

**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**  
**GARCHING BEI MÜNCHEN**

Instationäre Prozesse der Wechselwirkung  
zwischen Stosswellen-erzeugten  
Plasmaströmungen und Magnetfeldern  
- Eine theoretische Untersuchung -

Transient Processes Due to Interaction  
of Shock Produced Plasma Flows with  
Magnetic Fields  
- A Theoretical Investigation -

F. Sardei

IPP IV/41

August 1972

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem  
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die  
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

August 1972 (in German)

A b s t r a c t

Transient processes due to the interaction of plasma flows behind strong shock waves with transverse magnetic fields are theoretically investigated in this paper. After the model is described, basic problems relating to the formation of a reflected shock are analytically treated. The detailed development of the entire interaction process is then numerically evaluated, and these values are compared with experimental results.

It is shown that under certain conditions the origin in space and time of the reflected shock can already be determined with relatively simple calculations. Under general conditions, on the other hand, the development of the entire interaction process can only be obtained by numerically solving the complete mathematical problem.

The plots of the calculations allow all essential phenomena involved in the interaction process to be recognized and interpreted. In particular, the influence of the interaction parameter and the ionization energy on the flow pattern is clarified.

Direct comparison with experimental results is allowed by using measured values of the current in the calculations to obtain three different approximations for the current density. The best agreement is achieved with calculations in which the measured current is inserted as a function of space and time. This also enables the influence of relaxation effects and electrode boundary layers on the current density to be taken into account. Very good agreement is thus obtained for the space and time origins of the reflected shock.

# I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

|  | Seite |
|--|-------|
| 1. EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG .....  | 1     |
| 2. PRINZIPIELLER ABLAUF DES WECHSELWIRKUNGSPROZESSES ....  | 2     |
| 3. DAS MODELL .....  | 9     |
| 3.1 Allgemeine Annahmen und Voraussetzungen .....  | 9     |
| 3.2 Grundgleichungen .....   | 10    |
| 3.3 Ansätze für den Stromdichteverlauf .....   | 18    |
| 3.4 Die Stosswellen .....  | 23    |
| 3.5 Anfangs- und Randbedingungen .....   | 26    |
| 3.6 Zusammenfassende Darstellung des mathematischen<br>Problems und Normierung der Variablen .....         | 27    |
| 4. ANALYTISCHE BEHANDLUNG DES WECHSELWIRKUNGSPROZESSES ..  | 31    |
| 4.1 Die "charakteristische" Form der Strömungs-<br>gleichungen unter Berücksichtigung der Ionisation       | 31    |
| 4.2 Zum Entstehungsprozess des reflektierten Stosses   | 38    |
| 5. BEHANDLUNG VON TEILPROBLEMEN DES WECHSELWIRKUNGSPRO-<br>ZESSES MIT EINFACHEN NUMERISCHEN METHODEN ..... | 49    |
| 5.1 Grenzwerte der Strömungsparameter .....  | 49    |
| 5.2 Entstehungsort und -zeit des reflektierten<br>Stosses .....  | 52    |
| 6. NUMERISCHES LÖSUNGSVERFAHREN FÜR DEN GESAMTEN WECHSEL-<br>WIRKUNGSPROZESS .....                         | 55    |
| 7. ERGEBNISSE NUMERISCHER RECHNUNGEN .....   | 58    |
| 7.1 Ein vollständiges Beispiel .....   | 59    |
| 7.2 Vergleich zwischen schwacher, mässiger und<br>starker Wechselwirkung .....                             | 69    |
| 7.3 Der Einfluss der Ionisationsenergie .....  | 76    |
| 7.4 Zwei Sonderfälle .....   | 82    |
| 8. VERGLEICH ZWISCHEN MESSRESULTATEN UND RECHEN-<br>ERGEBNISSEN .....                                      | 86    |

Seite

9. ZUSAMMENFASSUNG ..... 93

Literaturverzeichnis

Anhang 1

Anhang 2

Anhang 3

Anhang 4

## 1. EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG

Zur Untersuchung von Problemen der instationären Wechselwirkung zwischen Plasmaströmungen und Magnetfeldern, wie sie z.B. beim Ein- und Ausschalten magneto hydrodynamischer Generatoren auftreten, haben sich Membran-Stosswellenrohre als nützlich erwiesen /1, 2, 3, 4/. Durch starke Stosswellen (in Argon z.B. mit Stossmachzahlen  $M_S > 8$ ) können in solchen Stossrohren relativ stationäre Plasmaströmungen mit Temperaturen von der Grössenordnung  $10^4$  °K erzeugt werden. Bei diesen Temperaturen ist Argon schon merklich ionisiert, so dass beim Durchströmen des Plasmas durch ein starkes Quermagnetfeld Wechselwirkungseffekte zwischen Plasma und Magnetfeld auftreten, die zu starken Veränderungen der ursprünglichen Strömung führen können.

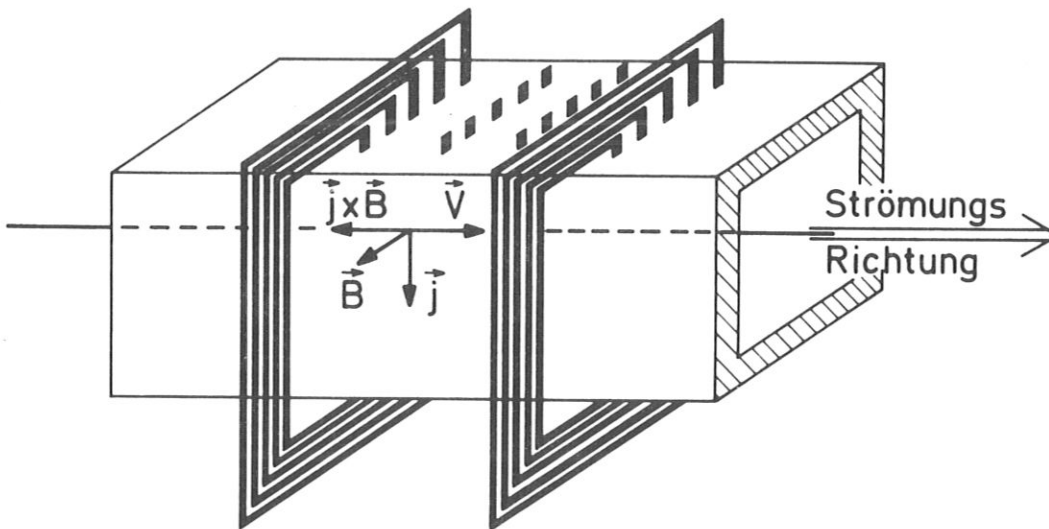


Abb. 1

Schematische Darstellung eines nach dem Prinzip eines Faraday-Generators ausgebildeten Testkanals.

$\vec{v}$  = Strömungsgeschwindigkeit

$\vec{B}$  = Magnetische Induktion des angelegten Magnetfeldes

$\vec{j}$  = Stromdichte des induzierten Stromes

Abb.1 zeigt schematisch einen nach dem Prinzip eines Faraday-MHD-Generators ausgebildeten Testkanal, mit dessen Hilfe solche Wechselwirkungsprozesse erzeugt und untersucht werden können. Das von einer starken Stosswelle erzeugte Plasma strömt mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durch die Teststrecke, in deren Bereich ein starkes Magnetfeld  $\vec{B}$  quer zur Strömungsrichtung angelegt ist. Die dabei induzierte  $\vec{v} \times \vec{B}$ -EMK treibt einen Strom der Dichte  $\vec{j}$  an, der über viele Elektrodenpaare ausserhalb des Kanals geschlossen wird. Durch die auftretende Lorentz-Kraft  $\vec{j} \times \vec{B}$  wird die Strömung abgebremst und durch die Ströme ohmisch aufgeheizt. Werden die Elektroden durch Widerstände verbunden, so kann, wie bei MHD-Generatoren, ein Teil der bei der Wechselwirkung erzeugten elektrischen Energie aus der Strömung abgeführt werden.

Wie in mehreren theoretischen Arbeiten /5, 6, 7, 8/ gezeigt wurde, kann sich bei hinreichend starker Abbremsung der Plasmaströmung eine "reflektierte" Stosswelle ausbilden, die mit der Zeit stärker wird und anschliessend aus der Wechselwirkungszone strömungsaufwärts herausläuft. Die Existenz solcher Stosswellen wurde durch interferometrische Messungen eindeutig nachgewiesen /9/, und auch ihre Struktur wurde experimentell untersucht /10, 11/.

Bei der theoretischen Behandlung dieser Art von Wechselwirkungsprozessen wird meistens von der Annahme eindimensionaler Wechselwirkungsbedingungen ausgegangen. Dafür ist vor allem massgebend, dass numerische Untersuchungen auf der Basis eines mehrdimensionalen Modells einen Rechenaufwand erfordern würden, der auch mit einem modernen Grossrechner nicht bewältigt werden könnte.

Im Experiment lässt sich dagegen die Eindimensionalität nur sehr unvollkommen annähern. Vor allem der Übergang des Stromes vom Plasma (durch Grenzschichten) in Elektroden bringt mehrdimensionale Effekte mit sich. Deshalb wurde schon in einem frühen Stadium dieser Arbeit ein Vergleich zwischen Messergebnissen, die bei Experimenten im IPP <sup>+)</sup>  gewonnen wurden, und Rechenergebnissen

---

<sup>+)</sup>  Max-Planck-Institut für Plasmaphysik

durchgeführt. Dieser ergab, dass auch unter den vorliegenden experimentellen Voraussetzungen die Annahme der Eindimensionalität bei der Beschreibung der Strömungsvorgänge sinnvoll ist.

Einen allgemeinen Überblick über die Effekte, die durch Einwirkung von Lorentz-Kraft und Ohmscher Heizung beliebiger Stärke in der Strömung zu erwarten sind, gibt eine theoretische Arbeit von Rebhan /6/. Allerdings untersuchte der Autor nur die quasistationären Endzustände, die sich bei zeitlich konstanter Wechselwirkung und unendlich ausgedehntem Plasma mit der Zeit einstellen.

Dagegen berechneten z.B. Johnson /7/ und Rosciszewski /12/ die instationären Strömungsvorgänge, die sich innerhalb der Wechselwirkungszone hinter der primären Stossfront abspielen. Letzterer zeigte auch Profile der Strömungsparameter zu verschiedenen Zeiten. Durch Einführung einer künstlichen Viskosität, die für die Berechnung der Stosswellen nach der von ihm benutzten Lax-Wendroff-Methode notwendig ist, wird jedoch der Entstehungsprozess des reflektierten Stosses so unscharf, dass aus den Profilen nicht mehr zu erkennen ist, ob und wo ein reflektierter Stoss entsteht, und wie er sich entwickelt. Insbesondere bleibt unklar, ob und wann ein mit der Kompressionswelle identifizierter Stoss aus der Wechselwirkungszone herausläuft. Diese Vorgänge scheinen aber wichtig zu sein, da interferometrische Messungen /9/ eindeutig zeigen, dass eine scharfe Stossfront entsteht, mit der Zeit schneller wird und schliesslich die Wechselwirkungszone strömungsaufwärts verlässt.

Aus diesen Gründen ist eine Behandlung des Reflexionsprozesses nach der Charakteristiken-Methode, unter Verwendung der Rankine-Hugoniot-Beziehungen für die Stossfronten, besonders günstig und nützlich. Aus dem Charakteristiken-Verlauf in der Ort-Zeit-Ebene können wesentliche Informationen über das Strömungsverhalten und insbesondere über den Entstehungsprozess des reflektierten Stosses abgelesen werden. Konvergenzschwierigkeiten im Bereich der Stossfronten treten bei Anwendung dieses Verfahrens nicht auf.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die im Experiment beobachteten Phänomene des Reflexionsprozesses in einem weiteren Rahmen theoretisch zu untersuchen und zu einer Klärung der damit zusammenhängenden Fragen beizutragen. Insbesondere soll der Entstehungsprozess des reflektierten Stosses eingehend diskutiert werden. Die Rechnungen werden nach der Charakteristiken-Methode durchgeführt. Sie umfassen neben den Vorgängen innerhalb des Wechselwirkungsbereiches auch solche ausserhalb davon, wodurch sämtliche Strömungsvorgänge bis zur Einstellung stationärer Verhältnisse verfolgt werden können. Typische Unterschiede zwischen schwacher, mässiger und starker Wechselwirkung werden anhand der entsprechenden Ergebnisse herausgestellt. Der Einfluss von Realgaseffekten wird bei den Rechnungen berücksichtigt.



## 2. PRINZIPIELLER ABLAUF DES WECHSELWIRKUNGSPROZESSES

Die allgemeinen theoretischen Grundlagen zu den in der vorliegenden Arbeit behandelten nichtlinearen gasdynamischen Phänomenen finden sich z.B. in Shapiro /13/ und sollen hier nicht wiederholt werden. Dagegen soll hier der zeitliche Ablauf der speziellen Strömungsvorgänge, die für diese Arbeit besonders wichtig sind, kurz skizziert werden. Diese Vorgänge lassen sich prinzipiell in die zwei folgenden instationären Teilprozesse gliedern:

1. Lokale Abbremsung und Aufheizung der Plasmaströmung hinter einer starken Stosswelle durch magnetogasdynamische Vorgänge, die sich innerhalb einer räumlich begrenzten "Wechselwirkungszone" abspielen (Erzeugung von "Störungen").
2. Ausbreitung und Überlagerung der durch die genannten Vorgänge in der Strömung erzeugten "Störungen" durch gasdynamische Prozesse.

Der Wechselwirkungsprozess beginnt mit dem Eintreffen der primären Stosswelle in der Wechselwirkungszone. Durch den strömungsaufwärts gerichteten magnetischen Druck wird das Plasma abgebremst und entgegen der Strömungsrichtung aufgestaut. Dabei entsteht eine strömungsaufwärts laufende Kompressionswelle und eine strömungsabwärts laufende Expansionswelle. Durch die zusätzliche Druckwirkung der Ohmschen Aufheizung ("Heizdruck") wird die Kompressionswelle verstärkt und die Expansionswelle abgeschwächt. In jedem Fall spielt der Heizdruck gegenüber dem magnetischen Druck eine untergeordnete Rolle, wenn keine Energie von aussen (z.B. durch Anlegen einer Spannung an den Elektroden) der Strömung zugeführt wird (vgl. Kap. 4.1). Während die Kompressionswelle in der Wechselwirkungszone sich ungehindert ausbilden kann, holt die Expansionswelle, noch während sie sich ausbildet, den primären Stoss ein, schwächt ihn teilweise ab und wird dabei selbst weitgehend abgebaut.

Wenn der magnetische Druck von der Grössenordnung des dynamischen Strömungsdrucks ist, muss in der Wechselwirkungszone mit "choking" gerechnet werden, d.h. die Kompressionswelle kann sich zu einer reflektierten Stossfront aufteilen. In der Regel wird diese Stossfront mit der Zeit stärker und verlässt dann strömungsaufwärts die Wechselwirkungszone.

In Analogie zur Reflexion einer Stosswelle an einer festen Wand können die eben geschilderten Vorgänge als eine Teilreflexion des einfallenden Stosses an einer "magnetischen Wand" aufgefasst werden, wobei der Stoss mehr oder weniger abgeschwächt wird. Eine vollständige Reflexion entspricht dann dem Grenzfall, dass die Strömungsgeschwindigkeit hinter dem reflektierten Stoss auf Null absinkt. Dieser Grenzfall legt die obere Grenze für die Stärke des reflektierten Stosses und damit für den Veränderungsbereich der Strömungsparameter fest.

Das durch die Wechselwirkung gestörte Strömungsgebiet zwischen dem primären und dem reflektierten Stoss breitet sich mit der Zeit immer weiter aus, wobei der instationäre Charakter des Prozesses abnimmt. Das gilt natürlich nur unter der Annahme, dass Vorland und Hinterland des primären Stosses unbegrenzt ausgedehnt sind, und dass die Stärke der Wechselwirkung mit der Zeit stationär wird. Nach und nach stellt sich in der Strömung bei jeder Stärke der Abbremsung und der Aufheizung eine Gleichgewichtssituation ein, die durch stationäre Verhältnisse in der Wechselwirkungszone und konstante Stärke und Geschwindigkeit der beiden Stosswellen charakterisiert ist /6/. Zwischen dem primären Stoss und der Wechselwirkungszone läuft dann meistens noch eine Expansionswelle gegen die Strömung. In jedem Fall bildet sich aber hinter dem primären Stoss eine "Kontaktzone" aus, die sich mit Strömungsgeschwindigkeit bewegt. Sie trennt Gasmassen verschiedener Entropie, nämlich das Gas, das durch die Wechselwirkungszone durchgeströmt ist von dem Gas, das erst hinter der Wechselwirkungszone vom primären Stoss erreicht und "mitgenommen" worden ist. In der Kontaktzone herrscht hydrostatisches Gleichgewicht, d.h. Druck und Geschwindigkeit sind konstant, wogegen sich Dichte, Temperatur, Schallgeschwindigkeit und Machzahl über die Kontaktzone hinweg ändern.

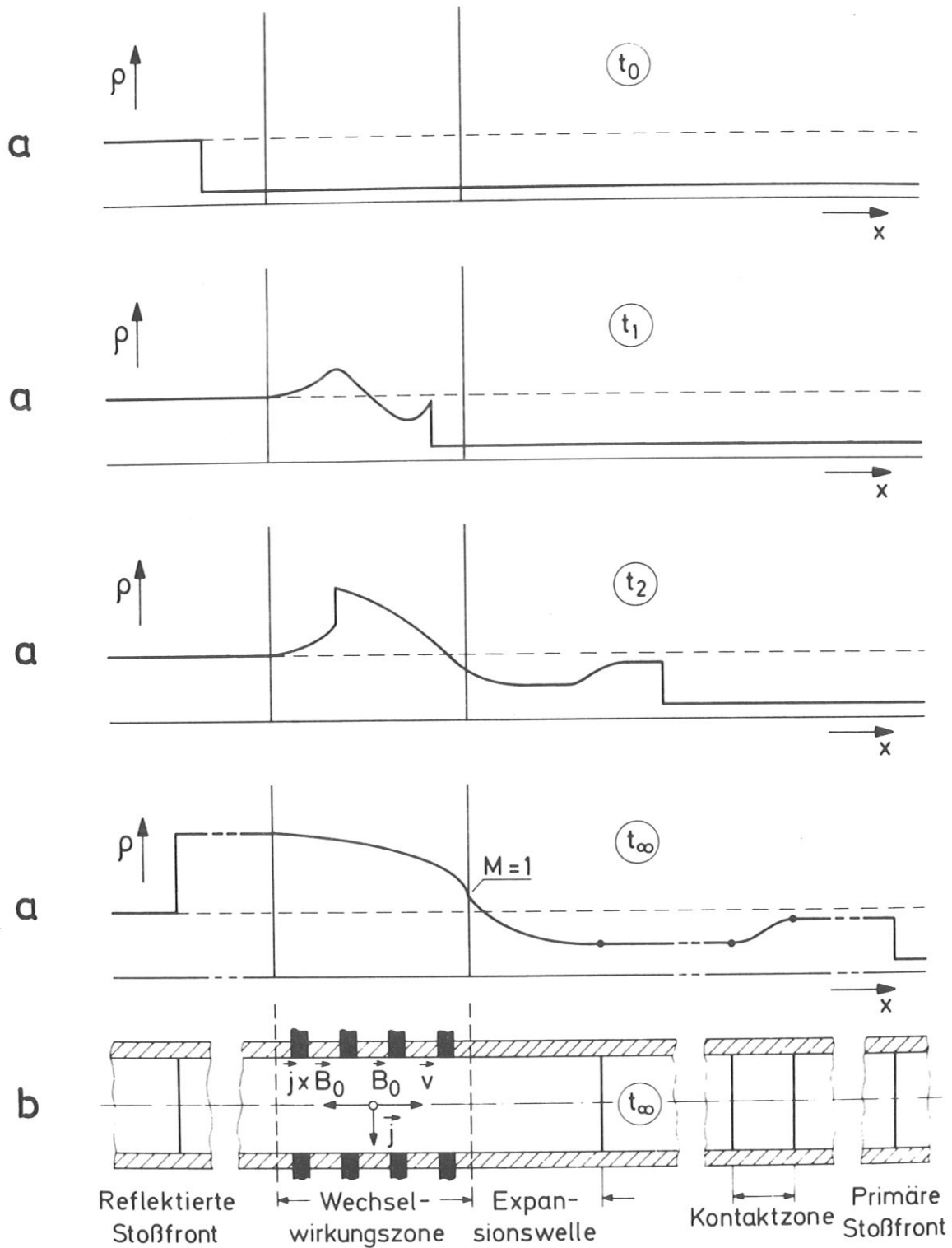


Abb. 2

Darstellung des prinzipiellen Ablaufs des Wechselwirkungsprozesses.

a) Dichteprofile zu vier verschiedenen Zeiten.

b) Wechselwirkungszone und Strömungsbereiche und -fronten zur Zeit des untersten Profils.

Abb. 2 zeigt den prinzipiellen Ablauf des beschriebenen Wechselwirkungsprozesses anhand der Dichteprofile zu vier verschiedenen Zeiten. Beim ersten Profil - zur Zeit  $t_0$  - hat die Wechselwirkung noch nicht begonnen, beim letzten Profil - zur Zeit  $t_\infty$  - ist die instationäre Phase des Wechselwirkungsprozesses abgeschlossen. Die dazwischen liegenden Profile geben im wesentlichen den Entstehungsvorgang des reflektierten Stosses wieder. Unterhalb der Profile ist noch ein Längsschnitt des Kanals senkrecht zum Magnetfeld schematisch dargestellt, bei dem die Wechselwirkungszone und die wesentlichen Strömungsbereiche und -fronten zur Zeit  $t_\infty$  zu sehen sind.

### 3. DAS MODELL

#### 3.1 Allgemeine Annahmen und Voraussetzungen

Bei den im IPP durchgeführten Experimenten wurde als Testgas fast ausschliesslich Argon benutzt. In Übereinstimmung damit werden die theoretischen Untersuchungen dieser Arbeit auf Edelgase beschränkt und die Rechnungen speziell für Argon durchgeführt. Auch die im folgenden zusammengestellten Annahmen und Voraussetzungen werden speziell für Argon als Testgas formuliert.

Das Gas wird hinter der primären Stossfront als quasineutrales, teilionisiertes Plasma betrachtet. Ionen und Neutralatome werden wegen ihrer praktisch gleichen Masse und gleichen thermischen Energie als "schwere Teilchen" zusammengefasst. Da ausserdem bei Temperaturen um  $10^4$  °K bei Argon die erste Ionisationsstufe massgebend ist /14/, kann das Plasma als ein Zweikomponenten-Gas aufgefasst werden, das aus Elektronen und schweren Teilchen (Neutralatomen und einfach geladenen Ionen) besteht. Beide Komponenten sollen sich wie ideale Gase verhalten. Die Stromleitung soll ausschliesslich durch das Elektronengas erfolgen, was wegen der viel grösseren Beweglichkeit der Elektronen im Vergleich zur Beweglichkeit der Ionen sicher zulässig ist. Das Verhältnis der Elektronendichte zur Dichte der schweren Teilchen hängt von Temperatur und Druck des Plasmas ab und wird durch einen variablen Ionisationsgrad  $\alpha$  ausgedrückt.

Das Plasma soll sich im gesamten Hinterland der einfallenden Stossfront im thermischen Gleichgewicht befinden. Damit werden Ionisationsrelaxationseffekte vernachlässigt, obwohl sie, vor allem direkt hinter der primären Stossfront, eine wichtige Rolle spielen dürften. Im Experiment sind jedoch Relaxationseffekte und Stromgrenzschichteffekte an den Elektroden praktisch nicht trennbar, was vor allem durch ihren gekoppelten Einfluss auf die elektrische Leitfähigkeit und damit auf die Stromdichte bedingt ist. Da nun einerseits das detaillierte

Verhalten der Grenzschichten noch weitgehend ungeklärt ist und deshalb nicht quantitativ beschrieben werden kann, andererseits schon die Berücksichtigung der Relaxation allein im Modell einen ausserordentlich hohen Rechenaufwand erfordern würde, erscheint es sinnvoll, für die Zwecke dieser Arbeit die Relaxationsphänomene ausser Betracht zu lassen. Unter diesen Voraussetzungen kann das Plasma als teilionisiertes Gas mit einheitlichen thermodynamischen Eigenschaften betrachtet und im Rahmen eines Einflüssigkeitsmodelles behandelt werden.

Die Untersuchung der Wechselwirkungsvorgänge erfolgt unter der Annahme eindimensionaler instationärer Wechselwirkungsbedingungen. Viskosität, Wärmeleitung und Strahlung werden, wie üblich bei Untersuchungen dieser Art, vernachlässigt. Stossfronten werden als Diskontinuitäten aufgefasst. Das Magnetfeld wird als unabhängig von der Strömung betrachtet und deshalb gleich dem angelegten Magnetfeld gesetzt. (Da die Messungen eine effektive magnetische Reynoldszahl von  $Re_m < 0,2$  ergeben haben /3/, ist diese Annahme sicher zulässig.) Folglich werden alle MHD-Phänomene, die mit einer Kompression des Magnetfeldes verbunden sind, vernachlässigt. Der Strom soll nur in der Wechselwirkungszone, d.h., nur im Elektrodenbereich und nur senkrecht zur Strömung und zum angelegten Magnetfeld fliessen (Vernachlässigung des Hall-Effektes). Die bei Experimenten dieser Art übliche Segmentierung der Elektroden /15/ wird durch eine unendlich feine Segmentierung approximiert, d.h. es wird eine stetige, wenn auch orts- und zeitabhängige Stromdichteverteilung im Elektrodenbereich angenommen. Die Induktivität der Stromkreise wird nicht berücksichtigt, da ihr Einfluss auf die Stromdichte gegenüber dem der Stromgrenzschichten vernachlässigt werden kann.

### 3.2 Grundgleichungen

#### Strömungsgleichungen

Die Behandlung der Strömungsvorgänge erfolgt auf der Basis der gasdynamischen Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. Unter den im vorhergehenden Kapitel gemachten Voraussetzungen haben die Erhaltungssätze in der Eulerschen Darstellung die Form

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho + \rho v^2) = -j B \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( 1 + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho v \left( \frac{\rho}{\rho} + e + \frac{v^2}{2} \right) \right] = -j B v + \frac{j^2}{\sigma} \quad (3)$$

- mit x: Ort (x = 0 und t = 0 werden durch Ort und Zeit der Ankunft des primären Stosses in der Wechselwirkungszone definiert)  
t: Zeit  
p: Druck  
ρ: Dichte  
v: Strömungsgeschwindigkeit  
e: spezifische innere Energie  
j: Stromdichte  
B: Magnetfeld  
σ: elektrische Leitfähigkeit

Durch die "Quellterme"  $-jB$  (Lorentz-Kraft),  $-jBv$  (Leistung der Lorentz-Kraft) und  $j^2/\sigma$  (Ohmsche Heizung) in der Impuls- bzw. Energiegleichung werden die gasdynamischen mit den elektromagnetischen Vorgängen gekoppelt. Diese Terme sind nur innerhalb der Wechselwirkungszone und nur hinter dem primären Stoss verschieden von Null. Im Grenzfall  $jBv = j^2/\sigma$  findet kein Energieaustausch zwischen der Strömung und der Umgebung statt, da die der Strömung entzogene kinetische Energie restlos als Wärmeenergie der Strömung wieder zugeführt wird (Kurzschlussfall).

Durch kurze Umrechnung lassen sich die Erhaltungssätze (1) bis (3) in die einfachere Form bringen

$$\rho \frac{dv}{dt} + p \frac{dv}{dx} = 0 \quad (4)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = - j B \quad (5)$$

$$\rho \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{j^2}{\sigma} \quad (6)$$

worin  $d/dt \equiv \partial/\partial t + v \cdot \partial/\partial x$  ist. Die Energiegleichung (6) drückt den ersten Hauptsatz für ein als thermodynamisches System betrachtetes Element der Strömung aus, wobei  $j^2/\sigma$  die dem Element pro Zeit- und Volumeneinheit zugeführte Wärme ist.

Zu einer eindeutigen Beschreibung der Vorgänge müssen noch das thermodynamische Verhalten des Plasmas durch Angabe einer kalorischen Zustandsgleichung für die innere Energie  $e$  und einer thermischen Zustandsgleichung sowie das Verhalten der Lorentz-Kraft  $jB$  und der Ohmschen Heizung  $j^2/\sigma$  spezifiziert werden.

### Thermodynamische Beziehungen

Wie bei idealen Gasen ist auch bei realen Gasen im thermodynamischen Gleichgewicht der Gaszustand allgemein durch Angabe von zwei beliebigen Zustandsvariablen eindeutig festgelegt /16/. Insbesondere kann bei solchen Gasen, wie im folgenden gezeigt wird, die innere Energie als Funktion von Druck und Dichte ausgedrückt werden.

Ausserdem gilt bei thermodynamischem Gleichgewicht für jedes Strömungselement die Entropie-Gleichung



$$T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (7)$$

wobei  $s$  die spezifische Entropie und  $T$  die einheitliche Temperatur des Elements sind. Durch Vergleich der Gl. (7) mit der Energiegleichung (6) erhält man für die Entropieänderung eines Strömungselements den Ausdruck

$$T ds = \frac{j^2 / \sigma}{\rho} dt \quad (8)$$

Die Ohmsche Heizung ist also die einzige Entropiequelle in der stetigen Strömung ausserhalb der Stossfronten; sie kann für jedes Strömungselement als "interne Wärmequelle" angesehen werden. Die Ionisationsprozesse sind wegen des angenommenen Ionisationsgleichgewichts mit keiner Dissipation verbunden und verlaufen demnach reversibel <sup>+)</sup> .

Die kalorische Zustandsgleichung für die innere Energie des Plasmas lässt sich aus den Gesetzen der statistischen Mechanik ableiten. Für ein einatomiges, einfach ionisiertes Gas im thermischen Gleichgewicht ergibt sich bei Vernachlässigung der Elektronenanregung die Beziehung

$$e(T, \alpha) = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{kT}{m_a} (1 + \alpha) + \alpha \frac{\chi}{m_a} \quad (9)$$

---

<sup>+)</sup>  Die Annahme von Ionisationsgleichgewicht impliziert, dass die Ionisationsprozesse "unendlich" schnell verlaufen. Das bedeutet, dass bei jeder Zustandsänderung das Gas nur thermodynamische Gleichgewichtszustände durchläuft. Solche Änderungen sind grundsätzlich reversibel /17/.

- mit  $\gamma = 5/3$  : Verhältnis der spezifischen Wärmen  
 $k$  : Boltzmann-Konstante  
 $m_a$  : Masse des Atoms  
 $T$  : Gleichgewichtstemperatur  
 $\alpha = n_i / (n_i + n_a)$  : Ionisationsgrad ( $n_i, n_a$ : Dichte der Ionen bzw. Atome)  
 $\chi$  : Ionisationsenergie der ersten Ionisationsstufe

Der erste Term in Gl.(9) stellt den Anteil der Translationsenergie, der zweite den Anteil der Ionisationsenergie dar.

Die Bestimmung des Ionisationsgrades erfolgt wegen des angenommenen thermischen Gleichgewichts durch das Massenwirkungsgesetz für Ionisationsprozesse (Sahagleichung):

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{(2\pi m_e)^{3/2} k^{5/2}}{h^3} \cdot \frac{z_e z_i}{z_a} \cdot \frac{T^{5/2}}{p} \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right) \quad (10)$$

- mit  $m_e$  : Masse des Elektrons  
 $h$  : Plancksche Konstante  
 $Z_e, Z_i, Z_a$  : Zustandssumme für Elektron- bzw. Ion- bzw. Atomanregung

Beim Elektron ist die Zustandssumme der Anregung gleich seinem statistischen Gewicht, also  $Z_e = 2$ . Beim Atom wird nur der Grundzustand berücksichtigt, also  $Z_a = 1$ . Für das Ion lauten die ersten beiden Terme der Zustandssumme bei Argon  $Z_i = 4 + 2 \exp(-2060/T) / 18$ , wobei  $T$  in  $^{\circ}\text{K}$  einzusetzen ist. Im Temperaturbereich um  $10^4$   $^{\circ}\text{K}$  kann dafür näherungsweise  $Z_i \approx 6$  gesetzt werden. Damit wird

$$\frac{z_e z_i}{z_a} \approx 12$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte in die Sahagleichung (10) und Auflösung nach  $\alpha$  erhält man dann für den Ionisationsgrad bei Argon (siehe z.B. /19/) die Zahlenwertgleichung

$$\alpha(p, T) \approx \left[ 1 + \frac{10^3}{3} \frac{p}{T^{5/2}} \exp\left(\frac{182000}{T}\right) \right]^{-1/2} \quad (11)$$

mit  $p$  in Torr,  $T$  in  $^{\circ}\text{K}$  und  $\chi/k = 182000$   $^{\circ}\text{K}$ .

