$ $\|u - U\|_{\infty} < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ folgt. U heißt asymptotisch stabil, wenn außerdem $\|u - U\|_{\infty} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ gilt. U heißt instabil, wenn es nicht stabil ist.

Bemerkung Es sind noch andere Definitionen (mit Hilfe von Eigenwerten) gebräuchlich, die jedoch denselben Sachverhalt beschreiben, wenn das Prinzip der linearisierten Stabilität gültig ist (vgl [39], [41] S.2f, 140).

Wie in [41] sehr schön dargestellt ist, gibt es einen engen Zusammenhang zwischen der Stabilität von Lösungen und den Begriffen Ober- und Unterlösung.

Definition 1.2 $v \in C^2(\bar{D})$ heißt Oberlösung von (1.5), wenn gilt:

$$(1.7) \quad Lv - f(x,v) \geq 0 \quad v|_{\partial D} \geq g.$$

$w \in C^2(\bar{D})$ heißt Unterslösung von (1.5), wenn gilt

$$(1.8) \quad Lw - f(x,w) \leq 0 \quad w|_{\partial D} \leq g.$$

Man hat nun folgenden Existenzsatz:

Satz 1.2 Seien v eine Unterslösung und w eine Oberlösung von (1.5) mit $v(x) \leq w(x)$ in D . Dann hat (1.5) eine Lösung u mit

$$(1.9) \quad v(x) \leq u(x) \leq w(x) \text{ in } \bar{D}.$$

Zum Beweis siehe z.B. [41] S. 24 f

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Existenzsatzes für beschränktes f in [15], Bd II, S. 369 f. Ebenso wie dort wird zum Beweis das Iterationsverfahren

$$(1.10) \quad (L-k)u^{n+1} = f(x, u^n) - k u^n \quad \text{in } D \\ u^{n+1}|_{\partial D} = g$$

benutzt, wobei

$$(1.11) \quad u^0 = v \text{ oder } u^0 = w \quad \text{und} \\ k \leq \min \left\{ f_u(x, u) \mid x \in \bar{D}, \min_{x \in \bar{D}} v(x) \leq u \leq \max_{x \in \bar{D}} w(x) \right\}$$

zu setzen ist. Es entstehen dann zwei monotone, gleichmäßig konvergente Folgen: die mit v beginnende konvergiert gegen die minimale Lösung von (1.5) mit (1.9), die mit w beginnende gegen die maximale Lösung mit (1.9). Unter anderem folgt hieraus also auch, daß jede zwischen Unter- und Oberlösung einschließbare Lösungsmenge ein maximales und ein minimales Element hat (natürlich können die beiden zusammenfallen).

Den angekündigten Zusammenhang zwischen Stabilität und Unter- und Oberlösungen stellt folgender Satz her:

Satz 1.3 Sei u eine Lösung von (1.5) $Lu = f(x, u)$ in D , $u|_{\partial D} = g$.

Seien v und w Unter- und Oberlösung von (1.5) mit (1.9), und u sei Grenzwert der zwei durch (1.10), (1.11) erzeugten Folgen. Dann ist u asymptotisch stabil und alle Lösungen von

$$(1.6) \quad u_t = -Lu + f(x, u) \quad \text{in } D \times (0, \infty), \quad u|_{\partial D} = g, \quad u(x, 0) = r(x)$$

mit $v(x) \leq r(x) \leq w(x)$ streben für $t \rightarrow \infty$ gegen $u(x)$.

Beweis: [41] S. 39.

In [40] und [41] findet man weitere Sätze zu diesem Thema.

Zur Erläuterung der vorhergehenden Sätze wollen wir ein Beispiel studieren. Wir wählen dazu eine gewöhnliche Differentialgleichung, nämlich

$$(1.12) \quad -u'' = e^u \quad u(0) = u(1) = 0,$$

über die wir aus dem für (1.3) Gesagten schon einiges wissen. Man erhält $\lambda^* \approx 3.514$. (1.12) hat also zwei Lösungen $u_1(x)$ und $u_2(x)$, die wir mit den Formeln aus [35], S. 437 berechnet haben. Sie sind in Abb. 1.1 dargestellt.*)

Es ist $0 \leq u_1(x) \leq 0.14054$, $0 \leq u_2(x) \leq 4.0915$.

Wir suchen nach Ober- und Unterlösungen.

Ansatz: $v_s(x) = s(x - x^2)$.

Behauptung 1: v_s ist Unterlösung von (1.12) für $s \in (-\infty, \frac{1}{2}]$,

Oberlösung für $s \in [s_0, s_1]$, weder Ober- noch Unterlösung für

$s \notin (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [s_0, s_1]$. Dabei sind s_0 und s_1 die beiden Nullstellen von $r(s, 1/2) = -2s + e^{s/4}$: $s_0 \in (1/2, 1)$, $s_1 \in (13, 13.5)$.

Beweis durch Nachrechnen.

Zwischen $v_{1/2}(x)$ und $v_1(x)$ liegt also nach Satz 1.2 eine Lösung. Für das Maximum dieser Lösung erhalten wir die Abschätzung

$v_{1/2}(\frac{1}{2}) = 0.125 \leq u_1(\frac{1}{2}) \approx 0.14 \leq 0.25 = v_1(\frac{1}{2})$, die durch Ausrechnen von s_0 nach oben verschärft werden könnte. Nach Satz 1.3 und dem zum Beweis von Satz 1.2 Gesagten ist $u_1(x)$ asymptotisch stabil.

Behauptung 2: Es gibt keine Oberlösung z von (1.12), für die $u_2(x) \leq z(x)$ für $0 \leq x \leq 1$ gilt.

Angenommen, z wäre so eine Oberlösung, dann ist Satz 1.2 mit $v = v_{1/2}$ und $w = z$ anwendbar. Dann konvergiert das Iterationsverfahren

*) Tatsächlich wurde Abb.1.1 mit den Methoden von Kapitel 4 hergestellt. Für $h = \frac{1}{30}$ unterscheiden sich die Ergebnisse in der diskreten Maximumnorm um $1.2 \cdot 10^{-5}$ (flache Lösung) bzw. $3 \cdot 10^{-3}$ (hohe Lösung). $3 \cdot 10^{-3}$ entspricht in Abb.1.1 einer Strecke von weniger als 0.1mm, liegt also unterhalb der Plotgenauigkeit.

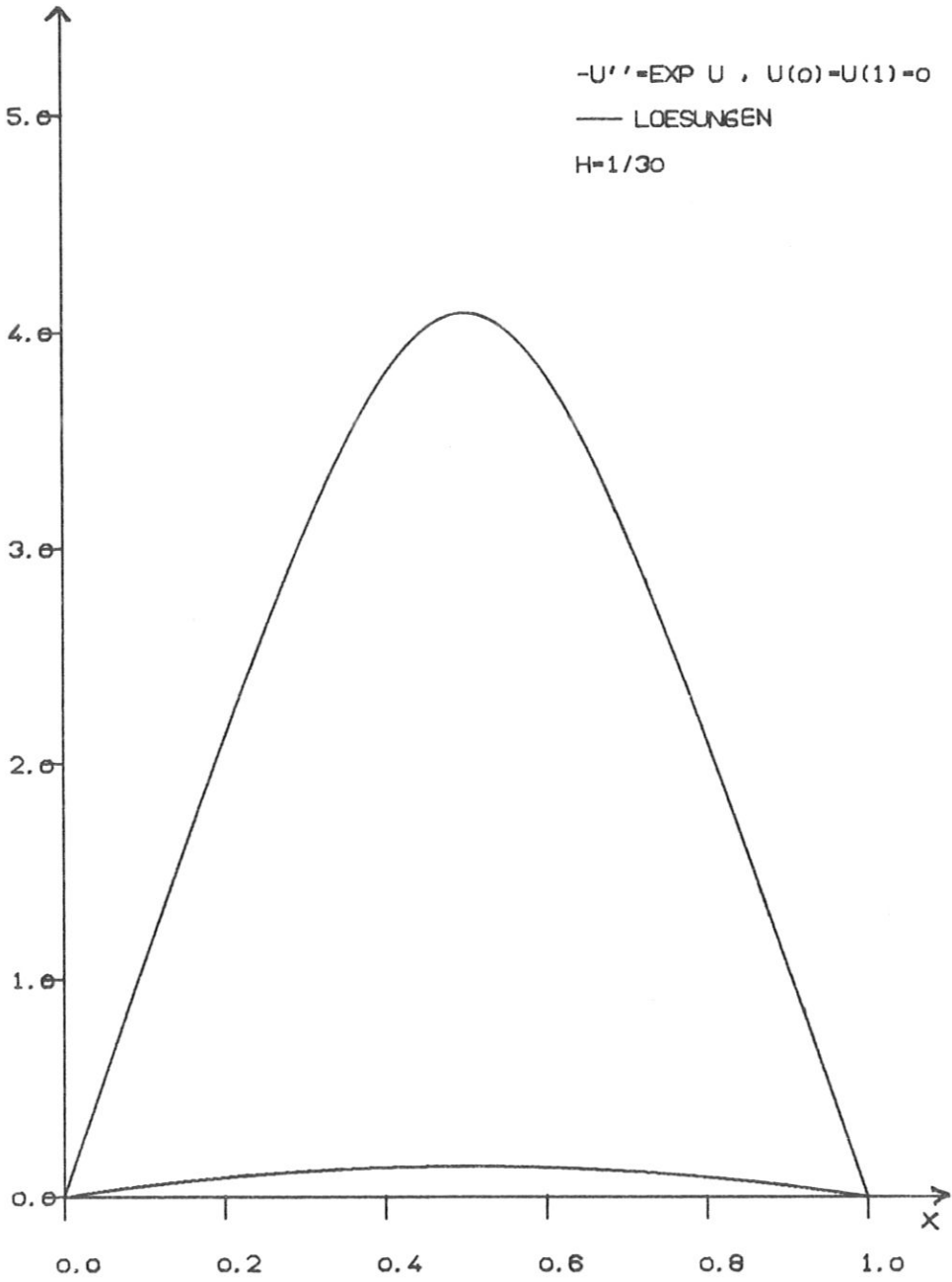


Abb 1.1

$$\begin{aligned}
 & u^0 = z, \quad k > 0 \\
 (1.13) \quad & u^{n+1} - k u^{n+1} = -e^{u^n} - k u^n \\
 & u^{n+1}(0) = u^{n+1}(1) = 0
 \end{aligned}$$

gegen die maximale Lösung, also gegen u_2 . Andererseits kann (1.13) als implizites Schema (Diskretisierung nur nach der Zeit) von

$$\begin{aligned}
 (1.14) \quad & u_t = u'' + e^u \\
 & u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = z(x)
 \end{aligned}$$

aufgefaßt werden (siehe [7]):

$$(1.15) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = u^{n+1} + e^{u^n}, \quad k := \frac{1}{\Delta t}.$$

Also kann man u_2 durch Lösung von (1.14) und anschließenden Übergang $t \rightarrow \infty$ erhalten. Das ist ein Widerspruch zu [19], wonach $u(x,t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ gilt, wenn $u(x,0) \geq u_2$ gilt. Damit ist Behauptung 2 bewiesen.

An diesem Beispiel sieht man weiter, daß es durchaus vorkommen kann, daß sich Lösungen und Oberlösungen schneiden. Wir haben in Abb.1.2 u_2 und die Oberlösung v_{13} aufgetragen.

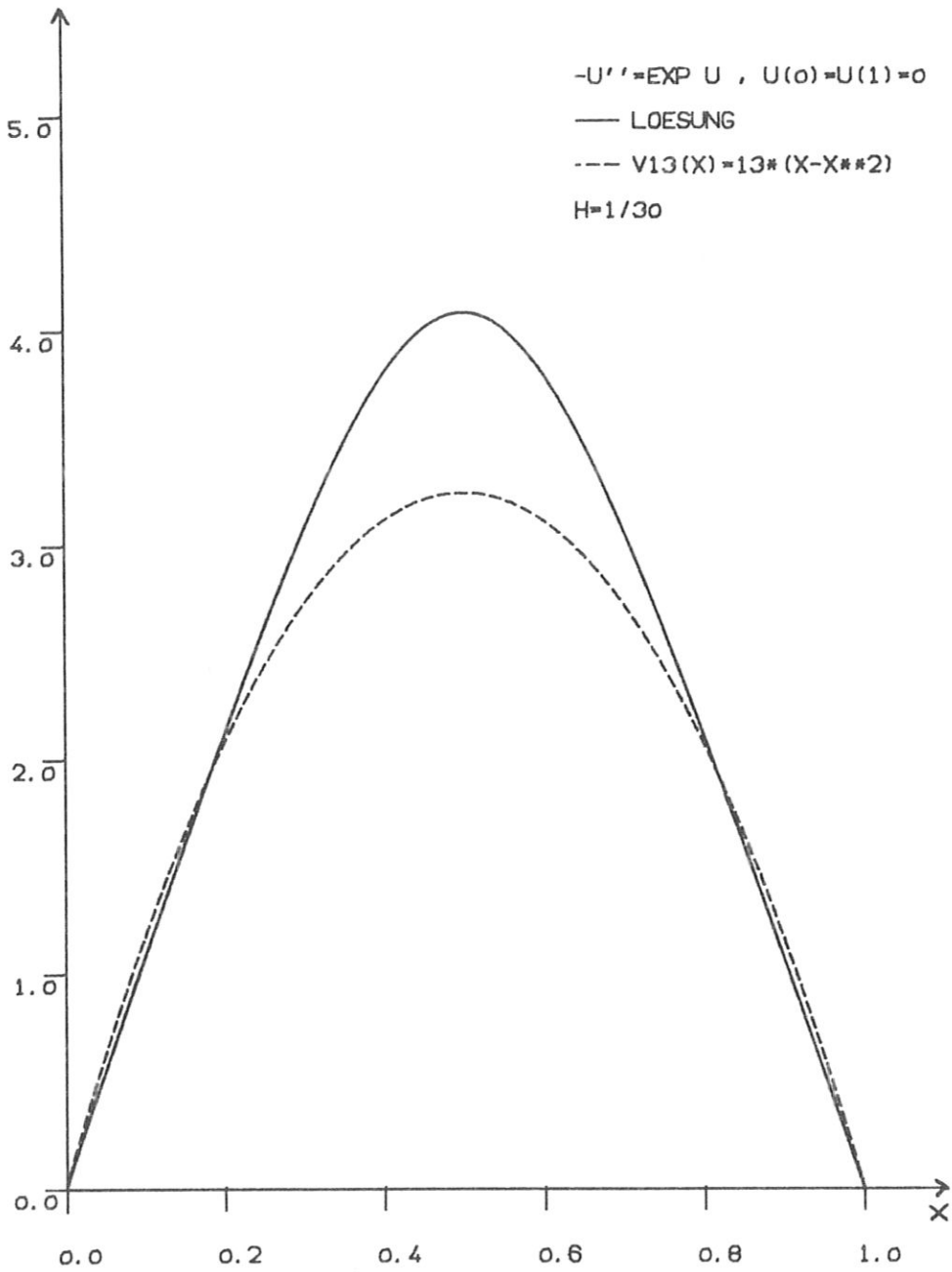


Abb. 1.2

1.3 Ein einfaches Beispiel für ein physikalisches System mit mehreren Gleichgewichten: Stabknickung.

Wir wollen nun ein Beispiel aus der Mechanik betrachten, das wohl historisch das erste Problem war, an dem Verzweigungen von Lösungen beobachtet worden sind (Euler, Bernoulli, Lagrange). Die Darstellung folgt Reiss [38].

Ein dünner, elastischer Stab werde senkrecht aufgestellt und von oben her belastet. Dann beobachtet man im Experiment folgendes: Ist die Last sehr klein, so wird der Stab etwas kürzer und dicker, bleibt aber gerade. Erhöht man nun kontinuierlich die Last, so stellt man fest, daß es einen kritischen Wert gibt, bei dem der Stab knickt. Erhöht man die Last weiter, so wird die Auslenkung immer stärker.

Außerdem hat der Stab aber für jede Last T einen Gleichgewichtszustand, bei dem er gerade ist.

Für eine Last T , die größer ist als der kritische Wert T_0 , hat der Stab also mindestens zwei Gleichgewichtszustände.

Die klassische lineare Elastizitätstheorie sagt eine eindeutige Lösung für jedes Problem voraus - sie ist daher nicht brauchbar zur Beschreibung der Knickung **eines Stabes**.

Wir wollen kurz die nichtlineare Theorie beschreiben.

Sei der Stab so aufgestellt, daß beide Enden auf der x -Achse liegen, das obere Ende sei in x -Richtung beweglich.

Der Zustand des Stabes werde beschrieben durch $\psi(x)$, den Winkel zwischen der x -Achse und der Mittellinie des Stabes, und durch seine Verschiebungen $u(x)$ und $w(x)$ in x - und y -Richtung. λ sei ein Parameter, der proportional zur angebrachten Last ist. Dann erhält man die Differentialgleichungen

$$(1.16a) \quad \psi_{xx} + \lambda \sin \psi = 0 \quad 0 < x < 1$$

$$(1.16b) \quad \psi_x(0) = \psi_x(1) = 0$$

$$(1.17a) \quad u_x = \cos \psi - 1, \quad w_x = \sin \psi, \quad 0 < x < 1$$

$$(1.17b) \quad u(0) = w(0) = w(1) = 0$$

(1.16b) bedeutet, daß die Krümmung der Mittellinie in den Endpunkten verschwindet, die Enden dürfen aber frei rotieren. (1.17b) bedeutet, daß das untere Ende des Stabes fest ist und das obere Ende auf der x -Achse liegen muß.

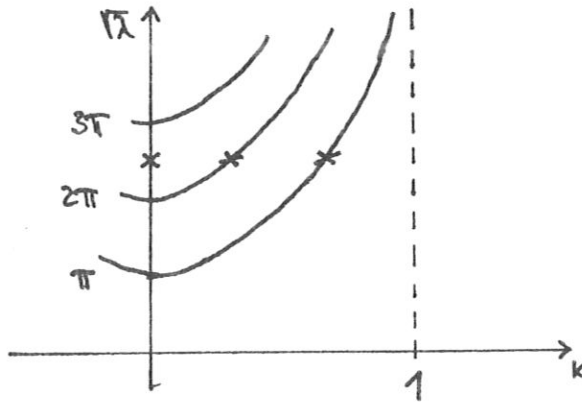
Ist eine Lösung von (1.16) gefunden, muß (1.17) gelöst werden. Man findet nun, daß die Lösungen durch Jacobi'sche elliptische Integrale gegeben werden und daß die kritischen Werte durch die Eigenwerte des zu (1.16), (1.17) gehörenden linearen Problems

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \psi_{xx} + \lambda \psi &= 0 & 0 < x < 1 \\ \psi_x(0) = \psi_x(1) &= 0 \\ u_x = 0 \quad w_x = \psi & & 0 < x < 1 \\ u(0) = w(0) = w(1) &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt sind.

Nehmen wir als Maß für die Deformation des Stabes $k := \sin \frac{\psi(0)}{2}$,

$0 \leq \psi(0) < \pi$, so kann man die Lösungen in folgendem Diagramm veranschaulichen:



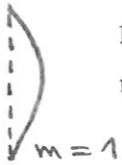
Verzweigungs- bzw. Bifurkationsdiagramm
für Stabknickung.

Aus diesem Diagramm kann man ablesen:

- 1) Für $\lambda < \pi^2$ gibt es nur die triviale Lösung $\psi(x) \equiv 0$, d.h. der Stab kann nicht knicken.
- 2) Für $4\pi^2 < \lambda < 9\pi^2$ gibt es 3 verschiedene nicht-negative Lösungen: $\psi \equiv 0$ und zwei andere, durch "x" gekennzeichnet.

usw.

Um festzustellen, welche Lösung sich für $\lambda > \pi^2$ einstellen wird, muß man in diesem Beispiel die jeweils zugehörige potentielle Energie berechnen. Es stellt sich heraus, daß die stabilste Lösung jeweils die auf dem bei $\lambda = \pi^2$ bifurkierenden Ast liegende ist.



Die Lösungen auf den anderen Zweigen haben Knoten, und zwar $m - 1$, wenn sie auf dem m -ten Zweig liegen.

1.4 Kritische und isolierte Lösungen; Bifurkationstheorie

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß es Lösungen verschiedenen Typs gibt. Dieser Abschnitt dient dazu, diese Dinge genauer zu fassen. Wir betrachten die Gleichung

$$(1.19) \quad L u = f(x, u; \lambda) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = g$$

wobei wieder die bei (1.5) formulierten Glattheitsvoraussetzungen erfüllt seien und $f \in C^{1+\alpha}(D \times \mathbb{R}^2)$ gelte.

Definition 1.3 Sei (λ, u) Lösung von (1.19).

(λ, u) heißt kritische Lösung von (1.19),

wenn $k := \max_{x \in \bar{D}} f_u(x, u(x); \lambda)$ Eigenwert von

$$(1.20) \quad L v + (k - f_u(x, u; \lambda)) v - \mu v = 0 \text{ in } D, \quad v|_{\partial D} = 0$$

ist, also

$$(1.21) \quad L v - f_u(x, u; \lambda) v = 0 \text{ in } D, \quad v|_{\partial D} = 0$$

nicht-triviale Lösungen hat.

Andernfalls heißt (λ, u) isolierte Lösung.

u heißt kritische (isolierte) Lösung von

$$(1.22) \quad L u = f(x, u) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = g,$$

wenn $L v - f_u(x, u) v = 0, \quad v|_{\partial D} = 0$ nicht-triviale Lösungen (nur die triviale Lösung) hat und u Lösung von (1.22) ist.

Eine Lösung (λ_0, u_0) heißt Verzweigungspunkt (Bifurkationspunkt) von (1.19),

wenn es in jeder Umgebung von (λ_0, u_0) mindestens zwei Lösungen $(\lambda, u_1),$

(λ, u_2) gibt mit $u_i \rightarrow u_0$ für $\lambda \rightarrow \lambda_0, \quad i = 1, 2.$

Beispiele

1) Kritische Lösung von

$$(1.3) \quad -\Delta u = \lambda e^u \text{ in } D \subset \mathbb{R}^2, \quad u|_{\partial D} = 0$$

ist $(\lambda^*, u^*),$ alle anderen Lösungen sind isoliert.

2) $(\lambda, 0)$ ist kritische Lösung der Stabknickungsgleichungen (1.16), (1.17),

wenn λ Eigenwert der linearen Gleichung (1.18) ist: (1.18) ist für

$u = 0$ gerade die (1.21) entsprechende Gleichung. Ist λ kein Eigenwert,

so ist $(\lambda, 0)$ isolierte Lösung.

Alle kritischen Lösungen von (1.3) und (1.16), (1.17) sind auch Bifurkationspunkte. Während Bifurkationspunkte stets kritische Lösungen sind, braucht eine kritische Lösung nicht unbedingt Bifurkationspunkt zu sein: Ein Beispiel hierfür findet man in [5], S.121, Beispiel 1.

In einer hinreichend kleinen Umgebung einer isolierten Lösung ist eine Differentialgleichung eindeutig lösbar. Dies folgt aus dem Satz über implizite Funktionen ([48] S. 190).

Während es noch relativ wenig Literatur über die Berechnung isolierter Lösungen gibt, die "hinter" einem kritischen Punkt liegen, gibt es eine reichhaltige mathematische Literatur über das Auffinden von Verzweigungspunkten: die Bifurkations-Theorie. (siehe z.B. [5]). Dort findet man auch einen geschichtlichen Überblick).

Den Inhalt dieser Theorie kann man kurz so zusammenfassen:

Die Bifurkationstheorie will

- a) Verzweigungspunkte (λ_0, u_0)
- b) die Anzahl der Verzweigungen in (λ_0, u_0)
- c) das Verhalten dieser Lösungen für λ nahe λ_0 feststellen.

Das Verhalten der Lösungen außerhalb einer kleinen Umgebung von λ_0 ist zwar wichtig, aber nicht Gegenstand der Bifurkationstheorie."

(J.B.Keller in [31], S.17).

Die Bifurkationstheorie ist "nur eine erste Näherung an die Theorie nicht-linearer Gleichungen" ([5], S.128), denn zum einen gibt es Differentialgleichungen mit mehreren Lösungen, die keine kritische Lösung (und also auch keinen Bifurkationspunkt) besitzen (vgl 4.4), zum anderen wird üblicherweise die Annahme gemacht, daß es ein u_0 gibt, sodaß (λ, u_0) Lösung des Verzweigungsproblems ist für alle λ (vgl [5], S.142). Diese Voraussetzung machen wir nicht, und wir behandeln auch Gleichungen, bei denen sie nicht erfüllt ist. Ein Vergleich der Abbildungen 4.1 und 4.4 zeigt deutlich den Unterschied.

1.5 Bisher vorhandene numerische Erfahrungen.

Wir wollen nun verschiedene numerische Verfahren auf ihre Anwendbarkeit bei Randwertproblemen mit mehreren Lösungen prüfen und zugleich einen Überblick geben über bei diesem Problem bisher gesammelte numerische Erfahrungen. Die auftretenden Funktionen seien stets Elemente eines geeigneten Banachraums B .

1.5 1 Die Picarditeration (Kontraktionssatz)

Als Picarditeration bezeichnet man die Iteration

$$(1.23) \quad Lu^{n+1} = f(x, u^n) \quad \text{in } D, \quad u^{n+1}|_{\partial D} = g \\ u^0 \text{ vorgegeben}$$

zur gegebenen Differentialgleichung

$$(1.5) \quad Lu = f(x, u) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = g.$$

Wenn der in einem geeigneten Banachraum durch $u^n \rightarrow u^{n+1}$ gegebene Operator $L^{-1}F$ kontrahierend ist, folgt die Konvergenz einer durch (1.23) erzeugten Folge gegen eine Lösung von (1.5) nach dem

Kontraktionssatz ([48], S. 30): Es sei X ein vollständiger metrischer Raum und $A: X \rightarrow X$ eine Kontraktion. A besitzt dann genau einen Fixpunkt $u^* \in X$. Dieser Fixpunkt läßt sich durch eine Iterationsfolge $\{u^n\}$ mit beliebigem Anfangselement u^0 approximieren.

Aus diesem Satz folgt sofort: Hat (1.5) mehrere Lösungen, so kann $L^{-1}F$ nicht überall kontrahierend wirken.

In [13], S. 99 f zeigt Collatz, wie das Iterationsverfahren (1.23) auch noch in Fällen zum Erfolg führen kann, in denen $L^{-1}F$ nicht kontrahierend ist und bisher kein Konvergenzsatz vorliegt. Er behandelt das Beispiel

$$(1.24) \quad -\Delta u = x^2 + y^2 + u^3 \quad u|_{\partial B} = 0 \\ B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 = x^2 + y^2 < 1\}$$

Es konnten alle 3 Lösungen berechnet werden durch folgendes Verfahren: Es wird der Ansatz

$$v^1(r) = \sum_{j=1}^q a_j (1 - r^{2j})$$

gemacht, und dann wird rückwärts v^0 durch (1.23) ausgerechnet. Die noch freien Koeffizienten werden durch Approximation von $u = 0$ durch $v^1 - v^0$ mit einer Alternante der Länge $q + 1$ bestimmt. Erhöhung von q erhöht die Genauigkeit. $\max |v^1(r) - v^0(r)|$ liefert eine Fehlerschranke.

Es kann aber auch vorkommen, daß $L^{-1}F$ echt expandierend wirkt.

Marder - Weitzner weisen nach ([35] S. 435 f), daß die tiefe Lösung von

$$(1.25)^1) \quad u_{xx} + \frac{1}{x} u_{yy} = e^{-u} \quad \text{in } R \subset \mathbb{R}^2, \quad u|_{\partial R} = g \\ R \text{ ein Rechteck}$$

¹⁾ Das Lösungsverhalten von (1.25) entspricht dem von (1.3) weitgehend.

grundsätzlich nicht mit der Iteration (1.23) berechnet werden kann, da der Operator $T_u := -L^{-1}e^{-u}$ einen Eigenwert ≥ 1 hat, wenn u jenseits des Bifurkationspunktes liegt (dh $\|u\|_\infty \geq \|u^*\|_\infty$).

