

# MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

A Model for Coherent Scattering of  
Electromagnetic Waves from Spatially  
Bounded Plasmawaves.

Ein Modell zur kohärenten Streuung  
elektromagnetischer Wellen an räumlich  
begrenzten Plasmawellen.

O. Gehre, H.M. Mayer, M. Tutter

IPP IV/48

Januar 1973

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem  
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die  
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IV/48 O. Gehre  
H.M. Mayer  
M. Tutter

A Model for Coherent Scattering  
of Electromagnetic Waves from  
Spatially Bounded Plasmawaves

January 1973

A B S T R A C T

The coherent scattering of electromagnetic waves from plasma waves which are bounded in the direction of their propagation, is calculated. The waves are approximated by a moving multitude of homogeneous layers of alternating electron density. The scattering from sinusoidal density variations is obtained by means of a square wave expansion.

Bei der rechnerischen Behandlung der Streuung von elektromagnetischen Wellen an Plasmawellen wird die räumliche Ausdehnung der letzteren meistens als unbegrenzt angenommen.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, den Einfluss zu zeigen, welchen die räumliche Begrenzung der Plasmawellen in ihrer Ausbreitungsrichtung auf das Streuspektrum der elektromagnetischen Welle ausübt.

Wir machen über die Plasmawellen einige künstliche Annahmen, die dennoch das Wesentliche des Streuvorganges erfassen und deren Auswirkungen wir später besprechen.

Wir idealisieren die Berge und Täler dieser Wellen als gleichdicke Schichten homogener Dichte, welche nur wenig von einer mittleren Dichte abweichen soll. Der Brechungsindex dieser Schichten für die elektromagnetische Welle soll der des kalten, isotropen und verlustfreien Elektronenplasmas sein. Die Schichtgrenzen sollen sich in ihrer Normalenrichtung mit einheitlicher Geschwindigkeit bewegen, wobei die Dichteunterschiede zwischen benachbarten Schichten sich in der in Abb. 1 gezeigten Weise ändern sollen.

Die Exponentialform der die Dichteschwankungen bestimmenden, ortsfesten Hüllkurve ist zur Vereinfachung der nachfolgenden Rechnung gewählt. Der "Modulationsgrad der Plasmawelle" soll an jeder Stelle klein gegen Eins sein:

$$M = \frac{\Delta N_i}{2N_0} \ll 1 \quad (1)$$

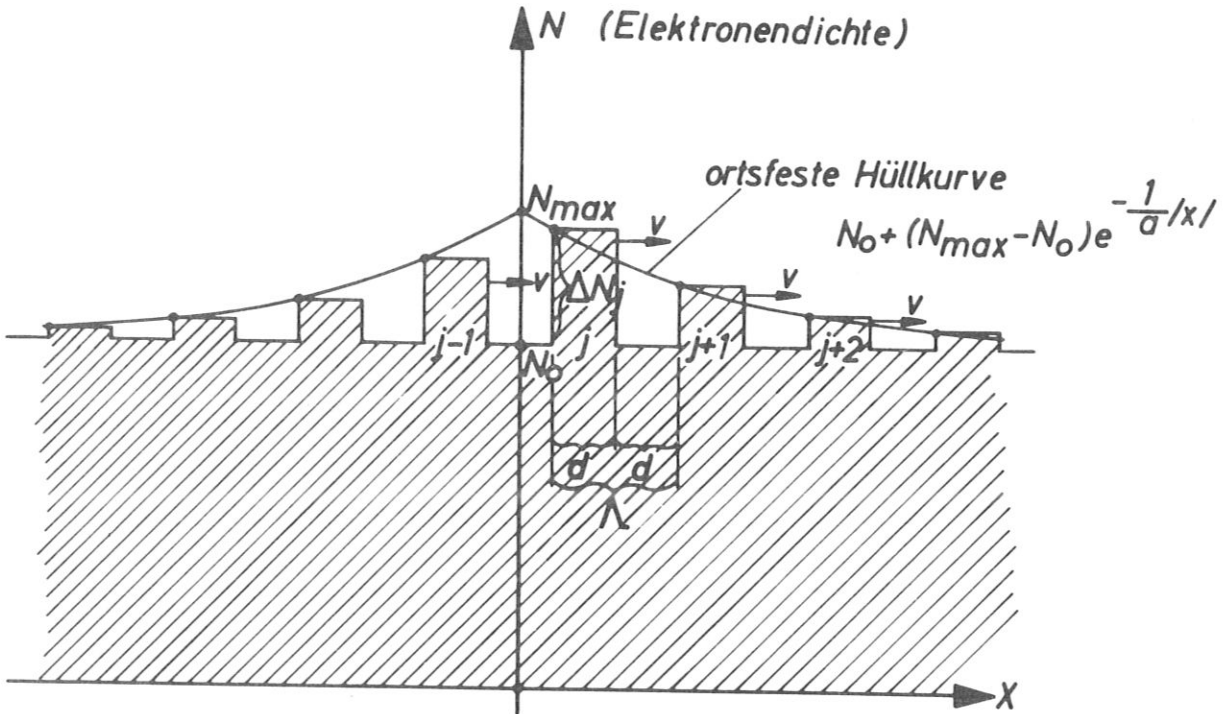


Abb. 1 Idealisierung einer in ihrer Ausbreitungsrichtung begrenzten Plasmawelle.

Die Plasmawellenlänge ist  $\Lambda = 2d$ , die Phasengeschwindigkeit ist  $v$ , daher ist die Kreisfrequenz der Plasmawelle:

$$\Omega = \frac{2\pi}{\Lambda} v = \frac{\pi v}{d} \quad (2)$$

Von links fällt unter dem Winkel  $\alpha$  eine ebene elektromagnetische Welle der Amplitude Eins ein, s. Abb. 2:

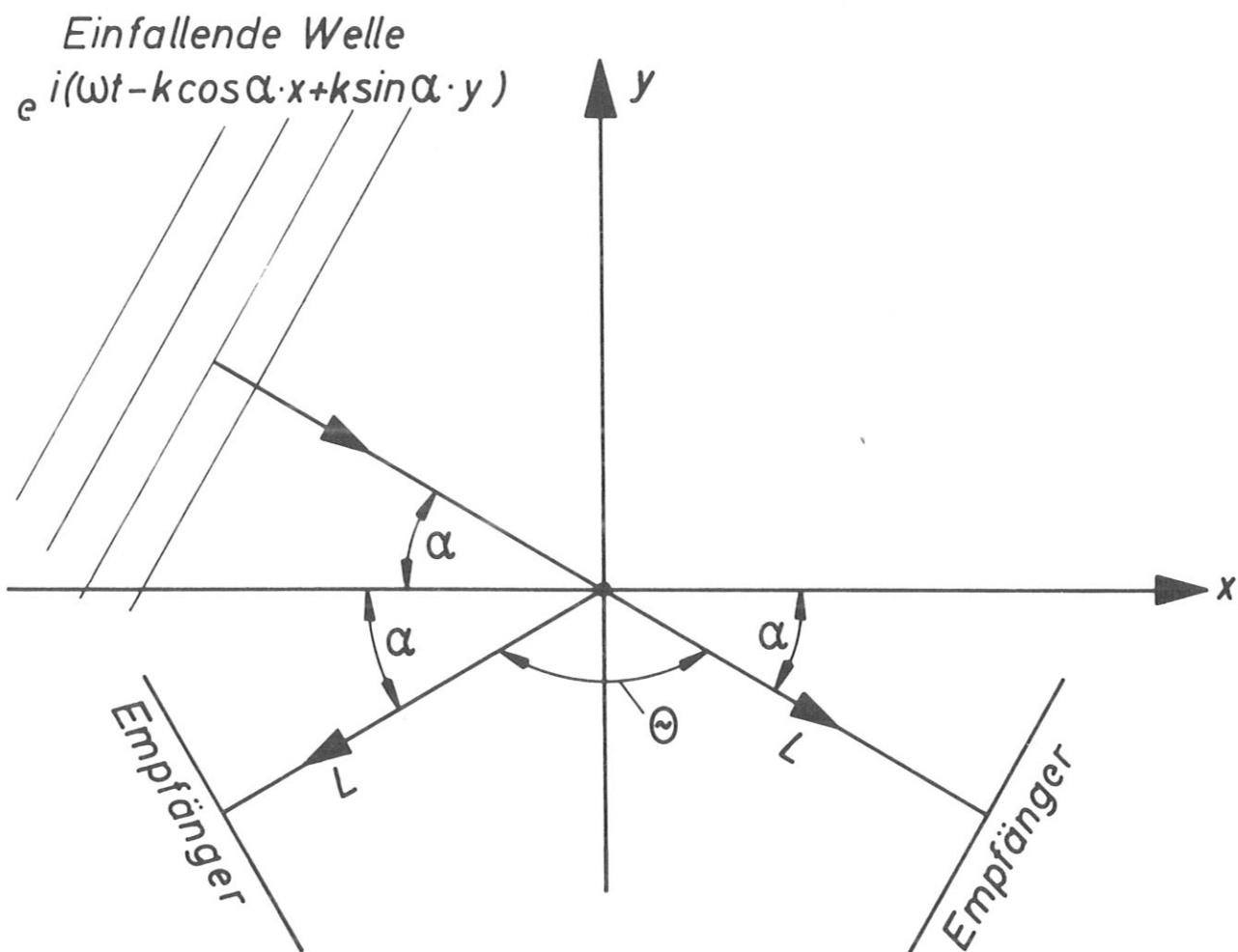


Abb. 2 Geometrie des Gedankenexperimentes.  
 $\Theta$  ist der üblicherweise als Streuwinkel bezeichnete Winkel.