Die thermische Zustandsgleichung ergibt sich aus der Summe der Partialdrucke der einzelnen Komponenten nach dem Daltonschen Gesetz und lautet

$$p = (1 + \alpha) \rho \frac{kT}{m_a} \quad (12)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in die kalorische Zustandsgleichung (9) und in die Sauggleichung (11) kann die Temperatur eliminiert werden. Damit ist der Ionisationsgrad implizit als Funktion von Druck und Dichte eindeutig festgelegt, d.h. die kalorische Zustandsgleichung (9) kann in der Form

$$e(p, \rho) = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \alpha(p, \rho) \cdot \frac{\chi}{m_a} \quad (13)$$

geschrieben werden. Diese Gleichung liefert die gesuchte Abhängigkeit der inneren Energie von Druck und Dichte und wird in dieser Form in die Energiegleichung (6) eingesetzt.

Zur Bestimmung der Strömungs- und Stossmachzahlen wird noch die Schallgeschwindigkeit  $a$  benötigt. Sie stellt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit akustischer Wellen im Plasma dar. Magnetoakustische, mit der Geschwindigkeit  $\sqrt{a^2 + v_a^2}$  ( $v_a$ : Alfvén-Geschwindigkeit) laufende, Wellen können dagegen wegen der kleinen magnetischen Reynoldszahl vernachlässigt werden. Das gilt auch wenn, wie bei den hier untersuchten Fällen, die Alfvén-Geschwindigkeit relativ hoch ist ( $v_a \approx 3 a$ ).

Für die Schallgeschwindigkeit eines teilionisierten Plasmas im thermischen Gleichgewicht gilt, wie bei idealen Gasen, die Beziehung

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (14)$$

Mit Hilfe der Gln. (7), (11), (12) und (13) lässt sich  $(\partial p / \partial \rho)_s$  berechnen:

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma_{eq}(\alpha, T) \cdot \frac{p}{\rho} \quad (15)$$

mit

$$\gamma_{eq}(\alpha, T) = \frac{5 + \alpha(1-\alpha) \left( \frac{5}{2} + \frac{\chi}{kT} \right)^2}{3 + \alpha(1-\alpha) \left[ \left( \frac{3}{2} + \frac{\chi}{kT} \right)^2 + \frac{3}{2} \right]} \quad (16)$$

(vgl. hierzu z.B. /20/). Die Funktion  $\gamma_{eq}(\alpha, T)$  kann als variabler Isentropenexponent aufgefasst werden. Anders als bei idealen Gasen ist jedoch in diesem Fall der Isentropenexponent nicht identisch mit dem Verhältnis der spezifischen Wärmen. Für  $\alpha = 0$  geht natürlich  $\gamma_{eq}(\alpha, T)$  in  $\gamma = c_p/c_v = 5/3$  über.

### Elektrische Leitfähigkeit

Zur Ermittlung der Stromdichte wird schliesslich eine Beziehung für die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  benötigt. Andere Transportgrössen kommen in diesem Modell nicht vor. Wie schon erwähnt, soll die Stromleitung nur durch Elektronen erfolgen, und das Gas soll einfach ionisiert sein und sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Da der Hall-Effekt vernachlässigt wird, ist in diesem Modell nur die skalare Leitfähigkeit von Bedeutung.

Die Wahl der geeigneten Beziehung für  $\sigma$  hängt davon ab, ob das Gas stark oder schwach ionisiert ist. Für die elektrische Leit-

fähigkeit bedeutet starke Ionisation, dass der Beitrag der Elektron-Atom-Stöße zum elektrischen Widerstand gegenüber dem Beitrag der Elektron-Ion-Stöße vernachlässigt werden kann. Das ist wegen

$$\sigma \sim \frac{1}{n_a Q_{ea} + n_i Q_{ei}} \quad (17)$$

mit  $n_a, n_i$  : Teilchendichte der Atome bzw. der einfach geladenen Ionen  
 $Q_{ea}, Q_{ei}$  : Wirkungsquerschnitte der Atome bzw. der einfach geladenen Ionen für Elektronenstoss

dann der Fall, wenn das Produkt  $n_a Q_{ea}$  wesentlich kleiner als das Produkt  $n_i Q_{ei}$  ist. Diese Bedingung ist schon bei den niedrigsten hier in Frage kommenden Ionisationsgraden um 0,5 % wegen des grossen Coulomb-Querschnittes  $Q_{ei}$  erfüllt (siehe dazu Anhang 1). Deshalb kann in diesem Modell die von Spitzer /21/ angegebene Beziehung für vollionisierte Gase verwendet werden. Diese lautet für einfach geladene Ionen

$$\sigma = \frac{2 (2 kT)^{3/2} \gamma_E}{\pi^{3/2} m_e^{1/2} e^2 \ln \Lambda} \quad (18)$$

Hierin bedeuten  $e$  : Elementarladung

$\gamma_E = 0,582$ : Koeffizient zur Berücksichtigung der Elektron-Elektron-Stöße, die für die Abweichung der Leitfähigkeit von der eines Lorentz-Gases verantwortlich sind

$$\Lambda = \frac{\overline{h}}{b_0} = \frac{3 (kT)^{3/2}}{2 e^3 (\pi n_e)^{1/2}}$$

: mittleres Verhältnis der Debye-Länge  $h$  zum Stossparameter für  $90^\circ$ -Elektronenablenkung  $b_0$  /21/, ( $n_e$ : Teilchendichte der Elektronen)

Nach Einsetzen der Zahlenwerte in Gl. (18) erhält man für die elektrische Leitfähigkeit den Ausdruck

$$\sigma = \frac{1,53 \cdot 10^{-4} \cdot T^{3/2}}{\ln(1,23 \cdot 10^4 T^{3/2} / n_e^{1/2})} \quad [\text{mho/cm}] \quad (19)$$

mit  $T$  in  $^{\circ}\text{K}$ ,  $n_e$  in  $\text{cm}^{-3}$ .  $n_e$  hängt mit dem Ionisationsgrad  $\alpha$  und der Massendichte  $\rho$  durch die Beziehung

$$n_e = \frac{\alpha \rho}{m_a} \quad (20)$$

zusammen.

### 3.3 Ansätze für den Stromdichteverlauf

Zur Berechnung der Lorentz-Kraft und der Ohmschen Heizung muss eine Funktion für den Stromdichteverlauf angegeben werden. Das Magnetfeld kann dagegen, wie schon erwähnt, unabhängig von der Strömung und im allgemeinen als konstant betrachtet werden.

Die Richtung des angelegten Magnetfeldes und die der Strömungsgeschwindigkeit legen in einem eindimensionalen Modell, bei dem der Hall-Effekt nicht berücksichtigt wird, auch die Richtung der Stromdichte (senkrecht zu  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$ ) fest. Damit werden Kurzschlussströme im Plasma prinzipiell ausgeschlossen. Dies ist im Einklang mit Versuchen im IPP /3/, zu deren Deutung die hier durchgeführten Rechnungen dienen sollen.

Aus der Eindimensionalität des Modells ergibt sich weiterhin, dass die Stromdichte nur Gradienten in Strömungsrichtung haben kann. Die in die Strömung eingebrachten Kanalwände sind nur dann mit der Eindimensionalität des Modells konsistent, wenn die senkrecht zum Magnetfeld orientierten Wände ideal isolie-

ren und die zum Magnetfeld parallelen Wände aus unendlich fein segmentierten Elektroden aufgebaut sind. Dann besteht der Strom im Plasma aus unendlich dünnen ebenen "Stromschichten", die über die Elektroden einzelne, voneinander getrennte, Stromkreise bilden. Im Experiment versucht man durch genügend feine Segmentierung der Elektroden dieser Idealvorstellung nahe zu kommen.

Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Plasmaströmung das vereinfachte Ohmsche Gesetz

$$j = \sigma (E + vB) \quad (21)$$

Vor dem primären Stoss ist  $\sigma = 0$  damit  $j = 0$ . Ausserhalb der Wechselwirkungszone sind keine Elektroden vorhanden, d.h., selbst wenn ein Magnetfeld existiert, kann im Plasma kein Strom fliessen. Im Einklang mit dem Ohmschen Gesetz wird in diesem Fall durch Ladungstrennung ein elektrisches Feld erzeugt, das die EMK gerade kompensiert ( $-E = vB$ ). Mit Abweichungen von diesem Verhalten muss allerdings in Gebieten starker Magnetfeldgradienten gerechnet werden /5/. Solche Gradienten sind aber bei Experimenten, die hier zum Vergleich herangezogen werden, vermieden worden. Innerhalb der Wechselwirkungszone kann dagegen durch die  $\vec{v} \times \vec{B}$ -EMK ein Strom im Plasma erzeugt werden, der sich über die Elektroden ausserhalb des Kanals schliesst. Hier gilt also  $|E| < |vB|$ , wobei  $E$  allerdings erst durch Angabe einer Randbedingung an den Elektroden festgelegt werden kann.

Diese Randbedingung hängt vom elektrischen Widerstand ausserhalb der Plasmaströmung ab. Der effektive Aussenwiderstand  $\tilde{R}_a$  wird jedoch, wie die Experimente gezeigt haben, nicht nur vom aussen angelegten Widerstand  $R_a$  (z.B. der Elektrodenbügel) gebildet. In einem Übergangsbereich zwischen der Plasmaströmung und den kalten Elektroden treten nämlich starke Grenzschichteffekte auf, die einen zusätzlichen hohen Widerstand  $R_g$  zur Folge haben. Da diese Grenzschicht im allgemeinen dünn ist, der

Widerstand in ihr aber wesentlich höher als der Widerstand der Plasmaströmung selbst, ist es sinnvoll, den Grenzschichtwiderstand  $R_g$  bei der Berechnung der Stromdichte zum Aussenwiderstand  $R_a$  dazu zu addieren.

Aus einer integralen Betrachtung über den gesamten Stromkreis einer beliebigen Stromschicht (wie sie oben definiert wurde) kann nun die gesuchte Randbedingung sofort ermittelt werden. Sie lässt sich in einfacher Weise ausdrücken, wenn anstatt  $E$  der dimensionslose Parameter

$$K_S = \frac{-E}{vB} \quad (\geq 0) \quad (22)$$

benutzt wird. Man kann sofort zeigen, dass  $K_S$  mit dem sog. Lastfaktor der "Stromschicht" identisch ist. Aus

$$-Eh = I \cdot \tilde{R}_a \quad \text{mit} \quad \tilde{R}_a = R_a + R_g \quad (23)$$

und

$$vBh = I (\tilde{R}_a + R_i) \quad \text{mit} \quad R_i = \frac{h}{q} \cdot \frac{1}{\sigma} \quad (24)$$

mit  $I$  = Stromstärke in einem diskreten Stromkreis  
 $h$  = Elektrodenabstand  
 $q$  = Querschnittsfläche der Stromschicht im Plasma  
 $R_i$  = Innenwiderstand (= Plasmawiderstand)

(vgl. Abb.3) folgt nämlich sofort

$$K_S = \frac{\tilde{R}_a}{\tilde{R}_a + R_i} \quad (25)$$



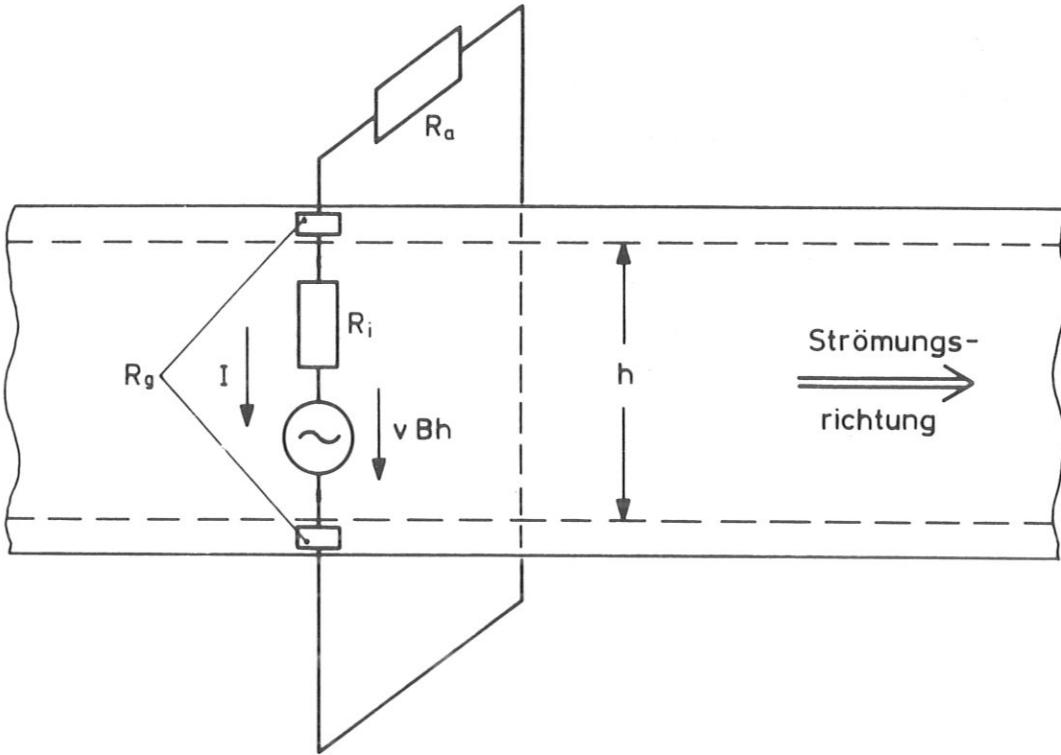


Abb. 3

Schematisches Schaltbild für den Stromkreis einer "Stromschicht".

$I$  = Stromstärke;  $h \approx$  Elektrodenabstand;  $R_i$  = Plasmawiderstand;  $R_a$  = Aussenwiderstand;  $R_g$  = Grenzschichtwiderstand.

Der Lastfaktor stellt die gesuchte Randbedingung dar. Der Aussenwiderstand  $R_a$  ist frei wählbar und damit eindeutig definiert. Er wird räumlich und zeitlich konstant gesetzt. Der Grenzschichtwiderstand  $R_g$  ist dagegen nicht willkürlich beeinflussbar und kann nur über gemessene Stromwerte bestimmt werden, da Entstehungsmechanismus und lokales Verhalten der Grenzschichtphänomene zu wenig bekannt sind, um die Berechnung von  $R_g$  zu ermöglichen.

Wird nun ein spezifischer effektiver Aussenwiderstand  $\tilde{R}_a$  durch die Beziehung

$$\tilde{R}_a = \tilde{r}_a \frac{h}{q} \quad (26)$$

definiert, so können Lastfaktor und Widerstandsgrößen in Gl. (25) beim Grenzübergang auf unendlich dünne Stromschichten durch lokale Größen ersetzt werden:

$$k(x, t) = \frac{\tilde{z}_a(x, t)}{\tilde{z}_a(x, t) + 1/\sigma(x, t)} \quad (27)$$

Mit Hilfe des Lastfaktors kann das Ohmsche Gesetz (21) in der Form

$$j = (1 - k) \sigma v B \quad (28)$$

geschrieben werden.

Da für den Grenzschichtwiderstand  $r_g$  kein funktionaler Zusammenhang mit den anderen Parametern angegeben werden kann, ist es beim Studium prinzipieller Zusammenhänge sinnvoll, ihn ebenso wie schon  $r_a$  als konstant zu setzen (1. Ansatz). Dann ist der Lastfaktor  $k$  nur eine Funktion der Leitfähigkeit  $\sigma$ . Der Einfluss des effektiven Aussenwiderstandes  $\tilde{r}_a$  auf den Wechselwirkungsprozess kann dann durch eine parametrische Studie grössenordnungsmässig untersucht werden.

Liegen dagegen experimentelle Stromwerte vor, so können daraus Näherungsfunktionen für den Stromdichteverlauf  $j(x, t)$  ermittelt werden. Diese Funktionen sind mit den gemessenen Stromwerten durch folgende Beziehung verknüpft:

$$\int_{t=0}^{t_k} I_{tot, gem}(t) dt = \int_{t=0}^{t_k} \int_{x=0}^L j(x, t) b dx dt \quad (29)$$

- ( $I_{\text{tot gem}}$  : gesamter gemessener Strom durch alle Elektrodenpaare  
 $t_K$  : Zeit, bei der die Kontaktfront zum kalten Treibergas die Wechselwirkungszone verlässt und damit den Strom endgültig abbricht  
 $L, b$  : Länge bzw. Breite der Wechselwirkungszone)

Aus dem auf diese Weise ermittelten Stromdichteverlauf kann über das Ohmsche Gesetz (28) der Lastfaktor  $k$  und damit auch eine Funktion für den Grenzschichtwiderstand  $r_g$  halbempirisch bestimmt werden. Vorteilhafter ist es jedoch in diesem Fall, den nach Gl. (26) ausgerechneten Stromdichteverlauf  $j(x,t)$  direkt in die Rechnungen einzusetzen (2. Ansatz). Dadurch lässt sich z.B. der Verlauf der Lorentz-Kraft ohne Kenntnis der elektrischen Leitfähigkeit und ihrer Abhängigkeit vom Relaxationsverhalten des Plasmas hinter dem primären Stoss sofort angeben. Die elektrische Leitfähigkeit geht dann nur noch in die Ohmsche Heizung ein, deren Einfluss jedoch im allgemeinen wesentlich geringer als der Einfluss der Lorentz-Kraft ist (vgl. Kap. 4.1).

### 3.4 Die Stosswellen

Entsprechend den gemachten Voraussetzungen sind einfallende und reflektierte Stosswelle ebene Diskontinuitäten, die in einer Plasmaströmung im vollständigen thermodynamischen Gleichgewicht laufen. Dissipationsprozesse über die Stossfronten werden durch die Stossbeziehungen automatisch berücksichtigt, dagegen werden Relaxationsvorgänge hinter den Stossfronten vernachlässigt. Dies entspricht der Annahme verschwindend kleiner Relaxationszeiten. Ferner werden Magnetfeldeinflüsse auf die Stosswellen-Vorgänge wegen der kleinen magnetischen Reynoldszahl vernachlässigt.

Über die Stossfronten gelten die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. Aus den allgemeinen Erhaltungssätzen (1) bis (3) ergeben sich im Laborsystem durch Nullsetzen der zeitabhängigen Terme <sup>+</sup>) und der Quellterme  $-j_B$ ,  $-j_{Bv}$  und  $j^2/\sigma$  sofort die Sprungbedingungen für die Stossfronten <sup>++)</sup>

---

<sup>+</sup>) und <sup>++)</sup> siehe Seite 24

$$\rho_1 (v_1 - u) = \rho_2 (v_2 - u) \quad (30)$$

$$\rho_1 + \rho_1 (v_1 - u)^2 = \rho_2 + \rho_2 (v_2 - u)^2 \quad (31)$$

$$h_1 + \frac{(v_1 - u)^2}{2} = h_2 + \frac{(v_2 - u)^2}{2} \quad (32)$$

mit  $u$  : Stossfrontgeschwindigkeit im Laborsystem  
 $h = e + p/\rho$  : spezifische Enthalpie  
Index "1" bzw. "2": Zustand vor bzw. hinter der Stossfront

Durch einfache algebraische Umrechnung kann dieses Gleichungssystem auf die Form

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (33)$$

$$(v_1 - v_2)^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (34)$$

---

+) Die Sprungbedingungen über die Stossfronten können auch bei instationären Strömungen als stationär behandelt werden, da die Zeitskala für die lokalen Änderungen der Stossfrontparameter wesentlich grösser als die Durchlaufzeit der Gasteilchen durch die Stossfront ist.

++) Für alle Geschwindigkeiten wird dieselbe positive Richtung vereinbart.

$$v_s^2 = (v_1 - u)^2 = \frac{p_2}{\rho_1} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{-1} \quad (35)$$

gebracht werden ( $v_s$  = Stossfrontgeschwindigkeit im Bezugssystem der Vorlandströmung).  $v_s$  hängt mit der Stossmachzahl  $M_s$  durch

$$M_s^2 \equiv \frac{v_s^2}{a_1^2} = \frac{v_s^2}{\gamma_{eq,1} \frac{p_1}{\rho_1}} \quad (36)$$

- mit  $\gamma_{eq,1}$  aus Gl. (16) - zusammen.

Die Rankine-Hugoniot-Beziehung (33) enthält nur thermodynamische Grössen. Da bei thermodynamischem Gleichgewicht die Enthalpie auch bei realen Gasen immer als Funktion von Druck und Dichte aufgefasst werden kann, liefert die Gl. (33) eine eindeutige Beziehung zwischen Druck und Dichte hinter der Stossfront. Unter Verwendung der kalorischen Zustandsgleichung (13) lautet diese Beziehung explizit

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1} - 2 \frac{\chi}{kT_1} \frac{d_2 - d_1}{1 + \alpha_1}} \quad (37)$$

Die Gln. (34), (35) und (37) stellen mit der Sahagleichung (11) und der thermischen Zustandsgleichung (12) eindeutige Beziehungen zwischen Vorland und Hinterland der Stossfronten her und erlauben eine vollständige Beschreibung der Stosswellenvorgänge, wenn ausserdem noch die Stossfrontgeschwindigkeit  $u$  bekannt ist. Beim einfallenden Stoss ist  $u$  vor dem Beginn der Wechselwirkung - meistens durch die Stossmachzahl  $M_s$  <sup>+) - vorgegeben. Dagegen sind im Verlauf des Wechselwirkungsprozesses die Stossfrontgeschwindigkeiten beider Stosswellen unbekannt, so dass der Zu-</sup>

---

+) Beim einfallenden Stoss ist  $u = v_s$

stand hinter dem jeweiligen Stoss erst unter Zuhilfenahme einer zusätzlichen Beziehung ermittelt werden kann. Diese Beziehung wird durch die Gleichung derjenigen Schallwellen (Charakteristikenbeziehung) geliefert, die (relativ zur Strömung) in dieselbe Richtung laufen wie der jeweilige Stoss. Diese Gleichung wird in Kap. 4.1 aus den Erhaltungssätzen (4), (5) und (6) abgeleitet.

### 3.5 Anfangs- und Randbedingungen

Durch die bisher eingeführten Beziehungen sind alle Zusammenhänge des Wechselwirkungsprozesses eindeutig festgelegt. Damit hängt der Ablauf des Prozesses nur noch von den Anfangs- und Randbedingungen ab.

Die Anfangsbedingungen für den Wechselwirkungsprozess werden durch die Vorlandparameter des primären Stosses vor Beginn der Wechselwirkung  $M_{s0}$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  gestellt. Damit sind auch alle Ausgangsparameter der Strömung hinter dem primären Stoss eindeutig festgelegt. Sie lassen sich mit Hilfe der Stossfrontbeziehungen (33), (34), (35) und (36) ermitteln.

Randbedingungen sind für die Stromdichte vorzugeben. Vor dem primären Stoss ist  $j = 0$ . Hinter dem primären Stoss ist  $j > 0$  innerhalb und  $j = 0$  ausserhalb der Wechselwirkungszone. Neben dem Magnetfeld  $B_0$  wird also auch die Länge der Wechselwirkungszone  $L$  benötigt. Schliesslich ist noch eine Randbedingung für den Übergang des Stromes vom Plasma in die Elektroden vorzugeben: beim 1. Ansatz wird diese Randbedingung durch einen konstanten Wert des effektiven Aussenwiderstandes  $\tilde{r}_a$ , beim 2. Ansatz dagegen durch Orts- und Zeitfunktionen entweder für den effektiven Aussenwiderstand  $\tilde{r}_a(x,t)$  oder für die Stromdichte  $j(x,t)$  gegeben (siehe Kap. 3.3).

### 3.6 Zusammenfassende Darstellung des mathematischen Problems und Normierung der Variablen

Alle benutzten Beziehungen sowie Anfangs- und Randwerte sind in Tab. 1 noch einmal zusammengefasst. Im oberen Feld sind die 10 benutzten Gleichungen und die dazugehörigen 10 unbekanntenen Funktionen  $p, \varrho, v, e, T, \alpha, \sigma, j, B, E$  von  $x$  und  $t$  wiedergegeben. Im unteren Feld der Tabelle sind die Anfangs- und Randwerte zusammengestellt.

Abschliessend sollen noch die wesentlichen Ähnlichkeitsparameter des Problems abgeleitet werden. Sie werden durch Normierung der Erhaltungssätze gewonnen und sind ein Mass für die Bedeutung der am Wechselwirkungsprozess beteiligten wesentlichen Vorgänge. Die Normierung erfolgt dadurch, dass die Variablen durch gewisse, für den Wechselwirkungsprozess charakteristische, Werte dividiert und dadurch dimensionslos gemacht werden:

$$X^* = \frac{x}{L} ; \quad t^* = \frac{t}{L} \cdot v_1 ;$$
$$p^* = \frac{p}{p_1} ; \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_1} ; \quad v^* = \frac{v}{v_1} ; \quad e^* = \frac{e}{p_1/\rho_1} ; \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_1} ; \quad (38)$$
$$B^* = \frac{B}{B_0} \equiv 1 ; \quad j^* = \frac{j}{j_0}$$

Der Index "1" kennzeichnet den Zustand hinter dem einfallenden Stoss vor Beginn der Wechselwirkung. Dieser Zustand ist deshalb "charakteristisch", weil der Wechselwirkungsprozess zu einer Störung dieses Zustandes führt. Die dimensionslosen Variablen sind ein direktes Mass für die Abweichung vom Zustand "1".

Als charakteristische Werte  $j_0$  für die Stromdichte  $j$  und  $k_1$  für den Lastfaktor  $k$  werden die Werte angenommen, die sich unter Verwendung des ersten Ansatzes gerade zu Beginn der Wechselwirkung hinter dem einfallenden Stoss einstellen, also

| <u>B E Z I E H U N G E N</u>                   |  |
|--|--|
| Erhaltungssätze <sup>+</sup> ) für             | $\left\{ \begin{array}{l} \text{Masse: } f_1(x, t, \rho, v) = 0 \\ \text{Impuls: } f_2(x, t, p, \rho, v, j, B) = 0 \\ \text{Energie: } f_3(x, t, p, \rho, v, e, j, B, \sigma) = 0 \end{array} \right.$ |
| Thermische Zustandsgleichung:                  | $T = T(p, \rho, \alpha)$   |
| Kalorische Zustandsgleichung:                  | $e = e(T, \alpha)$   |
| Sahagleichung:                                 | $\alpha = \alpha(p, T)$  |
| Elektrische Leitfähigkeit:                     | $\sigma = \sigma(T, \alpha, \rho)$   |
| Ohmsches Gesetz:                               | $j = j(\sigma, E, v, B)$   |
| Magnetfeld <sup>++)</sup> :                    | $B = B_0 = \text{const}$   |
| Lastfaktor:                                    | $k = E/(vB) = f(\sigma)$   |
| <u>A N F A N G S - U N D R A N D W E R T E</u> |  |
| Anfangswerte:                                  | $M_{s0}; p_0; T_0$   |
| Randwerte:                                     | $B_0; L$<br>$\tilde{r}_a = \text{const}$<br>bzw.<br>$\tilde{r}_a = \tilde{r}_a(x, t)$ oder $j = j(x, t)$   |

TABELLE 1

Zusammenstellung der im Modell benutzten Beziehungen und der vorzugebenden Anfangs- und Randwerte.

<sup>+</sup>) In  $p, \rho, v, e$  sind auch deren Ableitungen nach  $x$  bzw. nach  $t$  impliziert.

<sup>++)</sup>  $B_0$  ist das angelegte konstante Magnetfeld.



$$j_0 = (1 - k_1) \sigma_1 v_1 B_0 \quad \text{mit} \quad k_1 = \frac{\tilde{z}_a}{\tilde{z}_a + 1/\sigma_1} \quad (39)$$

Damit ergibt sich für  $j^*$  beim ersten Ansatz (vgl. Anhang 2)

$$j^* = \frac{j}{j_0} = \frac{(1 - k_1) \sigma v B}{(1 - k_1) \sigma_1 v_1 B_0} = \frac{\sigma^* v^* B^*}{1 + k_1 (\sigma^* - 1)} \quad (40)$$

und beim zweiten Ansatz

$$j^* = \frac{j}{j_0} = \frac{j(x_1, t)}{(1 - k_1) \sigma_1 v_1 B_0} \quad (41)$$

Durch die Normierung bekommen die Erhaltungssätze (4) bis (6) die Form

$$\frac{d\rho^*}{dt^*} + \rho^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = 0 \quad (42)$$

$$\rho^* \frac{dv^*}{dt^*} + \varrho \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = - N_m \cdot j^* B^* \quad (43)$$

$$\rho^* \frac{de^*}{dt^*} - \frac{p^*}{\rho^*} \frac{d\rho^*}{dt^*} = \frac{N_e}{\varrho} \cdot \frac{j^{*2}}{\sigma^*} \quad (44)$$

mit

$$\varrho = \frac{\gamma_1}{\rho_1 v_1^2} = \frac{1}{\gamma_{e,1} M_1^2} \quad (45)$$

$$N_m \equiv \frac{j_0 B_0 L}{\rho_1 v_1^2} = (1 - k_1) N \quad (46)$$

$$N_e \equiv \frac{j_0^2 / \sigma_1 L}{\rho_1 v_1^3} = (1 - k_1)^2 N \quad (47)$$

worin

$$N \equiv \frac{\sigma_1 B_0^2 L}{\rho_1 v_1} \quad (48)$$

ist.

$Q$ ,  $N_m$ ,  $N_e$  sind die gesuchten Ähnlichkeitsparameter des Problems.  $Q$  ist das reziproke Produkt aus den zwei Parametern  $M_1$  und  $\gamma_{eq,1}$ : Die Strömungsmachzahl  $M_1$  gibt an, in welchem Machzahlbereich die Wechselwirkung stattfindet,  $\gamma_{eq,1}$  ist ein Mass für den Einfluss der Ionisationsenergie auf die Strömungsvorgänge.  $N_m$  bzw.  $N_e$  sind die "Wechselwirkungsparameter" für Impuls bzw. Wärmeenergie und sind damit Masse für die Stärke der Abbremsung bzw. Aufheizung des Plasmas durch die Wechselwirkung. Die Gln. (46) und (47) lassen erkennen, dass  $N_m$  und  $N_e$  durch  $N$  und  $k_1$  ersetzbar sind. Sowohl  $N_m$  und  $N_e$  als auch  $N$  und  $k_1$  enthalten die Randwerte  $L$ ,  $B_0$  und  $\tilde{r}_a$  und können deshalb an ihrer Stelle vorgegeben werden.

Weitere dimensionslose Parameter könnten aus den anderen Gleichungen gewonnen werden; sie sind aber für diese Arbeit relativ unbedeutend und werden deshalb ausser Betracht gelassen.

#### 4. ANALYTISCHE BEHANDLUNG DES WECHSELWIRKUNGSPROZESSES

In diesem Abschnitt sollen grundlegende Vorgänge des Wechselwirkungsprozesses ohne Zuhilfenahme numerischer Rechnungen untersucht werden. Der Schwerpunkt dieses analytischen Teils soll auf den Entstehungsvorgang des reflektierten Stosses gelegt werden. Dabei werden die Strömungsvorgänge nach den Vorstellungen und Methoden der "akustischen Theorie" behandelt, die in einer erweiterten Fassung verwendet wird, welche auch nicht-lineare Effekte berücksichtigt.

##### 4.1 Die "charakteristische" Form der Strömungsgleichungen unter Berücksichtigung der Ionisation

Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen ist die Beschreibung der Strömungsvorgänge nach der akustischen Theorie ein Sonderfall der sog. Charakteristikentheorie, die sich zur Lösung von hyperbolischen Differentialgleichungen als besonders nützlich erwiesen hat. Die Erhaltungssätze (4) bis (6) bilden mit der kalorischen Zustandsgleichung (13) für die innere Energie  $e(p, \varrho)$  ein solches hyperbolisches Differentialgleichungssystem. Durch geeignete Linearkombinationen der 3 partiellen Dgln. (4) bis (6) können 3 gewöhnliche Differentialgleichungen gewonnen werden, in denen nur Ableitungen nach jeweils einer bestimmten "charakteristischen" Richtung (in der  $x$ - $t$ -Ebene) vorkommen. Die Integralkurven der jeweiligen Richtungsfelder werden Charakteristiken genannt. Die Herleitung der charakteristischen Beziehungen wird durch das Auftreten des Ionisationsterms in der kalorischen Zustandsgleichung (13) erschwert. Nach geeigneter Umformung des Energiesatzes (6) lässt sich jedoch die Herleitung in gleicher Weise wie bei idealen Gasen durchführen.

