

**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**  
**GARCHING BEI MÜNCHEN**

DAS UMKEHRPROBLEM DER TURBULENZTHEORIE  
(The Inverse Problem of Turbulence)

Pitter Gräff

IPP 6/113

August 1972

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP 6/113

P. Gräff

The Inverse Problem

of Turbulence

August 1972

(in German)

Abstract

In the theory of strong turbulence from Reynolds to the present day there exist no reliable approximation schemes. There are, however, several exactly soluble cases. For example Cook and Taylor have recently shown this for the case of a two-dimensional guiding-centre plasma. One can therefore ask, what properties must an equation of motion have so that it leads to a soluble turbulence problem. For gaussian measure the situation is clear and the different possibilities can be conveniently classified.

## Inhaltsverzeichnis

Warum?	1
Differentielle Rotationen in der Ebene	5
Eine Verallgemeinerung	9
Beispiele	11
Der zweidimensionale Fall, allgemein	23
Differentielle Rotationen in drei Dimensionen	27
Die Druyvestein Verteilung	30
Der allgemeine Fall $n > 2$	30
Zerspaltung in Raum und Zeit	32
Additionstheoreme	33
Lie-Gruppen	38
Untergruppen	42
Korrelierte Gaußverteilungen	51
Die Gaußbedingung	53
Polynomiale Bewegungsgleichungen	56
Die Frage der Meßbarkeit	60
Zufallsfelder	61
Die homogene Turbulenz	64
Die symmetrischen Lösungen (S)	67
Gleichungen für die "moden".	70
Die zyklischen Lösungen (Z)	72
Die G- und U-Hierarchie	75
Dispersion	77
Differentielle Rotationen	79
Zwei exotischere Beispiele	81
Schlußbemerkung	83
Literatur und Bemerkungen zu den einzelnen Abschnitten	84

Das Umkehrproblem der Turbulenztheorie.

Warum?

Es ist eine etwas verfremdete Fragestellung gemeint. Roh gesagt, fragt man nach solchen Strömungen, die auf eine gegebene Korrelationsfunktion passen. Natürlich ist das statistisch zu verstehen, und natürlich kann man dann bei der Armut an wirklich bekannten Funktionalmaßen nur einige Klassen untersuchen. Im folgenden die Gaußmaße.

Diese Fragestellung ist im Hinblick auf endliche Systeme wohl von ziemlichem praktischen Interesse. Sie bietet hier streng lösbare Modelle und damit Orientierungshilfen für die Praxis. Für die Turbulenztheorie ist dies alles viel offener, zumindest wenn man sich auf Navier-Stokes beschränkt. Da mir das Problem trotzdem gerade in diesem Zusammenhang deutlich wurde, möchte ich die Motive beschreiben, weil ich glaube, daß sie in die Struktur des Turbulenzproblems einige Einsicht geben.

1) Saffmann hat bemerkt, daß Gleichungen, die sich in vieler Hinsicht - insbesondere im Hinblick auf viele gängige Ableitungen des Kolmogorov-Spektrums - nicht unterscheiden, trotzdem zu sehr unterschiedlichen Spektren führen.

Dies ist z.B. so für die 3-dimensionale Navier - Stokes Gleichung, wie auch die Burgers Gleichung. Diese Diskrepanz lehrt die Unvollständigkeit der gängigen Ableitungen des Kolmogorov Spektrums, die offensichtlich wesentliche Details nicht in die Argumentation einbegreifen.

2) Doob hat darauf hingewiesen, daß die Theorie der Brown'schen Bewegung nach Ornstein und Uhlenbeck beträchtlich vereinfacht werden kann, so man beachtet, daß die übliche Langevingleichung eine Lineare Abbildung vermittelt zwischen den Anfangswerten und den laufenden. Bei allen linearen Abbildungen aber gehen Gauß-Prozesse wieder in solche über!

3) Es sind einige exakte Lösungen der Hopfgleichung starker Turbulenz bekannt:

a) Hopf selbst hat für den dreidimensionalen Fall der Euler Turbulenz eine stationäre Lösung angegeben, die das Gauß-Maß konserviert. Es gibt nur eine, und da sie nicht zum Kolmogorov'schen Spektrum paßt, so verwirft er hiernach die Invarianz des Gauß-Charakters für das Funktionalmaß.

b) Denselben Fall für zwei Dimensionen behandeln neuerdings I.Cook und J.B.Taylor. Auch ihr Ergebnis ist nicht Kolmogorov'sch, es scheint aber durch numerische Rechnungen von Deem und Zabuski bestätigt zu werden.<sup>†</sup>

c) Ich habe für das Problem der turbulenten Diffusion eine strenge formale 'Gauß-Lösung' gefunden.

d) In ganz ähnlicher Weise gestattet die Korteveg - de Vries Gleichung einen stationären Gauß mit weißem Spektrum.

Allen diesen Beispielen ist gemeinsam:

- . Sie gestatten eine strenge Gauß-Lösung.
- .. Sie betrachten - im Gegensatz oder in Verallgemeinerung zu Doob's Bemerkung (2) - eine nichtlineare Abbildung.
- ... Das zugehörige Spektrum ist zum Teil realistisch (3b), zum Teil nicht.

Wir schließen hieraus:

- I. Das Spektrum hängt trotz äußerlicher Ähnlichkeit der Bewegungsgleichungen, also deren linearer und nichtlinearer Terme empfindlich von noch nicht klar erkannten Details ab.
- II. Andererseits sind für sehr verschiedene Typen von Bewegungen z.B. Gauß'sche Lösungen möglich, für alle linearen aber auch diverse nicht-lineare.
- III. Ob Gaußmaße realistisch sind, ist eine andere Frage. Dies hängt zusammen mit einer a.O. als gap-Problem bezeichneten Schwierigkeit.

<sup>†</sup> Norman Zabuski bestreitet das allerdings (mündlich)

In diesem Zusammenhang drängt sich vielleicht die folgende Fragestellung auf: "Welche Typen von Bewegungsgleichungen sind zum Beispiel Gauß-konservierend?" Im engeren Sinne wird man dabei sogar noch das Spektrum vorschreiben für alle Zeiten.

Logisch stellt man damit das Turbulenzproblem auf den Kopf. Wir fragen nicht mehr: Welche (statistischen) Eigenschaften bleiben bei gewissen gegebenen Bewegungen invariant? Sondern: Welche Bewegungen lassen gewisse (statistische) Eigenschaften invariant? Deshalb wollen wir diese Fragestellung als das im Titel erwähnte Umkehrproblem bezeichnen. Von anderen Gebieten der Physik her ist dies vertrauter. Zum Beispiel fragt man nach allen Bewegungsgleichungen, die mit der Lorentz-Gruppe verträglich sind. Und man erhält für lineare Darstellungen die bekannten Gleichungen für freie Teilchen mit diskretem Spin und beliebiger Masse. Auch die Heisenberg'sche Urfeldgleichung ist ähnlich konstruiert worden. Ein anderes Beispiel liefert das starke Äquivalenzprinzip, das ein ganz spezielles Verhalten der Naturgesetze im Gravitationsfeld fordert. So folgt hieraus etwa eine ganz spezifische Form minimaler Ankopplung.

Ich nehme die Antwort qualitativ vorweg:

- A: Zu einem Gaußmaß mit gegebenem Spektrum gibt es unendlich viele Bewegungsgleichungen, die diese Eigenschaft konservieren.
- B: Wird der Gauß konserviert, so werden auch bestimmte weitere Maße, die aus dem Gauß durch einfache Manipulationen wie funktionale Ableitungen gewonnen werden können, erhalten. Wir wollen solche Maße "Gaußfreundlich" nennen.
- C: Minimale aber ungeschickte Änderungen der Bewegungsgleichungen zerstören diese Eigenschaften.
- D: Andere nicht-Gaußsche Maße lassen sich ähnlich klassifizieren. Zum Beispiel fallen hierunter alle diejenigen, die mit Gaußfreundlichen durch eine meßbare Abbildung verkettet sind. (Allerdings ist die Praxis derartiger Ab-

bildungen schwierig! Ein Näherungsverfahren für solche wird etwa durch die bekannte Wiener-Hermite-Entwicklung beabsichtigt).

- E. Es gibt Klassen von Maßen, die nicht mit dem Gauß'schen verkettbar sind. Die Einzelheiten regelt der Satz von Radon und Nykodym.

Differentielle Rotationen in der Ebene

Wir beginnen mit einigen illustrativen Spezialfällen. Statt eines stochastischen Feldes werden zunächst nur zwei Zufallsvariable betrachtet, die gemäß

$$e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \frac{dx dy}{2\pi}$$

Gaußisch verteilt sein mögen, also unkorreliert sind. Wir fragen nach Transformationen der  $x$ - $y$  Ebene, die diese Wahrscheinlichkeitsverteilung völlig invariant lassen. Darunter sind zunächst die starren Drehungen um den Ursprung. Diese vermitteln eine lineare Abbildung. Die folgende nichtlineare Abbildung führt zwar alle um den Nullpunkt konzentrischen Kreise wieder in sich über:

$$\begin{aligned} x &= \text{sign}(x') \sqrt{\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{x'^2}{2} \cos^2 f(x', y')} \\ y &= \text{sign}(y') \sqrt{\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{x'^2}{2} \cos^2 f(x', y')} \end{aligned}$$

Sie erhält daher den Exponenten, nicht aber das Volumelement  $dx dy$ , und zerstört auf diese Weise doch die Gaußizität.

Um systematischer vorzugehen, nehmen wir an, daß die betrachteten Transformationen ein (Lie'sche) Gruppe bilden und setzen für die infinitesimale Transformation an:

$$\begin{aligned} x &= x' + \epsilon f(x', y') \\ y &= y' + \epsilon g(x', y') \end{aligned}$$

Die Invarianz der Kreise  $x'^2 + y'^2 = \text{const.}$  fordert dann erstens:

$$x f + y g = 0$$

Die Invarianz des Flächenelements fordert weiter:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

d.h. Inkompressibilität. Aus der ersten Gleichung folgt:

$$f = -y F(x,y)$$

$$g = +x F(x,y)$$

wo  $F$  eine noch beliebige Funktion ist. Die zweite Gleichung fordert:

$$\left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) F = 0$$

d.h.  $F$  darf nur von  $x^2 + y^2$  abhängen. Nennen wir den Parameter der Lie-Gruppe  $t$ , so gelten die Bewegungsgleichungen also in der Form:

$$\frac{dx}{dt} = -y F(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = +x F(x^2 + y^2)$$

Wir bemerken noch: Der Gaußcharakter wäre noch erhalten geblieben, wenn man anstelle der Inkompressibilität nur gefordert hätte

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = A = \text{const.}$$

Aber die Normierung geht dann verloren. Am einfachsten sieht man dies, wenn man die Betrachtung in Polarkoordinaten wiederholt. Jetzt ist

$$r = r'$$

$$\theta = \theta(r', \theta') \quad \text{beliebig.}$$

Für  $x, y$  bedeutet dies

$$x = r' \cos \theta(r', \theta')$$

$$y = r' \sin \theta(r', \theta')$$

woraus für infinitesimale Änderungen folgt:

$$\dot{x} = -r' \sin \theta \cdot \dot{\theta} = -y \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = r' \cos \theta \cdot \dot{\theta} = +x \dot{\theta}$$

$\dot{\theta}$  spielt also die Rolle von  $F$ . Statt der Inkompressibilität kommt:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = A \quad \text{oder} \quad F = A \theta + B(r)$$

Daraus folgt mit einer beliebigen Funktion  $B(r)$

$$\frac{d\theta}{dt} = A \theta + B(r)$$

mit der Lösung

$$\theta = \theta' e^{At} + B(r)t$$

Hierbei geht das Volumenelement  $rdrd\theta$  über in  $e^{At} r' dr' d\theta'$ .

Da  $r$  ungeändert bleibt, so heißt dies, daß das Winkelintervall  $(0, 2\pi)$  nicht mehr voll abgebildet wird. Daher muß  $A = 0$  sein. Die Änderungen in  $\theta$  entsprechen dann differentiellen Rotationen. Eleganter kann man dies auch so formulieren: Aus der Inkompressibilität folgt die Existenz eines Potentials  $H$ , so daß

$$f = \frac{\partial H}{\partial y}; \quad g = - \frac{\partial H}{\partial x}$$

Die Kreisinvarianz fordert dann

$$\partial H / \partial \theta = 0$$

und die Bewegungsgleichungen werden kanonisch:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad \frac{dy}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x}$$

Schließlich wollen wir das Ergebnis noch mit der Hopfgleichung testen:

Ein voller Beweis ist mit dieser nicht möglich, weil sie für die Bewegungsgleichung praktisch endliche Polynome vorschreibt. Wir wählen daher den einfachen Fall  $F(x^2+y^2) = x^2+y^2$ . Die entsprechende Bewegungsgleichung für ( $E =$  Erwartung)

$$\begin{aligned} \Phi &= E \{ e^{ikx + i\ell y} \} \\ &= \Phi(t, k, \ell, ) \end{aligned}$$

lautet daher:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= ikE \{ -(y^2 + x^2 + y^3) e^{i\dots} \} \\ &+ i\ell E \{ +(x^3 + xy^2) e^{i\dots} \} \\ &= k \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial k^2 \partial \ell} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \ell^3} - \ell \frac{\partial^3 \Phi}{\partial k^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial k \partial \rho^2} \right) \end{aligned}$$

Man bestätigt leicht, daß

$$\Phi = e^{-\frac{1}{2}(k^2 + \ell^2)}$$

eine stationäre Lösung dieser Gleichung ist.