Im Abstand  $L$  vom Koordinatenursprung sind, ebenfalls um den Winkel  $\alpha$  geneigt, die flächenhaften Empfänger angeordnet.

Wir berechnen zuerst die reflektierte Welle. Da nach Voraussetzung (Gl. (1)) die Dichtesprünge an den Schichtgrenzen klein sind, dürfen wir die insgesamt reflektierte Welle als Summe der einfachen Reflexionen an den Schichtgrenzen ansehen und Mehrfachreflexionen zwischen den Schichtgrenzen vernachlässigen. Wir interessieren uns für die Reflexion während der Zeitspanne, für welche gilt

$$0 \leq vt \leq 2d \quad , \quad (3)$$

da sich nach Ablauf dieser Zeit der Vorgang periodisch wiederholt. Einem Dichtesprung von  $N_0$  auf  $N$  entspricht für die elektrische Feldstärke der unter dem Winkel  $\alpha$  einfallenden elektromagnetischen Welle ein örtlicher Reflexionsfaktor

$$R_{\perp} = \frac{\cos \alpha - \left[ \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 - \sin^2 \alpha \right]^{1/2}}{\cos \alpha + \left[ \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 - \sin^2 \alpha \right]^{1/2}} \quad , \quad (4)$$

wenn die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, und

$$R_{\parallel} = \frac{\left[ \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 - \sin^2 \alpha \right]^{1/2} - \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 \cos \alpha}{\left[ \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 - \sin^2 \alpha \right]^{1/2} + \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 \cos \alpha} \quad , \quad (5)$$

wenn sie parallel zur Einfallsebene steht, wobei

$$n = \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)^{1/2}$$

den Brechungsindex ( $N_{cr}$  = kritische Dichte) bei der Kreisfrequenz  $\omega$  bedeutet. Für den Fall, dass

$$\frac{\Delta N}{2N_0} \cdot \frac{\frac{N_0}{2N_{cr}}}{1 - \frac{N_0}{N_{cr}}} \ll \cos^2 \alpha \quad (6)$$

ist, lassen Gl. (4) und (5) sich genähert schreiben als:

$$S_{L, \parallel} = \Delta N \cdot f_{L, \parallel} \quad ,$$

$$f_L = \frac{1}{4N_{cr}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{N_0}{N_{cr}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (7)$$

$$f_{\parallel} = f_L \cdot \cos 2\alpha \quad . \quad (8)$$

Die linke Begrenzungsfläche der  $j$ -ten Schicht erhöhter Dichte befinde sich zur Zeit  $t$  an der Stelle  $x = vt$ ; die von dieser Schicht reflektierte Welle ist an der Stelle des Empfängers:

$$S_j = \Delta N_j \cdot f(1 - \sigma_0^2) e^{-i \frac{\omega}{c} n_0 \cos \alpha \cdot (L + 2vt)} \quad (9)$$

Der Empfängerabstand  $L$  kann so gewählt werden, dass der konstante Faktor  $\exp(-i(\omega/c) \cdot n_0 \cos \alpha \cdot L)$  gleich Eins wird.

Der Faktor  $1 - \sigma_0^2$  trägt der Reflexion der Schicht-Rückseite Rechnung; es ist

$$\sigma_0 = e^{-i \frac{\omega}{c} n_0 \cos \alpha \cdot d} \quad (10)$$

Die Grösse des Dichtesprungs  $\Delta N_j$  als Funktion der Zeit ist nach Abb. 1:

$$\Delta N_j = (N_{\max} - N_0) e^{-\frac{1}{a} vt} \quad (11)$$

Wir schreiben, analog zu (9) und (11), die Reflexionen der benachbarten Schichten an:

$$\begin{aligned} p_{j-l} &= p_{\max} \cdot e^{+\frac{vt}{a} - \frac{l\lambda}{a}} \cdot e^{+i\varphi(l - \frac{vt}{\lambda})} \\ &\vdots \\ p_{j-2} &= p_{\max} \cdot e^{+\frac{vt}{a} - \frac{2\lambda}{a}} \cdot e^{+i\varphi(2 - \frac{vt}{\lambda})} \\ p_{j-1} &= p_{\max} \cdot e^{+\frac{vt}{a} - \frac{\lambda}{a}} \cdot e^{+i\varphi(1 - \frac{vt}{\lambda})} \\ p_j &= p_{\max} \cdot e^{-\frac{vt}{a}} \cdot e^{-i\varphi \frac{vt}{\lambda}} \\ p_{j+1} &= p_{\max} \cdot e^{-\frac{vt}{a} - \frac{\lambda}{a}} \cdot e^{-i\varphi(1 + \frac{vt}{\lambda})} \\ p_{j+2} &= p_{\max} \cdot e^{-\frac{vt}{a} - \frac{2\lambda}{a}} \cdot e^{-i\varphi(2 + \frac{vt}{\lambda})} \\ &\vdots \\ p_{j+l} &= p_{\max} \cdot e^{-\frac{vt}{a} - \frac{l\lambda}{a}} \cdot e^{-i\varphi(l + \frac{vt}{\lambda})} \end{aligned} \quad (12)$$



wobei

$$P_{\max} = (N_{\max} - N_0) \cdot f \cdot (1 - \sigma_0^2) \quad \text{und (13)}$$

$$\varphi = \frac{8\pi d n_0 \cos \alpha}{\lambda_0} = \frac{4\pi \Lambda}{\lambda} \cos \alpha$$

bedeutet. ( $\lambda$  ist die elektromagnetische Wellenlänge im Plasma der Dichte  $N_0$ ). Die gesamte Reflexion ist also:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} P_{j+l} = \\ &= P_{\max} \left\{ e^{-\frac{vt}{a}} \cdot e^{-i\varphi \frac{vt}{\lambda}} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ e^{-\frac{1}{a}(l\lambda - vt)} e^{+i\varphi(l - \frac{vt}{\lambda})} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\frac{1}{a}(l\lambda + vt)} e^{-i\varphi(l + \frac{vt}{\lambda})} \right] \right\} = \quad (14) \end{aligned}$$

$$= P_{\max} \cdot \frac{e^{-i\varphi \frac{vt}{\lambda}}}{\cos \frac{\Lambda}{a} - \cos \varphi} \left\{ \operatorname{Im} \left( \frac{\Lambda}{a} - \frac{vt}{a} \right) + \operatorname{Im} \frac{vt}{a} e^{i\varphi} \right\}$$

Dieser Ausdruck gibt den Verlauf des Reflexionsfaktors  $P$  in der komplexen Ebene für die Zeitspanne  $0 \leq t \leq \Lambda/v$  wieder. Die Abb. 3a, b zeigen im Grenzfall  $\Lambda/a \rightarrow 0$  für verschiedene Werte von  $\varphi$  Ortskurven des Zählers von  $P/P_{\max}$  nach Gl. (14), also der Funktion