##### Umformung des Energiesatzes

Wie schon früher erwähnt (vgl. Kap. 3.2), ist es auch bei realen Gasen möglich, die innere Energie als Funktion von zwei Zustands-

variablen zu betrachten, wenn thermodynamisches Gleichgewicht vorliegt. Werden als Variable das Druck-Dichte-Verhältnis  $p/\rho$  und die Entropie  $s$  gewählt, so lautet das totale Differential der inneren Energie

$$de = \left[ \frac{\partial e}{\partial (p/\rho)} \right]_s d(p/\rho) + \left[ \frac{\partial e}{\partial s} \right]_{p/\rho} ds \quad (49)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die Entropiegleichung (7) ergibt sich

$$\left\{ 1 - \frac{1}{T} \left[ \frac{\partial e}{\partial s} \right]_{p/\rho} \right\} T ds = \left[ \frac{\partial e}{\partial (p/\rho)} \right]_s d(p/\rho) - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (50)$$

Mit Hilfe bekannter Beziehungen können die beiden partiellen Differentialquotienten in dieser Gleichung berechnet werden. Für den zweiten Quotienten lässt sich aus der Druck-Dichte-Beziehung für die Schallgeschwindigkeit (15) und der Entropiegleichung (7) sofort der Ausdruck

$$\left[ \frac{\partial e}{\partial (p/\rho)} \right]_s = \frac{1}{\gamma_{eq}^2 - 1} \quad (51)$$

herleiten (siehe Anhang 3), wobei  $\gamma_{eq}$  der variable Isentropenexponent für Gleichgewichtssionisation nach Gl. (16) ist. Gl. (51) erinnert an den entsprechenden Ausdruck für ideale Gase

$$\frac{de}{d(p/\rho)} = \frac{1}{\gamma^2 - 1} \quad (51a)$$

den man auch sofort aus der kalorischen Zustandsgleichung (13) für  $\alpha = 0$  erhalten kann. Der erste Differentialquotient in Gl. (50) ergibt sich, wie der Isentropenexponent  $\gamma_{eq}$ , mit Hilfe der Gln. (7), (11), (12) und (13) und lautet:

$$\left[ \frac{de}{ds} \right]_{p/p} = \frac{\chi}{m_a} \left[ \frac{d\alpha}{ds} \right]_{p/p} = T \cdot \frac{\alpha(1-\alpha) \frac{\chi}{kT}}{2 + \alpha(1-\alpha) \left( \frac{5}{2} + 2 \frac{\chi}{kT} \right)} \quad (52)$$

(siehe Anhang 4).

Nach Einsetzen der Ausdrücke (51) und (52) in Gl. (50) und mit der Abkürzung

$$\sigma \equiv 1 - \frac{1}{T} \left[ \frac{de}{ds} \right]_{p/p} = \frac{2 + \alpha(1-\alpha) \left( \frac{5}{2} + \frac{\chi}{kT} \right)}{2 + \alpha(1-\alpha) \left( \frac{5}{2} + 2 \frac{\chi}{kT} \right)} \quad (53)$$

lässt sich der Energiesatz im Bezugssystem der Strömung, Gl. (6), in der Form

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} = \sigma \cdot (\gamma_{eq} - 1) \frac{\rho^2}{\sigma} \quad (54)$$

schreiben. Dabei wurden die Ohmsche Heizung nach Gl. (8) und die Gleichgewichtsschallgeschwindigkeit nach Gl. (15) eingesetzt. Für  $\alpha = 0$  wird nach Gl. (53)  $\sigma = 1$  und die Gl. (54) spezialisiert sich zur entsprechenden Beziehung für ideale Gase:

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} = (\gamma - 1) \frac{\rho^2}{\sigma} \quad (54a)$$

#### Die "charakteristischen" Differentialgleichungen

Aus der Kontinuitätsgleichung (4), der Impulsgleichung (5) und der Energiegleichung in der neuen Fassung (54) lassen sich sofort die gesuchten "charakteristischen" Differentialgleichungen herleiten (vgl. z.B. /22/). Sie lauten:

$$dp + a \rho dv = \left[ \dot{d} \cdot (\gamma_{eq} - 1) \frac{j^2}{\sigma} - jBa \right] dt \quad \text{längs} \quad \frac{dx}{dt} = v + a \quad (55)$$

$$dp - a \rho dv = \left[ \dot{d} \cdot (\gamma_{eq} - 1) \frac{j^2}{\sigma} + jBa \right] dt \quad \text{längs} \quad \frac{dx}{dt} = v - a \quad (56)$$

$$dp - a^2 d\rho = \dot{d} \cdot (\gamma_{eq} - 1) \frac{j^2}{\sigma} dt \quad \text{längs} \quad \frac{dx}{dt} = v \quad (57)$$

Die Dgln. (55) und (56) gelten jeweils nur "entlang" der Bahnlinien der Schallwellen, die in bzw. gegen die Strömungsrichtung laufen. Sie können als Erhaltungssätze für den Strömungsimpuls im Bezugssystem einer "linkslaufenden" bzw. "rechtslaufenden" Schallwelle der "Länge"  $a \cdot dt$  aufgefasst werden, wobei die Summe aus dem magnetischen Druck  $\mp jBa \cdot dt$  und dem Heizdruck  $\dot{d} (\gamma_{eq} - 1) \cdot j^2 / \sigma \cdot dt$  als "äussere Kraft" verstanden werden kann. Die Dgl. (57) gilt nur "entlang" der Bahnlinien der Strömung und ist deshalb identisch mit dem Energiesatz (54) für ein vorgegebenes Strömungsteilchen.

Die Gl. (55) beschreibt die Strömungsvorgänge, die mit der Ausbreitung von Druckstörungen in Strömungsrichtung zusammenhängen. Da der primäre Stoss nur von rechtslaufenden Druckwellen erreicht und verändert werden kann, wird das zeitliche Verhalten des primären Stosses durch Kopplung der Dgl. (55) mit den Stossfrontbeziehungen beschrieben. Wie aus der rechten Seite der Dgl. (55) zu erkennen ist, sind magnetischer Druck und Heizdruck für rechtslaufende Druckwellen entgegengesetzt gerichtet, d.h. die beiden Druckwirkungen heben einander teilweise auf.

Die Gl. (56) ist dagegen massgebend für sämtliche Strömungsvorgänge, die mit der Ausbreitung von Druckstörungen entgegen der Strömungsrichtung zusammenhängen. Sie beschreibt also insbe-

sondere die Vorgänge, die an der Entstehung des reflektierten Stosses direkt beteiligt sind. Durch Kopplung der Dgl. (56) mit den Stossfrontbeziehungen wird die zeitliche Entwicklung des reflektierten Stosses berechnet. Die rechte Seite der Dgl. (56) zeigt, dass für linkslaufende Druckwellen magnetischer Druck und Heizdruck in gleicher Richtung wirken.

Schliesslich beschreibt die Dgl. (57) die Strömungsvorgänge, die mit der Ausbreitung von Entropiestörungen mit der Strömung zusammenhängen. Sie berücksichtigen also die Dissipationsvorgänge durch die Ohmsche Heizung und über die Stossfronten. Ausserhalb der Wechselwirkungszone gilt für jedes Gasteilchen  $ds/dt = 0$ , d.h., die Dgl. (57) geht in die Isentropenbeziehung (14) über.

Durch Abschätzung der beiden "Quellterme" in den Dgln. (55) und (56) kann nun sofort festgestellt werden, welche der beiden Druckwirkungen für die Entwicklung der Strömungsvorgänge massgebend ist. Mit dem Ansatz (28) für die Stromdichte ergibt sich für das Verhältnis A von Heizdruck zu magnetischem Druck der Ausdruck

$$A = \frac{\delta(\gamma_{eq} - 1) \delta^2 / \sigma}{\delta B a} = \delta(\gamma_{eq} - 1) (1 - k) M \quad (58)$$

Für die Anfangswerte  $M_{s0} = 10$ ,  $p_0 = 10$  Torr und  $T_0 = 297$  °K beträgt z.B. der maximale Wert dieses Verhältnisses  $A_{max} \approx 0.57$  (bei  $k = 0$ ;  $\delta = \delta_1$ ;  $\gamma_{eq} = \gamma_{eq,1}$ ;  $M = M_1$ ). Selbst im unrealistischen Grenzfall  $k = 0$  überwiegt also die Wirkung des magnetischen Drucks deutlich die des Heizdrucks, vorausgesetzt, dass keine Wärme von aussen der Strömung zugeführt wird.

Da bei der numerischen Behandlung des Problems alle Gleichungen in dimensionsloser Form benutzt wurden, seien auch hier die Gln. (55) bis (57) normiert wiedergegeben:

$$Q dp^* + a^* p^* dv^* = \left[ \delta (\gamma_{eq} - 1) \kappa_e \frac{j^{*2}}{\sigma^*} - \kappa_m j^* \beta^* a^* \right] dt^* \quad \text{längs} \quad \frac{dx^*}{dt^*} = v^* + a^* \quad (59)$$

$$Q dp^* - a^* p^* dv^* = \left[ \delta (\gamma_{eq} - 1) \kappa_e \frac{j^{*2}}{\sigma^*} + \kappa_m j^* \beta^* a^* \right] dt^* \quad \text{längs} \quad \frac{dx^*}{dt^*} = v^* - a^* \quad (60)$$

$$Q dp^* - a^{*2} dp^* = \delta (\gamma_{eq} - 1) \kappa_e \frac{j^{*2}}{\sigma^*} dt^* \quad \text{längs} \quad \frac{dx^*}{dt^*} = v^* \quad (61)$$

Darin bedeutet  $a^* = a/v_1$  und ist den normierten Variablen (38) hinzuzufügen.

### Charakteristikebene

Zur Veranschaulichung des Charakteristikenverlaufs ist in Abb.4 eine typische Charakteristikebene für mässige bis starke Wechselwirkung skizziert, in der auch die Bahnlinien der primären und der reflektierten Stossfront zu sehen sind. Alle eingezeichneten Charakteristiken gehören der "linkslaufenden" Schar an, die für die Entstehung des reflektierten Stosses massgebend ist. Die schattierte Fläche auf dem Bild kennzeichnet den Bereich der x-t-Ebene, in dem Strom fliesst. Der von der Wechselwirkung "gestörte" Bereich wird vom "ungestörten" Bereich durch die Grenzkurve ABCD getrennt. Entlang der Kurvenabschnitte ABC bzw. CD sind die Strömungsparameter jeweils konstant, die entsprechenden Charakteristiken müssen also jeweils parallel und gerade verlaufen. (Die Lage der Abschnitte AB und CD entlang der beiden Stossfronten kann erst im Laufe der Rechnung bestimmt werden.)

Im gestörten Bereich der x-t-Ebene, wo sich also der Einfluss der Wechselwirkung bemerkbar macht, sind dagegen die Charakteristiken gekrümmt. In diesem Bereich ist das Auftreten von se-



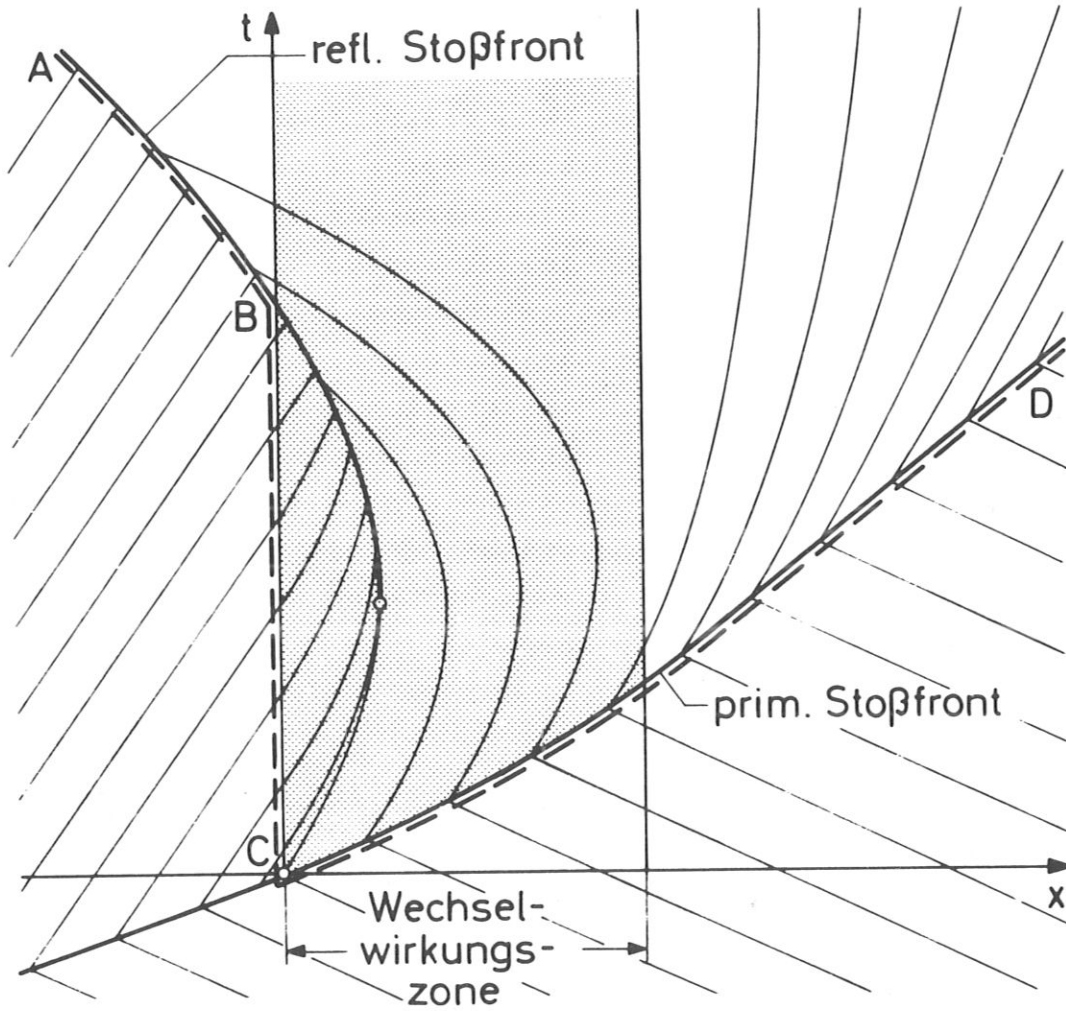


Abb. 4

Skizze einer typischen Charakteristikebene mit den Bahnlinien der primären und der reflektierten Stoßfront und mit der Begrenzungskurve des "gestörten" Strömungsbereichs.

kundären Stosswellen möglich. Entstehungsort und -zeit einer solchen Stosswelle sind mit dem Schnittpunkt zweier Charakteristiken derselben Schar identisch (siehe Abb.4).

Schliesslich lassen sich aus der Neigung der Charakteristiken in der  $x$ - $t$ -Ebene Überschall- und Unterschallbereiche sofort erkennen, da ja linkslaufende Charakteristiken in einer Überschallströmung mit positiver ( $dx/dt > 0$ ), in einer Unterschallströmung mit negativer ( $dx/dt < 0$ ) Laborgeschwindigkeit laufen.

#### 4.2 Zum Entstehungsprozess des reflektierten Stosses

Der detaillierte Ablauf der Wechselwirkungsvorgänge kann auf analytischem Wege nicht ermittelt werden, da die Erhaltungssätze (4), (5) und (6) bzw. die charakteristischen Dgln. (55), (56) und (57) nur numerisch gelöst werden können. Das Gleiche gilt auch für die Stossfrontbeziehungen (34), (35) und (37) wegen des Auftretens von Ionisationstermen. Die numerische Behandlung des Problems ist aber hinsichtlich der Programmaufstellung und wegen der notwendigen Rechenzeit ausserordentlich aufwendig. Deshalb sollen in diesem Abschnitt einige grundsätzliche Fragen des Reflexionsprozesses analytisch behandelt werden. Der Schwerpunkt der Diskussion soll auf den Entstehungsvorgang des reflektierten Stosses gelegt werden.

#### Prinzipielles Strömungsverhalten zu Beginn des Wechselwirkungsprozesses

Ein erstes Bild von der zu erwartenden Entwicklung der Vorgänge kann durch Ermittlung der Strömungsparameter kurz nach Beginn des Wechselwirkungsprozesses, also unmittelbar nach der Ankunft der primären Stossfront in der Wechselwirkungszone, gewonnen werden. Dann ist die Strömung noch wenig gestört, so dass die Strömungsgleichungen linearisiert und analytisch gelöst werden können. Der Lösungsweg soll anhand der oberen Skizze in Abb.5 veranschaulicht werden, die die x-t-Ebene darstellt. Die Strecke AF in der Skizze gehört zur Bahnlinie der primären Stossfront. Gesucht seien beispielsweise Druck- und Geschwindigkeitswerte in den Punkten D, E und F als Funktionen der Zeit  $t_1$ .

Der Strömungszustand im Punkt D ergibt sich aus den Anfangsdaten hinter der primären Stossfront und ist also bekannt. Der Zustand im Punkt E kann folgendermassen ermittelt werden:

Entlang der rechtslaufenden Charakteristik CE bzw. der linkslaufenden Charakteristik AE gelten die Dgln. (55) bzw. (56). Werden darin die Differentiale durch Differenzen ersetzt und

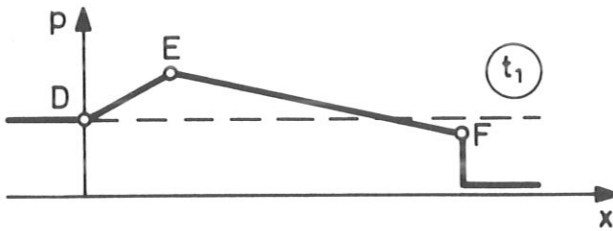
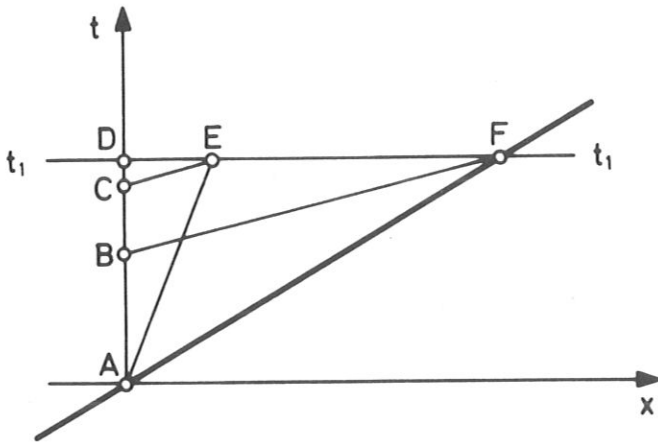
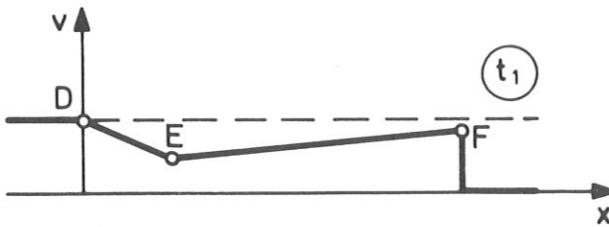


Abb. 5

x-t-Ebene und prinzipielle Druck- und Geschwindigkeitsprofile zu Beginn des Wechselwirkungsprozesses



alle Koeffizienten konstant gehalten, was bei einer linearen Betrachtung zulässig ist, so gehen die genannten Differentialgleichungen in zwei lineare Gleichungen für die jeweils unbekannt Funktionen  $\Delta p(\Delta t)$  und  $\Delta v(\Delta t)$  über. Wegen der Konstanz der Anfangsdaten entlang AD sind aber  $\Delta p$  und  $\Delta v$  entlang der beiden Strecken CE und AE jeweils gleich. Die Zeitdifferenzen  $\Delta t$  sind dagegen entlang CE und AE verschieden, lassen sich aber mit Hilfe der Richtungsbedingungen

$$\left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right]_{CE} = v_A + a_A \quad ; \quad \left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right]_{AE} = v_A - a_A \quad (62)$$

durch die gemeinsame Strecke  $\Delta x$  ausdrücken. Damit können die beiden Gleichungen nach den gemeinsamen Unbekannten  $p_E(x_E)$  und  $v_E(x_E)$  aufgelöst werden. Die Lösung lautet:

$$p_E = p_A + \left[ \frac{\gamma \beta v + \sigma (\gamma_{eq}^2 - 1) \gamma^2 M^2}{v (M^2 - 1)} \right]_A \cdot X_E \quad (63)$$

$$v_E = v_A - \left[ \frac{\gamma \beta v + \sigma (\gamma_{eq}^2 - 1) \gamma^2}{\gamma_{eq} p (M^2 - 1)} \right]_A \cdot X_E \quad (64)$$

mit  $p_A = p_C = p_D$  und  $v_A = v_C = v_D$ . Diese Ausdrücke lassen sofort erkennen, dass sowohl die Lorentz-Kraft als auch die Ohmsche Heizung prinzipiell eine Druckzunahme und eine Geschwindigkeitsabnahme des Plasmas entlang der Strecke DE zur Folge haben. Das entspricht dem Aufbau einer Kompressionswelle, deren Fuss sich am strömungsaufwärts liegenden Rand der Wechselwirkungszone befindet. Die Kompressionswelle ist umso steiler, je näher die Ausgangsströmungsmachzahl  $M_A$  an den Wert 1 herankommt.

Durch eine analoge Betrachtung kann der Strömungszustand im Punkt F auf der Stossfront ermittelt werden. Da der primäre Stoss nur durch rechtslaufende Schallwellen beeinflusst werden kann, ergeben sich die gesuchten Druck- und Geschwindigkeitswerte in F durch Kopplung der Dgl. (55) entlang der rechtslaufenden Charakteristik BF mit einer geeigneten Differentialgleichung entlang der primären Stossfront AF. Letztere kann aus den Rankine-Hugoniot-Beziehungen gewonnen werden und muss offenbar die Bedingung

$$\left[ \frac{dp}{dv} \right]_{AF} > 0 \quad (65)$$

erfüllen, da einer positiven bzw. negativen Änderung des Drucks über die Stossfront eine positive bzw. negative Änderung der Strömungsgeschwindigkeit entspricht. Wird die Relation (65) in der Form

$$[dp]_{AF} = k \cdot [dv]_{AF} \quad \text{mit } k > 0 \quad (66)$$

geschrieben und in Gl. (55) eingesetzt, so ergeben sich für  $p_F$  ( $x_F$ ) und  $v_F$  ( $x_F$ ) unter Berücksichtigung der Linearisierung die Ausdrücke

$$p_F = p_A - k \left[ \frac{jBa - d(\gamma_{eq} - 1) \gamma^2/c}{(v+a)(k + a\rho)} \right]_A \cdot x_F \quad (67)$$

$$v_F = v_A - \left[ \frac{jBa - d(\gamma_{eq} - 1) \gamma^2/c}{(v+a)(k + a\rho)} \right]_A \cdot x_F \quad (68)$$

mit  $p_A = p_B = p_D$  und  $v_A = v_B = v_D$ . Hier wirken also Lorentz-Kraft und Ohmsche Heizung in entgegengesetzter Richtung. Da aber der Einfluss der ersten den Einfluss der zweiten in jedem Fall überwiegt (siehe Abschätzung in Kap. 4.1, Gl. (58)), wird der primäre Stoss durch die Wechselwirkung prinzipiell abgeschwächt.

Das resultierende Strömungsbild zum Zeitpunkt  $t_1$  ist damit charakterisiert durch ein Kompressionsgebiet zwischen dem Rand der Wechselwirkungszone und der linkslaufenden Charakteristik durch den Nullpunkt und ein anschliessendes Expansionsgebiet bis zur primären Stossfront. Die unteren Skizzen in Abb. 5 illustrieren die so ermittelten Profile von Druck und Geschwindigkeit.

Entstehungsvorgang des reflektierten Stosses bei konstant gehaltenem effektiven Aussenwiderstand (1. Ansatz in Kapitel 3.3)

Die folgenden Ausführungen gehen von der Annahme aus, dass der effektive Aussenwiderstand  $\tilde{r}_a$  räumlich und zeitlich konstant sei (1. Ansatz in Kap. 3.3). Durch diese Vereinfachung werden übersichtliche Bedingungen geschaffen, die es erlauben, mit einfachen mathematischen Mitteln wesentliche Zusammenhänge bei der Entstehung des reflektierten Stosses sichtbar zu machen. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse können auch zum Verständnis der Vorgänge bei den erheblich komplizierteren experimentellen Bedingungen genützt werden.

Unter den Voraussetzungen des 1. Ansatzes kann gezeigt werden, dass a) der Entstehungsprozess des reflektierten Stosses wie ein stationärer Vorgang behandelt werden kann,

- b) Entstehungsort und -zeit des reflektierten Stosses umgekehrt proportional dem Quadrat des angelegten Magnetfeldes sind.

Zu a): Die Erläuterungen werden anhand der in Abb. 6 schematisch dargestellten x-t-Ebene gegeben. Der schraffierte Bereich  $\alpha$ , der von der t-Achse, der linkslaufenden Charakteristik OK und der rechtslaufenden Charakteristik AK begrenzt wird, befindet sich in einer so engen Umgebung des Nullpunktes, dass die Strömung in  $\alpha$  stosswellenfrei ist. Dann kann sofort gezeigt werden, dass der Strömungszustand innerhalb  $\alpha$  nur eine Funktion des Ortes x, nicht der Zeit t ist. Der Zustand in jedem Punkt  $P_1$  innerhalb  $\alpha$  hängt nämlich nur ab von den Anfangsdaten auf der Strecke BC der t-Achse, die von der rechtslaufenden und der linkslaufenden Charakteristik durch  $P_1$  geschnitten wird, und vom lokalen Verlauf der Lorentz-Kraft und der Ohmschen Heizung innerhalb des Dreiecks  $BCP_1$ . Diese sind aber wegen der Konstanz des Lastfaktors nur Funktionen des lokalen Strömungszustandes, hängen also ebenfalls nur von den Anfangsdaten auf BC ab. Da nun diese Anfangsdaten auf der gesamten Strecke OA der

$t$ -Achse konstant sind, muss auch der Zustand längs jeder zur  $t$ -Achse parallelen Geraden innerhalb  $\alpha$  konstant sein. Damit ist die Stationarität der Strömung im Bereich  $\alpha$  bewiesen.

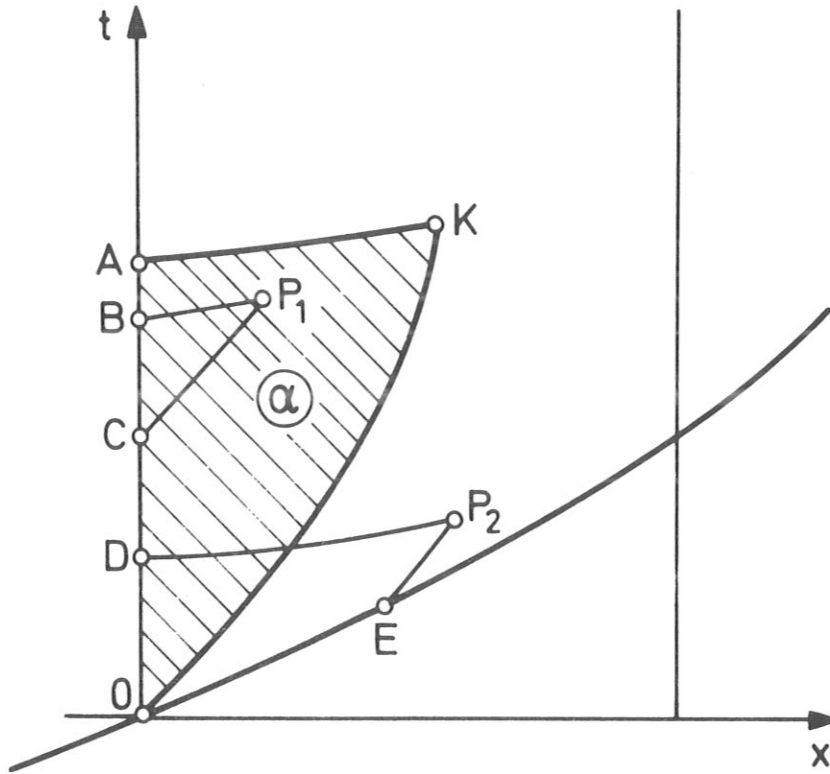


Abb. 6

Erläuterungsskizze zur Stationarität der Strömung im Kompressionsbereich vor der Entstehung des reflektierten Stosses.

Im Gebiet zwischen der Charakteristik  $OK$  und der primären Stossfront ist dagegen die Strömung nicht stationär. Jeder Punkt  $P_2$  aus diesem Gebiet hat nämlich eine "Anfangskurve", die teilweise auf der Bahnlinie des primären Stosses liegt. Durch Verschiebung von  $P_2$  entlang einer zur  $t$ -Achse parallelen Geraden ändert sich deshalb die Form der Anfangskurve  $DOE$  und damit auch das Strömungsbild innerhalb des Vierecks  $DOEP_2$ . Infolgedessen kann hier der Strömungszustand in  $t$ -Richtung nicht konstant sein, d.h. die Strömung ist instationär.

Wegen der Stationarität des Bereiches  $\alpha$  können dort die Strömungsvorgänge mit gewöhnlichen Differentialgleichungen berechnet werden. Aus den Erhaltungssätzen (4), (5) und (54) lassen sich durch Nullsetzen der Zeitableitungen und bei Verwendung des Ansatzes (28) für die Stromdichte folgende Ausdrücke für die Gradienten von Druck, Dichte und Strömungsgeschwindigkeit im Bereich  $\alpha$  herleiten:

$$\frac{dp}{dx} = (1-k) \sigma v \beta_0^2 \cdot \frac{1 + \sigma(\gamma_{eq}-1)(1-k)M^2}{M^2-1} \quad (69)$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{a^2} (1-k) \sigma v \beta_0^2 \cdot \frac{1 + \sigma(\gamma_{eq}-1)(1-k)}{M^2-1} \quad (70)$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{\rho a^2} (1-k) \sigma v \beta_0^2 \cdot \frac{1 + \sigma(\gamma_{eq}-1)(1-k)}{M^2-1} \quad (71)$$

Entlang der Randkurve OK in Abb.6 gilt die Richtungsbedingung für linkslaufende Charakteristiken

$$\frac{dx}{dt} = v-a = v \left(1 - \frac{1}{M}\right) \quad (72)$$

Durch numerische Integration des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (69), (70), (71) und (72) lassen sich sowohl der Strömungszustand in  $\alpha$  als auch die Lage der Randkurve OK in der  $x$ - $t$ -Ebene bestimmen. Für eine qualitative Beschreibung der Vorgänge ist jedoch die Kenntnis der Lösung nicht notwendig, da aus den angegebenen Differentialgleichungen das prinzipielle Strömungsbild in  $\alpha$  bereits klar zu erkennen ist:



Die Gradienten der Strömungsparameter ändern ihr Vorzeichen nur beim Übergang von Überschall- auf Unterschallgeschwindigkeit. Für eine Ausgangsmachzahl  $M_1 > 1$ , wie sie in dieser Arbeit stets angenommen ist, nehmen Druck und Dichte in x-Richtung monoton zu, dagegen nimmt die Strömungsgeschwindigkeit monoton ab. Das entspricht einem stationären Kompressionsgebiet im Bereich  $\alpha$ . Wegen der Abbremsung einerseits, der Kompression und Aufheizung andererseits, muss auch die Strömungsmachzahl in x-Richtung monoton fallen. Auf der Randkurve OK haben also Druck und Dichte ein Maximum, dagegen Geschwindigkeit und Machzahl ein Minimum. Die Randkurve selbst muss gemäss Gl. (72) wegen der Abnahme von Strömungsgeschwindigkeit und Strömungsmachzahl mit zunehmendem x (bzw. zunehmendem t) steiler werden. Wenn die Machzahl auf OK schliesslich auf den Wert  $M = 1$  abgesunken ist, dann müssen auch die angegebenen Gradienten der Strömungsparameter auf OK jeweils die Werte  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  erreicht haben, d.h., die Charakteristik ist in eine (unendlich schwache) Stossfront übergegangen. Wegen Gl. (72) muss die Charakteristik im Entstehungspunkt des reflektierten Stosses eine vertikale Tangente haben. Dies folgt auch sofort aus der Stationarität der Strömung im Bereich  $\alpha$ : Wie die Strömungsparameter, so müssen nämlich auch alle linkslaufenden Charakteristiken innerhalb  $\alpha$  unabhängig von t sein, d.h., sie müssen durch Parallelverschiebung in t-Richtung ineinander übergehen. Daraus folgt durch eine einfache geometrische Betrachtung, dass, wenn sich die Charakteristik OK und ihre "nächstbenachbarte" innerhalb  $\alpha$  überhaupt schneiden, wenn also ein reflektierter Stoss entsteht, der Schnittpunkt der beiden Charakteristiken genau dort liegen muss, wo sie eine gemeinsame vertikale Tangente haben, d.h. bei  $M = 1$ .

Der Zustand  $M = 1$  kann jedoch nur dann eintreten, wenn die Wechselwirkungszone mindestens so lang ist, dass die Bahn der Randkurve OK vollständig innerhalb der

Wechselwirkungszone verlaufen kann. Andernfalls entsteht kein reflektierter Stoss, und die Strömung wird in der gesamten Wechselwirkungszone endgültig stationär, sobald die Randkurve OK die Wechselwirkungszone verlassen hat. Die Länge der Wechselwirkungszone hat keinen Einfluss auf den Verlauf des Entstehungsvorgangs des reflektierten Stosses, sondern nur darauf, ob ein reflektierter Stoss überhaupt entsteht oder nicht.

Alle in Verbindung mit der Stationarität der Strömung im Bereich  $\alpha$  gewonnenen Ergebnisse setzen natürlich voraus, dass sich die Charakteristik OK ungestört ausbilden kann, d.h. nicht durch einen ausserhalb  $\alpha$  laufenden reflektierten Stoss unterbrochen wird. Ein solcher Stoss ist aber nicht zu erwarten, da die Strömung nach dem Überschreiten der Charakteristik OK expandiert (vgl. hierzu die lineare Betrachtung am Anfang dieses Kapitels).

