MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN

Differenzenverfahren für Diffusionsgleichungen
der Plasmaphysik

D. Düchs, K. Graf Finck v. Finckenstein
K. U. v. Hagenow

IPP 6/139

September 1975

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

Various difference methods for certain nonlinear diffusion equations and also systems of such equations are investigated with respect to convergence and stability. For this purpose implicit two-level methods of the Crank-Nicholson type prove to be particularly useful. For these some numerical examples are given.

Inhaltsverzeichnis

1. Einzelne Diffusionsgleichungen

- a) Problemstellung
- b) Explizite Verfahren
- c) Implizite Verfahren durch Produktzerlegung
- d) Verfahren vom Crank-Nicholson - Typ
- e) Numerische Beispiele

2. Systeme von Diffusionsgleichungen

- a) Problemstellung und numerische Behandlung
- b) Numerische Experimente

Literaturverzeichnis

1. Einzelne Diffusionsgleichungen

a) Problemstellung

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist ein zylindersymmetrisches Plasma, dem ein zeitlich veränderliches Magnetfeld:

$$\vec{B}(r,t) = (B_r(r,t), B_\varphi(r,t), B_z(r,t))^T$$

überlagert wird. Dabei sind r, φ, z die Zylinderkoordinaten; wegen der vorausgesetzten Zylindersymmetrie hängt $\vec{B}$ nur von r, t , nicht aber von φ, z ab.

Ausgehend von den Gleichungen:

$$a) \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \vec{E}$$

$$b) \quad \vec{E} = \eta \cdot \vec{j} \tag{1}$$

$$c) \quad \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{B}$$

$$d) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

erhalten wir durch Elimination von $\vec{E}$ und $\vec{j}$:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \operatorname{rot} (\eta \cdot \operatorname{rot} \vec{B}) ,$$

oder umgeschrieben in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \frac{\partial B_r}{\partial t} &= 0 \\
 \text{b)} \quad \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_\varphi) \right) \\
 \text{c)} \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \eta \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Die Gleichung $\text{div } \vec{B} = 0$ liefert nach dem Gauss'schen Integralsatz wegen der Zylindersymmetrie:

$$B_r(r, t) \equiv 0, \tag{3}$$

d.h. $\vec{B}(r, t)$ ist tangential zu den Zylinderflächen. Es müßten also noch die Gleichungen 2b), 2c) behandelt werden, und zwar im allgemeinen als gekoppeltes System, wenn man z.B. von dem Widerstand η annehmen kann, daß er eine Funktion von B_φ , B_z , $\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}$, $\frac{\partial B_z}{\partial r}$ ist. Die Abhängigkeit von den Ableitungen ist physikalisch von Interesse, da sie in den Fällen auftritt, in denen der spezifische Widerstand außer von der Magnetisierung auch noch von der Stromdichte mitbestimmt wird.

In diesem Abschnitt wollen wir uns beschränken auf die numerische Behandlung der Gleichung 2c), da in vielen Fällen angenommen werden kann, daß die Gleichungen 2b), 2c) nicht gekoppelt sind, und da man sich oft nur für die axiale Komponente des diffundierenden Magnetfeldes $\vec{B}(r, t)$ interessiert. Dieses ist z.B. der Fall, wenn man den Spezialfall $B_\varphi(r, t) \equiv 0$ vorliegen hat.

Wir wollen also das folgende Anfangs- Randwert-Problem betrachten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \varphi \left(u, \frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right], \quad \varphi(x, y) > 0$$

$$u(r, 0) = f(r) > 0, \quad 0 \leq r \leq R \quad (4)$$

$$u(R, t) = g(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

wobei wir für B_z u und für η φ gesetzt haben. R ist der Radius des Randes und T die Zeitspanne, in der der Diffusionsvorgang betrachtet werden soll. Wir nehmen an, daß (4) eine hinreichend glatte, eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Durch Entwicklung von $u(r, t)$ nach Potenzen von r um $r = 0$ zeigt man dann, daß die Ableitung von u nach r bei $r = 0$ verschwinden muß:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (5)$$

Wir haben also bei $r = 0$ (Zylinderachse) eine natürliche Randbedingung vorliegen.

Um numerische Verfahren zur Lösung von (4) zu testen, ist es oft empfehlenswert, für spezielle Beispiele analytische Lösungen zu konstruieren, um diese dann mit den numerischen Lösungen zu vergleichen. Natürlich müssen bei der exakten Lösung und der Näherungslösung die Anfangs- und Randwerte in den entsprechenden Gitterpunkten übereinstimmen. Durch einen Separationsansatz:

$$u(r, t) = v(r) \cdot w(t) \quad (6)$$

erhält man z.B. für den Spezialfall $\varphi(u, \frac{\partial u}{\partial r}) \equiv \varphi(u) \equiv u^\ell, \ell \geq 1$, ganz, eine Lösung der Form:

$$u(r, t) = \left(\frac{\ell \cdot r^2}{4 \cdot (\ell+1) \cdot (t_0 - t)} \right)^{\frac{1}{\ell}}, \quad t_0 > T, \text{ konstant.}$$

Für den Fall $\varphi(u, \frac{\partial u}{\partial r}) \equiv \varphi(\frac{\partial u}{\partial r}) \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^\ell$ kommt

man zu einer Lösung der Form:

$$u(r, t) = \frac{\ell}{\ell+2} \left(\frac{\ell \cdot r^{\ell+2}}{(\ell+2) \cdot (3\ell+2) \cdot (t_0 - t)} \right)^{\frac{1}{\ell}}, \quad t_0 > T, \text{ konstant.}$$

Man bekommt durch derartige Vergleiche oft einen guten Einblick in die Genauigkeit der Verfahren.

b) Explizite Verfahren.