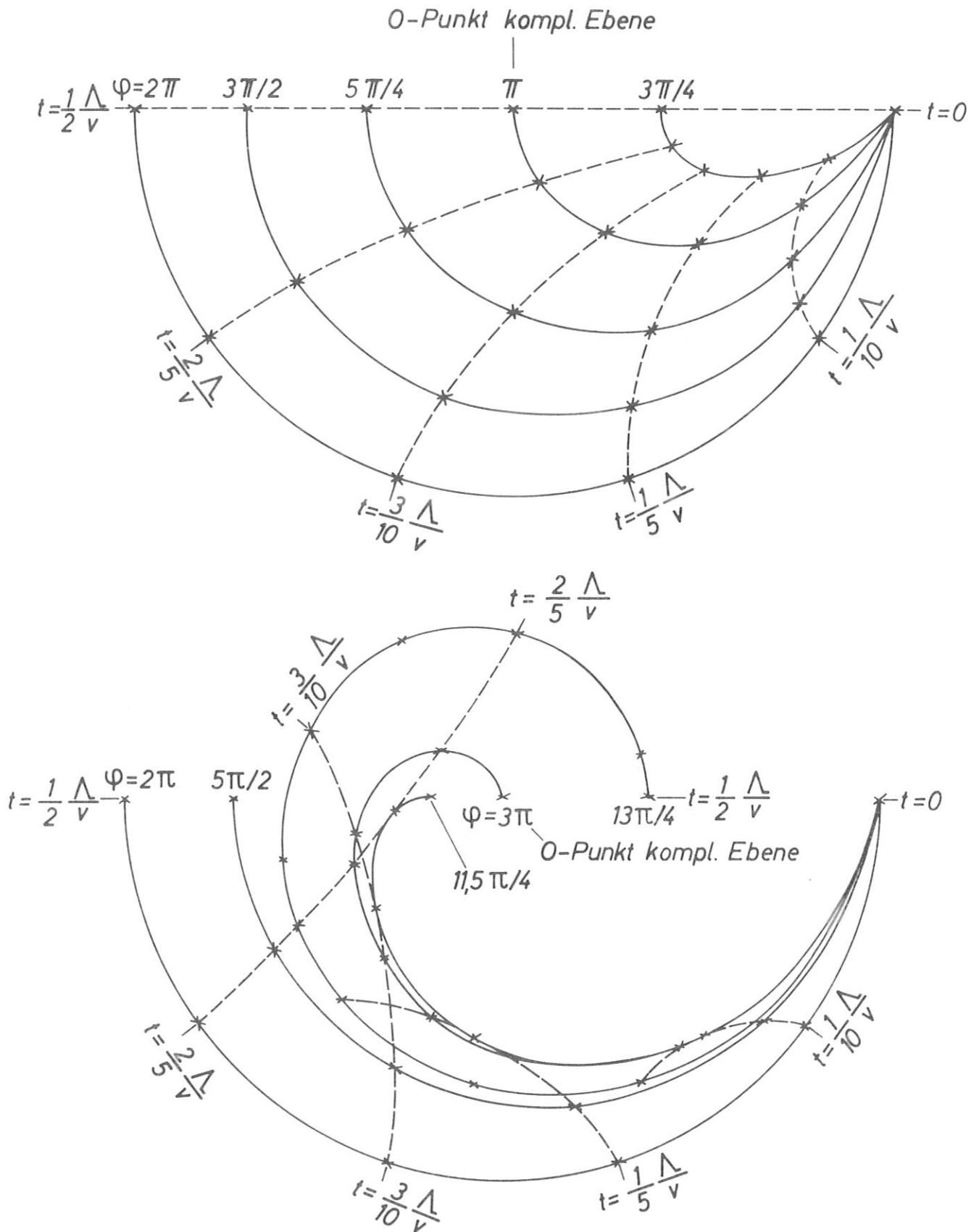


Abb. 3 Ortskurven des Reflexionsfaktors in der komplexen Ebene für die erste Hälfte einer Plasmawellenperiode,  
 a) für Parameter  $\varphi = 4\pi \Lambda \cos \alpha / \lambda \leq 2\pi$   
 b) für Parameter  $\varphi \geq 2\pi$   
 für den Grenzfall  $a \gg \Lambda$ .

wobei

$$0 = 1 \quad e^{-i\varphi \frac{vt}{\lambda}} \left\{ \gamma_{\sin} \left( \frac{\lambda}{a} - \frac{vt}{a} \right) + \gamma_{\sin} \frac{vt}{a} e^{i\varphi} \right\}, \quad (15)$$

welche sich von  $\rho$  nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet. Es ist nur der Teil jeder Ortskurve gezeichnet, welcher in der ersten Hälfte der Periode durchlaufen wird; der Teil für die zweite Periodenhälfte setzt sich spiegelbildlich in der anderen Halbebene fort; es gilt nämlich

$$\rho(t) = \rho^*(t - \frac{\lambda}{v}) \quad (16)$$

Die momentane Winkelgeschwindigkeit des durch Gl. (15) gegebenen Zeigers in der komplexen Ebene ist

$$-\varphi \frac{v}{\lambda} + \frac{\frac{v}{a} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{Cotg} \frac{\lambda}{2a}}{\operatorname{Cot}^2 \left( \frac{vt}{a} - \frac{\lambda}{2a} \right) + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{Cotg}^2 \frac{\lambda}{2a} \gamma_{\sin}^2 \left( \frac{vt}{a} - \frac{\lambda}{2a} \right)} \quad (17)$$

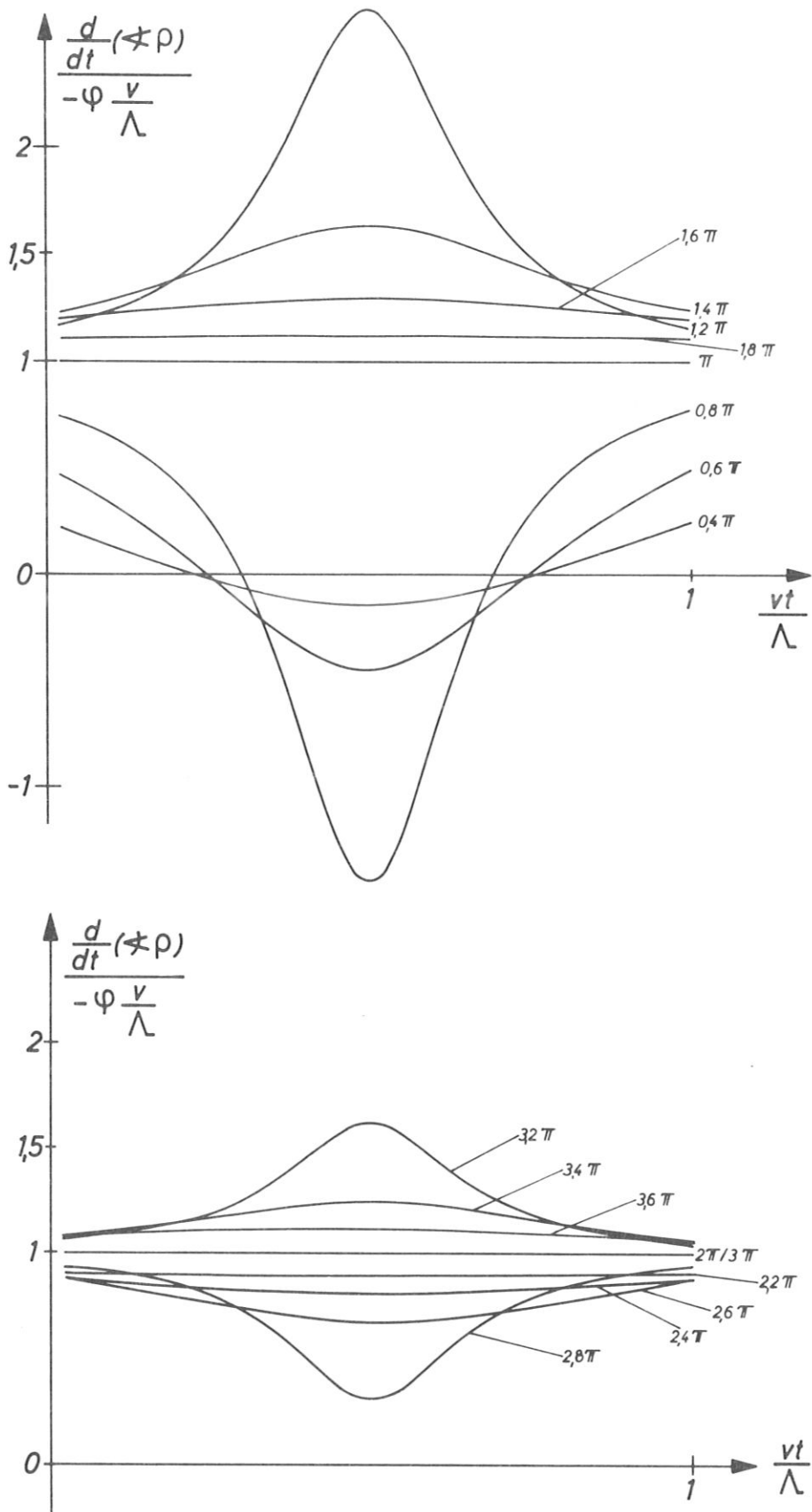


Abb. 4 Winkelgeschwindigkeit des Zeigers des Reflexionsfaktors beim Durchlaufen der in Abb. 3 gezeigten Ortskurven, normiert auf die Kreisfrequenz  $-\varphi \frac{v}{\Lambda}$ , ebenfalls für den Grenzfall  $a \gg \Lambda$ , a) für  $\varphi < 2\pi$ , b) für  $\varphi \geq 2\pi$ .

und ist in Abb. 4 als Funktion der Zeit, wieder für den Grenzfall  $\lambda/\alpha \rightarrow 0$ , und normiert auf die Kreisfrequenz  $-\varphi \cdot \frac{v}{\lambda}$  dargestellt. Aus Gl. (17) ist ersichtlich, dass der Zeiger Gl. (15) immer dann mit konstanter Winkelgeschwindigkeit umläuft, wenn

$$\frac{\varphi}{2} \equiv \frac{2\pi\Lambda}{\lambda} \cos\alpha = m\pi, \quad m = 0, 1, 2 \dots \quad (18)$$

ist, oder wenn

$$\Lambda \cos\alpha = m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (19)$$

ist, d.h. wenn die Braggsche Bedingung erfüllt ist, s. Abb. 5.