Vielleicht ist es noch nützlich, auf ein Gegenbeispiel hinzuweisen:

$F(x, y) = x$  erfüllt die Kontinuitätsgleichung nicht, die zugehörige Hopfgleichung ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = i k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial k \partial \ell} - i \ell \frac{\partial^2 \Phi}{\partial k^2}$$

und besitzt auch keine stationäre Gaußlösung!

Doch ist dies nur im Rahmen der differentiellen Drehungen wahr, wie im folgenden das Beispiel von Pfirsch zeigen wird.

Eine Verallgemeinerung.

Die eben vorgenommene Trennung der Invarianz von Kreisen und des Volumenelementes ist etwas künstlich. Primär kann man nur fordern, daß

$$\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} dx dy$$

insgesamt invariant bleibt. Bei der infinitesimalen Transformation  $x, y \longrightarrow x', y'$  wird daraus:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \epsilon(x'f + y'g)} (1 + \epsilon(f_x + g_y)) dx' dy'$$

wofür man in derselben Ordnung in  $\epsilon$  auch schreiben darf

$$\frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \epsilon(x'f + y'g - f_x - g_y)} dx' dy'$$

Man hat also als Forderung der Gaußinvarianz nur eine einzige Bedingung

$$xf + yg = f_x + g_y$$

In der Tat gestattet diese eine erheblich größere Mannigfaltigkeit möglicher Bewegungen als die oben betrachteten differentiellen Rotationen. Dazu betrachten wir einige Beispiele. Eine schöne Klasse solcher bekommt man mit Separationsansätzen für  $f$  und  $g$  der Form:

$$f = F(x) \Phi(y) \qquad g = \Gamma(x) G(y)$$

Unsere Bedingungsgleichung wird dann

$$xF(x)\Phi(y) + y\Gamma(x)G(y) = F'(x)\Phi(y) + \Gamma(x)G'(y)$$

wo der Strich die Ableitung nach dem Argument bedeutet. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{xF(x) - F'(x)}{\Gamma(x)} &= \frac{G'(y) - yG(y)}{\Phi(y)} \\ &= a^{-1} = \text{const bzgl. } (x, y) \end{aligned}$$

Unsere Bedingungsgleichung wird dann

$$xF(x) \phi(y) + y \Gamma(x)G(y) = F'(x)\phi(y) + \Gamma(x)G(y)$$

wo der Strich die Ableitung nach dem Argument bedeutet. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{xF(x) - F'(x)}{\Gamma(x)} &= \frac{G'(y) - y G(y)}{\phi(y)} \\ &= a^{-1} = \text{const. bzgl. } (x,y) \end{aligned}$$

Denkt man sich also am einfachsten  $F$  und  $G$  gegeben, so wird

$$\Gamma(x) = a (xF(x) - F'(x))$$

$$\phi(y) = -a(yG(y) - G'(y))$$

Hierdurch sind die Bewegungsgleichungen festgelegt. Zur Vereinfachung denke man sich  $a$  in der Zeiteinheit absorbiert, also gleich 1 gesetzt.

Wir haben dann insgesamt:

$$\frac{dx}{dt} = -F(x) (yG - G')$$

$$\frac{dy}{dt} = (xF(x) - F') \cdot G(y).$$

Hieraus kann man den geometrischen Verlauf der Strömung - die Stromlinien - entnehmen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(xF - F') G(y)}{F(x) (G' - yG)}$$

oder

$$\left( \frac{G'}{G} - y \right) dy = \left( x - \frac{F'}{F} \right) dx$$

Dies läßt sich integrieren und liefert zugleich ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen:

$$\ln G(y) - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \ln F(x) - E$$

Die Integrationskonstante hat einige Ähnlichkeit mit der Energie. Es folgt übersichtlicher in Polarkoordinaten  $(r, \theta)$ :

$$F(x)G(y) = e^{-E} e^{\frac{r^2}{2}}$$

Dies ist ein geschickter Ausgangspunkt für einige Beispiele, die weit weg von differentieller Rotation sind.

B e i s p i e l e .

$$(1) \quad F(x) = e^{\alpha x}, \quad G(y) = e^{\beta y}$$

Dann lautet unsere Bedingung:

$$e^{\frac{1}{2}((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2)} = e^{E + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}$$

Die Stromlinien  $E = \text{const}$  sind daher durch die Kreise

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \text{const}$$

charakterisiert. Erstaunlich ist, daß man auch durch *n i c h t* um den Nullpunkt zentrierte Bewegungen die Gaußverteilung konservieren kann!

Tatsächlich werden diese Kreise nicht mehr längs ihres Umfangs mit gleicher Geschwindigkeit durchheilt. Um dies zu sehen, denken wir uns durch Kombination mit einer geschickten Drehung und Dehnung  $\alpha = 1$  und  $\beta = 0$  gemacht. Dann ist  $F = \exp(x)$  und  $G=1$  und damit

$$f = -e^x y, \quad g = (x-1)e^x$$

Führt man  $x-1 = \xi$  ein, so kommt:

$$\frac{d\xi}{dt} = -y e \cdot e^\xi \quad \frac{dy}{dt} = \xi e e^\xi$$

Daher wird

$$\dot{y}\xi - \xi\dot{y} = -e(y^2 e^\xi + \xi^2 e^\xi)$$

oder, in Polarkoordinaten auf das neue Kreiszentrum bezogen:

$$\rho^2 \dot{\phi} = -\rho^2 \cdot e \cdot e^\xi$$

wo also  $\rho$  der Radius der Kreise ist. D.f.:

$$\dot{\theta} = -e^{1 + \rho \cos \theta}$$

Die Kreise werden also mit lokal sehr verschiedener Winkelgeschwindigkeit durchlaufen: Zwar überall gleichsinnig im Uhrzeigersinn, jedoch auf der rechten Hälfte schneller als links und diese Tendenz ist für  $\theta \bmod (\pi) \rightarrow 0$  stärker ausgeprägt.

Als wichtig sei bemerkt, daß keine Bahn ins Unendliche entweichen kann. Die ganze Szene der Handlung wird daher auf sich abgebildet, wie das für die Gültigkeit des Gauß sinnvollerweise erwünscht ist!

Schließlich bemerken wir noch folgende Umkehrung, die dieses Beispiel lehrt: Offenbar kann auch eine gegebene *n i c h t* zentrierte Gaußverteilung durch Rotationen um den Ursprung konserviert werden, (also nicht um den Schwerpunkt!) - wenn diese nur mit den geeigneten Winkelgeschwindigkeiten erfolgen.

(2) Wir deformieren die Kreise zu Ellipsen, wenn wir ansetzen:

$$F(x) = e^{\frac{1}{2} Ax^2 + (1-A)\alpha x}, \quad G(y) = e^{\frac{1}{2} By^2 + (1-B)\beta y}$$

und erhalten

$$(1-A)(x-\alpha)^2 + (1-B)(y-\beta)^2 \stackrel{!}{=} \text{const}$$

Das ist in der Tat für

$$(1-A) \cdot (1-B) > 0$$

eine Ellipse. (Durch Drehung kann man sie auch noch schräg stellen.)

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{dx}{dt} = (1-B)(y-\beta) \cdot e^{\frac{A}{2} x^2 + (1-A)\alpha x + \frac{B}{2} y^2 + (1-B)\beta y}$$

$$\frac{dy}{dt} = -(1-A)(x-\alpha) \cdot e^{\frac{A}{2} x^2 + (1-A)\alpha x + \frac{B}{2} y^2 + (1-B)\beta y}$$

und regeln die Geschwindigkeit, mit der diese Ellipsen durchheilt werden.

Der umgekehrte Fall:

$$(1-A)(1-B) < 0$$

beschreibt Hyperbeln, also keine geschlossenen Bahnen. Jetzt besteht die Gefahr, daß "Teilchen in endlicher Zeit entweichen können", m.a.W. daß zu gegebenen Anfangswerten nach endlicher Zeit kein Bildpunkt im Endlichen mehr existiert.

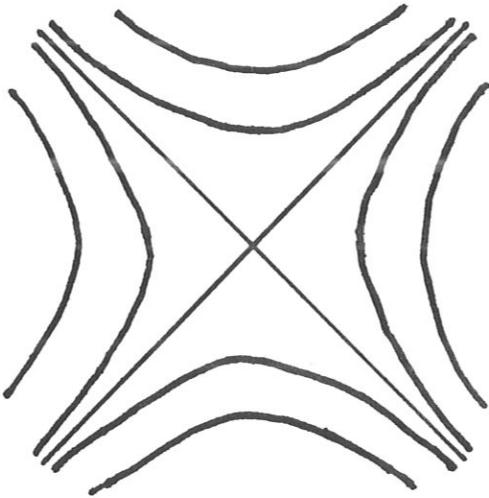
Dies ist in der Tat so. Es genügt, einen einfachen Spezialfall  $\alpha = \beta = B = 0, A = 2$  zu betrachten. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{dx}{dA} = y e^{x^2} \qquad \frac{dy}{dt} = x e^{x^2}$$

Die Bahnen, durch

$$y' = \frac{x}{y}$$

bestimmt, sind dann die Hyperbeln



$$x^2 - y^2 = E$$

Die "Fluchtgeschwindigkeit" längs einer derartigen, etwa zu  $E = 1$  gehörigen bemisst sich zu:

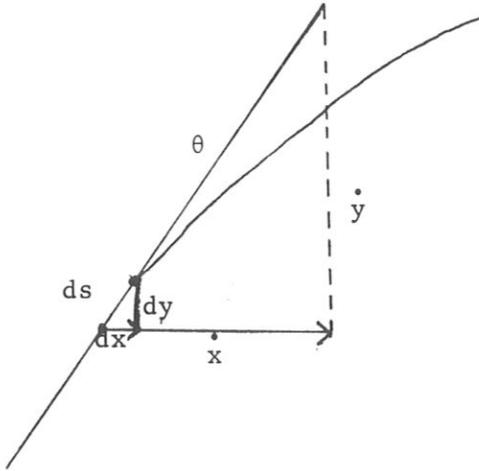
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} && \text{längs der Bahn:} \\ &= |\dot{x}| \sqrt{1 + y'^2} \end{aligned}$$

Für die "Verweilzeit" kommt daher

$$\tau_p = \int_p^\infty \frac{ds}{v} = \int_{x_p}^\infty \frac{dx \sqrt{1 + y'^2}}{|\dot{x}| \sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\tau_p = \int_p^\infty \frac{dx}{|\dot{x}|}$$

worin P den Startpunkt andeutet. Im Bild:



$$\frac{ds}{v} = \frac{dx}{|\dot{x}|}$$

In unserem Fall ergibt sich daher:

$$\int_{x_p}^{\infty} \frac{dx}{y} e^{-x^2} = \int_{x_p}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - E}} e^{-x^2} < \infty \quad \text{für} \quad |x_p| > \sqrt{E}$$

Fast alle Punkte auf der Hyperbel werden also längs dieser in endlicher Zeit entweichen. Wir haben keine 1-1 Abbildung der Ebene mehr auf sich! Die Strömung "explodiert". Obwohl also lokal die Gaußverteilung erhalten bleibt, gilt dies jetzt nicht mehr für den globalen Definitionsbereich, der hyperbolische Fall ist daher nicht zulässig!

Schließlich verbleibt noch der Fall

$$(1 - A)(1 - B) = 0$$

Daß A und B beide 1 sind ist zulässig, denn es passiert dann gar nichts:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0$$

Sei daher A = 1 und etwa B = 0. Mit  $\alpha = \beta = 0$  kommt:

$$\dot{x} = y e^{x^2}, \quad \dot{y} = 0$$

Die Bewegung erfolgt also parallel zur x-Achse ( $y = \text{const.}$ ) Die Verweilzeit wird durch

$$|y| \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \sqrt{2\pi} |y|$$

abgeschätzt: Wir haben wieder Explosion!

Es sei in diesem Zusammenhang allgemein bemerkt, daß gerade derartig explosive Lösungen immer formal mit der Bedingung

$$f'_x - xf = - (g'_y - yg)$$

vereinbart sind, nämlich mit dem Verschwinden beider Seiten. Insbesondere ist dann

$$\frac{df}{dx} = xf.$$

Im Eindimensionalen wäre dieses schon die Bedingung für die Gaußerhaltung d.h.

$$\dot{x} = A e^{\frac{x^2}{2}}$$

Sie muß aber ausgeschlossen werden, denn hieraus folgt

$$\int_{x_0}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = At$$

Das aber heißt, daß die Abbildung  $x_0 \rightarrow x(t)$  für Zeiten

$$t > \frac{\sqrt{2\pi}}{A}$$

sicher zusammenbricht. Tatsächlich passiert dies schon für beliebig kurze Zeiten "am rechten Rand", denn aus  $t > 0$  folgt zunächst  $x > x_0$  und daher kann man das links stehende Integral immer kleiner als jedes fixe  $A \cdot t$  machen, wenn man nur mit  $x_0 \rightarrow \infty$  strebt: So daß für ein derartiges  $x_0$  kein endliches Bild existiert.