Die expliziten Differenzenverfahren haben den Vorteil, daß sie einen geringen Rechenaufwand für jeden Zeitschritt erfordern. Da jedoch zur Gewährleistung ihrer Stabilität (bzw. Konvergenz) an das Schrittweitenverhältnis $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$ recht einschränkende Voraussetzungen gemacht werden müssen, sind die impliziten Verfahren meist vorzuziehen.

Der Bereich $G = \{(r, t) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T\}$ wird mit einem rechteckigen Gitter, bestehend aus den Gitterpunkten:

$$G_{hk} = \{(r_i, t_j) = (i \cdot h, j \cdot k) ; i = 0, \dots, N+1 ; j = 0, \dots, M\}$$

versehen. Dabei ist: $((N+1) \cdot h, M \cdot k) = (R, T)$.

Ferner führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\lambda = \frac{k}{h^2} \quad , \quad f_{ij} = f(r_i, t_j) \quad ,$$

$$\|f_j\| = \max_{0 \leq i \leq N+1} |f_{ij}| \quad , \quad \|f\| = \max_{0 \leq j \leq M} \|f_j\| \quad .$$

Wir betrachten jetzt den Spezialfall:

$$\varphi(u, \frac{\partial u}{\partial r}) \equiv u^\ell \quad , \quad \ell \geq 0 \quad \text{ganzzahlig.} \quad (7)$$

(4) lässt sich dann in folgender Form schreiben:

$$\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial u}{\partial r} \cdot r \, dr = \frac{r}{\ell+1} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (u^{\ell+1}) \Big|_{a_i}^{b_i} \quad , \quad i = 0, \dots, N \quad (8)$$

mit $a_0 = 0$, $b_0 = \frac{h}{2}$, $a_i = (i - \frac{1}{2}) \cdot h$, $b_i = (i + \frac{1}{2}) \cdot h$, $i = 1, \dots, N$.

Durch Approximation der Differentialquotienten durch die zentrierten Differenzenquotienten und der Integrale nach der Tangentenregel erhält man folgende Differenzengleichungen, die zu (8) von der Ordnung h^2 konsistent sind:

$$\begin{aligned} U_{0j+1} &= U_{0j} + \frac{4\lambda}{\ell+1} [U_{1j}^{\ell+1} - U_{0j}^{\ell+1}] \\ U_{ij+1} &= U_{ij} + \frac{\lambda}{\ell+1} [(1 + \frac{1}{2i})U_{i+1,j}^{\ell+1} - 2U_{ij}^{\ell+1} + (1 - \frac{1}{2i})U_{i-1,j}^{\ell+1}] \\ i &= 1, \dots, N \\ j &= 0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (9)$$

Hinzu kommen noch die Anfangs- und Randwerte in den Gitterpunkten $(r_i, 0)$

$i = 0, \dots, N+1$ und (R, t_j) $j = 0, \dots, M$, die sich aus den gegebenen

Funktionen $f(r)$, $g(t)$ in (4) ergeben. In [5] wird folgender Konvergenzsatz bewiesen:

Satz 1: Die Lösung des Differenzenverfahrens (9) konvergiert punktweise (d.h. in der Maximumnorm) gegen die Lösung von (4), (7) (bzw. (8)) für $k, h \rightarrow 0$ von der Ordnung h^2 , falls man an λ die Bedingung stellt:

$$\lambda \leq \frac{1}{4 \|u\|^\nu} \quad \text{für } \nu = 0, 1, \dots, 1 \quad (10)$$

Als nächstes wird der Spezialfall:

$$\varphi(u, \frac{\partial u}{\partial r}) \equiv \frac{\partial u}{\partial r} \quad (11)$$

betrachtet. Man erhält durch analoge Überlegungen die folgende Approximation, die ebenfalls von der Ordnung h^2 ist:

$$\begin{aligned} U_{0j+1} &= U_{0j} + \frac{4\lambda}{h} (U_{1j} - U_{0j})^2 \\ U_{ij+1} &= U_{ij} + \frac{\lambda}{h} \left[\left(1 + \frac{1}{2i}\right) (U_{i+1,j} - U_{ij})^2 - \left(1 - \frac{1}{2i}\right) (U_{ij} - U_{i-1,j})^2 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, N \\ j &= 0, \dots, M-1 \end{aligned}$$

In [6] wird gezeigt:

Satz 2: Die Lösung des Differenzenverfahrens (12) konvergiert in der Maximumnorm von der Ordnung h^2 gegen die Lösung von (4), (11), wenn h, k gegen Null gehen, und wenn an λ die Bedingung:

$$\lambda \leq \frac{1}{4 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|} - \varepsilon(h) \quad (13)$$

gestellt wird, wobei $\epsilon(h) \geq 0$ eine Funktion ist, die mit $h \rightarrow 0$ ebenfalls gegen Null strebt.

c) Implizite Verfahren durch Produktzerlegung.

Von dem Diffusionskoeffizienten φ in (4) nehmen wir jetzt an, daß er nur von der Lösung $u(r,t)$ abhängt:

$$\varphi \equiv \varphi(u) > 0. \quad (14)$$

Ferner wird gesetzt:

$$c = \min \{ f(r), g(t) : (r,t) \in G \}, \quad d = \max \{ f(r), g(t) : (r,t) \in G \}.$$

Nach dem Minimum - Maximum - Prinzip ist jeder Wert der Lösung von (4) zwischen den positiven Zahlen c und d eingeschlossen.