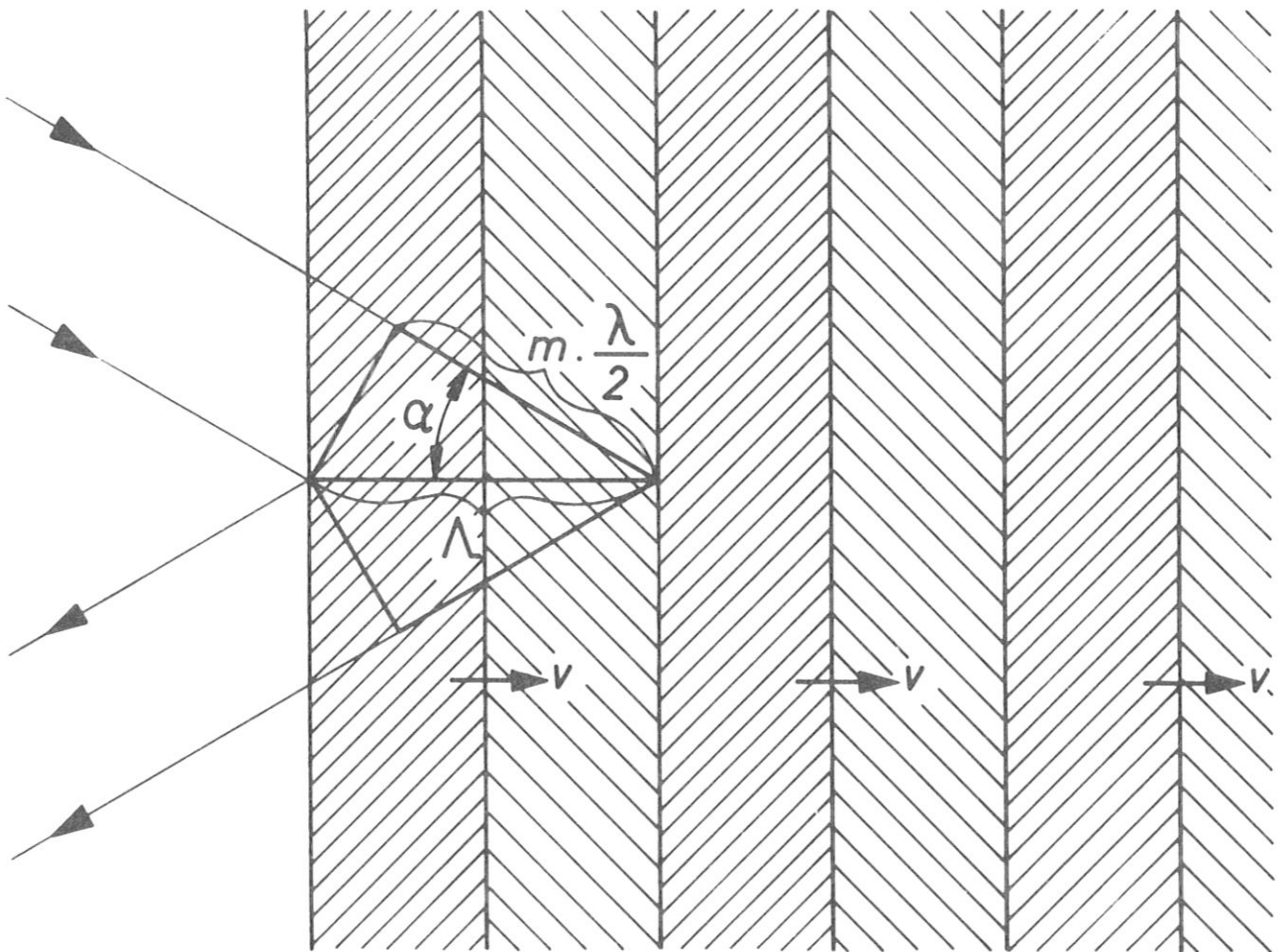


Abb. 5 Reflexion an Schichtgrenzen unter dem Braggschen Winkel

Die Winkelgeschwindigkeit des Zeigers ist dann gleich dem ersten Term in Gl. (17), und das ist nach Gl. (13):

$$-\dot{\varphi} \frac{v}{\lambda} = -2v \frac{\omega}{c} n_0 \cos \alpha = -2v k_0 \cos \alpha \quad (20)$$

Die reine Dopplerverschiebung (Gl. (20)) erfährt die Kreisfrequenz der reflektierten Welle gegenüber der Kreisfrequenz der einfallenden Welle jedoch nur im Grenzfall  $\lambda/a \rightarrow 0$ , da der Zeiger Gl. (15) nur dann mit konstantem Radius umläuft, s. Abb. 3.

Im allgemeinen Fall hat die reflektierte Welle ein Linienspektrum; um dieses kennenzulernen, entwickeln wir  $\rho/\rho_{\max}$  nach Gl. (14) in eine Fourierreihe und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_{\max}} &= \frac{2 \frac{\Lambda}{a}}{\left(\frac{\Lambda}{a}\right)^2 + (2\pi)^2 \left(\frac{\Lambda \cos \alpha}{\lambda/2}\right)^2} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2 \frac{\Lambda}{a} e^{imKvt}}{\left(\frac{\Lambda}{a}\right)^2 + (2\pi)^2 \left(\frac{\Lambda \cos \alpha}{\lambda/2} + m\right)^2} + \frac{2 \frac{\Lambda}{a} e^{-imKvt}}{\left(\frac{\Lambda}{a}\right)^2 + (2\pi)^2 \left(\frac{\Lambda \cos \alpha}{\lambda/2} - m\right)^2} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$= \frac{2 \frac{a}{\lambda}}{1 + \left(\frac{a}{v}\right)^2 \left(2v \frac{\omega}{c} n_0 \cos \alpha\right)^2} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2 \frac{a}{\lambda} e^{imKvt}}{1 + \left(\frac{a}{v}\right)^2 \left(2v \frac{\omega}{c} n_0 \cos \alpha + mKv\right)^2} + \frac{2 \frac{a}{\lambda} e^{-imKvt}}{1 + \left(\frac{a}{v}\right)^2 \left(2v \frac{\omega}{c} n_0 \cos \alpha - mKv\right)^2} \right\}$$

$K = 2\pi / \Lambda$  ist die Grundwellenzahl der laufenden Schichten. Um die reflektierte Welle zu erhalten, muss  $\varrho$  noch mit dem Zeitfaktor  $\exp(i \omega t)$  multipliziert werden, daher bedeutet das konstante Glied in Gl. (21) die "Grundlinie", die Summenglieder die oberen und unteren "Seitenlinien".

Geht der Quotient  $\Lambda \cos \alpha / (\lambda/2)$  gegen Null, so werden die Höhen von Linien mit entgegengesetzt gleichem Index  $m$  gleich und man erhält eine reine Amplitudenmodulation der reflektierten Welle.

Das Spektrum der reflektierten Welle ist in Abb. 6 nach der zweiten Form von Gl. (21) dargestellt.