Zu b): Der Beweis erfolgt hier durch eine Ähnlichkeitsbetrachtung am Differentialgleichungssystem (69), (70), (71) und (72). Wird in den Dgln. (69), (70) und (71) das Magnetfeld  $B_0$  durch eine beliebig wählbare Zahl  $C \neq 0$  dividiert, so ändert sich die Lösung des Differentialgleichungssystems nicht, wenn gleichzeitig die Orts- und Zeitvariablen  $x$  und  $t$  (und die dazugehörigen Randwerte) mit  $C^2$  multipliziert werden, d.h. wenn die  $x$ - $t$ -Ebene um den Faktor  $C^2$  linear gestreckt wird. Durch diese Transformation wird offenbar ein neuer Wechselwirkungsprozess definiert, der dem ursprünglichen Prozess "geometrisch" ähnlich bezüglich der  $x$ - $t$ -Ebene ist: an zwei sich entsprechenden Stellen  $x_1, t_1$  bzw.  $x_2, t_2$  der beiden  $x$ - $t$ -Ebenen sind die Strömungszustände gleich. Die Werte  $x_1, t_1$  bzw.  $x_2, t_2$  sind mit dem Magnetfeld  $B_0$  durch die Beziehungen

$$\begin{cases} x_1 \cdot B_{01}^2 = x_2 \cdot B_{02}^2 \\ t_1 \cdot B_{01}^2 = t_2 \cdot B_{02}^2 \end{cases} \quad (73)$$

verknüpft.

Da ausser vom angelegten Magnetfeld  $B_0$  und von der Länge der Wechselwirkungszone  $L$  der Wechselwirkungsprozess nur von den gasdynamischen Anfangsdaten  $M_{s_0}$ ,  $p_0$  (bei konstantem  $T_0$ ) und vom Lastfaktor  $k_1$  abhängt (vgl. Kap. 3.6), lassen sich durch Verallgemeinerung der Ausdrücke (73) folgende Ähnlichkeitsgesetze formulieren:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \cdot B_0^2 = f(M_{s_0}, p_0, k_1) \end{array} \right. \quad (74)$$

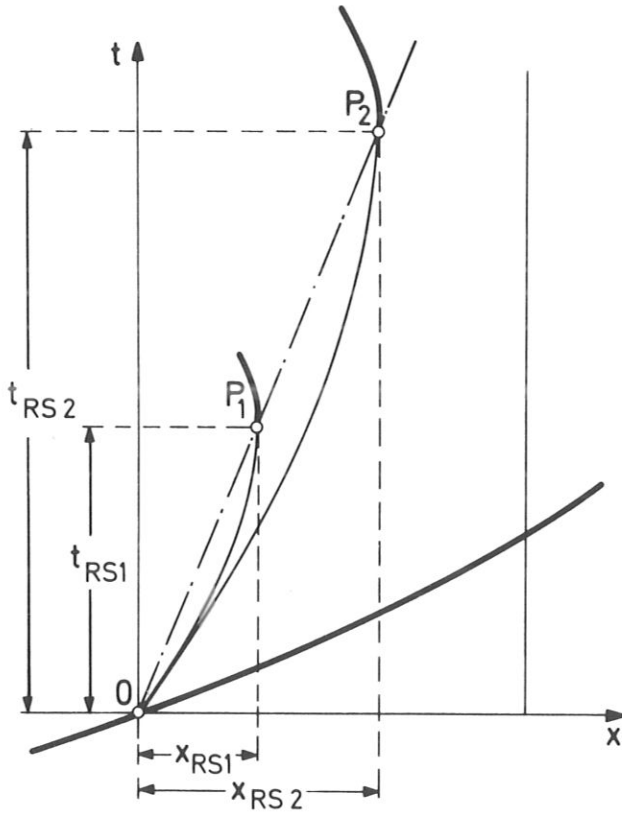
$$\left\{ \begin{array}{l} t \cdot B_0^2 = g(M_{s_0}, p_0, k_1) \end{array} \right. \quad (75)$$

und damit

$$\frac{x}{t} = h(M_{s_0}, p_0, k_1) \quad (76)$$

Aus diesen Beziehungen geht hervor, dass sich der Ort eines beliebigen Strömungszustandes in der  $x$ - $t$ -Ebene bei Änderung des angelegten Magnetfeldes entlang einer Geraden durch den Nullpunkt verschiebt. Bei dieser Verschiebung verhalten sich  $x$  und  $t$  umgekehrt proportional dem Quadrat des Magnetfeldes. Die Neigung der Geraden, die einem bestimmten Strömungszustand entspricht, ist eine Funktion von  $M_{s_0}$ ,  $p_0$  und  $k_1$ .

Die Aussagen gelten natürlich auch für den Entstehungsort  $x_{RS}$  und die Entstehungszeit  $t_{RS}$  des reflektierten Stosses (siehe Abb. 7). Sind die Werte  $x_{RS}$  und  $t_{RS}$  für ein bestimmtes Magnetfeld bekannt, so lassen sich also die entsprechenden Werte für beliebige Stärken des Magnetfeldes ohne neue Rechnungen sofort angeben.



$$x_{RS1} \cdot B_1^2 = x_{RS2} \cdot B_2^2 = x_{RS} \cdot B^2$$
$$= f(M_{S0}, p_0, k_1)$$

$$t_{RS1} \cdot B_1^2 = t_{RS2} \cdot B_2^2 = t_{RS} \cdot B^2$$
$$= g(M_{S0}, p_0, k_1)$$

Abb. 7

Erläuterungsskizze zur "geometrischen Ähnlichkeit" von Entstehungsort und -zeit des reflektierten Stosses bei Änderung der Magnetfeldstärke.

## 5. BEHANDLUNG VON TEILPROBLEMEN DES WECHSELWIRKUNGSPROZESSES MIT EINFACHEN NUMERISCHEN METHODEN

Während im letzten Kapitel einige Fragen des Reflexionsprozesses untersucht wurden, die der analytischen Behandlung zugänglich waren, soll in diesem Kapitel über Teilergebnisse berichtet werden, die mit Hilfe einfacher numerischer Rechnungen gewonnen wurden.

Beispielsweise lassen sich ohne Berechnung des Wechselwirkungsprozesses Grenzwerte für die Strömungsparameter ermitteln, die bei noch so starker Wechselwirkung nicht überschritten werden können. Diese Grenzwerte ergeben sich nämlich als Stossfrontparameter hinter dem reflektierten Stoss für den Grenzfall der "totalen Reflexion", bei dem also die Strömungsgeschwindigkeit hinter dem Stoss Null ist.

Wie die Ergebnisse des vorhergehenden Kapitels zeigen, sind auch Ort und Zeit der Entstehung des reflektierten Stosses durch relativ einfache Rechnungen zu ermitteln, wenn der effektive Aussenwiderstand  $\tilde{r}_a$  konstant gesetzt wird. Dann ergeben sich nämlich diese beiden Koordinaten durch Integration eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

### 5.1 Grenzwerte der Strömungsparameter

Alle Stossfrontparameter hinter dem reflektierten Stoss sind für den Grenzfall der "totalen Reflexion" nur Funktionen der Vorlandparameter der primären Stosswelle vor Beginn der Wechselwirkung ( $M_{s0}$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ ). Sie ergeben sich als Lösungen der Rankine-Hugoniot-Sprungbeziehungen (34), (35) und (37) über den primären und den reflektierten Stoss.

Von den auf diese Weise berechneten Parametern werden in Abb. 8a und 8b als Beispiele die Grenztemperatur hinter dem reflektierten Stoss sowie die Grenzmachzahl des reflektierten Stosses ge-

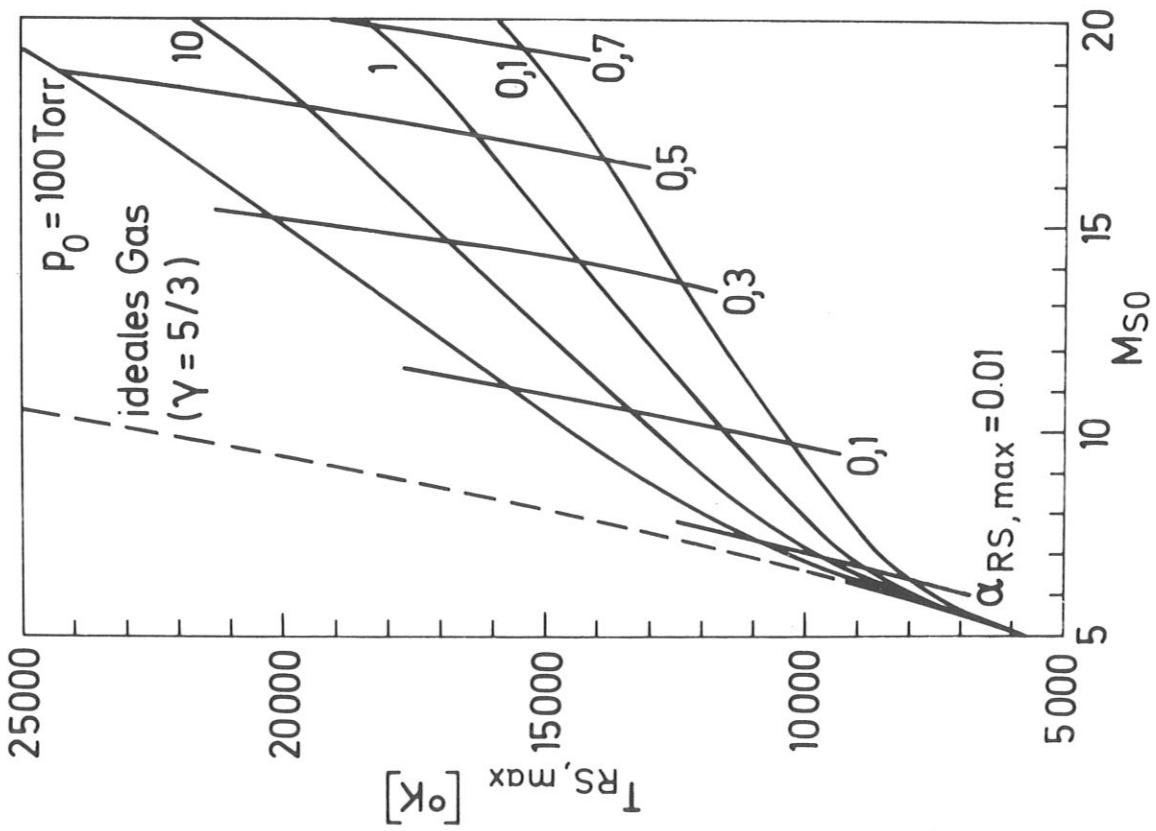
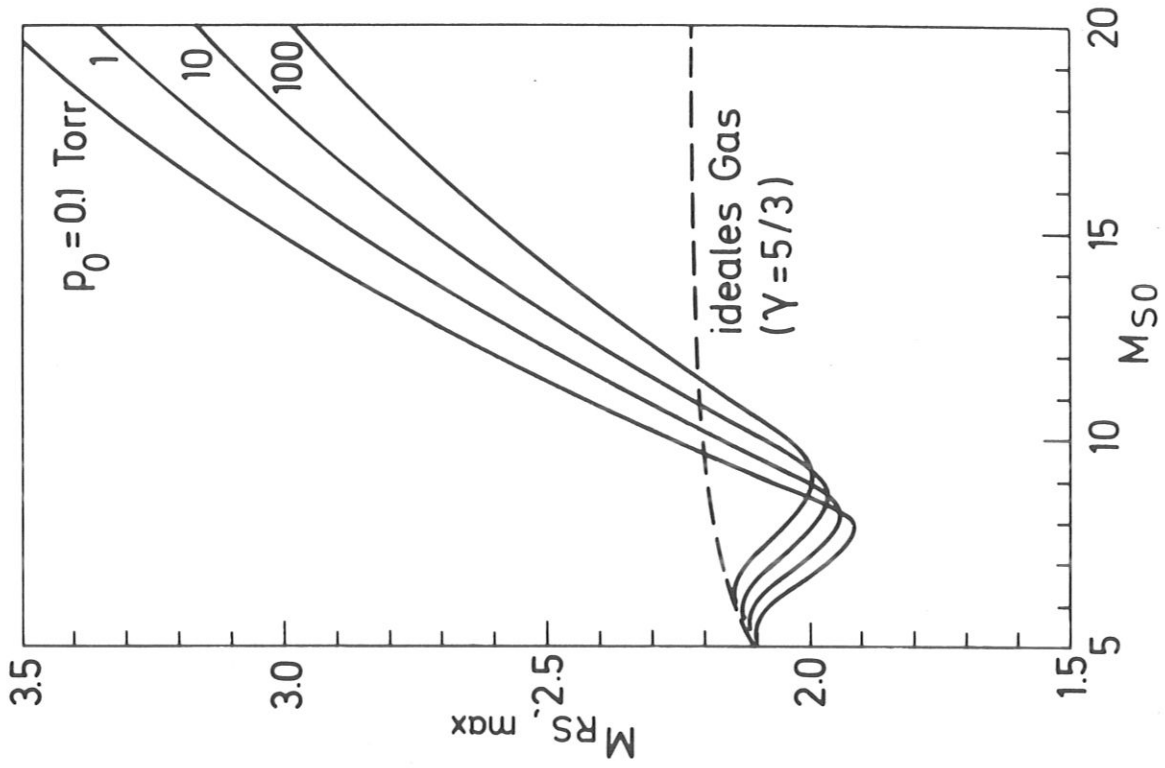


Abb. 8a und 8b

Abhängigkeit der Temperatur hinter dem reflektierten Stoss und der Machzahl des reflektierten Stosses von der Ausgangsmachzahl und dem Vorlanddruck des primären Stosses für den Grenzfall der "totalen Reflexion".

zeigt, beide als Funktionen von  $M_{SO}$  mit  $p_0$  als Scharparameter (für  $T_0 = \text{const}$ ). In beiden Diagrammen sind auch die Kurvenverläufe für ideales Gasverhalten eingetragen, dazu im ersten Diagramm noch einige Kurven konstanten Ionisationsgrades. Aus Abb. 8a geht deutlich hervor, dass die erreichbaren Temperaturen  $T_{RS, \max}$  sehr empfindlich durch die Ionisationsenergie beeinflusst werden. Schon bei einer Stossmachzahl von  $M_{SO} = 10$  (und  $p_0 = 10$  Torr) führt z.B. die Vernachlässigung der Ionisation auf einen Fehler von ca. 75 %. Im Gegensatz zu der Temperatur, steigt die Stossmachzahl  $M_{RS, \max}$  (Abb. 8b) nicht monoton mit wachsendem  $M_{SO}$  an, wenn die Ionisationsenergie berücksichtigt wird. Die entsprechenden Kurven durchlaufen ein Minimum, das unterhalb der gestrichelten Kurve für ideales Gas liegt, um dann steil (über die Werte für ideales Gas) anzusteigen. Wird  $M_{RS, \max}$  als Funktion der Strömungsmachzahl vor dem reflektierten Stoss und des Dichteverhältnisses über den reflektierten Stoss ausgedrückt:

$$M_{RS, \max} = \frac{M_1}{1 - \rho_1 / \rho_{RS}} \quad (77)$$

und beachtet man, dass die Berücksichtigung der Ionisationsenergie eine Erhöhung der Strömungsmachzahl  $M_1$  bei allen vorgegebenen  $M_{SO}$ -Werten zur Folge hat /23/, so muss das Verhalten von  $M_{RS, \max}$  folgendermassen gedeutet werden: Bei niedrigen  $M_{SO}$ -Werten wirkt sich der Einfluss der Ionisation stärker durch die erhöhte Verdichtung über dem reflektierten Stoss als durch die Zunahme der Strömungsmachzahl vor dem reflektierten Stoss aus; dagegen wird bei hohen  $M_{SO}$ -Werten wegen  $\rho_1 / \rho_{RS} \ll 1$  der Einfluss des Dichteverhältnisses vernachlässigbar gegenüber dem Einfluss der Strömungsmachzahl, so dass  $M_{RS, \max}$  praktisch eine lineare Funktion von  $M_1$  wird.

## 5.2 Entstehungsort und -zeit des reflektierten Stosses

---

Entstehungsort  $x_{RS}$  und Entstehungszeit  $t_{RS}$  ergeben sich durch numerische Integration der gewöhnlichen Dgln. (69), (70) und (71). In Abb. 9 sind die Ergebnisse entsprechender Rechnungen dargestellt. Sie wurden mit einem Lastfaktor  $k_1 = 0.5$  gewonnen. Die beiden Diagramme zeigen die Abhängigkeit der Produkte  $x_{RS} \cdot B_0^2$  und  $t_{RS} \cdot B_0^2$  von der Ausgangsstossmachzahl des primären Stosses  $M_{SO}$  mit  $p_0$  als Scharparameter. Aus diesen Produkten lassen sich dann für jeden Wert des angelegten Magnetfeldes die dazugehörigen Orts- und Zeitwerte sofort ermitteln. Sie können als erste Anhaltswerte für Wechselwirkungsprozesse betrachtet werden, bei denen der effektive Aussenwiderstand mit Ort und Zeit variiert.

Die dargestellten Ergebnisse überdecken praktisch den gesamten Stossmachzahl-Bereich, der mit konventionellen Membranstosshohröhren verwirklicht werden kann (vgl. z.B. /24/). Die untere Grenze  $M_{SO} = 2.76$  entspricht der Ausgangsströmungsmachzahl  $M_1 = 1$ , also Schallgeschwindigkeit hinter dem einfallenden Stoss vor Beginn der Wechselwirkung. Für  $M_1 < 1$  sind die Voraussetzungen für diese Rechnungen prinzipiell nicht mehr erfüllt, da die stosserzeugende Charakteristik ausserhalb der Wechselwirkungszone strömungsaufwärts läuft. Die gestrichelten Kurvenabschnitte im niedrigen Machzahlbereich entsprechen Ionisationsgraden unterhalb 0.1 %, bei denen die in den Rechnungen benutzte Annahme der Vollionisation für die elektrische Leitfähigkeit nicht mehr zutrifft. Aus beiden Diagrammen ist deutlich zu erkennen, dass Entstehungsort- und Entstehungszeit des reflektierten Stosses im gesamten  $M_{SO}$ -Bereich mit  $p_0$  zunehmen. Für Ionisationsgrade oberhalb 0.1 % nehmen  $x_{RS}$  und im wesentlichen auch  $t_{RS}$  monoton mit  $M_{SO}$  zu.

Da ein reflektierter Stoss nur in der Wechselwirkungszone entstehen kann, ist  $x_{RS}$  gleichbedeutend mit der erforderlichen Mindestlänge der Wechselwirkungszone, damit ein reflektierter Stoss bei einer gegebenen Kombination von  $M_{SO}$ ,  $p_0$  und  $B_0$  über-



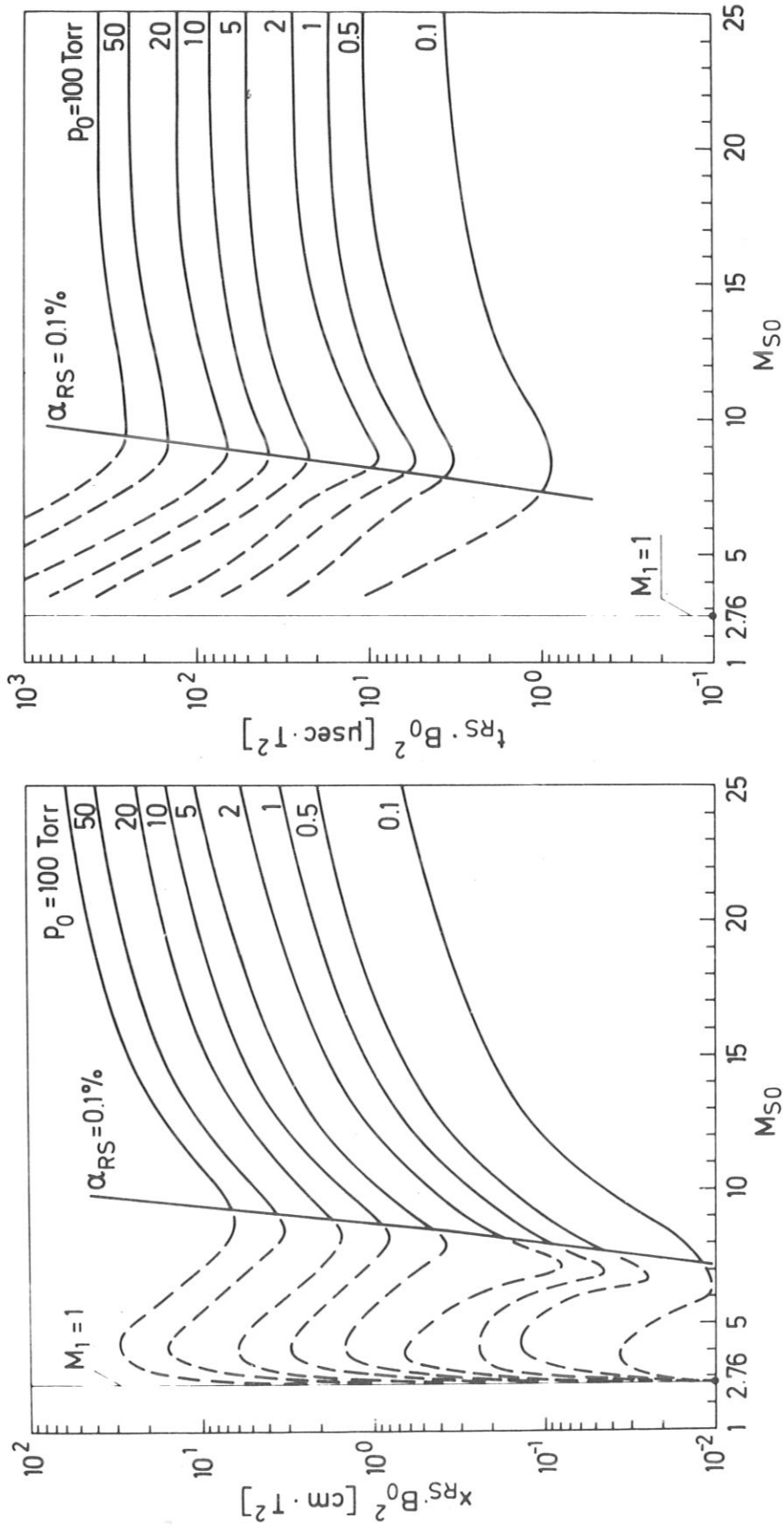


Abb. 9a und 9b  
Abhängigkeit von Entstehungsort und -zeit des reflektierten Stosses von der Ausgangsmachzahl und dem Vorlanddruck des primären Stosses und vom angelegten Magnetfeld

haupt entstehen kann. Ist die vorgegebene Länge  $L$  kleiner als  $x_{RS}$ , so entsteht kein Stoss. Beispielsweise ist ein reflektierter Stoss bei einem Ausgangsdruck von  $p_0 = 5$  Torr und einem Magnetfeld von 1 Tesla praktisch bei jedem  $M_{s0}$ -Wert zu erwarten, wenn die Länge der Wechselwirkungszone mindestens 10 cm beträgt.

6. NUMERISCHES LÖSUNGSVERFAHREN FÜR DEN GESAMTEN WECHSEL-  
WIRKUNGSPROZESS

Alle Ergebnisse, über die bisher berichtet wurde, konnten entweder analytisch oder durch relativ einfache numerische Rechnungen gewonnen werden. Dagegen erfordert die detaillierte Behandlung des gesamten Wechselwirkungsprozesses (einschliesslich der instationären Stosswellen) die numerische Lösung des vollständigen Anfangs- und Randwertproblems für das nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungssystem (4), (5) und (54) <sup>+</sup>) (vgl. z.B. /25/). Neben den in Tab. 1 angegebenen Anfangs- und Randwerten sind noch zusätzliche "innere" Randwerte entlang der Bahnlinien der instationären Stossfronten vorzugeben, die aber erst im Laufe der Rechnung ermittelt werden können.

Die Lösung des Problems wurde nach dem Charakteristikenverfahren durchgeführt. Zur Integration der charakteristischen Dgln. (55), (56) und (57) wurde ein Differenzenschema zweiter Ordnung verwendet /26/. Das Integrationsgitter wurde aus einer Schar von linkslaufenden Charakteristiken und einer Schar von Geraden  $t = \text{const}$  gebildet. (Die Wahl von  $t$  als Gitterparameter anstelle der üblicherweise benützten rechtslaufenden Charakteristiken hat den Vorteil, dass in jedem Rechenstadium die Lösung für die gesamte  $x$ -Achse bis zum letzten Zeitschnitt hin vorliegt.) Die beiden anderen Charakteristiken-Scharen, nämlich die rechtslaufenden Charakteristiken und die Bahnlinien der Strömungsteilchen wurden durch Interpolation ermittelt. In den Bereichen der  $x$ - $t$ -Ebene, in denen die Gittercharakteristiken weit auseinander liefen, wurden zusätzliche Charakteristiken in das Differenzenschema eingeführt. Damit war gewährleistet, dass die Gittermaschen an keiner Stelle der  $x$ - $t$ -Ebene eine vorgegebene Grösse überschreiten konnten.

---

<sup>+</sup>) Eine lineare Behandlung ist nur bei sehr schwacher Wechselwirkung möglich, da sie die Entstehung eines reflektierten Stosses prinzipiell nicht erfassen kann.

Wie schon im Kapitel 4.1 erwähnt (vgl. Abb. 4), werden Entstehungs-ort und -zeit eines reflektierten Stosses durch den Schnittpunkt von zwei linkslaufenden Charakteristiken bestimmt. Durch das Zusammenlaufen der Charakteristiken im Entstehungsbereich des Stosses blieb die Rechengenauigkeit trotz steiler Gradienten der Strömungsparameter auch in diesem Gebiet erhalten. Diese Integrationsmethode zeigte selbst für sehr starke Lorentz-Kraft und Ohmsche Heizung eine schnelle Konvergenz in der gesamten x-t-Ebene. Eine künstliche Viskosität, wie sie etwa aus der Lax-Wendroff-Methode bekannt ist /27/, konnte deshalb vermieden werden.

Das Programm ist so aufgebaut, dass die Rechnungen wahlweise mit und ohne Ionisationsenergie bzw. mit konstanten Ionisationsparametern durchgeführt werden können. Die Stromdichteverteilung kann nach dem 1. Ansatz berechnet oder nach dem 2. Ansatz vorgegeben werden. In beiden Fällen ist auch die Möglichkeit des Anlegens von Spannungen an die Elektroden vorgesehen. Ganz allgemein leistet das Programm die Berechnung von eindimensionalen Strömungsvorgängen hinter starken primären Stossfronten, die durch zeitlich und örtlich variable Kraftwirkung in bzw. gegen die Strömungsrichtung sowie Aufheizung hinter der primären Stossfront beeinflusst werden, und bei welchen auch ein reflektierter Stoss entstehen kann.

Zur ständigen Kontrolle der Ergebnisse wurden am Ende jedes Rechenzyklus im Programm integrale Erhaltungssätze benutzt.

Die erforderliche Rechenzeit schwankt sehr stark mit der Stärke der Wechselwirkung, und zwar steigt sie etwa mit dem Quadrat des angelegten Magnetfeldes. Die Berechnung eines "vollständigen Prozesses" (bis zu dem Zeitpunkt, zu dem die Strömung in der Wechselwirkungszone näherungsweise stationär geworden ist) kann auf einer IBM 360/91 zwischen einigen Sekunden und etwa einer Stunde dauern.

Details des Programmaufbaus, der benutzten Prozeduren und der Organisation des Rechenprozesses sind in der Beschreibung des benutzten Programms SABINE<sup>+</sup>) niedergelegt. Programm und Beschreibung sind im IPP verfügbar.

---

<sup>+</sup>) Shock Across B Instationary Numerical Experiment

## 7. ERGEBNISSE NUMERISCHER RECHNUNGEN

---

In diesem Kapitel sollen typische Ergebnisse der Wechselwirkung diskutiert und miteinander verglichen werden.

Die Rechnungen wurden auf der Rechenanlage IBM 360/91 des IPP durchgeführt. Sie lieferten für jede Kombination der Anfangsdaten  $M_{s0}$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  und der dimensionslosen Parameter  $N$  und  $k_1$  folgende Ergebnisse in numerischer und grafischer<sup>+)</sup> Darstellung:

- a) Weg-Zeit-Ebene mit dem Verlauf der linkslaufenden Charakteristiken und den Bahnlinien der einfallenden und (falls vorhanden) der reflektierten Stossfront;
- b) Profile von  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $\zeta$ ,  $v$ ,  $M$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $j$ ,  $k$  innerhalb und ausserhalb der Wechselwirkungszone in einer dichten Folge von Zeitschnitten während des Wechselwirkungsprozesses. Diese "Momentaufnahmen" wurden bei der grafischen Darstellung übereinander geplottet, sodass die Entwicklung der Strömungsvorgänge deutlich und lückenlos aus den Plots abgelesen werden kann.

Aus der Vielzahl der untersuchten Wechselwirkungen können hier nur einige demonstriert werden. Diese sind alle unter Benutzung des ersten Ansatzes für die Stromdichte berechnet. Nur so können die massgebenden Strömungsvorgänge deutlich und vergleichbar hervorgehoben werden. Vor allem aber können die zur Interpretation der numerischen Ergebnisse in Kapitel 4 durchgeführten Überlegungen direkt benützt werden.

Im ersten Abschnitt soll ein vollständiger Parametersatz für die Wechselwirkung mittlerer Stärke wiedergegeben werden, die den im IPP durchgeführten Experimenten nahekommt. Dann sollen verschiedene starke Wechselwirkungen miteinander verglichen und schliesslich der Einfluss der Ionisierungsvorgänge auf den Wechselwirkungsprozess untersucht werden.

---

<sup>+)</sup>  Der Einbau einer Plotroutine ermöglichte das maschinelle Zeichnen der Ergebnisse, ohne das die Rechenresultate nur schwer der Diskussion hätten zugänglich gemacht werden können.

### 7.1 Ein vollständiges Beispiel

Die geplotteten Ergebnisse einer vollständigen Rechnung zeigen die Abb. 10 bis 15. Als Ausgangsdaten wurden hier  $M_{s0} = 10$ ,  $p_0 = 10$  Torr,  $T_0 = 297$  K,  $N = 0.8$ ,  $k_1 = 0.5$  gewählt. Dem Wert dieses Wechselwirkungsparameters  $N$  entsprechen z.B. die Länge der Wechselwirkungszone  $L = 6.2$  cm und ein Magnetfeld  $B_0 = 10$  kG.

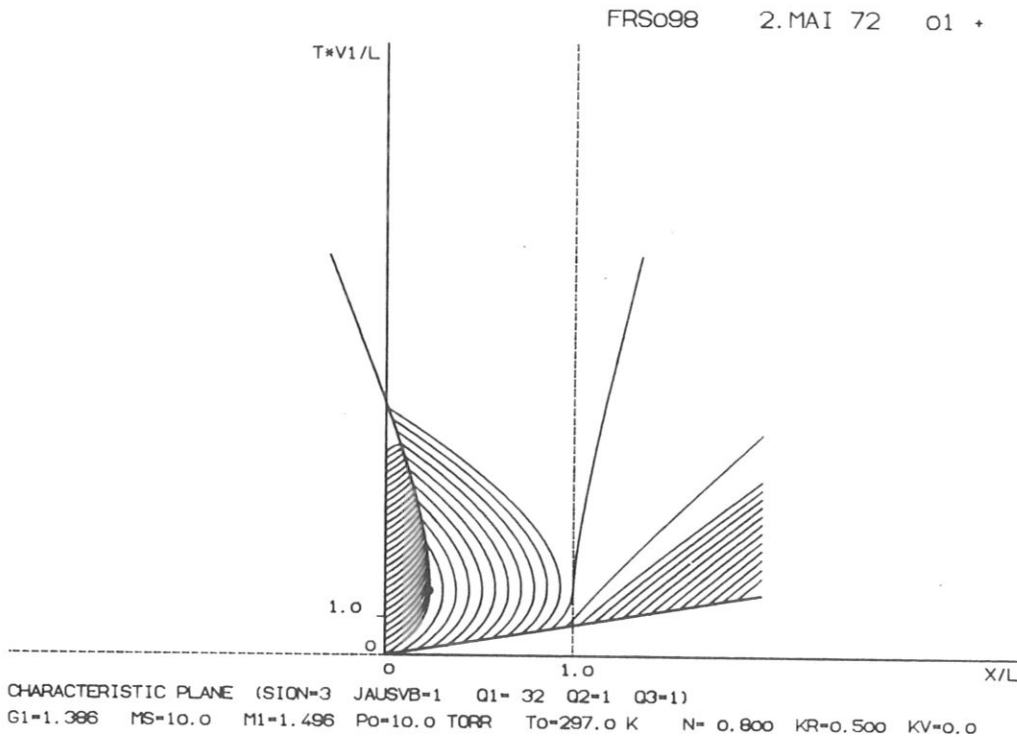


Abb. 10

Beispiel einer Charakteristiken-Ebene mit dem Verlauf der primären und der reflektierten Stossfront für mässige bis starke Wechselwirkung ( $N = 0.8$ ,  $k_1 = 0.5$ )

Abb.10 zeigt die  $x$ - $t$ -Ebene des Wechselwirkungsprozesses, auf der eine ausgewählte Schar linkslaufender Charakteristiken und die Bahnlinien des primären und des reflektierten Stosses zu sehen sind.  $x$ - und  $t$ -Achse sind gemäss der Definitionen (38) jeweils auf die Länge der Wechselwirkungszone  $L$  und auf die Zeit  $L/v_1$  normiert. Die Wechselwirkungszone ist durch die  $t$ -Achse und die Gerade  $x/L = 1$  begrenzt. Die zusätzlichen Charakteristiken, die im Bereich starker Expansion in die Rechnungen eingeführt wurden, sind in das Plotprogramm nicht einbezogen und deshalb auf dem

Bild nicht zu sehen. Auch die Charakteristiken im ruhenden Gas vor der primären Stossfront und die Charakteristiken in dem mit Überschall hinter der primären Stossfront herlaufenden Gas im Bereich  $x < 0$  sind nicht geplottet (vgl. hierzu Abb.4). Wie die nahezu "gerade" Bahnlinie der primären Stossfront erkennen lässt, läuft der primäre Stoss ohne merkliche Abbremsung durch die Wechselwirkungszone. Die Entstehung eines reflektierten Stosses aus der Überschneidung zweier benachbarter Charakteristiken ist auf dem Bild deutlich zu sehen. Im Augenblick seiner Entstehung ist der Stoss noch unendlich schwach, was an der gemeinsamen Tangente der stoss erzeugenden Charakteristik (derjenigen, die durch den Nullpunkt geht) und der Stossfront zu erkennen ist. Dann wird die sekundäre Stossfront aber durch Schallwellen vom Hinterland der Front her zunehmend verstärkt und verlässt schliesslich strömungsaufwärts die Wechselwirkungszone. Im weiteren Verlauf ändert sich ihre Geschwindigkeit praktisch nicht mehr. Der Sprung von Überschall- auf Unterschallgeschwindigkeit über den reflektierten Stoss ist an der positiven ( $dx/dt > 0$ ) bzw. negativen ( $dx/dt < 0$ ) Neigung der Charakteristiken an seinen beiden Seiten klar zu erkennen. Hinter der Wechselwirkungszone (bei  $x/L > 1$ ) expandiert das Gas wegen der fehlenden Abbremsung und Aufheizung wieder auf Überschallgeschwindigkeit.