Sie benutzen statt dessen die Iteration

$$(1.26) \quad \begin{aligned} Lu^{n+1/3} &= \exp(-u^n) & Lu^{n+2/3} &= \exp(-u^{n+1/3}) \\ Lu^{n+1} &= (1-\alpha)u^n + 2\alpha u^{n+1/3} - \alpha u^{n+2/3}, \end{aligned}$$

wobei α so zu wählen ist, daß alle Eigenwerte von

$$p_\alpha(T_u) := (1-\alpha) + 2\alpha T_u - \alpha T_u^2$$

kleiner 1 sind. Es gelang ihnen, mit diesem Verfahren 2 Lösungen des diskretisierten Analogons von (1.25) zu denselben Randwerten zu finden.

Eine mathematisch befriedigende Behandlung dieses Problemkreises scheint noch auszustehen.

1.5.2 Das Verfahren von Hagenow - Lackner

In der Plasmaphysik gut bewährt hat sich das folgende Verfahren ([24]), das numerisch sehr zuverlässig ist. Das Problem wird so umformuliert, daß es (jedenfalls bei den bisher verwandten Funktionen)eindeutig lösbar wird. Und zwar wird α so bestimmt, daß das diskretisierte Analogon von

$$(1.27) \quad Lu = \alpha^2 f(u) \quad \text{in } D \subset \mathbb{R}^2, \quad u|_{\partial D} = g$$

eine Lösung u mit vorgegebener Norm hat.

Seien u^0, α_0 gegeben, $\|u^0\|_\infty = M$.

Dann lautet die Iteration

$$(1.28) \quad \begin{aligned} L\hat{u}^{n+1} &= \alpha_n^2 f(u^n) & \hat{u}^{n+1}|_{\partial D} &= g \\ u^{n+1} &:= \frac{M}{\|\hat{u}^{n+1}\|} \hat{u}^{n+1}, & \alpha_{n+1}^2 &:= \alpha_n^2 \frac{M}{\|\hat{u}^{n+1}\|} \end{aligned}$$

Am mathematischen Beweis dieses Verfahrens wird gearbeitet ([23]).

1.5.3 Das Newton - Kantorowitsch - Verfahren

Während es eine reichhaltige Literatur über die Anwendung des Newtonverfahrens auf Differentialgleichungen mit nur einer Lösung gibt, haben sich bisher erst wenige Autoren mit der Anwendung dieses Verfahrens auf Differentialgleichungen mit mehreren Lösungen befaßt. Nur über diese Er-

gebnisse wollen wir hier berichten. Die für uns interessanten Ergebnisse für eindeutig lösbare Differentialgleichungen stellen wir in 3.2 dar.

Als Newtonverfahren bezeichnen wir die Iteration

$$(1.29) \quad \begin{aligned} &u^0 \text{ vorgegeben} \\ &Lu^{n+1} - f_u(x, u^n)u^{n+1} = f(x, u^n) - f_u(x, u^n)u^n \\ &u^{n+1}|_{\partial D} = g \end{aligned}$$

zur Lösung von

$$(1.5) \quad Lu = f(x, u) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = g.$$

(Über die Fréchetableitung von Operatoren siehe z.B. [11], § 16).

Allgower/Jeppson schlagen in [1], S. 18 vor, die mit ihrem Verfahren erhaltene Näherung mit einem Iterationsverfahren zu verbessern, z.B. mit dem Newtonverfahren. Sie sprechen dann von dem "Phänomen", daß manche Lösungen mit gewissen Newton-ähnlichen Verfahren nicht berechnet werden könnten. Es heißt dort: "A recent hybrid Newton algorithm (...) appears often (but not always) to be able to overcome the attractive or repulsive properties of solutions if the starting points are chosen sufficiently near a solution..."

Wie wir in Kapitel 3 sehen werden, läßt sich beweisen, daß genau die isolierten Lösungen mit dem Newtonverfahren berechnet werden können. Dies ist kein ganz neues Ergebnis, es steht im wesentlichen z.B. schon bei Simpson [46], S. 372 f, der auch für einige λ Lösungen von

$$(1.3) \quad -\Delta u = \lambda e^u \quad \text{in } (0,1) \times (0,1) \quad u|_{\partial D} = 0$$

berechnet hat. Allerdings gelang ihm das nur für λ -Werte, die noch ziemlich weit entfernt sind von dem kritischen $\lambda^* \approx 6.8$:

flache Lösung bis $\lambda = 6.7$

hohe (instabile) Lösung bis $\lambda = 6.1$.

Seine Methode: Diskretisieren, Newtonverfahren mit direkter Gleichungsauflösung.

Für 2-Punkt-Randwertprobleme zeigte Keller in [30], daß isolierte Lösungen durch Anwendung des Newtonverfahrens auf die diskretisierten Gleichungen berechnet werden können. Als Beispiel bringt

er

$$(1.30) \quad u'' = e^u \quad u(0) = u(1) = 0,$$

also eine eindeutig lösbare Differentialgleichung, bei der das Newtonverfahren für beliebige Startfunktionen konvergiert, weil e^u konvex ist [44]. Simpson und Keller betonen, daß es schwierig sei, Startfunktionen zu finden, die bzgl. des Newtonverfahrens im Einzugsbereich der Lösungen liegen, und daß es hierzu bisher keine Theorie gebe. Das verwundert nicht weiter, wenn man bedenkt, daß man schon bei eindeutig lösbaren Differentialgleichungen nicht immer ohne Suchstrategien auskommt.

Unter anderem über die Berechnung von isolierten Lösungen von gewöhnlichen Randwertproblemen bzw. von Integralgleichungen mittels eines kontinuierlichen Analogons des Newtonverfahrens wird in dem Review - Paper [49] von Mathematikern in Dubna berichtet. Allerdings findet man auch in dieser Arbeit nichts über das Auffinden von Startfunktionen.

1.5.4 Sehnenverfahren

Ein Sehnenverfahren erhält man, wenn man in (1.29) $f_u(x,u)$ durch eine Konstante k ersetzt. Wird $k \leq \min f_u$ gesetzt, so entsteht das uns schon bekannte Verfahren (1.10), (1.11). Mit seiner Anwendbarkeit hat sich Parter befaßt (siehe z.B. [36]), auch im Hinblick auf zusätzliche Probleme bei der Diskretisierung. Mit diesem Verfahren lassen sich jedoch nur Lösungen berechnen, die über sich eine Oberlösung (unter sich eine Unterlösung) haben, ohne daß eine weitere Lösung dazwischen liegt oder schneidet. Instabile Lösungen können mit diesem Verfahren nicht berechnet werden. Daraus, daß u Infimum einer durch (1.10), (1.11) erzeugten Funktionenfolge ist, folgt schon Stabilität von u gegen kleine Störungen von oben ([40], S. 992). Wir wollen uns hierzu das Beispiel (1.12) - $u'' = e^u$ in $(0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$ aus 1.2 ansehen. Wir hatten festgestellt, daß es keine Oberlösung gibt, die über der hohen Lösung u_2 liegt und dabei die Annahme zum Widerspruch geführt, u_2 könnte Grenzwert einer durch (1.10), (1.11) erzeugten fallenden Folge sein. Beginnt man aber mit einer unter der hohen Lösung liegenden Oberlösung zu iterieren, so konvergiert die Folge gegen die flache Lösung.

Für eindeutig lösbare Differentialgleichungen ist gezeigt worden [17],

daß $k := (\min f_u + \max f_u)/2$ der günstigste Wert ist, wenn man keine weiteren Voraussetzungen über f macht. Wir konnten mit diesem Wert für k auch instabile Lösungen berechnen (z.B. von (1.12)) und meinen, daß sich eine Beschäftigung mit diesem Verfahren lohnt (vgl. Abschnitt 4.1).

1.5.5 Fixpunktsuche nach Allgower/Jeppson

Allgower, Jeppson haben folgendes Verfahren entwickelt ([1], [27], [2]):

(1.5) wird diskretisiert, und dann wird nach Fixpunkten von

$$(1.31) \quad v = A^{-1}F(u) = : m(u)$$

gesucht. Nach dem Brouwer'schen Fixpunktsatz hat (1.31) mindestens einen Fixpunkt in einem abgeschlossenen Simplex oder Würfel $C^n \subset \mathbb{R}^n$, wenn $m: C^n \rightarrow C^n$ stetig ist. Die Fixpunktsuche besteht nun in einer systematischen Suche nach einem Spornersimplex in C^n .

Probleme dieses Verfahrens:

- 1) Es muß ermittelt werden, was man als C^n wählt, damit $m: C^n \rightarrow C^n$ erfüllt ist, dh man braucht a-priori-Schranken für die Lösungen. Siehe hierzu z.B. [20], wo solche Schranken im Hinblick auf das Allgower-Jeppson-Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen entwickelt werden.
- 2) Ist $m(C^n) \not\subset C^n$ (dieser Fall tritt z.B. immer ein, wenn C^n eine Umgebung der tiefen Lösung von (1.25) oder der hohen Lösung von (1.3) ist, vgl. 1.5.1), so ist die Anwendbarkeit des Verfahrens noch nicht bewiesen. Allgower-Jeppson berichten jedoch von praktischen Erfolgen auch in diesem Fall ([1], S. 16): Sie konnten beide Lösungen von

$$\Delta u + \frac{1}{4} e^u = 0$$

$$(1.32) \quad u = 0 \text{ für } x = 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ für } 0 \leq x \leq 1, y = 0 \text{ oder } y = x$$

berechnen, wenn sie C^n nur groß genug machten.

- 3) Wie in 1.5.3 schon kurz angesprochen, schlagen die Autoren selbst vor, ihr Verfahren nur zu benutzen, um erste Näherungen zu erhalten. Denn mit vernünftigen Aufwand läßt sich keine große Genauigkeit erreichen. Verkleinerung der Simplizes (\Rightarrow Verbesserung der Genauigkeit bei fester Gitterpunktzahl) und Erhöhung der Gitterpunktzahl (\Rightarrow Verkleinerung des Diskretisierungsfehlers) erhöhen erheblich die aufzuwendende Arbeit.

So stimmen die in [1], S.17 gegebenen Lösungen von (1.32) nur in der 1. Dezimale. Über die hierfür gebrauchte Rechenzeit machen die Autoren keine Angaben.

Beispiel:

$$(1.33) \quad -u'' = + u^2 - 6u + 5, \quad u(0) = u(1) = 0$$

Man weiß (vgl. 4.4), daß diese Differentialgleichung 2 Lösungen hat. Eine davon erfüllt $0 \leq u \leq 1$. Die haben wir mit dem in [2] gegebenen Programm berechnet.

Simplexlänge $1/50$, also $|\text{Fehler}| \leq 0.1$ $n = 3(2) 19$

Rechenzeit: $0.3''$ für $n = 3$, $2.26''$ für $n = 19$.

1.5.6 Andere Verfahren

Ein anderes mögliches, jedoch wohl nicht sehr effektives und noch nicht bewiesenes Verfahren findet sich in [35], S. 441-445. Es wird $u(x, y_0)$ vorgeschrieben. Dann wird $u(x, y)$ als Potenzreihe in y entwickelt, mit von x abhängenden Koeffizienten. Ist der Konvergenzradius zu klein, muß die Entwicklung mehrfach wiederholt werden. Nachteil: die Randbedingungen können nicht vorgegeben werden, sondern man muß versuchen, sie durch Variation von $u(x, y_0)$ zu erzeugen. — Häufig angewandt werden

SOR-Verfahren. Voraussetzung zur Anwendung des SOR-Verfahrens zur Lösung des durch Diskretisierung entstandenen nicht-linearen Gleichungssystems ist jedoch, daß die Funktionaldeterminante positiv definit ist. Diese Voraussetzung ist häufig nicht erfüllt. Simpson ([46], S. 372 f) gibt als Beispiel hierfür eine Umgebung der hohen Lösung von

$$(1.3) \quad -\Delta u = \lambda e^u \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = 0.$$

Über eine Anwendung der Theorie der monotonen Operatoren zum Auffinden mehrerer Lösungen ist uns keine Arbeit bekannt. Da aus Monotonie eines Operators T auf einem Banachraum Existenz höchstens einer Lösung der Gleichung $Tu = 0$ in diesem Raum folgt, wäre wohl das Hauptproblem, geeignete Funktionenmengen zu finden, die eine Lösung enthalten und auf denen die Theorie der monotonen Operatoren anwendbar ist.

Beispiel:

$$(1.12) \quad -u'' = e^u \quad u(0) = u(1) = 0$$

Bei dem Versuch, Satz 3¹ aus [42] anzuwenden, stellte sich heraus, daß

das sehr einfach ist in einer Umgebung der flachen Lösung. Es wurde früher schon darauf hingewiesen, daß diese flache, stabile Lösung mit praktisch jedem Standardverfahren bequem zu berechnen ist. Es mißlang jedoch der Versuch, eine Umgebung der instabilen Lösung zu finden, in der der Satz anwendbar wäre.

Man weiß, daß es in jeder Umgebung einer isolierten Lösung u_0 eine Funktionenmenge gibt, auf der für $Tu := Lu - f(x, u)$ $Tv \leq Tw \Rightarrow v \leq w$ oder $Tv \leq Tw \Rightarrow w \leq v$ gilt, je nachdem, ob u_0 eine stabile oder instabile Lösung ist (siehe [40], Theorem 4.2) Zur Angabe dieser Menge braucht Sattinger jedoch die Lösung u_0 . Das Ergebnis läßt sich also wohl kaum für numerische Zwecke verwenden.

Fast alle bisher vorgestellten Verfahren benützen Differenzenverfahren. Es erhebt sich die Frage, wie es mit der Anwendung der Methode der finiten Elemente steht. Hier scheinen erste Erfahrungen gesammelt worden zu sein in Zusammenhang mit der Biegung eines Stabes (siehe [6]).

Zusammenfassend können wir wohl feststellen:

Bei den praktisch brauchbaren Verfahren fehlen die Konvergenzbe-
weise. Die theoretisch fundierten Verfahren sind in der Praxis kaum
brauchbar.

1.6 Eindeutige Lösbarkeit und Maximumprinzip

Ein weiteres Licht auf das Problem wirft die Beschäftigung mit dem Maximumprinzip. Erfüllt L die in 1.2 formulierten Bedingungen, so gilt: es gibt genau eine Eigenfunktion φ_0 von L mit $\varphi_0(x) > 0$ in D .*) Der zugehörige Eigenwert λ_0 ist reell, einfach und > 0 , alle anderen Eigenwerte haben einen größeren Realteil. (siehe [41], S. 22).

Definition 1.4 λ_0 heißt Haupteigenwert von L in D .

In diesem Abschnitt machen wir die zusätzliche Voraussetzung, daß $Lu = -(a u_{x_1})_{x_1} - (a u_{x_2})_{x_2}$ gilt mit $a(x) > 0$ auf K und $a \in C^{1+\alpha}(K)$ für ein Kompaktum $K \supset D$ mit $\text{dist}(\partial D, \partial K) > 0$.

Satz 1.4 Gilt

$$(1.34) \quad f_u(x, u) < \lambda_0 \text{ auf } \bar{D} \times \mathbb{R},$$

so hat (1.5) $Lu = f(x, u)$ in D , $u|_{\partial D} = g$ höchstens eine Lösung.

*) und $\|\varphi_0\|_2 = 1$. Im folgenden wollen wir stets annehmen, daß auftretende Eigenfunktionen in $L_2(D)$ auf 1 normiert sind.

Bemerkung 1 Diese Bedingung ist scharf. Schon bei Zulassen des Gleichheitszeichens wird die Aussage ungültig: Für $Lu = -u''$ in $(0,1)$ ist $\lambda_0 = \pi^2$ und man hat $\sin \pi x$ als nicht-triviale Lösung von

$$-u'' = \pi^2 u, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Bemerkung 2 Die Aussage von Satz 1.4 ist der Grund dafür, daß es allgemein üblich ist, (1.34) oder die wegen $\lambda_0 > 0$ noch schärfere Bedingung

$$(1.35) \quad f_u(x,u) \leq 0$$

zu stellen: eindeutig lösbare Differentialgleichungen sind sehr viel leichter zu handhaben.

Beispiel:

Wir wollen uns unter diesem Gesichtspunkt noch einmal

$$(1.12) \quad -u'' = e^u \quad u(0) = u(1) = 0$$

ansehen. Es ist $e^{u_1} < e^{0.15} \approx 1.16 < \pi^2$. Arbeitet man also mit Bedingung (1.34) statt mit (1.35), so kann man u_1 noch miterfassen, sonst nicht. Es ist natürlich $\max e^{u_2} \approx 60 > \pi^2$.

Zum Beweis von Satz 1.4 brauchen wir das Maximumprinzip. Auch bei der Formulierung des Maximumprinzips für $Lu - h(x)u$ wird allgemein die einschränkendere Voraussetzung $h(x) \leq 0$ gewählt ([15] II, [37] usw). Da wir jedoch $h(x) = f_u(x,u) < \lambda_0$ setzen möchten, formulieren wir uns das Maximumprinzip neu:

Satz 1.5 Sei λ_0 der Haupteigenwert von L in D , und es gelte $h(x) \leq \lambda < \lambda_0$. Ist dann $Lu - h(x)u \leq 0$ in D , $u|_{\partial D} \leq 0$, so ist $u \leq 0$.

Bemerkung: Dieser Satz steht für $L = -\Delta$ in [29], S. 552.

Beweis von Satz 1.5: Es gibt ein \bar{D} umfassendes Gebiet $D' \subset K$, für das λ der Haupteigenwert von L ist. Denn der Haupteigenwert hängt unter gewissen, hier erfüllbaren Bedingungen stetig vom Gebiet ab, und man kann immer $\lambda = \lambda_0 - \epsilon$ wählen mit beliebig kleinem, aber festem $\epsilon > 0$ (vgl. [41] S.29 oben und [15] I, S.423. An dieser Stelle brauchen wir die Zusatzvoraussetzung über L). Sei w die zugehörige Eigenfunktion, also $Lw - \lambda w = 0$, $w(x) > 0$ in D' , $w|_{\partial D'} = 0$. Wir brauchen nun das

Verallgemeinertes Maximumprinzip ([37], S. 72f) Erfülle u in D

$Lu - h(x)u \leq 0$. Wenn eine Funktion $w \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ existiert mit $w(x) > 0$ auf \bar{D} und $Lw - h(x)w \geq 0$ in D , dann kann $u(x)/w(x)$ kein nicht-negatives Maximum in D haben, oder es ist konstant.

Unsere Eigenfunktion w erfüllt die hier verlangten Bedingungen: es ist $w(x) > 0$ auf $\bar{D} \subset D'$ und $Lw - h(x)w = Lw - \lambda w + (\lambda - h(x))w \geq 0$ in D . Also hat $u(x)/w(x)$ kein nicht-negatives Maximum in D , oder es ist konstant. Wegen $u|_{\partial D} \leq 0$ und somit auch $u/w|_{\partial D} \leq 0$ folgt hieraus $u(x)/w(x) \leq 0$ in \bar{D} , also auch $u(x) \leq 0$ in \bar{D} .

Damit ist Satz 1.5 bewiesen.

Beweis von Satz 1.4 Angenommen, u_1 und u_2 seien beide Lösung von (1.5).

Dann gilt

$$\begin{aligned} L(u_1 - u_2) &= f(x, u_1) - f(x, u_2) & (u_1 - u_2)|_{\partial D} &= 0 \\ &= f_u(x, v)(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

mit $v = u_2 + d(u_1 - u_2)$, $0 < d < 1$.

Wegen $f_u(x, v) < \lambda_0$ folgt durch zweimalige Anwendung von Satz 1.5

$$u_1 - u_2 = 0.$$

Damit ist Satz 1.4 bewiesen.

Kapitel 2

Approximation der Lösungen mit Differenzenverfahren.

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Lösung von

$$(2.1) \quad -\Delta u = f(x, u) \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

mittels Differenzenverfahren befassen. Dabei sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit stückweise glattem Rand, so daß der Gauß'sche Integralsatz gilt und die dritten Ableitungen der Lösung v von $-\Delta v = 1$, $v|_{\partial D} = 0$ in \bar{D} existieren und beschränkt sind. Weiter gelte $f \in C^{2+\alpha}(\bar{D} \times \mathbb{R})$. Diskretisiert wird auf die übliche Weise: 5-Stern mit Shortley-Weller-Approximation am Rand.

Die wesentliche Aussage ist, daß das durch Diskretisierung von (2.1) entstandene nichtlineare Gleichungssystem für $h \rightarrow 0$ genau so viele Lösungen hat wie die Differentialgleichung (2.1). Es gehen also durch Diskretisieren keine Lösungen verloren, und es kommen auch keine dazu.

Außerdem wird gezeigt, daß der Fehler bei der Approximation einer isolierten Lösung von (2.1) von der Ordnung $O(h^2)$ ist. Wir haben also quadratische Konvergenz für $h \rightarrow 0$.

Der Grund für die Beschränkung auf den Differentialoperator Δ ist, daß die aus der Literatur übernommenen Abschätzungen (vorwiegend von Bramble) nur für $L = -\Delta$ verfügbar sind.

2.1 Vorbereitungen

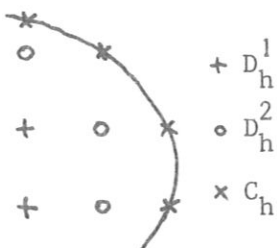
Wir folgen der Darstellung in [8], da wir die dort bewiesenen Abschätzungen später benutzen werden.

Über die Ebene werde ein quadratisches Gitter mit Gitterlänge h gelegt.

D_h^1 sei die Menge der Gitterpunkte in D , deren vier Nachbarn noch in D liegen.

D_h^2 sei die Menge der Gitterpunkte in D , die nicht in D_h^1 liegen.

C_h sei die Menge der Schnittpunkte des Gitters mit ∂D .



$$D_h^1 \cup D_h^2 =: D_h$$

$$D_h \cup C_h =: \bar{D}_h$$

D und D_h seien so beschaffen, daß für $P \in D_h^2$ stets mindestens 2 Nachbarpunkte in D_h liegen, jedoch höchstens 2 davon in D_h^1 . $h \in h^*$ können wir ohne Einschränkung stets als so klein annehmen, daß \bar{D}_h zusammenhängend ist, d.h. ist $P \in D_h$, $Q \in \bar{D}_h$, so gibt es $\{P_s\}_{1 \leq s \leq s_0} \subset \bar{D}_h$, so daß $P_1 = P$, $P_{s_0} = Q$ gilt und P_{s+1} Nachbar von P_s ist.

Sei $V: \bar{D}_h \rightarrow \mathbb{R}$ eine allgemeine Gitterfunktion. Dann definieren wir für $(x_1, x_2) \in D_h^1$:

$$(2.2) \quad -\Delta_h V(x_1, x_2) := h^{-2} \left\{ 4 V(x_1, x_2) - V(x_1+h, x_2) - V(x_1-h, x_2) + \right. \\ \left. - V(x_1, x_2+h) - V(x_1, x_2-h) \right\}.$$

Für $(x_1, x_2) \in D_h^2$ mit $(x_1+h, x_2), (x_1, x_2+h) \in D_h$, $(x_1-\alpha h, x_2), (x_1, x_2-\beta h) \in C_h$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$ definieren wir:

$$(2.3) \quad -\Delta_h V(x_1, x_2) := 2 h^{-2} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) V(x_1, x_2) - \frac{1}{1+\alpha} V(x_1+h, x_2) + \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} V(x_1-\alpha h, x_2) - \frac{1}{1+\beta} V(x_1, x_2+h) + \right. \\ \left. - \frac{1}{\beta(1+\beta)} V(x_1, x_2-\beta h) \right\}$$

Entsprechend für die anderen Punkte in D_h^2 .

Für $\alpha = \beta = 1$ fallen die Definitionen (2.2) und (2.3) zusammen.

Wir benutzen die abkürzende Schreibweise

$$(2.4) \quad |V|_S := \max_{P \in S} |V(P)| \quad S \subset \bar{D}_h.$$

Lemma 1 Sei $v \in C^4(\bar{D})$, $v(x_1, x_2) = V(x_1, x_2)$ für $(x_1, x_2) \in \bar{D}_h$,

$$M_j := \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in D \\ i \leq j}} \left| \frac{\partial^j v}{\partial x_1^i \partial x_2^{j-i}} \right| \quad j = 3, 4$$

Dann gilt

$$(2.5) \quad \left| \Delta v(P) - \Delta_h V(P) \right|_{D_h^1} \leq \frac{h^2 M_4}{6} \\ \left| \Delta v(P) - \Delta_h V(P) \right|_{D_h^2} \leq \frac{2 h M_3}{3}.$$

Wir betrachten nun das lineare Problem

$$(2.6) \quad -\Delta u - k u + f = 0 \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = g.$$

Dabei sei die Funktion k beschränkt und so beschaffen, daß (2.6) eindeutig

lösbar ist, dh $\bar{k} := \max_{x \in \bar{D}} |k(x)|$ sei kein Eigenwert von

$$(2.7) \quad -\Delta w + (\bar{k} - k)w - \lambda w = 0 \quad w|_{\partial D} = 0.$$

Diskretisierung von (2.6):

$$(2.8) \quad \begin{aligned} -\Delta_h U(P) - k(P) U(P) + f(P) &= 0 & \text{für } P \in D_h \\ U(P) &= g(P) & \text{für } P \in C_h \end{aligned}$$

Als Diskretisierung von (2.7) betrachten wir

$$(2.9) \quad \begin{aligned} -\Delta_h W + (\bar{k} - k)W - \mu W &= 0 & \text{in } D_h^1 \\ W &= 0 & \text{auf } D_h^2 \end{aligned}$$

Man weiß, daß die Eigenwerte λ_i von (2.7) und μ_i von (2.9) reell und positiv sind. Beide Folgen seien nach Größe geordnet. Für festes i_0 gilt

$$(2.10) \quad \mu_{i_0} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \lambda_{i_0}.$$

Lemma 2 Sei $V: \bar{D}_h \rightarrow \mathbb{R}$ eine allgemeine Gitterfunktion. (2.6) sei eindeutig lösbar und h sei hinreichend klein. Dann existiert eine von h unabhängige Konstante C , so daß

$$(2.11) \quad |V|_{\bar{D}_h} \leq C \left\{ |\Delta_h V + kV|_{D_h^1} + h^2 |\Delta_h V + kV|_{D_h^2} + |V|_{C_h} \right\}$$

gilt.

Dabei ist h mindestens so klein, daß $\mu_i \neq \bar{k}$ gilt für alle i . (Das ist wegen der Voraussetzung $\lambda \neq \bar{k}$ und wegen (2.10) möglich). C ist mindestens so groß wie $\max \left\{ \frac{1}{\varrho}, 1 + \frac{\bar{k}}{\varrho} \right\}$, $\varrho := \min_i |\mu_i - \bar{k}|$.

Zum Beweis aller Aussagen siehe [8].

2.2 Konvergenz gegen isolierte Lösungen der Differentialgleichung.

Wir wollen nun voraussetzen, daß Gleichung (2.1) eine isolierte Lösung (vgl. Abschnitt 1.4) hat und daraus folgern, daß das diskretisierte Analogon ebenfalls eine Lösung hat, die für $h \rightarrow 0$ quadratisch gegen die Lösung von (2.1) konvergiert. Dieser Satz wurde zuerst von Simpson (72) bewiesen (siehe [46], S. 362f), jedoch unter den einschränkenden Annahmen $f(x,0) \geq 0$, $f_u(x,u) > 0$. Außerdem stellte sich heraus, daß der Simpson'sche Beweis mehrere Ungenauigkeiten enthält.

Satz 2.1 Sei $u^* \in C^4(\bar{D})$ eine isolierte Lösung von

$$(2.1) \quad -\Delta u = f(x, u) \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = 0.$$

Dann hat für hinreichend kleines h das diskretisierte Problem

$$(2.12) \quad \begin{aligned} -\Delta_h U_h(P) &= f(P, U_h(P)) & \text{für } P \in D_h \\ U_h(P) &= 0 & \text{für } P \in C_h \end{aligned}$$

eine Lösung U_h , für die

$$(2.13) \quad \max_{P \in \bar{D}_h} |U_h(P) - u^*(P)| = O(h^2)$$

gilt.