(3) Ein Beispiel von Pfirsch:

$$F(x) = x, \quad G(y) = 1$$

Dies ist der vielleicht einfachste Fall wesentlich komplexerer Strömungen als es die bisherigen waren. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen sind

$$\frac{dx}{dt} = xy \quad \frac{dy}{dt} = 1 - x^2$$

Wir bemerken sogleich, daß die  $y$ -Achse in sich übergeht und in ihr eine Strömung mit der Geschwindigkeit 1 stattfindet. Außerdem ist auf beiden Achsen  $\dot{x} = 0$ , so daß dort die Strömung immer senkrecht erfolgt. Waagrecht wird sie für  $\dot{y} = 0$ , d.h. bei  $x = \pm 1$ . In Polarkoordinaten lautet unsere Forderung:

$$|\cos \theta| = e^{-E} \cdot \frac{e^{\frac{r^2}{2}}}{\sqrt{e} r}$$

$$= e^{-E} \Psi(r)$$

Das Diagramm repräsentiert  $\Psi(r)$  und es zeigt, daß für  $r \neq 1$  stets zwei gleiche Werte von  $\Psi$  möglich sind. Aus der Beschränktheit der linken Seite der vorigen Gleichung nach oben und von  $\Psi$  nach unten folgt:  $E \geq 0$ . Man kann daher für  $e^{-E}$  auch  $|\cos \theta_1|$  schreiben und danach  $\theta_1$  als die Integrationskonstante ansehen. Wenn wir uns auf den ersten Quadranten beschränken (die Verhältnisse in den anderen sind durch geeignete Spiegelungen zu gewinnen), so ergibt sich:

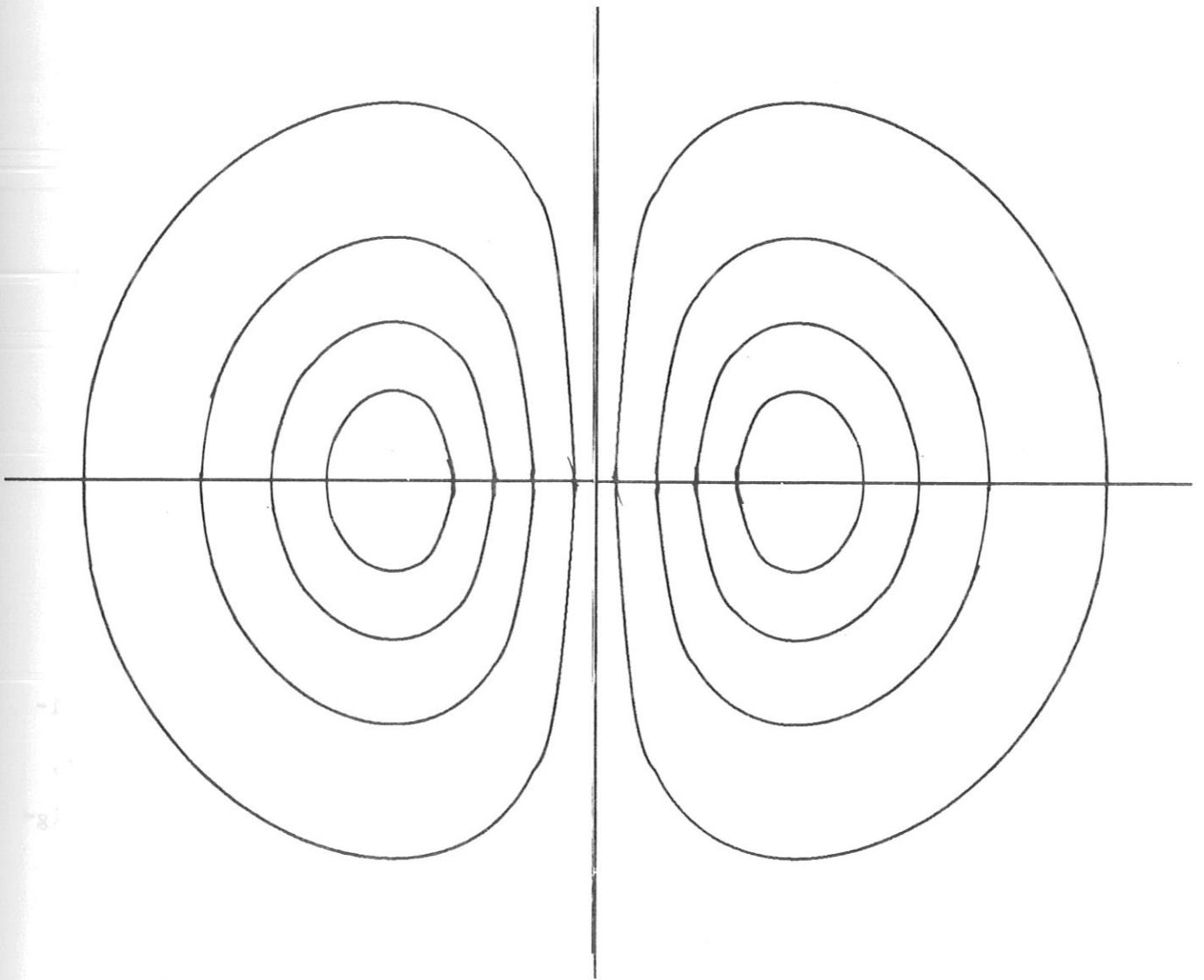
$$\cos \theta = \cos \theta_1 \cdot \Psi(r)$$

Sowohl für  $r < 1$  als auch  $> 1$  wird  $\theta < \theta_1$ . Der kleinste wie größte Wert von  $r$  ist durch  $\theta = 0$  fixiert, d.h. durch die beiden Lösungen der Gleichung

$$\Psi(r) = \frac{1}{\cos \theta_1}$$

Die Punkte  $x = \pm 1, y = 0$  bleiben liegen.

Im Einzelnen ergibt sich das folgende Bild:



Bis auf die  $y$ -Achse sind alle Kurven geschlossen. Die Abbildung ist deshalb zulässig, weil diese Ausnahme vom Maße Null ist. Doch hängt hiermit eine interessante Paradoxie zusammen, die ausdrücklich vermerkt sei! Betrachtet man die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $y$  unter der Bedingung, daß  $x$  einen gegebenen Wert habe, etwa den Wert  $x_0$ , so ergibt sich

$$p(t; y | x=x_0) = \frac{p(t, x_0, y)}{p(t, x_0)}$$

Zur Zeit  $t$  wird dies, ganz unabhängig von  $x_0$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x_0^2 + y^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x_0^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

---! wenn wir nämlich das Maß zur Zeit  $t$  verwenden, wie es die Abbildung zur Verfügung stellt. Doch liegt es nahe, statt dessen auch so zu verfahren: Wir berechnen erst  $p(t=0; y|x)$  und lassen anschließend unsere Abbildung einwirken. Zur Zeit  $t = 0$  ist jedenfalls

$$p(t=0; y | x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

ganz wie oben, also auch für alle  $x_0$ . Wenn wir aber jetzt den Spezialfall  $x_0 = 0$  aussortieren, wie er der  $y$ -Achse entspricht, so wissen wir, daß dieser die  $y$ -Achse konserviert und dort die Strömung mit der Geschwindigkeit 1 erfolgt. Daraus resultiert für  $t > 0$  mithin:

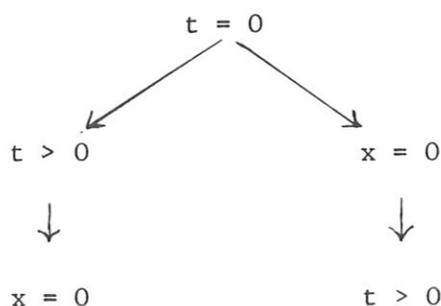
$$p(t > 0, y | x=0 \text{ und } x = 0 \text{ für } t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-t)^2}$$

Wir sind also für  $t > 0$  mit zwei Resultaten für die  $y$  Verteilung unter der Bedingung  $x = 0$  konfrontiert, je nachdem, ob diese Bedingung früher schon einmal gestellt worden war oder nicht. ((Allgemein:

Wird zur Zeit  $\tau$  erstmals die Bedingung  $x = 0$  gestellt, so ist

$$p(t > \tau; y | x(t) = 0, x(\tau) = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-t+\tau)^2} \quad ))$$

Das folgende Schema



ist also nicht vertauschbar. Des Rätsels Lösung: Die y-Achse hat verschwindendes Lebegues-Maß in der Ebene.

Schließlich sei noch eine Merkwürdigkeit erwähnt. Die Bewegungsgleichungen  $\dot{x} = xy$ ,  $\dot{y} = 1 - x^2$  können durch die naheliegende Transformation  $q = \ln(x)$ ,  $p = y$  umgeformt werden in kanonische Gleichungen. In der Tat wird E (bis auf eine Konstante) gerade:

$$E = \frac{1}{2} (p^2 + e^{2q}) - p$$

und spielt die Rolle der Hamiltonfunktion, wie man leicht nachprüft.

An dieses Beispiel seien noch einige Bemerkungen geknüpft.

Zunächst: Es gibt ein sehr einfaches hinreichendes Kriterium dafür, daß die Bahnen nicht explodieren, es ist sicher nicht immer erfüllt, enthebt einen aber gegebenenfalls der Mühe, die Geometrie der Bahnen zu studieren.

Dazu berechnen wir:

$$r \dot{r} = x \dot{x} + y \dot{y} = y$$

und erhalten mithin:

$$\dot{r} = \sin \theta$$

$\dot{r}$  ist also sicher beschränkt, so daß in endlicher Zeit kein Entweichen möglich ist! Übrigens ist auch der gesamte Fluß durch eine ferne Oberfläche

$$\sim \int \dot{r}(\theta) d\theta$$

verschwindet also!

Eine zweite Bemerkung betrifft die Möglichkeit,  $y$  zu eliminieren.

Es kommt:

$$x\ddot{x} - \dot{x}^2 - x^2 + x^4 = 0$$

Diese komplizierte Differentialgleichung konserviert offenbar die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$p(t, x, \dot{x}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} p(\dot{x}|x)$$

wobei die bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben ist durch

$$\begin{aligned} p(\dot{x}|x) &= \int \delta(\dot{x} - xy) \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|x|} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)^2} \end{aligned}$$

Die obige Differentialgleichung erhält also die folgende Verteilung:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{x^2}\right)}$$

Hätten wir umgekehrt nach  $y$  aufgelöst, so käme

$$\ddot{y} - 2y\dot{y} + 2y = 0$$

und daher wird

$$\begin{aligned} p(y, \dot{y}) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} \int \delta(\dot{y} - 1+x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}|1-\dot{y}|}}{\sqrt{2\pi}|1-\dot{y}|} \end{aligned}$$

eine zeitinvariante Verteilung zu dieser Differentialgleichung. Durch Integration über die Geschwindigkeiten  $\dot{x}$  oder  $\dot{y}$  folgt in beiden Fällen, daß der Gauß der Anfangswerte erhalten bleibt, "wenn nur die Statistik der zugehörigen Anfangswerte geschickt gewählt wurde."

(4) Ein weiteres instruktives Beispiel ähnlicher Art liefert

$$F(x) = x, \quad G(y) = y$$

Es kommt:

$$\dot{x} = -x(1-y^2)$$

$$\dot{y} = y(1-x^2)$$

Die beiden Achsen gehen also in sich über mit den Geschwindigkeiten:

$$\dot{x}(y=0) = -x \quad \dot{y}(x=0) = y$$

Doch führt dies zu keiner Verlagerung des Schwerpunktes (wie etwa bei einer Translation), weil die Ausnahme wieder vom Maß Null ist. Alle anderen Bahnen sind geschlossen und wirbeln um die vier Punkte  $(1,1)$ ,  $(1,-1)$ ,  $(-1,1)$ ,  $(-1,-1)$ , herum. Die Wirbelgeschwindigkeit wird

