

# MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Leistung von MHD-Generatoren und  
thermodynamischer Wirkungsgrad  
von geschlossenen MHD-Kraftwerksanlagen

Performance of MHD generators  
and the thermal efficiency of  
closed cycle MHD power plants

M. Salvat

IPP IV/36

April 1972

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem  
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die  
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

April 1972

(in German)

Abstract

The thermal efficiency of a nuclear power plant incorporating a gas cooled high-temperature reactor, a MHD-generator, a heat exchanger and compressors depends, among other things, on the polytropic efficiency of the MHD generator.

Since the local polytropic efficiency is reduced by heat and friction losses, realistic cycle efficiency computations must take into account the variation of the local polytropic efficiency along the length of the MHD channel.

It was pointed out already in earlier reports that for this type of power plants a Ne-Cs mixture seems to be more advantageous than a He-Cs mixture.

In the present report, results of computations pertaining to the power output of a MHD generator and to the thermal efficiency of the cycle operating with Ne-Cs as working medium are given.

It is shown that for stagnation (reactor) pressure and temperature values of 30 atm and 2000 °K (or 40 atm and 2150 °K, respectively), the thermal efficiency is about 50 %.

## EINLEITUNG

Der Wirkungsgrad einer Kernkraftwerks-Anlage, bestehend aus Reaktor, Dampferzeuger und konventionellem Dampfturbinen-Kreislauf, beträgt heute ca. 42 %. Dieser Wert kann nicht mehr wesentlich erhöht werden, da die maximale thermische und mechanische Belastung des Materials der Steigerung der Frischdampfdaten Grenzen setzen.

Der Einsatz eines MHD-Generators zwischen Reaktor und Dampfturbine wird möglich, wenn die Reaktortemperatur bzw. die Temperatur der zur Kühlung des Reaktors verwendeten Gase bis auf 2000 °K oder höher gesteigert werden kann.

Der Reaktor wird durch ein Edelgas gekühlt, welchem vor Eintritt in den MHD-Generatorkanal ein kleiner Prozentsatz ( 1 %) eines Alkali-Metalls zur Erzeugung einer elektrisch leitfähigen Mischung zugesetzt wird. Das Alkali-Metall wird teilweise ionisiert und man erhält ein teilionisiertes Plasma, dessen spezifische elektrische Leitfähigkeit einen Wert von  $\sim 2$  Mho/m erreichen kann. Damit eine genügend hohe Stromdichte ( $\sim 10^4$  Amp/m<sup>2</sup>) im Plasma erreicht werden kann, muss die  $V_g \times B$  -EMK, die diesen Strom verursacht, entsprechend hoch werden. ( $V_g$  = Gasgeschwindigkeit im MHD-Kanal,  $B$  = die senkrecht zur Gasgeschwindigkeit angelegte magnetische Induktion) Typische Werte werden:  $\sigma = 2$  Mho/m;  $K$  (Lastfaktor) = 0,7 (siehe Seite 3 für die Definition);  $v = 1500$  m;  $B = 10$  Tesla, sodass  $(1-K)vB = 2.0,3.1,5 \cdot 10^3 \cdot 10 = 0,9 \cdot 10^4$ .

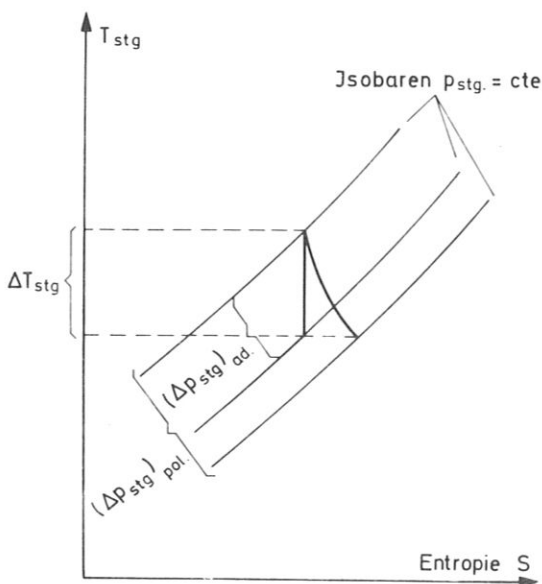


Bild 1

Der relativ grosse Widerstand des Plasmas (bzw. innere Widerstand des Generators) verursacht bei den oben genannten Stromdichten eine ohmsche Wärmeerzeugung, die eine nicht adiabatische Expansion (polytrope Expansion) des Gases zur Folge hat.

Wie das Bild 1 (in einem  $T_{\text{Stagnation}} - S$  Diagramm) zeigt, führt eine polytrope Änderung des Gases bei gegebener Änderung von  $\Delta T_{\text{stg}}$  (bzw. Enthalpiegewinn) zu  $\Delta p_{\text{poly}} > \Delta p_{\text{stg}}$ . Dies hat zur

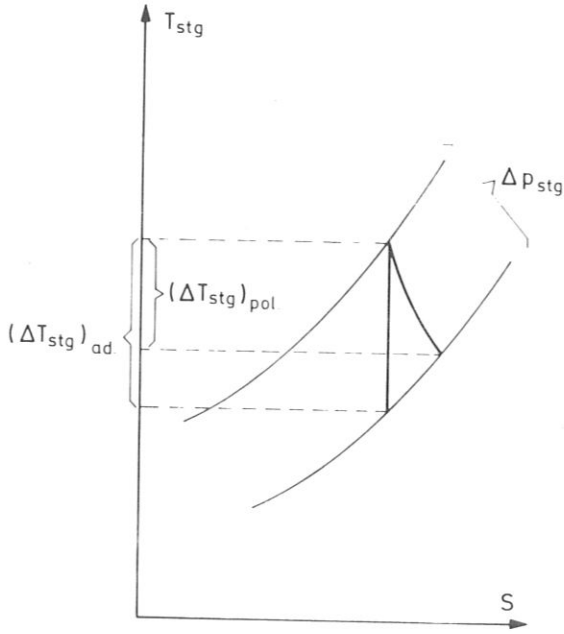


Bild 2

Folge, dass in einem geschlossenen Kreis die Arbeit des Verdichters (Enthalpie-Verlust) im Falle einer polytropen Änderung höher wird als im Falle einer isentropen Änderung. Es ist üblich, die Güte der Entspannung durch einen polytropen Wirkungsgrad  $\eta_p$  zu beschreiben, wobei (Bild 2)

$$\eta_p = \frac{(\Delta H_{stg})_{polytr}}{(\Delta H_{stg})_{adial}} \quad \text{bei gegebener } \Delta p_{stg} \quad (1)$$

(wobei bei konstanter spezifischer Wärme  $c_p$

$$\eta_p = \frac{(\Delta T_{stg})_{polytr.}}{(\Delta T_{stg})_{adial}}$$

ist.

Wegen des oben genannten Nachteils, dass sich bei polytropen Änderung die Kompressionsarbeit erhöht, wird dem polytropen Koeffizienten eine untere Grenze gesetzt, damit der Wirkungsgrad der geschlossenen

Anlage ( $\eta_K$ ) nicht unter eine gegebene Grenze sinkt (z.B.  $\eta_K$  darf nicht kleiner als 50 % werden). Im Falle des MHD-Generators stellt  $\eta_K$  ein Mass für die Belastung des Generators dar, wobei der Lastfaktor  $K$  als

$$K = \frac{R_a I}{(R_a + R_i) I} \quad (2)$$

definiert ist. ( $R_a$ ,  $R_i$  ausserer (bzw. innerer) Widerstand pro Elektrodenpaar,  $I$  = Gesamtstrom pro Elektrodenpaar).