Der Beweis wird im wesentlichen wie bei Simpson geführt, jedoch konnten einzelne Argumente vereinfacht werden. Die Beweisidee ist folgende:

Die Lösung u^* von (2.1) wird als Startfunktion für das vereinfachte Newtonverfahren zur Lösung von (2.12) genommen. Der Kantorowitsch-Satz liefert dann sowohl Existenz der Lösung von (2.12) als auch Abschätzung (2.13). Zum Nachweis der Anwendbarkeit des Satzes braucht man die in 2.1 dargelegten Bramble'schen Abschätzungen.

Satz 2.2 (Kantorowitsch, siehe [34], Satz 12.1)

Seien B_1, B_2 Banachräume, $F: M \subset B_1 \rightarrow B_2$. F sei fréchetdifferenzierbar in $S(x_0, R) := \{x_0 \in B_1 \mid \|x_0\| \leq R\}$ und F' erfülle dort $\|F'(x) - F'(y)\| \leq L\|x - y\|$. $\Gamma_0 := F'(x_0)^{-1}$ existiere und es sei $\|\Gamma_0\| \leq b_0$, $\|\Gamma_0 Fx_0\| \leq \eta_0$.

Ist dann

$$h_0 := b_0 L \eta_0 < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad r_0 := \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{b_0 L} \leq R,$$

so konvergiert $x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 Fx_n$ zu einer Lösung $x^* \in S(x_0, r_0)$ von $Fx = 0$.

Beweis von Satz 2.1

Sei B_2 der Banachraum der auf \bar{D}_h definierten reellwertigen Gitterfunktionen mit der Norm $\|W\| := |W(P)|_{\bar{D}_h}$. Sei $B_1 \subset B_2$ der Teilraum derjenigen Gitterfunktionen, die auf C_h verschwinden.

Sei $T: B_1 \rightarrow B_2$ definiert durch

$$(2.14) \quad (TW)(P) := \Delta_h W(P) + f(P, W(P)) \quad \text{für } P \in D_h$$

$$(TW)(P) := W(P) \quad \text{für } P \in C_h.$$

W ist genau dann Lösung von (2.12), wenn $TW = 0$ gilt.

Die Fréchetableitung von T an der Stelle $W \in B_1$ sei mit $T'(W)$ bezeichnet. Durch Nachrechnen findet man, daß

$$(2.15) \quad T'(W)V(P) = \Delta_h V(P) + f_u(P, W(P))V(P) \quad \text{für } P \in D_h$$

$$T'(W)V(P) = V(P) \quad \text{für } P \in C_h$$

für $V \in B_1$ gilt. $T'(W)$ ist für festes h beschränkt.

Wir wählen nun $U^0 = u^*|_{\bar{D}}$ und zeigen, daß Satz 2.2 anwendbar ist, wenn h klein genug ist. Wir können $S(U^0, R) = S(U^0, 1)$ wählen.

$$\text{z.z.: } \|T'(W_1) - T'(W_2)\| \leq L \|W_1 - W_2\| \quad \text{in } S(U^0, 1).$$

$$\begin{aligned} \|T'(W_1) - T'(W_2)\| &= \sup_{V \neq 0} \frac{1}{\|V\|} \|T'(W_1)V - T'(W_2)V\| \\ &= \sup_{V \neq 0} \frac{1}{\|V\|} \left| \Delta_h V + f_u(P, W_1)V - \Delta_h V + \right. \\ &\quad \left. - f_u(P, W_2)V \right|_{\bar{D}_h} \\ &\leq |f_u(P, W_1) - f_u(P, W_2)|_{\bar{D}_h} \\ &\leq L \|W_1 - W_2\| \end{aligned}$$

$$\text{mit } L := \sup_{|z-u^*|_{\bar{D}} \leq 1} |f_{uu}(x, z)|_{\bar{D}}$$

L ist von h unabhängig.

$$\text{z.z.: } T'(U^0)^{-1} \text{ existiert und } b_0 \text{ kann von } h \text{ unabhängig gewählt werden.}$$

Da u^* als isolierte Lösung vorausgesetzt ist, ist

$$-\Delta v - f_u(x, u^*)v = 0 \quad \text{in } D, \quad v|_{\partial D} = 0$$

eindeutig lösbar. Wegen (2.10) ist dann auch

$$-\Delta_h v - f_u(P, u^*)v = 0 \quad \text{in } D_h, \quad v = 0 \text{ auf } C_h$$

für hinreichend kleines h , $0 < h \leq h^*$, eindeutig lösbar.

Das bedeutet aber: $T'(U^0)^{-1}$ existiert für $0 < h \leq h^*$.

Sei $V \in B_1$. Für hinreichend kleines h gilt nach (2.11)

$$(2.16) \quad |V|_{\bar{D}_h} \leq C \left\{ |\Delta_h V + f_u(P, U^0)V|_{D_h^1} + h^2 |\Delta_h V + f_u(P, U^0)V|_{D_h^2} \right\}.$$

Nun sei $T'(U^0)V =: S^0$, dann können wir diese Ungleichung schreiben als

$$(2.17) \quad |T'(U^0)^{-1}S^0|_{\overline{D}_h} \leq C \{ |S^0|_{D_h^1} + h^2 |S^0|_{D_h^2} \}.$$

Ohne Einschränkung können wir $h^{*2} \leq 1$ annehmen. Dann haben wir

$$\|T'(U^0)^{-1}S^0\| \leq 2C \|S^0\|, \text{ also } \|T'(U^0)^{-1}\| \leq 2C =: b_0.$$

$$\underline{\text{z.z.:}} \quad \|T'(U^0)^{-1}T(U^0)\| =: \nu_0 \leq M h^2.$$

Anwendung von (2.17) mit $S^0 = T(U^0)$ liefert wegen $U^0 = u^*$ und (2.5)

$$\begin{aligned} |T'(U^0)^{-1}T(U^0)|_{\overline{D}_h} &\leq C \{ |\Delta_h U^0 + f(P, U^0)|_{D_h^1} + h^2 |\Delta_h U^0 + f(P, U^0)|_{D_h^2} \} \\ &\leq C \{ |\Delta_h U^0 - \Delta U^0|_{D_h^1} + h^2 |\Delta_h U^0 - \Delta U^0|_{D_h^2} \} \\ &\leq C \left\{ \frac{h^2}{6} M_4 + h^2 \cdot \frac{2h}{3} M_3 \right\} \\ &\leq M h^2. \end{aligned}$$

$$\underline{\text{z.z.:}} \quad h_0 < \frac{1}{2}$$

$h_0 = b_0 L \nu_0 \leq \tilde{C} h^2 < \frac{1}{2}$, wenn nur h^* klein genug ist. Dabei ist \tilde{C} eine von h unabhängige Konstante.

$$\underline{\text{z.z.:}} \quad r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{b_0 L} = O(h^2) \leq R = 1$$

Das folgt unmittelbar aus $h_0 \leq \tilde{C} h^2$, da alle anderen Größen von h unabhängig sind.

Durch Anwendung von Satz 2.2 folgt nun die Existenz einer Lösung von $TU = 0$. Dieses U erfüllt

$$\Delta_h U(P) + f(P, U(P)) = 0 \quad \text{für } P \in D_h, \quad U(P) = 0 \quad \text{für } P \in C_h$$

und es gilt $U \in S(U^0, r_0)$, also $|U - U^0|_{\overline{D}_h} \leq r_0 = O(h^2)$.

Damit ist Satz 2.1 bewiesen.

2.3 Existenz von Lösungen der Differentialgleichung, wenn die Differenzgleichungen Lösungen haben.

Während der vorhergehende Satz also gezeigt hat, daß durch Diskretisierung keine isolierten Lösungen verloren gehen, sagt der folgende Satz, daß durch Diskretisierung auch keine Lösungen dazukommen, jedenfalls im Grenzübergang $h \rightarrow 0$. Für $h > 0$ gibt es jedoch Beispiele für den Verlust (vgl 4.3) und das Hinzukommen (vgl 4.2) von Lösungen.

Auch für lineare Differentialgleichungen ist ein entsprechender Satz erst 1973 bewiesen worden [25].

Satz 2.3 Sei $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge von Gitterlängen. Sei $\{U_{h_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Lösungen von

$$(2.18) \quad \begin{aligned} -\Delta_h U_h &= f(P, U_h) && \text{für } P \in D_h, \\ U_h &= 0 && \text{für } P \in C_h \end{aligned}$$

mit

$$(2.19) \quad \max_{P \in D_{h_i}} |U_{h_i}(P)| \leq M \quad \text{für alle } i.$$

Dann gibt es Fortsetzungen $u_i(x)$ von $U_{h_i}(P)$ auf D , so daß $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $L_2(D)$ kompakt ist und jeder Häufungspunkt \bar{u} eine Lösung von

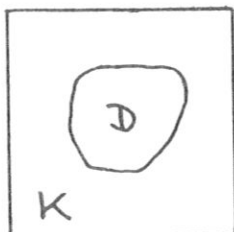
$$(2.1) \quad -\Delta u = f(x, u) \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

ist mit $|\bar{u}(x)| \leq M$ für alle $x \in D$.

Auch diesen Satz hat Simpson unter den zusätzlichen Voraussetzungen $f(x, 0) \geq 0$, $f_u(x, u) > 0$ bewiesen. Wie beim Beweis des vorigen Satzes konnte die Beweisidee übernommen werden.

Beweisidee:

Um D legen wir ein großes Quadrat K herum, auf das wir alle auftretenden



Funktionen durch 0 fortsetzen. Dadurch wird die Behandlung dieser Funktionen auf einer Umgebung von ∂D einfacher.

Der Beweis läuft im wesentlichen in drei Schritten ab:

1. Definition der Fortsetzungen u_i und Existenzbeweis für einen Häufungspunkt \bar{u} .

In jedem Quadrat der Länge h_i , dessen Ecken durch 4 Gitterpunkte gebildet werden, sind die u_i von der Form

$$u_i(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + cx_1x_2 + d,$$

wobei die Koeffizienten durch die Werte von U_{h_i} in den 4 Gitterpunkten festgelegt werden. Die u_i sind stetig, aber an den "Nahtlinien" möglicherweise nicht differenzierbar.

Mit Hilfe von Abschätzungen von Simpson und Bramble wird gezeigt, daß die u_i in der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{W^1(\mathcal{A})}$ (siehe (2.24)) gleichmäßig beschränkt sind. Daraus folgt Kompaktheit in L_2 , also existiert ein Häufungspunkt $\bar{u} \in L_2(D)$.

Problem: Glattheit der u_i und damit von \bar{u} . Von $f(x, \bar{u}(x))$ weiß man in diesem Stadium also nicht einmal, ob es stetig ist!

2. Definition von Funktionen w_i , für die $w_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} w$ in L_2 gilt mit

$$(2.20) \quad w(x) = \int_D G(x, y) f(y, \bar{u}(y)) dy.$$

Dabei ist G die zum Problem (2.1) gehörende Green'sche Funktion. G existiert und ist eindeutig bestimmt (S. 1, [9], S. 109).

\bar{u} ist ein Häufungspunkt von $\{u_i\}$. Im folgenden bezeichne $\{u_i\}$ nunmehr eine gegen \bar{u} konvergierende Teilfolge.

Seien W_{h_i} die Lösungen von

$$(2.21) \quad \begin{aligned} -\Delta_{h_i} W_{h_i}(P) &= f(P, u_i(P)) && \text{für } P \in D_{h_i}^1 \\ W_{h_i}(P) &= 0 && \text{für } P \in K_{h_i} \setminus D_{h_i}^1. \end{aligned}$$

Die W_{h_i} werden stückweise konstant fortgesetzt, diesmal über Quadraten der Länge h_i mit Zentren in den Gitterpunkten. So erhält man die w_i . Mit Hilfe von stückweise konstanten Fortsetzungen von $f(P, u_i(P))$, der nach [9], S. 103 existierenden diskreten Green'schen Funktion $G_{h_i}(P, Q)$ und Abschätzungen von Bramble wird die Konvergenz von $\{w_i\}$ gegen die durch (2.20) definierte Funktion w gezeigt.

3. $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ haben denselben L_2 -Limes, es ist also

$$\bar{u}(x) = \int_{\mathcal{D}} G(x,y) f(y, \bar{u}(y)) dy$$

und \bar{u} ist glatt, das heißt: \bar{u} ist eine klassische Lösung von (2.1).

Hierfür werden Abschätzungen für die Lösungen der diskreten Probleme benutzt. Daß die schwache Lösung auch klassische Lösung ist, folgt dann nach [41], S. 20.

Beweis:

1. Definition der u_i und Konvergenz einer Teilfolge.

Sei K ein Quadrat mit $\bar{D} \subset K$ und $2h < \text{dist}(\partial D, \partial K)$, dessen Seiten zu den Gitterlinien parallel sind. K_h sei die Menge der in K gelegenen Gitterpunkte. Die in D_h definierten Gitterfunktionen werden im folgenden stets durch 0 auf K_h fortgesetzt.

Dann werden die u_i in K definiert durch folgende Forderungen:

1) u_i ist in jedem von 4 Gitterpunkten begrenzten Quadrat der Seitenlänge h_i von der Form $u_i(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + cx_1x_2 + d$.

$$2) \quad u_i(P) := \begin{cases} u_{h_i}(P) & \text{für } P \in D_{h_i} \\ 0 & \text{für } P \in K_{h_i} \setminus D_{h_i} \end{cases}$$

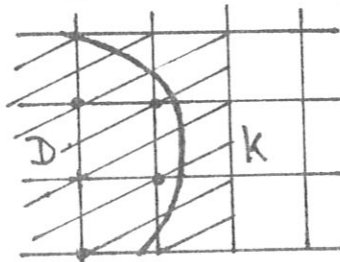
u_i ist durch diese Forderungen eindeutig bestimmt, da sich die 4 Koeffizienten aus den Funktionswerten in den 4 Gitterpunkten bestimmen.

u_i ist stetig auf jeder zwei Quadraten gemeinsamen Seite:

Ohne Einschränkung können wir $x_1 = k = \text{konst.}$ annehmen. Dann ist $u_i(k, x_2) = ak + bx_2 + ckx_2 + d = a'x_2 + b'$ voll bestimmt durch die Funktionswerte an den beiden Endpunkten der Strecke. Also stimmen die beiden auf dieser Strecke zusammengesetzten Teilfunktionen hier überein.

Also ist u_i auf K stetig. Außerdem ist $u_i|_{\partial K} = 0$, jedoch ist i.a.

$u_i|_{\partial D} \neq 0$.



schraffiert:

hier ist $u_i \neq 0$ möglich.

Durch Nachrechnen überzeugt man sich davon, daß diese Definition der u_i mit der von Bramble in [9], (3.3) übereinstimmt. Die dortige Definition lautet für unser Problem

$$u_i(x_1, x_2) = (1 + (x_1 - \bar{x}_1) \nabla_1) (1 + (x_2 - \bar{x}_2) \nabla_2) U_{h_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

für $\bar{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1 + h_i$, $\bar{x}_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2 + h_i$, wobei ∇_1 der erste vorwärtsgerichtete Differenzenoperator in x_1 -Richtung ist, also

$$(2.22) \quad \nabla_1 v(x_1, x_2) = \frac{v(x_1+h, x_2) - v(x_1, x_2)}{h} .$$

Entsprechend ∇_2 in x_2 -Richtung.

Wir dürfen also die Abschätzung (3.4) aus [9] benutzen und erhalten

$$(2.23) \quad \|u_i\|_{W^{(A)}}^2 \leq C h_i^2 \sum_{P \in K_{h_i}} \{ (U_{h_i}(P))^2 + (\nabla_1 U_{h_i}(P))^2 + (\nabla_2 U_{h_i}(P))^2 \} .$$

Dabei ist

$$(2.24) \quad \|v\|_{W^{(A)}}^2 := \int_K (v^2 + v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2) dx$$

Die Konstante C in (2.23) ist von h_i und U_{h_i} unabhängig.

Zur weiteren Abschätzung der rechten Seite von (2.23) brauchen wir folgenden

Hilfssatz 1 Für jede (2.18) erfüllende Gitterfunktion U_h auf K_h mit $U_h(P) := 0$ für $P \in K_h \setminus D_h$ gilt

$$(2.25) \quad h^2 \sum_{P \in K_h} \{ (\nabla_1 U_h(P))^2 + (\nabla_2 U_h(P))^2 \} \leq \frac{16}{15} h^2 \sum_{P \in D_h} U_h(P) f(P, U_h(P)) .$$

(2.25) ist eine Modifizierung von (3.19) in [45] .

Beweis: Wir zeigen

$$(2.26) \quad h^2 \sum_{P \in K_h} \{ (\nabla_1 U_h(P))^2 + (\nabla_2 U_h(P))^2 \} \leq \frac{16}{15} h^2 \sum_{P \in D_h} U_h(P) (-\Delta_h U_h(P)) .$$

Wegen der Gültigkeit von (2.18) folgt daraus dann (2.25).

Bezeichnen wir den gemäß (2.2), (2.3) definierten Differenzenoperator in K mit L_h , so ist $\Delta_h U_h(P) = L_h U_h(P)$ für $P \in D_h^1$, jedoch wird man im Randstreifen D_h^2 i.a. keine Gleichheit haben. Im folgenden geht es im wesentlichen um eine Abschätzung dieses Unterschiedes am Rand, denn es gilt

$$(2.27) \quad h^2 \sum_{P \in K_h} \{(\nabla_1 U_h(P))^2 + (\nabla_2 U_h(P))^2\} = h^2 \sum_{P \in K_h} U_h(P) (-L_h U_h(P)).$$

Zum Beweis wendet man auf $\sum_{P \in K_h} \nabla_j U_h(P) \nabla_j U_h(P)$, $j = 1, 2$, partielle Summation an (siehe z.B. [33], S. 322).

Nach [45], (3.23) und (3.24), folgt nun

$$(2.28) \quad h^2 \sum_{P \in D_h} U_h(P) (\Delta_h - L_h) U_h(P) \leq \frac{1}{16} h^2 \sum_{P \in K_h} \{(\nabla_1 U_h(P))^2 + (\nabla_2 U_h(P))^2\}.$$

Simpson führt diese Abschätzungen nur für den Fall durch, daß zwei Nachbarn von $P \in D_h^2$ in C_h liegen. Wie man sich schnell überzeugt, folgt die Behauptung in den anderen Fällen auch, sogar viel einfacher.

Aus (2.27) und (2.28) zusammen folgt nun (2.26), wegen $U_h(P) = 0$ für $P \in K_h \setminus D_h$.

%

Wenden wir nun (2.25) auf (2.23) an und berücksichtigen wir, daß $|U_{h_i}(P)| \leq M$ vorausgesetzt ist, also $h_i^2 \sum_{P \in D_{h_i}} (U_{h_i}(P))^2$ und

$\sum_{P \in D_{h_i}} h_i^2 U_{h_i}(P) f(P, U_{h_i}(P))$ beschränkt sind, so folgt

$$(2.29) \quad \|u_i\|_{W(\omega)}^2 \leq C \quad \text{unabhängig von } h_i.$$

Hilfssatz 2 $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist kompakt in $L_2(D)$.

Wir verwenden das Kompaktheitskriterium für $L_2(K)$, wie es z.B. in [48], S. 201f steht. Wegen $D \subset K$ folgt dann Kompaktheit in $L_2(D)$. Für $L_2(K)$ statt $L_p(\mathbb{R}^r)$ lautet der

Satz von Kolmogoroff: Sei $M \subset L_2(K)$. M ist genau dann relativ kompakt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1) M ist beschränkt, d.h. $\sup \|u\|_2 < \infty$
- 2) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_K |u(x+t) - u(x)|^2 dx = 0$ gilt gleichmäßig für $u \in M$.

Daß 1) erfüllt ist, folgt aus (2.29). u_i ist fast überall differenzierbar, wir haben also

$$\begin{aligned} \left(\int_K (u_i(x+t) - u_i(x))^2 dx \right)^{1/2} &= \|u_i(x+t) - u_i(x)\|_2 \\ &= \left\| \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \cdot t_j + o(|t|^2) \right\|_2 \\ &\leq C \left\| \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right\|_2 |t| + o(|t|^2). \end{aligned}$$

Wiederum wegen (2.29) strebt dieser Ausdruck gegen 0 für $t \rightarrow 0$, und zwar unabhängig von i , also gleichmäßig.

%

2. Definition der w_i , L_2 -Konvergenz von $\{w_i\}$ gegen w mit

$$w(x) = \int G(x,y) f(y, \bar{u}(y)) dy.$$

Sei W_{h_i} die durch

$$\begin{aligned} - \Delta_{h_i} W_{h_i}(P) &= f(P, u_i(P)) & P \in D_{h_i}^1 \\ W_{h_i}(P) &= 0 & P \in K_{h_i} \setminus D_{h_i}^1 \end{aligned}$$

definierte Gitterfunktion.

$Q_i(P)$ bezeichne das Quadrat der Seitenlänge h_i mit Mittelpunkt P . Die w_i definieren wir dann so, daß sie in den Gitterpunkten mit W_{h_i} übereinstimmen und auf jedem Quadrat $Q_i(P)$ konstant sind. Wegen $W_{h_i}(P) = 0$ für $P \in D_{h_i}^2$ gilt $w_i|_{\partial D} = 0$. Außerdem definieren wir noch die auf jedem $Q_i(P)$ konstanten Funktionen \tilde{f}_i und \tilde{G}_{h_i} durch ihre Werte in den Gitterpunkten:

$$\tilde{f}_i(P) := \tilde{f}(P; u_i) := \begin{cases} f(P, u_i(P)) & P \in D_{h_i}^1 \\ f(P, 0) & P \in K_{h_i} \setminus D_{h_i}^1 \end{cases}$$

$\tilde{G}_{h_i}(P, Q) = G_{h_i}(P, Q)$ für $P, Q \in K_{h_i}$, wobei $G_{h_i}(P, Q)$ die zu (2.21) gehörende diskrete Green'sche Funktion ist, d.h. für jedes $Q \in K_{h_i}$ ist G_{h_i} Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -\Delta_h G_h(P, Q) &= h^{-2} \delta_{P, Q} & P \in D_h^1 \\ G_h(P, Q) &= 0 & P \in K_h \setminus D_h^1, \end{aligned}$$

wobei Δ_h bezüglich P gebildet ist und $\delta_{P, Q} = \begin{cases} 1 & P=Q \\ 0 & P \neq Q \end{cases}$ gilt [9].

Sei nun \bar{u} ein Häufungspunkt von $\{u_i\}$. Im folgenden bezeichne $\{u_i\}$ nur noch eine gegen \bar{u} konvergierende Teilfolge.

Hilfssatz 3: $\tilde{f}(x; u_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} f(x, \bar{u}(x))$ in $L_2(D)$.

Es ist

$$(2.30) \quad \|\tilde{f}(x; u_i) - f(x, \bar{u})\|_2 \leq \|\tilde{f}(x; u_i) - f(x, u_i)\|_2 + \|f(x, u_i) - f(x, \bar{u})\|_2$$

Abschätzung des ersten Summanden:

Für $x \in Q_i(P)$, $P \in D_{h_i}^1$ gilt mit dem Mittelwertsatz fast überall

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x; u_i) - f(x, u_i(x)) &= f(P, u_i(P)) - f(x, u_i(x)) \\ &= \sum_{j=1}^2 \{f_{x_j}(y, v) + f_u(y, v) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(y)\} (x_j - p_j) \end{aligned}$$

wobei y, v Zwischenstellen sind und $P = (p_1, p_2)$ gesetzt wurde.

Es ist $|x_j - p_j| \leq h_i$.

$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(y)$ läßt sich durch erste Differenzen von U_{h_i} ausdrücken, es ist

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(y) \right| \leq \sum_{m=1}^2 |\nabla_j U_{h_i}(P_m)|, \text{ wobei } P_1 = P \text{ ist und es von der Lage von } x \text{ ab-}$$

hängt, welcher Nachbar von P als P_2 zu nehmen ist. Die übrigen Größen lassen sich durch Konstanten abschätzen, da $y \in K$ und $|v| \leq M$.

Wir haben also

$$(2.31) \quad |\tilde{f}(x; u_i) - f(x, u_i(x))| \leq C_1 h_i + C_2 h_i \sum_{m=1}^2 (|\nabla_1 U_{h_i}(P_m)| + |\nabla_2 U_{h_i}(P_m)|).$$

Für $x \in Q_i(P)$, $P \in D_{h_i}^2$ haben wir

$$\tilde{f}(x; u_i) - f(x, u_i(x)) = f(P, 0) - f(P, u_i(P)) + f(P, u_i(P)) - f(x, u_i(x)).$$

P hat einen Nachbarn Q mit $u_i(Q) = 0$. Wir haben also

$$|u_i(P)| = |u_i(P) - u_i(Q)| = \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_{j_0}}(\bar{y}) \right| h_i \quad \text{und somit}$$

$$|f(P, 0) - f(P, u_i(P))| = \left| f_u(P, \bar{v}) \frac{\partial u_i}{\partial x_{j_0}}(\bar{y}) \right| h_i, \quad \text{wobei es von der Lage von}$$

Q abhängt, ob $j_0 = 1$ oder $j_0 = 2$ gilt.

Wir bekommen also auch im Fall $P \in D_{h_i}^2$ für $|\tilde{f}(x; u_i) - f(x, u_i(x))|$ eine Abschätzung wie in (2.31), es ist nur C_2 durch C_3 zu ersetzen.

Insgesamt haben wir also

$$(2.32) \quad \int_K (\tilde{f}(x; u_i) - f(x, u_i(x)))^2 dx \leq \\ \leq C_4 h_i^2 + C_5 h_i^4 \sum_{P \in K_{h_i}} \{(\nabla_1 U_{h_i}(P))^2 + (\nabla_2 U_{h_i}(P))^2\} \\ = O(h_i^2) \quad \text{wegen (2.25).}$$

Dabei kommt der Faktor h_i^2 durch die Integration über $Q_i(P)$, während die Vereinigung der Quadrate die Anzahl der Summanden vergrößert.

Abschätzung des 2. Summanden in (2.30):

Wieder mit dem Mittelwertsatz erhalten wir

$$(2.33) \quad \|f(x, u_i) - f(x, \bar{u})\|_2 \leq C \|u_i - \bar{u}\|_2.$$

Aus (2.32) und (2.33) folgt nun die behauptete Konvergenz für $i \rightarrow \infty$.

Hilfssatz 4 Es gilt $w_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} w$ in $L_2(D)$.

Nach (2.21) ist

$$\begin{aligned} -\Delta_{h_i} W_{h_i}(P) &= f(P, u_i(P)) & P \in D_{h_i}^1 \\ W_{h_i}(P) &= 0 & P \in K_{h_i} \setminus D_{h_i}^1. \end{aligned}$$

Also gilt nach (3.8) und (3.9) in [9]

$$(2.34) \quad W_{h_i}(P) = h_i^2 \sum_{Q \in D_{h_i}^1} G_{h_i}(P, Q) f(Q, u_i(Q)).$$

Nach Definition von w_i , \tilde{f}_i und \tilde{G}_{h_i} gilt dann auch

$$w_i(x) = \sum_{Q \in D_{h_i}^1} \int_{Q_i(Q)} \tilde{G}_{h_i}(x, y) \tilde{f}(y; u_i) dy \quad \text{für } x \in Q_i(P),$$

also mit (2.20)

$$\begin{aligned} (2.35) \quad w_i(x) - w(x) &= \int_{\mathcal{D}} \{ \tilde{G}_{h_i}(x, y) \tilde{f}(y; u_i) - G(x, y) f(y, \bar{u}(y)) \} dy \\ &= \int_{\mathcal{D}} \tilde{G}_{h_i}(x, y) \{ \tilde{f}(y; u_i) - f(y, \bar{u}(y)) \} dy + \\ &\quad + \int_{\mathcal{D}} \{ \tilde{G}_{h_i}(x, y) - G(x, y) \} f(y, \bar{u}(y)) dy \\ &=: a_i(x) + b_i(x). \end{aligned}$$

Abschätzung des 1. Summanden:

Nach der Hölderschen Ungleichung ist

$$\begin{aligned} |a_i(x)| &\leq \left(\int_{\mathcal{D}} \tilde{G}_{h_i}(x, y)^2 dy \right)^{1/2} \| \tilde{f}_i - f \|_2. \\ (2.36) \quad \int_{\mathcal{D}} \tilde{G}_{h_i}(x, y)^2 dy &= \sum_{Q \in D_{h_i}^1} G_{h_i}(P, Q)^2 \int_{Q_i(Q)} 1 dy \\ &= h_i^2 \sum_{Q \in D_{h_i}^1} G_{h_i}(P, Q)^2. \end{aligned}$$

Nun ist nach Lemma 1 in [9]

$$(2.37) \quad \left(h_i \sum_{Q \in D_{h_i}^1} G_{h_i}(P, Q)^2 \right)^{1/2} \leq C \quad \text{für alle } P \in K_{h_i},$$

wobei C nur vom Durchmesser von D abhängt.