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \right) = -2xy$$

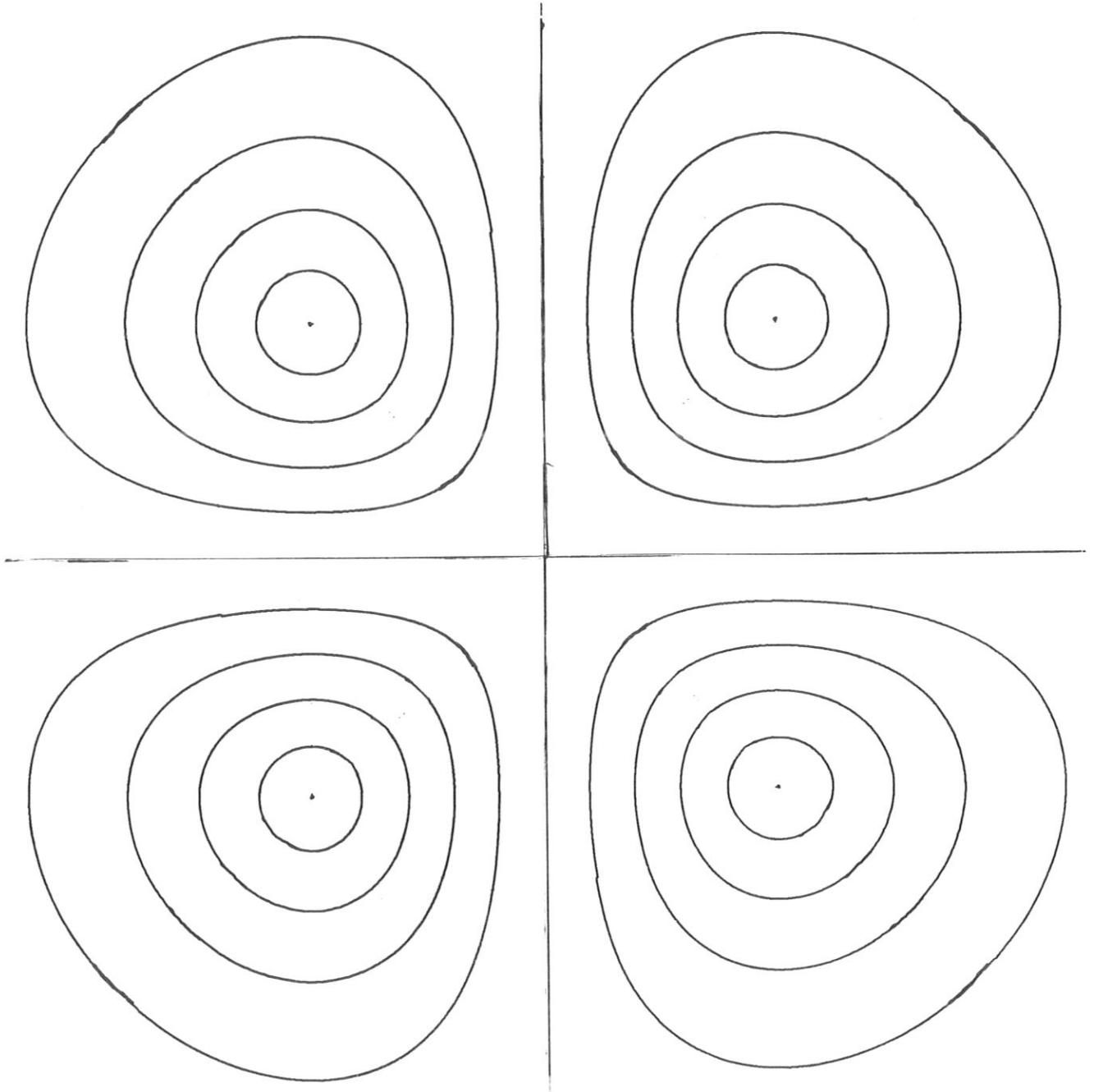
läuft also im ersten Quadranten mit der Uhr. Das Polardiagramm unserer Bedingung wird:

$$r^2 |\sin \theta \cos \theta| = e^{-E} e^{\frac{r^2}{2}}$$

oder, wenn man wiederum einen Winkel als Integrationskonstante einführt:

$$|\sin 2\theta| = |\sin 2\theta_1| \frac{\Psi(r)}{r}$$

wo  $\Psi$  die Funktion des vorigen Beispiels ist. Das ergibt qualitativ folgendes Strömungsbild:



Auch diesmal ist eine kanonische Beschreibung möglich durch die Ersetzung:

$$p = \ln(x), \quad q = \ln(y), \quad H = E(p, q).$$

Der zweidimensionale Fall, allgemein.

Ausgehend von

$$f_x - xf + g_y - yg = 0$$

machen wir den Ansatz

$$f = F e^{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \quad g = G e^{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$

und erhalten:

$$F_x + G_y = 0$$

Dies wird durch

$$F = + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad G = - \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

mit einer willkürlichen Funktion  $\Omega$  gelöst. Statt ihr führen wir mittels

$$\Omega = - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \quad \omega(x, y)$$

eine neue willkürliche Funktion  $\omega$  ein und bekommen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \omega + \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \dot{y} &= x \omega - \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned}$$

Dies ist also die Form aller in der Ebene zulässigen Differentialgleichungen. Wir schreiben sie noch in Polarkoordinaten um:

$$x \dot{x} + y \dot{y} = x \frac{\partial \omega}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

gibt

$$\dot{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$$

Und

$$y \dot{x} - x \dot{y} = - (y^2 + x^2) \omega + y \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

gibt:

$$\dot{\theta} = \omega - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r}$$

Anhand dieser Gleichungen kann man leichter einige Bedingungen an  $\omega$  erörtern, die die "Explosionsgefahr" bannen.

- (1) Kriterium von Wegmann: Es wird die radiale Fluchtgeschwindigkeit abgeschätzt. Ist diese  $\dot{r}_+$ , so kann auf jedem beliebigen Weg ins Unendliche die "Verweilzeit":

$$\tau = \int_p^\infty \frac{ds}{\dot{r}_+} = \infty$$

sein. Ist dies jedoch endlich, so besteht die Gefahr des Entweichens. In unserem Fall lautet die Bedingung ausführlich:

$$\tau = \int_p^\infty Y \left( \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \theta} r ds = \infty$$

Hierin ist  $Y$  die Heaviside'sche Sprungfunktion. Man hat also eine Einschränkung an  $\omega$ .

- (2) Ein einfaches hinreichendes Kriterium ergibt sich, wenn  $|\dot{r}|$  beschränkt ist, für hinreichend große  $r$ . Also etwa

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0 (r)$$

- (3) Wenn (fast) alle Bahnen geschlossen sind, so kann ebenfalls nichts passieren.
- (4) Eventuell lassen sich Liapunov-Funktionen finden, um zu sehen, ob die Bahnen nicht explodieren.

Das Kriterium (3) legt den Wunsch nahe, das Strömungsfeld der Abbildung geradezu vorzugeben. In der Tat, denkt man sich dieses als bekannt, so läßt sich (mindestens) ein passendes  $\omega$  finden. Denn zunächst ist in jedem Punkt  $(r, \theta)$  die Strömungsrichtung bekannt:

$$\frac{d\theta}{dr} = \phi (r, \theta)$$

Führen wir zudem noch  $\xi = \frac{r}{2}$  als neue Variable ein, so lauten unsere Bewegungsgleichungen jetzt:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \omega}{\partial \theta}; \quad \dot{\theta} = \omega - \frac{\partial \omega}{\partial \xi}$$

Wir wollen zunächst annehmen, daß die Stromlinien nicht explizit von der Zeit abhängen. Es liegt dann nahe, dies auch für  $\omega$  vorauszusetzen. Damit wird

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \dot{\xi} \\ &= \omega \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \\ &= \omega \dot{\xi} \end{aligned}$$

oder  $\omega = C(\xi, \theta) e^{\xi}$

wo  $\dot{C} = 0$

Diese letztere Bedingung lautet ausführlich:

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial C}{\partial \xi} \dot{\xi} = 0$$

Ein fest gegebenes Strömungsbild führt auf folgende Gleichung zur Bestimmung von C:

$$\phi(\xi, \theta) \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial \xi} = 0$$

Wenn die Stromlinien durch  $A(\theta, \xi) = \text{const.}$  gegeben sind, so ist offenbar

$$C = C(A(\theta, \xi))$$

dann eine Lösung dieser Gleichung für jede beliebige Funktion  $C(A)$ . Die Kenntnis von C bedingt die von  $\omega$  und daher sind die Bewegungsgleichungen eindeutig festgelegt.

Denken wir uns zunächst umgekehrt diese nur in der Form vorgelegt:

$$\dot{\xi} = f(\xi, \theta)$$

$$\dot{\theta} = g(\xi, \theta)$$

so ist hierdurch sofort ein  $\dot{\Phi}$  erklärt:

$$\dot{\Phi} = g/f$$

und als Folge - aufgrund der obigen Konstruktion - eine Klasse von zulässigen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f^* (\xi, \theta, \{C, \phi\}) \\ \dot{\theta} &= g^* (\xi, \theta, \{C, \phi\})\end{aligned}$$

Darin haben wir die funktionale Abhängigkeit von  $\phi$  und  $C$  ausdrücklich notiert. Man kann jetzt fragen, ob die ursprünglichen unter diesen sind.

Dann muß gelten:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial C}{\partial \theta} e^{\xi} \quad \dot{\theta} = - \frac{\partial C}{\partial \xi} e^{\xi}$$

oder

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = f e^{-\xi} \quad \frac{\partial C}{\partial \xi} = -g e^{-\xi}$$

Die Existenz von  $C$  fordert jetzt eine Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} - f + \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$$

die natürlich unseren früheren Bedingungen an  $f$  und  $g$  in kartesischen Koordinaten entspricht.

Es sei noch bemerkt, daß  $\omega$  auch von  $t$  explizit abhängen darf. Wenn wir nämlich auf die Gleichungen für  $\dot{\xi}$  und  $\dot{\theta}$  zurückgehen, so folgt unmittelbar:

$$d\theta/d\xi = \frac{\partial\omega/\partial\theta}{\omega - \partial\omega/\partial\xi}$$

oder, mit  $\ln(\omega) = \lambda(\xi, \theta) + \xi$ :

$$\phi(\xi, \theta, t) \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} + \frac{\partial\lambda}{\partial\xi} = 0$$

In jedem Augenblick ist das gesamte Strömungsfeld bekannt und damit auch  $\lambda$  bestimmbar.

Differentielle Rotationen in drei Dimensionen.

Dieser Spezialfall ist illustrativ, weil er zeigt, daß schon jetzt eine große Varietät möglicher Bewegungsgleichungen auftritt. Die entsprechenden Forderungen an  $\dot{x} = f$ ,  $\dot{y} = g$ ,  $\dot{z} = h$  lauten:

$$xf + yg + zh = 0 \quad \text{kurz:} \quad \vec{x} \cdot \vec{h} = 0$$

$$f_x + g_y + h_z = 0 \quad \text{kurz:} \quad \text{div } \vec{h} = 0$$

Dies bedeutet für die Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{B}(\vec{x}) \times \vec{x}$$

sowie

$$\vec{x} \times \text{rot } \vec{B} = 0$$

Hierbei ist  $\vec{B}$  ein nur durch die zweite Bedingung eingeschränktes Feld.

Eine alternative Fassung ist:

$$\dot{\vec{x}} = \text{rot } \vec{A}(\vec{x})$$

$$\vec{x} \cdot \text{rot } \vec{A} = 0$$

Die letzte Gleichung lautet ausführlich auch

$$\frac{\partial A_x}{\partial \theta_x} + \frac{\partial A_y}{\partial \theta_y} + \frac{\partial A_z}{\partial \theta_z} = 0$$

wo  $\partial/\partial\theta$  infinitesimale Drehungen um die respektiven Achsen meint. Wir sehen, daß im Grunde drei Lie-Generatoren in das Problem eingehen. Wir erwarten als Antwort differentielle Rotationen im Raum. Dem wäre es gemäß, nicht nur eine Zeit einzuführen, sondern drei verschiedene Zeiten, entsprechend den verschiedenen Drehwinkeln. Hierauf soll nicht eingegangen werden, doch erwarten wir schon in diesem Sinne mit wachsender Dimensionszahl eine rapide anwachsende Mannigfaltigkeit von möglichen Lösungen unserer Fragestellung.

Produktansatz in n Dimensionen.

Wie wir im folgenden sehen werden, stellt auch dieser noch eine unnötige jedoch konstruktive Einschränkung dar. Insbesondere ist er offenbar gut geeignet um nicht-explosive Lösungen zu finden. Sei

$$\dot{x}_i = \prod_{k=1}^n F_i^{(k)}(x_k)$$

so lautet unsere "lokale" Forderung

$$\sum_i (x_i f_i - \frac{\partial f_i}{\partial f_i}) = 0$$

hiermit:

$$\sum_i \prod_k F_i^{(k)} \frac{1}{F_i^{(i)}} (x_i F_i^{(i)} - \frac{dF_i^{(i)}}{dx_i}) = 0$$

Um sie zu erfüllen, setzen wir mit irgend welchen - noch offenen Konstanten -  $\alpha_i^{(k)}$  an:

$$F_i^{(k)} = \alpha_i^{(k)} \cdot F^{(k)} \quad i \neq k$$

$$x_i F_i^{(i)} - \frac{dF_i^{(i)}}{dx_i} = \alpha_i^{(i)} F^{(i)} \quad i = k$$

Dann wird die Forderung einfach eine Bedingung an diese Konstanten:

$$\sum_i \prod_k \alpha_i^{(k)} = 0$$

Dies ist eine einzige Bedingung. Hat man die Konstanten geeignet gewählt, so fixieren die diagonalen F-s alles. In der Tat, sei

$$\phi_i := F_i^{(i)}$$

so wird

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \prod_{k \neq i}^n \alpha_i^{(k)} F^{(k)}(x_k) \cdot \phi_i(x_i) \\ &= \prod_{k \neq i} \frac{\alpha_k}{\alpha_i^{(k)}} (x_k \phi_k - \phi_k') \cdot \phi_i(x_i) \end{aligned}$$

O.B.d.A. wählen wir  $\alpha_k^{(k)} = 1$  und erhalten einfacher

$$\dot{x}_i = \dot{\phi}_i(x_i) \prod_{k \neq i} \alpha_i^{(k)} (x_k \phi_k - \phi_k')$$

Es liegt nahe,

$$A_i := \prod_k \alpha_i^{(k)}$$

einzuführen. Insgesamt resultiert dann

$$\dot{x}_i = A_i \dot{\phi}_i(x_i) \prod_{k \neq i} (x_k \phi_k - \phi_k')$$

mit der Nebenbedingung:

$$\sum A_i = 0$$

Wieder kann man leicht ein erstes Integral der Bewegungsgleichung finden,

indem man sie mit  $(x_i \dot{\phi}_i - \dot{\phi}_i')/\dot{\phi}_i$  multipliziert:

$$\dot{x}_i \left( x_i - \frac{\dot{\phi}_i'}{\dot{\phi}_i} \right) = A_i W$$

Hier ist

$$W = \prod_{k=1}^n (x_k \phi_k - \phi_k')$$

Wegen der Nebenbedingung an die  $A_i$  folgt unmittelbar:

$$\frac{1}{2} \sum x_i^2 - \ln \prod \phi_i = E/2$$

Führt man noch einen Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors ein, so ergibt sich:

$$\prod \phi_i^2 (r \alpha_i) = e^E e^{r^2}$$

Dieses Ergebnis läßt sich wie früher gut für Beispiele verwenden.