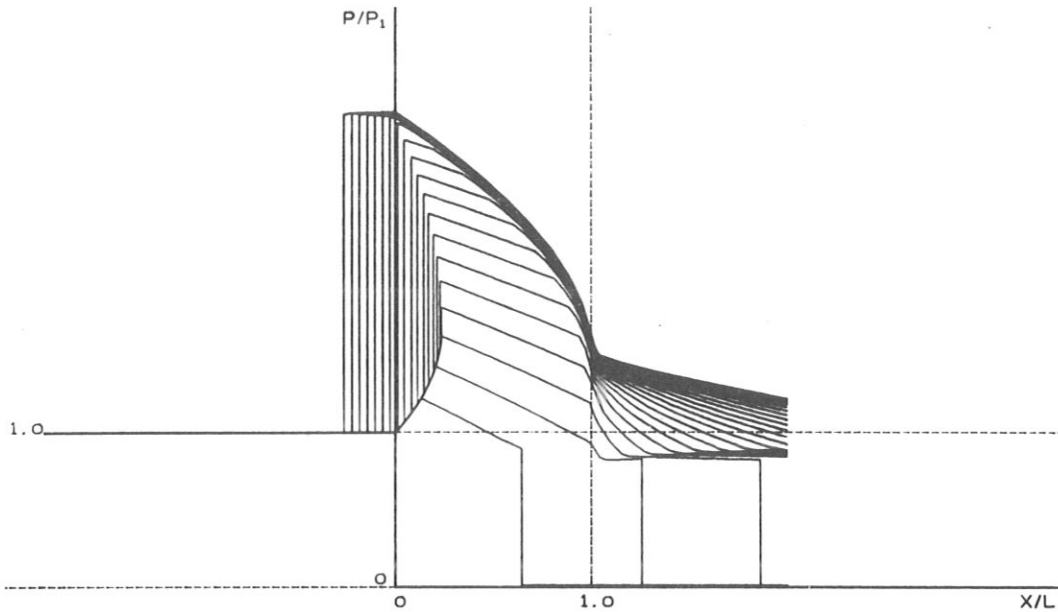
Die folgenden Plots dieser Serie zeigen die Profile aller wesentlicher Parameter für den hier beschriebenen Wechselwirkungsprozess. Alle dimensionsbehafteten Parameter (d.h.  $p, \rho, T, \tau, v, j$ ) sind auf ihre jeweiligen Ausgangswerte hinter dem primären Stoss normiert.

In Abb.11 sind oben der Druck- und unten der Dichteverlauf dargestellt.

Verfolgt man in der Darstellung des Druckverlaufs das erste, mit Punkten markierte, Profil (zur Zeit  $t \cdot v_1/L = 0.5$ ) von links nach rechts, so sind folgende Strömungsbereiche zu erkennen: Vor der Wechselwirkungszone (links von der p-Achse) ist die Strömung ungestört, d.h. der Druck ist konstant und gleich seinem Ausgangswert hinter dem primären Stoss. Erst in der Wechselwir-

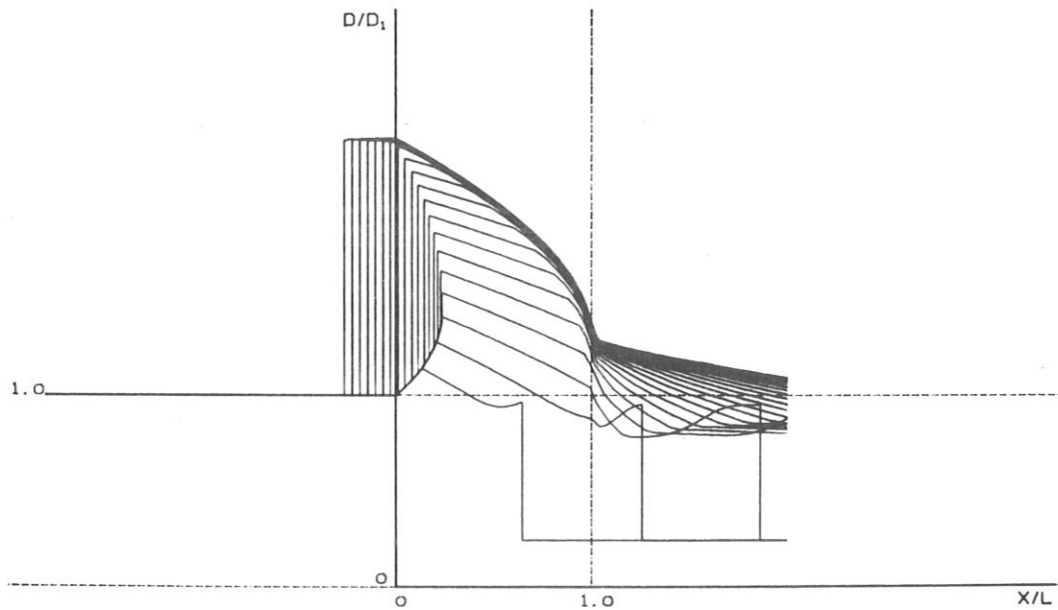


FRSo98 2.MAI 72 o2 +



PRESSURE DISTR. T\*V1/L= 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SIGN=3 JALSVB=1 01=32 02=1 03=1) 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00 8.50 9.00 9.50 10.00  
 G1=1.366 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.800 KR=0.500 KV=0.0

FRSo98 2.MAI 72 o3 +



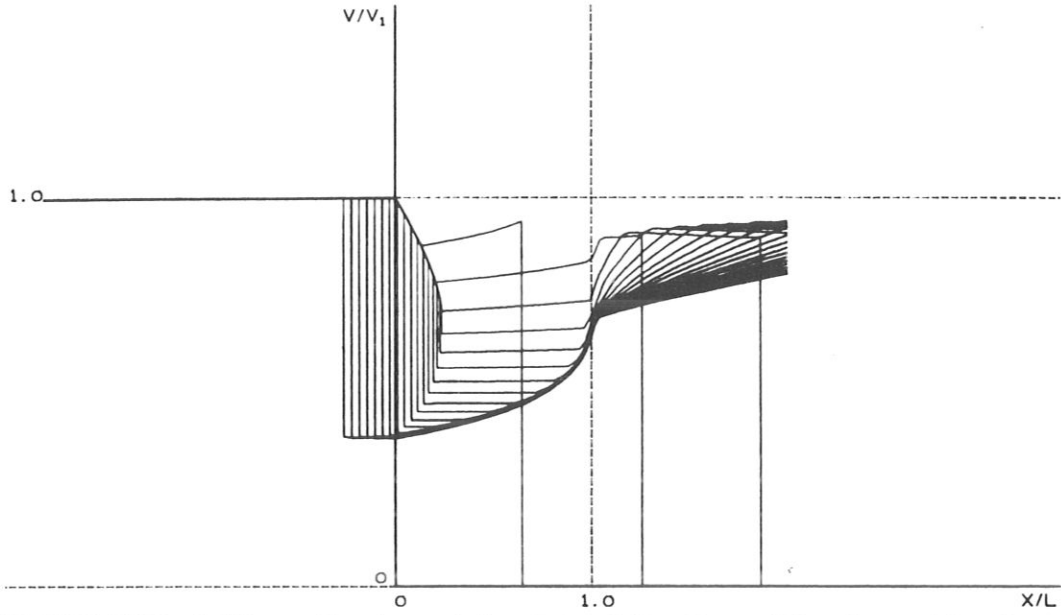
DENSITY DISTR. T\*V1/L= 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SIGN=3 JALSVB=1 01=32 02=1 03=1) 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00 8.50 9.00 9.50 10.00  
 G1=1.366 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.800 KR=0.500 KV=0.0

Abb. 11

Profile von Druck und Massendichte

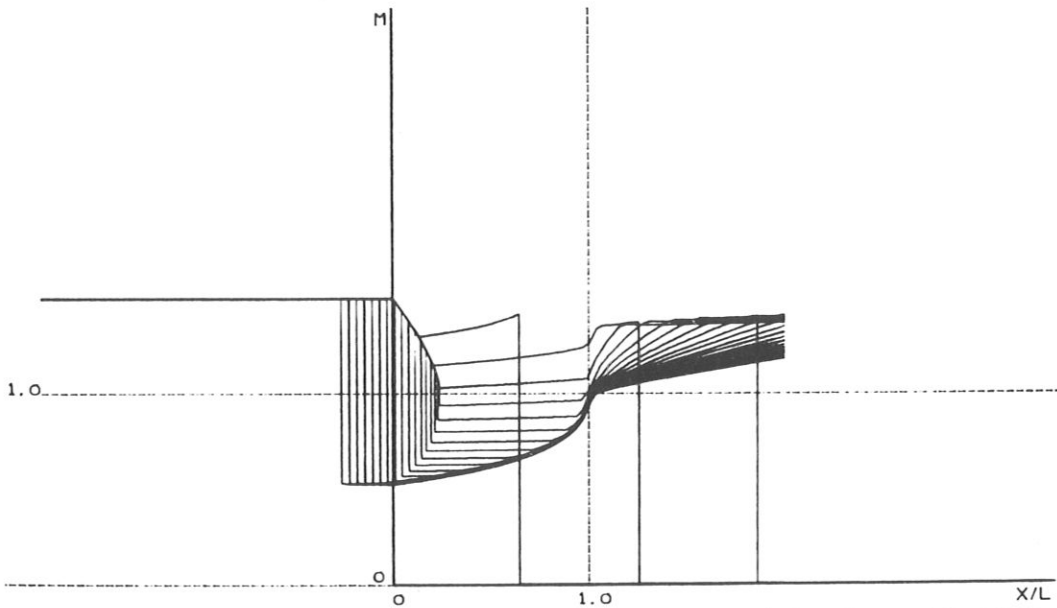
Abb. 11 bis 15: Beispiel gerechneter Profile aller wichtigen Strömungsparameter über die Kanalachse für mässige Wechselwirkung ( $N = 0.8$ ,  $k_1 = 0.5$ )

FRSo98 2. MAI 72 04 \*



VELOCITY DISTR.  $T \cdot V_1/L =$  0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SIGN=3 JALSYB=1) 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00 8.50 9.00 9.50 10.00  
 (01=32 02=1 03=1)  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.800 KR=0.500 KV=0.0

FRSo98 2. MAI 72 09 \*



MACH N. DISTR.  $T \cdot V_1/L =$  0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SIGN=3 JALSYB=1) 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00 8.50 9.00 9.50 10.00  
 (01=32 02=1 03=1)  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.800 KR=0.500 KV=0.0

Abb. 12

Profile von Strömungsgeschwindigkeit und Strömungsmachzahl im Laborsystem

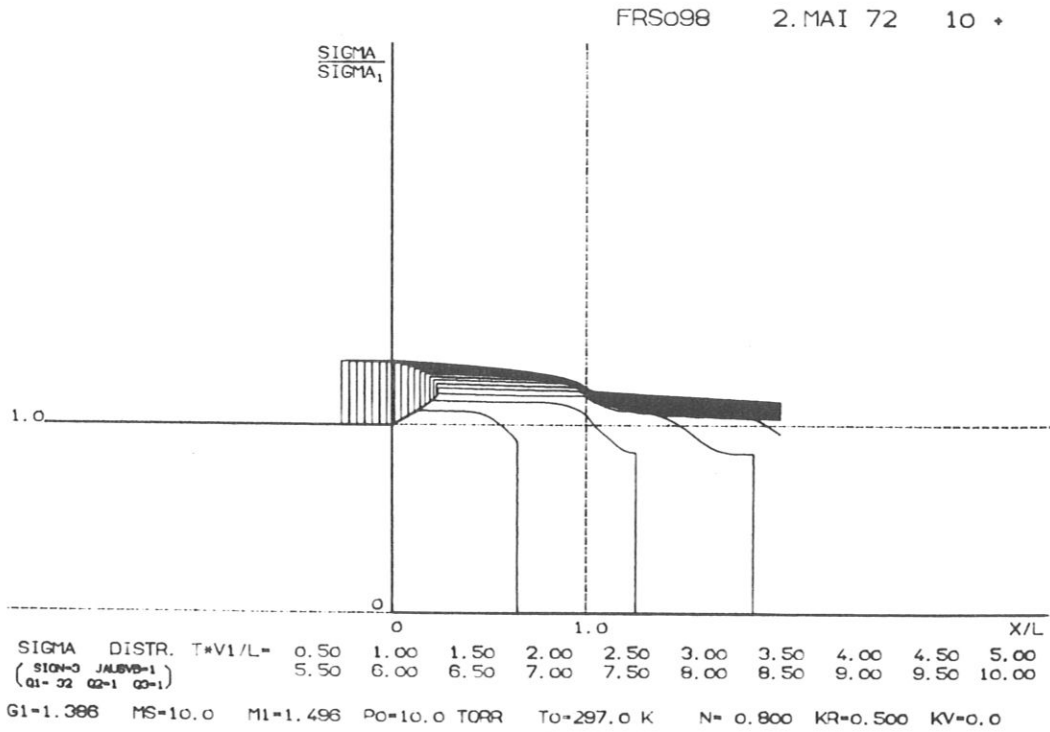
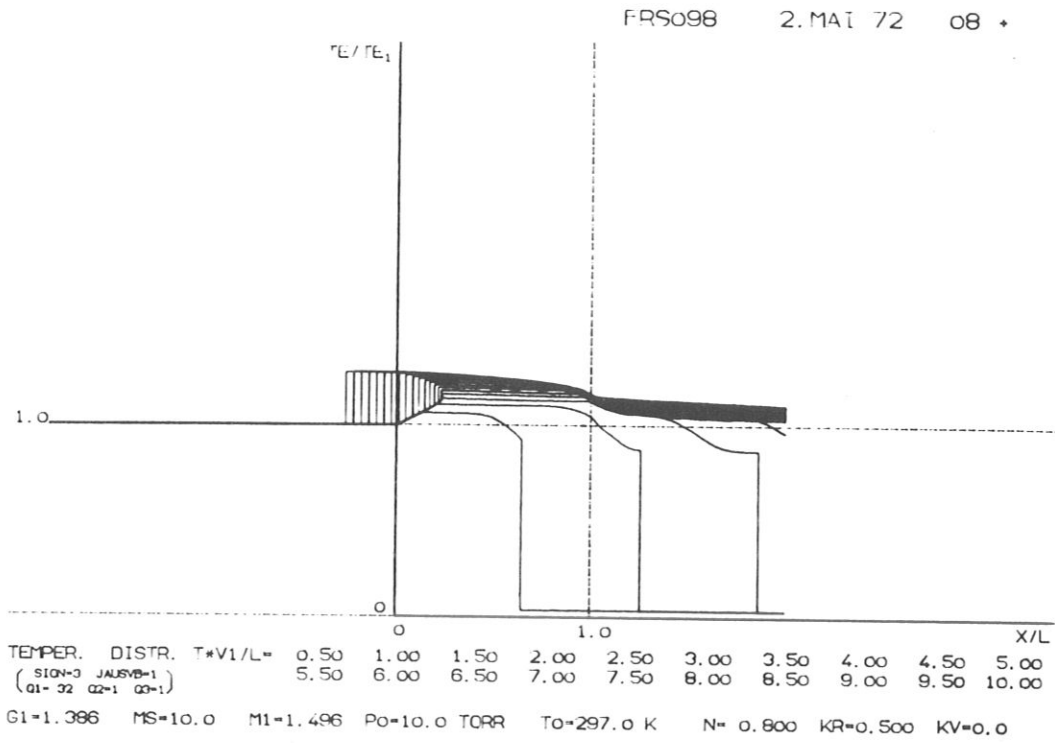
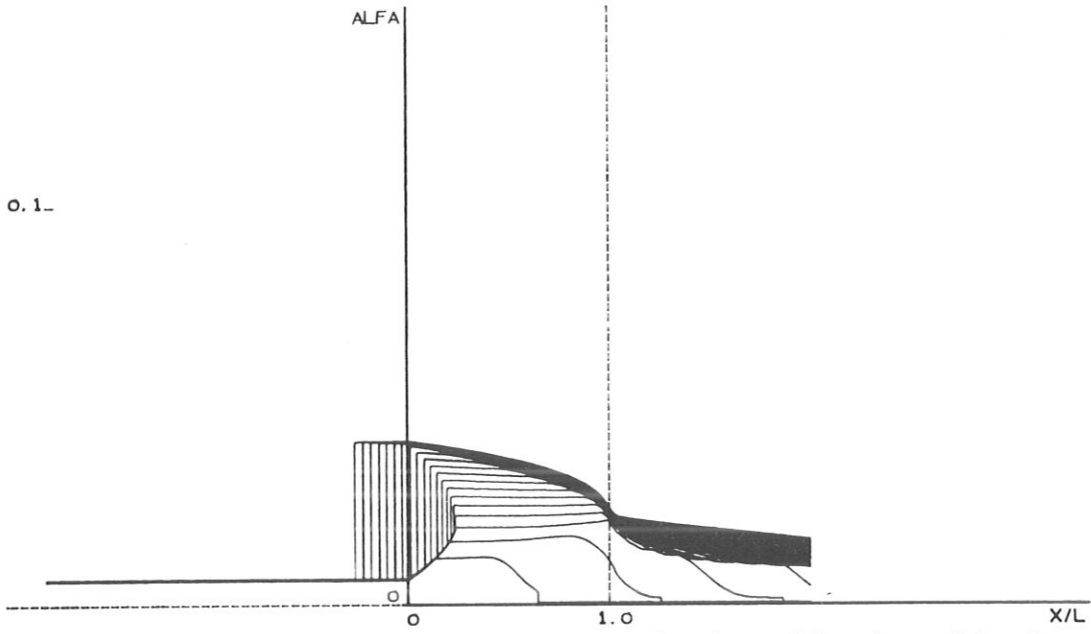


Abb. 13

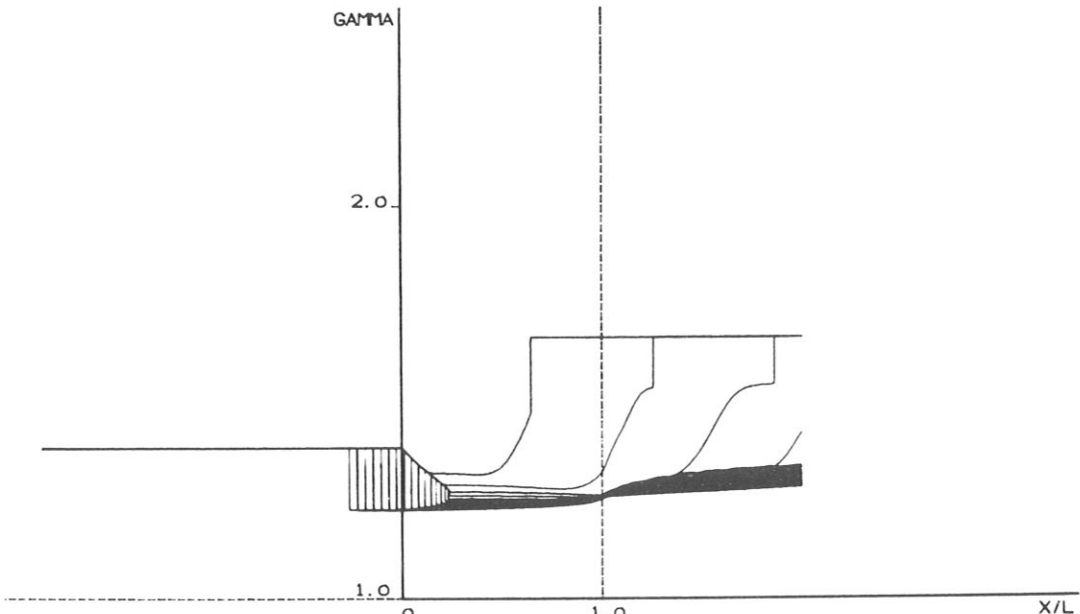
Profile von Temperatur und elektrischer Leitfähigkeit

FRSo98 2. MAI 72 07 +



ALFA DISTR. T\*V1/L= 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SIGN=3 JALIBS=1 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00 8.50 9.00 9.50 10.00  
 Q1=32 Q2=1 Q3=1)  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.800 KR=0.500 KV=0.0

FRSo98 2. MAI 72 06 +



GAMMA DISTR. T\*V1/L= 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SIGN=3 JALIBS=1 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00 8.50 9.00 9.50 10.00  
 Q1=32 Q2=1 Q3=1)  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.800 KR=0.500 KV=0.0

Abb. 14

Profile von Ionisationsgrad und  
 Isentropenexponent

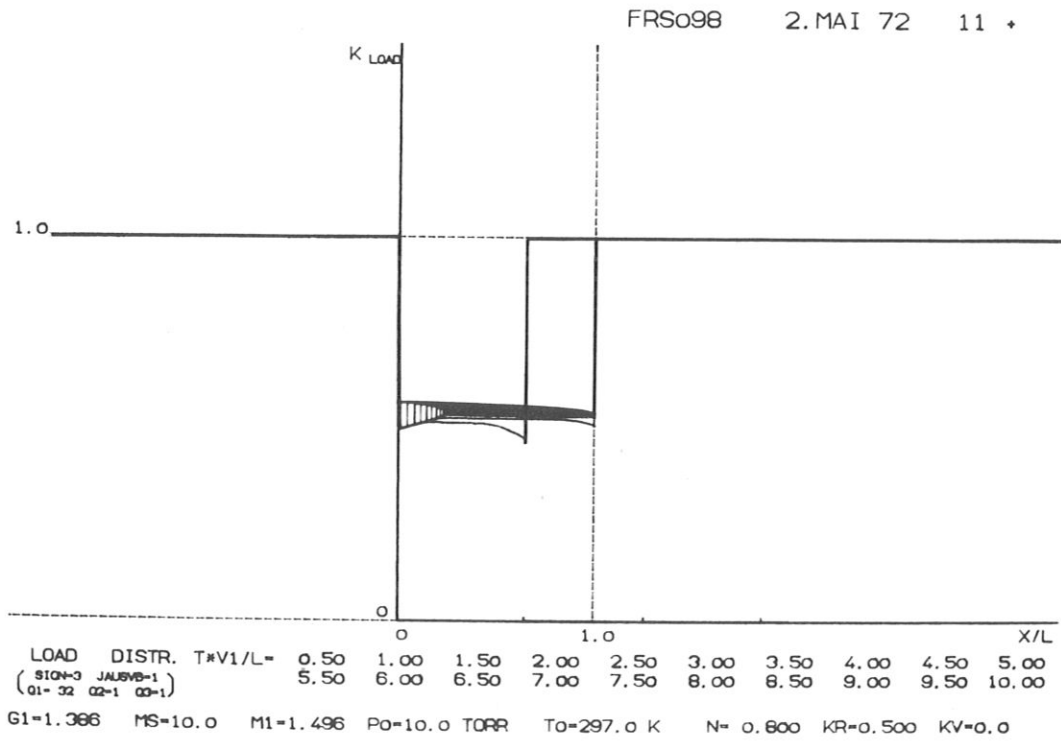
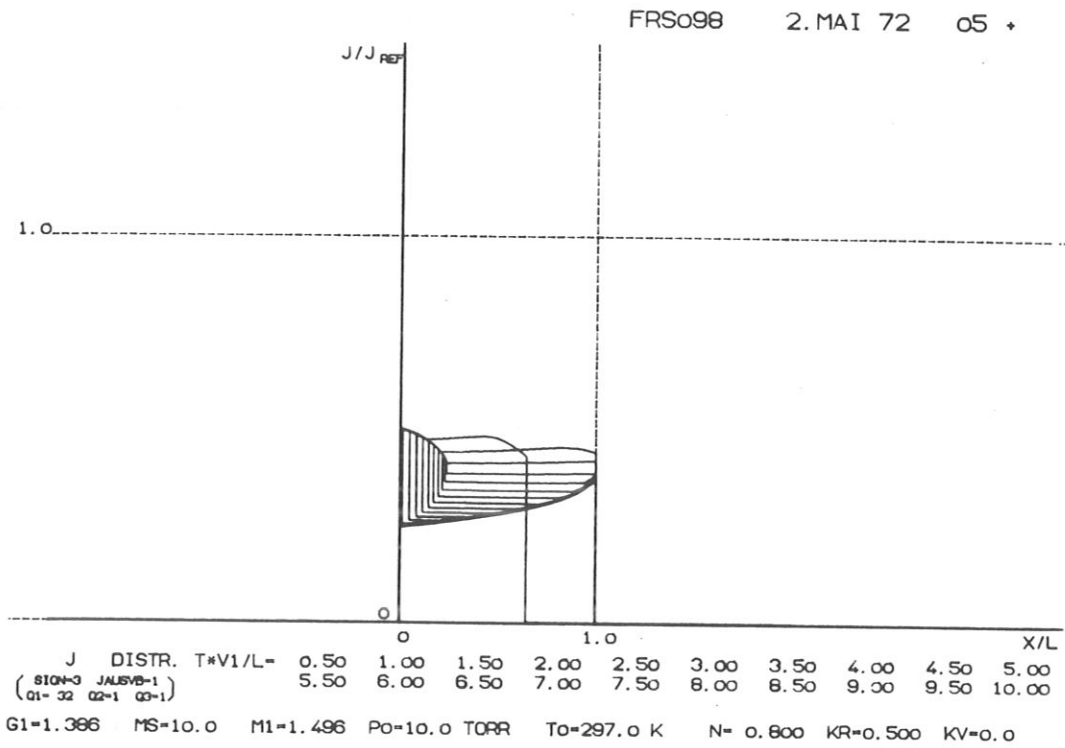


Abb. 15  
Profile von Stromdichte und  
Lastfaktor

kungszone steigt der Druck in Strömungsrichtung durch den Aufstau des Gases stark an, fällt dann wegen der anschliessenden Expansion bis zum primären Stoss wieder ab (vgl. hierzu die lineare Betrachtung im Kapitel 4.2). Direkt hinter dem Stoss liegt der Druck wegen der Abschwächung des primären Stosses etwas unterhalb seines Ausgangswertes. Vor dem primären Stoss ist der Druck natürlich konstant und gleich dem ursprünglichen Druck des ruhenden Testgases. Wie mit Hilfe der Charakteristiken-Ebene in Abb.10 leicht verifiziert werden kann und im Kapitel 4.2 analytisch gezeigt wurde, liegt der Ort des grössten Drucks auf der Charakteristik durch den Nullpunkt.

Die folgenden Druckprofile zeigen eine Ausbreitung des gestörten Strömungsgebietes und eine allgemeine Druckzunahme innerhalb der Wechselwirkungszone. Wegen der Stationarität des Kompressionsgebietes (vgl. Kapitel 4.2) müssen die stetig ansteigenden Kurvenabschnitte aller Profile auf derselben Kurve liegen. Im Laufe der Zeit wird die Kompression immer stärker und steiler, bis der Druckgradient unendlich wird. Dies entspricht der Entstehung eines reflektierten Stosses (etwa zwischen dem 3. und dem 4. Zeitschnitt  $1.50 < T \cdot v_1 / L < 2.00$ ). Durch die weitere Kompression wird der Stoss verstärkt. Dabei beginnt er, sich auch im Laborsystem strömungsaufwärts zu bewegen. Die Beschleunigung hält solange an, bis er die Wechselwirkungszone verlassen hat. Dann ändern sich der Drucksprung über dem sekundären Stoss und die Profile in der Wechselwirkungszone praktisch nicht mehr, d.h. sie konvergieren sehr rasch gegen die stationären Endprofile. "Rechts" von der Wechselwirkungszone zeigen die Profile noch die Ausbildung einer, ebenfalls gegen die Strömung laufenden, Expansionswelle. Sie kann in den Unterschallbereich der Wechselwirkungszone vordringen, wobei sie "Information" aus dem strömungsabwärts liegenden Expansionsgebiet hineinträgt. Der Kopf dieser Welle ist am Knick der Profile innerhalb der Wechselwirkungszone zu erkennen. Hinter dem Knick nimmt der Druck wegen der "Saugwirkung" der Expansion stärker ab. Während nach "links" die Profile für alle unter der Abbildung angegebenen Zeiten voll erkennbar sind, ist nach "rechts" hin die Darstellung bei  $x/L = 2$  abgebrochen. Für den letzten geplotteten Zeitschnitt ist die primäre Stossfront schon einige Bildbreiten rechts ausserhalb der Darstellung zu denken.

Der Dichteverlauf (im unteren Bild) spiegelt die am Druckverlauf geschilderten Vorgänge im wesentlichen wieder. Zwei zusätzliche Informationen sind in den Kurvenverläufen zu finden: a) Die im gestörten Strömungsbereich aufgestaute Masse wird ersichtlich durch eine Massendichteabnahme direkt hinter der Stossfront kompensiert, wobei allerdings auch die Abnahme der Stossfrontgeschwindigkeit berücksichtigt werden muss (siehe Flächeninhalte unter bzw. über den Profilen). b) Es wird eine Kontaktzone erkennbar, die, mit Strömungsgeschwindigkeit laufend, die unterschiedlich aufgeheizten Gasbereiche voneinander trennt.

Die nächsten beiden Plots in Abb.12 zeigen die Verläufe der Strömungsgeschwindigkeit und der Strömungsmachzahl im Laborsystem. Wegen der Abbremsung und Aufheizung der Gasströmung liegen sowohl Geschwindigkeit als auch Strömungsmachzahl im gesamten von der Wechselwirkung beeinflussten Gebiet unterhalb ihrer Ausgangswerte vor Beginn der Wechselwirkung. Über den reflektierten Stoss hinweg ändert sich die Strömungsmachzahl sprunghaft (auch im Laborsystem) auf  $M < 1$ . Bei  $x/L = 1$  stellt sich bald Schallgeschwindigkeit ein. Dann kann die, an die Wechselwirkungszone anschliessende, gegen die Strömung laufende Expansionswelle, die schon bei der Besprechung der Druckprofile erwähnt wurde, nicht mehr in die Wechselwirkungszone eindringen, sondern bleibt am Rand der Wechselwirkungszone "hängen". Sie dehnt sich nur noch in Strömungsrichtung aus.

Auf den beiden Plots in Abb.13 sind die Profile der Temperatur und der elektrischen Leitfähigkeit wiedergegeben. Die Kurvenverläufe dieser beiden Parameter sind einander sehr ähnlich, da ja die Leitfähigkeit im wesentlichen eine Funktion der Temperatur ist und mit ihr monoton zu- bzw. abnimmt. Innerhalb der Wechselwirkungszone sind die Gradienten von Temperatur und Leitfähigkeit hinter der reflektierten Stossfront sehr klein, was wegen der etwa gleich starken Abnahme von Druck und Dichte in diesem Bereich zu erwarten ist.

Die Profile des Ionisationsgrades  $\alpha$  und des Isentropenexponenten  $\gamma_{eq}$  (für Gleichgewichtsionisation) sind in Abb.14 dargestellt.