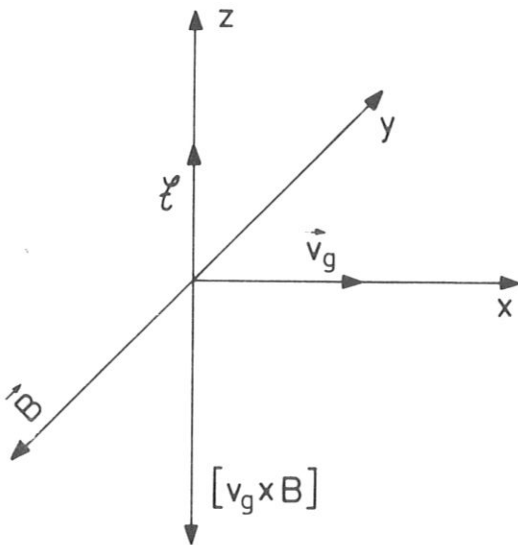


Bild 3

Man hat selbstverständlich:  $K = \frac{R_a I}{(R_a + R_i) I} = \frac{\text{Klemmspannung}}{EMK}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{V}{v_g B H} \quad (H = \text{Höhe des Kanals}) \\
 &= \frac{EH}{v_g B H} \quad (E = \text{Elektrisches Feld im Innern des Generators}) \\
 &= \frac{E}{v_g B} \\
 &= \frac{E j}{v_g B j} \\
 &= \frac{j \cdot \mathcal{E}}{v \cdot [j \times B]} \quad (j = \text{Stromdichte im Generator})
 \end{aligned} \tag{3}$$

Bild 3 zeigt die Orientierung der Vektoren, die in Gl. (3) vorkommen.

Beziehung zwischen Lastfaktor K und polytropem Wirkungsgrad  $\eta_p$   
(bzw.  $\eta_{pe}$ )

Die Beziehung zwischen K (Gl.3) und  $\eta_p$  (Gl.1) erfolgt durch Verwendung der Impuls- und Energiegleichungen, die es ermöglichen  $j \cdot \mathcal{E}$  und  $v \cdot [j \times B]$  durch Enthalpieänderungen zu ersetzen. Man hat nämlich:

1. Die Energiegleichung

$$\rho \frac{d}{dt} \left( h + \frac{1}{2} v^2 \right) = j \cdot \mathcal{E} - \frac{dQ_v}{dt} \tag{4}$$

wobei  $\frac{dQ_v}{dt}$  die Wärmeverluste pro Zeit und Volumeneinheit darstellt ( $dQ_v > 0$ ), liefert mit

$$\begin{aligned}
 j \cdot \mathcal{E} - \frac{dQ_v}{dt} &= \frac{j \cdot \mathcal{E}}{a} \quad a < 1 \\
 \rho \frac{d}{dt} \left( h + \frac{1}{2} v^2 \right) &= \frac{j \cdot \mathcal{E}}{a}
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\rho \frac{d}{dt} (c_p T_{stg}) = \frac{j \cdot \mathcal{E}}{a} = j \cdot \mathcal{E} (1+x) \tag{5'}$$

Bemerkung: Im allgemeinen  $T_{stg} = (T_{stg})_{polytr.}$  während  $(dT_{stg})_{adiab.}$  gegeben wird. Wir erhalten dann:

$$j \cdot \mathcal{E} = a \rho c_p \frac{(dT_{stg})_{polytr.}}{dt} \tag{5''}$$

2. Wir berechnen  $v \cdot [j \times B]$  auch mit Hilfe der Enthalpieänderungen, indem wir die Energiegleichung (4) mit der Impulsgleichung

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad } p + [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] - K_r \quad (6)$$

kombinieren.

Zu bemerken ist, dass die Gl. (6) einen Reibungsterm  $K_r$  enthält, der die Druckverluste durch Reibung an den Wänden berücksichtigt. In Gl. (6) wird die  $[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$ -Kraft durch  $\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{\beta}$  ( $\beta < 1$ ) ersetzt, sodass

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad } p + \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]}{\beta} = -\text{grad } p + [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] (1 + \gamma) \quad (6')$$

und diese Gleichung wird mit  $v$  multipliziert. Man erhält

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = -v \cdot \text{grad } p + \frac{v \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]}{\beta} \quad (7)$$

Man kann durch subtrahieren von (5) und (7)  $v \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$  berechnen.

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{j \cdot \mathbf{E}}{a} + v \cdot \text{grad } p - \frac{v \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]}{\beta}$$

$$\frac{v \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]}{\beta} = \frac{j \cdot \mathbf{E}}{a} + v \cdot \text{grad } p - \rho \frac{dh}{dt}$$

und mit G.. (5''):

$$\frac{v \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]}{\beta} = \rho \left\{ C_p \frac{(dT_{stg})_{polytr.}}{dt} + \frac{dp}{dt} - \rho \frac{C_p (dT)_{polytr.}}{dt} \right\} \cdot \beta \quad (8)$$

wobei  $h$  durch  $C_p(T)_{polytr.}$  und  $v \cdot \text{grad}$  durch  $\frac{dp}{dt}$  (mit  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ ) ersetzt werden.

Mit (5'') und (8) erhält man für  $K$ :

$$\begin{aligned} K &= \frac{a}{\beta} \frac{\rho C_p \frac{(dT_{stg})_{polytr.}}{dt}}{\rho C_p \frac{(dT_{stg})_{polytr.}}{dt} + \left( \frac{dp}{dt} - \rho \frac{dh}{dt} \right)} \\ &= \frac{a}{\beta} \frac{C_p (dT_{stg})_{polytr.}}{C_p (dT_{stg})_{polytr.} + \frac{dp}{\rho} - dh} \end{aligned} \quad (9)$$

Man muss jetzt  $\frac{dp}{\rho} - dh$  durch Stagnationsgrößen ersetzen. Dafür benutzt man die Beziehungen

$$\frac{p}{T^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \frac{p_{stg}}{T_{stg}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad (10)$$

zwischen statischer und Stagnationsgröße und die Beziehungen:  $\frac{p}{\rho} = rT$  und  $\frac{p_{stg}}{\rho_{stg}} = rT_{stg}$

Man erhält sofort nach Ableitung der Beziehung (10):

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{stg}} \left( \frac{dp_{stg}}{\rho_{stg}} - c_p (dT_{stg})_{polytr.} \right) &= \frac{1}{T} \left( \frac{dp}{\rho} - c_p (dT)_{polytr.} \right) & (11) \\ &= \frac{1}{T} \left( \frac{dp}{\rho} - dh \right) \end{aligned}$$

so wird Gl. (9)

$$K = \frac{a}{b} \cdot \frac{(dT_{stg})_{polytr.}}{(dT_{stg})_{polytr.} + \frac{T}{T_{stg}} \left\{ (dT_{stg})_{adiab.} - (dT_{stg})_{polytr.} \right\}}$$

und mit

$$\eta_p = \frac{(dT_{stg})_{polytr.}}{(dT_{stg})_{adiab.}} \quad (\text{Definition (1)})$$

$$K = \frac{a}{b} \cdot \frac{\eta_p}{\eta_p + \frac{T}{T_{stg}} (1 - \eta_p)} \quad (12)$$

Eine realistischere Definition des polytropen Wirkungsgrades wird durch

$$\eta_{pe} = \frac{\frac{1}{\rho} \int \xi dt}{c_p (dT_{stg})_{adiab.}} \quad \text{gegeben.}$$

da die gewonnene Energie darstellt. Nach Gl. (5"),

$$\frac{1}{\rho} \int \xi dt \quad \text{nur ein Teil von } c_p (dT_{stg})_{polytr.}$$

$$\frac{1}{\rho} \int \xi dt = a c_p (dT_{stg})_{polytr.} \quad a < 1$$

sodass

$$\eta_{pe} = \frac{\frac{1}{\rho} \int \xi dt}{(c_p dT_{stg})_{polytr.}} \cdot \frac{c_p (dT_{stg})_{polytr.}}{c_p (dT_{stg})_{adiab.}}$$

$$\eta_{pe} = a \eta_p \quad (13)$$

Diese Beziehung ermöglicht, K (Gl. (12)) wie folgt darzustellen:

$$\begin{aligned} K &= \frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{\eta_{pe}}{a}}{\frac{\eta_{pe}}{a} + \frac{T}{T_{stg}} \left( 1 - \frac{\eta_{pe}}{a} \right)} & (14) \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1 + \frac{T}{T_{stg}} \left( \frac{a}{\eta_{pe}} - 1 \right)} \end{aligned}$$