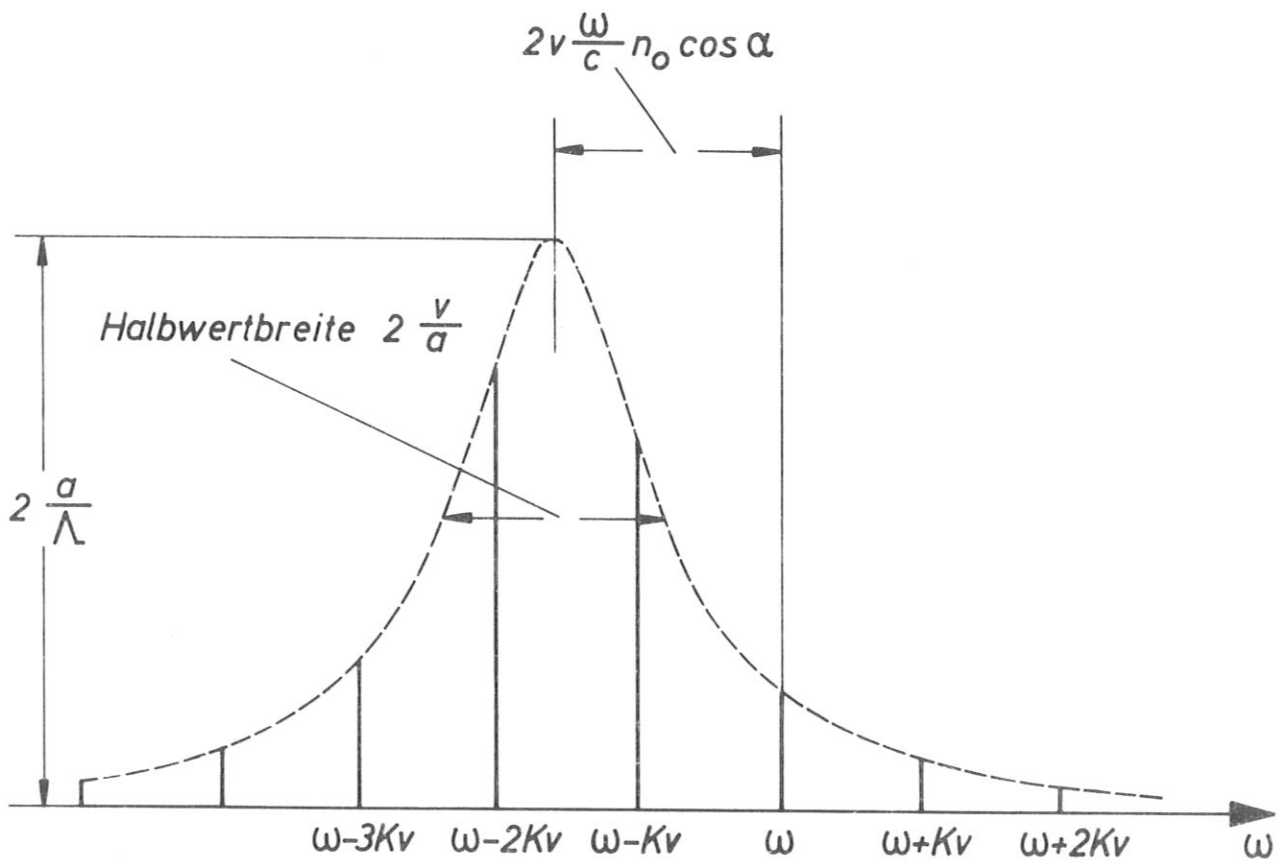


Abb. 6 Reflexionsspektrum für das in Abb. 1 dargestellte Plasmawellenmodell (für  $\Lambda/a = 5$ ).

Der in der Regel behandelte Fall unendlich ausgedehnter Plasma-Wellen-Zone geht aus Abb. 6 als Grenzfall  $a \rightarrow \infty$  hervor: die maximal mögliche Höhe der Spektrallinien wird immer grösser (hier im Rahmen der Voraussetzungen Gl. (1) und (6) begrenzt). Gleichzeitig wird die Halbwertbreite der Einhüllenden des Spektrums immer kleiner, so dass schliesslich nur dann noch eine Spektrallinie erscheinen kann, d.h. Energie reflektiert wird, wenn (z.B. durch geeignete Wahl des Einfallswinkels  $\alpha$ ) die Dopplerverschiebung gleich einem ganzzahligen Vielfachen von  $Kv = \Omega$ , der Kreisfrequenz der laufenden Schichten, gemacht wird:

$$2v \frac{\omega}{c} n_0 \cos \alpha = m Kv \quad (22)$$

oder

$$\omega - \omega_r = m \Omega \quad (23)$$

( $\omega_r$  = Kreisfrequenz der reflektierten Welle). Gl. (22) ist gleichbedeutend mit der Erfüllung der Braggschen Bedingung Gl. (19): alle Schichten reflektieren gleichphasig. Die Betrachtung der Wellenvektoren ergibt unter der Voraussetzung  $\Omega \ll \omega$  mittels der Braggschen Bedingung:

$$\begin{aligned} \vec{k} - \vec{k}_r &= \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} - \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} = \\ &= 2\pi \cdot \frac{2}{\lambda} \cos \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\pi \cdot \frac{m}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = m \vec{K} \end{aligned} \quad (24)$$

Dass wir die aus der Streutheorie bekannten Gleichungen (23) und (24) hier mit beliebig ganzzahligem  $m$  anstatt mit  $m = 1$



erhalten, liegt an unserem für eine Plasmawelle benutzten Modell. Wie die Abb. 3a u. b zeigen, wird der zeitliche Ablauf des Reflexionsfaktors anharmonisch, weshalb höhere Harmonische der Grundfrequenz  $\Omega = 2\pi\nu/\Lambda$  auftreten. Gleichzeitig gehört auch zu den Schichten der Abb. 1 ein (räumliches) Fourierspektrum, welches nicht mehr aus einer einzigen Linie  $K \equiv 2\pi/\Lambda$  besteht. Dieses Modell bewirkt auch, dass bei Erfüllung der Braggschen Bedingung die reflektierte Welle wegen des Faktors  $1 - \sigma_0^2$  in Gl. (9) oder (13) für geradzahlige m-Werte verschwindet. Die Reflexionen von den Rückseiten der Schichten erhöhter Dichte kompensieren dann gerade diejenigen der Vorderseiten.

Die Abb. 6 zeigt, dass bei endlicher mittlerer Ausdehnung  $2a$  der streuenden (reflektierenden) Wellen-Zone die Halbwertbreite des Spektrums ebenfalls endlich ist, so dass auch bei Nichterfüllung der Braggschen Bedingung reflektierte Leistung auftreten kann. Für den Fall, dass die Halbwertbreite  $2\frac{\psi}{a}$  klein gegen den Linienabstand  $K\psi$  ist (d.h.  $\Lambda/a \ll 1$ ), können wir eine "Resonanzgüte  $Q$  der Braggschen Bedingung" angeben. Dann trägt nämlich nur eine Spektrallinie wesentlich zur reflektierten Leistung bei. Die Frequenzänderung  $\Delta\omega$ , welche bei festgehaltenem Einfallswinkel  $\alpha$  notwendig ist, um die reflektierte Leistung vom Maximum auf die Hälfte abfallen zu lassen, ist nach Gl. (21):

$$\Delta\omega = \frac{c(2^{1/2}-1)^{1/2}}{2an_0 \cos\alpha} ;$$

wir definieren:

$$Q = \left( \frac{\omega}{2\Delta\omega} \right)_\alpha \approx 10 \cdot \frac{a \cos\alpha}{\lambda} = 5m \frac{a}{\Lambda} \quad (25)$$

Der gleiche Ausdruck ergibt sich für eine Definition von  $Q$  als:

$$Q = \left( \frac{\cos \alpha}{2A \cos \alpha} \right) \omega \quad (26)$$

Ist die Länge  $2a$  der Wellenzone nicht mehr gross gegen  $\lambda$ , sondern vergleichbar damit, so wird die Halbwertbreite der Einhüllenden in Abb. 6 vergleichbar mit dem Linienabstand und es tragen mehrere Linien nunmehr kleinerer Höhe zur Reflexion bei.

Bei der Berechnung des Reflexionsspektrums in Abb. 6 hatten wir das in Abb. 1 gezeigte Modell einer Plasmawelle mit rechteckförmiger Dichtemodulation verwendet. Um das Spektrum einer "wirklichen" Plasmawelle mit sinusförmiger Dichtemodulation (Abb. 7) zu berechnen, verfahren wir folgendermassen.

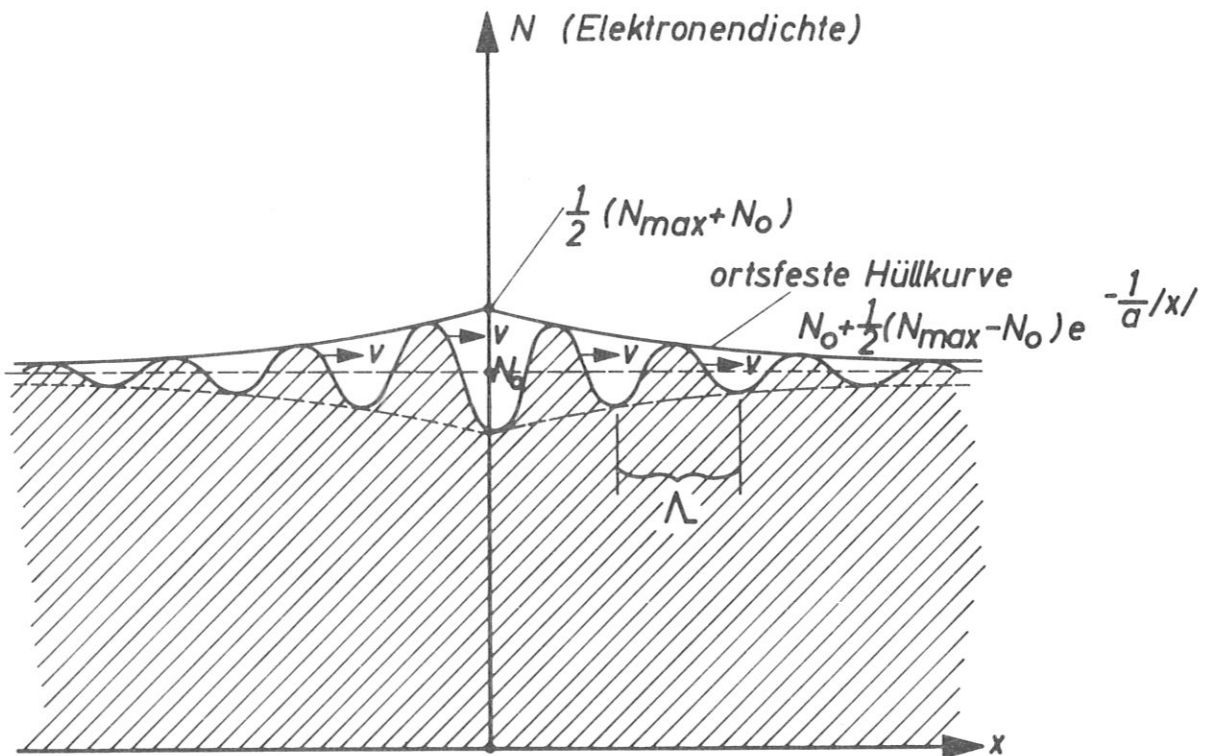


Abb. 7 Sinusförmige, in ihrer Ausbreitungsrichtung begrenzte Plasmawelle. Die Dichtemodulation ist hier im Gegensatz zu Abb. 1 symmetrisch zu  $N_0$  gezeichnet, was wegen der Linearisierung Gl. (1) erlaubt ist.