Wir haben also $|a_i(x)| \leq C \|f_i - f\|_2$ und damit auch

$$(2.38) \quad \|a_i\|_2 \leq \tilde{C} \|\tilde{f}_i - f\|_2 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

nach Hilfssatz 3.

Abschätzung des 2. Summanden in (2.35):

Definition ([48], S. 128) Sei $\{x^n\}$ eine Folge von Elementen des normierten Raumes X und $x^0 \in X$. Gilt dann für jedes stetige lineare Funktional

$f: X \rightarrow \mathbb{R} \quad |f(x^n) - f(x^0)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, so heißt $\{x^n\}$ schwach konvergent gegen x^0 .

In [9] findet man als Korollar zu Satz 4, S. 109: Für jedes feste $x \in D$

und $h \rightarrow 0$ konvergiert $\tilde{G}_h(x, y)$ als Funktion von y in L_2 schwach gegen $G(x, y)$.

Also konvergiert $\{b_i(x)\}$ aus (2.35) punktweise gegen 0 für $i \rightarrow \infty$ und $x \in D$.

Außerdem sind die $b_i(x)$ in x und i gleichmäßig beschränkt, wegen

$|\bar{u}(x)| \leq M$. Daraus folgt die L_2 -Konvergenz der b_i gegen 0 und wegen (2.35)

und (2.38) die der w_i gegen w.

z

$$3. \quad \bar{u} = \lim_{i \rightarrow \infty} \{u_i\} = \lim_{i \rightarrow \infty} \{w_i\} = w \text{ in } L_2,$$

also $\bar{u}(x) = \int_D G(x, y) f(y, \bar{u}(y)) dy$, und \bar{u} ist klassische Lösung.

Nach Definition der W_h und U_h folgt

$$(2.39) \quad \Delta_h (W_h(P) - U_h(P)) = 0 \quad P \in D_h^I$$

$$W_h(P) - U_h(P) = 0 \quad P \in C_h.$$

Hilfssatz 5 $\Delta_h(W_h(P) - U_h(P)) = O(h^{-1})$ für $P \in D_h^2$.

Wegen (2.18) und $|U_h|_{\bar{D}_h} \leq M$ ist $\Delta_h U_h(P)$ für $P \in D_h^2$ beschränkt. Es bleibt also zu zeigen, daß $\Delta_h W_h(P) = O(h^{-1})$ für $P \in D_h^2$ gilt.

z.z.: Wenn R ein Nachbar von $P \in D_h^2$ ist, gilt

$$(2.40) \quad 0 \leq h^2 \sum_{Q \in D_h^1} G_h(R, Q) \leq C h.$$

Ohne Einschränkung nehmen wir $R \in D_h^1$ an, denn für $R \in K_h \setminus D_h^1$ ist $G_h(R, Q) = 0$.

Der Beweis von (2.40) geht ähnlich wie der Beweis von Lemma 9 in [8]. Dort wird die entsprechende Aussage für die zu (2.8) mit $k=0$ gehörende Greensche Funktion bewiesen.

Wir brauchen einige Hilfsfunktionen:

$v: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$ sei Lösung von

$$-\Delta v = 1 \quad v|_{\partial D} = 0.$$

$\tilde{V}_h: \bar{D}_h \rightarrow \mathbf{R}$ sei Lösung von

$$-\Delta_h \tilde{V}_h(P) = 1 \quad \text{für } P \in D_h^1, \quad \begin{aligned} \tilde{V}_h(P) &= v(P) & \text{für } P \in D_h^2 \\ \tilde{V}_h(P) &= 0 & \text{für } P \in C_h \end{aligned}$$

$V_h: \bar{D}_h \rightarrow \mathbf{R}$ sei Lösung von

$$-\Delta_h V_h(P) = 1 \quad \text{für } P \in D_h^1, \quad V_h(P) = 0 \quad \text{für } P \in D_h^2 \cup C_h.$$

Aus (2.11) erhalten wir

$$(2.41) \quad \begin{aligned} |v - \tilde{V}_h|_{\bar{D}_h} &\leq C\{|\Delta_h v - \Delta_h \tilde{V}_h|_{D_h^1} + h^2 |\Delta_h(v - \tilde{V}_h)|_{D_h^2}\} \\ &= C\{|\Delta_h v - \Delta v|_{D_h^1} + h^2 |\Delta_h(v - \tilde{V}_h)|_{D_h^2}\} \end{aligned}$$

Es ist $|(\Delta_h - \Delta)v|_{D_h^1} \leq C_1 h$.

Beweis durch Taylorentwicklung (wegen unserer Glattheitsvoraussetzungen an D sind die 3. Ableitungen von v in \bar{D} beschränkt).

Sei $P \in D_h^2$. Dann erhalten wir nach (2.3) für $\Delta_h(v - \tilde{V}_h)(P)$ einen Ausdruck der Art

$$\Delta_h(v(P) - \tilde{V}_h(P)) = 2 h^{-2} \left\{ \frac{1}{1+\alpha} (v(P_1) - \tilde{V}_h(P_1)) + \frac{1}{1+\beta} (v(P_2) - \tilde{V}_h(P_2)) \right\}$$

mit $P_1, P_2 \in D_h$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$. Hierbei wurde ausgenutzt, daß $v(Q) - \tilde{V}_h(Q) = 0$ für $Q \in \bar{D}_h \setminus D_h^1$ gilt und höchstens zwei Nachbarn von P in D_h^1 liegen.

Nun gilt für $Q = P_1, P_2$ wegen $P \in D_h^2$

$$\begin{aligned} |v(Q) - \tilde{V}_h(Q)| &\leq |v(Q) - v(P)| + |\tilde{V}_h(P) - \tilde{V}_h(Q)| \\ &\leq \tilde{C} h, \end{aligned}$$

da die ersten Ableitungen von v und die ersten Differenzen von \tilde{V}_h beschränkt sind (um (2.27) anwenden zu können, denken wir uns \tilde{V}_h durch 0 auf ganz K_h fortgesetzt). Wir haben also

$$h^2 |\Delta_h(v - \tilde{V}_h)|_{D_h^2} \leq C_2 h.$$

Einsetzen in (2.41) liefert nun

$$(2.42) \quad |v - \tilde{V}_h|_{\bar{D}_h} \leq C_3 h.$$

Zur Abschätzung von $|V_h - \tilde{V}_h|_{\bar{D}_h}$ benutzen wir wieder (2.11). Der erste Summand verschwindet, für den zweiten erhalten wir nach (2.3) wieder einen Ausdruck, den wir durch $\max |V_h(Q) - \tilde{V}_h(Q)|$, Q Nachbar von P , und $|v(P)|$ abschätzen können. Nun ist aber

$$\begin{aligned} |V_h(Q) - \tilde{V}_h(Q)| &\leq |V_h(Q) - V_h(P)| + |\tilde{V}_h(P) - \tilde{V}_h(Q)| + |v(P)| \\ &\leq \tilde{C} h, \end{aligned}$$

da die ersten Differenzen von V_h und \tilde{V}_h beschränkt sind und $|v(P)| = O(h)$ für $P \in D_h^2$ gilt. Es folgt also

$$(2.43) \quad |V_h - \tilde{V}_h|_{\bar{D}_h} \leq C_4 h,$$

und nun aus (2.42) und (2.43)

$$(2.44) \quad |v - V_h|_{\bar{D}_h} \leq C_5 h.$$

Sei nun R ein Nachbar von $P \in D_h^2$. Dann ist wegen $v|_{\partial D} = 0$ $|v(R)| \leq C_6 h$ und nach (2.44)

$$(2.45) \quad |V_h(R)| \leq (C_5 + C_6)h.$$

Nach (2.34) haben wir aber mit $f \equiv 1$

$$V_h(R) = h^2 \sum_{Q \in D_h^1} G_h(R, Q).$$

Wegen $G_h(R, Q) \geq 0$ (siehe [9], (3.6)) folgt nun (2.40).

Sei $R \in D_h^1$ ein Nachbar von $P \in D_h^2$.

z.z.: (2.46) $W_{h_i}(R) = O(h_i).$

Nach (2.34) ist

$$|W_{h_i}(R)| = |h_i^2 \sum_{Q \in D_{h_i}^1} G_{h_i}(R, Q) f(Q, u_i(Q))|$$

also wegen $|u_i(x)| \leq M$ und $f \in C^{2+\alpha}(\bar{D} \times \mathbb{R})$

$$\leq \tilde{C} h_i^2 \sum_{Q \in D_{h_i}^1} G_{h_i}(R, Q)$$

und wegen (2.40)

$$\leq C h_i.$$

Nun ist $\Delta_h W_h(P)$ für $P \in D_h^2$ wegen (2.21), (2.3) und $W_h(P) = 0$ ein Ausdruck der Art

$$\Delta_h W_h(P) = 2 h^{-2} \left\{ \frac{1}{1+\alpha} W_h(P_1) + \frac{1}{1+\beta} W_h(P_2) \right\}, \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1, \quad P_1, P_2 \in D_h.$$

Wegen (2.46) folgt hieraus $\Delta_h W_h(P) = O(h^{-1})$ für $P \in D_h^2$.

%

$U_h - W_h$ können wir nun durch Ungleichung (2.11) für $k = 0$ abschätzen und erhalten wegen (2.39) und Hilfssatz 5

$$\begin{aligned} |W_h(P) - U_h(P)|_{D_h^-} &\leq C h^2 |\Delta_h (W_h(P) - U_h(P))|_{D_h^2} \\ &= O(h). \end{aligned}$$

Nun ist aber $\max_{x \in D} |w_i(x) - u_i(x)| = \max_{P \in D_{h_i}^1} |W_{h_i}(P) - U_{h_i}(P)|,$

also konvergiert $\{w_i - u_i\}$ gleichmäßig gegen Null, und somit auch in $L_2(D)$.

Damit haben wir gezeigt, daß

$$(2.47) \quad \bar{u}(x) = \int_D G(x, y) f(y, \bar{u}(y)) dy$$

gilt. Daß \bar{u} eine klassische Lösung von (2.1) ist, folgt nun unmittelbar aus folgendem

Satz ([41], S. 20) Sei \bar{u} eine meßbare beschränkte Funktion auf D , die (2.47) erfüllt, und f sei hölderstetig mit Exponent α . Dann ist $\bar{u} \in C^{2+\alpha}(D)$ und damit klassische Lösung von (2.1).

Kapitel 3

Anwendung des Newtonverfahrens auf nichtlineare Differentialgleichungen.

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Anwendung des Newtonverfahrens (1.29) auf die Differentialgleichung

$$(3.1) \quad Lu = f(x, u) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

beschäftigen. Dabei sei wie in den vorhergehenden Kapiteln $D \subset \mathbb{R}^2$ ein zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, $f \in C^{2+\alpha}(\bar{D} \times K)$ für jedes beschränkte $K \subset \mathbb{R}$. L sei wie in Kapitel 1 gleichmäßig elliptisch mit hölderstetigen Koeffizienten,

$$(3.2) \quad Lu = - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (a_{ij}) \text{ gleichmäßig positiv definit}$$

Die Randbedingung $u|_{\partial D} = 0$ ist keine Einschränkung gegenüber $u|_{\partial D} = g$, g glatt (siehe z.B. [15] II, S. 369).

Wie in der Übersicht 1.5.3 über bisherige Erfahrungen mit dem Newtonverfahren bei Differentialgleichungen mit mehreren Lösungen schon angekündigt, werden wir sehen, daß sich jede isolierte Lösung mit dem Newtonverfahren berechnen läßt, wenn die Startfunktion u^0 günstig gewählt wird. Deshalb ist ein Hauptanliegen dieses Kapitels, Hilfsmittel zum Auffinden von u^0 anzugeben. In fast allen Fällen ergeben sich gleichzeitig Existenzaussagen für Lösungen.

Zunächst verallgemeinern wir Ergebnisse von Schryer [44], Kalaba [29] und Collatz [11] über die monotone Konvergenz des Newtonverfahrens, wenn f konvex ist und das Maximumprinzip gilt. Die Existenz der Lösung folgt in diesem Fall aus Satz 1.2. Eine günstige Startfunktion kann angegeben werden.

Dann nehmen wir an, f hänge (linear oder nichtlinear) von einem Parameter ab und untersuchen die Lösbarkeit von (3.1) in Abhängigkeit von diesem Parameter. Dabei ergeben sich sowohl Aussagen von praktischem als auch von theoretischem Wert, da wir auf eine in der Bifurkationstheorie übliche Voraussetzung (vgl. 1.4) verzichten. Hat eine Differential-

gleichung eine isolierte Lösung u , so hat eine durch kleine Änderungen daraus gewonnene Differentialgleichung eine isolierte Lösung v , die sich von u nur wenig unterscheidet. Äste eines Bifurkationsdiagramms sind also entweder unbeschränkt, oder sie enden in einem kritischen Punkt. Die praktische Bedeutung des Satzes liegt darin, daß er in vielen Fällen das Auffinden von u^0 erleichtert: Hat man eine isolierte Lösung auf einem Ast eines Bifurkationsdiagramms, läßt sich jede Lösung auf demselben Ast bequemer berechnen. Das ist besonders dann wertvoll, wenn man dicht an Bifurkationspunkte heranmöchte.

Dann wird eine Strategie zum Auffinden einer geeigneten Startfunktion u^0 für die noch offen gebliebenen Fälle angegeben. Diese Strategie hat sich praktisch gut bewährt, ist aber noch völlig unbewiesen.

3.1 Anwendbarkeit

Satz 3.1 Sei u^* eine isolierte Lösung von

$$(3.1) \quad Lu - f(x, u) = 0 \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = 0.$$

Dann konvergieren die durch

$$(3.3) \quad (L - f_u(x, u^n))u^{n+1} = f(x, u^n) - f_u(x, u^n)u^n$$

$$u^{n+1}|_{\partial D} = 0$$

erzeugten Iterierten $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen u^* , wenn nur u^0 nahe genug an u^* ist.

Bemerkung: Die Differentialgleichungen (3.3) sind linear. Sie sind eindeutig lösbar, wenn $L - f_u(x, u^n)$ invertierbar ist. Wir werden im Folgenden sehen, daß die Invertierbarkeit gerade aus der Bedingung "u* isolierte Lösung" folgt.

Zum Beweis brauchen wir den Kantorowitsch-Satz, jedoch in einer anderen Fassung als in Kapitel 2.

Satz 3.2 (Satz 11.3 in [34]) Seien B_1, B_2 Banachräume. $F: B_1 \rightarrow B_2$ sei Fréchetdifferenzierbar in $S(x^0, R) := \{x \in B_1 \mid \|x - x^0\| < R\}$ und F' erfülle dort $\|F'(x) - F'(y)\| \leq k \|x - y\|$, $F'(x^0)^{-1}$ existiere und es sei $\|F'(x^0)^{-1}\| \leq b_0$, $\|F'(x^0)^{-1} Fx^0\| \leq \eta_0$, $h_0 := b_0 k \eta_0 \leq \frac{1}{2}$.

Ist dann

$$r_0 := \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{b_0 k} \leq R,$$

so konvergiert $x^{n+1} = x^n - F'(x^n)^{-1} Fx^n$ gegen eine Lösung $x^* \in S(x^0, r_0)$ von $Fx = 0$.

Beweis von Satz 3.1 Sei $B_1 \subset C^{2+\alpha}(\bar{D})$ derjenige Unterraum, dessen Elemente $v|_{\partial D} = 0$ erfüllen. Sei $B_2 := C(\bar{D})$, und $F: B_1 \rightarrow B_2$ sei gegeben durch $Fu := Lu - f(x, u)$.

Die Nullstellen von F sind also genau die Lösungen von (3.1).

Wegen unserer Glattheitsvoraussetzungen gilt $u^* \in B_1$ und ist F in jedem beschränkten Bereich $M \subset B_1$ fréchetdifferenzierbar mit $F'(u)v = Lv - f_u(x, u)v$.

1) z.z.: $\|F'(u) - F'(v)\| \leq k_1 \|u - v\|$ in jedem beschränkten $M \subset B_1$.

$$\begin{aligned} \|F'(u) - F'(v)\| &= \sup_{\|w\|=1} \|F'(u)w - F'(v)w\| \\ &= \sup_{\|w\|=1} \|Lw - f_u(x, u)w - Lw + f_u(x, v)w\| \\ &\leq \|f_u(x, u) - f_u(x, v)\| \leq k_1 \|u - v\|, \end{aligned}$$

da f_u in $D \times K$ lipschitzstetig ist für beliebiges beschränktes $K \subset \mathbb{R}$.

2) z.z.: es existiert ein $\tilde{R} > 0$: $F'(u^0)^{-1}$ existiert für alle $u^0 \in S(u^*, \tilde{R})$ und ist beschränkt.

$F'(u^*)^{-1}$ existiert, da u^* isolierte Lösung ist (vgl. Definition 1.3). Aus Stetigkeitsgründen folgt hieraus, daß auch $F'(u^0)^{-1}$ existiert, wenn u^0 hinreichend dicht bei u^* liegt (vgl. [34], S. 139). Außerdem ist $F'(u^0)^{-1}$ beschränkt ([11], S. 77), $\|F'(u^0)^{-1}\| \leq b_0$ für $u^0 \in S(u^*, \tilde{R})$.

Seien nun $u^0 \in S(u^*, \tilde{R}) \setminus \{u^*\}$ und $R > 0$ so gewählt, daß $u^* \in S(u^0, R)$ und $S(u^0, R) \subset S(u^*, \tilde{R})$ gilt.

3) z.z.:

$$\begin{aligned} \|F'(u^0)^{-1} Fu^0\| &\leq b_0 k_2 \|u^* - u^0\| =: \eta_0 \\ \|Fu^0\| &= \|Lu^0 - f(x, u^0) - Lu^* + f(x, u^*)\| \\ &\leq (\|L\| + \tilde{k}) \|u^0 - u^*\| =: k_2 \|u^0 - u^*\|, \end{aligned}$$

da L in $S(u^*, \tilde{R})$ beschränkt ist und f Lipschitzstetig.

4) z.z.: $\eta_0 b_0 k_1 \leq \frac{1}{2}.$

Es ist $\eta_0 b_0 k_1 = b_0^2 k_1 k_2 \|u^* - u^0\|$
und dieser Ausdruck wird beliebig klein, wenn u^0 hinreichend dicht bei u^* liegt.

5) z.z.: $r_0 \in \mathbb{R}.$

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{b_0 k_1} \in \mathbb{R} \quad \text{ist stets erreichbar, da der Zähler für}$$

$\|u^0 - u^*\| \rightarrow 0$ ebenfalls gegen 0 konvergiert, während der Nenner von $\|u^0 - u^*\|$ unabhängig ist.

Bemerkung: Wie man am Beweis sieht, hängt das maximal erlaubte $\|u^0 - u^*\|$ von den Lipschitzkonstanten von f und f_u , von $\|L\|$ und $\|(L - f_u(x, u^0))^{-1}\|$ in $S(u^*, \tilde{R})$ ab. $(L - f_u(x, u^0))^{-1}$ wird i.a. nicht positiv definit sein.

3.2 Monotone Konvergenz bei eindeutig lösbarer Differentialgleichungen.

Wir wollen nun die Voraussetzungen so sehr verschärfen, daß eindeutige Lösbarkeit und monotone Konvergenz des Newtonverfahrens gefolgert werden können. Der Satz ist dann immer noch eine Verallgemeinerung von Ergebnissen von Schryer [44] und Kalaba [29]. Außerdem gibt es Überschneidungen mit Collatz [11], S. 264-272. Alle drei setzen f als konvex (bzw. konkav) voraus und verlangen etwas dem Maximumprinzips ähnliches. Durch diese zwei Bedingungen wird die Folge der $\{u^n\}$ monoton. "f konvex" allein ist nicht hinreichend, da gibt es (experimentell gefundene) Gegenbeispiele.

Schryer setzt $f_u(x, u) \leq 0$ voraus und weist dann gleichmäßige, monotone, quadratische und globale (dh u^0 darf beliebig gewählt werden) Konvergenz nach.

Kalaba behandelt das Problem mit der aus der Optimierungstheorie stammenden Maximumoperation und kommt so auf das Newtonverfahren, das deshalb auch "quasi-linearisation" genannt wird. Er verlangt für das zugehörige lineare Problem die "positivity property"

$$(3.6) \quad L u - f_u(x, v) u \geq 0 \Rightarrow u \geq 0,$$

die auch dann noch erfüllt sein kann, wenn $f_u(x,v) \neq \lambda_0$ ist, jedoch in diesen Fällen i.A. schwierig zu beweisen ist (Bestimmung des Haupteigenwertes von $Lu - \lambda f_u(x,v) u = 0$). Das Maximumprinzip formuliert er jedoch nur für $L = -\Delta$ (vgl. 1.6). Die Existenz der Lösung und der Iterierten wird vorausgesetzt, bzw. durch Voraussetzungen erzwungen, die in der Praxis schwierig nachzuprüfen sein dürften. Unter diesen Umständen zeigt er monotone, gleichmäßige und quadratische Konvergenz.

Collatz untersucht allgemeiner die Monotonie des Newtonverfahrens bei konvexen (konkaven) Operatoren. Eine der alternativen Voraussetzungen entspricht bei Randwertproblemen gerade (3.6). Er formuliert Extremalprinzipien und einen Einschließungssatz, der die erst später entstandenen Begriffe Unter- und Oberlösung implizit verwendet. Er zeigt monotone, jedoch nur punktweise Konvergenz.

Satz 3.3 Sei L definiert durch $Lu = -(a_{x_1 x_1} u_{x_1 x_1} - a_{x_2 x_2} u_{x_2 x_2})$, $a(x) > 0$ auf M und $a \in C^{1+\alpha}(M)$ für ein Kompaktum $M \supset D$ mit $\text{dist}(\partial M, \partial D) > 0$. Sei λ_0 der Haupteigenwert von L in D und $\partial D \in C^{2+\alpha}$. $v, w \in C^{2+\alpha}(D)$ seien Unter- und Oberlösung von

$$(3.1) \quad Lu - f(x, u) = 0 \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = 0,$$

$$\text{dh es gelte} \quad \begin{aligned} Lv - f(x, v) &\leq 0 \text{ in } D, \quad v|_{\partial D} \leq 0 \\ Lw - f(x, w) &\geq 0 \text{ in } D, \quad w|_{\partial D} \geq 0. \end{aligned}$$

Weiter sei $a \leq v(x) \leq w(x) \leq b$, $f \in C^{2+\alpha}(D \times [a, b])$ mit $f_u(x, u) < \lambda_0$ und $f_{uu}(x, u) \geq 0$ in $\bar{D} \times [a, b]$. Dann hat (3.1) genau eine Lösung u , für die

$$(3.7) \quad v(x) \leq u(x) \leq w(x) \quad \text{auf } \bar{D}$$

gilt, und das Newtonverfahren mit $u^0 = v$ konvergiert gleichmäßig und monoton steigend gegen diese Lösung.

Bemerkung 1 $f_u(x, u) < \lambda_0$ sichert die Gültigkeit des Maximumprinzips.

Bemerkung 2 Statt der sonst gewählten Voraussetzung " $f \in C^{2+\alpha}(D \times K)$ für beliebiges beschränktes $K \subset \mathbb{R}$ " reicht hier $K = [a, b]$, da wir hier im Gegensatz zu sonst a-priori-Schranken für die Lösung haben.

Bemerkung 3 Ist $f_{uu}(x, u) \leq 0$, so gilt der Satz entsprechend, jedoch ist dann die Iteration mit $u^0 = w$ zu beginnen, da die Folge fällt.

Bemerkung 4 Die Wahl von u^0 ist wesentlich. Für beliebiges u^0 mit $v(x) \leq u^0(x) \leq w(x)$ sind zwar alle Iterierten ab u^1 Unterlösung mit $u^n \leq w$, der Satz braucht aber nicht mehr zu stimmen, da die Iterierten dann die Schranke v überspringen können (und erfahrungsgemäß sehr häufig tun).

Beispiel (vgl. 4.4)

$$-\Delta u = u^2 - 6u + 5 \quad \text{in } (0,1) \times (-1,1), \quad u|_{\partial D} = 0. \quad *)$$

$v = 0$ ist Unterlösung. Die Lösung w von $-\Delta w = 60$, $w|_{\partial D} = 0$ ist Oberlösung. Es ist $0 \leq w \leq 7$. Für $u \in [0, 7]$ haben wir $f_u(x, u) = 2u - 6 < \lambda_0$, denn es ist $\lambda_0 = \frac{5}{4}\pi^2$. Außerdem ist $f_{uu}(x, u) = 2 > 0$. Der Satz ist also anwendbar. Die Iteration wurde auf die diskretisierte Gleichung angewandt ($h = \frac{1}{14}$, vgl. 4.1), sie wurde sowohl mit $u^0 = v$ als auch mit $u^0 = w$ begonnen. Die Tabelle enthält jeweils die Folge der Extrema (gerundet).

$u^0 = 0$	0	0.37	0.37	...
$u^0 = w$	6.8	-5.2	-0.5	... 0.37

Auch wenn die Konvergenz bei anderem u^0 erhalten bleibt, empfiehlt es sich also, u^0 gemäß Satz 3.3 zu wählen.

Beweis von Satz 3.3

Abkürzend schreiben wir im folgenden $f(u)$ für $f(x, u)$ und $f'(u)$ für $f_u(x, u)$.

1. Existenz genau einer Lösung u , die (3.7) erfüllt.

Die Existenz mindestens einer Lösung folgt aus Satz 1.2, die höchstens einer Lösung beweist man ebenso wie Satz 1.4 (Da für den Mittelwert $z = v + d(w - v)$, $0 < d < 1$ gilt, folgt $v \leq z \leq w$, also $f'(z) < \lambda_0$).

2. Monotonie und Beschränktheit der $\{u^n\}$.

z.z.: Wenn alle Iterierten existieren, so gilt:

$$v(x) \stackrel{(a)}{\leq} u^{n-1}(x) \stackrel{(b)}{\leq} u^n(x) \stackrel{(c)}{\leq} u(x).$$

(a) ist für $n = 1$ nach Voraussetzung erfüllt, für $n > 1$ folgt es aus (b).

(b) und (c) müssen wir anders als Collatz durch Induktion beweisen, da zum Beweis der Aussage über u^n ihre Gültigkeit für u^{n-1} gebraucht wird.
 $n = 1$:

$$L(u^1 - u^0) - f'(u^0)(u^1 - u^0) = f(u^0) - Lu^0 \geq 0 \quad (u^1 - u^0)|_{\partial D} \geq 0.$$

Wegen $f'(u^0) = f'(v) < \lambda_0$ ist Satz 1.5 anwendbar, es folgt also $u^1 - u^0 \geq 0$.

$$L(u - u^1) = f(u) - f(u^0) - f'(u^0)(u^1 - u^0)$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt nun

$$\begin{aligned} &= f'(\xi)(u - u^0) - f'(u^0)(u^1 - u^0) \\ &= f'(\xi)(u - u^1) + (f'(\xi) - f'(u^0))(u^1 - u^0), \end{aligned}$$

*) vgl. die Fußnote auf Seite 68

also

$$L(u - u^1) - \underbrace{f'(\zeta)}_{< \lambda_0} (u - u^1) = \underbrace{f''(\eta)}_{\geq 0} \underbrace{(\zeta - u^0)}_{\geq 0} (u^1 - u^0),$$

wegen $u^0 \leq \zeta \leq u$, $u^0 \leq \eta \leq \zeta \leq u$, also $a \leq \zeta, \eta \leq b$.
Anwendung von Satz 1.5 liefert nun $u \geq u^1$.