Die Umkehrung dieser Gleichung (14) liefert

$$\eta_{pe} = b \cdot \frac{K}{1 + \frac{T}{T_{stg}} \left( 1 - K \frac{b}{a} \right)} \quad (15)$$

Die Berücksichtigung der Verluste, insbesondere der Druckverluste (durch den Faktor b) führt zu einem grossen Unterschied zwischen dem idealen Fall (b = 0) und dem reellen Fall (b ≠ 0). Bei K = 0, wird

(idealer oder reeller Fall)  $\eta_{pe} = 0$

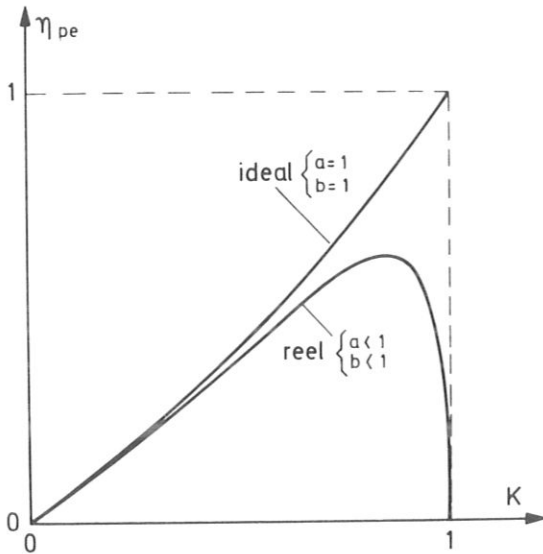


Bild 4

Bei K = 1

im idealen Fall wird  $\eta_{pe} = 1$ ; Im reellen Fall (da K = 1, j klein bedeutet), wird  $\eta_{pe} = 0$ , da b

$$\frac{j \times B}{j \times B - K_r} = \frac{\sim 0}{\sim 0 - K_r} \sim 0 \text{ wird.}$$

Das Bild 4 zeigt einen qualitativen Vergleich zwischen reellem und idealem Fall.

$\eta_{pe}$  zeigt ein Maximum kleiner als 1. Dies führt zu einer Verschlechterung des polytropen Wirkungsgrades

$\eta_{pe}$  und führt, wie am Anfang gezeigt wurde, zu einer Reduzierung des Kreiswirkungsgrades  $\eta_K$  einer geschlossenen Anlage.

Es ist deswegen von grösster Wichtigkeit, die Grösse b und a in die Rechnungen von MHD-Kanälen einzuführen.

Wir wollen für den polytropen Koeffizienten  $\eta_{pe}$  einen brauchbaren Ausdruck finden. Nach (15) ist:

$$\eta_{pe} = \frac{K}{\frac{1}{\beta} + \frac{M^2}{3} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{K}{a} \right)}$$

wobei

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\sqrt{|B|} + K_r}{\sqrt{|B|}} = 1 + \frac{K_r}{\sqrt{|B|}} = 1 + \gamma$$

b'

$$\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{|E|} + \frac{dq_r}{dT}}{\sqrt{|E|}} = 1 + \frac{dq_r}{dT} = 1 + X$$

a'

sodass

$$\eta_{pe} = \frac{K}{1 + \frac{M^2}{3}(1-K) + \gamma \left( 1 + \frac{M^2}{3} \right) - K X \frac{M^2}{3}} \quad (16)$$

Die Grösse  $\gamma \left( 1 + \frac{M^2}{3} \right) - X K \frac{M^2}{3}$  stellt zum idealen Wert von  $\eta_{pe}$  einen Korrekturfaktor dar, den wir berechnen wollen. Für den Reibungsterm  $K_r$



übernehmen wir die Formel

$$K_r = 4 \frac{C_f}{D} \rho \frac{v^2}{2} \quad (17)$$

die für eine Anlaufströmung gültig ist. (Zur Ausbildung einer Strömung mit voll entwickelter Turbulenz ist eine Rohrlänge von  $\approx 25$  Rohrdurchmesser notwendig.) Und für die Wärmeverluste übernehmen wir die Formel

$$\frac{dQ_v}{dt} = \frac{1}{2} \frac{C_f}{D} \rho v C_p (T_{stg} - T_{wand}) \quad (18)$$

sodass

$$Y = \frac{K_r}{|j\Phi|} = \frac{4 \frac{C_f}{D} \rho \frac{v^2}{2}}{\sigma v B^2 (1-K)} \quad (19)$$

$$X = \frac{\frac{dQ_v}{dt}}{|j\Phi|} = \frac{\frac{1}{2} \frac{C_f}{D} \rho v C_p (T_{stg} - T_{wand})}{\sigma v^2 B^2 K (1-K)} \quad (20)$$

und den Vergleich beider Grössen liefert:

$$\frac{X}{Y} = \frac{1}{4} \frac{C_p (T_{stg} - T_w) \left(1 + \frac{M^2}{3}\right)}{X_r T_{stg} \cdot K \frac{M^2}{3}}$$

sodass

$$\frac{K \frac{M^2}{3}}{1 + \frac{M^2}{3}} \frac{X}{Y} = \frac{1}{4} \frac{C_p}{X_r} \frac{T_{stg} - T_w}{T_{stg}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{T_{stg} - T_w}{T_{stg}}$$

Nur die Reibungsverluste spielen in Gl. (16) eine Rolle und der Ausdruck für  $\eta_{pe}$  vereinfacht sich:

$$\eta_{pe} = \frac{K}{1 + \frac{M^2}{3}(1-K) + Y \left(1 + \frac{M^2}{3}\right)} \quad (21)$$

$$\eta_{pe} = \frac{K}{1 + \frac{M^2}{3}(1-K) + \frac{\delta}{\sigma(1-K)} \frac{M}{1 + \frac{M^2}{3}}} \quad (22)$$

wobei  $\delta = 2 \frac{C_f}{D} \frac{\rho_{stg} \sqrt{X_r T_{stg}}}{B^2}$

Es ist interessant, einen Wert für  $\delta$  abzuschätzen (am Kanaleingang).

Wir übernehmen

$$C_f = 0,058 \left( \frac{\rho v x}{\mu} \right)^{-\frac{1}{5}} \quad \text{aus den Lehrbüchern,}$$

wobei wir  $x = D$  setzen.

Dabei führen wir für Neon folgende Werte

$$\begin{aligned} p_{stg} &= 4 \cdot 10^6 \frac{\text{New}}{\text{m}^2} \\ T_{stg} &= 2 \cdot 10^3 \text{ } ^\circ\text{K} \\ M &= 1,5 \\ D &= 0,5 \text{ m} \\ \mu &= 6,9 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{sec.}} \end{aligned}$$

und erhalten für  $C_f$ :

$$C_f \approx 2 \cdot 10^{-3}$$

Für  $\delta$  erhält man mit  $B = 10$ ,  $\delta = 0,5$  und für die Grösse

$$\frac{\delta}{\sigma} \cdot \frac{1}{1-K} \frac{M}{1+\frac{M^2}{3}}, \text{ (mit } K = 0,7), \text{ den wert } \frac{1,44}{\sigma}$$

sodass der durch Druckverluste verursachte Korrekturterm die Grösse  $\sim \frac{1}{\sigma}$  hat und,

$$\eta_{pe} \sim \frac{0,7}{1 + 0,75 \cdot 0,3 \cdot \frac{1}{\sigma}}$$

$$\eta_{pe} \sim \frac{0,7}{1,225 + \frac{1}{\sigma}}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass man eine elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  grösser als  $1 \frac{\text{Mho}}{\text{m}}$  am Kanaleingang haben muss, damit der Korrekturterm keinen merklichen Einfluss auf  $\eta_{pe}$  hat.