Die Differentialgleichung (4) wird jetzt auf folgende Weise umgeformt:

Sei $V = \psi(u) = \int_c^u \varphi(s) ds$. $\psi(u)$ ist für $u \geq c$ streng monoton wachsend und nicht negativ. Also existiert die Umkehrfunktion $u = \tilde{\psi}(v) \geq c$.

Mit den Bezeichnungen:

$$w = \chi(v) = \varphi(\tilde{\psi}(v)), \quad \tilde{f}(r) = \int_c^{f(r)} \varphi(s) ds, \quad \tilde{g}(t) = \int_c^{g(t)} \varphi(s) ds$$

geht (4) über in :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \chi(v) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad \chi(v) > 0 \text{ für } v \geq 0 \\ v(r, 0) &= \tilde{f}(r) \geq 0, \quad 0 \leq r \leq R \\ v(R, t) &= \tilde{g}(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (15)$$

Mit: $\tilde{d} = \int_c^d \varphi(s) ds$ folgt für die Lösung von (15):

$$0 \leq v(r, t) \leq \tilde{d} \quad \text{für } (r, t) \in G.$$

Ferner definieren wir:

$$c = \max \{ \chi(v) : 0 \leq v \leq \tilde{d} \}. \quad (16)$$

Nun wird G mit dem folgenden rechteckigen Gitter G_{hk} versehen:

$$G_{hk} = \left\{ \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) \cdot h, j \cdot k \right) ; i = 0, \dots, N ; j = 0, \dots, M \right\} ;$$

dabei ist $(N + \frac{1}{2}) \cdot h = R$, $M \cdot k = T$. Wir setzen wieder $\lambda = k \cdot h^{-2}$ und schreiben für alle in G bzw. G_{hk} auftretenden Funktionen $F(r, t)$ zur Abkürzung:

$$F_{ij} = F\left(\left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot h, j \cdot k\right).$$

Sei α ein Parameter mit $0 \leq \alpha \leq 1$. (15) wird auf folgende Weise diskretisiert:

$$\begin{aligned} V_{ij+1} = V_{ij} + \lambda W_{ij} \left\{ \alpha \left[\frac{2^i}{2^{i+1}} \cdot V_{i-1j+1} - 2 V_{ij+1} + \frac{2^{i+2}}{2^{i+1}} V_{i+1j+1} \right] + \right. \\ \left. + (1-\alpha) \left[\frac{2^i}{2^{i+1}} V_{i-1j} - 2 V_{ij} + \frac{2^{i+2}}{2^{i+1}} V_{i+1j} \right] \right\} \quad (17) \\ i = 0, \dots, N-1 ; j = 0, \dots, M-1, \end{aligned}$$

mit: $W_{ij} = \chi(V_{ij})$.

Anmerkung: Für $i = 0$ sind die Terme V_{i-1j} nicht definiert; das stört aber nicht, da die davorstehenden Faktoren ohnehin verschwinden.

Das Differenzenverfahren (17) ist für jedes feste $\lambda > 0$ zu (15) konsistent von der Ordnung h^2 . Ferner bereitet die Auflösung von (17) keine Schwierigkeiten: Für jedes j muß ein lineares Gleichungssystem mit tridiagonaler Koeffizientenmatrix gelöst werden. Wegen $W_{ij} = \chi(V_{ij}') > 0$ überlegt man sich, daß diese Koeffizientenmatrix eine sogen.

M - Matrix und daher stets nichtsingulär ist (vgl. [7] und [14]).

Für den Fall $\alpha = 0$ ist (17) ein explizites Verfahren.

In [7] wird die folgende Konvergenzaussage bewiesen:

Satz 3: Für λ gelte die Bedingung:

$$\lambda \leq \frac{1}{2(1-\alpha)C} \quad (18)$$

Dann konvergiert für $h, k \rightarrow 0$ die Lösung $\{V_{ij}\}$ von (17) in der Maximumnorm von der Ordnung h^2 gegen die Lösung $v(r, t)$ des Anfangs-Randwert-Problems (15).

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Tatsache, daß die Differenzengleichungen (17) ein diskretes Maximum-Minimum-Prinzip erfüllen: Jeder Wert der Lösung $\{V_{ij}\}$ liegt zwischen den Zahlen 0 und $\tilde{d}$.

Hat man die Lösung von (17) berechnet, dann erhält man eine Näherungslösung $\{U_{ij}\}$ des ursprünglichen Problems (4) durch Auflösung der Funktionalgleichungen:

$$V_{ij}' = \int_c^{u_{ij}} \varphi(s) ds \quad ; \quad i = 0, \dots, N; \quad j = 0, \dots, M. \quad (19)$$

Natürlich muß darauf geachtet werden, daß die Gleichungen (19) ebenfalls bis auf $O(h^2)$ genau gelöst werden. Eine weitere Möglichkeit, das Problem (4) auf einfachere Gestalt zu transformieren, besteht in folgendem.

Wir setzen:

$$\begin{aligned} \rho &= r^2, \\ y(\rho, t) &\equiv u(r, t), \\ \tilde{f}(\rho) &\equiv f(r), \\ \tilde{g}(t) &\equiv g(t), \\ \text{sowie: } \psi(y) &\equiv \int_{\epsilon}^y \varphi(s) ds, \end{aligned}$$

wobei $\epsilon \geq 0$ eine untere Schranke des Wertebereichs der Werte von $y(\rho, t)$, $0 \leq \rho \leq R^2$, $0 \leq t \leq T$ ist. $\psi(y)$ ist eine nicht negative streng monoton wachsende Funktion von y für $y \geq \epsilon$. Somit geht (4) über in folgendes äquivalente Anfangs-Randwert-Problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= 4 \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \psi(y)}{\partial \rho} \right) \\ y(\rho, 0) &= \tilde{f}(\rho) > 0, \quad 0 \leq \rho \leq R^2 \\ y(R^2, t) &= \tilde{g}(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{20}$$

was ein einfacheres Aussehen als (4) hat. Ist (20) gelöst, dann läßt sich durch einfache Transformationen der Ortsvariablen r, ρ auch die Lösung von (4) berechnen.