$n \rightarrow n+1$:

Zunächst zeigen wir, daß jedes u^n Unterlösung ist.

$$\begin{aligned} Lu^n &= f'(u^{n-1})(u^n - u^{n-1}) + f(u^{n-1}) \\ Lu^n - f(u^n) &= f'(u^{n-1})(u^n - u^{n-1}) + f(u^{n-1}) - f(u^n) \\ &= (f'(u^{n-1}) - f'(\zeta))(u^n - u^{n-1}) \\ &= \underbrace{-f''(\eta)}_{\leq 0} \underbrace{(\zeta - u^{n-1})}_{\geq 0} (u^n - u^{n-1}) \leq 0 \end{aligned}$$

mit $u^{n-1} \leq \zeta \leq u^n$, $u^{n-1} \leq \eta \leq \zeta \leq u^n$, also $a \leq \zeta, \eta \leq b$.

Also ist u^n Unterlösung.

$$\begin{aligned} L(u^{n+1} - u^n) &= f(u^n) + f'(u^n)(u^{n+1} - u^n) - Lu^n \\ &\geq f'(u^n)(u^{n+1} - u^n), \end{aligned}$$

da u^n Unterlösung ist. Da u^n nach Induktionsvoraussetzung $a \leq u^n \leq b$ erfüllt, also $f'(u^n) < \lambda_0$ gilt, folgt nun mit Satz 1.5 $u^n \leq u^{n+1}$.

$u^{n+1} \leq u$ folgt nun ebenso wie vorher $u^1 \leq u$.

z.z.: Alle Iterierten existieren.

u^0 existiert nach Voraussetzung. Existiere u^n . u^{n+1} existiert, weil

$$Lz - f'(u^n)z = 0 \quad \text{in } D, \quad z|_{\partial D} = 0$$

wegen $f'(u^n) < \lambda_0$ eindeutig lösbar ist (Fredholm'sche Alternative).

Das Newtonverfahren liefert also eine monoton steigende, nach oben beschränkte Funktionenfolge.

3. Gleichmäßige Konvergenz gegen die Lösung u .

Dies wird bewiesen durch Angabe einer Folge $\{z^n\}$, für die $z^n(x) \leq u^n(x)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z^n(x) - u(x)\|_{\infty} = 0$ gilt. Für gewöhnliche Differentialgleichungen findet man diese Beweisidee in [3], S. 155.

In Abschnitt 1.2 hatten wir das Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} (L - k) z^{n+1} &= f(x, z^n) - k z^n \quad \text{in } D, \\ z^{n+1}|_{\partial D} &= 0 \end{aligned}$$

mit $z^0 = v$ und $k \leq \min_{\substack{x \in D \\ u \in [a, b]}} f_u(x, u)$

kennengelernt. Wir wissen von dort, daß es gleichmäßig und monoton gegen u konvergiert. Es bleibt also noch zu zeigen, daß $z^n(x) \leq u^n(x)$ gilt.

$n = 0$: es ist $z^0 = u^0 = v$.

$n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} L(z^{n+1} - u^{n+1}) &= f(z^n) + k(z^{n+1} - z^n) - f(u^n) - f'(u^n)(u^{n+1} - u^n) \\ &= f(z^n) - f(u^n) - f'(u^n)(u^{n+1} - u^n) + \\ &\quad + k(z^{n+1} - u^{n+1} + u^{n+1} - u^n + u^n - z^n) \\ &= k(z^{n+1} - u^{n+1}) + (k - f'(u^n))(u^{n+1} - u^n) + \\ &\quad + (k - f'(\zeta))(u^n - z^n). \end{aligned}$$

Dabei ist $z^n \leq \zeta \leq u^n$, also $k \leq f'(\zeta) < \lambda_0$.

Wir haben also

$$\begin{aligned} L(z^{n+1} - u^{n+1}) - k(z^{n+1} - u^{n+1}) &= \\ &= \underbrace{(k - f'(u^n))}_{\leq 0} \underbrace{(u^{n+1} - u^n)}_{\geq 0} + \underbrace{(k - f'(\zeta))}_{\leq 0} \underbrace{(u^n - z^n)}_{\geq 0} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Da außerdem $(z^{n+1} - u^{n+1})|_{\partial D} = 0$ gilt, können wir Satz 1.5 anwenden und erhalten $z^{n+1}(x) \leq u^{n+1}(x)$.

Damit ist der Satz bewiesen.

3.3 Existenz von Lösungen benachbarter Probleme

Wir verzichten jetzt wieder auf die eindeutige Lösbarkeit der Differentialgleichung (3.1) und die zusätzlichen Forderungen an L .

Sei $C^{2+\alpha}(\bar{D}) \subset C^{2+\alpha}(\bar{D})$ der Banachunterraum aller diejenigen Funktionen, die die Randbedingung $u|_{\partial D} = 0$ erfüllen.

Satz 3.4 Sei \bar{u} eine isolierte Lösung von

$$(3.8) \quad Lu = g(x, u, 0) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = 0.$$

Es gelte $g \in C^{2+\alpha}(\bar{E})$, wobei $E := D \times (a, b) \times (0, \mu_1)$ sei. Für alle $u \in C^{2+\alpha}(D)$ mit $\|u - \bar{u}\|_{2+\alpha} \leq R$ gelte $a \leq u(x) \leq b$, und für alle $\mu \in [0, \mu_1]$ sei

$$(3.9) \quad Lw - g_u(x, \bar{u}, \mu)w = 0 \quad \text{in } D, \quad w|_{\partial D} = 0$$

eindeutig lösbar.

Dann gibt es ein $\mu_0 \in (0, \mu_1]$, sodaß

$$(3.10) \quad Lu = g(x, u, \mu) \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

für $\mu \in [0, \mu_0]$ eine isolierte Lösung u_μ^* hat, gegen die das Newtonverfahren konvergiert, wenn $u^0 = \bar{u}$ gewählt wird.

Bestimmung von μ_0 :

$$(3.11) \quad G_1 \text{ erfülle } (x, u, \mu) \in E \quad |g(x, u, \mu) - g(x, u, 0)| \leq G_1 \mu$$

$$(3.12) \quad G_2 \geq (x, u, \mu) \in E \quad |g_{uu}(x, u, \mu)|, \quad G_2 \neq 0$$

$$(3.13) \quad G_3 := \mu \in (0, \mu_1) \quad \|(L - g_u(x, \bar{u}, \mu))^{-1}\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die für Operatoren $F: C^{2+\alpha}(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$ induzierte Norm auf $S(\bar{u}, R)$ sei. μ_0 ist nun so zu wählen, daß

$$(3.14) \quad h_0 := G_3^2 G_2 G_1 \mu_0 \leq \frac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$(3.15) \quad r_0 := \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{G_3 G_2} \leq R$$

gelten. Es ist dann

$$(3.16) \quad \|\bar{u} - u_\mu^*\|_{2+\alpha} \leq r_0.$$

Beweis Der Beweis hat Ähnlichkeit mit dem von Satz 3.1. Er soll hier aber trotzdem ausgeführt werden, da einzelne Argumente anders sind.

Wir zeigen, daß Satz 3.2 anwendbar ist und die Abschätzungen (3.14), (3.15) und (3.16) liefert.

Sei wieder $B_1 = C^{2+\alpha}(\bar{D})$, $B_2 = C(\bar{D})$.

$F_\mu: B_1 \rightarrow B_2$ sei gegeben durch $F_\mu u = Lu - g(x, u, \mu)$.

F_μ ist wieder in jedem beschränkten $M \subset B_1$ fréchetdifferenzierbar mit

$$F_\mu'(u)w = Lw - g_u(x, u, \mu)w.$$

1) z.z.: $F_\mu'(\bar{u})^{-1}$ existiert für $0 \leq \mu \leq \mu_1$.

Dies ist gerade Voraussetzung (3.9).

2) z.z.: F_μ' ist in $S(\bar{u}, R)$ lipschitzstetig.

Nach Voraussetzung ist $g_u(x, u, \mu) \in C^{1+\alpha}(\bar{D})$ für $u \in S(\bar{u}, R)$. Wir haben also

$$\begin{aligned} \|F'_\mu(u) - F'_\mu(v)\| &= \sup_{w \neq 0} \|F'_\mu(u)w - F'_\mu(v)w\|_\infty \frac{1}{\|w\|_{2+\alpha}} \\ &= \sup_{w \neq 0} \|Lw - g_u(x, u, \mu)w - Lw + g_u(x, v, \mu)w\|_\infty \frac{1}{\|w\|_{2+\alpha}} \\ &\leq \sup_{w \neq 0} \|g_u(x, u, \mu) - g_u(x, v, \mu)\|_\infty \|w\|_\infty \frac{1}{\|w\|_{2+\alpha}} \end{aligned}$$

Nun ist wegen $\|w\|_{2+\alpha} = \|w\|_\infty + \underbrace{\dots}_{\geq 0}$ stets $\sup_{w \neq 0} \|w\|_\infty \frac{1}{\|w\|_{2+\alpha}} \leq 1$,
also

$$\begin{aligned} &\leq \|g_u(x, u, \mu) - g_u(x, v, \mu)\|_\infty \\ &\leq G_2 \|u - v\|_\infty \text{ wegen (3.12).} \end{aligned}$$

Wiederum wegen $\|w\|_\infty \leq \|w\|_{2+\alpha}$ für alle $w \in C^{2+\alpha}(D)$ folgt nun die Behauptung.

3) z.z.: $\|F'_\mu(\bar{u})^{-1} F_\mu(\bar{u})\| \leq G_3 G_1 \mu.$

$$\|F_\mu \bar{u}\| = \|\bar{L}\bar{u} - g(x, \bar{u}, \mu)\| = \|g(x, \bar{u}, 0) - g(x, \bar{u}, \mu)\| \leq G_1 \mu \text{ nach (3.11).}$$

4) z.z.: es gibt ein $\mu_0 \in (0, \mu_1]$, sodaß $\|F'_\mu(\bar{u})^{-1}\| \|F'_\mu(\bar{u})^{-1} F_\mu \bar{u}\| G_2 \leq \frac{1}{2}$
für $\mu \leq \mu_0$ gilt.

$$\|F'_\mu(\bar{u})^{-1}\| \|F'_\mu(\bar{u})^{-1} F_\mu \bar{u}\| G_2 \leq G_3^2 G_2 G_1 \mu$$

folgt aus 1), 2), 3) und (3.13). Also gibt es so ein μ_0 .

Außerdem kann durch weiteres Verkleinern von μ_0 erreicht werden, daß auch $r_0 \leq R$ gilt.

Damit ist Satz 3.2 anwendbar und Satz 3.4 bewiesen.

Bemerkung 1: Die Formulierung für positive μ ist keine Einschränkung, da $\tilde{g}(x, u, \mu) = g(x, u, -\mu)$ gesetzt werden kann.

Bemerkung 2: Der Satz liefert ein hinreichendes Konvergenzkriterium, es kann also sehr wohl sein, daß für beträchtlich größere μ noch Konvergenz vorliegt. Nach unseren numerischen Erfahrungen ist das häufig so: Einzugsgebiete von Lösungen sind selten kugelförmig. Außerdem hängt μ_0 von der Wahl von μ_1 und a, b ab.

Bemerkung 3: Nähert sich \bar{u} einer kritischen Lösung, so gilt $G_3 \rightarrow \infty$, μ_0 strebt dann also gegen 0.

Die Aussage des Satzes wollen wir durch einige Folgerungen näher erläutern:

Folgerung 1 Sei \bar{u} eine isolierte Lösung von

$$(3.8) \quad Lu = g(x, u, 0) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = 0,$$

wobei $g \in C^{2+\alpha}(D \times A)$ ist für jedes beschränkte $A \subset \mathbb{R}^2$. Dann hat auch

$$(3.10) \quad Lu = g(x, u, \mu) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

für hinreichend kleines $\mu > 0$ eine isolierte Lösung u^* , gegen die das Newtonverfahren konvergiert, wenn $u^0 = \bar{u}$ gewählt wird.

Zum Beweis müssen wir zeigen, daß es ein $\mu_1 > 0$ gibt, sodaß (3.9) für $\mu \in [0, \mu_1]$ eindeutig lösbar ist. Dann ist Satz 3.4 anwendbar.

Nach Voraussetzung ist $F_0'(\bar{u})$ invertierbar. $F_\mu'(\bar{u})$ hängt stetig von μ ab, also ist es ebenfalls invertierbar, wenn μ hinreichend klein ist, d.h. es gibt so ein μ_1 .

Folgerung 2 Hat

$$(3.1) \quad Lu = f(x, u) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

eine isolierte Lösung \bar{u} , so haben auch

$$(3.17) \quad Lu = (1+\mu) f(x, u) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

$$(3.18) \quad Lu = f(x, u) \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = \mu$$

für hinreichend kleines μ eine isolierte Lösung u_μ^* , und es gelten die Abschätzungen von Satz 3.4 entsprechend.

Beweis

Für (3.17) ist der Beweis trivial, man setze $g(x, u, \mu) = (1+\mu)f(x, u)$.

Für (3.18) setze man $v := u - \mu$. Dann erfüllt v die Differentialgleichung $Lv = f(x, v+\mu)$, $v|_{\partial D} = 0$. Satz 3.4 ist mit $g(x, u, \mu) = f(x, v+\mu)$ anwendbar.

Eine Ähnlichkeitstransformation des Gebiets D läßt sich manchmal durch Einführen eines Parameters in die Differentialgleichung simulieren. In solchen Fällen kann man dann z.B. aus der Existenz einer isolierten Lösung von

$$-\Delta u = f(u) \quad u|_{\partial D} = 0$$

auf eine isolierte Lösung von

$$(3.19) \quad -\Delta u = f(u) \quad u|_{\partial D_\mu} = 0$$

schließen.

Beispiel: $D = (0, 1) \times (0, 1)$

$$D_\mu = (0, 1+\mu) \times (0, 1+\mu)$$

Dann kann man statt (3.19) die Differentialgleichung

$$-\Delta v = (1+\mu)^{-2} f(v) \text{ in } D, \quad v|_{\partial D} = 0$$

lösen und dann die Lösung rücktransformieren.

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit von Satz 3.4 wollen wir an einem

Beispiel studieren: Zu lösen sei

$$(3.20) \quad -\Delta u = e^u + \pi^2 u \text{ in } D := (0,1) \times (0,1), \quad u|_{\partial D} = 0.$$

Wir wissen (vgl. 4.3), daß $-\Delta u = e^u$ in D , $u|_{\partial D} = 0$ zwei isolierte Lösungen u_1, u_2 hat. Wir setzen $g(x,u,\mu) = e^u + \mu u$ und wenden Satz 3.4

für $\bar{u} = u_1$ an. Nach Folgerung 1 ist das möglich. Wir bekommen $\mu_0 < \pi^2$, berechnen die Lösung von $-\Delta u = e^u + \mu_0 u$ in D , $u|_{\partial D} = 0$, nehmen sie als neues \bar{u} und benutzen wieder Satz 3.4 zur Bestimmung eines neuen μ_0 .

Wir beginnen also eine Iteration. Auf diese Weise konnten wir zwei Lösungen von (3.20) berechnen, die zweite durch Beginn mit $\bar{u} = u_2$.

Nicht möglich ist es, auf diese Weise eine Lösung von $-\Delta u = e^u + 2\pi^2 u$ in D , $u|_{\partial D} = 0$ zu berechnen: Die durch u_1 und u_2 gehenden Äste des Bifurkationsdiagramms von

$$-\Delta u = e^u + \lambda u \text{ in } D = (0,1) \times (0,1), \quad u|_{\partial D} = 0$$

treffen sich in einem Bifurkationspunkt (λ^*, u^*) , und es ist $\lambda^* \approx 16 < 2\pi^2$.

Grundsätzlich nicht möglich ist es, Lösungen von $-\Delta u = e^u + 2\pi^2 u$ ausgehend von den Lösungen von $-\Delta u = 2\pi^2 u$ in D , $u|_{\partial D} = 0$ zu berechnen: Eigenfunktionen sind keine isolierten Lösungen.

Satz 3.4 gibt also die Möglichkeit, ausgehend von einer isolierten Lösung jede andere Lösung auf demselben Ast eines Bifurkationsdiagramms (vgl. Definition 3.2) zu berechnen. Es ist jedoch nicht möglich, auf diese Weise von einem Ast auf einen anderen zu kommen, über einen Verzweigungspunkt hinüber (vgl. Bemerkung 3). Um ein ganzes Bifurkationsdiagramm zu berechnen, braucht man also soviel Anfangsfunktionen, wie es Äste gibt.

Dieses Vorgehen hat Ähnlichkeit mit dem von Wacker in [47] beschriebenen und ist auch durch Diskussionen mit ihm angeregt worden.

In [47] werden Aussagen gemacht über stufenweise Konvergenz des Newtonverfahrens: Zu einer gegebenen Operatorgleichung $Tx = 0$ werde eine von einem Parameter s abhängende Operatorschar T_s gefunden, sodaß $T_0 x = 0$ leicht zu lösen ist und $T_1 x = Tx$ gilt. Unter gewissen Bedingungen kann

man dann eine Aufteilung von $(0,1)$ in Teilintervalle (s_i, s_{i+1}) finden, sodaß die Lösung von $T_{s_i} x = 0$ im Einzugsbereich der Lösung von $T_{s_{i+1}} x = 0$ liegt.

Satz 3.4 gibt uns die Möglichkeit, den Ast eines Bifurkationsdiagramms genauer zu charakterisieren: er kann nicht einfach "irgendwo enden", sondern läuft ins Unendliche oder in einen kritischen Punkt. Unter der in der Bifurkationstheorie üblichen Voraussetzung (vgl Abschnitt 1.4, letzter Absatz) gibt es weiterreichende Aussagen (vgl [41], S. 164-168), doch gilt unsere Aussage auch für die Fälle, in denen diese Voraussetzung verletzt ist.

Definition 3.1 Eine Menge $E \subset \mathbb{R} \times C^{2+\alpha}(D)$ heißt Lösungskontinuum von

(3.10) $Lu = g(x, u, \lambda)$ in D , $u|_{\partial D} = 0$,
wenn sie bezüglich der Norm $\|(\lambda, u)\| := \sqrt{\lambda^2 + \|u\|^2}$ zusammenhängend und abgeschlossen ist und jedes Element $(\lambda, u) \in E$ Lösung von (3.10) ist.

Definition 3.2 Zwei Lösungen (λ_1, u_1) und (λ_2, u_2) , $\lambda_1 < \lambda_2$, liegen auf demselben Ast von (3.10), wenn gilt: Es gibt ein Lösungskontinuum $E \subset [\lambda_1, \lambda_2] \times U$, sodaß alle $(\lambda, u) \in E$, $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$ isolierte Lösungen sind, zu jedem $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ nur ein $u \in U$ gehört und $(\lambda_i, u_i) \in E$ für $i = 1, 2$ gilt.

Folgerung 3 Seien (λ_i, u_i) , $i=1, 2$, $\lambda_1 < \lambda_2$, zwei Lösungen von (3.10), die auf demselben Ast von (3.10) liegen. Dann ist entweder (λ_2, u_2) kritische Lösung, oder es gibt ein $\lambda_3 > \lambda_2$ und ein $u_3 \in C^{2+\alpha}(D)$, sodaß (λ_3, u_3) Lösung von (3.10) ist und auf demselben Ast liegt wie (λ_1, u_1) und (λ_2, u_2) . Eine entsprechende Aussage gilt für (λ_1, u_1) .

Beweis Ist (λ_2, u_2) keine kritische Lösung, so ist es isoliert. Dann hat nach Satz 3.4 und Folgerung 1

$Lu = \tilde{g}(x, u, \mu) := g(x, u, \lambda_2 + \mu)$ $u|_{\partial D} = 0$
für $0 \leq \mu \leq \mu_0$ eine isolierte Lösung u_μ . Man setze $\lambda_3 := \lambda_2 + \mu_0$ und $u_3 := u_{\mu_0}$.

3.4 Das Auffinden von Startfunktionen

Wir haben in den vorigen Abschnitten gesehen, daß es in einigen Fällen leicht ist, eine Startfunktion für das Newtonverfahren zu finden. Jedoch blieben auch einige Fälle offen. Insbesondere müssen wir noch sagen, wie man eine erste Lösung auf einem Ast eines Bifurkationsdiagramms findet.

Wir haben hierfür eine Suchstrategie entwickelt, die in der Praxis fast immer zum Erfolg geführt hat. Ausnahmen: 1) Will man Lösungen in der Nähe von kritischen Punkten berechnen, kann es vorkommen, daß man keine geeignete Startfunktion findet. Dann berechne man eine Lösung, die vom kritischen Punkt weiter entfernt ist, und laufe entlang eines Astes. 2) Will man eine Lösung berechnen, die viele Knoten besitzt (also zu einem höheren Eigenwert gehört), so braucht das nicht unbedingt mit unseren einfachen Startfunktionen zu gelingen. Dann überlege man sich eine besser an das Problem angepaßte Startfunktion.

Von diesen Ausnahmen abgesehen, hat unsere Suche immer zum Erfolg geführt (vgl Kapitel 4). Allerdings haben wir bisher keinerlei Beweis für einen grundsätzlichen Erfolg dieses Vorgehens, sondern sind auf Plausibilitätsbetrachtungen angewiesen. Deshalb ist bei der Anwendung noch einiges Fingerspitzengefühl nötig.

Sei eine Lösung von

$$(3.1) \quad L u = f(x,u) \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

gesucht, deren Norm man zwischen N_1 und N_2 vermutet. Dann wähle man ein Intervall $[a,b]$, sodaß die Norm der Lösung von

$$(3.21) \quad L v = c \quad \text{in } D, \quad v|_{\partial D} = 0$$

für $c = a$ oder b kleiner als N_1 und für $c = b$ oder a größer als N_2 ist.

Dann stelle man durch numerische Tests fest, ob es ein $c \in [a,b]$ gibt, sodaß das Newtonverfahren mit der Lösung von (3.21) als Startfunktion konvergiert. Beim Testen teilt man $[a,b]$ zweckmäßigerweise in n gleiche Teile, sodaß man nur n Zahlen zu prüfen braucht. Hat man die Schrittweite zu groß gewählt, erkennt man erfahrungsgemäß am Ergebnis, in welchem Teilintervall sich eine weitere Suche lohnt.

Eine andere Möglichkeit, für die Konvergenz günstige c -Werte zu finden, kann die Betrachtung des Defektes $L v_c - f(x, v_c) =: r_c(x)$ als Funktion von c liefern. Ähnliche Beobachtungen machte Collatz in Zusammenhang mit dem in 1.5.1 beschriebenen Verfahren [14]. Wir wollen auf diese Dinge nicht näher eingehen, sondern nur noch ein paar Plots anfügen, die das am Beispiel

$$(3.22) \quad u'' = e^{-u} \quad u(0) = u(1) = 0$$

illustrieren (vgl (1.3) und (1.12)). u ist genau dann Lösung von (3.22), wenn $v := -u$ Lösung von (1.12) - $v'' = e^v$, $v(0) = v(1) = 0$ ist.

$R_c(x)$ bedeutet in den Abbildungen das Negative des Defektes, also $R_c(x) = -r_c(x)$. Das hat den Vorteil, daß man auf einen Blick sieht, für welche c -Werte v_c Unterlösung ist: für diese c sind 1-Norm und Integral einander gleich.

Abb. 3.1 zeigt zwei mehr oder weniger stark ausgeprägte Minima der

schiedenen Normen von $r_c(x)$ und ein Maximum von $-\int_0^1 r_c(x) dx$ bei $c = -2.9$.

Rechnet man mit 29 Gitterpunkten (vgl Kapitel 4), so findet man Konvergenz gegen die flache Lösung für $c \in [-2.5, 0]$, gegen die hohe Lösung für $c \in [-5, -2.75]$.

Abb. 3.2 zeigt dasselbe für eine an das Problem besser angepaßte Funktion $v_c(x)$: es ist jetzt im Gegensatz zu vorher $r_c(0) = r_c(1) = 0$. Maxima und Minima sind nun stärker ausgeprägt. Außerdem liegen die Minima der Normen und die Nullstelle von $\int_0^1 r_c(x) dx$ näher beieinander (vgl hierzu [40], Theorem 4.2).

Abb. 3.3 zeigt $-r_c(x)$ für einige c -Werte. Daraus erkennt man, wie Plateau und Ecke bei der zur Maximumnorm gehörenden Kurve in Abb. 3.2 entstehen.

Abb. 3.4 zeigt die zwei Lösungen und die Funktionen $v_c(x)$ für diejenigen c -Werte, die zu den Minima der 1-Norm und zur Nullstelle des Integrals gehören.