Die Druyvestein - Verteilung.

Mann kann neben dem Gauß auch an andere Verteilungen denken. Ein vielleicht noch traktabler Fall wird 1-dimensional durch

$$\frac{2\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{4})} e^{-\frac{x^4}{4}}$$

repräsentiert. Ich habe in der mathematischen Literatur keinen Namen hierfür gefunden, in der kinetischen Gastheorie werden Verteilungen mit derartigen Exponenten gelegentlich auf Druyvestein zurückgeführt.

Es ist leicht, die vorige Rechnung auch für den Fall durchzuführen, daß ein Produkt unabhängiger Druyvestein-Verteilungen erhalten bleiben soll und man erhält ganz ähnlich:

$$\prod |\phi_i(r, \alpha_i)| = e^{-E} e^{\frac{r^4}{4}}.$$

Der allgemeine Fall  $n > 2$ .

Für die Bewegungsgleichungen

$$\dot{x}_i = f_i(x_1 \dots x_n)$$

wird die Gaußbedingung

$$\sum \partial f_i / \partial x_i = \sum x_i f_i$$

während die Druyvestein Bedingung lautet

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum x_i^3 f_i$$

Ich will zeigen, daß auch jetzt das geometrische Strömungsbild willkürlich vorgeschrieben werden kann, - wenn es nur (fast) nicht explodiert.

Wenn die ursprünglichen Bewegungsgleichungen einer von beiden Bedingungen schon genügen, so ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls kann man unter Wahrung des Strömungsbildes neue Differentialgleichungen betrachten

$$\dot{x}_i = f_i^*$$

die im Fall von Gauß durch einen "Gauß"-exponenten in

$$f_i^+ = f_i e^G$$

und analog im Druyvestein'schen Fall mit den ursprünglichen Zusammenhängen. Für diese Exponenten G bzw. D ergeben sich die respektiven Gleichungen:

$$\sum_i f_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i} = \sum (x_i f_i - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}) = \psi_G(x_1 \dots x_n)$$

bzw.

$$\sum_i f_i \cdot \frac{\partial D}{\partial x_i} = \sum_j (x_j^3 f_j - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}) = \psi_D(x_1 \dots x_n)$$

Ganz offensichtlich läßt sich dies auch auf Produktansätze von ganz beliebig en Wahrscheinlichkeitsmaßnahmen verallgemeinern.

Die obigen Gleichungen sind nun zwar nicht einfacher als das allgemein zugehörige Liouville-Problem, denn der Liouvilleoperator steht auf der linken Seite. Aber sie sind ebenso im Prinzip lösbar und unterscheiden sich nur durch diverse nichtverschwindende rechte Seiten von diesem.

Daher gilt folgendes Theorem:

Ein Produktmaß ist immer mit der Geometrie eines vorgegebenen Strömungsfeldes kompatibel. Explosionen ausgenommen.

Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit unseren zweidimensionalen Beispielen. Es ist aber überwiegend theoretischer Art, denn es wird kaum einen Weg geben, in komplizierten Fällen die Exponenten tatsächlich zu berechnen. Jedoch scheint mir, daß es einen gewissen Einblick in die Struktur des Turbulenzproblems gibt, nämlich in die innere Abhängigkeit von Wahrscheinlichkeiten und Dynamik. Dies ist so zu verstehen: Wir haben uns bislang nur auf stationäre Statistik beschränkt. Immerhin sollte diese ein guter Kandidat sein für ein universelles Gesetz. Und wir haben an Beispielen gesehen, worauf es insbesondere nicht anzukommen braucht, nämlich auf die Geometrie der Strömung. Diese aber enthält sehr viele Freiheitsgrade!

Im Vergleich zu den Resultaten der vorigen Abschnitte ist das Ergebnis allerdings nicht konstruktiv, denn dort werden konkret zulässige Gleichungen geboten.

Zerspaltung in Raum und Zeit.

Die logische Reduktion des Problems, wie sie das obige Theorem bringt, kann man noch etwas anschaulicher gestalten, wenn man statt der Exponenten andere Parameter einführt. Als einfach bietet sich an:

$$G \rightarrow \dot{r} = \frac{1}{r} \cdot \sum_i f_i \cdot e^G$$

Danach hat man in jedem Punkt  $(x_1 \dots x_n)$  eine eindeutige Abbildung von  $G$  und  $\dot{r}$ . Man darf daher auch sagen:

Bei gegebener räumlicher Geometrie des Strömungsfeldes sind Produktmaße invariant, wenn die Radialgeschwindigkeit  $\dot{r}$  geeignet gewählt wird.

Eine noch dynamischere Vorstellung läßt sich gewinnen mit einer Norm der lokalen Geschwindigkeit, etwa

$$G \rightarrow v = \sqrt{\sum f_i^2} \cdot e^G$$

In der Praxis allerdings wird es nicht immer leicht sein, zwischen dem räumlichen Verlauf - der Geometrie der Bahnen - und dem zeitlichen Ablauf - der lokalen Geschwindigkeit - so sauber zu separieren. Die Statistik scheint dies allerdings zu vermögen.

Der letzte Vorschlag läßt die Zerspaltung in Raum und Zeitablauf der Bewegung noch deutlicher werden, wenn man die räumliche Bogenlänge als unabhängige und die Zeit  $t(x_1, \dots x_n)$  als abhängige Variable einführt. Wir schreiben zunächst die Ausgangsgleichungen  $\dot{x}_i = f_i$  in die entsprechende Form, um den Übergang zu  $f_i$  dann besser sehen zu können. Ist  $\phi_i$  durch

$$\phi_i := \frac{f_i}{\sqrt{\sum_k f_k^2}}$$

definiert, so lauten sie:

$$\frac{dx_i}{ds} = \phi_i(x_1 \dots x_n)$$
$$\frac{dt}{ds} = e^{-G_u(x_1 \dots x_n)}$$

mit einem "ursprünglichen"  $G = G_U$

$$G_u = \frac{1}{2} \ln \sum f_k^2$$

Demgegenüber ändert sich bei den "Gauß"-adaptierten Gleichungen nur  $G$  in  $G_A$  ab, das jetzt durch

$$\sum \phi_i \frac{\partial G_A}{\partial x_i} = \sum (x_j \phi_j - \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j})$$

definiert ist. Die verschiedenen Varianten von  $G$  haben offensichtlich nur auf die lokale Zeitvariable Einfluß.

Die analoge Version für den Druyvestein bietet sich an:

$$\sum \phi_i \frac{\partial G_D}{\partial x_i} = \sum (x_j^3 \phi_j - \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j})$$

und es ist naheliegend, wie man dies auf beliebige Produktmaße verallgemeinern muß.

#### Additionstheoreme.

Es ist unser Wunsch, alle mit einem gegebenen statistischen Turbulenzproblem verträglichen Bewegungsgleichungen simultan zu betrachten.

Dann werden deren innere Beziehungen von besonderem Interesse.

Im Hinblick auf unsere bisherige Darstellung starten wir mit der trivialen Bemerkung, daß die lokale Gauß-kondition

$$\sum_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \right) f_i = 0$$

in  $f$  linear ist. Ganz entsprechendes gilt für die Druyvestein'sche und andere. Schon hieraus ergeben sich einige - für die Praxis wichtige - Schlüsse.

(I) Ein Additionstheorem.

Generieren

$$\dot{x}_i = f_i(x_1 \dots x_n)$$

und

$$\dot{x}_i = g_i(x_1 \dots x_n)$$

zwei Gaußerhaltende Abbildungen, so tut dies auch ihre Überlagerung:

$$h_i = a \cdot f_i + b \cdot g_i \quad (a, b = \text{Konstante})$$

Der Beweis ist trivial. Hinsichtlich der Explosionsgefahr muß man lediglich beachten: Diese ist gebannt, falls für beide Ausgangsgleichungen etwa

$$|\dot{r}| < \text{const.}$$

ist. Daher darf man z.B. irgend welchen Gaußerhaltenden Abbildungen stets differentiale Rotationen überlagern.

Beispiel: Überlagerung zweier Kreisbewegungen:

$$\dot{x} = -ye^x \qquad \dot{y} = (x-1)e^x$$

und

$$\dot{x} = -y \qquad \dot{y} = x$$

liefert

$$\dot{x} = -y(e^x+1) \qquad \dot{y} = x(e^x+1) - e^x$$

Dieser Sachverhalt ist u.U. gerade in der umgekehrten Richtung sehr nützlich, gestattet er doch dann eventuell die Zerlegung einer vorgelegten Abbildung in Teile und deren separates Studium!

(II) Ein Superpositionstheorem.

Die konvexe Überlagerung zweier Exponenten, etwa eines Gauß'schen G und eines Druyvestein'schen D führt wieder auf einen möglichen Exponenten. Er soll der "kombinierte" heißen. Der Raumanteil des Strömungsfeldes ist dabei allemale derselbe.

$$K = \cos^2 \alpha \cdot G + \sin^2 \alpha \cdot D$$

Zum Beweis betrachten wir zwei geometrisch gleichartige Strömungen

$$\frac{dx_i}{ds} = \phi_i \quad \frac{dt_G}{ds} = e^{-G}$$

und

$$\frac{dx_i}{ds} = \phi_i \quad \frac{dt_D}{ds} = e^{-D}$$

wobei für G und D die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \sum \phi_i \frac{\partial G}{\partial x_i} &= \sum (x_i \phi_i - \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}) \\ \sum \phi_i \frac{\partial D}{\partial x_i} &= \sum (x_i^3 \phi_i - \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}) \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$\sum \phi_i \frac{\partial K}{\partial x_i} = \sum ((\cos^2 \alpha \cdot x_i + \sin^2 \alpha \cdot x_i^3) - \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i})$$

Die rechte Seite gehört zu einem Produktansatz für das Wahrscheinlichkeitsmaß, dessen Faktoren

$$\sim e^{-\frac{\cos^2 \alpha}{2} x^2 - \frac{\sin^2 \alpha}{4} x^4}$$

sind, also i.W. ein Produkt aus Gauß und Druyvestein. Während die Geometrie der neuen Strömung unverändert bleibt, ist es noch interessant, das neue "Zeitenfeld" anzugeben:

$$\frac{dt_K}{ds} = \left( \frac{dt_G}{ds} \right)^{\cos^2 \alpha} \cdot \left( \frac{dt_D}{ds} \right)^{\sin^2 \alpha}$$

Es ist klar, daß derartige Überlagerungen nicht auf Druyvestein und Gauß beschränkt bleiben müssen.

### III. Ein anderes Additionstheorem.

Sind für zwei Strömungen die Exponenten dieselben:

$$G' = G'' = G^{(0)}$$

so gilt für die geometrische Überlagerung, definiert durch:

$$\phi_i = \frac{\phi_i' + \phi_i''}{\sqrt{\sum_k (\phi_k' + \phi_k'')^2}}$$

dass der zugehörige Exponent wird:

$$G = G^{(0)} - \frac{1}{2} \ln \sum_k (\phi_k' + \phi_k'')^2$$

Der Beweis ist leicht.

### IV. Lokale Drehungen.

Seien

$$\frac{dx_i}{ds} = \phi_i' \quad \frac{dt'}{ds} = e^{-G'}$$

und

$$\frac{dx_i}{ds} = \phi_i'' \quad \frac{dt''}{ds} = e^{-G''}$$

zwei turbulente Felder. Wir wollen in jedem Punkt eine Drehung der räumlichen Komponenten betrachten:

$$\psi_i' := \cos \alpha \cdot \phi_i' + \sin \alpha \cdot \phi_i''$$

$$\psi_i'' := -\sin \alpha \cdot \phi_i' + \cos \alpha \cdot \phi_i''$$

Dann ist auch für geeignete  $\alpha (x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{dx_i}{ds} = \psi_i' \quad \text{und} \quad \frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{dt'}{ds} \frac{dt''}{ds}}$$
$$\frac{dx_i}{ds} = \psi_i''$$

Gauß-turbulent.

In der Tat, man zeigt leicht, daß

$$\Sigma \psi_i' \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{G' + G''}{2} + \psi_i'' \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{G' - G''}{2} + \alpha \right)$$
$$= \Sigma \left( \psi_i' x_i - \frac{\partial \psi_i'}{\partial x_i} \right)$$

und

$$\Sigma \psi_i'' \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{G' + G''}{2} - \psi_i' \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{G' - G''}{2} + \alpha \right)$$
$$= \Sigma \left( \psi_i'' x_i - \frac{\partial \psi_i''}{\partial x_i} \right)$$

Wählt man also

$$\alpha = \frac{G'' - G'}{2}$$

so ist auch für die neuen Gleichungen die Gaußrelation erfüllt.