Wir zerlegen $\psi(y)$ in ein Produkt:

$$\psi(y) = v(y) \cdot w(y), \tag{21}$$

wobei die Faktoren $v(y)$, $w(y)$ folgende Bedingungen erfüllen sollen:

- a) $v(y)$, $w(y) \geq 0$ und einmal stetig differenzierbar,
- b) $v(y)$ ist monoton wachsend,
- c) $w(y) \equiv 1$ oder $w(y)$ ist streng monoton wachsend mit $w(\varepsilon) = 0$.

Das Rechteck $\tilde{G} = \{ (\varphi, t) : 0 \leq \varphi \leq R^2, 0 \leq t \leq T \}$ wird nun wieder versehen mit den Gitterpunkten:

$$\tilde{G}_{hk} = \left\{ \left(\left(i + \frac{1}{2}\right)h, jk \right) ; i = 0, \dots, N ; j = 0, \dots, M \right\}$$

wobei $(N + \frac{1}{2}) \cdot h = R^2$ und $M \cdot k = T$ ist. Zur Abkürzung setzen wir wieder F_{ij} für $F((i + \frac{1}{2})h, jk)$.

Anmerkung: Der obigen äquidistanten Schrittweitereinteilung in φ entspricht bezüglich r eine Zerlegung des Kreises vom Radius R in flächengleiche Kreisinge.

(20) wird durch folgende Differenzengleichungen approximiert.

$$U_{ij+1} = U_{ij} + 4\lambda \left\{ i h V_{i-1j} W_{i-1j+1} - (2i+1)h V_{ij} W_{ij+1} + (i+1)h V_{i+1j} W_{i+1j+1} \right\} \quad (22)$$

$$i = 0, \dots, N-1 ; j = 0, \dots, M-1 ;$$

mit $V_{ij} = v(U_{ij})$, $W_{ij} = w(U_{ij})$.

Zur Berechnung der U_{ij+1} aus (22) ist für jedes j ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen. In [9] wird bewiesen, daß dieses nicht-lineare Gleichungssystem genau eine nicht negative Lösung

$\{ U_{ij+1} \}$, $i = 0, \dots, N-1$ besitzt, falls die Zahlen U_{0j} , ..., U_{Nj} , U_{Nj+1} alle größer als ε sind. Ferner läßt sich dann das System

mit dem 1-Schritt-Jacobi-Newton-Verfahren oder auch mit dem 1-Schritt-SOR-Newton-Verfahren ($0 < \omega < 2$) iterativ lösen, falls die Startwerte nahe genug an der Lösung liegen. Es ist naheliegend, als Startwerte die Zahlen U_{0j} , ..., U_{N-1j} zu wählen. Als nächstes erhebt sich wieder die Frage der Konvergenz. Wir wollen an λ die Bedingung:

$$\lambda \leq \frac{1}{8R^2 \cdot \max \{ v'(x) \cdot w(x) : c \leq x \leq d \}} \quad (23)$$

stellen, wobei c, d die oben definierten Schranken des Wertebereichs von $u(r, t)$ bzw. $y(\rho, t)$ sind. Hieraus ergibt sich, daß (22) wieder ein diskretes Maximum-Minimum-Prinzip erfüllt; wir erhalten nämlich für die Lösung:

$$c \leq U_{ij} \leq d, \quad i = 0, \dots, N; \quad j = 0, \dots, M.$$

Die ausführlichen Überlegungen sind alle in [9] dargestellt, wo auch folgende Konvergenzaussage bewiesen wird:

Satz 4: Unter der Bedingung (23) konvergiert die Lösung $\{U_{ij}\}$ von (22) gegen die Lösung $y(\rho, t)$ des Problems (20), falls h, k gegen Null streben. Die Konvergenz ist in der Betragsnorm von der Ordnung h^2 und in der Maximumnorm noch mindestens von der Ordnung h . Dabei ist die Betragsnorm folgendermaßen definiert:

$$\|x\|_1 = h \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} |x_\nu| \quad \text{mit} \quad x = (x_0, \dots, x_{N-1})^T.$$

Anmerkung: Numerische Rechnungen zeigen, daß die in (23) angegebene Schranke für $\lambda = \frac{k}{h^2}$ oft erheblich überschritten werden kann, ohne daß das Verfahren versagt. Ferner liegt offensichtlich auch Konvergenz von $O(h^2)$ in der Maximumnorm vor (sofern natürlich Anfangs- und Randfunktionen des Problems hinreichend glatt sind). Wahrscheinlich also läßt sich der Satz 4 verschärfen.

d) Verfahren vom Crank-Nicholson-Typ.