Wir stellen den Sinus in Abb. 7 an jedem Ort durch eine unendliche Reihe von Rechteckfunktionen wie in Abb. 1 (mit gleichem  $a$ ) dar, was wir unter der Voraussetzung  $a \gg \lambda$  tun dürfen. Wir nennen die in Abb. 8 gezeigte Rechteckfunktion  $R_1$ :

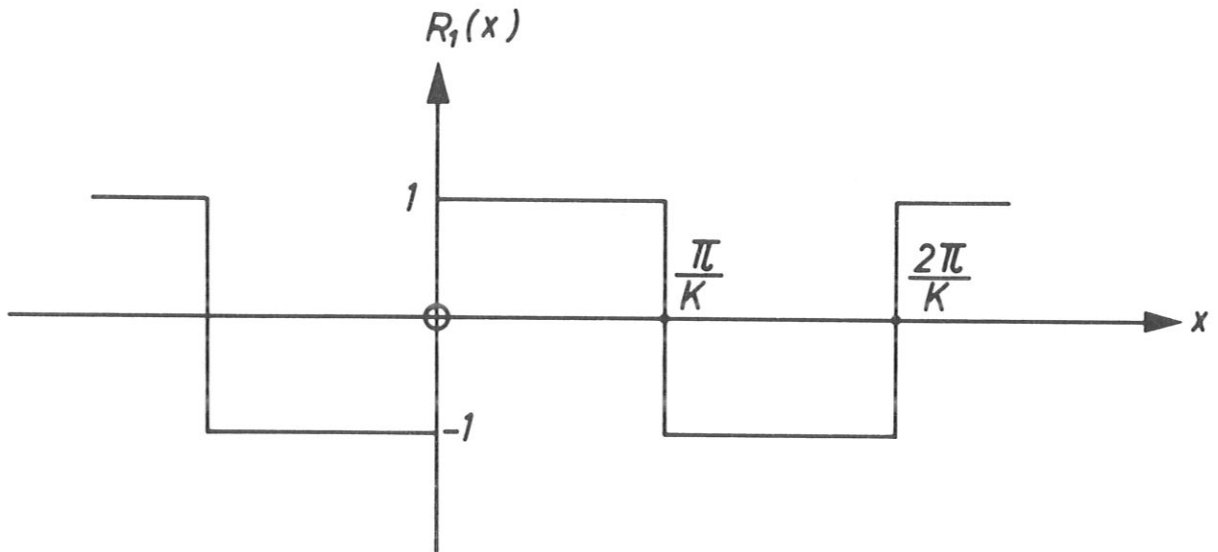


Abb. 8 Rechteckfunktion  $R_1$

Es gilt

$$R_1(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin Kx + \frac{1}{3} \sin 3Kx + \frac{1}{5} \sin 5Kx + \dots \right)$$

und entsprechend:

$$R_\nu(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \nu Kx + \frac{1}{3} \sin 3\nu Kx + \frac{1}{5} \sin 5\nu Kx + \dots \right)$$

Daraus lässt sich gewinnen:

$$\sin Kx = \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{\nu} R_{\nu}$$

$$\text{mit } a_{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = p \cdot q \text{ (} p, q \text{ ganz, ungerade)} \\ 0 & \text{für } \nu = p \cdot q^2 \\ -1 & \text{für } \nu = \text{Primzahl} \neq 1 \end{cases} \quad (27)$$

Der Reflexionsfaktor einer begrenzten Sinuswelle nach Abb. 7 ist dann eine Superposition von vielen Reflexionsfaktoren nach den Gl. (10), (13) und (14):

$$S_{\sin} = \frac{\pi}{4} (N_{\max} - N_0) \cdot f \cdot \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{\nu} (1 - e^{-i\frac{\varphi_{\nu}}{2}}) \quad (28)$$

$$\cdot \frac{e^{-i2\nu k_0 \cos \alpha \cdot t}}{\cos \frac{\Lambda_{\nu}}{a} - \cos \varphi_{\nu}} \left[ \sin \left( \frac{\Lambda_{\nu}}{a} - \frac{\nu t}{a} \right) + \sin \frac{\nu t}{a} e^{i\varphi_{\nu}} \right]$$

mit

$$\varphi_{\nu} = \frac{1}{\nu} \varphi \quad , \quad \Lambda_{\nu} = \frac{1}{\nu} \Lambda \quad (29)$$

Jedem Summanden in Gl. (28) entspricht in der Fourierdarstellung ein Spektrum analog Abb. 6, wobei jeweils die erste Linie beiderseits der Grundlinie  $\omega$  des  $\nu$ -ten Spektrums an der Stelle  $\nu \cdot K\nu$  des ersten Spektrums (Abb. 6) liegt. Die Lage des Maximums der Einhüllenden sowie deren Halbwertsbreite sind für alle Spektren gleich, aber die Höhe der Einhüllenden ist nach Gl. (21) proportional zu  $K\nu = \nu \cdot K$ , wodurch der Faktor  $\nu^{-1}$  in Gl. (28) sich herauskürzt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 \rho_{\sin} = & \frac{\pi}{4} (N_{\max} - N_0) \cdot f \cdot \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{\infty} e_{\nu} (1 - e^{-i\varphi_{\nu}}) \cdot \left[ \frac{2 \frac{a}{\lambda}}{1 + \left(\frac{a}{\nu}\right)^2 \left(2\nu \frac{\omega}{c} n_0 \cos \alpha\right)^2} + \right. \\
 & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2 \frac{a}{\lambda} e^{i\nu m K\nu t}}{1 + \left(\frac{a}{\nu}\right)^2 \left(2\nu \frac{\omega}{c} n_0 \cos \alpha + \nu m K\nu\right)^2} + \frac{2 \frac{a}{\lambda} e^{-i\nu m K\nu t}}{1 + \left(\frac{a}{\nu}\right)^2 \left(2\nu \frac{\omega}{c} n_0 \cos \alpha - \nu m K\nu\right)^2} \right\} \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

Die Abb. 9 zeigt solcherart berechnete Reflexionsspektren für drei Werte des Parameters  $\varphi$ . Zum Vergleich ist in Abb. 9a und 9b die Einhüllende der Spektrallinien für das Plasmawellenmodell nach Abb. 1 eingezeichnet. In Abb. 9c