Der neue Exponent ist

$$G = \frac{G' + G''}{2}$$

Dieser entspricht gerade dem geometrischen Mittel.

### Lie-Gruppen.

Wie wir gesehen haben, sind mit der Gauß-Bedingung mehrere Strömungen gleichzeitig verträglich. Wir wollen sie alle kurz als "Gaußströmungen" bezeichnen. Aus der Art der Ableitung geht fast unmittelbar hervor der Satz: Gaußströmungen bilden eine Liegruppe.

In der Tat hatten wir uns auf die infinitesimalen Transformationen in der Umgebung der Identität gestützt und diese dann lediglich als Strömungen gedeutet. Dann aber ist der Satz nahezu trivial, denn:

Die Menge aller Abbildungen des Raumes bildet natürlich eine Gruppe. Insbesondere bilden eine Untergruppe dieser all jene Abbildungen, die mit der Identität stetig zusammenhängen. Das ist die allgemeine Lie-Gruppe. Innerhalb dieser wiederum bilden alle diejenigen Abbildungen eine Untergruppe, die *i r g e n d e t w a s* invariant lassen: Denn, ist dieses "Irgend" einmal bei zwei Abbildungen separat invariant, so auch bei deren Zusammensetzung.<sup>+) In unserem Fall ist nun die Gaußverteilung als diese Invariante gewählt worden. Sie definiert dann gerade die Lie-Gruppe der Gauß-Strömungen, oder, wie wir auch kürzer sagen wollen, die Gaußgruppe. Weitere Invarianten führen zu Untergruppen, wie wir noch in Beispielen sehen werden.</sup>

Die erwähnten Additionstheoreme sind eine direkte Folge dieser Überlegung. Die einfache Addition bezieht sich auf ein Hintereinanderschalten der betreffenden Abbildungen, sie drückt (in erster Ordnung) unmittelbar die Gruppeneigenschaft aus. Daneben gibt es aber noch die Klammeroperation. Sie ordnet zwei Strömungen  $f$  und  $g$  eine dritte zu, deren Lieprodukt, genannt:  $(f, g)$ . Zusammen mit der Additivität führt dies auf ein sogenannte

---

<sup>+) Dies wird oft und überflüssigerweise rechnerisch bestätigt (Bermerkung von J. Ehlers).</sup>

Lie-Algebra: Denn ein derartiges Lie-Produkt ist wieder eine Gaußströmung.

Zum Beweis kann man sich immer getrost auf den zweiten Hauptsatz von Lie berufen. Doch ist in unserem Fall auch ein direkter Beweis einfach. Dazu erinnere man sich der Definition des Lie-Produktes. Es betrifft infinitesimale Transformationen, eine Strömung also, die durch ein Vektorfeld charakterisiert ist. Jede Strömung kann man durch eine Indikatortinte oder durch eine Wolke von Testteilchen sichtbar machen. Wenn sie leicht sind, werden sie der Strömung unmittelbar folgen. Eine derartige Markierung ist koordinateninvariant. Sie liefert eine erschöpfende Beschreibung, wenn man die anfängliche Dichte der Testteilchen variiert. Mathematisch bedeutet dies: Eine skalare Testfunktion  $\phi(x)$  (man kann positive Werte durch rote und negative durch schwarze Teilchen repräsentieren) wird abgebildet - während einer kurzen Zeit durch "Mitschwimmen" - in:

$$\phi \rightarrow \delta t \cdot f [\phi] + \phi ,$$

eine andere skalare Funktion also (der Vorteil ist formal: die Koordinaten Invarianz skalarer Funktionen ist besonders trivial erklärbar):

$$f [\phi] = \sum_i f_i(x_1 \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x_1 \dots x_n)$$

Dies ist der ausführliche Ausdruck in Koordinaten. Eine koordinatenfreie Darstellung ist ebenfalls möglich. Das Vektorfeld  $f$  ist daher als Operator

$$f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

der Richtungsableitung zu verstehen. Für Operatoren aber liegt es nahe, den Kommutator zu betrachten. Seien also  $f$  und  $g$  zwei Gaußströmungen, sonach

$$\begin{aligned} \sum \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \right) f_i &= 0 \\ \sum \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \right) g_i &= 0. \end{aligned}$$

Dann kann man für die zugehörigen Vektoren die Lie-Klammer bilden

$$(f, g) [\phi] := f [g [\phi]] - g [f [\phi]]$$

Ausführlich wird dies:

$$\sum_k \sum_i (f_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} - g_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_k} \phi$$

und definiert ein neues Vektorfeld mit den Komponenten:

$$h_k = \sum_i (f_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} - g_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i})$$

Wir fragen nun, ob auch dieses eine Gaußströmung beschreibt:

$$\sum (\frac{\partial}{\partial x_k} - x_k) h_k = 0$$

In der Tat ist diese Gleichung erfüllt, wie man leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} x_k (f_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} - g_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i}) &\stackrel{?}{=} \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_k} (f_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} - g_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i}) \\ &\stackrel{?}{=} \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k x_k g_k - g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k x_k f_k \end{aligned}$$

wenn man die Differentiationen der rechten Seite ausführt und die Gaußizität der  $f$  und  $g$  benützt. Führt man jetzt die rechts noch verbleibenden Differentiationen aus, so werden beide Seiten identisch. Das Lie-Produkt verletzt also die Gaußströmungen nicht. Dieses Resultat hat einen gewissen Zusammenhang mit der Jacobischen Theorie des letzten Multiplikators.

Ich möchte das Ergebnis an einem einfachen Beispiel illustrieren, nämlich für zwei einfache Kreisströmungen, wie schon früher beim Additionstheorem: Einmal

$$\dot{x} = -y e^x, \quad \dot{y} = (x-1)e^x$$

und zum anderen eine starre Rotation.

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x$$

Es kommt für das Lie-Produkt beider:

$$\dot{x} = (1-y^2) e^x, \quad \dot{y} = y (x-1)e^x$$

Es ist begrifflich klar, man kann es aber auch leicht durch eine analoge Rechnung bestätigen, daß auch die Druyvestein-Strömungen eine ähnliche Lie-

Gruppe bilden, zu der eine entsprechende Lie-Algebra gehört. Das gilt auch in allgemeineren Fällen.

Wir sehen also die Bewegungsgleichungen nicht mehr als isolierte Beispiele an. Sie sind vielmehr eingebettet in einen Zusammenhang, ein Gewebe von anderen "gleichberechtigten" Bewegungsgleichungen, zwischen denen ein hoher Grad innerer Verzahnung besteht. Alle gleichberechtigten lassen sich nach den Regeln der Algebra kombinieren, ohne im Hinblick auf die betrachtete Statistik irgend etwas zu ändern. Mit anderen Worten: Die Menge aller möglichen Bewegungsgleichungen - die identisch ist mit der allgemeinen Lie-Gruppe - zerfällt in Klassen gleichberechtigter im obigen Sinne, die gewisse Untergruppen repräsentieren, wie der Gaußgruppe, die Druryvesteingruppe etc.

### Untergruppen

Das theoretische Interesse hieran versteht sich von selbst:

Denn die Klassifikation der Lie-Gruppen orientiert sich an der Bauart ihrer Untergruppen (Killing, Cartan). Diese reizvolle Frage soll Gegenstand einer gesonderten Untersuchung sein. Doch glaube ich, daß eine geschickte Kennzeichnung möglicher Untergruppen auch ein Bedürfnis der Praxis ist. Denn solche können verstanden werden, als ob sie durch zusätzliche Invarianten - die mit der vereinbarten Strömung, Gauß, Druyvestein, ... kompatibel sind - definiert werden.

Die folgenden Betrachtungen sind einigen Beispielen dieser Art gewidmet.

Dabei ist es nützlich, den folgenden Sachverhalt vor Augen zu haben:

Ist  $L_1$  eine Liegruppe (also Untergruppe der allgemeinsten Lie-Gruppe, die bei gegebener Dimensionszahl überhaupt möglich ist) und ist  $L_2$  eine andere ebensolche Untergruppe, so ist es auch ihr Durchschnitt  $L = L_1 \cap L_2$ .

Zum Beweis denke man sich, daß jede Lie-Gruppe irgendetwas invariant läßt,  $L_1$  etwa ein Objekt  $O_1$ ,  $L_2$  ein anderes Objekt  $O_2$ . Der Durchschnitt beider Gruppen läßt dann jenes Objekt  $O = (O_1, O_2)$  invariant, das als Zusammenfassung beider einzelnen Objekte unter einem gemeinsamen Begriff erscheint.

Den folgenden Beispielen sind einige Abkürzungen verpaßt, die man nicht als sakrosankt ansehen muß.

(SI): Soll heißen "skaleninvariant". Praktisch handelt es sich um eine Verallgemeinerung der differentiellen Rotationen (Twist-Abbildungen).

Wir betrachten statt einem einzigen Gaußmaß

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \sum_1^n x_i^2}$$

eine ganze Schar solcher,

$$\frac{\lambda^n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_1^n x_i^2}$$

wie sie durch eine Skalendehnung

$$x \rightarrow \lambda x$$

auseinander hervorgehen. Für jedes individuelle Gaußmaß (also zu jedem  $\lambda$ ) gibt es dann eine entsprechende Untergruppe. Sie wird durch ein Bedingung festgelegt, die aus der uns schon bekannten durch Umskalieren hervorgeht:

$$\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \lambda^2 \sum_i x_i f_i$$

Alle diese Lie-Gruppen  $L_\lambda$  sind Bilder voneinander. Wir fragen nach ihrem gemeinsamen Durchschnitt

$$L = \bigcap_\lambda L_\lambda$$

Auch er ist eine Lie-Gruppe. Seine Abbildungen halten alle Gaußmaße gleichzeitig unverrückt fest. Die obige Bedingung lehrt, daß dann zwei Forderungen simultan erfüllt sein müssen:

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$$

und

$$\sum x_i f_i = 0$$

Von der ersten Bedingung kommt unsere Bezeichnung "SI". Denn sie gilt auch für Druyvestein - Verteilungen und andere ganz ungeändert, wenn man dieselbe Frage nach der zusätzlichen Skalen-Invarianz stellt. (Man hätte natürlich auch "inkompressibel" sagen können).

Die Gruppeneigenschaft überträgt sich auf die zugehörige Algebra. Dies ist begrifflich klar, folgt im Einzelnen aber auch so: Für die Addition unmittelbar aus der Gruppenmultiplikation, für den Komutator aus

$$\sum \partial_i f_i = 0,$$

$$\sum \partial_i g_i = 0$$

In der Tat wird dann (Summenkonvention)

$$\partial_k h_k = \partial_k (f_i \partial_i g_k - g_i \partial_i f_k) = 0$$

$h_k$  ist mithin ebenfalls Element der Unter algebra.

Wir stellen noch fest:

Erstens: Die Untergruppe ist Abel'sch.

$$e^{itf} e^{i\tau g} = e^{i\tau g} e^{itf}$$

Der hierzu gehörige Komutator verschwindet nämlich,  $(f, g) = 0$ .

Zweitens: (SI) ist kein Normalteiler. Ist T ein Element von  $(G) =$  Gauß-Gruppe, so müßte für jedes  $A \in (SI)$  gelten:

$$T^{-1} A T \in (SI)$$

Für alle T's aus (SI) ist dies natürlich wahr. Ist aber g so, daß ein infinitesimales T  $\notin$  (SI) beschreibt:

$$\partial_i g_i = x_i g_i \neq 0$$

so wird die zu  $A = e^{itf}$  gehörige infinitesimale Transformation f bei dem Automorphismus

$$A \rightarrow T^{-1} A T$$

übergehen in  $(f, g)$ . Man muß fragen, ob dies noch in der Algebra liegt, die zu (SI) gehört:

$$\partial_k (f, g)_k \stackrel{?}{=} 0$$

Ausführlich wird dies

$$\partial_k (f_i \partial_i g_k - g_i \partial_i f_k) = f_i \partial_i x_k g_k$$

Da dieser Komutator im Allgemeinen nicht mehr verschwindet, ist die Antwort: Nein. (SI) ist kein Normalteiler zu irgend einem der  $(G_\lambda)$ 's.

Drittens: Beschränkt man sich auf zwei Dimensionen, so ist die Willkür aller  $\omega$ 's in den Bewegungsgleichungen der Gauß-Gruppe eingeschränkt durch

$$(x \partial_y - y \partial_x) \omega = 0$$

Diese Bedingung folgt aus beiden Forderungen von (SI) an die  $f_i$  gleichermaßen.

$\omega$  hängt also nur vom Radius ab. Das bedeutet: Twist.

(H): soll heißen: "Hamilton'sch". Dies ist eine Untergruppe der vorigen.