Die Differenzenverfahren, die jetzt untersucht werden sollen, haben sich in der numerischen Praxis als besonders effektiv und vorteilhaft erwiesen. Zwar erfüllen ihre Lösungen i.a. kein diskretes Maximum-Minimum-Prinzip wie die unter b) ^(und c) besprochenen Verfahren, haben jedoch gegenüber letzteren folgende Vorteile:

- 1.) Es können allgemeinere Probleme behandelt werden, d.h. der Diffusionskoeffizient φ darf von u und von $\frac{\partial u}{\partial r}$ abhängen.
- 2.) Es ist möglich, mit erheblich größeren Zeitschritten zu arbeiten, ohne daß die Verfahren versagen. Dies ist ein für die Praxis besonders wichtiger Punkt.
- 3.) Die Konvergenzordnung ist genauso hoch, wie bei den bisher besprochenen Methoden.
- 4.) Zur Berechnung der Näherungslösung bedarf es für jeden Zeitschritt nur der Auflösung eines linearen tridiagonalen Gleichungssystems, d.h., Rechenaufwand und Speicherbedarf sind relativ gering.

Wir gehen von dem Anfangs-Randwert-Problem (4) mit den dazu gemachten Voraussetzungen aus und nehmen noch zusätzlich an:

$$a) \varphi(x, y) + y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) \geq \delta, \text{ für } \delta > 0, \text{ fest}$$

$$\text{und für } x \geq \min_G \{f(r), g(t)\}, y \in \mathbb{R}.$$

$$b) |\varphi(x, y)| \leq C, \text{ für } C > 0, \text{ fest}$$

$$\text{und für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Bedingung a) beinhaltet die Parabolizität von (4): Der Koeffizient vor der höchsten Ableitung der Lösung ist positiv und von Null weg-beschränkt.

Bedingung b) bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, da u und $\frac{\partial u}{\partial r}$ in G untere und obere Schranken besitzen und daher gegebenenfalls die Funktion $\varphi(x, y)$ außerhalb dieser Schranken geeignet abgeändert werden kann, ohne daß das Problem (4) und dessen Lösung davon beeinflusst wird.

Wir wählen nun Schrittweiten $h = \Delta r$, $k = \Delta t$ und setzen für das Schrittweitenverhältnis im folgenden stets voraus:

$$\tilde{K}_0 \cdot \Delta r \leq \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq K_0 \quad (24)$$

mit $\tilde{K}_0, K_0 > 0$, beliebig, fest. Man beachte, daß durch diese Beziehung der Zeitschritt wesentlich weniger beschränkt wird, als bei den vorher beschriebenen Verfahren, wie die Ungleichungen (10), (13), (18) und (23) zeigen. Sodann wird $G = \{(r, t) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T\}$ mit den Gitter-

punkten:

$$G_{hk} = \left\{ \left(\left(i + \frac{1}{2}\right)h, j \cdot k \right), i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M \right\}$$

versehen und für irgendwelche Funktionen $f(r, t)$ gesetzt:

$$f_{ij} = f\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)h, j \cdot k\right).$$

Die folgenden Differenzenverfahren sind

1-Schritt-Verfahren, die in jeder Gleichung

6 Gitterpunkte nach nebenstehender Skizze

miteinander verbinden. Dabei werden die

Werte der beiden Zeitschichten mit gewissen

Gewichten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ versehen. Versehen wir zur Abkürzung die Funktions-

werte auf der Schicht $(j + 1) \cdot k$ mit dem Symbol " $\hat{}$ ", dann wird die Ge-

wichtung folgendermaßen vorgenommen:

$$\varphi \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{(r^*, t^*)} \approx \vartheta_1 \cdot \hat{\varphi} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \vartheta_2 \cdot \hat{\varphi} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \vartheta_3 \cdot \varphi \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + (1 - \vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3) \cdot \varphi \cdot \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Durch Entwicklung der Terme $\hat{\varphi}$ um die Punkte bei $t = j \cdot k$ und Vernachlässigung aller Glieder von der Ordnung Δt^2 erhalten wir mit der Umbenennung:

$$\alpha = \vartheta_1 + \vartheta_3, \quad \beta = \vartheta_1 + \vartheta_2$$

folgende Approximation:

$$\begin{aligned} \varphi \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{(r^*, t^*)} &\approx \varphi_{ij} \left[\alpha \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{ij+1} + (1-\alpha) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{ij} \right] + \\ &+ \beta \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{ij} \left[D_1 \varphi_{ij} (u_{ij+1} - u_{ij}) + D_2 \varphi_{ij} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{ij+1} - \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{ij} \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Dabei bedeutet für $\nu = 1, 2$ $D_\nu \varphi_{ij}$ die Ableitung von φ nach der ν -ten Variablen an der Stelle $(u_{ij}, (\frac{\partial u}{\partial r})_{ij})$.

Wir wollen uns im folgenden auf die Spezialfälle:

$$\alpha = \beta, \quad \alpha \geq \frac{1}{2} \quad (26)$$

beschränken, da numerische Experimente gezeigt haben, daß die Fälle $\alpha \neq \beta$ i.a. keine Verbesserung bringen ($\beta < \alpha$ bringt sogar Verschlechterungen der Verfahren). Ferner muß man für $\alpha < \frac{1}{2}$ schärfere Einschränkungen an $\frac{\Delta t}{\Delta r}$ fordern, damit die Konvergenz gewährleistet ist.