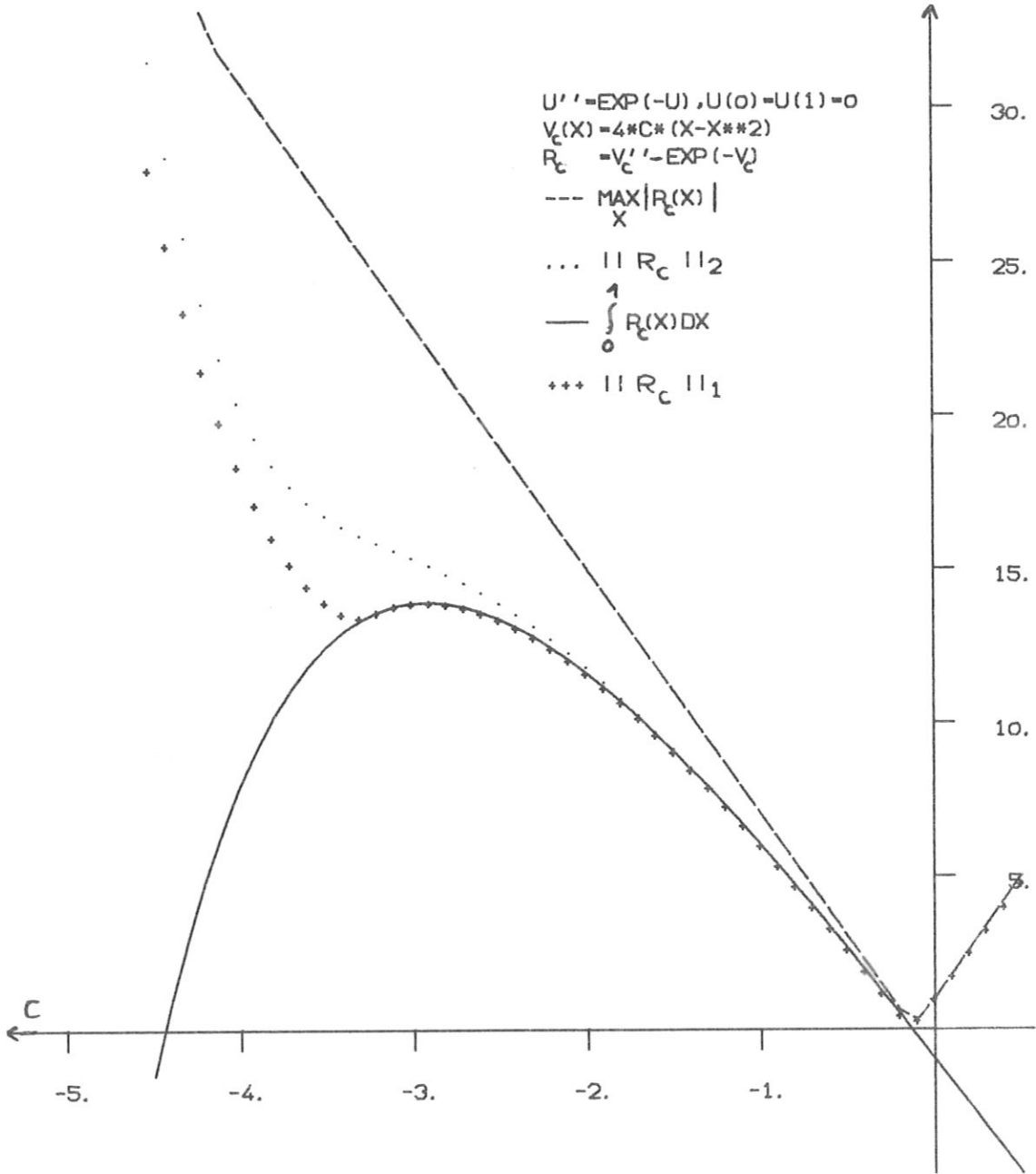


Abb. 3.1

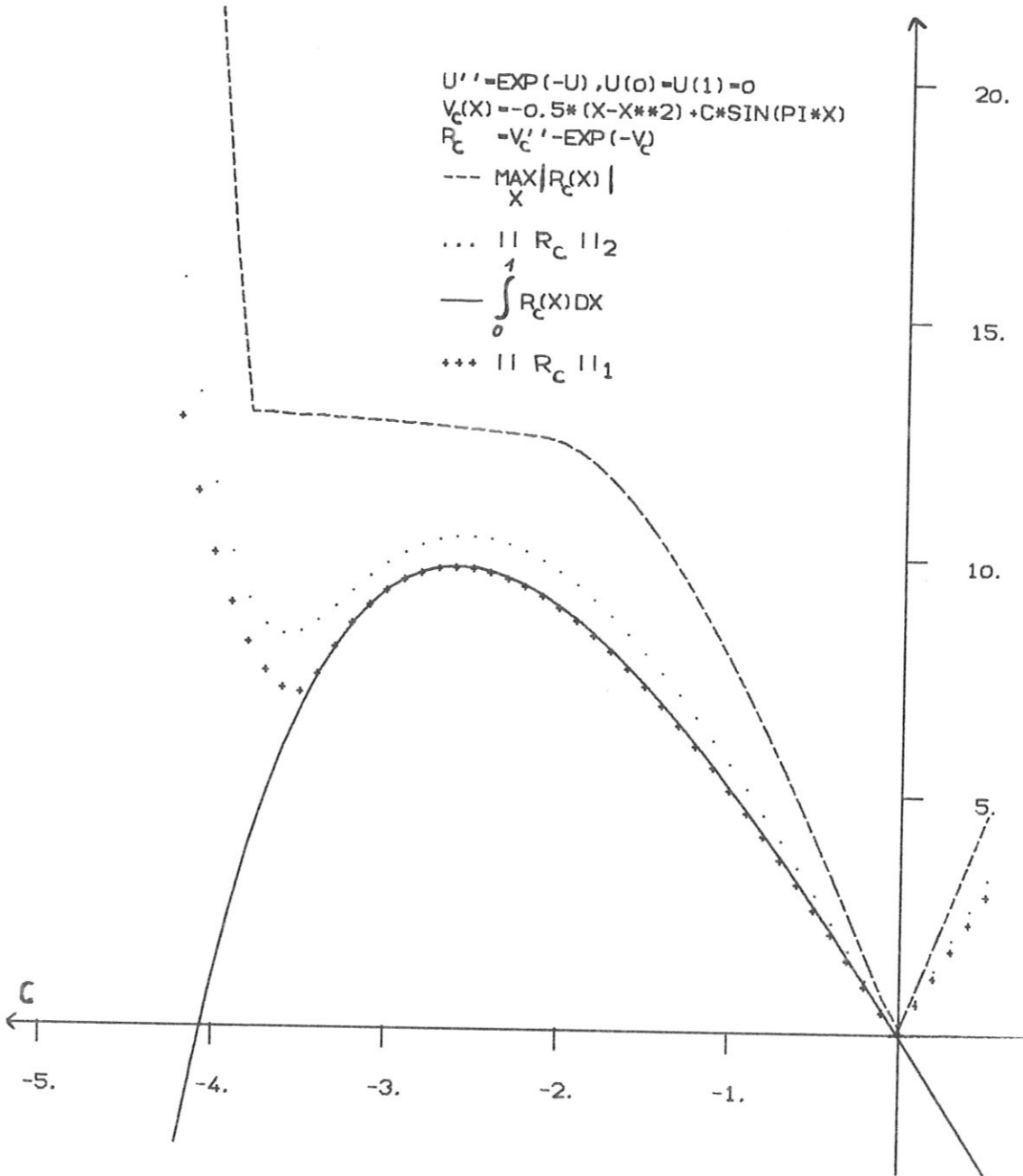


Abb. 3.2

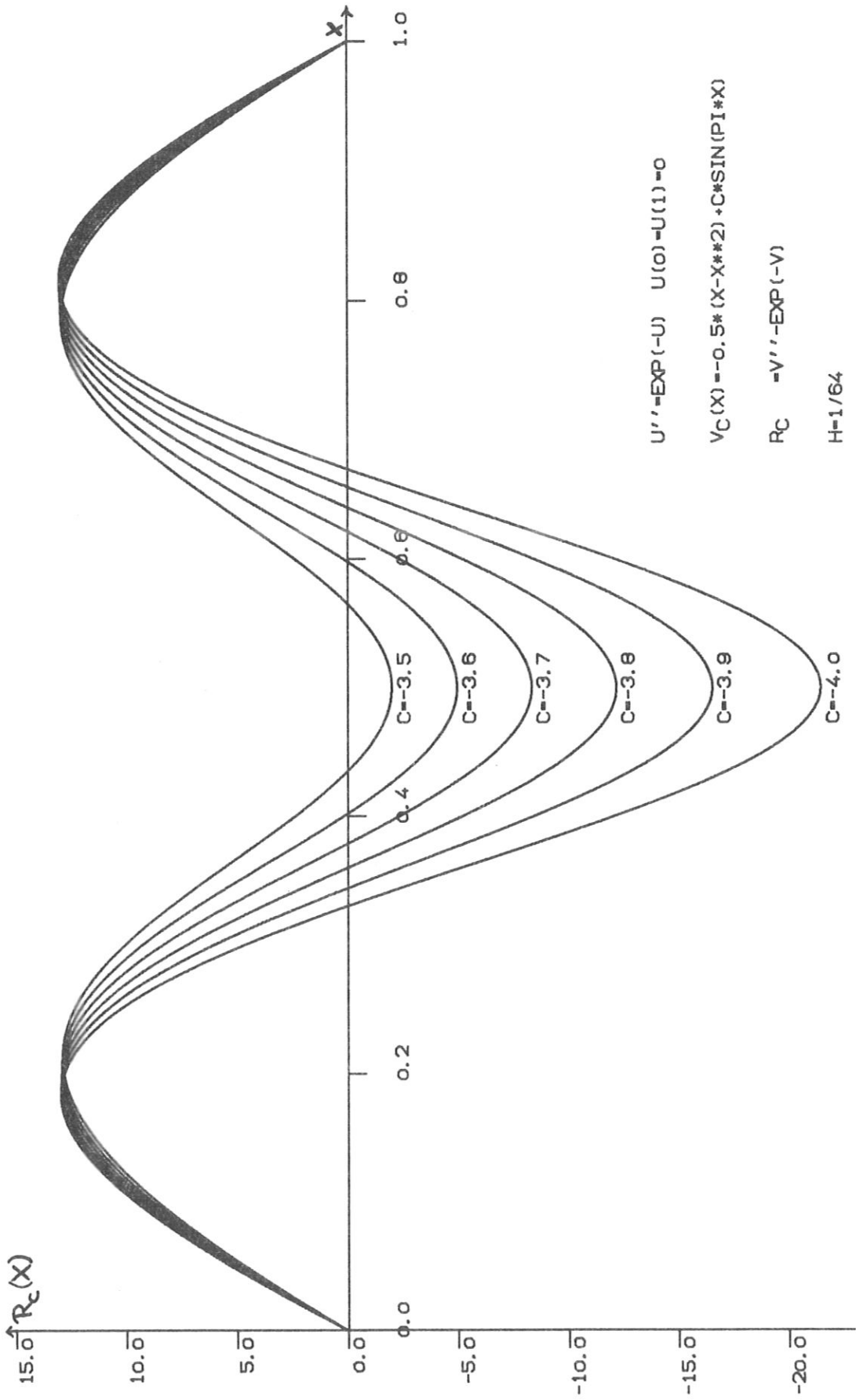


Abb. 3.3

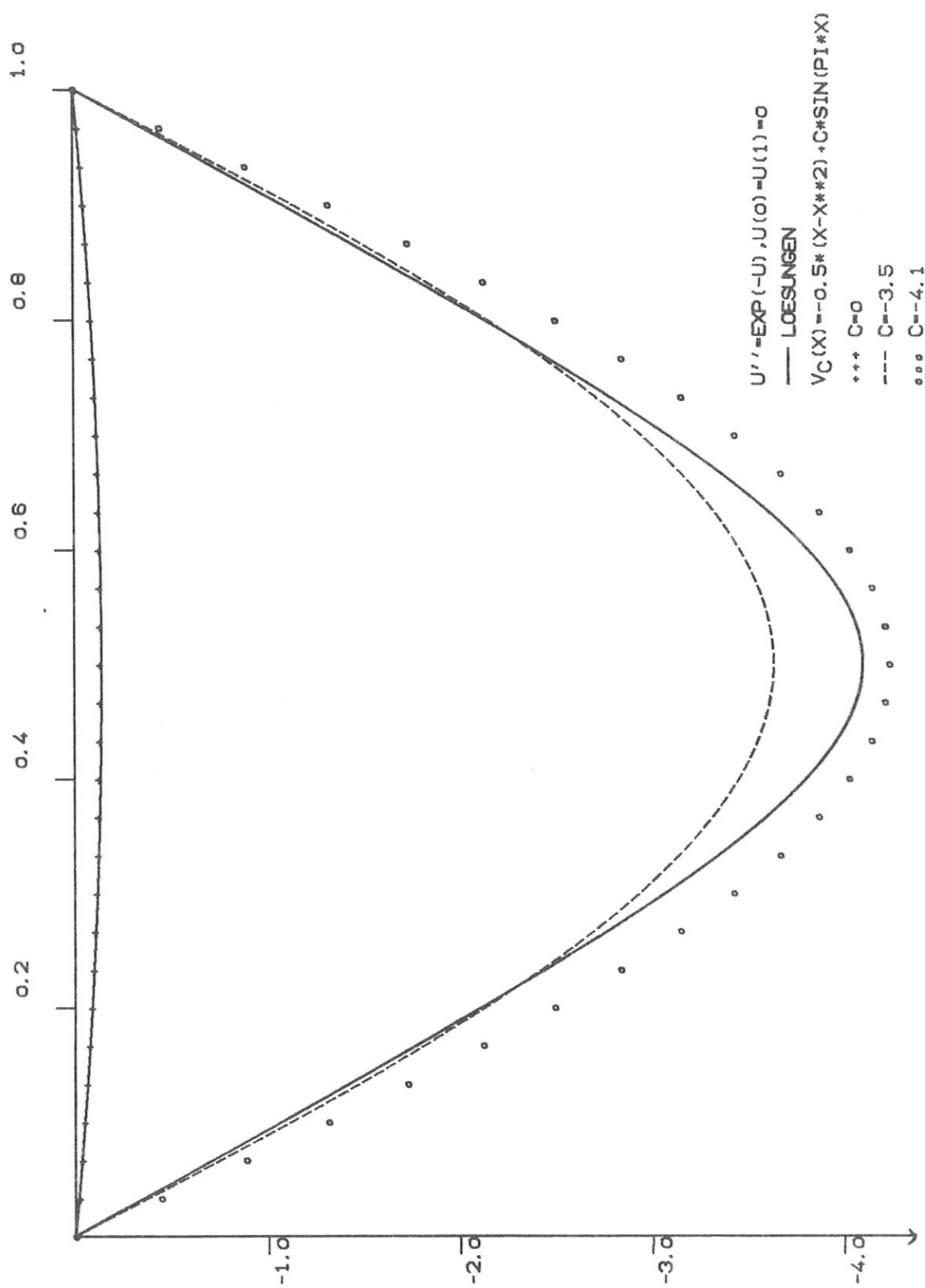


Abb. 3.4

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse, Bifurkationsdiagramme für

$$T[\lambda; u] := Lu - f(\lambda, u) = 0 \quad u|_{\partial D} = 0.$$

In diesem Kapitel wollen wir über unsere numerischen Ergebnisse berichten. Einerseits sind sie interessant, da es auf diesem Gebiet noch wenig gibt, andererseits zeigen sie die gute Anwendbarkeit der entwickelten Verfahren. z.B. konnten wir Lösungen berechnen, von denen Simpson ([46], S.374) sagt, daß ihm das leider nicht gelungen sei. Auch brauchen wir sehr viel weniger Rechenzeit als Allgower, um genauere Ergebnisse zu erzielen als er.

4.1 Das benützte Verfahren

Wir haben die Differentialgleichung

$$(4.1) \quad -\Delta u = f(u) \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

diskretisiert, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben. Da wir D stets als Rechteck oder Quadrat gewählt haben, ist die Approximation am Rand besonders einfach, und es ist unnötig, D_h in D_h^1 und D_h^2 aufzuteilen. Es ist also das nichtlineare Gleichungssystem

$$(4.2) \quad A U = h^2 \begin{pmatrix} f(u_1) \\ \vdots \\ f(u_m) \end{pmatrix}$$

zu lösen, wobei $m = n_1 \cdot n_2$ die Anzahl der Gitterpunkte ist.

Wir wollen nun speziell $D = (0,1) \times (0,1)$ wählen. Unter Ausnutzung der Symmetrie von D bzgl. $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{1}{2}$ und der Annahme, daß auch die Lösungen diese Symmetrie zeigen, können wir (4.2) für ungerades $n = n_1 = n_2$ als Gleichungssystem für $p = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ Unbekannte schreiben

*) Die Sätze der Kapitel 2 und 3 haben wir für Gebiete mit stückweise glattem Rand bewiesen. Die in Kapitel 1 zitierten Sätze sind jedoch nur unter der Voraussetzung $\partial D \in C^{2+\alpha}$ verfügbar. Wir wollen deshalb vereinbaren, daß $D = (0,1) \times (0,1)$ hier ein Gebiet bezeichnet, das das üblicherweise so bezeichnete Quadrat so gut approximiert, daß der Fehler unterhalb der Rechengenauigkeit liegt. Da bei uns nie die Normale in den Randbedingungen auftritt, dürfen wir dies tun (vgl. hierzu [15] I, S. 418ff).

$$(4.3) \quad \begin{pmatrix} B & -I & & \\ -I & & & \\ & & & 0 \\ 0 & & -I & -I \\ & & -2I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(u_1) \\ \vdots \\ f(u_p) \end{pmatrix}$$

wobei $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \\ & & -2 & 4 \end{pmatrix}_{\sqrt{p} \times \sqrt{p}}$ ist und I die $\sqrt{p} \times \sqrt{p}$ Einheitsmatrix.

Die -2 in B entsteht durch Ausnutzung der Symmetrie zu $x = \frac{1}{2}$, dh durch Gleichsetzen von $u_{kn + \frac{n+1}{2} - 1}$ mit $u_{kn + \frac{n+1}{2} + 1}$, $k = 0, \dots, n-1$. Entsprechend entsteht das $-2I$ in A durch Ausnutzung der Symmetrie zu $y = \frac{1}{2}$.

Im eindimensionalen Fall,

$$(4.1a) \quad -u'' = f(u) \quad u(0) = u(1) = 0,$$

ist (4.3) zu ersetzen durch

$$(4.3a) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \\ & & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(u_1) \\ \vdots \\ f(u_p) \end{pmatrix}$$

wobei $p = \frac{n+1}{2}$ ist, n ungerade.

Auf das Gleichungssystem (4.3), das wir abkürzend auch $AU = h^2 f(U)$ schreiben wollen, wird nun das Newtonverfahren angewandt.

U^0 vorgegeben

$$(4.4) \quad (A - h^2 f_u(U^n)) U^{n+1} = h^2 (f(U^n) - f_u(U^n) U^n)$$

wobei $f_u(U^n) = \text{diag}(f_u(U^n_1), \dots, f_u(U^n_p))$ gesetzt ist.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Matrix des Gleichungssystems (4.4) i.a. nicht positiv definit ist und durchaus singulär werden kann, da wir f_u nicht nach oben beschränken. Aus Abschnitt 2.1

wissen wir jedoch, daß (4.4) eindeutig lösbar ist, wenn dies für

$$(-\Delta - f_u(u^n))u^{n+1} = f(u^n) - f'(u^n)u^n \quad u^{n+1}|_{\partial D} = 0$$

gilt, wobei $u^n(P) = U^n(P)$ für alle $P \in D_h$ und h hinreichend klein angenommen ist.

Ist U^0 gewählt - wie das im einzelnen geschieht, wird an den Beispielen erläutert - so sind lineare Gleichungssysteme (4.4) zu lösen. Dazu haben wir eine in der Programmbibliothek vorhandene Standardroutine (SSP - Routine DGELB) benutzt: Gaußelimination für Bandmatrizen mit Spaltenpivoting.

Es gibt sehr viel schnellere Routinen zur Gleichungsauflösung, z.B. den Buneman-Algorithmus (siehe [10]) oder das in [43] beschriebene Verfahren. Die sind jedoch für unser Problem bisher nicht anwendbar. Die Forderung, daß in der Diagonalen nicht immer wieder andere Zahlen auftreten, wäre erfüllbar: statt des Newtonverfahrens könnte man ein Sehnenverfahren mit geeignetem k verwenden, vgl 1.5.4. Obwohl dadurch mehr Iterationen zur Lösung von (4.3) nötig würden, könnte sich das lohnen, weil jede einzelne Iteration weniger Zeit brauchte.

Das Hindernis ist jedoch, daß f_u das "falsche" Vorzeichen hat. Schröder-Trottenberg brauchen, daß die Matrix des Gleichungssystems (4.4) diagonal-dominant ist, das haben wir nicht. Beim Buneman-Algorithmus ist bisher nicht klar, ob die Matrix positiv definit sein muß, oder ob Invertierbarkeit genügt ([23]). Diese Frage soll noch untersucht werden.

Bezüglich Rechenzeit sind wir also gegenüber dem heute bei anderen Problemen möglichen im Rückstand - nicht jedoch bezüglich Genauigkeit, da ist die von uns benutzte Routine dem Buneman-Verfahren ebenbürtig ([23]).

Die Rechnungen wurden von Frau Schwarz in Fortran IV auf der IBM 360/91 des MPI für Plasmaphysik ausgeführt, in doppelter Genauigkeit (Wortlänge 64 bits, also Genauigkeit etwa 10^{-15}). Die doppelte Genauigkeit schien anfangs unerlässlich, da wir Satz 3.4 noch nicht hatten und mit dem in Abschnitt 3.4 beschriebenen Suchverfahren häufig in Bereiche kamen, in denen die Matrix des Gleichungssystems (4.4) nahezu singular war. Angegebene Rechenzeiten sind für den GO STEP gebrauchte Zeiten.

4.2 $T[\lambda; u] = 0$ mit Verzweigungspunkt (λ^*, u^*) und $T[\lambda; u] = 0$

für alle $\lambda \geq 0$ am Beispiel $T[\lambda; u] = -\Delta u - \lambda u + u^3$.

Wir wollen das Beispiel

$$(4.5) \quad -\Delta u = \lambda u - u^3 \text{ in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

an den Anfang stellen, auf das die Bifurkationstheorie voll anwendbar ist, da $u \equiv 0$ für alle λ Lösung von (4.5) ist. (4.5) wurde von Sattinger untersucht (vgl. [41], S. 28-32, S. 40f). Er beweist, daß es genau einen Verzweigungspunkt $(\lambda_0, 0)$ gibt, wobei λ_0 der Haupteigenwert von $-\Delta$ in D ist, in unserem Fall also $\lambda_0 = 2\pi^2 \approx 19.739$. Für $\lambda < \lambda_0$ gibt es nur eine Lösung von (4.5), nämlich $u \equiv 0$. Für $\lambda > \lambda_0$ gibt es 3 Lösungen: $w_\lambda, 0$ und $-w_\lambda$ mit $w_\lambda > 0$ und $\max_{x \in D} w_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$.

Dieses Beispiel zu behandeln, war sehr einfach. Wir haben zunächst w_{25} für $h = 1/10$ zu berechnen versucht: einerseits war nicht zu erwarten, daß $\max w_{25}(x)$ sehr groß sein würde, wegen $\max w_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 2\pi^2} 0$, andererseits ist 25 nicht zu dicht an $2\pi^2$, sodaß keine numerischen Schwierigkeiten zu erwarten waren. Entsprechend Abschnitt 3.4 haben wir getestet, ob das Newtonverfahren (4.4) konvergiert, wenn für U^0 die Lösung von

$$(4.6) \quad A U = h^2 C, \quad C^t = (c, \dots, c)$$

genommen wird, $c = 15$ (5) 30.

Ergebnis:	c	15	20	25	30
Lösung		$u \equiv 0$	$u = -w$	$u = w$	$u = w$
Iterationen		5	5	9	6

Als Abbruchkriterium hatten wir hier wie im Folgenden

$$(4.7) \quad \|U^n - U^{n-1}\|_\infty < 10^{-8}$$

gewählt.

$c = 30$ liefert also eine brauchbare Startfunktion. Da die Anzahl der benötigten Iterationen nicht maximal ist (für $c = 25$ braucht man mehr), kann nach unseren Erfahrungen erwartet werden, daß $c = 30$ auch bei

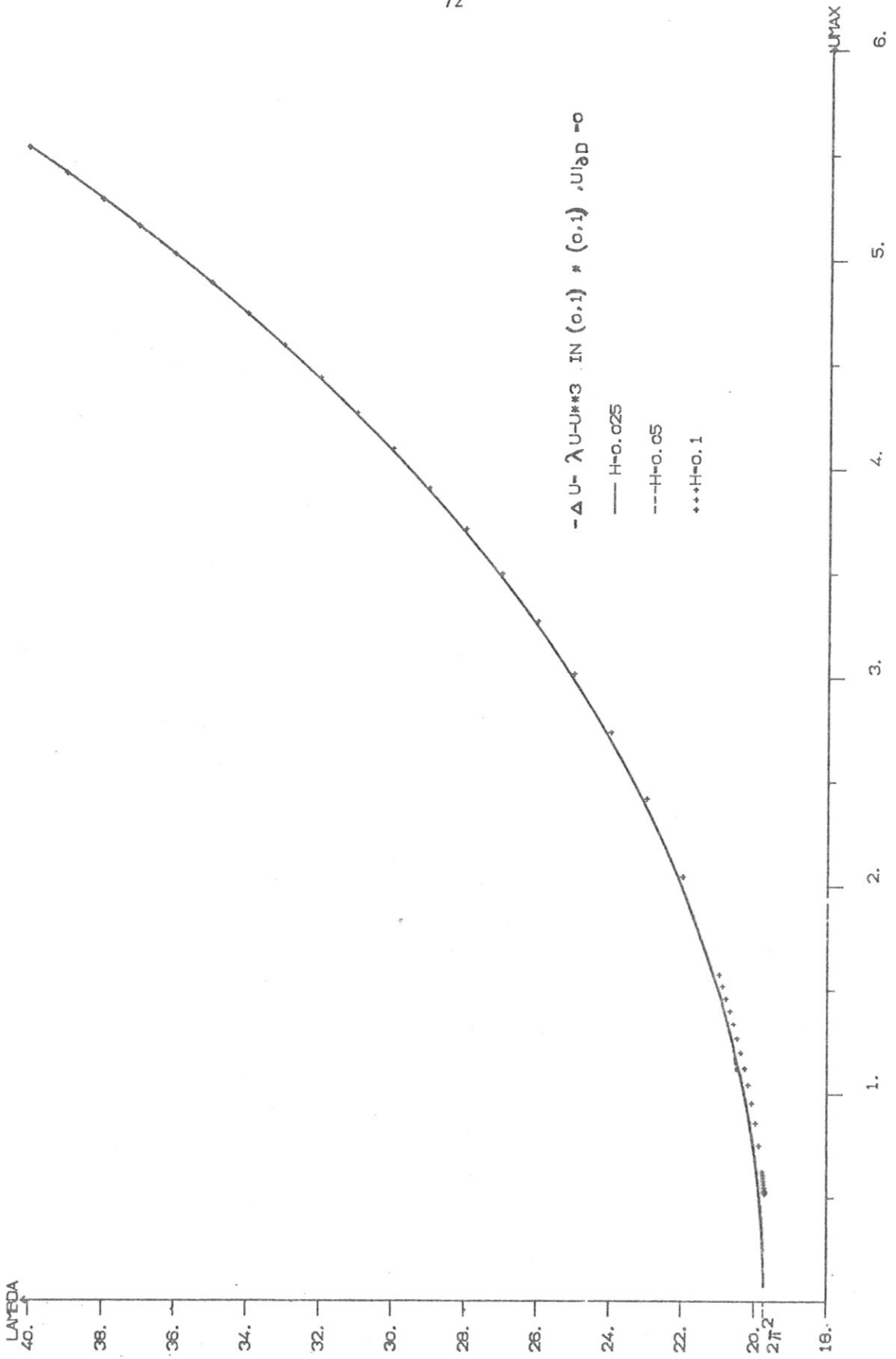


Abb. 4.1

Verfeinerung des Gitters brauchbar bleibt.

Die Lösung w_{25} wird nun benutzt, um Lösungen von (4.5) für andere λ -Werte zu finden.

1) $\lambda = 25$ (1)40: Die Lösung von $-\Delta u = \lambda u - u^3$ wird als Startfunktion zur Lösung von $-\Delta u = (\lambda + 1)u - u^3$ genommen. Nach 4 bis 5 Iterationsschritten ist jedesmal (4.7) erfüllt. Beim Übergang von $h = 1/20$ zu $h = 1/40$ ändern sich die Funktionswerte für $\lambda > 32$ nur noch um weniger als 10^{-3} .

Rechenzeiten:

h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
insgesamt	2.2''	17.9''	3'34.5''
pro Lösung	0.14''	1.12''	13.4''

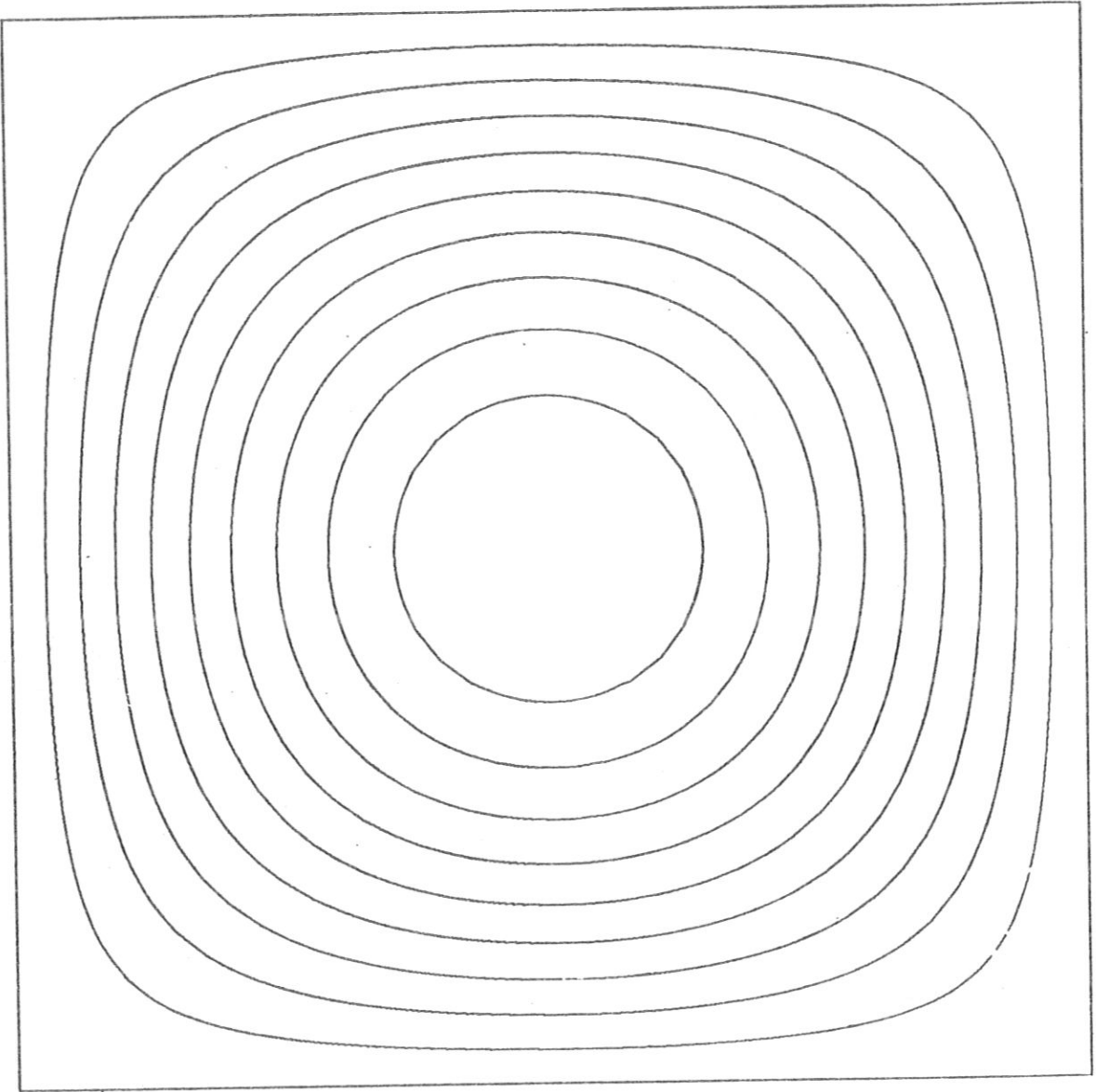
2) $\lambda = 25(-1) 21(-0.1) 19.8(-10^{-2}) 19.74(-10^{-3}) 19.732$

Nach 3 bis 6 Iterationsschritten ist jedesmal (4.7) erfüllt.