Der Einfluss des Korrekturterms nimmt mit der Distanz  $l$  vom Kanaleingang ab, da  $\rho_{stg}(l)$  und  $T_{stg}(l)$  sinken und  $\sigma(l)$  steigt.

Wir müssen dann nach Anfangsstagnationswerten suchen die es ermöglichen, einen  $\sigma \geq 1 \text{ Mho/m}$  am Kanaleingang zu erreichen.

Die entsprechenden Energiedichten  $L$  wären dann

$$L = \int \mathcal{E} = \sigma K (1-K) v^2 B^2$$

Mit  $\sigma = 1 \text{ Mho/m}$   
 $K = 0,7$   
 $v = 1500$   
 $B = 10$

findet man

$$L = 45 \text{ MW/m}^3 \text{ am Kanaleingang.}$$

Wir mussten infolgedessen das  $\sigma$  am Kanaleingang untersuchen.

### Die zur Berechnung von MHD-Kanälen notwendigen Beziehungen

Die Ermittlung von  $\sigma$  wird dadurch erschwert, dass die Formel für  $\sigma_{\text{ideal}}$

$$\sigma_{\text{id.}} = \frac{n_e e}{m_e \bar{v}_e (n_g \varphi_{eg} + n_s \varphi_{es} + n_i \varphi_{ei})} \quad (23)$$

nicht allgemein gültig ist.

Es bilden sich im Plasma infolge des Einflusses des Magnetfeldes innere geschlossene Ströme, die die Ionisierung wiederum beeinflussen (Ionisierungs-Instabilitäten). Diese geschlossenen Ströme verstärken sich bis entgegengesetzte Prozesse (wie z.B. Wärmeleitung) das Weiterwachsen der Ströme verhindert. Joulesche Wärme wird erzeugt, was man als Erhöhung des Widerstandes oder als Senkung der Leitfähigkeit auffassen kann.

Man muss einen effektiven Wert  $\sigma_{\text{eff}}$  statt  $\sigma_{\text{id.}}$  zur Berechnung der Leistung einführen. Es existieren theoretische / 2/ und numerische / 3/ Berechnungen, die den Einfluss des Magnetfeldes auf  $\sigma$  berücksichtigen.

Experimentell hat man die elektrische Leitfähigkeit von Alkali-Edelgas-Gemischen bei Drücken von  $\sim 1 \text{ atm}$  untersucht. Ein Vergleich dieses experimentellen Befundes mit den theoretischen Berechnungen zeigte, dass für die effektive Leitfähigkeit folgender Ausdruck zweckmässig scheint:

$$\sigma_{\text{eff}} = \langle \sigma \rangle \frac{\beta_{\text{cr}}}{\langle \beta \rangle} \quad (24)$$

wobei

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\langle n_e \rangle e}{m_e v_e} \quad (25)$$

$$\langle \beta \rangle = \frac{eB}{m_e v_e} \quad (26)$$

mit

$$v_e = \sum_j v_{ej} = m_e \bar{v}_e (n_g Q_{eg} + n_s Q_{es} + n_i Q_{ei}) \quad (27)$$

Dabei stellt die Grösse zwischen eckigen Klammern gemittelte Grössen dar, wobei noch zur Vereinfachung  $\langle n_e(T_e) \rangle$  mit  $n_e(\langle T_e \rangle)$  identifiziert wurde. (In der Tat unterscheiden sich  $\langle n_e \rangle$  und  $n_e(\langle T_e \rangle)$  von einem Term der 2. Ordnung in den Fluktuationen:  $\langle \Delta n_e^2 \rangle$ . Führt man (25) und (26) in (24) ein, so wird

$$\sigma_{\text{eff}} = \beta_{\text{cr}} \frac{\langle n_e \rangle e}{B} \quad (28)$$

1.  $\beta_{\text{cr}}$  stellt den Wert von  $\beta$  dar, bei dem die Ionisierungsinstabilität einsetzt. Die Ermittlung von  $\beta_{\text{cr}}$  gehört infolgedessen zur linearen Theorie. Man kann zeigen, dass  $\beta_{\text{cr}}$  durch

$$\beta_{\text{cr}}^2 = \left( \frac{d(\ln A)}{d(\ln n_e)} \right)^2 - \left( \frac{d(\ln \sigma)}{d(\ln n_e)} \right)^2 \quad (29)$$

wobei

$$A = n_e \left( \frac{3}{2} k T_e - \frac{3}{2} k T_g \right) \sum_j \frac{m_e}{m_j} v_{ej} \quad (\text{elastische Verluste})$$

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \sum_j v_{ej}}$$

Man findet leicht

$$\frac{d(\ln A)}{d(\ln n_e)} = 1 + \frac{d(\ln T_e)}{d(\ln n_e)} \frac{T_e}{T_e - T_g} + \frac{d(\ln v_{eg})}{d(\ln n_e)} A_g + \frac{d(\ln v_{es})}{d(\ln n_e)} A_s + \frac{d(\ln v_{ei})}{d(\ln n_e)} A_i \quad (30)$$

$$\frac{d(\ln \sigma)}{d(\ln n_e)} = 1 - \frac{d(\ln v_{eg})}{d(\ln n_e)} B_g - \frac{d(\ln v_{es})}{d(\ln n_e)} B_s - \frac{d(\ln v_{ei})}{d(\ln n_e)} B_i \quad (31)$$

wobei

$$A_g = \frac{v_{eg}}{\sum_j \frac{v_{ej}}{m_j}} , \quad A_s = \frac{v_{es}}{\sum_j \frac{v_{ej}}{m_j}} , \quad A_i = 1 - A_g - A_s \quad (32)$$

$$B_g = \frac{v_{eg}}{\sum_j v_{ej}} , \quad B_s = \frac{v_{es}}{\sum_j v_{ej}} , \quad B_i = 1 - B_g - B_s \quad (33)$$

2.  $\langle n_e \rangle$  wird aus der Sahagleichung ermittelt.

$$\frac{\langle n_e \rangle^2}{n_{s0} \langle n_e \rangle} = \left( \frac{2\pi m_e}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (k \langle T_e \rangle)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{eV_i}{k \langle T_e \rangle}\right) \quad (34)$$

3.  $\langle T_e \rangle$  muss zuerst dadurch bestimmt werden, dass man ohmsche Verluste gleich elastische Verluste setzt, d.h.

$$\frac{\langle j \rangle^2}{\sigma_{\text{eff}}} = \langle n_e \rangle \left( \frac{3}{2} k \langle T_e \rangle - \frac{3}{2} k T_g \right) \sum_j \frac{2m_e}{m_j} v_{ej} \quad (35)$$

wobei  $\langle j \rangle$  gleich  $\sigma_{\text{eff}} (1-K)vB$  eingesetzt wird.