Ersetzt man jetzt in (4) die Differentialquotienten durch die zentrierten Differenzenquotienten und nimmt die Gewichtung nach (25), (26) vor, dann erhält man folgende Differenzengleichungen:

$$\begin{aligned} & -\alpha \lambda \frac{2i}{2i+1} g_{i-\frac{1}{2}j}^- (u_{i-1j+1} - u_{i-1j}) + \\ & + \left[1 + \alpha \lambda \left(\frac{2i}{2i+1} g_{i-\frac{1}{2}j}^+ + \frac{2i+2}{2i+1} g_{i+\frac{1}{2}j}^- \right) \right] \cdot (u_{ij+1} - u_{ij}) - \\ & - \alpha \lambda \frac{2i+2}{2i+1} g_{i+\frac{1}{2}j}^+ \cdot (u_{i+1j+1} - u_{i+1j}) - \\ & - \frac{2\lambda}{2i+1} \left[i \cdot \varphi_{i-\frac{1}{2}j} \cdot u_{i-1j} - (i \cdot \varphi_{i-\frac{1}{2}j} + (i+1) \cdot \varphi_{i+\frac{1}{2}j}) u_{ij} + (i+1) \cdot \varphi_{i+\frac{1}{2}j} \cdot u_{i+1j} \right] = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$U_{i0} = u_{i0}, U_{Nj} = u_{Nj}, U_{N0} = u_{N0}, U_{NM} = u_{NM} \quad (27)$$

für $i = 0, \dots, N-1$; $j = 0, \dots, M-1$.

Dabei ist:

$$\lambda = k \cdot h^{-2}, \quad \varphi_{i-\frac{1}{2}j} = g_{i-\frac{1}{2}j}^{-} = g_{i-\frac{1}{2}j}^{+} = 0,$$

$$\varphi_{i-\frac{1}{2}j} = \varphi\left(\frac{U_{ij} + U_{i-1j}}{2}, \frac{U_{ij} - U_{i-1j}}{h}\right), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$g_{i-\frac{1}{2}j}^{\pm} = \varphi_{i-\frac{1}{2}j} \pm \frac{1}{2} D_1 \varphi_{i-\frac{1}{2}j} (U_{ij} - U_{i-1j}) + \frac{1}{h} D_2 \varphi_{i-\frac{1}{2}j} (U_{ij} - U_{i-1j}), \quad i = 1, \dots, N.$$

(27) ist zu (4) konsistent von der Ordnung k und im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ sogar von der Ordnung h^2 (linearisiertes Crank-Nicholson-Verfahren).
Ferner ergibt sich wegen Voraussetzung a), daß für hinreichend kleine Schrittweiten ein $\delta' > 0$ existiert mit

$$g_{i-\frac{1}{2}j}^{\pm} \geq \delta', \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 0, \dots, M.$$

Hieraus folgert man, daß die Koeffizientenmatrix des linearen Systems

(27) (in den Unbekannten U_{ij+1}) für jedes j nichtsingulär ist.

Außerdem ist diese Matrix tridiagonal, so daß die Auflösung mit dem bekannten Verfahren vorgenommen werden kann.

In [8] ist folgender Konvergenzsatz bewiesen:

Satz 5: Für $\alpha \geq \frac{1}{2}$ und unter der Bedingung (24) konvergiert für

$\Delta r, \Delta t \rightarrow 0$ die Lösung U_{ij} von (27) punktweise (d.h. i.d. Maximumnorm) von der Ordnung Δt gegen die Lösung $u(r, t)$ von (4). Für $\alpha = \frac{1}{2}$

erhält man Konvergenz von der Ordnung Δr^2 .

e) Numerische Beispiele

Die Differenzenverfahren (27) haben sich in der numerischen Praxis als besonders effektiv erwiesen, und wir beschränken uns daher bei den numerischen Beispielen auf diese Verfahren. Für das folgende wählen wir in (4):

$$R = 1, \quad T = c^{-1} \quad (c > 0 \text{ ein Parameter}),$$

$$f(r) \equiv 0,2, \quad g(t) \equiv 0,2 + c \cdot t$$

und setzen für ϕ verschiedene Funktionen ein. Die Abbildungen zeigen den Verlauf der errechneten Lösung aufgetragen über r für verschiedene Zeitpunkte, die in jedem Beispiel gleich gewählt sind, damit Vergleiche angestellt werden können.

Beispiel 1: $\varphi(u) \equiv 4 \cdot u^4, \quad c = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$

Die Kurven der ersten Abbildung dürften der wahren Lösung recht nahe liegen, da mit einem kleinen Schrittweitenverhältnis gerechnet wurde ($\frac{\Delta t}{\Delta r} = 10^{-1}$). Die 4 folgenden Abbildungen demonstrieren gut die Konvergenzaussage von Satz 5: Durch wiederholtes Halbieren der Schrittweiten bei einem festen, relativ großen Schrittweitenverhältnis ($\frac{\Delta t}{\Delta r} = 1$) werden die Näherungslösungen immer besser, wie ein Vergleich mit der ersten Abbildung zeigt. (Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß nicht etwa $\frac{\Delta t}{\Delta r^2}$ sondern $\frac{\Delta t}{\Delta r}$ konstant gehalten wird; dies bedeutet eine

wesentlich geringere Einschränkung an Δt).

Beispiel 2: $\varphi(u, \frac{\partial u}{\partial r}) \equiv u^4 \cdot \left(\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 0,1 \right),$

$c = 1, \alpha = \frac{1}{2}$. Hier gilt dasselbe, wie bei Beispiel 1; φ hängt jetzt jedoch auch noch von der Ableitung der Lösung ab.

Beispiel 3: $\varphi(u) \equiv u^4, \kappa = 5, \Delta r = 10^{-2},$

$\lambda = 40$. Die drei Abbildungen zeigen den Verlauf der errechneten Lösungen für $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$. Man sieht, wie durch Erhöhung des Parameters α das Verfahren stabilisiert wird; Allerdings wird i.a. dabei ein Genauigkeitsverlust in Kauf genommen, da das Verfahren für $\alpha > \frac{1}{2}$ nur von 1. Ordnung ist.