Daß es für $\lambda < 2\pi^2$ noch Lösungen > 0 gibt, ist wegen Satz 2.2 eine Folge des Diskretisierungsfehlers. Wir weisen hier auf die Simpson'schen Ergebnisse über die Abhängigkeit des Bifurkationspunktes (λ_h^*, u_h^*) von der Schrittweite h hin. Er zeigt ([46], S. 368-372) daß $|u_h^* - u^*|_{D_h} = O(h^{6/7})$ und $|\lambda_h^* - \lambda^*| = O(h^{4/3 - \epsilon})$, $\epsilon > 0$, gilt, allerdings unter Voraussetzungen, die hier nicht alle erfüllt sind.

Unsere Ergebnisse werden durch 3 Plots veranschaulicht: Abb. 4.1 zeigt das Bifurkationsdiagramm von (4.5), Abb. 4.2 und 4.3 zeigen zwei Lösungen.

Wir wollen noch eine Tabelle anfügen, die die Verhältnisse in der Nähe des Bifurkationspunktes deutlich macht. Sie zeigt $\max_{P \in D_h} U_h(P)$ in Abhängigkeit von h und λ .



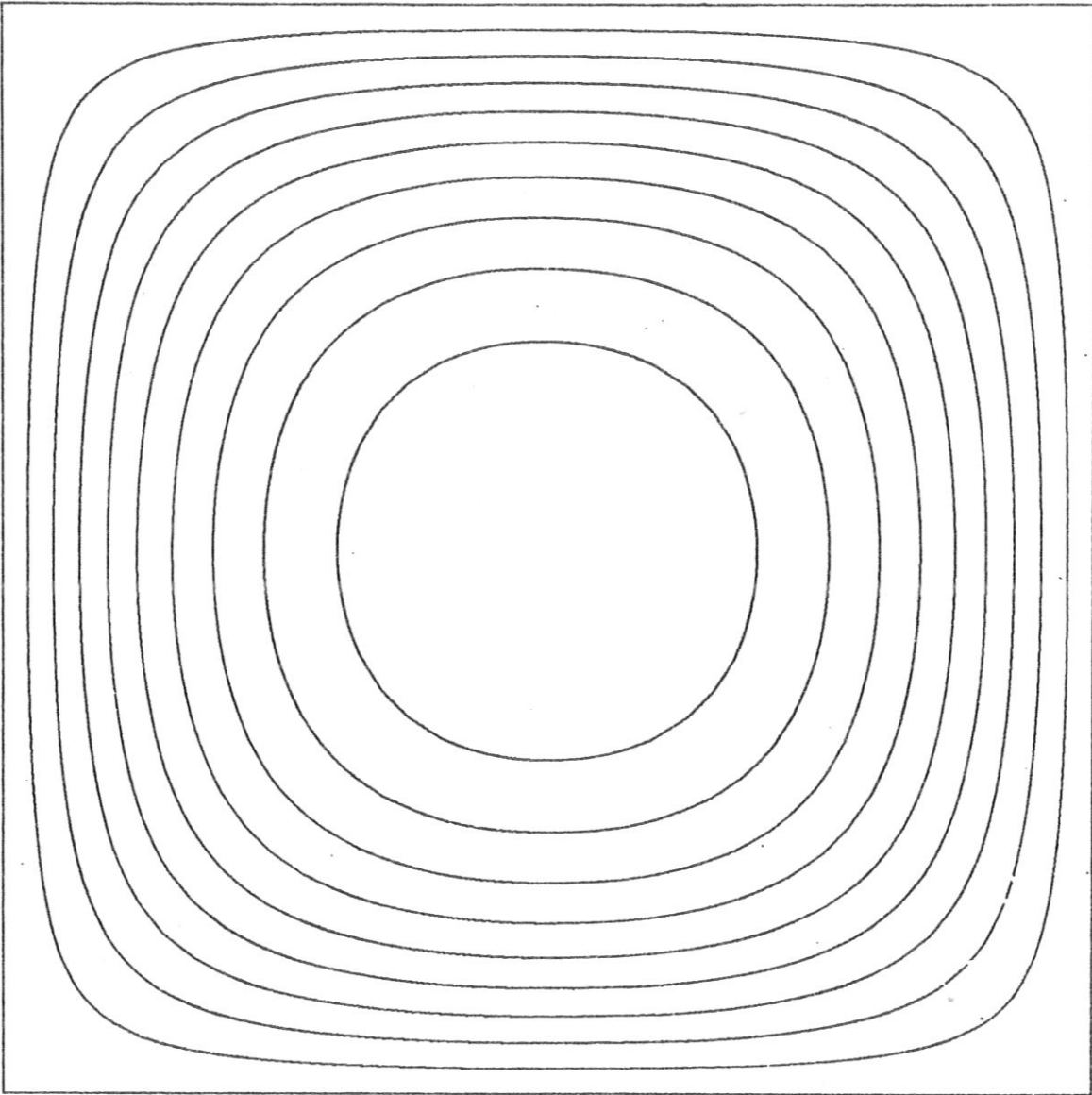
$$-\Delta U = +19.74 * U - U^3 \text{ IN } (0,1) * (0,1) \quad U|_{\partial D} = 0$$

ABSTAND ZWEIER HOEHENLINIEN: $U_{\text{MAX}}/10$

$U_{\text{MAX}} = 0.1394$

$h = 0.025$

Abb. 4.2



$$-\Delta U = 40 * U * U^{*3} \text{ IN } (0,1) * (0,1) \quad \partial U / \partial n = 0$$

ABSTAND ZWEIER HOEHENLINIEN: $U_{MAX}/10$

$U_{MAX} = 5.5446$

$H = 0.025$

Abb. 4.3

λ	h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
40		5.5423	5.5442	5.5446
30		4.1030	4.0899	4.0865
20		0.8649	0.7309	0.6931
19.74		0.5372	0.2711	0.1394
19.736		0.5306	0.2576	0.1110
19.732		0.5238	0.2434	0.0722

4.3 $T[\lambda; u] = 0$ mit Verzweigungspunkt (λ^*, u^*) und $T[\lambda; u^*] \neq 0$ für $\lambda \neq \lambda^*$
am Beispiel $T[\lambda; u] = -\Delta u - \lambda e^u$.

Wir wenden uns nun dem aus Kapitel 1 wohlbekannten Beispiel

$$(4.8) \quad -\Delta u = \lambda e^u \quad \text{in } D, \quad u|_{\partial D} = 0$$

zu. Wir können erwarten, daß es für $\lambda = 1$ zwei Lösungen gibt, von denen eine stabil ist und sich durch Unter- und Oberlösung einschließen läßt. $u \equiv 0$ ist Unterlösung. Ob die Lösung von

$$(4.9) \quad -\Delta u = c, \quad u|_{\partial D} = 0$$

für gewisse c Oberlösung ist, läßt sich in $D = (0,1) \times (0,1)$ leider nicht so leicht entscheiden wie im Kreis oder im eindimensionalen Fall. Hier können wir ausnutzen, daß eine Oberlösung andere Randwerte haben darf als die Lösung selbst. $v(x_1, x_2) = \frac{c}{4} \left(\frac{1}{2} - (x_1 - \frac{1}{2})^2 - (x_2 - \frac{1}{2})^2 \right)$ erfüllt

$$(4.10) \quad -\Delta v = c \text{ in } S, \quad v|_{\partial S} = 0,$$

wobei S der Umkreis von D ist. Für $c = 2$ haben wir $-\Delta v - e^v \geq 2 - e^{1/4} \approx 0.7 > 0$, außerdem ist $v|_{\partial D} \geq 0$. Also hat (4.8) für $\lambda = 1$ eine Lösung mit $u_{\max} \leq \frac{1}{4}$. Diese Lösung können wir gemäß Satz 3.3 mit dem Newtonverfahren und der Startfunktion $u^0 \equiv 0$ berechnen.

Eine erste untere Schranke für das Maximum der hohen Lösung bekommen wir laut Abschnitt 1.6 durch die Bedingung $e^{u_{\max}} > \lambda_0 = 2\pi^2$, also $u_{\max} > 2.98$. Das ergibt für Lösungen von (4.6) $c > 41$.

Ein Test, ob das Newtonverfahren (4.4) mit der Lösung von (4.6) für $c = 45(5)70$ als U^0 konvergiert, gibt folgendes Bild: Konvergenz für $c = 45(5$ Iterationen) gegen die flache Lösung, für $c = 55(14$ Iterationen) gegen die hohe Lösung. Für alle anderen c Abbruch mit Fehlermeldung: Gleichungssystem (4.4) ist nicht lösbar. Brauchbare Werte sind $c = 0$ (3 Iterationen) und $c = 55$.

Nun könnte man in 4 Durchläufen das ganze Bifurkationsdiagramm abtasten. Statt das maximal erlaubte $\Delta\lambda$ immer wieder mit Satz 3.4 zu berechnen, geben wir es uns einfach vor, wie im vorigen Beispiel. Da wir dieses Mal den Bifurkationspunkt nicht so genau kennen, kommt es vor, daß $\Delta\lambda$ zu groß gewählt wird: dann hat man entweder keine Konvergenz, oder Konvergenz gegen die Lösung auf dem anderen Ast.

Das Bifurkationsdiagramm ist in Abb. 4.4 dargestellt, für $h = 1/10$ und $h = 1/20$. Diesmal ist der Simpson'sche Satz über die Abhängigkeit von (λ_h^*, U_h^*) von h anwendbar. Einige Werte von $\max U_h(P)$ wollen wir wieder in einer Tabelle zusammenstellen, da sie deutlich die Überlegenheit unseres Vorgehens gegenüber dem von Simpson zeigen:

λ	h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
10^{-6}		$7 \cdot 10^{-8}$	22.16
0.5		0.0376	7.902
1		0.0775	6.966
5		0.555	2.846
6		0.796	2.228
6.77		1.272	1.504
6.78		1.300	1.473
6.79		1.346	1.424
6.7925		1.379	1.390
6.793		-	-
6.8			1.340
			1.441

" " : nicht berechnet. " - " : keine Konvergenz.

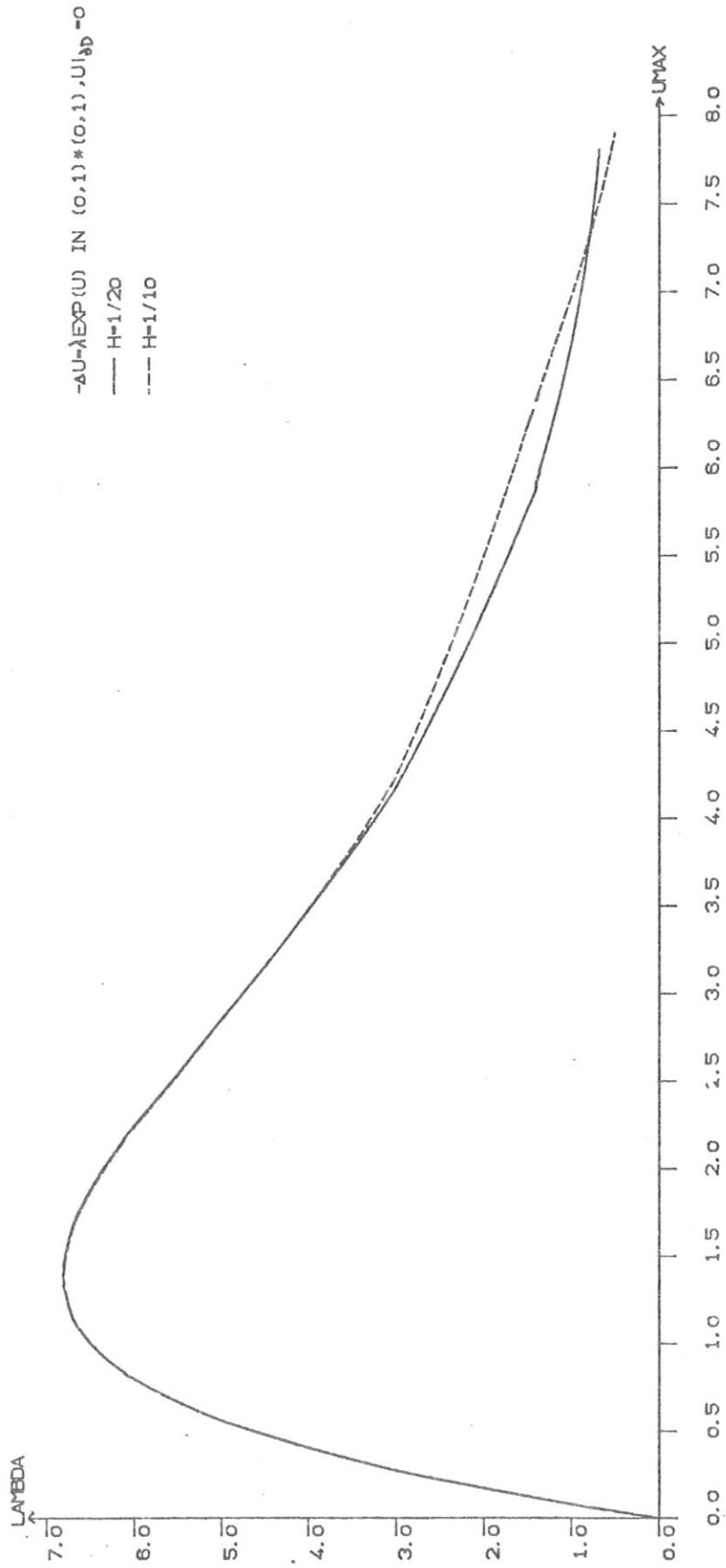


Abb. 4.4

Maximales λ , für das Simpson Lösungen berechnen konnte: $\lambda = 6.7$ auf dem Ast der flachen, $\lambda = 6.1$ auf dem Ast der hohen Lösungen (".. for λ near λ_h^* , there are a number of λ values for which initial guesses for Newton's method producing convergence to the lower solution were obtained but we were unable to produce convergence to the upper solution" [46], S. 374). Wenn wir gewollt hätten, wären wir noch dichter an (λ_h^*, u_h^*) herangekommen. Das schien aber wegen des Diskretisierungsfehlers nicht sinnvoll.

Auffallend war, daß $\Delta\lambda$ für $\lambda \rightarrow 0$ und $\lambda \rightarrow 6.8$ auf dem Ast der flachen Lösungen viel größer sein durfte als auf dem Ast der hohen Lösungen. Das stimmt wieder mit der altbekannten Tatsache überein, daß diese Lösungen leichter zu berechnen sind. Für $h = \frac{1}{20}$ konnten wir $\Delta\lambda = 0.05$ bis $\lambda = 6.8$ beibehalten, während wir für den anderen Ast in der Nähe von λ^* $\Delta\lambda = 0.01$ gewählt haben.

4.4 $T[\lambda; u] = 0$ mit zwei Lösungsscharen, aber ohne Verzweigungspunkt am Beispiel $T[\lambda; u] = -\Delta u - \lambda(u^2 - 6u + 5)$.

Das Problem der stationären Temperaturverteilung in einem Stab, dessen Enden in $x = \pm 1$ auf der Temperatur $y = 1$ gehalten werden und dessen Wärmeabgabe an die Umgebung mit der Temperatur $y = 0$ proportional zu $y + \frac{1}{4} y^2$ ist, wird gegeben durch

$$(4.11) \quad y'' - (y + \frac{1}{4} y^2) = 0 \quad y(-1) = y(1) = 1.$$

Aus physikalischen Gründen folgt, daß es eine Lösung y mit $0 \leq y(x) \leq 1$ gibt. Außerdem hat (4.11) aber noch eine zweite Lösung, die bis unter -17 fällt ([3], S.117 f).

Normierung von (4.11) auf die Randwerte $u(0) = u(1) = 0$ und Vorzeichenwechsel macht aus dieser Gleichung

$$(4.12) \quad -u'' = u^2 - 6u + 5 \quad u(0) = u(1) = 0$$

Ein Test, ob die Lösung von

$$(4.6) \quad A U = h^2 C \quad C^t = (c, \dots, c)$$

für $c = 0$ (50)200 als Startfunktion für das Newtonverfahren geeignet ist, lieferte folgendes Ergebnis ($h = 1/30$)

c	0	50	100	150	200
Lösung	U_1	U_2	U_2	U_2	U_2
Iterationen	4	6	6	7	7

Dabei wurde wieder das Abbruchkriterium

$$(4.7) \quad \|U^n - U^{n-1}\|_\infty < 10^{-8}$$

benutzt.

Rechenzeit: 0.6^h

Wir erinnern daran, daß wir mit dem Allgower/Keller - Programm 2.26^h, also fast das Vierfache, gebraucht hatten, um eine Lösung in geringerer Genauigkeit zu berechnen, vgl 1.5.5. Es war $h = 1/20$ und wir bekamen für U_{\max} die Werte 0.380 und 0.400 (nachträglich auf 3 Stellen gerundet), jeden etwa 10 mal. Das Newtonverfahren lieferte $U_{\max} = 0.391$.

Wir haben dann

$$(4.13) \quad -u'' = \lambda(u^2 - 6u + 5) \quad u(0) = u(1) = 0$$

und das zweidimensionale Analogon

$$(4.14) \quad -\Delta u = \lambda(u^2 - 6u + 5) \quad u|_{\partial D} = 0$$

untersucht. Wie schon beim Beispiel $f(u) = e^u$ konnten wir auch hier wieder feststellen, daß das Lösungsverhalten des eindimensionalen Problems sich nicht wesentlich von dem des zweidimensionalen unterscheidet. Die folgenden Überlegungen werden für (4.14) durchgeführt, sind aber fast wörtlich auf (4.13) übertragbar.

Lemma 4.1 Für jedes $\lambda \geq 0$ besitzt (4.14) genau eine Lösung u , die $0 \leq u(x) \leq 1$ erfüllt. Gegen diese Lösung konvergiert das Newtonverfahren monoton, wenn als Startfunktion $u^0 \equiv 0$ gewählt wird.

Beweis: $v \equiv 0$ ist Unterlösung, $w \equiv 1$ ist Oberlösung. Es ist $\lambda f_u(u) \leq 0 < 2\pi^2$ und $\lambda f_{uu}(u) = 2\lambda > 0$ für $u \in [0, 1]$ und $\lambda > 0$ (für $\lambda = 0$ ist $u \equiv 0$ Lösung). Wir können also Satz 3.3 anwenden und erhalten Existenz der Lösung und monotone Konvergenz des Newtonverfahrens.

Maximales λ , für das Simpson Lösungen berechnen konnte: $\lambda = 6.7$ auf dem Ast der flachen, $\lambda = 6.1$ auf dem Ast der hohen Lösungen (".. for λ near λ_h^* , there are a number of λ values for which initial guesses for Newton's method producing convergence to the lower solution were obtained but we were unable to produce convergence to the upper solution" [46] , S. 374). Wenn wir gewollt hätten, wären wir noch dichter an (λ_h^*, u_h^*) herangekommen. Das schien aber wegen des Diskretisierungsfehlers nicht sinnvoll.

Auffallend war, daß $\Delta\lambda$ für $\lambda \rightarrow 0$ und $\lambda \rightarrow 6.8$ auf dem Ast der flachen Lösungen viel größer sein durfte als auf dem Ast der hohen Lösungen. Das stimmt wieder mit der altbekannten Tatsache überein, daß diese Lösungen leichter zu berechnen sind. Für $h = \frac{1}{20}$ konnten wir $\Delta\lambda = 0.05$ bis $\lambda = 6.8$ beibehalten, während wir für den anderen Ast in der Nähe von λ^* $\Delta\lambda = 0.01$ gewählt haben.

4.4 $T[\lambda; u] = 0$ mit zwei Lösungsscharen, aber ohne Verzweigungspunkt am Beispiel $T[\lambda; u] = -\Delta u - \lambda(u^2 - 6u + 5)$.

Das Problem der stationären Temperaturverteilung in einem Stab, dessen Enden in $x = \pm 1$ auf der Temperatur $y = 1$ gehalten werden und dessen Wärmeabgabe an die Umgebung mit der Temperatur $y = 0$ proportional zu $y + \frac{1}{4}y^2$ ist, wird gegeben durch

$$(4.11) \quad y'' - (y + \frac{1}{4}y^2) = 0 \quad y(-1) = y(1) = 1.$$

Aus physikalischen Gründen folgt, daß es eine Lösung y mit $0 \leq y(x) \leq 1$ gibt. Außerdem hat (4.11) aber noch eine zweite Lösung, die bis unter -17 fällt ([3], S.117 f).

Normierung von (4.11) auf die Randwerte $u(0) = u(1) = 0$ und Vorzeichenwechsel macht aus dieser Gleichung

$$(4.12) \quad -u'' = u^2 - 6u + 5 \quad u(0) = u(1) = 0$$

Ein Test, ob die Lösung von

$$(4.6) \quad A U = h^2 C \quad C^t = (c, \dots, c)$$

für $c = 0$ (50)200 als Startfunktion für das Newtonverfahren geeignet ist, lieferte folgendes Ergebnis ($h = 1/30$)

c	0	50	100	150	200
Lösung	U_1	U_2	U_2	U_2	U_2
Iterationen	4	6	6	7	7

Dabei wurde wieder das Abbruchkriterium

$$(4.7) \quad \|U^n - U^{n-1}\|_\infty < 10^{-8}$$

benutzt.

Rechenzeit: 0.6 "

Wir erinnern daran, daß wir mit dem Allgower/Keller - Programm 2.26¹¹, also fast das Vierfache, gebraucht hatten, um eine Lösung in geringerer Genauigkeit zu berechnen, vgl 1.5.5. Es war $h = 1/20$ und wir bekamen für U_{\max} die Werte 0.380 und 0.400 (nachträglich auf 3 Stellen gerundet), jeden etwa 10 mal. Das Newtonverfahren lieferte $U_{\max} = 0.391$.

Wir haben dann

$$(4.13) \quad -u'' = \lambda(u^2 - 6u + 5) \quad u(0) = u(1) = 0$$

und das zweidimensionale Analogon

$$(4.14) \quad -\Delta u = \lambda(u^2 - 6u + 5) \quad u|_{\partial D} = 0$$

untersucht. Wie schon beim Beispiel $f(u) = e^u$ konnten wir auch hier wieder feststellen, daß das Lösungsverhalten des eindimensionalen Problems sich nicht wesentlich von dem des zweidimensionalen unterscheidet. Die folgenden Überlegungen werden für (4.14) durchgeführt, sind aber fast wörtlich auf (4.13) übertragbar.

Lemma 4.1 Für jedes $\lambda \geq 0$ besitzt (4.14) genau eine Lösung u , die $0 \leq u(x) \leq 1$ erfüllt. Gegen diese Lösung konvergiert das Newtonverfahren monoton, wenn als Startfunktion $u^0 \equiv 0$ gewählt wird.

Beweis: $v \equiv 0$ ist Unterlösung, $w \equiv 1$ ist Oberlösung. Es ist $\lambda f_{uu}(u) \leq 0 < 2\pi^2$ und $\lambda f_{uu}(u) = 2\lambda > 0$ für $u \in [0, 1]$ und $\lambda > 0$ (für $\lambda = 0$ ist $u \equiv 0$ Lösung). Wir können also Satz 3.3 anwenden und erhalten Existenz der Lösung und monotone Konvergenz des Newtonverfahrens.

Lemma 4.2 Ist $u(x)$ eine weitere Lösung von (4.14), so erfüllt sie notwendig

$$(4.15) \quad \max_{x \in D} u(x) \geq \max \left\{ 5, \frac{x^2}{\lambda} + 3 \right\}, \lambda \neq 0$$

$$(4.16) \quad \min_{x \in D} u(x) = 0$$

Folgerung 1 Die zwei Lösungsäste können sich nicht in einem Bifurkationspunkt treffen, da $\max u_1(x) \leq 1 < 5 \leq \max u_2(x)$ gilt.

Folgerung 2 Für die zweite Lösung gilt $\max u_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \infty$.

Bemerkung: Einen Existenzbeweis für die zweite Lösung haben wir nicht. Doch verhält sich die berechnete zweite Lösung so, wie man es nach dem Lemma und dem Bifurkationsdiagramm von $-u'' = \lambda u^2$ ([5], S. 128) erwartet.

Beweis: Aus Satz 1.4 folgt $\max u_2(x) \geq \frac{x^2}{\lambda} + 3$. Es bleibt also zu zeigen, daß $\max_{x \in \bar{D}} u_2(x) \geq 5$ gilt. Angenommen, $u_2(x)$ hat in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum mit $3 \leq u_2(x_0) < 5$. Dann gilt $-\Delta u_2(x_0) = \lambda (u_2(x_0))^2 - 6 u_2(x_0) + 5 < 0$. Eine notwendige Bedingung für ein lokales Maximum in x_0 ist aber $-\Delta u_2(x_0) \geq 0$. Also gilt $\max_{x \in \bar{D}} u_2(x) \geq 5$.

(4.16) beweist man praktisch genauso: aus $u(x_0) < 0$ folgt $-\Delta u(x_0) > 0$.

Abb. 4.5 zeigt das Bifurkationsdiagramm von (4.14), das für $\lambda = 1(1) 10(5) 50$ und verschiedene h -Werte berechnet wurde.

Während sich die flachen Lösungen bei Halbierung von h nicht mehr wesentlich ändern, ist das bei den hohen Lösungen sehr wohl noch der Fall. h müßte noch beträchtlich verkleinert werden, bis man befriedigende Ergebnisse hätte.

Bei unseren bisherigen Beispielen hatte $f(u)$ und damit $-\Delta u$ für jede Lösung in D einheitliches Vorzeichen. Das ist hier nicht mehr so. Die rechte Seite von (4.14) wechselt für $u = 1$ und $u = 5$ ihr Vorzeichen, und wir haben hieraus schon Schlüsse für u_{\max} gezogen: es muß entweder unter 1 oder über 5 bleiben. Für jede hohe Lösung wechselt also Δu in D das Vorzeichen. Daraus resultieren die numerischen Schwierigkeiten, wie wir noch sehen werden.