Man findet

$$\langle T_e \rangle = T_g \left\{ 1 + \frac{4}{3} \beta_{cr} \beta (1-K)^2 M^2 \frac{\sum_j v_{ej}}{\sum_j v_{ej} \frac{m_e}{m_j}} \right\} \quad (36)$$

mit

$$\beta = \frac{eB}{m_e \sum_j v_{ej}} \quad (37)$$

4. Die Gleichung (1), d.h.

$$\eta_P = \frac{(dT_{stg})_{\text{polytr.}}}{(dT_{stg})_{\text{adiab.}}}$$

ist nicht anders als eine Differentialgleichung zw.  $(dT_{stg})_{\text{polytr.}}$  und  $(dp_{stg})_{\text{polytr.}}$ .  
Man hat nämlich

$$\eta_P = \frac{(dT_{stg})_{\text{polytr.}}}{\frac{1}{c_p} \frac{(dp_{stg})_{\text{polytr.}}}{\rho_{stg}}} = \left( \rho_{stg} \right)_{\text{polytr.}} \frac{(dT_{stg})_{\text{polytr.}}}{(dp_{stg})_{\text{polytr.}}} \cdot c_p$$

$$\eta_P = \frac{c_p}{r} \frac{\rho_{stg}}{T_{stg}} \frac{dT_{stg}}{dp_{stg}}$$

wobei die Bezeichnung "polytrope" nicht wieder geschrieben wurde.

$$\eta_P = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_{stg}}{T_{stg}} \frac{dT_{stg}}{dp_{stg}} \quad (38)$$

Diese Gleichung ermöglicht  $dT_{stg}$  als Funktion von  $dp_{stg}$  zu rechnen, wobei

$$\eta_P = \frac{\eta_{pe}}{\alpha} = \eta_{pe} (1+x)$$

$$\eta_P = \frac{K(1+x)}{1 + \frac{M^2}{3}(1-K) + \gamma(1 + \frac{M^2}{3})} \quad (39)$$

Mit  $x$  und  $y$  durch Gl. (19) und (20) gegeben.  $\eta_P$  ist gleichzeitig ein Mass für die "Adiabatizität" der Vorgänge im MHD-Kanal.

5. Zur Berechnung der Kanallänge hat man z.B. die Energiegleichung zur Verfügung

$$\rho C_p \frac{(dT_{stg})_{polytr}}{dt} = j \cdot \mathcal{E} (1+x)$$

und

$$\rho C_p \frac{(dT_{stg})_{polytr}}{dl} \cdot v = j \cdot \mathcal{E} (1+x) \quad (40)$$

$$\rho C_p \frac{(dT_{stg})_{polytr}}{dl} \cdot v = \frac{\sigma}{\epsilon_{eff}} K(1-K) v^2 B^2 (1+x) \quad (41)$$

Mit Hilfe der vorher abgeleiteten Gleichungen kann man die Leistung und die Länge eines MHD-Generators berechnen. Die Details der Rechnungen, wie sie mit der Rechenmaschine gemacht wurden, sind am Ende des Berichts angegeben.

### Der Kreiswirkungsgrad

Die abgeleiteten MHD-Generatordaten müssen in einer geschlossenen Anlage vom Gesichtspunkt des Kreiswirkungsgrades geprüft werden. Wir wollen diese Berechnungen auf Grund eines Beispiels erläutern. Es sei eine geschlossene Anlage, bestehend aus Hoch-Temperatur-Reaktor,

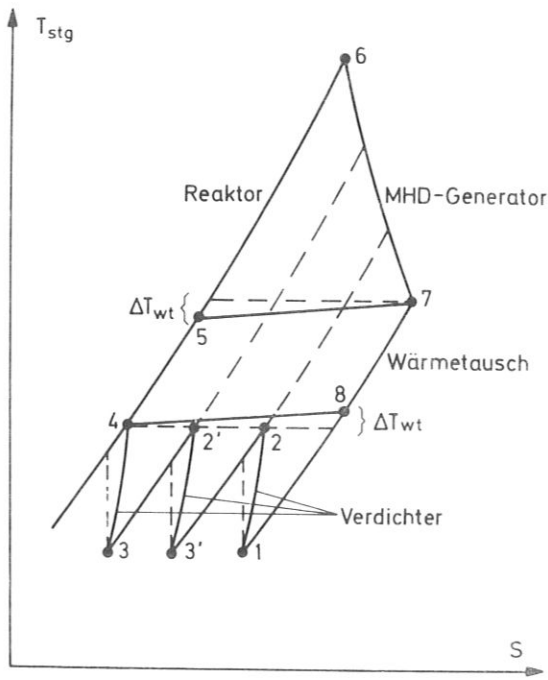


Bild 5

MHD-Generator, Wärmeaustauscher und mehreren Verdichtern gegeben. Das Bild 5 skizziert eine Darstellung der Vorgänge in einem  $T_{stg}$ -s Diagramm.

Die Bilanz wird durch

$$\eta_K = \frac{(\Delta H_e)_{MHD} - Z \cdot (\Delta H_e)_v}{Q_{zug.}} \quad (42)$$

beschrieben.

$\Delta H_e$  ist die vom MHD-Generator gelieferte elektrische Energie (zw. Punkt 6 und 7 des Diagramms). Sie ist wegen der Wärmeverluste durch die Wände des Generators nicht mit der Enthalpiedifferenz  $c_p \{ (T_{stg})_6 - (T_{stg})_7 \}$  identisch. Man hat nämlich:

$$dh_e = \frac{d \cdot \dot{e}}{\dot{p}} dt = c_p dT_{stg} \cdot a = \frac{c_p dT_{stg}}{1+x}$$

$$\Delta H_e = -\frac{c_p}{p} \int_{T_2}^{T_7} \frac{dT_{stg}}{1+x} \quad (43)$$

$(\Delta H_e)_v$  stellt die Enthalpie dar, die zum Betrieb eines Kompressors notwendig wird. Z ist die Zahl der Verdichter,  $Q_{zug.}$  ist die durch den Reaktor zwischen Punkt 5 und Punkt 6 zugeführte Wärme

$$Q_{zug.} = c_p \left( (T_{stg})_6 - (T_{stg})_5 \right) \quad (44)$$

Wir setzen  $\eta_{MHD} = \frac{p_6}{p_7}$  und entsprechend für den Verdichter  $\eta_v = \frac{(p_{stg})_2}{(p_{stg})_1}$  und berücksichtigen die Druckverluste im Reaktor und Wärmetauscher durch einen Faktor  $V > 1$ , sodass:

$$\frac{p_4}{p_1} = V \frac{p_6}{p_7} = V \cdot \eta_{MHD}$$

Ausserdem ist

$$\frac{p_4}{p_1} = \eta_v^2$$

sodass

$$\eta_v = \left( V \cdot \eta_{MHD} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Berücksichtigt man den polytropen Wirkungsgrad  $\eta_{pV}$  des Verdichters, dann kann man das Temperaturverhältnis der Verdichtung berechnen

$$\frac{T_4}{T_3} = \eta_V^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{\eta_{p,V}} = \left( V \cdot \eta_{MHD} \right)^{\frac{1}{\gamma} \frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{\eta_{p,V}}$$

und der Enthalpieverlust durch die Verdichtung wird:

$$z (\Delta H_e)_V = z C_p (T_4 - T_3) = z C_p T_3 \left\{ \left( V \cdot \eta_{MHD} \right)^{\frac{1}{\gamma} \frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{\eta_{p,V}} - 1 \right\} \quad (45)$$

Berücksichtigt man (43), (44) und (45), so wird der Kreiswirkungsgrad

$$\eta_K = \frac{\int_7^6 \frac{dT_{stg}}{1+x} - z (T_{stg})_3 \left\{ \left( V \cdot \eta_{MHD} \right)^{\frac{1}{\gamma} \frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{\eta_{p,V}} - 1 \right\}}{(T_{stg})_6 - (T_{stg})_7 + (\Delta T_{stg})_{wt}} \quad (46)$$

$(\Delta T_{stg})_{wt}$  berücksichtigt die Temperaturdifferenz am Wärmetauscher.

Im Falle einer Strömung mit konstanter Machzahl, wie wir es hier voraussetzen, ist es von Vorteil, statt der Grössen  $p$ ,  $T$ ,  $v$ , die Grössen

$$\begin{aligned} p_{stg} &= p \left( 1 + \frac{M^2}{3} \right)^{\frac{5}{2}} \\ T_{stg} &= T \left( 1 + \frac{M^2}{3} \right) \\ v &= \eta \sqrt{\gamma r T} = \eta \sqrt{\gamma r T_{stg}} \frac{1}{\left( 1 + \frac{M^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

einzuführen.