Vor dem primären Stoss ist das Gas nicht ionisiert ( $\alpha = 0$ ) und dort gilt der Isentropenexponent für einatomige ideale Gase  $\gamma_{eq} = \gamma = 1.67$ . Hinter dem primären Stoss nimmt der Ionisationsgrad (wegen der Temperaturzunahme) schon vor der Wechselwirkungszone auf den Wert  $\alpha_1 = 0.006$  zu, der Isentropenexponent dagegen auf den entsprechenden Wert  $\gamma_{eq,1} = 1.386$  ab. Die weitere Temperaturerhöhung durch Ohmsche Heizung im Wechselwirkungsbereich und über den reflektierten Stoss hinweg hat eine weitere Erhöhung des Ionisationsgrades  $\alpha$  in den entsprechenden Bereichen zur Folge. Über die sekundäre Front hinweg springt  $\alpha$  dabei etwa um den Faktor 5. Dagegen ändert sich  $\gamma_{eq}$  nicht sehr stark. Es nimmt zwar noch etwas ab, aber das herausragende Kennzeichen für  $\gamma_{eq}$  ist, dass es im Wechselwirkungsbereich bald nahezu konstant ist. (Man beachte die Unterdrückung des Nullpunktes in Abb.14 unten.)

Schliesslich zeigen die letzten Plots dieser Serie (Abb.15) die Verläufe der Stromdichte  $j$  und des Lastfaktors  $k$ . Ausserhalb der Wechselwirkungszone fliesst kein Strom. Über den primären Stoss springt die Stromdichte auf einen endlichen Wert, da Relaxationseffekte und Induktivität nicht berücksichtigt werden. Solange der primäre Stoss noch in der Wechselwirkungszone bzw. in ihrer Nähe ist, steigt  $j$  direkt hinter dem primären Stoss an und spiegelt damit das Temperatur- und Leitfähigkeitsverhalten wieder (beide steigen hinter der primären Front an). Später sinkt die Stromdichte und lässt damit erkennen, dass nun der Abfall der EMK auf Grund der starken Erniedrigung der Strömungsgeschwindigkeit im Wechselwirkungsbereich die Stromdichte regiert.

Wie die Stromdichte, so ändert sich auch der Lastfaktor nur innerhalb der Wechselwirkungszone. Ausserhalb der Wechselwirkungszone und vor der primären Stossfront hat er den Wert 1. Beim Eintritt der primären Front in den Wechselwirkungsbereich springt  $k$  direkt hinter der Front auf den Wert  $k = k_1 = 0.5$ . In der Wechselwirkungszone nimmt  $k$  wegen der höheren elektrischen Leitfähigkeit etwas zu, steigt aber an keiner Stelle mehr als 15 % über den ursprünglichen Wert an.



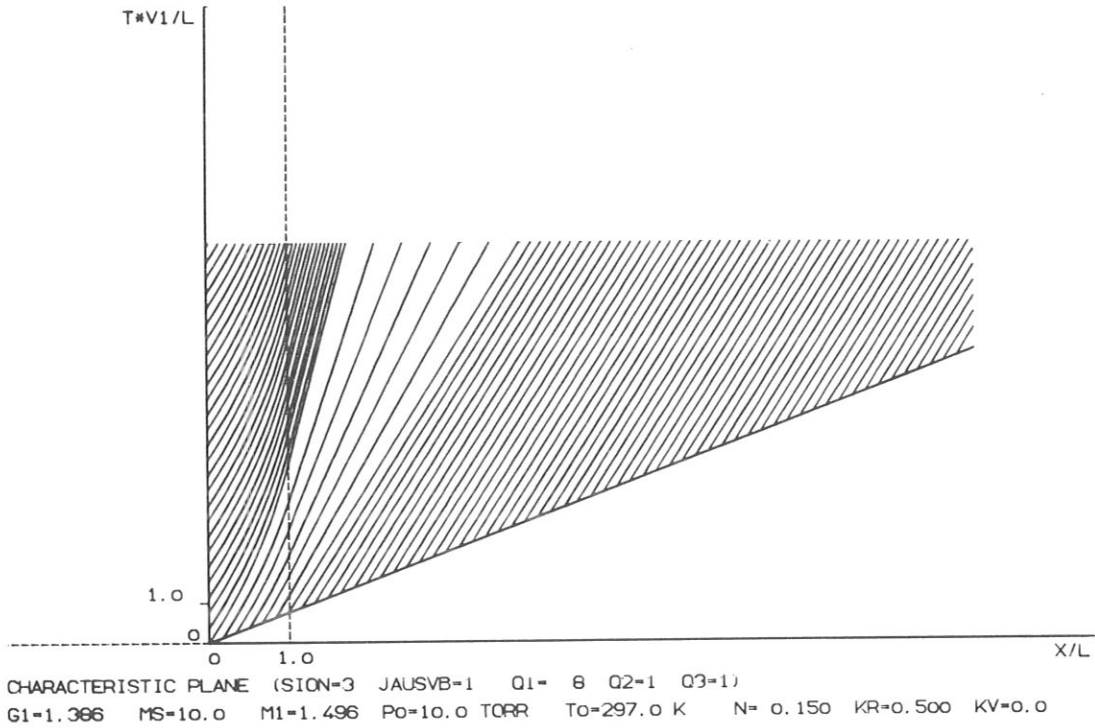
## 7.2 Vergleich zwischen schwacher, mässiger und starker Wechselwirkung

Anhand der folgenden Plot-Serie sollen typische Unterschiede zwischen schwacher, mässiger und starker Wechselwirkung diskutiert werden. Vier typische Fälle werden dabei behandelt und anhand der entsprechenden Charakteristiken-Ebenen und der Dichteprofile einander gegenübergestellt. Für die Strömungs-Ausgangsparameter, den Lastfaktor zu Beginn der Wechselwirkung und die Länge der Wechselwirkungszone (oder das Magnetfeld) werden dieselben Werte gewählt wie für das Beispiel im vorigen Abschnitt.

Die Ergebnisse des ersten Beispiels sind in Abb.16 dargestellt. Der Wechselwirkungsparameter ist so klein ( $N = 0.15$ ), dass er nicht ausreicht, um einen reflektierten Stoss zu erzeugen. Infolgedessen bleibt die gesamte Strömung hinter dem primären Stoss im Überschallbereich (die Charakteristiken sind "nach rechts" geneigt). Dementsprechend nimmt die Dichte in der gesamten Wechselwirkungszone zu. Wie schon im Kapitel 4.2 gezeigt wurde, wird die Strömung innerhalb der gesamten Wechselwirkungszone endgültig stationär, sobald die Charakteristik durch den Nullpunkt die Wechselwirkungszone verlassen hat. In diesem Augenblick löst sich auch die Expansionswelle, die sich ausserhalb der Wechselwirkungszone aufgebaut hat, vom Rand der Zone ab und wird von der Überschallströmung mitgeführt. Der primäre Stoss läuft praktisch unbeeinflusst durch die Wechselwirkungszone. Auch die Kontaktzone hinter dem primären Stoss, die mit der Strömung läuft, ist deutlich erkennbar.

Im nächsten Fall (Abb.17) ist der Wechselwirkungsparameter auf  $N = 0.2$  erhöht. Dieser Wert reicht gerade aus, einen reflektierten Stoss entstehen zu lassen, der zunächst etwas stärker wird. Bald aber kommt er in der Wechselwirkungszone zum Stehen. Er wird nicht stark genug, um strömungsaufwärts aus ihr herauslaufen zu können. Auch in diesem Fall läuft der primäre Stoss praktisch unverändert durch die Wechselwirkungszone. - Wie schwach der reflektierte Stoss bleibt, lässt sich deutlich am Dichteprofil erkennen, das einen Dichtepfung von nur etwa 1.15 über die sekundäre Front anzeigt.

FRS159 9.MAI 72 01 +



FRS159 9.MAI 72 03 +

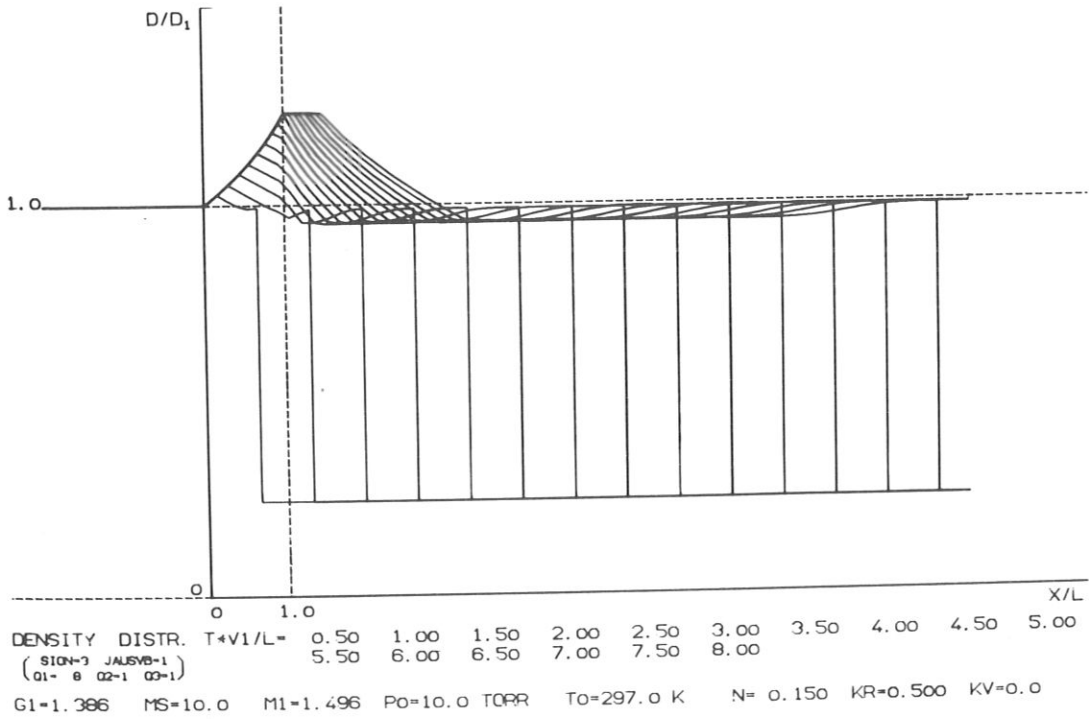
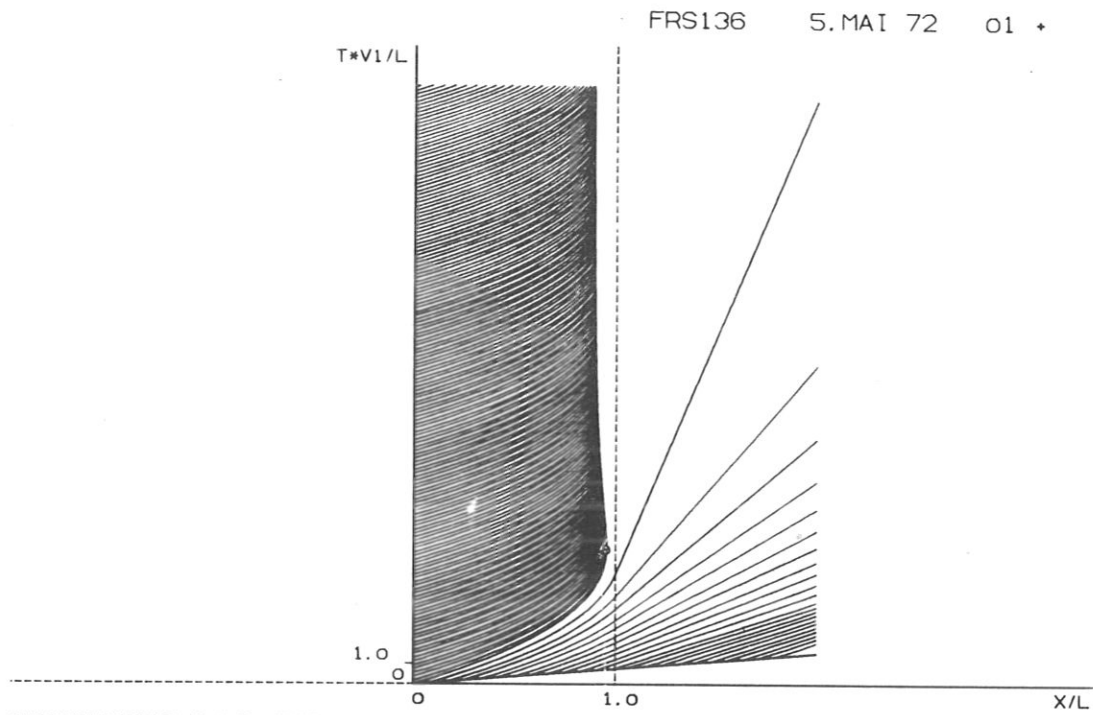


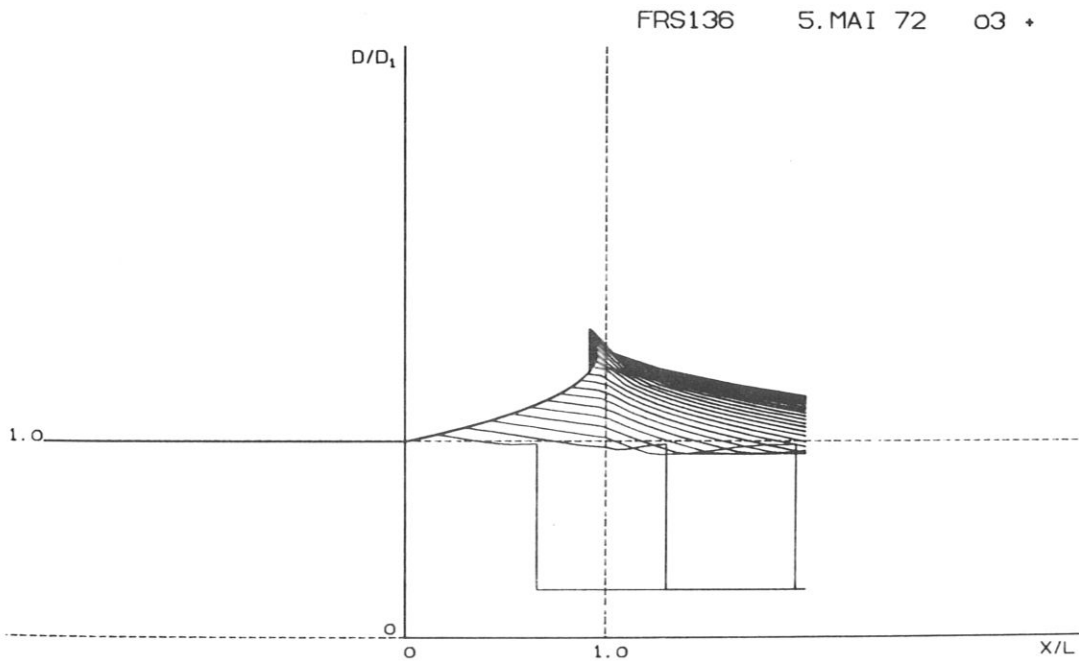
Abb. 16

Charakteristiken-Ebene und Dichtepprofile für sehr schwache Wechselwirkung ( $N = 0.15$ ). Abbremsung und Aufheizung reichen nicht aus, um einen reflektierten Stoss zu erzeugen.

Abb. 16 bis 19: Charakteristiken-Ebenen und Dichtepprofile für unterschiedliche Stärke der Wechselwirkung



CHARACTERISTIC PLANE (SIGN=3 JAUSVB=1 Q1= 8 Q2=2 Q3=1)  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.200 KR=0.500 KV=0.0

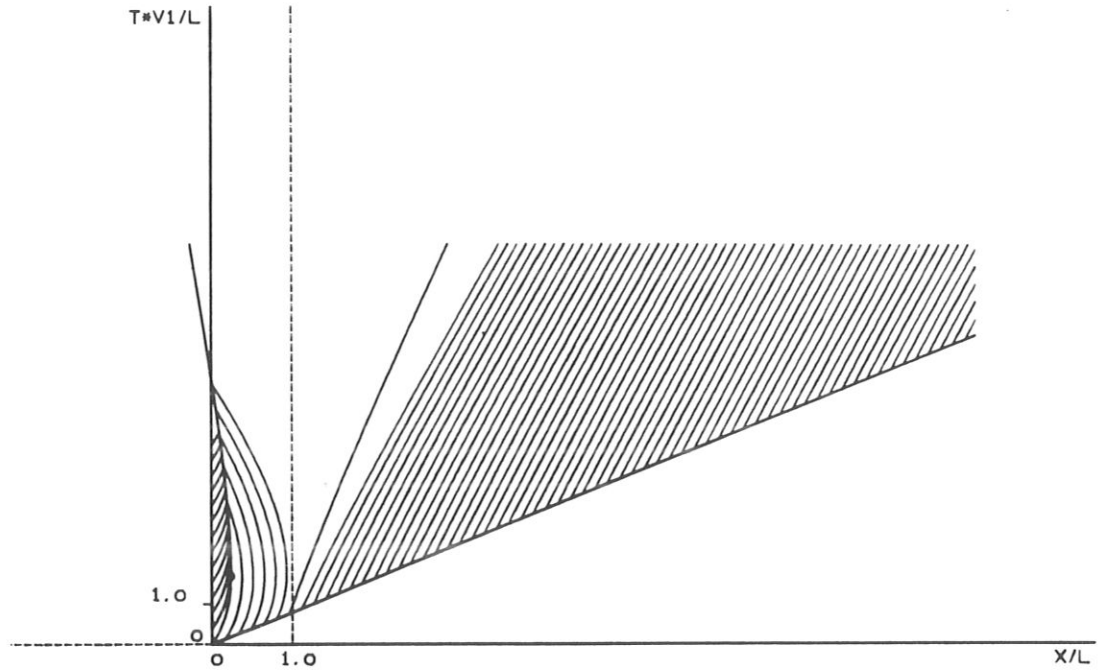


DENSITY DISTR. T\*V1/L= 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SIGN=3 JAUSVB=1 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00 8.50 9.00 9.50 10.00  
 Q1= 8 Q2=2 Q3=1) 10.50 11.00 11.50 12.00  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.200 KR=0.500 KV=0.0

Abb. 17

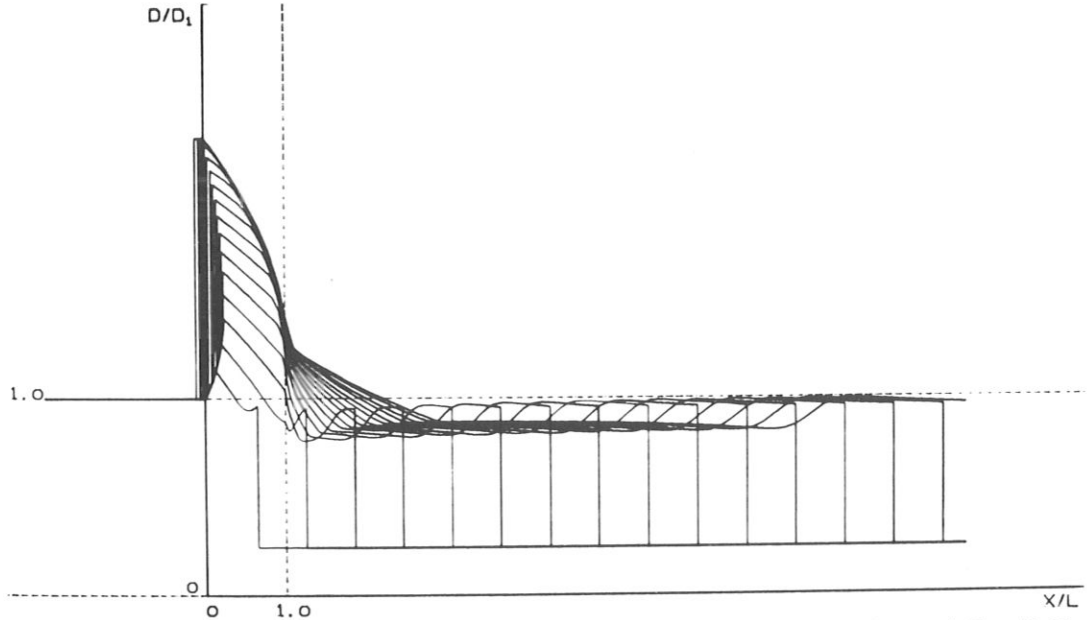
Charakteristiken-Ebene und Dichteprofile für schwache, zur Erzeugung einer reflektierten Stosswelle jedoch gerade noch ausreichende Wechselwirkung ( $N = 0.2$ )

FRSo78 28. APR. 72 01 +



CHARACTERISTIC PLANE (SION=3 JAUSVB=1 Q1= 32 Q2=1 Q3=1)  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.800 KR=0.500 KV=0.0

FRSo78 28. APR. 72 03 +

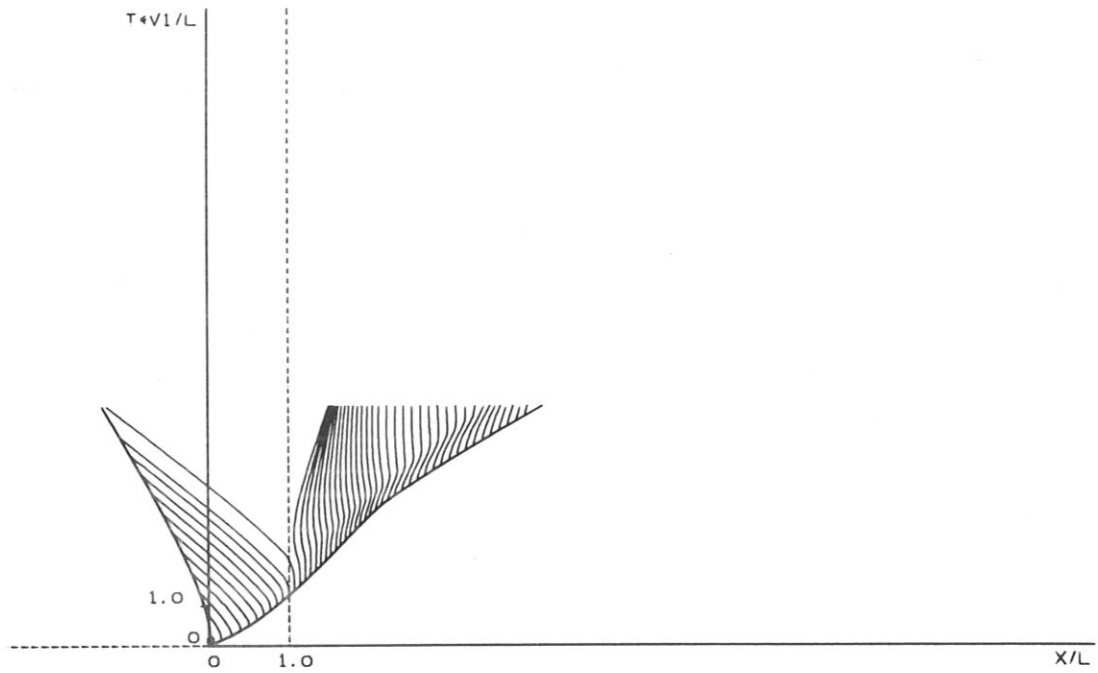


DENSITY DISTR. T\*v1/L= 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 ( SION=3 JAUSVB=1 ) 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.800 KR=0.500 KV=0.0

Abb. 18

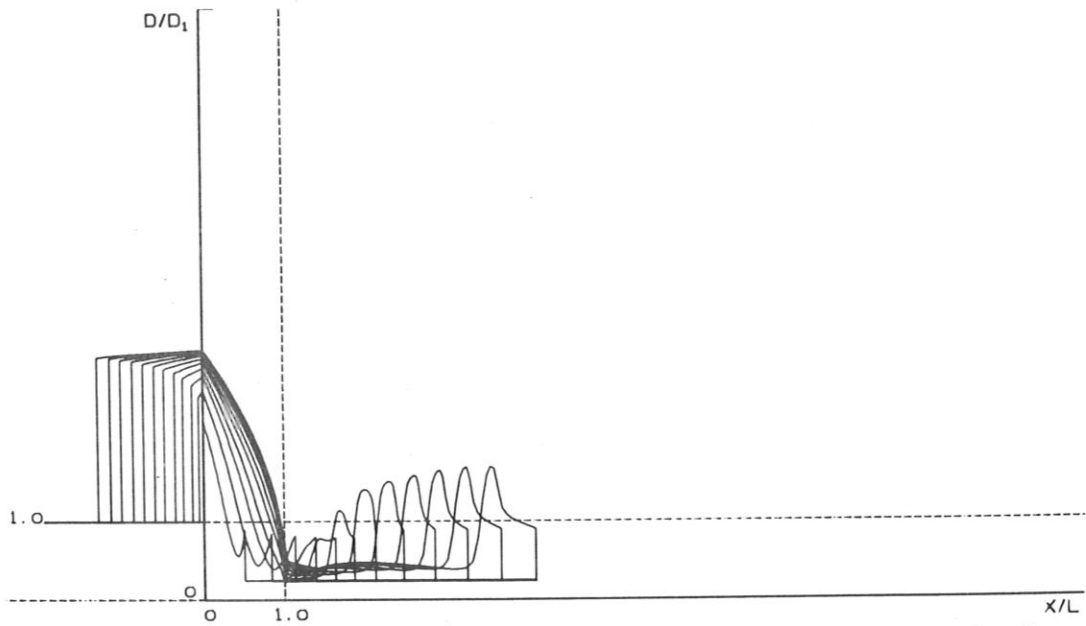
Charakteristiken-Ebene und Dichteprofile für mässige bis starke Wechselwirkung ( $N = 0.8$ ). Ein reflektierter Stoss entsteht und läuft strömungsaufwärts aus der Wechselwirkungszone heraus.

FRS300 17.MAI 72 01 +



CHARACTERISTIC PLANE (SION=3 JAUSVB=1 Q1=128 Q2=1 Q3=1)  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N=10.000 KR=0.500 KV=0.0

FRS300 17.MAI 72 03 +



DENSITY DISTR. T\*v1/L = 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SION=3 JAUSVB=1 5.50 6.00  
 Q1=128 Q2=1 Q3=1)  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N=10.000 KR=0.500 KV=0.0

Abb. 19

Charakteristiken-Ebene und Dichteprofile für extrem starke Wechselwirkung ( $N = 10$ ). Der reflektierte Stoss entsteht und verlässt die Wechselwirkungszone praktisch sofort nach dem Eintreffen des primären Stosses in der Wechselwirkungszone.

Der dritte Fall (Abb.18) wurde mit  $N = 0.8$  gerechnet und ist mit dem im vorigen Kapitel behandelten Fall identisch. (Hier wurde ein erweiterter Bereich strömungsabwärts der Wechselwirkungszone dargestellt.) Der reflektierte Stoss entsteht hier nicht nur wesentlich näher am linken Rand des Wechselwirkungsgebietes sondern wird auch so stark, dass er dieses strömungsaufwärts verlassen kann. Der Dichtesprung erreicht hier schon Werte oberhalb von 2. Auch die Ausbreitung der am Rand der Wechselwirkungszone (bei  $M = 1$ ) ansetzenden Expansionswelle sowie die Bewegung der Kontaktzone sind an den Dichteprofilen deutlich zu erkennen. Eine Abschwächung des primären Stosses lässt sich ebenfalls in beiden Teilabbildungen feststellen.

Schliesslich wird in Abb.19 der Fall einer extrem starken Wechselwirkung mit  $N = 10$  gezeigt. Der reflektierte Stoss entsteht und verlässt die Wechselwirkungszone praktisch sofort, nachdem der primäre Stoss die Wechselwirkungszone erreicht hat. In der Wechselwirkungszone nimmt die Dichte bald ein nahezu stationäres Profil an. Über den sekundären Stoss springt die Dichte etwa um den Faktor 3. Von diesem Wert fällt sie in der Wechselwirkungszone weit unter die Ausgangsdichte hinter dem primären Stoss ab (bis fast auf die Vorlanddichte des primären Stosses). In diesem Beispiel treten aber auch zwei neue Effekte auf: Erstens wird der primäre Stoss, nachdem er in der Wechselwirkungszone stark abgebremst wurde, wieder beschleunigt. Diese Beschleunigung ist die Folge eines Einschwingvorganges der Strömung zwischen den beiden Stosswellen, bei dem die Wirkungen des magnetischen Drucks und des statischen Drucks in der Strömung zeitlich alternieren. Durch die Lorentz-Kraft wird nämlich zuerst das Gas entgegen der Strömung stark aufgestaut. Dadurch nehmen der statische Druck zu, die Strömungsgeschwindigkeit und damit auch die EMK und die Lorentz-Kraft dagegen ab. Der statische Druck treibt nun das Gas wieder schneller in Strömungsrichtung und beschleunigt damit auch den primären Stoss. Mit der Strömungsgeschwindigkeit nehmen EMK und Lorentz-Kraft wieder zu usw. Diese Vorgänge sind wegen der hohen Dissipationsverluste durch Ströme und Stosswellen stark gedämpft, sodass nach der Beschleunigungsphase des primären Stosses eine weitere Abbremsung kaum festzustellen sein wird.

Zweitens bildet sich in der Kontaktzone mit der Zeit ein ausgeprägtes Dichtemaximum, bei dem die Dichte sogar ihren Ausgangswert hinter dem primären Stoss erheblich überschreitet. Auch dieses Dichtemaximum ist eine Folge der schon erwähnten Beschleunigung des primären Stosses. Die Dichteunterschiede in der Kontaktzone entsprechen nämlich der unterschiedlichen Aufheizung des Gases in der instationären Phase des Wechselwirkungsprozesses. Die Kontaktzone spiegelt also die "Geschichte" der Aufheizung des Gases wieder. Das niedrige Dichteplateau zwischen der Wechselwirkungszone und der Kontaktzone beruht auf der starken Aufheizung durch die Ströme und durch den reflektierten Stoss. Der Anstieg der Dichte in der Kontaktzone kennzeichnet einen Bereich niedrigerer Entropie<sup>+) , d.h. einen solchen geringerer Aufheizung. Das Gas im Dichtemaximum kann also erst hinter der Wechselwirkungszone vom primären Stoss "mitgenommen" worden sein, und bei ihm muss die Entropiezunahme über die Stossfront hinweg am kleinsten gewesen sein, d.h., er muss die Stossfront passiert haben, als sie am schwächsten war. Der Ort, an dem dieses Gas vom primären Stoss erfasst wurde, liegt also am Ort des Wendepunktes des primären Stosses in der x-t-Ebene.</sup>

Mit der Diskussion dieser vier Beispiele konnte der Einfluss des Wechselwirkungsparameters auf die Strömungsvorgänge im wesentlichen geklärt werden. Mit Hilfe einer parametrischen Studie wurde auch der Einfluss des Lastfaktors untersucht. Eine Zunahme bzw. Abnahme des Lastfaktors hat bei festgehaltenem Wechselwirkungsparameter  $N$  eine Abschwächung bzw. Verstärkung von Abbremsung und Aufheizung zur Folge (vgl. die Gln. (46) und (47)). Eine Änderung von  $k_1$  wirkt sich also auf die Strömungsvorgänge ähnlich aus wie eine Änderung von  $N$ . Da der Lastfaktor aber auch als derjenige Anteil der erzeugten elektrischen Energie aufgefasst werden kann, der nach aussen abgeführt wird, muss der Einfluss der Ohmschen Heizung gegenüber dem der Abbremsung mit zunehmendem Lastfaktor an Bedeutung verlieren. Die Beziehung

$$\frac{N_e}{N_m} = 1 - k_1$$

macht dies sofort deutlich.

---

<sup>+) Der Plot des Druckverlaufs lässt erkennen, dass in diesem Bereich ein Druckausgleich schon weitgehend stattgefunden hat.</sup>

Der Einfluss der Ausgangsparameter  $M_{SO}$ ,  $p_O$ ,  $T_O$  auf Ort und Zeit der Entstehung des reflektierten Stosses wurde schon in den Kapiteln 4 und 5 diskutiert.

### 7.3 Der Einfluss der Ionisationsenergie

In dem dieser Arbeit zugrundeliegenden Modell werden Realgas-effekte durch einen variablen Ionisationsgrad  $\alpha$  berücksichtigt. Dadurch werden u.a. der variable Isentropenexponent  $\gamma_{eq}$  und die Leitfähigkeit  $\sigma$  beeinflusst. Bei vorläufigen Rechnungen war dagegen das Plasma in thermodynamischer Hinsicht wie ein ideales Gas behandelt worden, d.h., es waren  $\alpha = 0$  und  $\gamma = 1.67$  gesetzt worden. Eine solche Verhaltensweise ist dann möglich, wenn die Stromdichte  $j$  gemäss dem zweiten Ansatz z.B. von Messwerten abgeleitet wird. Ein Vergleich der früheren mit den hier beschriebenen Rechnungen zeigte aber, dass schon bei relativ schwacher Ionisation (etwa ab  $\alpha = 0.01$ ) die zuerst benutzte Näherung nicht mehr zulässig ist, denn es ergeben sich starke Abweichungen sowohl bei der Berechnung der Ausgangsparameter hinter dem primären Stoss (für gegebene Vorlandparameter) als auch bei der Berechnung der Strömungsvorgänge während des Wechselwirkungsprozesses. Die Berücksichtigung der Ionisationseffekte im thermodynamischen Verhalten hat jedoch andererseits den Nachteil, dass die entsprechenden Rechnungen mehr als doppelt soviel Rechenzeit beanspruchen als die Rechnungen für ideales Gas.