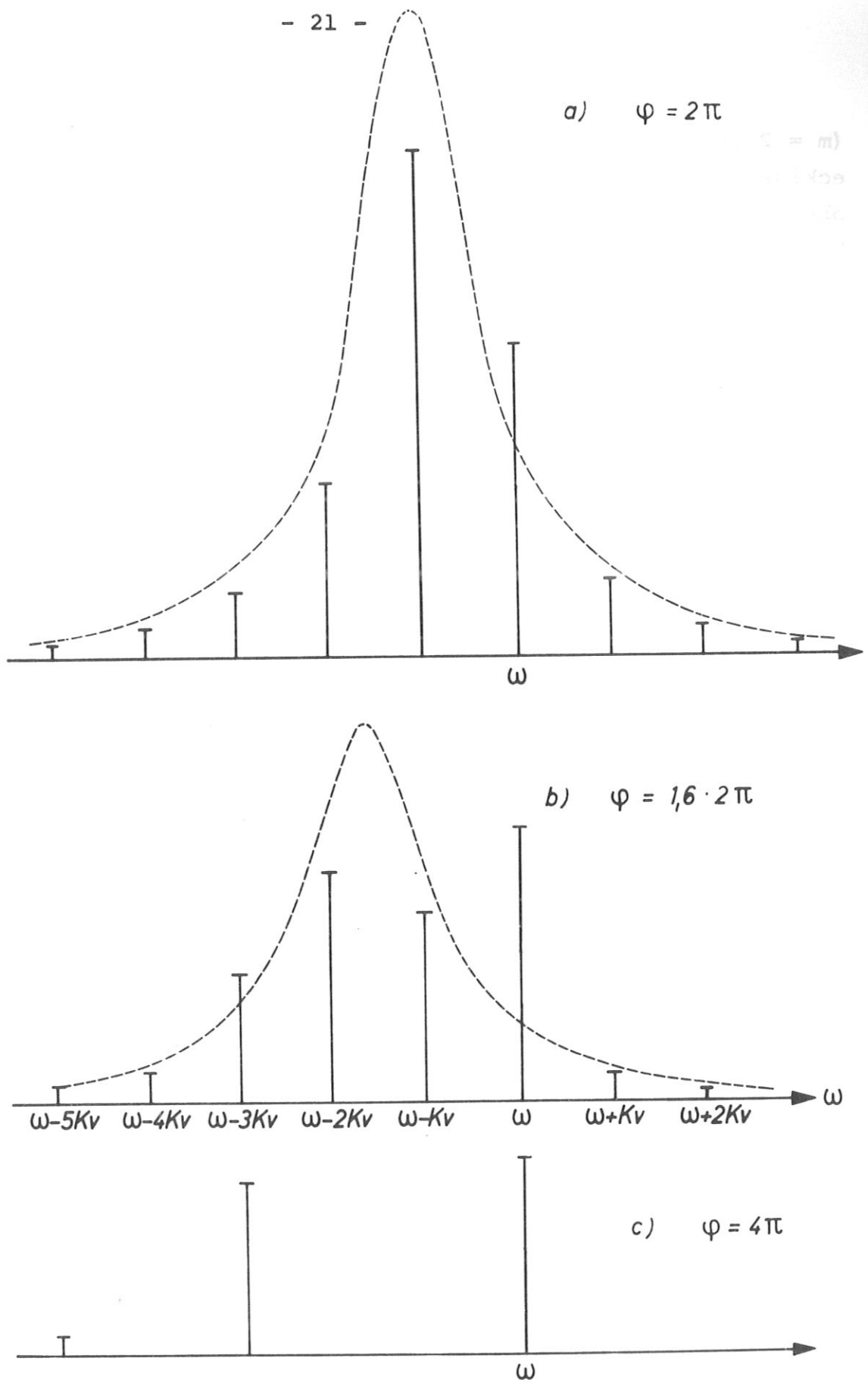


Abb. 9 Reflexionsspektren für das in Abb. 7 dargestellte Plasmawellenmodell  
 a) für  $\Lambda \cos \alpha = \lambda/2$   
 b) für  $\Lambda \cos \alpha = 1,6 \lambda/2$   
 c) für  $\Lambda \cos \alpha = \lambda$   
 Parameter  $\varphi = 4\pi \Lambda \cos \alpha / \lambda$ , s. Gl. (13)

( $m = 2$  in Gl. (19) oder (22)) verschwindet im Falle rechteckiger Dichtemodulation das gesamte Reflexionsspektrum, wie oben erklärt, im Falle sinusförmiger Dichtemodulation bleiben ungeradzahlige Spektrallinien von 3 aufwärts. Aus Abb. 9a ist ersichtlich, dass bei  $m = 1$  bzw.  $\varphi = 2\pi$  eine Welle mit sinusförmiger Dichtemodulation insgesamt weniger reflektiert als eine Welle mit rechteckiger Dichtemodulation, was plausibel erscheint. In Abb. 9b ist die Höhe der Spektrallinien unregelmässig modifiziert.

Die für  $m = 1$  unter dem Bragg-Winkel reflektierte Leistung lässt sich direkt mit der Theorie der Röntgenstreuung in Kristallen vergleichen. Zunächst folgt aus Gl. (21) bei Erfüllen der Braggschen Bedingung Gl. (19) mit  $m = 1$  und bei  $a/\lambda \gg 1$  :

$$\rho = \rho_{\max} \cdot \frac{2a}{\lambda} \quad (31)$$

Drücken wir hierin noch  $\rho_{\max}$  mit (13), (7) und (8) durch  $\Delta N_{\max}$ ,  $N_{cr}$ ,  $\alpha$  und  $\lambda$  mit (19) durch  $\lambda$  und  $\alpha$  aus, so erhalten wir, wenn wir gleichzeitig noch

$$\begin{aligned} N_{cr} &= \frac{\omega^2}{\omega_p^2} N_0 = \left( \frac{2\pi c}{\lambda_0} \right)^2 \cdot \frac{m}{4\pi e^2 N_0} \cdot N_0 = \frac{\pi}{\lambda_0^2} \frac{mc^2}{e^2} \\ &= \frac{\pi}{\lambda_0^2 r_e} \quad , \quad \text{mit } r_e = \frac{e^2}{mc^2} \end{aligned}$$

beachten, für  $\rho$  den Ausdruck

$$\rho = \frac{\Delta N_{\max} 2\lambda a r_e \cdot \cos 2P\alpha}{\pi} \quad , \quad P = \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{E}_0 \parallel \vec{k}, \vec{k}_r \text{-Ebene} \\ 0 & \text{" } \vec{E}_0 \perp \text{" " " "} \end{cases} \quad (32)$$

( $E_0$  ist die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle).

Die Röntgenstreuung an einem Kristall ist in Abb. 10 dargestellt.

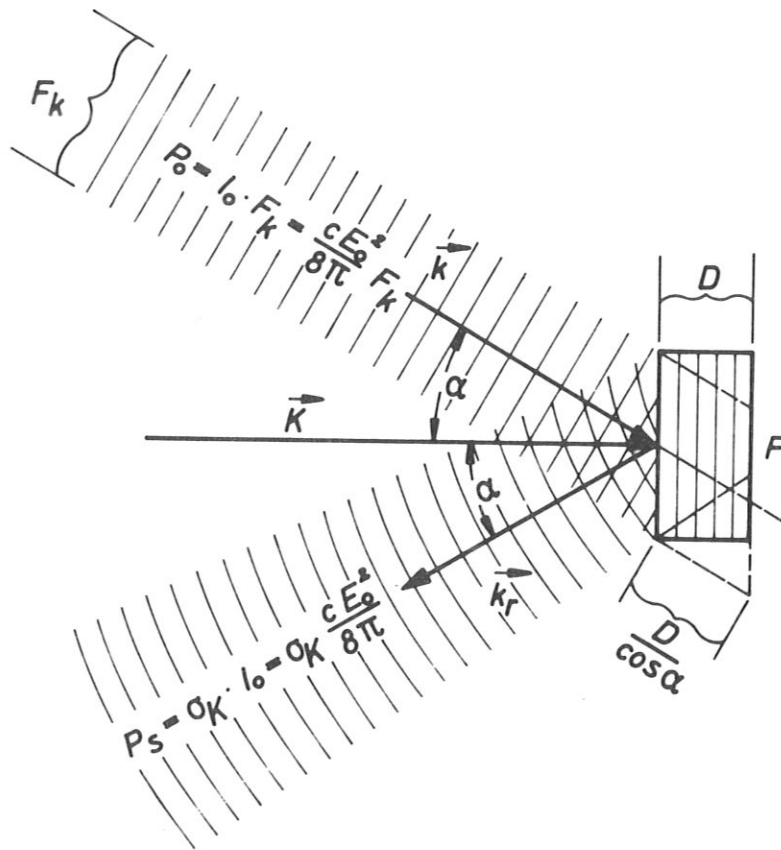


Abb. 10 Röntgenstreuung an einem Kristall



Der Kristall sei so orientiert, dass eine bestimmte Schar von Gitterebenen, welche den "Gitterwellenvektor"  $\vec{K}$  besitzt, den einfallenden Parallelstrahl von  $\vec{k}$  in eine enge Umgebung von  $\vec{k}_r$  streut.

Für die gesamte in diese Umgebung fallende Leistung - welche auf einem entfernten Schirm einen "Fleck" erzeugt - gilt nach Landau-Lifshitz /1/ (für grosse Ausdehnung  $\perp$  Einfallsebene)

$$P_s = \sigma_K \cdot J_0 = \lambda^2 r_e^2 |\tilde{n}_K|^2 \cos^2 2P\alpha \left( \frac{D}{\cos \alpha} \right)^2 F_k \cdot J_0 \quad , \quad (33)$$

wo  $\tilde{n}_K$  den  $\vec{K}$  entsprechenden Fourierkoeffizienten der Elektronendichteverteilung bedeutet. In unserem Falle gilt (für das unbegrenzt fortgesetzte Gitter)

$$\tilde{n}_K = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda/2} N(x) e^{-iKx} dx = \frac{i}{\pi} \Delta N_{max} \quad . \quad (34)$$

Andererseits folgt aus (32) eine reflektierte Leistung

$$P_r = |R|^2 \cdot P_0 = \left[ 2\lambda r_e \frac{\Delta N_{max}}{\pi} a \frac{\cos 2P\alpha}{\cos \alpha} \right]^2 \cdot J_0 F_k \quad . \quad (35)$$

Vergleicht man (35) mit (33) unter Berücksichtigung von (34), so findet man  $P_s = P_r$  für  $2a = D$ , also direkte Entsprechung.