Beispiel 1

$$\begin{aligned} \Delta r &= 2 \cdot 10^{-2} \\ \Delta t &= 2 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta r &= 4 \cdot 10^{-2} \\ \Delta t &= 4 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Beispiel 1

$$\Delta r = 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta t = 2 \cdot 10^{-2}$$

(c)

$$\Delta r = 10^{-2}$$

$$\Delta t = 10^{-2}$$

(d)

Beispiel 1

$$\Delta r = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$$

Beispiel 2

$$\Delta r = 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$$

Beispiel 2

$$\Delta \tau = 4 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta t = 4 \cdot 10^{-2}$$

(b)

$$\Delta \tau = 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta t = 2 \cdot 10^{-2}$$

(c)

Beispiel 2

$$\Delta r = 10^{-2}$$

$$\Delta t = 10^{-2}$$

$$\Delta r = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$$

Beispiel 3

Beispiel 3

2. Systeme von Diffusionsgleichungen.

a) Problemstellung und numerische Behandlung.

Ebenso wie die einzelnen Diffusionsgleichungen sind auch Systeme von Diffusionsgleichungen von großer Wichtigkeit, da viele physikalische Vorgänge durch solche beschrieben werden. Ein Beispiel hierfür stellt das System (2) dar, das eine Magnetfeld-Diffusion beschreibt. Ein weiteres Beispiel ist die Wärmeleitung in geheizten Plasmen, wobei man sich für die Verteilung der Ionen- und Elektronentemperatur interessiert. Es soll hier kurz auf die numerische Behandlung solcher Probleme eingegangen werden, bei denen man auf Anfangs-Randwertprobleme von gekoppelten Systemen der folgenden Art kommt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \varphi^{(1)} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + r \varphi^{(2)} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \varphi^{(3)} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + r \varphi^{(4)} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right]\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}u(r, 0) &= f_1(r) > 0, \quad v(r, 0) = f_2(r) > 0, \quad 0 \leq r \leq R \\ u(R, t) &= g_1(t) > 0, \quad v(R, t) = g_2(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq T\end{aligned}$$

$$\text{mit: } \varphi^{(i)} = \varphi^{(i)}\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial r}\right) \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Diese Systeme lassen sich erfolgreich mit den unter d) beschriebenen Differenzenverfahren numerisch behandeln. Konvergenzbeweise für diese Verfahren sind allerdings bisher nur unter recht speziellen Voraussetzungen an die Koeffizienten $\varphi^{(i)}\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial r}\right)$ gelungen.

Die Approximation wird formal wieder nach dem Schema (25) und der zusätzlichen Einschränkung (26) durchgeführt, wobei nur jetzt die gesuchte Lösung ein Vektor und der Diffusionskoeffizient φ eine Matrix ist. Wir setzen:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^{(1)} & \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(3)} & \varphi^{(4)} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial W}{\partial r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$$

und schreiben (28) in der äquivalenten Form:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \Phi \cdot \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad (28^*)$$

Es sei $D_\nu \varphi^{(\mu)}$ die Ableitung von $\varphi^{(\mu)}$ nach der ν -ten Variablen ($\nu = 1, \dots, 4$, $\mu = 1, \dots, 4$). Dann sind $D_1 \Phi$, $D_2 \Phi$ folgende Tensoren:

$$D_1 \Phi = \left\{ \begin{pmatrix} D_1 \varphi^{(1)} & D_1 \varphi^{(2)} \\ D_1 \varphi^{(3)} & D_1 \varphi^{(4)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_2 \varphi^{(1)} & D_2 \varphi^{(2)} \\ D_2 \varphi^{(3)} & D_2 \varphi^{(4)} \end{pmatrix} \right\},$$

$$D_2 \Phi = \left\{ \begin{pmatrix} D_3 \varphi^{(1)} & D_3 \varphi^{(2)} \\ D_3 \varphi^{(3)} & D_3 \varphi^{(4)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_4 \varphi^{(1)} & D_4 \varphi^{(2)} \\ D_4 \varphi^{(3)} & D_4 \varphi^{(4)} \end{pmatrix} \right\}.$$

Ersetzt man jetzt in (27) die Terme $U, \varphi, D_1 \varphi, D_2 \varphi$ durch $W = (u, v)^T, \Phi, D_1 \Phi, D_2 \Phi$, dann erhält man die Differenzengleichungen für (28) bzw. (28*). Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystem ist jetzt block-tridiagonal, wobei die Blöcke zweireihige

quadratische Matrizen sind. Über die Diffusionskoeffizienten

$\varphi^{(\mu)}(w, \frac{\partial w}{\partial \tau})$, $\mu = 1, \dots, 4$ machen wir jetzt folgende Voraussetzung, die man als Verallgemeinerung der Voraussetzung a) zu dem Problem (4) betrachten kann:

Sei: $X = (x_1, x_2)^T$, $Y = (y_1, y_2)^T$ und

$$G(x, y) = \Phi(x, y) + D_2 \Phi(x, y) \cdot y.$$

Für jedes (x, y) mit $x_\nu \geq \min_G \{f_\nu(\tau), g_\nu(t)\}$, $\nu = 1, 2$, $y \in \mathbb{R}^2$

sei $G(x, y)$ positiv reell diagonalisierbar:

$$A(x, y) \cdot G(x, y) \cdot A^{-1}(x, y) = \text{Diag}(y_1(x, y), y_2(x, y)) \quad (*)$$

mit: $y_\nu(x, y) \geq \delta > 0$, $\nu = 1, 2$, δ fest.

Ferner sollen feste Zahlen M_1, M_2 existieren mit:

$$\|A(x, y)\|_2 \leq M_1, \quad \|A^{-1}(x, y)\|_2 \leq M_2.$$

Außerdem sollen in Analogie zu Voraussetzung b) die $|\varphi^{(\mu)}|$ durch eine Konstante C nach oben beschränkt sein.