Es erschien deshalb nützlich, durch ein vergleichendes Studium der durchgerechneten Fälle für weitere Untersuchungen einen dritten Ansatz herzuleiten, bei dem die Realgas-effekte z.B. durch geeignete konstante Mittelwerte von Ionisationsparameter und elektrischer Leitfähigkeit näherungsweise berücksichtigt werden. Ein solcher Ansatz könnte die Rechenergebnisse der Realität genügend nahe bringen und trotzdem noch kurze Rechenzeiten erlauben.

Der Versuch, Mittelwerte zu benutzen, wird vor allem durch den Verlauf des Isentropenexponenten (vgl. z.B. Abb.14) nahegelegt. Bei allen Rechenergebnissen zeigte sich nämlich, dass sich dieser



für die Strömungsvorgänge massgebende Parameter hinter dem primären Stoss sowohl zeitlich als auch örtlich sehr wenig ändert. Auch der Verlauf der Leitfähigkeit  $\sigma$  hinter dem primären Stoss lässt die sinnvolle Benutzung eines Mittelwertes zu (vgl. Abb.13). Als Ausgangsdaten für Rechnungen unter Benutzung des 3. Ansatzes wurden  $\gamma_{eq}$ - und  $\sigma$ -Werte benutzt, die sich bei den exakten Rechnungen ergeben hatten.

Zur Demonstration des Einflusses der Ionisationsenergie auf die Strömungsvorgänge werden im folgenden drei Fälle einander gegenübergestellt, nämlich Rechenergebnisse für:

- a) ideales Gas mit  $\gamma = 1.67$ ,  $\alpha = 0$ ,  $k_1$  gemäss dem ersten Ansatz aus dem gemessenen  $\bar{j}_{exp}$  (vgl. Gl.(79)).
- b) reales Gas mit variablem  $\alpha$  (und damit variablem  $\gamma_{eq}$ ,  $\sigma$  etc.),  $k_1$  wie a)
- c) reales Gas mit gleicher Strömungsmachzahl hinter dem primären Stoss wie bei b) und konstantem  $\bar{\gamma}_{eq} = 1.28$  und  $\bar{\sigma}/\sigma_1 = 1.25$  (vgl. Abb.13) hinter dem primären Stoss.

Die Vorlandparameter  $M_{so}$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  des primären Stosses, der Wechselwirkungsparameter  $N$  und der Lastfaktor  $k_1$  wurden für alle 3 Fälle gleich gesetzt. Gewählt wurden

$$M_{so} = 10, p_0 = 10 \text{ Torr}, T_0 = 297 \text{ K}, N = 0.2, k_1 = 0.5.$$

Die Ergebnisse der Rechnungen sollen am Verlauf der Charakteristiken und Stossfronten in der  $x$ - $t$ -Ebene und am Verlauf einiger besonders empfindlicher Parameter als Funktionen von Ort und Zeit erklärt werden.

Die Abb. 20 zeigt die 3 Charakteristiken-Ebenen für die Fälle a), b) und c). Die Diskrepanz zwischen den ersten beiden Bildern und die Übereinstimmung zwischen den letzteren beiden ist unübersehbar. Im ersten Fall entsteht der reflektierte Stoss schon in der ersten Teilhälfte der Wechselwirkungszone, im zweiten und

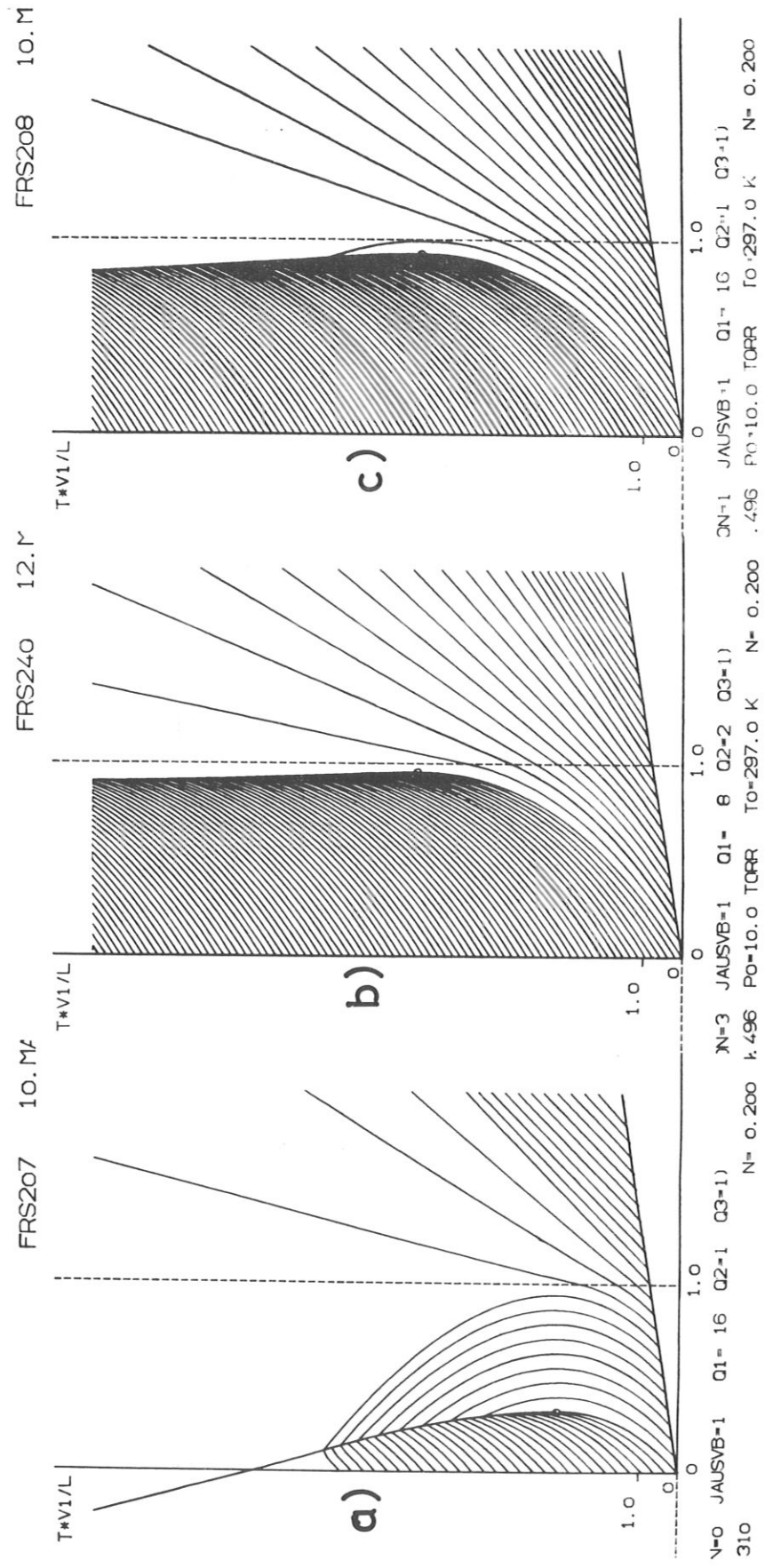


Abb. 20

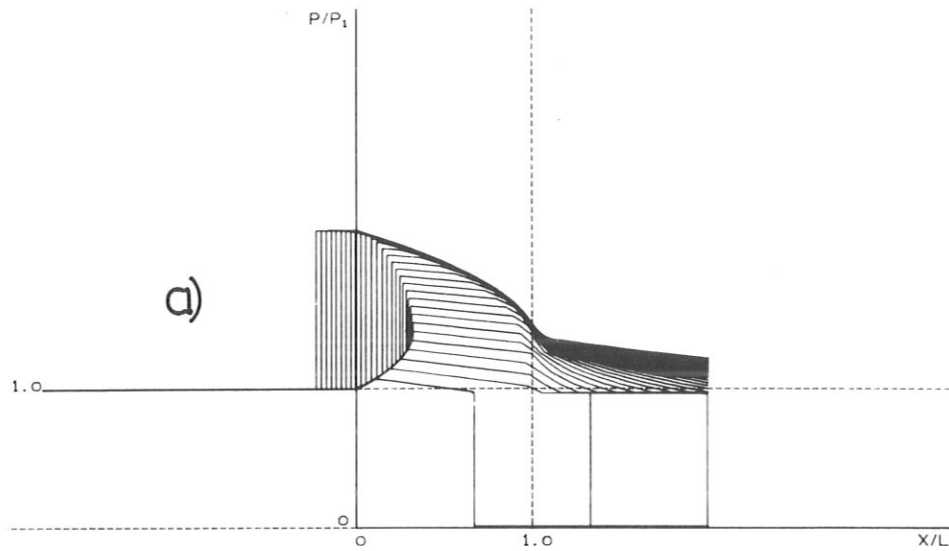
Charakteristiken-Ebenen für die 3 Ansätze a), b) und c)

Abb. 20 bis 22 (Fälle a), b), c)): Charakteristiken-Ebene, Druckverlauf und Temperaturverlauf aus Rechnungen, die mit den 3 folgenden Ansätzen für die Ionisationsparameter durchgeführt wurden:

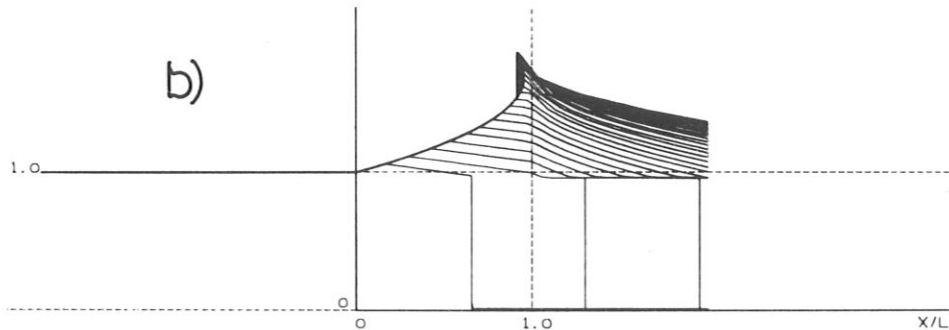
- a) ideales Gas, b) reales Gas mit variablen Ionisationsparametern,
- c) reales Gas mit konstanten, mittleren Ionisationsparametern.

(Die entsprechenden Plots wurden ebenfalls mit a), b) und c) gekennzeichnet.)

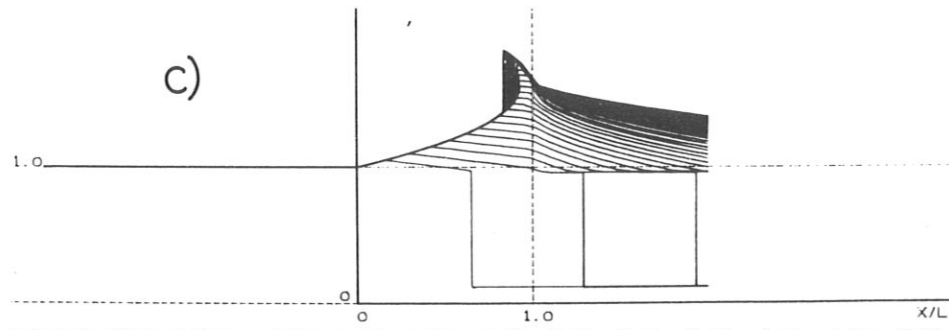
FRS207 10. MAI 72 02 +



0 1.0 X/L  
 PRESSURE DISTR. T\*V1/L= 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SIGN=3 JALSYB=1 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00 8.50 9.00 9.50 10.00  
 (Q1=18 Q2=1 Q3=1) 10.50 11.00 11.50 12.00 12.50 13.00 13.50 14.00 14.50 15.00  
 G=1.667 MS=10.0 M1=1.310 N= 0.200 KR=0.500 KV=0.0



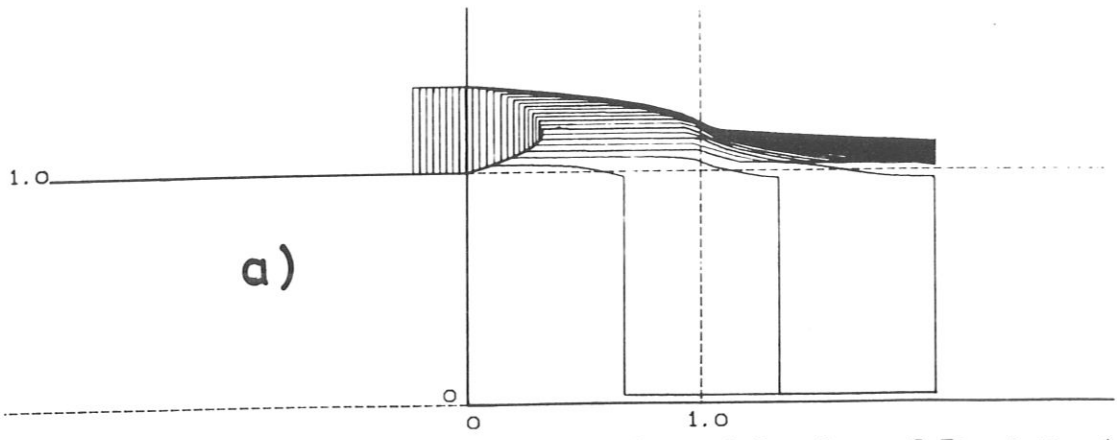
0 1.0 X/L  
 PRESSURE DISTR. T\*V1/L= 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SIGN=3 JALSYB=1 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00 8.50 9.00 9.50 10.00  
 (Q1= 8 Q2=2 Q3=1) 10.50 11.00 11.50 12.00  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.200 KR=0.500 KV=0.0



0 1.0 X/L  
 PRESSURE DISTR. T\*V1/L= 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00  
 (SIGN=1 JALSYB=1 5.50 6.00 6.50 7.00 7.50 8.00 8.50 9.00 9.50 10.00  
 (Q1=18 Q2=1 Q3=1) 10.50 11.00 11.50 12.00 12.50 13.00 13.50 14.00 14.50 15.00  
 G1=1.280 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.200 KR=0.500 KV=0.0

Abb. 21

Druckprofile für die 3 Ansätze a), b) und c)



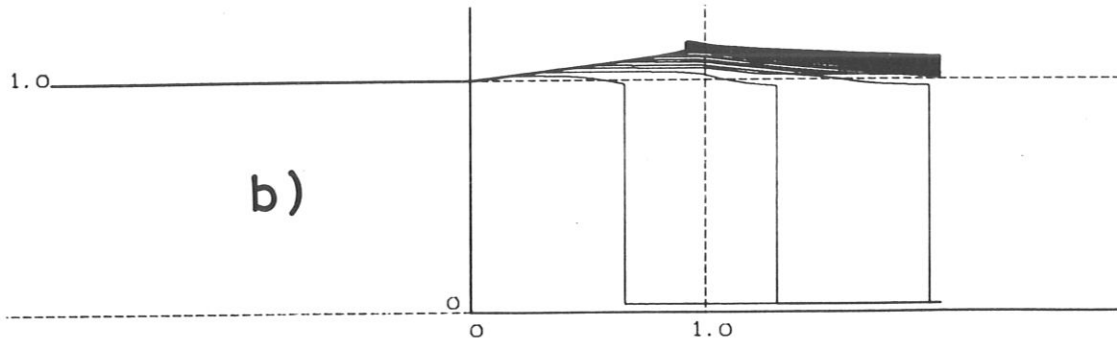
a)

TEMPER. DISTR.  $T \cdot V_1 / L =$

|       |       |       |       |       |       |       |       |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 0.50  | 1.00  | 1.50  | 2.00  | 2.50  | 3.00  | 3.50  | 4.00  | 4  |
| 5.50  | 6.00  | 6.50  | 7.00  | 7.50  | 8.00  | 8.50  | 9.00  | 9  |
| 10.50 | 11.00 | 11.50 | 12.00 | 12.50 | 13.00 | 13.50 | 14.00 | 14 |

(SIGN=0 JAUSVB=1)  
 (Q1=18 Q2=1 Q3=1)

G=1.667 MS=10.0 M1=1.310 N= 0.200 KR=0.500



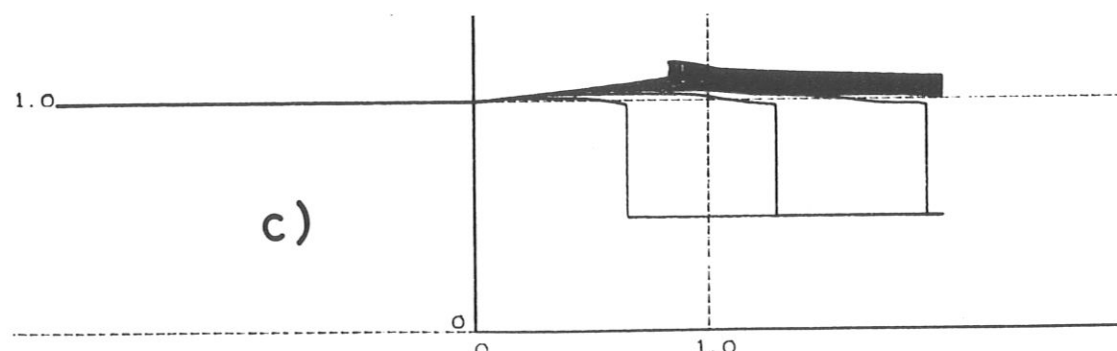
b)

TEMPER. DISTR.  $T \cdot V_1 / L =$

|       |       |       |       |      |      |      |      |    |
|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|----|
| 0.50  | 1.00  | 1.50  | 2.00  | 2.50 | 3.00 | 3.50 | 4.00 | 4. |
| 5.50  | 6.00  | 6.50  | 7.00  | 7.50 | 8.00 | 8.50 | 9.00 | 9. |
| 10.50 | 11.00 | 11.50 | 12.00 |      |      |      |      |    |

(SIGN=3 JAUSVB=1)  
 (Q1= 8 Q2=2 Q3=1)

G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.200 KR=0.500



c)

TEMPER. DISTR.  $T \cdot V_1 / L =$

|       |       |       |       |       |       |       |       |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 0.50  | 1.00  | 1.50  | 2.00  | 2.50  | 3.00  | 3.50  | 4.00  | 4  |
| 5.50  | 6.00  | 6.50  | 7.00  | 7.50  | 8.00  | 8.50  | 9.00  | 9  |
| 10.50 | 11.00 | 11.50 | 12.00 | 12.50 | 13.00 | 13.50 | 14.00 | 14 |

(SIGN=1 JAUSVB=1)  
 (Q1=18 Q2=1 Q3=1)

G1=1.280 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.200 KR=0.500

Abb. 22  
 Temperaturprofile für die 3 Ansätze a), b) und c)

dritten Fall dagegen erst knapp vor dem "rechten" Rand der Wechselwirkungszone. Im ersten Fall läuft der Stoss relativ bald aus der Wechselwirkungszone heraus, und die Strömung geht in der Wechselwirkungszone in den Unterschallbereich über. Dagegen bleibt der Stoss im zweiten und im dritten Fall in der Wechselwirkungszone stehen, und die Strömung bleibt nahezu in der gesamten Wechselwirkungszone im Überschallbereich.

Die Unterschiede zwischen den ersten beiden Bildern lassen sich leicht erklären: Die Vernachlässigung der Ionisationsenergie im Fall a) hat eine erhebliche Erhöhung der Temperatur und damit auch des Druckes im Bereich zwischen dem primären und dem reflektierten Stoss zur Folge. Damit wird der reflektierte Stoss räumlich und zeitlich relativ früh gebildet und auch schnell aus der Wechselwirkungszone "herausgedrückt".

Dagegen ist im Fall b) die Ionisationsenergie richtig berücksichtigt und im Fall c) in guter Näherung. Der Entzug der Ionisationsenergie aus der Strömung hält Temperatur und damit Druck im Wechselwirkungsbereich so niedrig, dass sich der reflektierte Stoss gerade noch ausbilden kann. Die Ähnlichkeit des Verlaufs der Charakteristiken und Stossfronten in den Fällen b) und c) zeigt, dass der Mittelwert für  $\gamma_{eq}$  in c) richtig gewählt wurde.

In Abb.21 sind die Druckverläufe für die drei Fälle über der x-Achse dargestellt. Die Druckerhöhung bei Vernachlässigung der Ionisationsenergie ist im Fall a) (oberes Bild) deutlich grösser als in den anderen beiden Fällen, in denen ein Teil der Energie für Ionisierungsarbeit "verbraucht" wird. Im Fall c) (unteres Bild) ist aber auch eine Abweichung des Drucks vor dem primären Stoss von dem der beiden anderen Fälle zu beobachten. Für den Verlauf des Reflexionsprozesses ist dieser andere Ausgangsdruck aber irrelevant, da die Wechselwirkungsvorgänge durch die Veränderungen des primären Stosses kaum beeinflusst werden, solange die Strömungsmachzahl  $M_1$  hinter ihm den richtigen Wert hat.

Am deutlichsten macht sich aber der Einfluss der Ionisationsenergie im Temperaturverlauf bemerkbar. Abb. 22 zeigt den Temperatur-

verlauf über der x-Achse für die 3 diskutierten Fälle. Ohne Ionisation (oberes Bild) ist die Temperaturerhöhung hinter dem primären Stoss mehr als doppelt so gross wie bei den Fällen b) und c). Diese zeigen untereinander wieder grosse Ähnlichkeit, wobei allerdings, wie beim Druckverlauf, darauf hingewiesen werden muss, dass auch die Temperatur im Vorland des primären Stosses "passend" gewählt wurde.

Da die Profile der übrigen Strömungsparameter im wesentlichen das anhand der letzten Bilder geschilderte Strömungsverhalten widerspiegeln, wird hier auf ihre Darstellung verzichtet.

Die im Ansatz c) benutzten Mittelwerte für den Isentropenexponenten ( $\bar{\gamma}_{eq} = 1.28$ ) und für die Leitfähigkeit ( $\bar{\sigma} / \sigma_1 = 1.25$ ) gelten, wie zusätzliche Rechnungen gezeigt haben, sowohl für schwache als auch für starke Wechselwirkung.

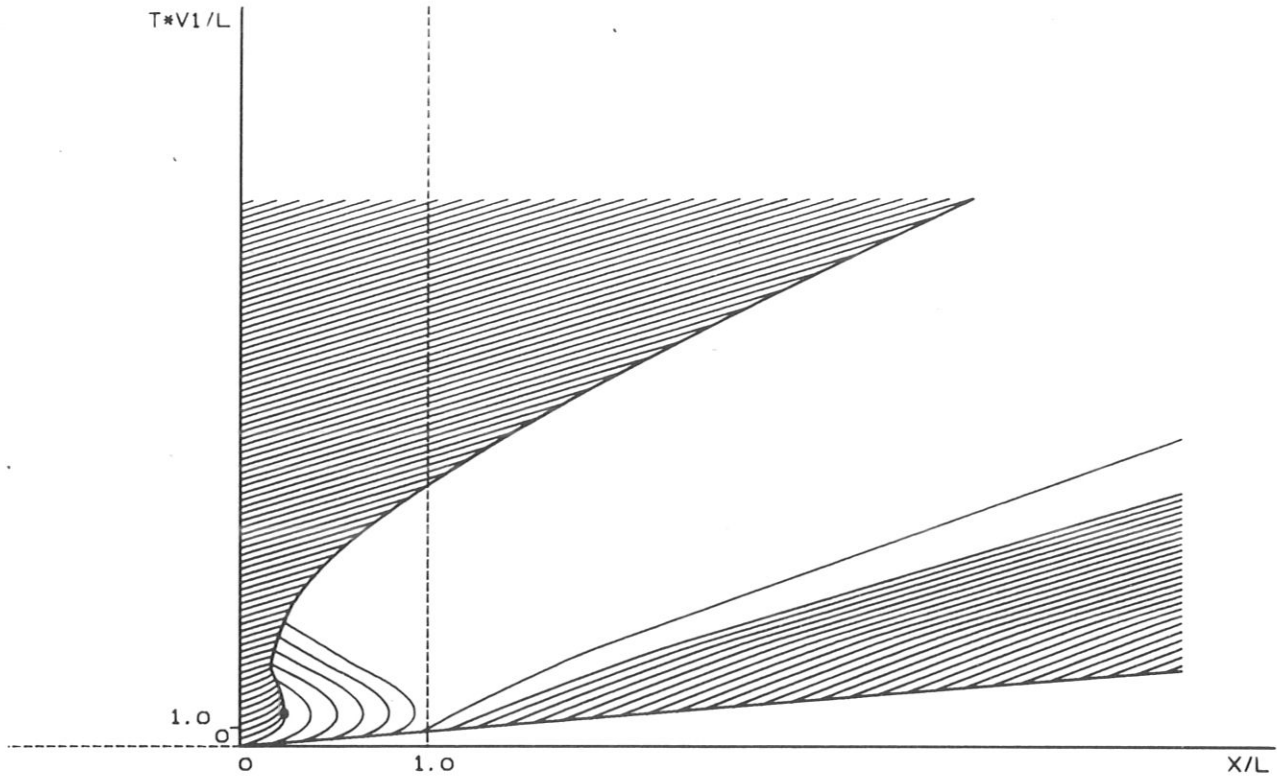
#### 7.4 Zwei Sonderfälle

Allgemeinere theoretische Überlegungen haben gezeigt, dass "reflektierte" Stösse auch strömungsabwärts (nach rechts) laufen können. Solche Stösse waren bei Experimenten im IPP nie beobachtet worden. Auch bei den bisher in dieser Arbeit behandelten Modellrechnungen ergaben sie sich prinzipiell nicht. Es erschien deshalb interessant, durch Änderung der Bedingungen das Auftreten von derartigen nach rechts laufenden sekundären Stössen zu erzwingen. Dies gelang auf zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen:

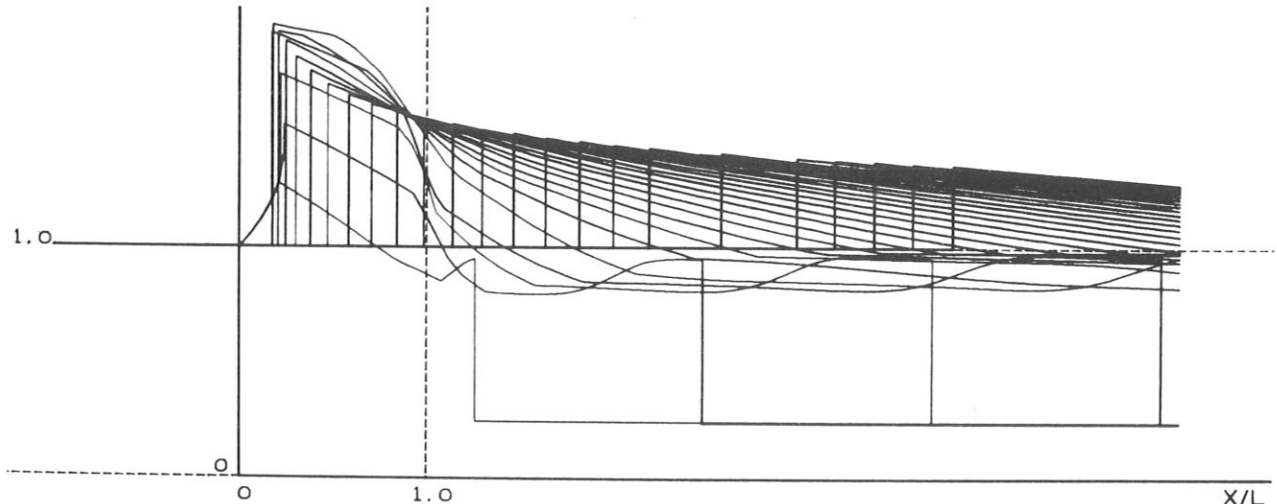
- a) Ein Wechselwirkungsprozess, der in der bisher geschilderten Weise im Wechselwirkungsbereich zum Auftreten eines reflektierten Stosses geführt hat, wird dann geändert, indem der Wechselwirkungsparameter  $N$  stark reduziert wird oder gar zu Null gesetzt wird. Das kann im Experiment z.B. durch Abschalten des Magnetfeldes oder durch Zuschalten hoher Aussenwiderstände verwirklicht werden.

Abb. 23 stellt einen solchen Vorgang dar. Die erste Phase des hier dargestellten Prozesses ist identisch mit dem im Kapitel

FRS538 13. JUN. 72 01 +



CHARACTERISTIC PLANE (SION=3 JAUSVB=1 Q1= 16 Q2=1 Q3=1)  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.800 KR=0.500 KV=0.0

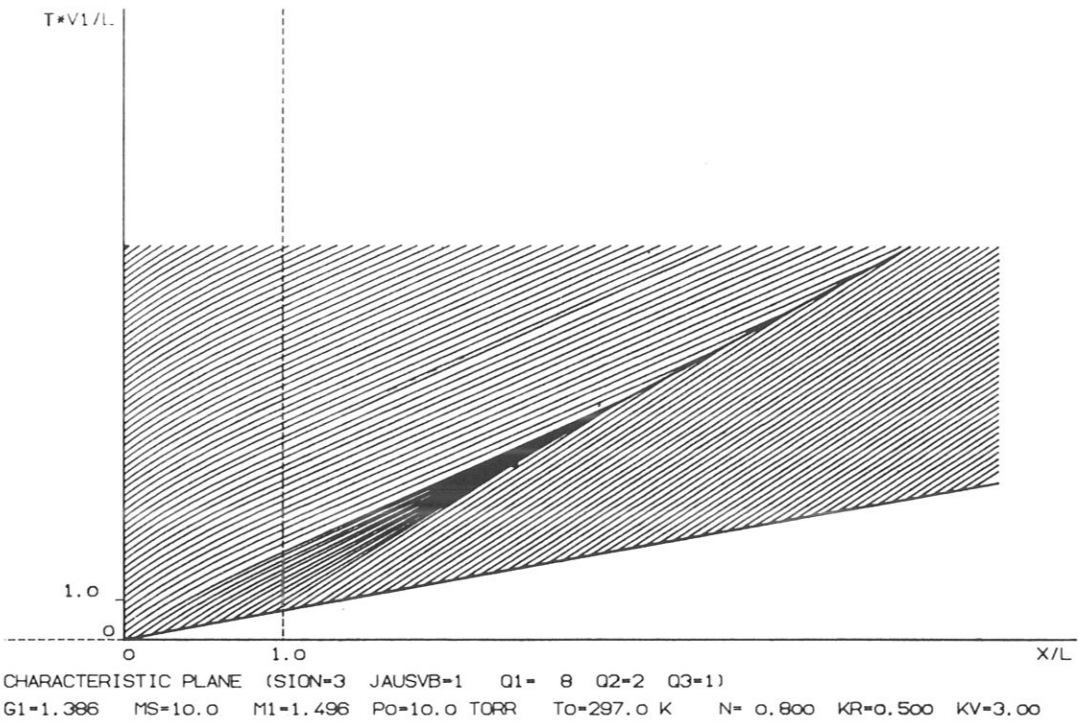


DENSITY DISTR. T\*V1/L= 1.00 2.00 3.00 4.00 5.00 6.00 7.00 8.00 9.00 10.00  
 ( SION=3 JAUSVB=1 ) 11.00 12.00 13.00 14.00 15.00 16.00 17.00 18.00 19.00 20.00  
 ( Q1= 16 Q2=1 Q3=1 ) 21.00 22.00 23.00 24.00 25.00 26.00 27.00 28.00 29.00  
 G1=1.386 MS=10.0 M1=1.496 Po=10.0 TORR To=297.0 K N= 0.800 KR=0.500 KV=0.0

Abb. 23

Charakterisitiken-Ebene und Dichteprofile für den Fall, dass die Wechselwirkung plötzlich abgebrochen wird, nachdem der reflektierte Stoss entstanden ist.

FRS160 9. MAI 72 01 +



FRS160 9. MAI 72 03 +

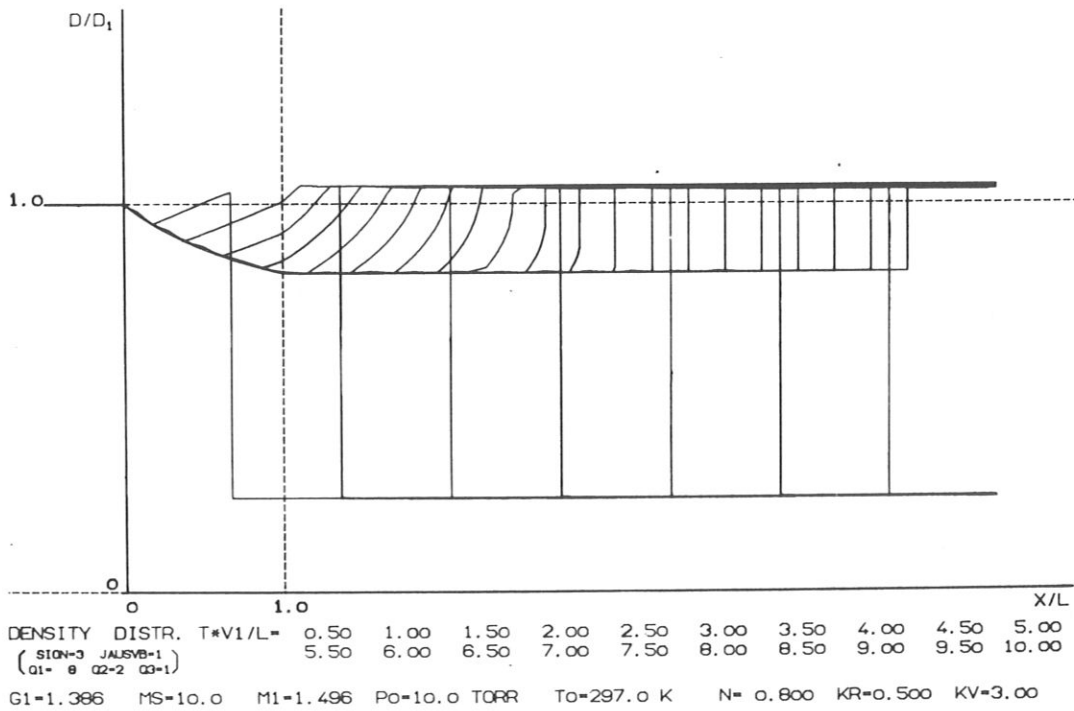


Abb. 24

Charakteristiken-Ebene und Dichteprofile für den Fall, dass eine starke, der EMK im Plasma entgegengesetzte Spannung an die Elektroden angelegt wird.