Die zur Berechnung von MHD-Generatoren benützten Gleichungen sind im folgenden angegeben:

### Wirkungsquerschnitte

$$Q_{e,g} = Q_{e,Ne} = 3 \cdot 10^{-21} \exp\left(1,25 \frac{T_e}{1500}\right), \quad \frac{d(\ln Q_{e,g})}{d(\ln T_e)} = 1,25$$

$$Q_{e,s} = Q_{e,Cs} = 3,2 \cdot 10^{-18}$$

$$Q_{e,e} = 2 \cdot 10^{-19} \frac{1}{T_e^2}, \quad \frac{d(\ln Q_{e,e})}{d(\ln T_e)} = -2$$

### Stossfrequenzen

$$v_{e,g} = v_{e,Ne} = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \cdot 3 \cdot 10^{-21} \exp\left(1,25 \frac{T_e}{1500}\right) \frac{p_{stg}}{kT_{stg}} \frac{1}{\left(1 + \frac{M^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$v_{e,s} = v_{e,Cs} = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \cdot 3,2 \cdot 10^{-18} \frac{p_{stg}}{kT_{stg}} \frac{1}{\left(1 + \frac{M^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$v_{e,i} = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} n_e \cdot 2 \cdot 10^{-19} \frac{1}{T_e^2}$$

wobei  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$

$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$

$c = 10^{-3}$



Sahagleichung

$$n_e = C^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{p_{stg}}{k T_{stg}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{M^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{27 m_e}{h^2} \right)^{\frac{3}{4}} \left( k T_e \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{eV_i}{2kT_e}\right)$$

wobei

$$\begin{aligned} k &= 1,38 \cdot 10^{-23} \\ m_e &= 9,11 \cdot 10^{-31} \\ h &= 6,6 \cdot 10^{-34} \\ e &= 1,6 \cdot 10^{-19} \\ C &= 10^{-3} \\ V_i &= 3,88 \end{aligned}$$

β Kritisch

$$\beta_{cr} = \left\{ \left( \frac{d(\ln A)}{d(\ln n_e)} \right)^2 - \left( \frac{d(\ln \sigma)}{d(\ln n_e)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d(\ln A)}{d(\ln n_e)} = 1 + \frac{T_e}{T_e - \frac{T_{stg}}{1 + \frac{M^2}{3}}} \cdot T_N + A_g \cdot 1,75 T_N + A_s \cdot 0,5 T_N + A_i (1 - 1,5 T_N)$$

$$\frac{d(\ln \sigma)}{d(\ln n_e)} = 1 - B_g \cdot 1,75 T_N - B_s \cdot 0,5 T_N - B_i (1 - 1,5 T_N)$$

mit

$$T_N = \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{eV_i}{2kT_e}}$$

$$A_g = \frac{\frac{v_{eg}}{m_g}}{\frac{v_{eg}}{m_g} + \frac{v_{es}}{m_s} + \frac{v_{ei}}{m_i}}$$

$$A_s = \frac{\frac{v_{es}}{m_s}}{\frac{v_{eg}}{m_g} + \frac{v_{es}}{m_s} + \frac{v_{ei}}{m_i}}$$

$$A_i = 1 - A_g - A_s$$

$$B_g = \frac{v_{eg}}{v_{eg} + v_{es} + v_{ei}}$$

$$B_s = \frac{v_{es}}{v_{eg} + v_{es} + v_{ei}}$$

$$B_i = 1 - B_g - B_s$$

wobei

$$\begin{aligned} m_g &= 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 20,2 \\ m_s &= 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 133 \\ m_i &= 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 133 \end{aligned}$$

Bestimmung von  $T_e$

$$T_e = \frac{T_{stg}}{1 + \frac{\eta^2}{3}} \left\{ 1 + \frac{5}{9} \beta_{cr} (1-K)^2 \eta^2 \frac{eB}{m_e (v_{eg} + v_{es} + v_{ei})} \frac{v_{eg} + v_{es} + v_{ei}}{v_{eg} + (v_{ea} + v_{ei}) \frac{m_e}{m_s}} \right\}$$

Bestimmung von  $\sigma_{eff}$

$$\sigma_{eff} = \beta_{cr} \frac{n_e e}{B}$$

Bestimmung von  $\eta_P$

$$\eta_P = \frac{K(1+X)}{1 + \frac{\eta^2}{3} (1-K) + (1 + \frac{\eta^2}{3}) Y}$$

wobei

$$X = \frac{3}{8} \frac{T_{stg} - T_{wand}}{T_{stg}} \cdot \frac{1 + \frac{\eta^2}{3}}{K \frac{\eta^2}{3}} Y \quad (T_{stg} - T_w) = 500^\circ K$$

mit

$$Y = \frac{2C_f}{\sigma_{eff} B^2 (1-K)} \cdot \frac{p_{stg}}{r T_{stg}} \left( \frac{5}{3} r T_{stg} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\eta}{(1 + \frac{\eta^2}{3})^2} \quad C_f = 2 \cdot 10^{-3}$$

Bestimmung von  $dT_{stg}$

$$dT_{stg} = 0,4 \eta_P \frac{T_{stg}}{p_{stg}} dp_{stg}$$

Bestimmung von  $L$

$$L = j \cdot \ell = \sigma_{eff} K (1-K) \eta^2 \frac{5}{3} r \frac{T_{stg}}{1 + \frac{\eta^2}{3}} B^2$$

Bestimmung von  $dl$

$$dl = \frac{\eta_P}{(1+X) \sigma_{eff} K (1-K) \eta (1 + \frac{\eta^2}{3}) B^2} \frac{dp_{stg}}{\left( \frac{5}{3} r T_{stg} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Bestimmung von  $dH_e$

$$dH_e = \frac{\eta_P}{1+X} \frac{dp_{stg}}{\frac{p_{stg}}{r T_{stg}}}$$

Bestimmung von  $\eta_K$

$$\eta_K = \frac{\sum \frac{dT_{stg}}{1+X} - 3.300 \cdot \left\{ \left( 1,3 \cdot \frac{(p_{stg})_0}{p_{stg}} \right)^{\frac{2}{15}} \eta_{eK} - 1 \right\}}{(T_{stg})_0 - T_{stg} + \Delta T_{wt}}$$

## ERGEBNISSE

Einige Ergebnisse der Berechnungen für Ne-Cs-Gemische sind in Bild 6, 7, 8, 9, zusammengestellt (Leistung als Funktion des Druckes entlang des Kanals)

Die Ergebnisse bei  $(T_{stg})_{\text{Anfang}} = 2000 \text{ }^{\circ}\text{K}$  zeigen, dass es mit  $M > 1$  möglich ist, bis zu Enddrücken von 5 atm zu arbeiten. Bei diesem Druck wird gleichzeitig  $(T_{stg})_{\text{Ende}}$ , Länge  $l$  des Kanals und  $\eta_{\text{Kreis}}$  angegeben.

Bei sinkendem  $(p_{stg})_{\text{Anfang}}$  erhöht sich der Wirkungsgrad  $\eta_{\text{K}}$  der Anlage.

$(p_{stg})_{\text{Anfang}}$  darf aber nicht zu niedrig ausgewählt werden, da sonst die mittlere Leistung sinkt.

Beispiel: Bei den Anfangsbedingungen  $(T_{stg})_a = 2000 \text{ }^{\circ}\text{K}$ ,  $(p_{stg})_a = 10 \cdot 10^5 \text{ New/m}^2$  (30 atm) und z.B.  $K = 0,70$ ,  $M = 1,4$  findet man ein  $\eta_{\text{K}} = 0,51$  und eine Generatorlänge von  $\sim 9 \text{ m}$ . Da in diesem Fall die mittlere Leistung  $\sim 50 \text{ MW/m}^3$  beträgt, erhält man für einen mittleren Kanalquerschnitt von  $1 \text{ m}^2$   $L_{\text{total}} \sim 450 \text{ MW}$ .