Wenn  $n$  gerade ist, so kann es möglich sein, daß die Strömung durch  $n$  Paare von Gleichungen beschrieben wird, die aus einer Hamiltonfunktion folgen. Für z.B.

$$(x_1, \dots, x_n) = (q_1, \dots, q_n)$$
$$(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = (p_1, \dots, p_n)$$

gilt dann

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \quad \dot{p}_a = - \frac{\partial H}{\partial q_a}$$

und daher folgt aus dem Liouville'schen Satz sofort

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$$

Die Gaußbedingung lautet daher jetzt

$$\sum (q_a \frac{\partial H}{\partial p_a} - p_a \frac{\partial H}{\partial q_a}) = 0$$

Mit

$$F = \frac{1}{2} \sum (q_j^2 + p_j^2)$$

wird dies kürzer

$$\{F, H\} = 0$$

unter Verwendung der Poissonklammer. Eine sehr einfache Lösung ist  $H = F$ . Sie beschreibt ein System entkoppelter Oszillatoren wie es z.B. im Limes  $n \rightarrow \infty$  beim Planck'schen Hohlraum vorliegt. In der Tat hatten Einstein und Hopf die Annahmen eines Gaußmaßes für diesen Fall (Kontakt mit Wärmebad) schon 1910 begründet.

Allgemeinere Ansätze für  $H$  sind Funktionen von  $F$  oder

$$H = \Phi (q_1^2 + p_1^2, q_2^2 + p_2^2, \dots; q_1 q_2 + p_1 p_2, \dots)$$
$$= \Phi (\{q_i q_j + p_i p_j\}, i \leq j = 1, 2, \dots, n)$$

(GD): Soll heißen: "Gauß-Druyvestein". Diesmal betrachten wir nur zwei Kon-

kurrenten:

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum x_i f_i \quad \text{und} \quad \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum x_i^3 f_i$$

Diese beiden sind nicht unverträglich und sie definieren eine nicht-triviale Untergruppe sowohl von (D) als auch (G). Begrifflich ist es klar, eine leichte Rechnung bestätigt es: Die Addition ist trivial, für die Klammer kommt

$$h_k = (f, g)_k = \sum_i (f_i \partial_i g_k - g_i \partial_i f_k)$$

Es ergibt sich: ( $m = 1, 3$ )

$$\begin{aligned} \sum_k \partial_k h_k &= \sum_{ik} (f_i \partial_i x_k^m g_k - g_i \partial_i x_k^m f_k) \\ &= \sum_k x_k^m h_k \end{aligned}$$

Ähnlich wie eben zeigt man, daß (GD) kein Normalteiler ist. Erwähnt sei noch, daß sich die Bedingungen etwas umschreiben lassen, nämlich

$$\sum \partial_i f_i = \sum x_i f_i \quad \text{und} \quad \sum (x_i^3 - x_i) f_i = 0$$

Die zweite bedeutet, daß die Bewegung "orthogonal" zu dem Vektor  $(x_1^3 - x_1, \dots, x_n^3 - x_n)$  erfolgt.

(GD2): Soll heißen: der eben behandelte Fall, zweidimensional. Hier kann man hoffen, zu wesentlich expliziteren Ausdrücken zu kommen, weil dies ja auch schon für die Gauß- und Druyvesteinströmungen in der Ebene so war. Denn diese waren gekennzeichnet durch zwei willkürliche Funktionen  $\omega(x, y)$  und  $\omega'(x, y)$  gemäß:

$$\begin{cases} \dot{x}_G = -y\omega + \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \dot{y}_G = \omega - \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_D = -y^3 \omega' + \frac{\partial \omega'}{\partial y} \\ \dot{y}_D = x^3 \omega' - \frac{\partial \omega'}{\partial x} \end{cases}$$

Damit die Strömungen beiden Gruppen angehören, muß sein:

$$\dot{x}_G = \dot{x}_D, \quad \dot{y}_G = \dot{y}_D$$

Dies hat zur Folge, daß

$$\omega'_x - x^3 \omega' = \omega_x - x \omega$$

bzw.

$$\omega'_y - y^3 \omega' = \omega_y - y \omega$$

Wenn man vorübergehend  $\omega$  als bekannt ansieht, so könnte man diese

Beziehungen benützen, um  $\omega'$  zu bestimmen:

$$\omega'_x = x^3 \omega' + \omega_x - x \omega$$

$$\omega'_y = y^3 \omega' + \omega_y - y \omega$$

Damit hiervon eine Lösung existiert, muß allerdings die Integrabilitätsforderung

$$\omega'_{xy} = \omega'_{yx}$$

erfüllt sein. Sie liefert ausführlich

$$x^3 \omega'_y - x \omega_y = y^3 \omega'_x - y \omega_x$$

und schreibt sich unter Verwendung der Ausdrücke für  $\omega'_x$  und  $\omega'_y$  als eine Bedingung allein an  $\omega$ :

$$x^3 \omega'_y - x^3 y \omega - x \omega_y = y^3 \omega'_x - y^3 x \omega - y \omega_x$$

Dividiert man dies durch  $xy\omega$  und führt  $\Omega = \ln \omega$ ,  $\xi = x^2$ ,  $\eta = y^2$  ein, so wird daraus

$$2\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \xi - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 2\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \eta - 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}$$

Die weiteren Substitutionen

$$u = \eta - \xi, \quad v = \eta + \xi$$

bringt dies auf die Form

$$2(v\Omega_u - u\Omega_v) - 4\Omega_u + u = 0$$

Dividiert man noch durch  $u$  und schreibt für  $u^2/2 = \zeta$ , so

$$(4-2v) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial v} = 1$$

Diese Gleichung ist leicht zu lösen.  $\Omega = v/2$  ist eine partikuläre Lösung, so daß man nur noch um die Lösungen der homogenen Gleichung bemüht ist.

Deren Charakteristiken sind durch

$$\frac{dv}{d\zeta} = \frac{1}{2-v}$$

bestimmt. Daher ergibt sich mit einer willkürlichen Funktion

$$\Omega_{\text{homogen}} = F \left( 2v - \frac{v}{2} - \zeta \right)$$

und die allgemeine Lösung ist

$$\Omega = \frac{v}{2} + F.$$

Wenn alle Substitutionen rückgängig gemacht werden, so liest sich dies:

$$\omega = e^{\frac{x^2+y^2}{2}} F \left( \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x^4+y^4}{4} \right)$$

Der erhöhten Invarianz muß also die Freiheit der  $\omega$ 's ein Opfer bringen: Während  $\omega$  ursprünglich sowohl bei (D) als auch (G) eine willkürliche Funktion z w e i e r Variabler war, so ist F nurmehr eine solche einer Veränderlichen. Die Einschränkung wird noch anschaulicher, wenn wir die Geometrie der Strömungsbilder betrachten. Während diese sowohl bei Gauß als Druyvestein jeweils beliebig gedacht werden durften, gilt jetzt

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\text{GD}} &= e^{\frac{x^2+y^2}{2}} (y-y^3) F' \left( \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x^4+y^4}{4} \right) \\ \dot{y}_{\text{GD}} &= - e^{\frac{x^2+y^2}{2}} (x-x^3) F' \left( \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x^4+y^4}{4} \right) \end{aligned}$$

und es ergibt sich mithin für den räumlichen Anteil

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x - x^3}{y - y^3}$$

Hieraus resultieren die Stromlinien, geeignet geschrieben, in der Form:

$$(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 = R^4 \geq 0$$

Kreise also in der  $x^2-y^2$  Ebene, jedenfalls geschlossene Linien.

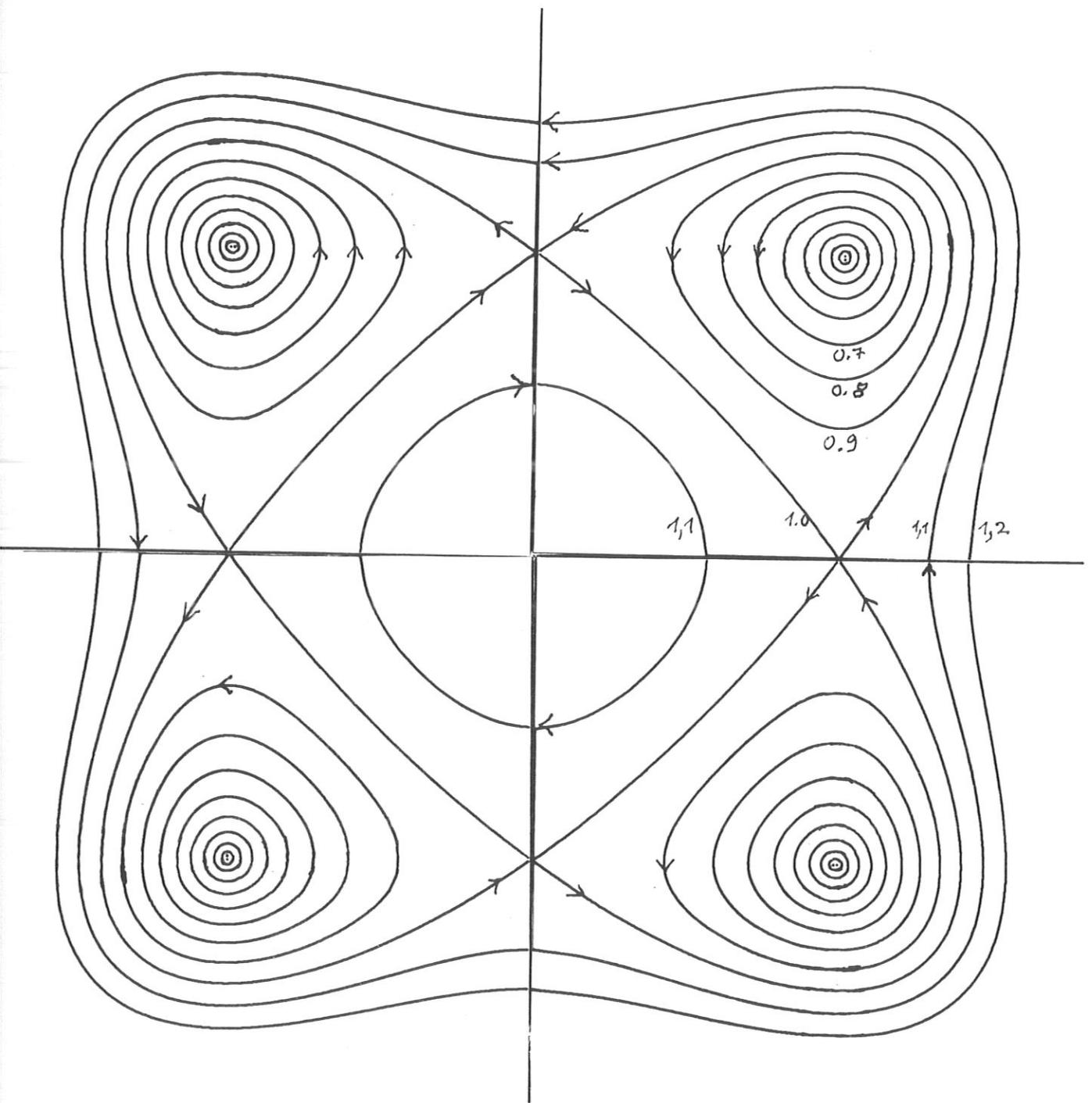


Bild der Stromlinien  $R = \text{const.}$

Wir bemerken hierzu:

Erstens : keine Explosionen!

Zweitens: Der räumliche Anteil ist jetzt völlig fixiert. Die in F steckende Freiheit wirkt sich nur mehr im Rahmen der Exponentenwahl aus. (Obwohl sie diesen nicht ausschöpft, da auch andere als G + D - Verteilungen mit den obigen "Kreisen" verträglich sein können.)

(E): Soll heißen "Exponentengruppe". Sie wird definiert durch ein vorgegebenes räumliches und normiertes Strömungsfeld  $\phi_i$ , so daß die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\frac{dx_i}{dt} = \phi_i e^G =: g_i$$

Ich beschränke mich auf Gauß-Strömungen. Zwei verschiedene solche auf derart "eingefahrenen" Gleisen unterscheiden sich dann lediglich durch ihre Exponenten. Sei neben  $g_i$  noch

$$\frac{dx_i}{dt} = \phi_i e^F =: f_i$$

betrachtet. Dann haben wir

$$\sum \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} (F - G) = 0$$

weil F-G Lösung der homogenen Exponentialgleichung sein muß. Für den Kommutator kommt:

$$\begin{aligned} h_k &= \sum_i (\phi_i e^F \partial_i \phi_k e^G - \phi_i e^G \partial_i \phi_k e^F) \\ &= e^{F+G} \phi_k \sum_i \phi_i \partial_i (G-F) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Exponentialgruppe ist also Abel'sch. Wir haben aber für die Gruppeneigenschaft noch die Addition zu prüfen. Ist

$$h_i = f_i + g_i$$

so sollte auch  $h_i$  wieder der Algebra angehören, es muß sich daher schreiben lassen in der Form

$$h_i = \phi_i e^H$$

worin

$$H = \ln (e^F + e^G)$$

wiederum ein Exponent ist, sich also der Forderung

$$\sum \phi_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = \psi_G \left( = \sum \phi_j x_j - \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right)$$

fügt. Zum Beweis stehen zur Verfügung die beiden Relationen

$$\sum \phi_i \partial_i F = \psi_G \quad \sum \phi_i \partial_i G = \psi_G$$

Schreiben wir die obige Bedingung an H ausführlicher,

$$\sum \phi_i \frac{e^F \partial_i F + e^G \partial_i G}{e^F + e^G} = \psi_G$$

so liest sie sich auch

$$\frac{e^F}{e^F + e^G} \sum \phi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{e^G}{e^F + e^G} \sum \phi_i \frac{\partial G}{\partial x_i} \stackrel{!}{=} \psi_G$$

Unter Benutzung der Voraussetzungen an F und G bestätigt man dies aber sofort.