Wir haben zunächst beide Lösungen für $h = 1/10$ und $\lambda = 1(10) 38701$

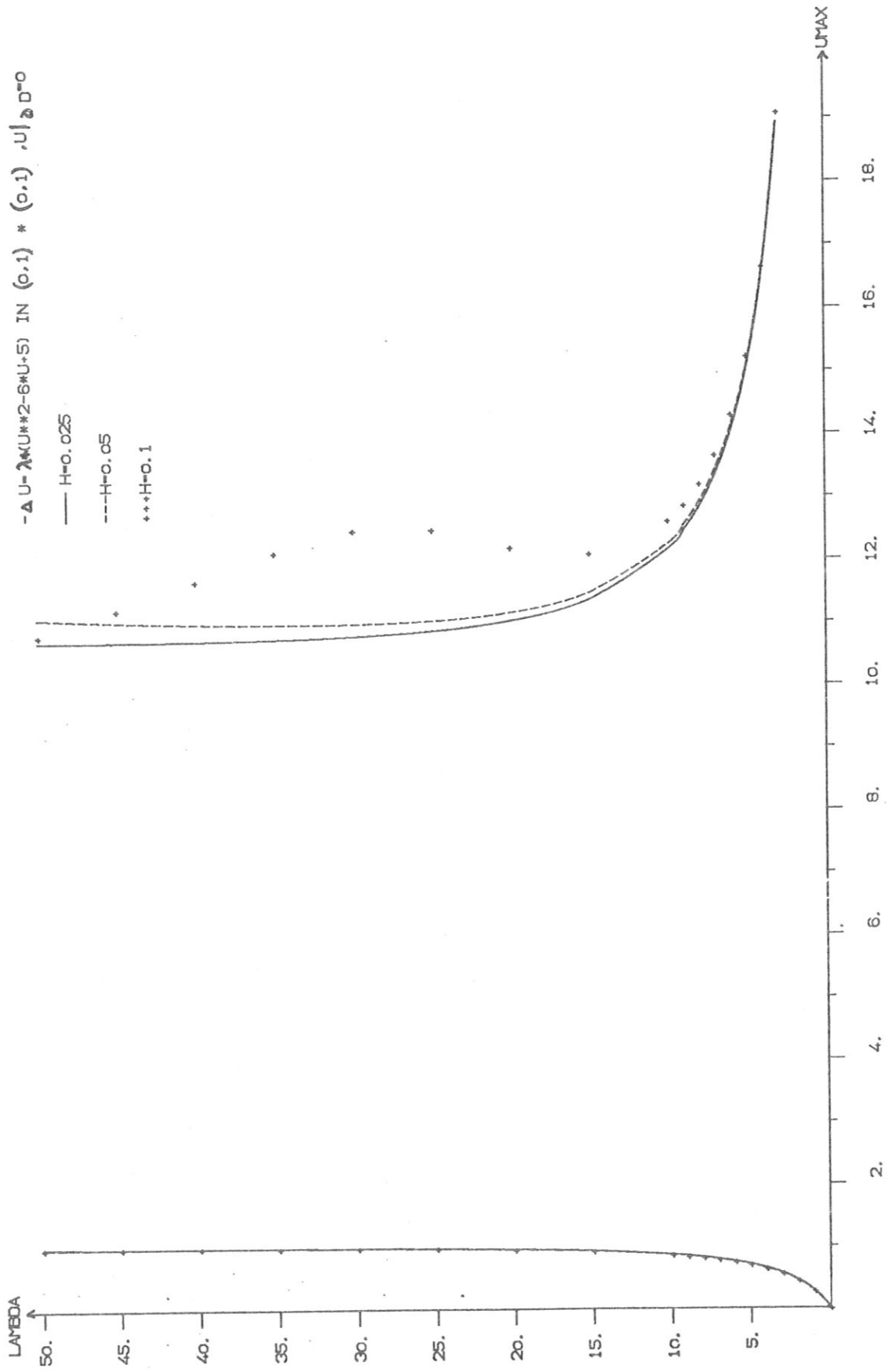


Abb. 4.5

bzw. $\lambda = 1(5)19351$ berechnet. Das kam dadurch zustande, daß wir nicht λ , sondern die Rechenzeit begrenzt hatten. Für die meisten λ reichten 2 Iterationen. Auf dem Ast der flachen Lösungen wurden z.B. $4 \cdot 10^{-3}$ sec/Lösung gebraucht.

Zu erkennen war folgende Tendenz: $\max U_1(P)$ wächst, Änderungen in U verlagern sich immer mehr in Randnähe. $\max U_2(P)$ fällt, Änderungen in U verlagern sich immer mehr zur Mitte des Gebiets und, schwächer, zum Rand.

Es war $\max U_2(P) < 5.4$ für $\lambda > 1000$ und $\max U_2(P) < 5.03$ für $\lambda > 13400$, sodaß man $\max u_2(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 5$ vermutet.

Für $h = \frac{1}{20}$ $\lambda = 1(1)10(5) 300$ und

$$h = \frac{1}{40} \quad \lambda = 1(1)10(5) 300$$

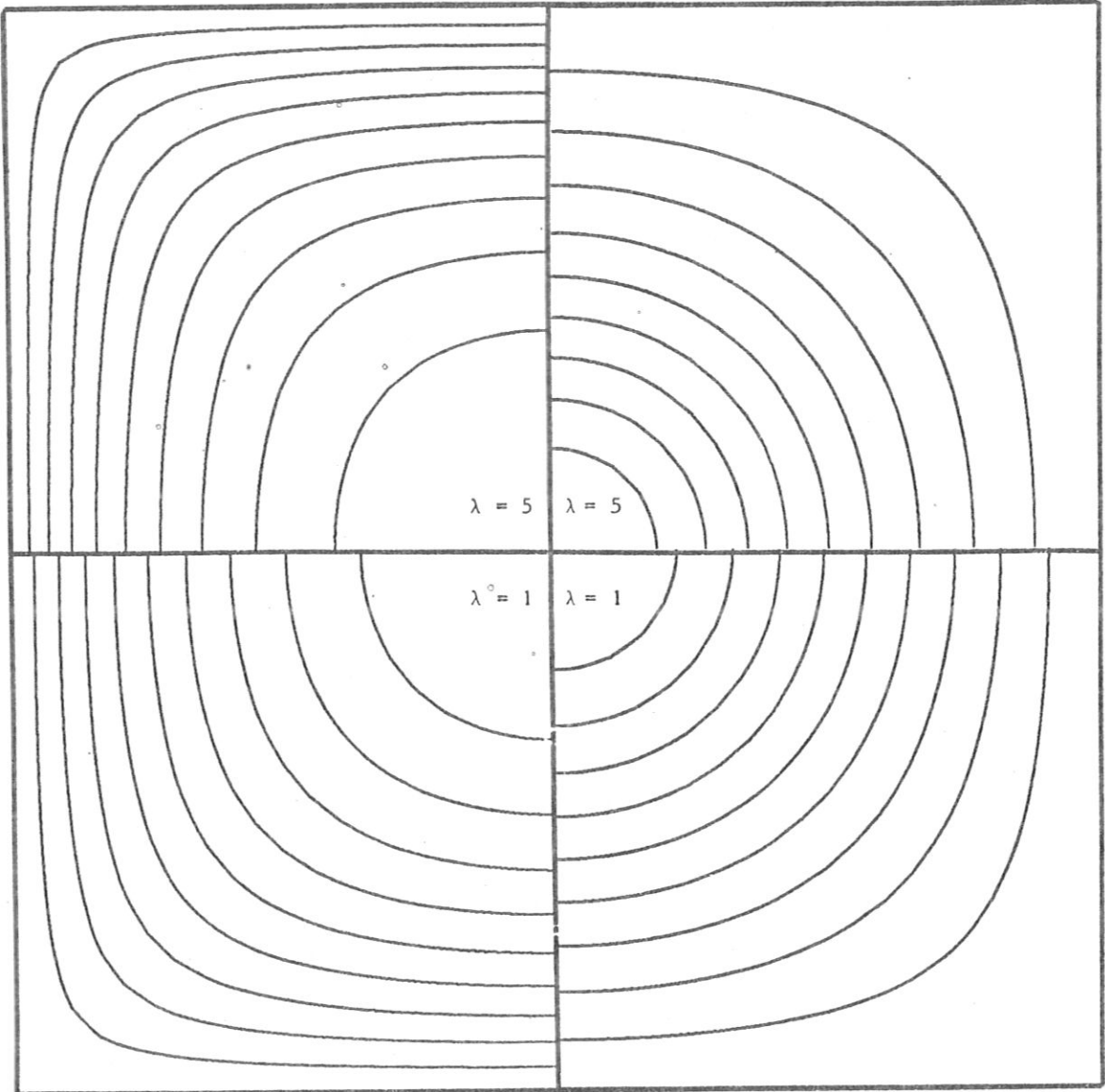
änderten sich die Funktionswerte zwar noch erheblich, die erwähnte Tendenz blieb jedoch erhalten und ist auch beim eindimensionalen Problem feststellbar.

Abb. 4.6 zeigt die Lösungen von (4.14) für $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$. Wir haben aus den vier Plots eine einzige Abbildung gemacht, damit die Unterschiede zwischen den vier Lösungen stärker auffallen.

Bei solchen Lösungen sollte man natürlich mit unregelmäßigem Gitter arbeiten. Wir haben uns stattdessen dem eindimensionalen Problem zugewandt.

Die Lösungen von (4.13) haben wir für $h = \frac{1}{20}$ und $h = \frac{1}{80}$ und

$\lambda = 1(1)10(5)200$, $\lambda = 1(-0.1)0.1$ berechnet. Einige Werte zeigt folgende Tabelle:



flache hohe
Lösung

$$-\Delta u = \lambda(u^2 - 6u + 5) \quad \text{in } (0,1) \times (0,1), \quad u|_{\partial D} = 0.$$

$$\text{Abstand zweier Höhenlinien: } U_{\max}/10. \quad h = \frac{1}{40}.$$

$\lambda = 5$	$U_{\max} = 0.7090$	$U_{\max} = 14.9702$
$\lambda = 1$	$U_{\max} = 0.2780$	$U_{\max} = 38.5663$

Abb. 4.6

λ	h	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{80}$
200		$1-10^{-6}$	7.31
			$1-10^{-6}$
			7.02
100		$1-10^{-4}$	7.21
			$1-10^{-4}$
			7.01
50		0.998	7.09
			0.998
			7.02
40		0.996	7.09
			0.997
			7.02
30		0.992	7.11
			0.992
			7.04
20		0.978	7.20
			0.979
			7.17
10		0.921	7.69
			0.922
			7.68
1		0.391	18.68
			0.391
			18.69
0.1		0.059	125.
- 0.9		- 1.89	

Abb. 4.7 zeigt die flachen Lösungen für $\lambda = 1, 100$ und 200 , Abb. 4.8 zeigt die hohen Lösungen zu diesen λ -Werten.

$$-U'' = \text{LAMBDA} * (U * (2 - 6 * U + 5)) \quad U(0) = U(1) = 0$$

— LAMBDA = 1.

--- LAMBDA = 100.

*** LAMBDA = 200.

$h = 1/80$

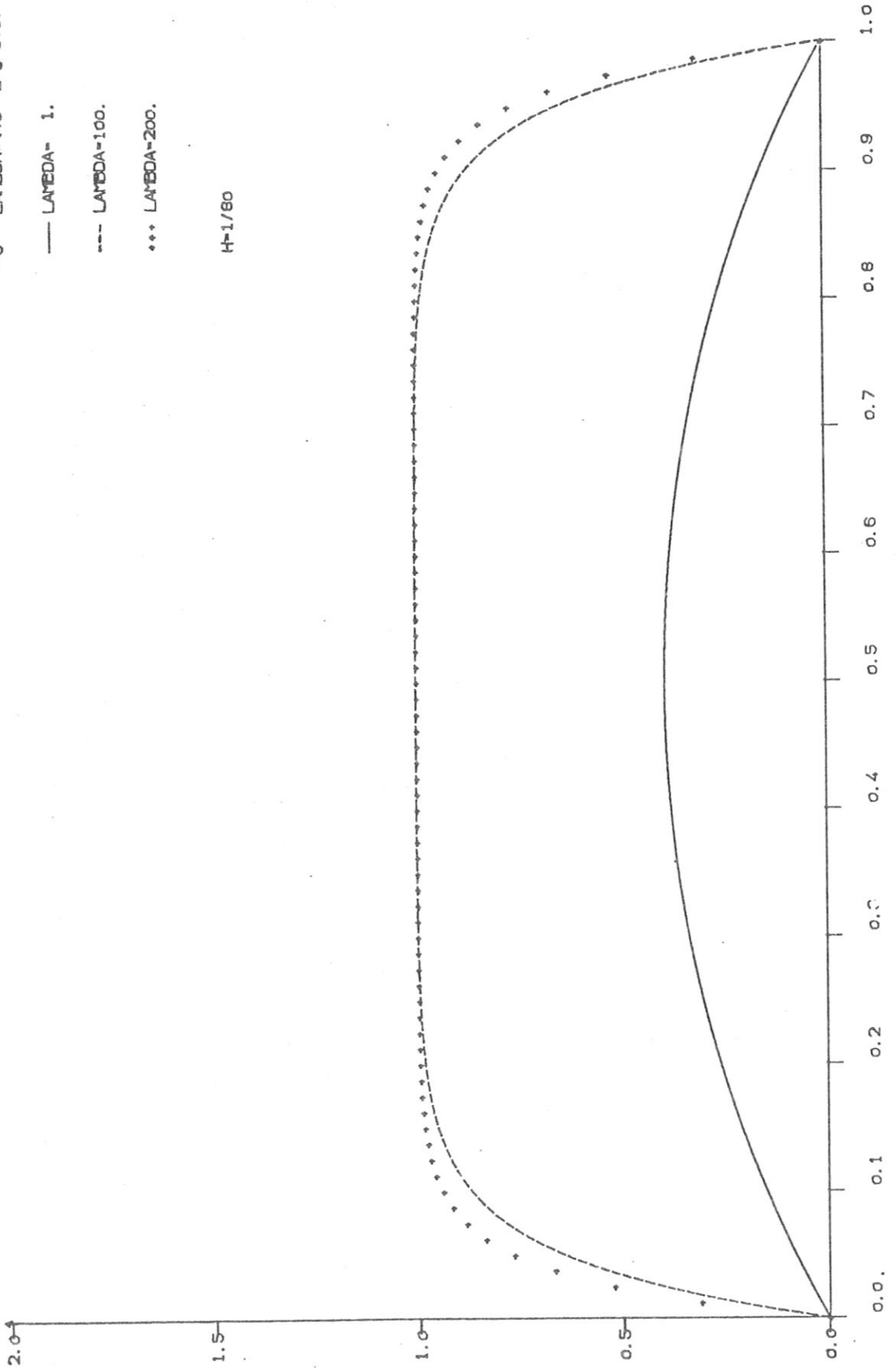


Abb. 4.7

$$-U'' = \text{LAMBDA} * (U**2 - 6*U + 5) \quad U(0) = U(1) = 0$$

— LAMBDA= 1.

--- LAMBDA=100.

*** LAMBDA=200.

H=1/80

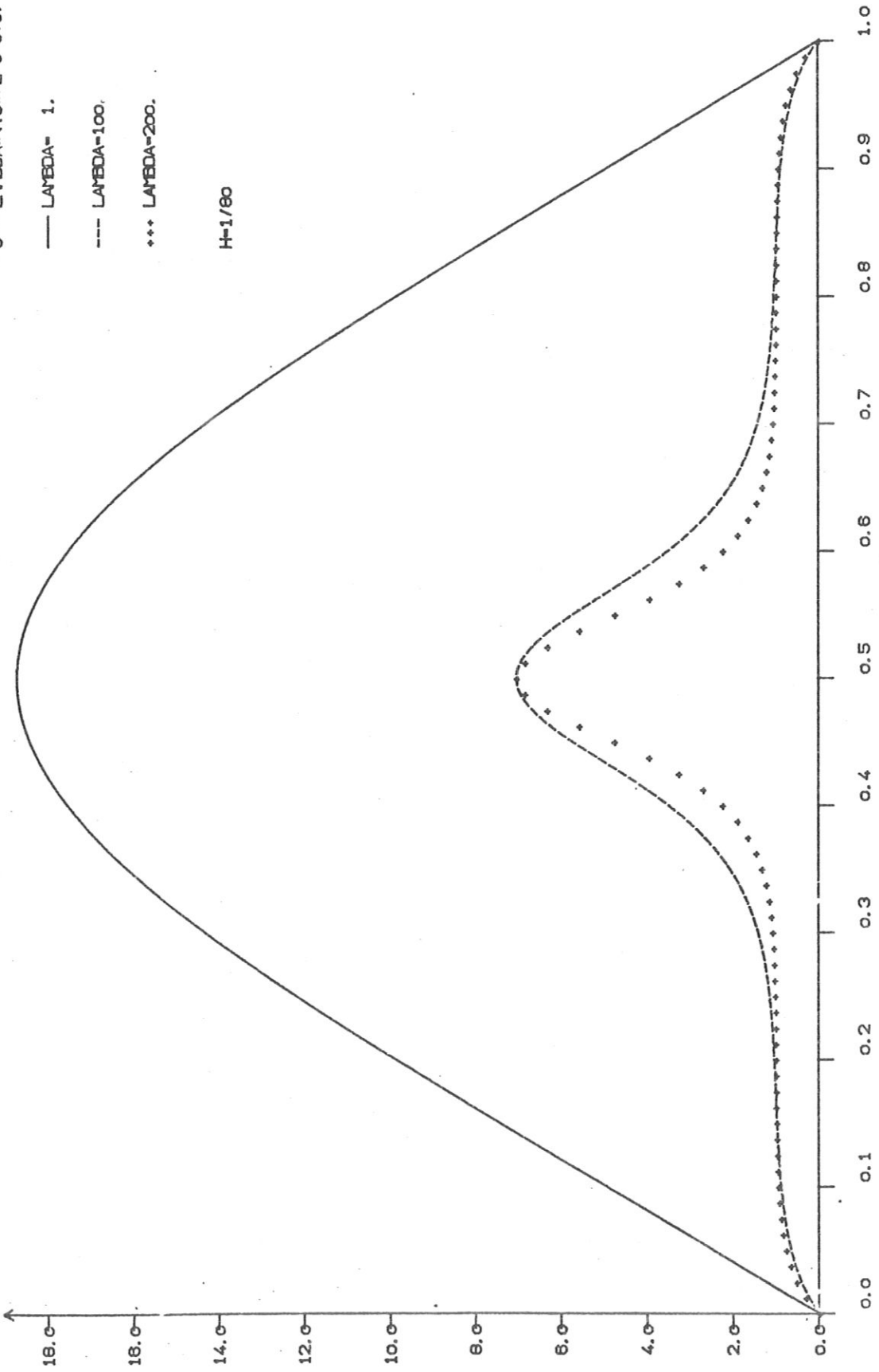


Abb. 4.8

Bezeichnungen

Im Text definierte, nur lokal auftretende Bezeichnungen wurden in diese Zusammenstellung bewußt nicht aufgenommen.

Bei Zitaten von Sätzen aus der Literatur innerhalb eines Beweises wurden die in der Quelle benutzten Bezeichnungen übernommen, wenn dies zu keinen Mißverständnissen führen kann. Bei Zitaten mit weniger lokaler Bedeutung wurde dagegen die im übrigen Text benutzte Notation eingeführt. Das hat insbesondere zu vielen Vorzeichenwechselln (und also auch Vertauschungen von min und max) in Kapitel 1 geführt, da leider nebeneinander die Notationen $\Delta u = f(x,u)$ und $-\Delta u = f(x,u)$ üblich sind. Wir haben letztere bevorzugt, weil sich so das Maximumprinzip und die Begriffe Ober- und Unterlösung besonders bequem formulieren lassen.

$$[0.75, 1.5) := \{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} \leq x < \frac{3}{2} \}.$$

$$x = (x_1, x_2), \quad |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{falls } x \in \mathbb{R}^2.$$

$$(a,b) \times (c,d) := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid a < x_1 < b; c < x_2 < d \}.$$

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. \bar{D} ist die abgeschlossene Hülle von D , ∂D der Rand von D und D_h die Menge der Gitterpunkte in D (vgl. 2.1).

$$A \setminus B := \{ x \in A \mid x \notin B \} \quad \text{für } A, B \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{|a - b|, a \in A, b \in B\}.$$

$f(h) = O(h^n)$ bedeutet: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß

$$|f(h)| \leq C h^n \text{ gilt.}$$

C ist stets eine beliebige positive Konstante. Mehrfaches Auftreten von C bedeutet nicht, daß es sich um dieselbe Konstante handelt.

$$f_u(x, u) := \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \quad \text{usw.}$$

u^n ist die n -te Iterierte. In einigen Fällen treten auch Potenzen auf. Verwechslungsgefahr besteht jedoch nicht, da nie beides gleichzeitig auftritt.

$u: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion. $u \leq v$ bedeutet $u(x) \leq v(x)$ für alle $x \in D$.

$U, U_h: \bar{D}_h \rightarrow \mathbb{R}$ Gitterfunktionen.

Sei $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Wir benutzen folgende Normen:

$$\|u\|_p := \left(\int_D |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p=1,2; \quad \|u\|_\infty := \sup_{x \in D} |u(x)|, \quad \|v\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

u heißt in D hölderstetig mit Exponent α , $0 < \alpha \leq 1$, wenn es ein $C > 0$ gibt, so daß $|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^\alpha$ gilt. C sei minimal gewählt.

$$\|u\|_\alpha := \|u\|_\infty + C.$$

Sei $k = (k_1, k_2)$, $k_i \in \mathbb{N}$, $D^k u := \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}$ mit $|k| := k_1 + k_2$.

$C^{p+\alpha}(D)$ ist der Raum derjenigen auf D definierten Funktionen, deren p -te Ableitungen noch α -hölderstetig sind. $C^{p+\alpha}(D)$ ist mit der Norm

$$\|u\|_{p+\alpha} := \sum_{|k| \leq p} \|D^k u\|_\alpha \text{ ein Banachraum. Es ist } C^{p+\alpha}(D) \cong C^{p+\alpha}(\bar{D}) \quad [48].$$

Bei linearen Operatoren $T: B_1 \rightarrow B_2$ ist stets die durch die Normen in den Banachräumen B_1, B_2 induzierte Norm zu nehmen, also $\|T\| := \sup_{V \neq 0} \frac{1}{\|V\|_{B_1}} \|TV\|_{B_2}$.

z.z.: ("zu zeigen :") und % ("Ende des Hilfssatzbeweises") dienen dazu, Beweise übersichtlich zu gliedern.

2.26" = $2 \frac{26}{100}$ Sekunden. Als Rechenzeiten sind immer die für den GO STEP gebrauchten Zeiten angegeben, also die Rechenzeiten des kompilierten und montierten Programms.

$n = 1(2)15$ bedeutet $n = 1, 3, 5, \dots, 15$.

Literatur

- 1) E.L. ALLGOWER, M.M. JEPPSON - "The approximation of solutions of nonlinear elliptic BVP s having several solutions." Proc. Oberwolfach Dez. 72 Lecture Note 333, Springer 1973
- 2) E.L. ALLGOWER, C.L. KELLER -"A search routine for a Sperner simplex" Computing 8 (1971) p 157-165
- 3) P.B. BAILEY, L.F. SHAMPINE, P.E. WALTMAN -"Nonlinear two point BVP s." Academic Press 1968
- 4) C. BANDLE -"Isoperimetrische Ungleichungen für den Grundton einer inhomogenen Membran und Anwendungen auf ein nichtlineares Dirichletproblem." Proc. Oberwolfach Nov. 72, ISNM 24 Birkhäuser Verlag 1974
- 5) M.S. BERGER -"A bifurcation theory for nonlinear elliptic partial differential equations and related systems,"S.113-216 in [32]
- 6) J.F. BESSELING -"Post-buckling and nonlinear analysis by the finite element method as a supplement to a linear analysis " Hauptvortrag auf der GAMM-Tagung 1974, erscheint voraussichtlich im ZAMM-Tagungsheft 1975
- 7) E. BITTONI et al -"Soluzione numerica del problema di Dirichlet per equazioni ellitiche non lineari."Report RT/FIMA(72)5
- 8) J.H. BRAMBLE -"Error estimates for difference methods in forced vibration problems" J. SIAM Numer Anal 3 (1966)1-12
- 9) ———, "On the convergence of difference approximations to weak solutions of Dirichlet's problem."Numer Math 13 (1969) 101-111.
- 10) B.L. BUZBEE, G.H. GOLUB, C.W. NIELSON:"On direct methods for solving Poisson's equation" SIAM J Numer Anal 7, 627-656 (1970)
- 11) L. COLLATZ -"Funktionalanalysis und Numerische Mathematik,"Springer 1964
- 12) ———, "Differentialgleichungen"Teubner Stuttgart 1970
- 13) ———, "Monotonicity with discontinuities in partial differential equations" Proc. Conference on ordinary and partial differential equations, Dundee März 74, Lecture Note 415, Springer 1974
- 14) ———, private Mitteilung
- 15) R. COURANT, D. HILBERT "Methods of mathematical physics", vol I, II, Interscience publishers 1966
- 16) H.T. DAVIS -"Introduction to nonlinear differential and integral equations" Dover publications 1960

- 17) J. DOUGLAS -"Alternating direction iteration for mildly nonlinear elliptic differential equations," Numer Math 3(1961) 92-98
- 18) S. FISHER -"Reversed field equilibria in axially symmetric electron current layer" Phys Fluids 14 (1971) 962-966
- 19) H. FUJITA -"On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + e^v$ " Bull Amer Math Soc 75 (1969) 132-135
- 20) R. GAINES -"Difference equations associated with BVP s for second order nonlinear ordinary differential equations" SIAM J Numer Anal 11 (1974) S. 411f
- 21) I.M. GEL'FAND -"Some problems in the theory of quasilinear equations" Uspehi Mat Nauk 14(1959); Amer Math soc Transl (2) 29(1963) 295-381, § 15
- 22) B. GREEN, MPI für Plasmaphysik, private Mitteilung
- 23) K.U. v. HAGENOW, MPI für Plasmaphysik, private Mitteilungen
- 24) ———, K. LACKNER -"Third international symposium on toroidal plasma confinement", Garching 1973, Paper F7
- 25) K. HAINER -"Lösung des Dirichletproblems und Konvergenz der Differenzenapproximation für elliptische Dgln 2. Ordnung" Math Z 131 (1973) 189-211
- 26) I. HOFMANN, MPI für Plasmaphysik, private Mitteilung
- 27) M.M. JEPPSON -"A search for the fixed points of a continuous mapping" SIAM 1972 Mathematical topics in economic theory and computation
- 28) D.D. JOSEPH, E.M. SPARROW -"Nonlinear diffusion induced by nonlinear sources" Quart Appl Math 28 (1970) 327-342
- 29) R. KALABA -"On nonlinear differential equations, the maximum operation, and monotone convergence" J Math Mech 8 (1959) 519-574
- 30) H.B. KELLER -"Accurate difference methods for nonlinear two point boundary value problems" SIAM J Numer Anal 11 (1974) 305f
- 31) J.B. KELLER -"Bifurcation theory for ordinary differential equations" in [32] S. 17-48
- 32) ———, S. ANTMAN, - ed. "Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems" Benjamin New York 1969
- 33) K. KNOPP -"Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen", Springer 1964

- 34) M.A. KRASNOSEL'SKI et al -"Approximate solution of operator equations" Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen 1972
- 35) B. MARDER, H. WEITZNER -"A bifurcation problem in E-layer equilibria" Plasma phys 12 (1970) 435-445
- 36) S.V. PARTER -"Maximal solutions of mildly nonlinear elliptic equations" in : Numerical solutions of nonlinear differential equations, D. Greenspan, ed. John Wiley & Sons, 1966
- 37) M.H. PROTTER, H.F. WEINBERGER -" Maximum principles in differential equations," Prentice Hall 1967
- 38) E.L. REISS -"Column buckling - an elementary example of bifurcation" in [32], S.1-16
- 39) D. SATTINGER -"Stability of solutions of nonlinear equations" J Math Anal Appl 39 (1972) 1-12
- 40) ———, -" Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic BVP s" Indiana University Maths J 21 (1972) 979-1000
- 41) ———, -"Topics in stability and bifurcation theory" Lecture Note 309, Springer 1973
- 42) J. SCHRÖDER -"Invers monotone Operatoren" Arch Rat Mech Anal 10, 276-295 (1962)
- 43) ———, U. TROTTEBERG -"Reduktionsverfahren für Differenzgleichungen bei Randwertaufgaben I" Numer Math 22 (1973) 37 - 68
- 44) N.L. SCHRYER -"Newton's method for convex nonlinear BVP s" Numer Math 17 (1971) 284-300
- 45) R.B. SIMPSON -"Finite difference methods for mildly nonlinear eigenvalue problems" SIAM J Numer Anal 8 (1971) 190f
- 46) ———, -"Existence and error estimates for solutions of a discrete analog of nonlinear eigenvalue problems" Math Comp 26 (1972) 359-375
- 47) H.J. WACKER -"Globalisierung lokaler Verfahren" Proc. Oberwolfach Dez. 73, Lecture Note 395 Springer 1974
- 48) J. WLOKA -"Funktionalanalysis und Anwendungen", Walter de Gruyter 1971
- 49) E.P. ZHDKOV, G.I. MAKARENKO, I.V. PUZYNIN -"Continuous analog of Newton's method in nonlinear problems of physics" Sov J Particles Nucl 4 (1973) 53-69