Einige Ergebnisse bei  $(T_{stg})_a = 2150 \text{ }^{\circ}\text{K}$  und  $(p_{stg})_a = 40 \cdot 10^5 \text{ New/m}^2$  (40 atm) sind auch angegeben. Der Wirkungsgrad der Anlage beträgt  $\sim 0,52$  mit einer mittleren Leistung von  $70 \text{ MW/m}^3$ . Hierbei könnten Leistungen von  $L_{\text{total}} \sim 600 \text{ MW}$  erzielt werden.

Bei einer Machzahl  $< 1$  war keine Möglichkeit zu finden einen MHD-Generator zu bauen, der bei einer Länge von  $\sim 10 \text{ m}$  bis zu kleinen Enddrücken (bzw. kleine Endtemperatur) arbeiten könnte. Solche negative Ergebnisse sind in Bild 9 für  $M = 0$ , und  $M = 1$  angegeben.

Wie schon Herr Zinko in IPP IV/19 gezeigt hat, sind die Ergebnisse im Falle der Mischungen Ar-Cs und He-Cs ungünstiger als die Ergebnisse mit der Ne-Cs-Mischung.

Für interessante Diskussionen bezüglich der Druckverluste in MHD-Generatoren bin ich Herrn Raeder dankbar verpflichtet.