Numerische Rechnungen lassen vermuten, daß die Bedingung $(*)$ hinreichend für die Konvergenz des Verfahrens (27) ist. Ist die Bedingung verletzt in dem Sinne, daß ein Eigenwert von $G(x, y)$ kleiner oder gleich Null ist, brechen die Verfahren meist zusammen; Die Bedingung scheint also auch bis zu einem gewissen Grade notwendig für Konvergenz zu sein. Es scheint recht

schwierig zu sein, den Konvergenzbeweis von Satz 5 auf Systeme zu übertragen. Jedoch für den folgenden Spezialfall gelingt dies ohne besondere Schwierigkeiten:

$$1.) \quad \varphi^{(2)} = \varphi^{(3)} = 0, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(4)}$$

$$2.) \quad \varphi^{(1)} \text{ und } \varphi^{(4)} \text{ hängen nur von } u \text{ und } v \text{ ab.}$$

Ein Beispiel hierfür wäre das System (2), wobei η nur von B_φ und B_z abhängt.

b) Numerische Experimente.

Für die in (28) auftretenden Funktionen und Zahlen wählen wir im folgenden:

$$R = 1, \quad T = \frac{1}{c} \quad (c > 0 \text{ ein Parameter}),$$

$$f_1(r) \equiv f_2(r) \equiv 0,2, \quad g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0,2 + c \cdot t.$$

Beispiel 4: Hier haben wir gesetzt:

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 & u \cdot v \\ u \cdot v^2 & v^3 + 0,1 \end{pmatrix}, \quad c = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

In diesem Falle erfüllt (28) die Bedingung (*). Die Kurven der ersten Abbildungen dürften wieder eine gute Approximation an die Lösung (u, v)

sein ($\frac{\Delta t}{\Delta r} = 10^{-1}$) . Die folgenden Rechnungen demonstrieren wieder sehr anschaulich die Vermutung, daß das Verfahren für festes $\frac{\Delta t}{\Delta r}$ konvergiert: Es ist einmal $\frac{\Delta t}{\Delta r} = 3$ und zum anderen $\frac{\Delta t}{\Delta r} = 5$ gesetzt und jeweils einmal eine Halbierung der Schrittweiten vorgenommen worden. Die zu den kleineren Schrittweiten gehörigen Kurven sind offensichtlich bessere Approximationen.

Beispiel 5: Hier ist:

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 & u \cdot v \\ u \cdot v^2 & \varepsilon \cdot v^3 \end{pmatrix}, \quad c = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Die Bedingung ($*$) ist für $\varepsilon > 1$ erfüllt, für $\varepsilon \leq 1$ dagegen nicht.

Die numerischen Rechnungen für $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ bekräftigen die oben angegebene Vermutung. Die Schrittweiten sind: $\Delta r = 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$.

32

Beispiel 4

(a)

$$\Delta \tau = 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$$

(b)

$$\Delta \tau = 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$$

33
Beispiel 4

(c)

$$\Delta r = 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta t = 6 \cdot 10^{-2}$$

(d)

$$\Delta r = 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta t = 6 \cdot 10^{-2}$$

Beispiel 4

(e)

$$\Delta \tau = 10^{-2}$$

$$\Delta t = 3 \cdot 10^{-2}$$

(f)

$$\Delta \tau = 10^{-2}$$

$$\Delta t = 3 \cdot 10^{-2}$$

Beispiel 4

Beispiel 4

Beispiel 5

Beispiel 5

Beispiel 5

4. Literatur

- [1] Albasiny, E.L.: Quart. J. Mech. Appl. Math. 13 (1960), 374 - 384
- [2] Eisen, D. : SIAM J. Num. Analysis 3 (1966), 545 - 552
- [3] ——— : Num. Math. 10 (1967), 397 - 409
- [4] ——— : Math. of Comp. 22 (1968), 347 - 351
- [5] v. Finckenstein, K., v. Hagenow, K.: Num. Math. 20 (1973), 372 - 376
- [6] ——— : Meth. u. Verf. d. Mathem. Physik 9 (1973), 171 - 181
- [7] ——— : Lecture Notes in Math. 333 (1973), 89 - 95
- [8] v. Finckenstein, K., Düchs, D. : Lecture Notes in Math. 395
(1974), 3 - 17
- [9] ——— : Meth. u. Verf. d. Mathem. Physik 1975
- [10] Gorenflo, R. : Computing 8 (1971), 343 - 362
- [11] Kolar, W. : Dissertation RWTH Aachen 1970
Ber. Jül.-672-MA der KFA Jülich
- [12] Kreiss, H.O. : Num. Math. 12 (1968), 223 - 225
- [13] Mitchell, A., Pearce, R. : Math. of Comp. 17 (1963), 426 - 432
- [14] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C. : Iterative Solution of Nonlinear
Equations in Several Variables. Academic Press 1970
- [15] Schwenn, U. : Wärmeleitung in Lasererzeugten Plasmen;
Diplomarbeit TU München 1973

This IPP report is intended for internal use.

IPP reports express the views of the authors at the time of writing and do not necessarily reflect the opinions of the Max-Planck-Institut für Plasmaphysik or the final opinion of the authors on the subject.

Neither the Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, nor the Euratom Commission, nor any person acting on behalf of either of these:

1. Gives any guarantee as to the accuracy and completeness of the information contained in this report, or that the use of any information, apparatus, method or process disclosed therein may not constitute an infringement of privately owned rights; or
2. Assumes any liability for damage resulting from the use of any information, apparatus, method or process disclosed in this report.