Zum weiteren Vergleich geben wir noch die inkohärente Streuung als Summe der individuellen Beiträge der im Volumen  $F \cdot D$  enthaltenen Elektronen an. Sie beträgt für einen in der Einfallsebene liegenden Raumwinkel  $\Sigma$  /2/ :

$$\begin{aligned} P_{\text{ink.}} &= r_e^2 N_0 \cos^2 2P\alpha \cdot DF \cdot J_0 \cdot \Sigma \\ &= r_e^2 N_0 \left( \frac{\cos 2P\alpha}{\cos \alpha} \right)^2 DF_k \cdot J_0 \cdot \Sigma \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (36)$$

Der Quotient beider Leistungen ist:

$$\frac{P_r}{P_{\text{ink.}}} = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{(\Delta N_{\text{max}})^2}{N_0} \cdot \frac{D}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\Sigma} \quad (37)$$

Ein Vergleich mit Mikrowellenstreuexperimenten /3/ zeigt gute Übereinstimmung des berechneten Verhältnisses mit experimentell gefundenen Werten.

(Der Streuparameter  $\beta$  ist, wenn wir dem Plasma eine thermische Geschwindigkeit  $v_{\text{th}} \approx v$  zuordnen, grössenordnungsmässig:

$$\beta = \frac{\lambda}{L_D \cdot 4\pi \cos \alpha} = \frac{1}{L_D |\vec{k} - \vec{k}_r|} = \frac{\lambda}{2\pi L_D} \approx \frac{\omega_p}{\Omega} \approx \frac{\omega}{\Omega} \gg 1 \quad (38)$$

( $L_D$  = Debyelänge) .

Bei der Berechnung der Transmission brauchen wir der Ortsänderung der Schichten nicht Rechnung zu tragen, sondern nur ihrer zeitlichen Dichteänderung. Die Transmission durch die jte Schicht und eine angrenzende Schicht der Dichte  $N_0$  ist nämlich:

$$\begin{aligned} & (1 - |R_j|^2)^{1/2} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}n_0 \cos\alpha \cdot d} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}n_j \cos\alpha \cdot d} \approx \\ & \approx (1 - |R_j|^2)^{1/2} \cdot e^{-i\frac{\varphi}{2}} \left( 1 - i\frac{\varphi}{2} \frac{\Delta n_j}{2n_0} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

Den im Amplitudenfaktor quadratisch vorkommenden Reflexionsfaktor vernachlässigen wir, da nur in  $\Delta N$ , der Dichteabweichung, lineare Glieder interessieren. Es gilt analog Gl. (11):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n_j}{2n_0} &= \frac{-1}{4N_{cr}} \cdot \frac{\Delta N_j}{1 - \frac{N_0}{N_{cr}}} = \frac{-(N_{max} - N_0)}{4N_{cr}} \frac{1}{1 - \frac{N_0}{N_{cr}}} \cdot e^{-\frac{1}{a}vt} \\ &= g \cdot e^{-\frac{1}{a}vt} \end{aligned} \quad (40)$$

Die  $\Delta N$ -Werte der anderen Schichten entsprechend der Hüllkurve in Abb. 1 werden analog den Ausdrücken  $\rho/\rho_{max}$  in Gl. (12) gebildet, wobei dort in den Phasenfaktoren  $\varphi = 0$  gesetzt wird. Die gesamte Transmission ist dann bis auf einen Phasenfaktor:

$$\begin{aligned} \tau &\approx 1 - i\frac{\varphi}{2}g \left\{ e^{-\frac{1}{a}vt} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ e^{-\frac{1}{a}(l\Lambda - vt)} + e^{-\frac{1}{a}(l\Lambda + vt)} \right] \right\} \\ &= 1 - i\frac{\varphi}{2}g \cdot \frac{1}{\cos\frac{\Lambda}{a} - 1} \left\{ \gamma \sin\left(\frac{\Lambda}{a} - \frac{vt}{a}\right) + \gamma \sin\frac{vt}{a} \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

Die transmittierte Welle ist also phasenmoduliert, was leicht erkennbar wird, wenn man  $\tau = \exp [i(\varphi/2)g B(t)]$  schreibt. Die Fourierzerlegung liefert analog Gl. (21):

$$\tau = 1 + \frac{\varphi}{2}g \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\frac{\Lambda}{a}}{\left(\frac{\Lambda}{a}\right)^2 + (2\pi m)^2} \left( e^{imKvt} + e^{-imKvt} \right), \quad (42)$$

also ein Spektrum wie in Abb. 6, welches aber jetzt symmetrisch zur Mittelfrequenz  $\omega$  ist.

Die Abb. 11 zeigt als experimentelles Beispiel ein Rückwärtsstreu (= Reflexions-)spektrum, welches an laufenden Schichten in einer von einem Hohlleiter eingeschlossenen positiven Säule einer Argon-Glimmentladung mit 9 GHz-Mikrowellen gemessen wurde. Die Braggsche Bedingung ist dabei nicht erfüllt: die Dopplerverschiebung, bemerkbar an der leichten Anhebung der Linien rechts von der Grundlinie, ist wesentlich kleiner als der Linienabstand.

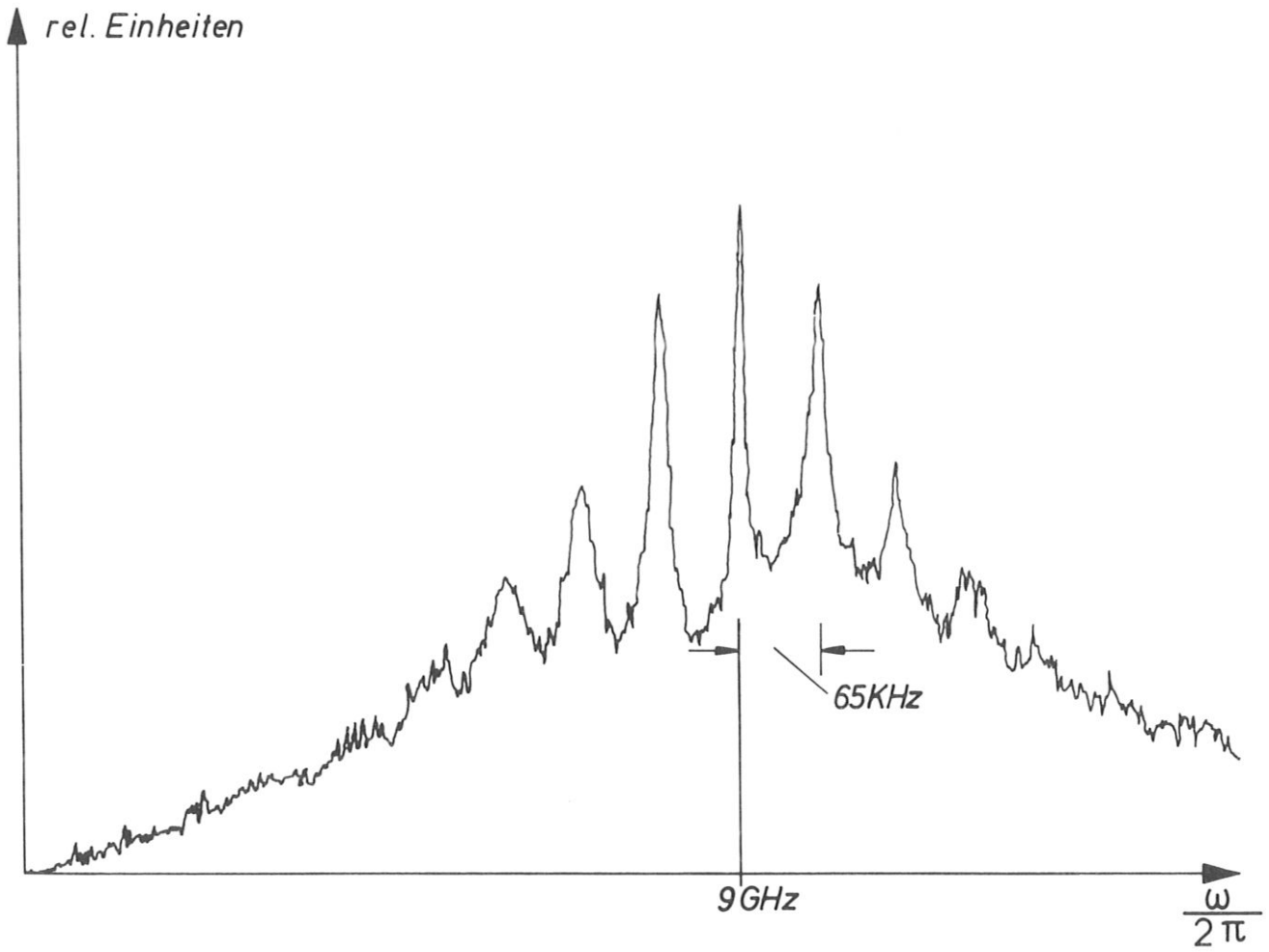


Abb. 11 Beispiel eines gemessenen Reflexions-  
spektrums.

Wir danken Herrn J. Prechtl für die Anfertigung der Zeich-  
nungen.

LITERATUR:

1. Landau - Lifshitz: Electrodynamics of Continuous  
Mecha. Eqs. 97.8 to 97.19.
2. J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Wiley 1962,  
S. 489
3. C.B. Wharton and J.H. Malmberg  
The Physics of Fluids Vol 11 / No. 12, S. 2655 - 2664