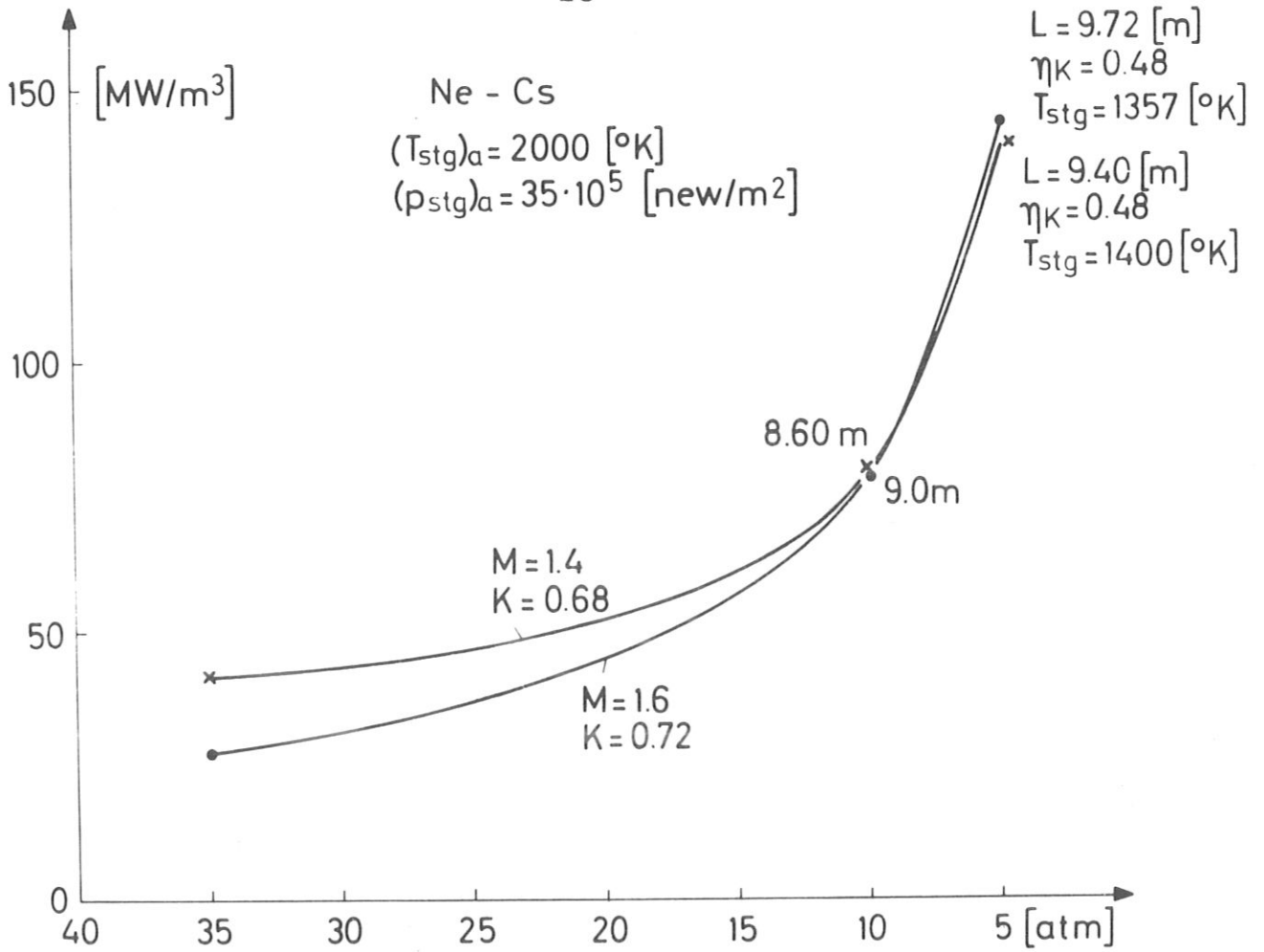


Bild 6

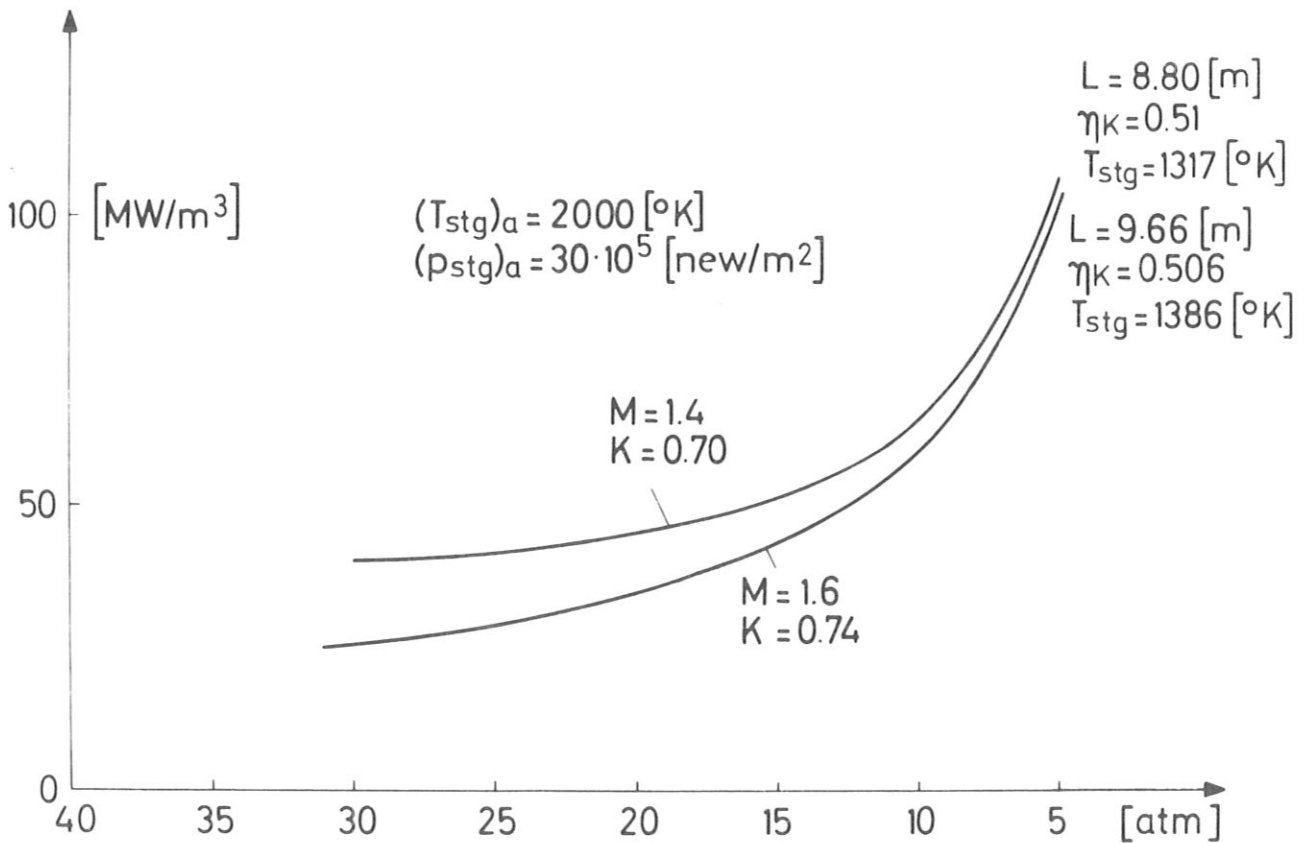


Bild 7

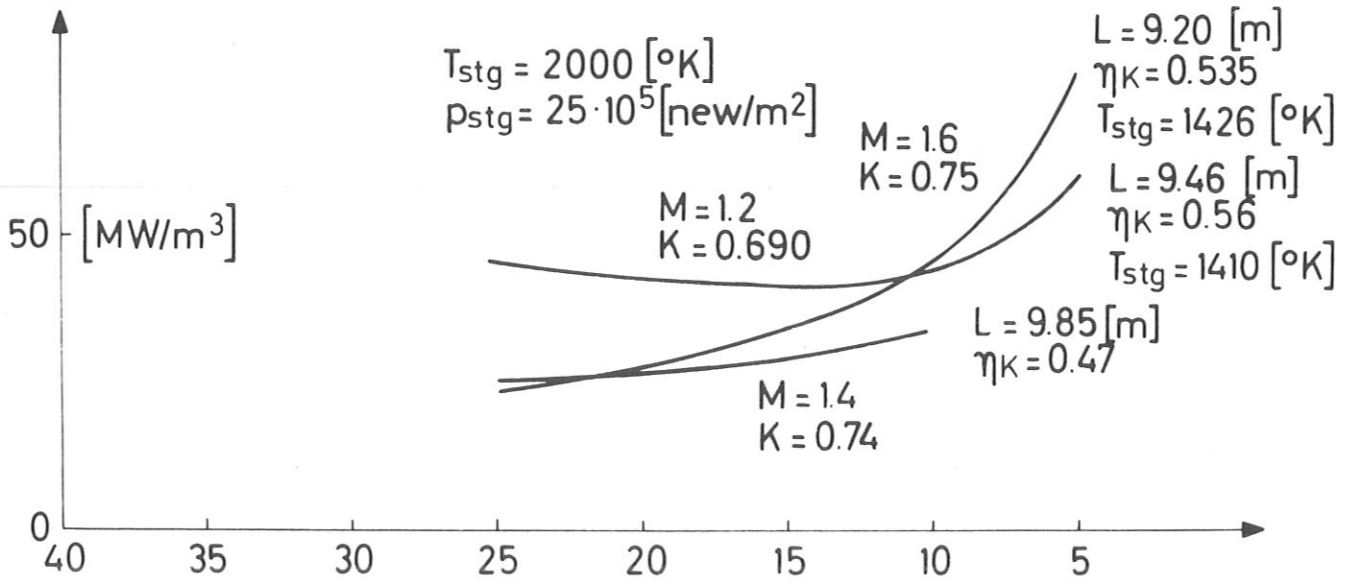


Bild 8

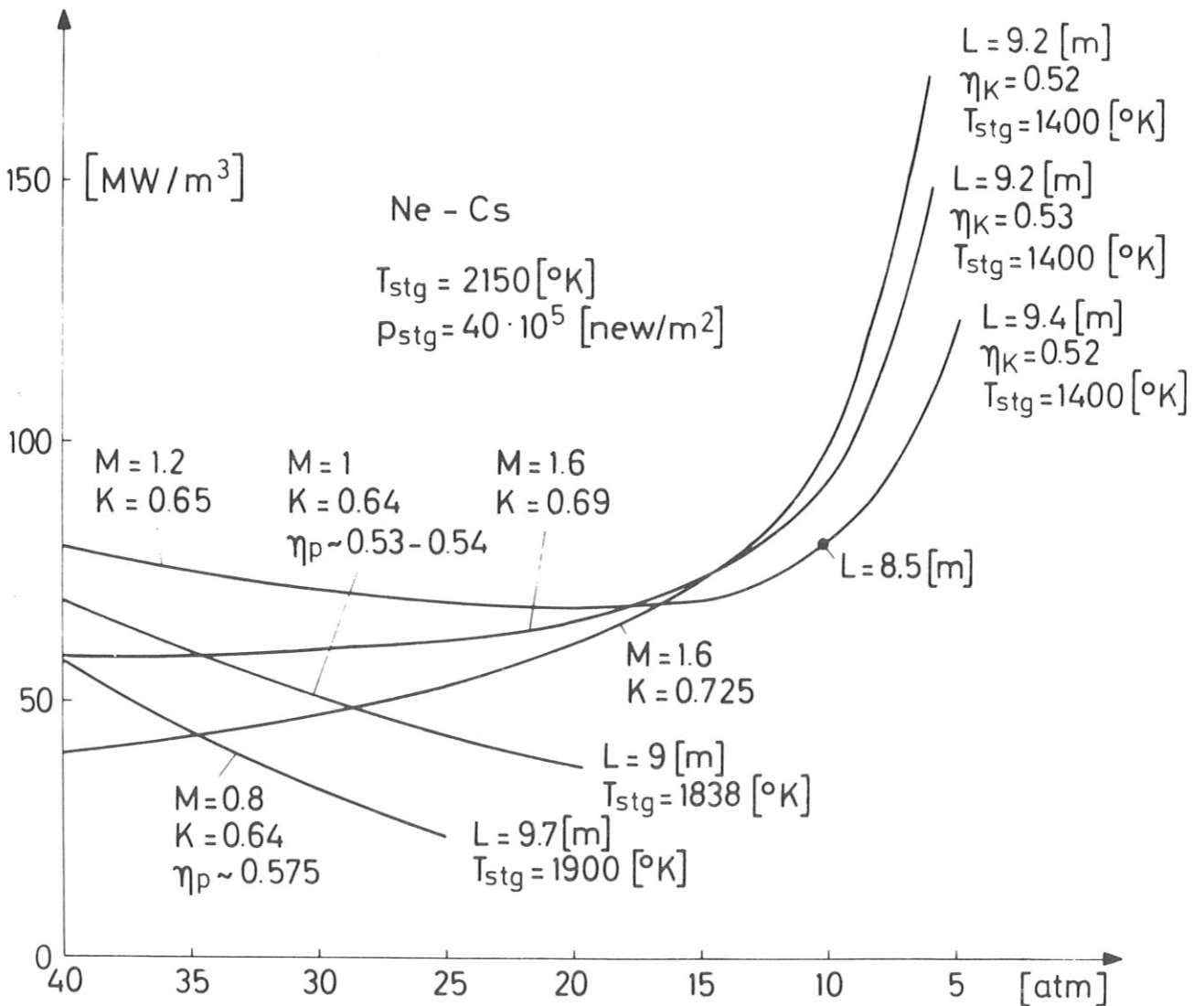


Bild 9

Literatur

- 1 I.P. Azalbert und A. Fabre, Proc. of a Symp., Warschau 1968  
Vol. II, p. 1234
- 2 P. Velikhov, A.M. Dykhne, Proc. Ionized Phenomena, Paris 1963
- 3 L.L. Lengyel, Proc. 11th Conf. on Eng. Aspects of MHD, Pasadena  
1970
- 4 G. Brederlow, AIAA Journal 6, 1277 (1968)  
W. Riedmüller, Proc. Int. Symp. on MHD electr. Power Generation,  
Warschau 1968
- 5 H. Zinko, IPP-Bericht IV/19 (Mai 1971)