7.1 behandelten Beispiel mit  $N = 0.8$ . Vom Zeitpunkt  $t \cdot v_1/L = 4$  an wurde  $N = 0$  gesetzt. Damit hört die Beschleunigung des reflektierten Stosses auf, und er wird schliesslich nach rechts aus der Wechselwirkungszone herausgespült. Wie die Dichteprofile zeigen, nimmt die Stoss-Stärke dabei ab. Ein solcher Stoss wird sich also im Laufe der Zeit auflösen.

- b) Anstatt dem Plasma im Wechselwirkungsbereich mit Hilfe von äusseren Widerständen Energie zu entziehen, wurde an die Elektroden eine genügend grosse, der EMK entgegengerichtete Spannung angelegt. Auch dies ist im Experiment z.B. durch Zuschalten von Kondensatoren möglich. Damit wird die Strömung durch eine Lorentz-Kraft in Strömungsrichtung beschleunigt.

Abb. 24 stellt einen Fall dar, bei dem an den Elektroden von Anfang an eine Spannung angelegt war, die dreimal so gross wie die  $vBh$ -EMK des Plasmas ist. Die Beschleunigung führt strömungsabwärts ausserhalb der Wechselwirkungszone zur Ausbildung einer sekundären Stossquelle, die, wie die Dichteprofile zeigen, gegen die Strömung anläuft. Im hier gezeigten Beispiel bildet sich der neue Stoss nach einer Zeit  $t \cdot v_1/L \approx 5$ .

Im Gegensatz zum Fall a) ist ein solcher Stoss stabil, wird also nicht mit der Zeit abgebaut.

## 8. VERGLEICH ZWISCHEN MESSRESULTATEN UND RECHENERGEBNISSEN

---

Die Ergebnisse der analytischen und der numerischen Untersuchungen in den Kapiteln 4, 5 und 7 geben einen umfassenden Überblick über die bei unterschiedlichen Bedingungen zu erwartenden Vorgänge im Rahmen des Wechselwirkungsprozesses. Inwieweit die Ergebnisse dieser theoretischen Untersuchungen geeignet sind, die wirkliche Situation, d.h. die experimentellen Resultate in befriedigender Weise zu beschreiben, kann jedoch erst durch eine Gegenüberstellung von Mess- und Rechenergebnissen geprüft werden, die mit den gleichen Ausgangsdaten gewonnen wurden.

Die Vorlandparameter  $M_{so}$ ,  $p_o$  und  $T_o$  sind im Experiment in relativ weiten Grenzen wählbar und genau messbar. Für einige Kombinationen dieser Parameter wurden im IPP Mess-Serien durchgeführt. Diese Werte konnten deshalb sofort in die Rechnungen eingesetzt werden.

Auch die Magnetfeldstärke  $B_o$  und die Länge des Wechselwirkungsbereiches  $L$  sind im Experiment wählbar. Bei den Mess-Serien im IPP war eine magnetische Induktion von  $B_o \leq 2$  T erzielbar und eine Länge der Wechselwirkungszone bis zu 12 cm. Unter Zuhilfenahme der gerechneten Stossfrontparameter hinter dem primären Stoss konnten deshalb auch experimentell mögliche Wechselwirkungsparameter  $N$  ermittelt und in die Rechenprogramme eingesetzt werden.

Dagegen ist die Bestimmung des Lastfaktors  $k$  wegen des im Experiment auftretenden, nicht direkt messbaren, Grenzschichtwiderstandes im allgemeinen schwierig und nur über Strommessungen näherungsweise möglich. Das gilt auch für die Grösse  $k_1$ . Anstelle des Lastfaktors (bzw. des im ersten Ansatz benutzten effektiven Aussenwiderstandes  $\hat{r}_a$ ) kann aber möglicherweise direkt die Stromdichte nach dem 2. Ansatz (vgl. Kapitel 3.3) aus gemessenen Strömen ermittelt und in die Rechnungen eingesetzt werden. Beide Möglichkeiten boten die Messungen im IPP, da durch Strommessungen mit Rogowskispulen an vielen separaten

Elektrodenpaaren nicht nur der zeitliche, sondern auch der räumliche Stromverlauf soweit bekannt war, dass sinnvolle Stromdichteverteilungen  $j(x,t)$  daraus abgeleitet werden konnten.

Um den Wert der verschiedenen Möglichkeiten gegeneinander abwägen zu können, wurden Rechnungen mit beiden Ansätzen durchgeführt und mit Messungen, die im IPP vorlagen /9/, verglichen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sollen im folgenden erläutert werden.

Die Abb.25 zeigt das Schmierinterferogramm eines Wechselwirkungsprozesses, also das experimentell produzierte Bild einer x-t-Ebene mit den Bahnlinien der primären und der reflektierten Stossfront. Daneben zeigt sie die Plots von x-t-Ebenen, die mit 3 verschiedenen Ansätzen gewonnen wurden, und deren Massstäbe auf den des Interferogrammes abgestimmt sind.

Das Schmierinterferogramm wurde durch Abbilden der Kanalachse im Elektrodenbereich der Wechselwirkungskammer über einen achsenparallelen Spalt auf den rotierenden Film einer Trommelkamera gewonnen. Die Interferenzstreifen wurden parallel zum Schmierpalt eingestellt. Damit konnten die Dichtesprünge in der Strömung, also die Stossfronten, besonders deutlich gemacht werden. Der Elektrodenbereich ist im Interferogramm durch die 4 Schatten der Elektrodenbügel angedeutet. Dieser Bereich wurde als Wechselwirkungszone betrachtet. Auf dem Bild sind unten die einfallende Stossfront, oben (etwa 400  $\mu$ sec später) die Kontaktfront zum kalten Treibergas zu erkennen. Letztere unterbricht den Strom und schliesst damit die Testzeit ab. Das Interferogramm zeigt deutlich das Auftreten eines reflektierten Stosses auf der Höhe des vierten Elektrodenbügels (von links). Er wird mit der Zeit schneller und läuft dann strömungsaufwärts aus der Wechselwirkungszone heraus. Auf dem Bild ist noch eine dichte Schar von nahezu parallelen Linien, vor allem im Bereich des reflektierten Stosses, zu erkennen. Sie wird durch lokale Inhomogenitäten des Plasmas verursacht, die mit Strömungsgeschwindigkeit laufen /11/. Aus ihrer Neigung in der x-t-Ebene kann die lokale Strömungsgeschwindigkeit ermittelt werden.

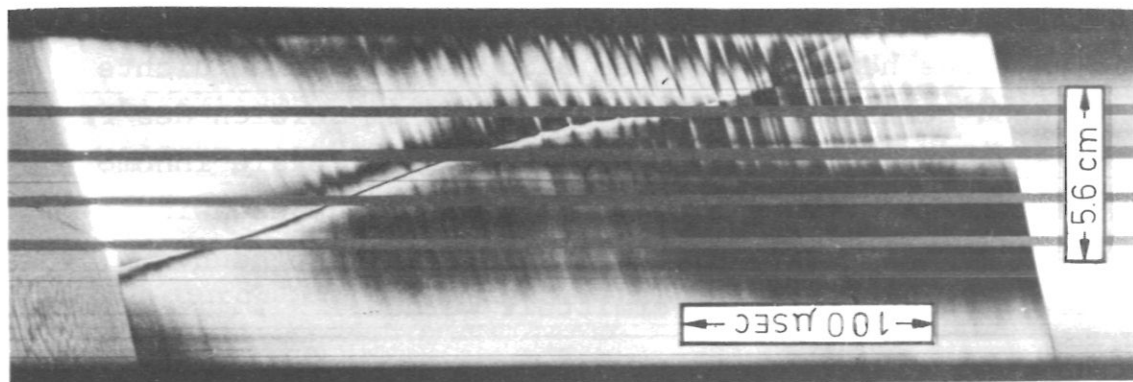
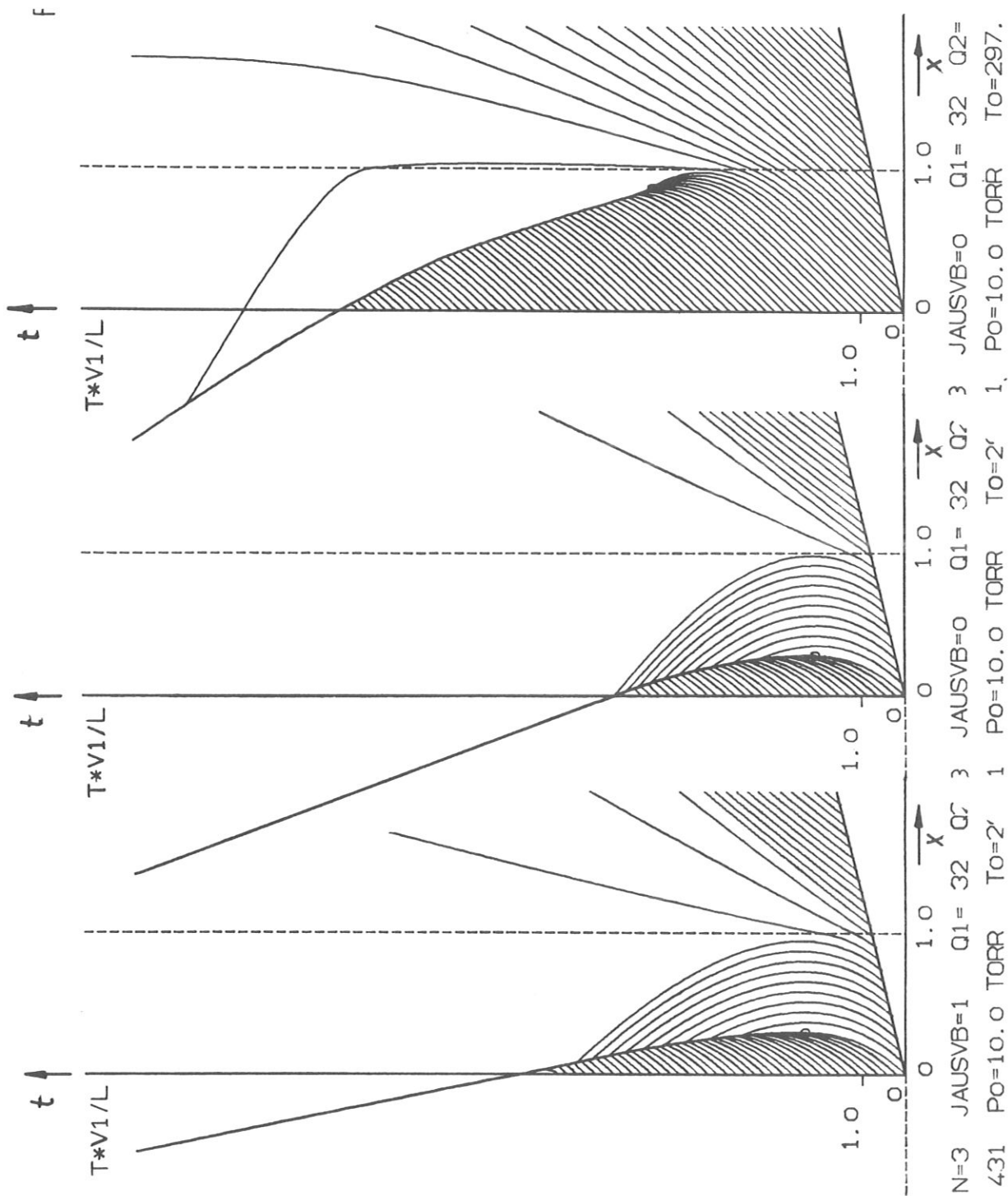


Abb. 25

Gegenüberstellung von Mess- und Rechenergebnissen bei vergleichbaren Wechselwirkungsbedingungen. Das Schmierinterferogramm wurde bei parallel zum Schmierstreifen eingestellten Interferenzstreifen aufgenommen. Die drei geplotteten x-t-Ebenen wurden mit 3 verschiedenen Ansätzen für den Stromdichteverlauf gewonnen und in demselben Mass-Stab wie das Interferogramm dargestellt.

Die drei Plots entsprechen drei Rechnungen für denselben Wechselwirkungsprozess, die mit verschiedenen Näherungsansätzen durchgeführt wurden. Auf den Plots ist keine Kontaktzone zu sehen, da die Plasmaströmung als unbegrenzt ausgedehnt angenommen wurde.

Der Verlauf der Stossfronten und der Charakteristiken in der ersten, Rechenergebnisse darstellenden, x-t-Ebene wurde unter Verwendung des ersten Ansatzes für die Stromdichte gewonnen. Es wurde also der Randwert  $\tilde{r}_a = \text{const}$  gesetzt. Der Wert für  $\tilde{r}_a$  wurde mit Hilfe des Lastfaktors  $k_1$  aus der folgenden Beziehung ermittelt:

$$\tilde{r}_a = \frac{k_1}{1-k_1} \cdot \frac{1}{\sigma_1} \quad (78)$$

mit

$$k_1 = 1 - \frac{\overline{j_{exp}}}{\sigma_1 v_1 \beta_0} \quad (79)$$

Darin ist

$$\overline{j_{exp}} = \frac{\sum_{\nu=1}^4 \int_{t_0}^{t_k} j_{el,\nu} dt}{F \cdot (t_k - t_0)} \quad (80)$$

- mit  $I_{el,\nu}$  : gemessener Strom an der  $\nu$ -ten Elektronenreihe  
 $F$  : Querschnittsfläche des gesamten Elektrodenbereichs  
 ( $F = L \cdot b$ )  
 $t_0$  : Zeitpunkt des Eintritts der primären Stossfront in den Elektrodenbereich  
 $t_k$  : Zeitpunkt, zu dem die Kontaktfront den Elektrodenbereich verlässt.

Die beiden letzten Bilder von x-t-Ebenen in Abb.25 wurden unter Verwendung des zweiten Ansatzes gewonnen. Bei der zweiten Rechnung wurde dabei die Stromdichte als konstanter mittlerer Wert gem. Gl.(80), dagegen bei der dritten als Orts- und Zeitfunktion, entsprechend den gemessenen Stromverläufen, eingesetzt. Diese gemessenen Stromverläufe, die aus den Signalen von Rogowskispulen an den im Experiment benutzten vier Elektrodenreihen gewonnen wurden, sind im oberen Teil der Abb.26 wiedergegeben. Darunter sind Polygonzüge, die für die Rechnung verwendet wurden, dargestellt.

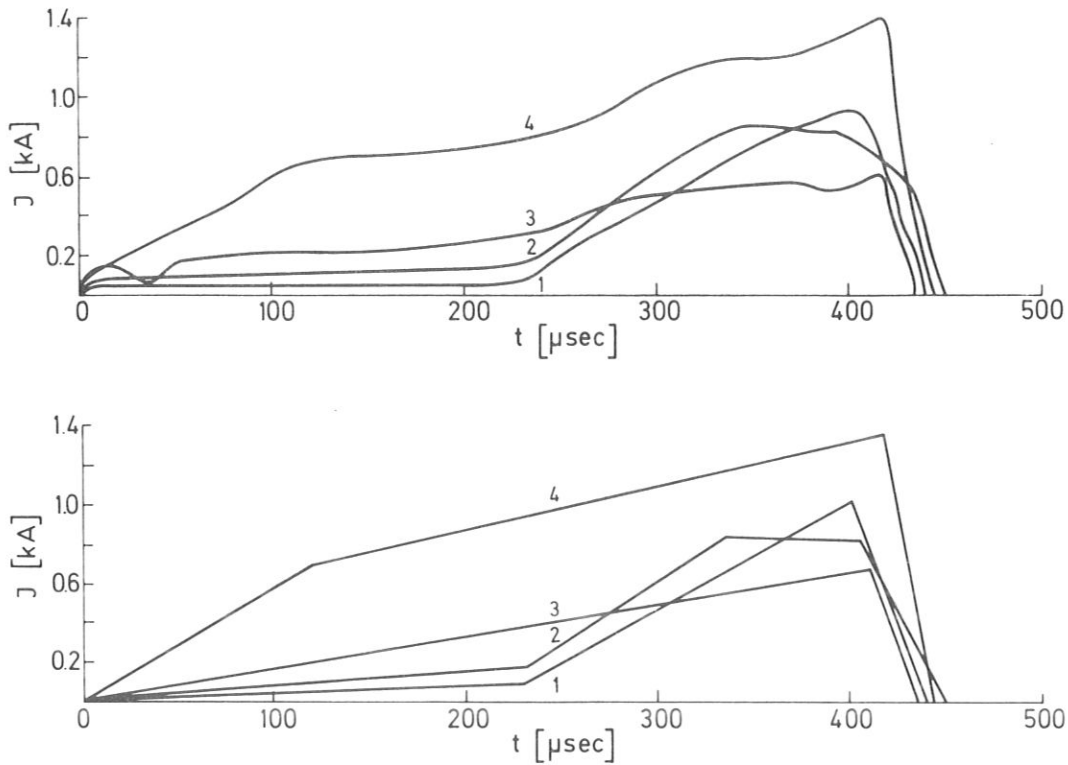


Abb. 26

Gemessene Stromverläufe, die aus demselben Experiment gewonnen wurden wie das Interferogramm in Abb. 25. Das obere Diagramm zeigt die an den 4 im Experiment benutzten Elektrodenreihen gemessenen Stromkurven; das untere die entsprechenden Näherungskurven, die in die Rechnungen eingesetzt wurden.

Ein Vergleich zwischen dem Interferogramm und der ersten gerechneten  $x$ - $t$ -Ebene zeigt nur qualitative Übereinstimmung: Eine reflektierte Stossfront entsteht, sie entsteht innerhalb des Wechselwirkungsbereiches, sie verlässt ihn strömungsaufwärts. Dagegen fehlt die quantitative Übereinstimmung: Weder Entstehungs-ort noch Entstehungszeit noch Endgeschwindigkeit des reflektierten Stosses (nachdem er die Wechselwirkungszone verlassen hat) stimmen in Theorie und Experiment überein.  $k_1$  wurde hier wegen  $\tilde{r}_a = \text{const}$  direkt mit Hilfe der Gl. (79) aus  $\bar{j}_{\text{exp}}$  gewonnen. Da  $j$  am Anfang, wie Abb. 26 zeigt, aber viel kleiner als  $\bar{j}_{\text{exp}}$  ist, ist auch  $k_1$  viel zu klein angenommen und damit auch  $\tilde{r}_a$  zu klein. Das hat zur Folge, dass die hohe Anfangsstromdichte (vor allem durch die Wirkung der  $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte) sehr bald zum Entstehen des reflek-

tierten Stosses führt, der also schon nahe dem linken Rand des Wechselwirkungsbereiches und zu einem frühen Zeitpunkt entsteht. - Später dagegen verhindert der konstante effektive Aussenwiderstand, dass die Stromdichte ihre volle Höhe erreicht, und die Beschleunigung des reflektierten Stosses wird begrenzt. - Da die massgebende Stromdichte in diesem Fall über zwei aufeinander folgende Näherungen hinweg ermittelt wurde, ist die mangelnde Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment auch prinzipiell nicht verwunderlich.

Die zweite berechnete x-t-Ebene, die mit konstanter mittlerer Stromdichte gewonnen wurde, stellt schon eine bessere Näherung dar: Sie zeigt nämlich eine befriedigende Übereinstimmung in der Endgeschwindigkeit des reflektierten Stosses. Dagegen weichen Ort und Zeit der Entstehung des reflektierten Stosses weiterhin von den gemessenen Werten ab. Sie stimmen hingegen praktisch mit denen des ersten Ansatzes überein. Das beruht darauf, dass auch die Werte von  $j$  am Anfang übereinstimmen. Während nun im vorhergehenden Fall  $j$  wegen fallender EMK bei konstantem  $\tilde{r}_a$  im weiteren Verlauf des Wechselwirkungsprozesses abnehmen musste, ist in diesem 2. Fall aber  $j = \bar{j}_{\text{exp}} = \text{const}$  gesetzt. Deshalb wird die reflektierte Stossfront hier stärker beschleunigt. - Da das benutzte  $\bar{j}_{\text{exp}}$  den wirklichen gemessenen Mittelwert der Stromdichte darstellt, ist sofort verständlich, dass die integralen Effekte der Wechselwirkung, die sich in der Geschwindigkeit der reflektierten Stossfront ausserhalb des Wechselwirkungsbereiches widerspiegeln, richtig beschrieben werden.

Beim dritten dargestellten Rechenergebnis ist die Übereinstimmung in der Endgeschwindigkeit des reflektierten Stosses zwar nicht mehr ganz so gut, dafür ist aber hier, im Gegensatz zu den anderen beiden Fällen, eine sehr gute Übereinstimmung von Entstehungs-ort und -zeit des reflektierten Stosses erreicht. Das liegt daran, dass durch Einsetzen der gemessenen Stromverläufe auch der zeitliche Einfluss der Relaxations- und Grenzschichteffekte auf den Strom berücksichtigt wird: Die Relaxation hat nämlich eine erheblich verzögernde Wirkung auf den Beginn des Wechselwirkungsprozesses. Damit wird auch klar, dass die Stromdichte ein sehr empfindlicher Parameter für den Entstehungsprozess des reflektierten Stosses ist.

Während schon die Ergebnisse des Kapitels 7 erkennen liessen, dass alle wesentlichen gasdynamischen Effekte vom hier benutzten Modell beschrieben werden, zeigt der Vergleich mit dem Experiment, dass die Rechenergebnisse auch quantitativ richtig sind und die theoretische Beschreibung der Experimente sogar im Detail mit den Messergebnissen übereinstimmt. - Die zuletzt gezeigten Rechenergebnisse geben dem Experimentator darüberhinaus Gewissheit, dass die an vielen Elektroden im Wechselwirkungsbereich gemessenen Ströme ein verlässliches Abbild der Stromdichteverteilung im Plasma darstellen, einer Grösse, die sonst der Messung kaum zugänglich ist.



## 9. ZUSAMMENFASSUNG

Instationäre Prozesse der Wechselwirkung zwischen Plasmaströmungen hinter starken Stosswellen und Quermagnetfeldern wurden theoretisch untersucht. Nach der Aufstellung des Modells wurden in einem analytischen Teil grundsätzliche Fragen des Entstehungsvorganges eines reflektierten Stosses behandelt. Dabei zeigte sich, dass unter bestimmten Voraussetzungen Entstehungsort und -zeit des reflektierten Stosses schon durch relativ einfache Rechnungen ermittelt werden können.

Der Verlauf des gesamten Wechselwirkungsprozesses konnte jedoch nur durch die numerische Lösung des vollständigen mathematischen Problems ermittelt werden. Anhand der geplotteten Ergebnisse der Rechnungen konnten alle wesentlichen Effekte des Wechselwirkungsprozesses geklärt werden. Insbesondere wurden dabei die Einflüsse der Stärke der Wechselwirkung und der Ionisationseffekte ausführlich diskutiert. Abschliessend wurden Messresultate und Rechenergebnisse miteinander verglichen. Dabei wurden für die Rechnungen 3 verschiedene Näherungsansätze zur Bestimmung der Stromdichte verwendet. Bei allen 3 Ansätzen wurden experimentelle Stromwerte für die Rechnungen benutzt. Die beste Übereinstimmung lieferten Rechnungen, bei denen die gemessenen Stromverläufe als Funktionen von Ort und Zeit direkt eingesetzt wurden. Damit konnte auch der Einfluss der Relaxationseffekte auf die Stromdichte berücksichtigt werden, was zu einer sehr guten Übereinstimmung sogar von Entstehungsort und -zeit des reflektierten Stosses führte. Diese Ergebnisse zeigen somit, dass die an den Elektroden gemessenen Stromverläufe ein verlässliches Abbild des Stromdichteverlaufs im Plasma darstellen.

## L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- 1 H.J. Pain, P.R. Smy: Proc. Phys. Soc. 76, 849 (1960)
- 2 B. Zauderer: Phys. Fluids 11, 2577 (1968)
- 3 H. Klingenberg: Z. Naturforsch. 23a, 1929 (1968)
- 4 H. Klingenberg: Z. Naturforsch. 24a, 540 (1969)
- 5 J.H. de Leeuw: "The Interaction of a Plane Shock Wave with a Steady Magnetic Field", Univ. of Toronto, Inst. of Aerophysics, Rep. No. 49 (1958)
- 6 E. Rebhan: "Elektromagnetische Erzeugung von Stosswellen mit elektromagnetischen Feldern", Bericht IPP, Garching 3/28 (1965)
- 7 M.R. Johnson: Phys. Fluids 10, 539 (1967)
- 8 F. Sardei, K. Willeke: Plasma Physics 13, 999 (1971)
- 9 K. Willeke, W. Zimmermann, H. Muntenbruch, F. Sardei: Z. Naturforsch. 25a, 786 (1970)
- 10 K. Willeke, W. Zimmermann, H. Muntenbruch: in Vorbereitung
- 11 W. Zimmermann: "Untersuchung der Relaxationseffekte hinter sekundären Stossfronten in stosswellengeheizten und teil-ionisierten Argonplasmen", Dissertation TU München (1972)
- 12 J. Rosciszewski, W. Gallaher: "Shock Tube Flow Interaction with an Electromagnetic Field", Proc. 7th Int. Shock Tube Symp., Univ. of Toronto (1969)

- 13 A.H. Shapiro: "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow", Vol. I (1953), Vol. II (1954), The Ronald Press Company, New York
- 14 A.B. Cambel: "Plasma Physics and Magnetofluidmechanics", McGraw-Hill Book Compansc Inc., 137 (1963)
- 15 G.W. Sutton, A. Sherman: "Engineering Magneto hydrodynamics", McGraw Hill Book Compansc Inc., 473 (1965)
- 16 E. Becker: "Gasdynamik", B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 46 (1965)
- 17 J.F. Clarke, M. McChesney: "The Dynamics of Real Gases", Butterworths, London, 181 (1964)
- 18 S.I. Pai: "Magnetogas dynamics and Plasma Dynamics", Springer Verlag, 158 (1962)
- 19 M. Scheibe: "The Interaction between a Strong Shock Wave and an Inhomogeneous Magnetic Field", Ph.D.Thesis, Univ. of Maryland (1958)
- 20 W. Finkelburg, H. Maecker: "Elektrische Bögen und thermisches Plasma" in Handbuch d. Physik, Bd. XXII, Gasentladungen, Springer Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 344 (1956)
- 21 L. Spitzer: "Physics of Fully Ionized Gases", Interscience, New York, 72 und 83 (1956)
- 22 R. Courant, K.O. Friedrichs: "Supersonic Flow and Shock Waves", Interscience, London, 81 (1948)
- 23 H. Oertel: "Stossrohre", Springer Verlag, Wien - New York, 272 (1966)

- 24 H. Nett: "Überlegungen zum Bau eines Membran-Stosswellenrohres für Plasmaexperimente und erste Messungen", Bericht IPP, Garching 3/43 (1966)
- 25 R. Sauer: "Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen", Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 134 (1958)
- 26 R. Sauer: "Nichtstationäre Probleme der Gasdynamik", Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 94 (1966)
- 27 P.D. Lax, B. Wendroff: Comm. Pure Appl. Math., 13, 217 (1960)
- 28 M.Y. Jaffrin: Phys. Fluids 8, 606 (1965)
- 29 A. Unsöld: "Physik der Sternatmosphären", Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 596 (1955)

A N H A N G 1

Die Abschätzung der Quotienten  $(n_a Q_{ea}) / (n_i Q_{ei})$  soll für den Gaszustand hinter dem primären Stoss vor Beginn der Wechselwirkung vorgenommen werden. Aus den im Experiment oft benutzten Vorlandparametern des primären Stosses  $p_0 = 10$  Torr,  $T_0 = 297^\circ\text{K}$  und der Stossmachzahl  $M_s = 9.6$  ergeben sich hinter dem primären Stoss die Druck- und Temperaturwerte  $p_1 = 1163$  Torr,  $T_1 = 8585^\circ\text{K}$ . Für diese Werte liefert die Sahagleichung (11) einen Ionisationsgrad von  $\alpha = 0.0033$ . Daraus und mit Hilfe der thermischen Zustandsgleichung (12) lassen sich die Ionen- und Neutralteilchendichten  $n_i$  und  $n_a$  bestimmen:

$$n_i = \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{p}{kT} = 4.31 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \quad (1A)$$

$$n_a = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{p}{kT} = 1.31 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3} \quad (2A)$$

Der Wirkungsquerschnitt für die Elektron-Atom-Stösse  $Q_{ea}$  kann mit Hilfe eines Näherungspolynoms nach Jaffrin /28/ abgeschätzt werden. Daraus ergibt sich

$$Q_{ea} \approx 0.356 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \quad (3A)$$

Für den Coulomb-Querschnitt  $Q_{ei}$  ergibt sich nach Unsöld /29/

$$Q_{ei} \approx \frac{\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\pi}{6}} e^4}{\gamma_e \cdot h^2 T^2} \ln \Lambda = 2.1 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2 \quad (4A)$$

Aus diesen Zahlenwerten resultiert schliesslich

$$\frac{n_a Q_{ea}}{n_i Q_{ei}} \approx 0.051 \quad (5A)$$

d.h. die Elektron-Atom-Stösse können gegenüber den Elektron-Ion-Stössen vernachlässigt werden.

AN H A N G    2

Der Lastfaktor  $k$  lässt sich als Funktion von  $\sigma^*$  und  $k_1$  darstellen.

Aus den beiden Ausdrücken

$$k = \frac{\tilde{r}_a}{\tilde{r}_a + 1/\sigma} \quad ; \quad k_1 = \frac{\tilde{r}_a}{\tilde{r}_a + 1/\sigma_1} \quad (6A)$$

kann nämlich  $\tilde{r}_a$  sofort eliminiert werden.

Dabei ergibt sich nach einfacher Zwischenrechnung die Beziehung

$$\frac{1-k}{1-k_1} = \frac{1}{1+k_1(\sigma^*-1)} \quad (7A)$$

die in Gl. (4o) benutzt wird.

ANHANG 3

---

Mit Hilfe der Isentropengleichung

$$T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (8A)$$

lässt sich folgende Umformung sofort durchführen:

$$\left[ \frac{de}{d(\rho/\rho)} \right]_s = \frac{\left[ \frac{de}{ds} \right]_s}{\left[ \frac{d(\rho/\rho)}{ds} \right]_s} = \frac{p/\rho^2}{\frac{1}{\rho} \left[ \frac{d\rho}{ds} \right]_s - \frac{p}{\rho^2}} = \frac{1}{\frac{\rho}{p} \left[ \frac{d\rho}{ds} \right]_s - 1} \quad (9A)$$

Aus Gl. (15) folgt dann

$$\left[ \frac{de}{d(\rho/\rho)} \right]_s = \frac{1}{\gamma_{eq} - 1} \quad (10A)$$

AN H A N G 4

Durch partielle Differentiation der kalorischen Zustandsgleichung (13) nach  $S$  ergibt sich

$$\left[ \frac{\partial e}{\partial S} \right]_{p/\beta} = \frac{\chi}{m_a} \left[ \frac{\partial z}{\partial S} \right]_{p/\beta} \quad (11A)$$

Das Differentialquotient auf der rechten Seite lässt sich mit Hilfe der Gln. (7), (11), (12) und (13) auswerten. Das Ergebnis lautet:

$$\left[ \frac{\partial z}{\partial S} \right]_{p/\beta} = \frac{T}{\frac{\chi}{m_a} \left[ 2 + \frac{T k}{\chi} \left( \frac{2}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{5}{2} \right) \right]} \quad (12A)$$

Wird dieser Ausdruck in Gl. (11A) eingesetzt, so ergibt sich sofort die Beziehung (52).



## Danksagung

Herrn Prof. Dr. R. Wienecke danke ich sehr für die Anregung und Förderung dieser Arbeit. Den Herren Dr. H. Klingenberg und Dr. H. Muntenbruch möchte ich für ihre Unterstützung und für die vielen Diskussionen ganz besonders danken. Herrn H. Gorenflo bin ich für seine Hilfe bei der Durchführung der Rechnungen zu Dank verpflichtet. Schliesslich möchte ich allen danken, die an der Zusammenstellung der Arbeit mitgeholfen haben: Frau L. Elsholz für ihre organisatorische Unterstützung, Frl. M. Treske, Frau U. Brands und Frl. D. Beirer für die fotografischen Arbeiten, Frau R. Pollner für die Zeichnungen, Frl. C. Wallner für die Maschinenschrift der Arbeit, Frau M. Ehrlich für die Vervielfältigung der Arbeit.