Die Exponentialgruppen spielen offensichtlich die Rolle von verallgemeinerten differentiellen Rotationen.

Es sei noch erwähnt, daß die Exponentengruppen einfache Fälle von intransitiven Lie-Gruppen sind. Die Verallgemeinerung auf imprimitive Gruppen liegt dann nahe, soll aber hier nicht durchgeführt werden.

Korrelierte Gaußverteilungen.

Bislang haben wir uns auf Produktmaße eingeschränkt. Diese Voraussetzung kann man bequem fast nur dann fallen lassen, wenn man sich auf Gauß-Maße zurückzieht. In der Tat lassen sich solche leicht durch eine lineare Abbildung auf den Produktansatz zurückführen ("entkorrelieren"). Da dies zugleich ein praktisches Hilfsmittel ist, einige benötigte Eigenschaften von Gaußverteilungen zu gewinnen, gehen wir kurz hierauf ein. Die n-dimensionale Verteilung lautet, mit einem noch offenen Normierungsfaktor

$$N \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum g^{ab} x_a x_b \right\}$$

Im folgenden werden wir die Einstein'sche Summenkonvention benutzen.  $g^{ab}$  benimmt sich weitgehend wie ein metrischer Tensor. Das zugehörige Volumenelement sollte dann nach bekannten Sätzen der Tensoranalysis proportional zur Wurzel der entsprechenden Determinante sein.

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{|\text{Det } g^{ab}|}$$

In der Tat bestätigt man leicht:  $g^{ab}$  läßt sich diagonalisieren,

$$\tilde{A} g A = \gamma$$

Dabei geht der Exponent über in

$$G^{ab} x_a x_b \rightarrow \sum \gamma^a \xi_a^2$$

Diese Abbildung ist linear und daher meßbar, sie konserviert jedenfalls den Gauß als solchen, für den wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum \gamma^a \xi_a^2} \sqrt{|\gamma_1 \cdots \gamma_n|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2} \sum \gamma^a \xi_a^2} \sqrt{|\text{Det } \gamma|} \end{aligned}$$

Umgekehrt kommt man mittels (Summenkonvention)

$$x_a = A_a^b \xi_b$$

zur x-Darstellung zurück:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2} g^{ab} x_a x_b} |A^{-1}| \sqrt{|\gamma|}$$

Aus einem Satz über Determinanten folgt

$$|g| |A^2| = |\gamma| \quad \text{oder} \quad \sqrt{|\gamma|} |A^{-1}| = \sqrt{|g|}$$

Dies alles führt auf das Ergebnis

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2} g^{ab} x_a x_b} \sqrt{|g|}$$

für die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte. Der metrische Tensor  $g^{ab}$  hängt eng mit den zweiten Momenten zusammen. Aus der Normierungsbedingung

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2} g^{ab} x_a x_b} \sqrt{|g|} dx_1 \dots dx_n = 1$$

folgt durch Differentiation nach  $g^{ab}$ :

$$-\frac{1}{2} E \{x_a x_b\} + \frac{1}{2} \frac{1}{|g|} \frac{\partial |g|}{\partial g^{ab}} = 0$$

Führen wir noch den inversen metrischen Tensor durch

$$g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a$$

ein, so kann man dies kurz schreiben als:

$$g_{ab} = E \{x_a x_b\}$$

Der kovariante metrische Tensor ist also direkt durch die Korrelationsmatrix gegeben. Bei diesem Beweis haben wir nicht, wie üblich, die Fouriertransformation gebraucht.

Die Gaußbedingung.

Der einfachste Weg, sie auch in komplizierten Fällen zu gewinnen, ist die Anwendung der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_a} (f_a p_n) = 0$$

Hierbei beschreibt  $\dot{x}_a = f_a(t, x_1, \dots, x_n)$  wiederum die Strömung. Daß diese Gleichung notwendig ist, ist evident. Hinreichende Gaußerhaltung ist gesichert, wenn wir für  $p_n$  den für alle Zeiten als gültig gemeinten Ansatz machen:

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n \sqrt{|g|} e^{-\frac{1}{2} g^{ab} x_a x_b}$$

Hierin dürfen wir jetzt sogar eine explizite Zeitabhängigkeit der Verteilungsparameter  $g^{ab}$  zulassen:

$$g^{ab} = g^{ab}(t)$$

ohne die Gaußizität sofort zu stören.

Die Forderung an die Strömungen  $f_a$  wird an Hand der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_a} - g^{ab} f_a x_b = \frac{1}{2} \dot{g}^{ab} (g_{ab} - x_a x_b)$$

Dies ist eine lineare inhomogene Gleichung an die  $f$ 's. Wir suchen zunächst eine partikuläre Lösung und machen den Ansatz:

$$f_a = L_a^c(t) x_c$$

Dieser liefert

$$(L_a^a - \frac{1}{2} \dot{g}_a^a) = (L^{ab} - \frac{1}{2} \dot{g}^{ab}) x_a x_b$$

Hierbei wurden durch Vermittlung von  $G$  zum Teil Indizes gehoben oder gesenkt, z.B.

$$L^{ab} = g^{ac} L_c^b$$

wie dies auch bei Riemann'schen Metriken üblich ist. Hier braucht man es lediglich als Definition der neuen Ausdrücke  $L^{ab}$  bzw.  $g_a^a$  ansehen. Vor einem Koeffizientenvergleich muß man diese noch symmetrisieren. Dies bezieht sich insbesondere auf  $L^{ab}$ . Danach zerfällt die obige Gleichung in die zwei Forderungen

$$L_a^a = \frac{1}{2} \dot{g}^a_a$$
$$\frac{1}{2} (L^{ab} + L^{ba}) = \frac{1}{2} \dot{g}^{ab}$$

Glücklicherweise ist die erste eine Folge der zweiten, sie entsteht aus dieser durch "Verjüngung". Wir haben daher eine partikuläre Lösung, wenn wir wählen:

$$L^{(ab)} = \frac{1}{2} \dot{g}^{ab}$$
$$L^{[ab]} = 0$$

worin die runden Klammern den symmetrischen und die eckigen den antisymmetrischen Anteil beschreiben.

Nach dieser Vorbereitung dürfen wir ansetzen

$$f_a = L_a^b(t) x_b + h_a$$

oder ausführlich:

$$= \frac{1}{2} g_{ac} \dot{g}^{cb} x_b + h_a$$

und erhalten für den homogenen Teil die vereinfachte Forderung:

$$\frac{\partial h_a(t, x)}{\partial x_a} = g^{ab}(t) h_a(t, x) \cdot x_b$$

Diese gilt in jedem Augenblick  $t$ .  $h$  wird also sehr wohl explizit von der Zeit abhängen. Natürlich darf es auch noch weitere lineare Anteile enthalten.

Eine andere Ableitung dieser Beziehung ergibt sich aus der Bemerkung, daß es immer möglich ist, eine Gaußverteilung mit Korrelationen zu "entzerren", d.h. durch eine lineare Abbildung auf den unkorrelierten Fall - den wir schon behandelt haben - zurückzuführen.  
Doch gehe ich hierauf nicht ein.

Polynomiale Bewegungsgleichungen

Wir fragen nach solchen Strömungen, deren Geschwindigkeiten durch Polynome in  $x$  dargestellt werden können. Für den homogenen Anteil bedeutet dies:

$$h_a(t, x) = H_a(t) + H_a^b(t) x_b + H_a^{bc}(t) x_b x_c + \dots$$

In die Gaußbedingung eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned} H_a^a + 2 H_a^{ab} x_b + 3 H_a^{abc} x_b x_c + \dots \\ = H^b x_b + H^{bc} x_b x_c + H^{bcd} x_b x_c x_d + \dots \end{aligned}$$

Nach geeigneter Symmetrisierung ist ein Koeffizientenvergleich möglich:

- $H_a^a = 0$  (1')
- $2 \cdot H_a^{ab} = H^b$  (2')
- $3 \cdot H_a^{abc} = H^{(bc)}$  (3')
- $4 \cdot H_a^{abcd} = H^{(bcd)}$  (4')

Die Klammern deuten dabei immer die Symmetrisierung an, also z.B.

$$H^{(bc)} = \frac{1}{2} (H^{bc} + H^{cb})$$

usw. Man beachte, daß  $H^{abc\dots k}$  in den Indizes  $(b, c, \dots, k)$  schon automatisch symmetrisch ist. Die obigen Relationen zerfallen nun in zwei nur untereinander zusammenhängende Gruppen, weil wegen der Kontraktionen immer genau zwei Indizes eliminiert werden:

- (G): "Gerade"
- (2)  $H^b = 2H_a^{ab}$
- (4)  $H^{(bcd)} = 4 H_a^{abcd}$
- (6) .....
- (U): "Ungerade"
- (3)  $H^{(bc)} = 3 \cdot H_a^{abc}$  mit:  $H_a^a = 0$  (Nebenbedingung:)
- (5)  $H^{(bcde)} = 5 \cdot H_a^{abcde}$  mit:  $H_a^a{}^b = 0$
- (7) ..... mit .....

Die Nebenbedingung zu (3) ist die frühere Gleichung (1), die Nebenbedingung zu (5) folgt aus (3) durch Verjüngung und Beachtung der Nebenbedingung zu (3) etc.

Man darf diese Hierarchien unbedenklich abbrechen, da es sich nicht um irgendwelche Momente handelt - also ein Näherungsverfahren - sondern um die Auswahl möglicher Bewegungsgleichungen! Ein Abbruch erklärt lediglich  $f_a$  als ein Polynom endlichen Grades. Hierfür seien zwei Beispiele angeführt:

I. Für ein Polynom zweiten Grades für  $f_a$

$$f_a = L_a^b x_b + H_a + H_a^b x_b + H_a^{bc} x_b x_c$$

ist

$$H_a^{bcd} = 0 \tag{U}$$

$$H_a^{bcde} = 0 \tag{G}$$

und so fort für alle höheren H's. Für die geraden Rekursionen folgt aus (G):

$$(4) \quad H^{(bcd)} = 0$$

$$(2) \quad H^b = H_a^{ab}$$

Für die ungeraden Rekursionen folgt, davon ganz unabhängig, aus (U):

$$(3) \quad H^{(bc)} = 0 \text{ mit } H_a^a = 0$$

Da (3) fordert, daß  $H^{bc}$  antisymmetrisch ist, so ist die Nebenbedingung automatisch erfüllt:

$$H_a^a = g_{ab} H^{bc} = 0$$

Wir erhalten daher insgesamt:

$$h_a = H_b^b a + H_a^b x_b + H_a^{bc} x_b x_c$$

mit den Auflagen:

$$H^{(ab)} = 0, \quad H^{(abc)} = 0.$$

II. Ein Polynom dritten Grades für  $f_a$  fordert für den homogenen Anteil

$$h_a = H_a + H_a^b x_b + H_a^{bc} x_b x_c + H_a^{bcd} x_b x_c x_d$$

Also ist

$$H_a^{bcde} = 0 \quad (U)$$

$$H_a^{bcdef} = 0 \quad (G)$$

Alle folgenden verschwinden ebenfalls. Die G-Hierarchie liefert

$$(4) \quad H^{(bcd)} = 0$$

$$(2) \quad H^b = H_a^{ab}$$

wie beim vorigen Beispiel. Die U-Hierarchie gibt

$$(5) \quad H^{(bcde)} = 0 \quad \text{mit} \quad H_a^a b^b = 0$$

$$(3) \quad H^{(bc)} = H_a^{abc}$$

Insgesamt resultiert daher etwas expliziter für  $h_a$  der Ausdruck

$$h_a = H_c^c a + H_c^c a^b x_b + H_a^{bc} x_b x_c + H_a^{bcd} x_b x_c x_d$$

mit den Einschränkungen:

$$H^{(bcd)} = 0$$

$$H^{(abcd)} = 0, \quad H_a^a b^b = 0$$

Derartige Nebenbedingungen sind die wesentlichen Auflagen, die die Gaußizität an die Zulässigkeit der Strömung stellt. Hinzu käme noch im Einzelfall die Untersuchung auf explosives Verhalten hin. Die Beispiele lehren übrigens, daß man die (U) und die (G)- Hierarchien separat abbrechen kann. Sie sind völlig entkoppelt. Formal darf man daher die Abbruchbedingung immer in der Form (g,u) vorschlagen.

Ein Beispiel zur Erläuterung: (4,9) würde dann für  $h_a$  zunächst bedeuten:

(Wir schreiben kurzerhand "1" für  $b_1$ , "2" für  $b_2$  etc.)

$$h_a = H_a^1 x_1 + H_a^{12} x_1 x_2 + H_a^{123} x_1 x_2 x_3 + H_a^{1234} x_1 x_2 x_3 x_4 + H_a^{123456} x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + H_a^{1\dots 8} x_1 \dots x_8$$

worin also die Terme  $x_1 \dots x_5$  und  $x_1 \dots x_7$  gar nicht erst auftauchen. Die weitere Behandlung liefert als wesentliche Nebenbedingungen wieder drei Forderungen:

$$(U): \quad H^{(bcde)} = 0 \quad \text{mit} \quad H_a^{ab} = 0$$
$$(G): \quad H^{(b_1 \dots b_7)} = 0.$$

Im übrigen sind die Koeffizienten im Einzelnen wieder durch die Rekursionen der U- bzw. G-Hierarchien festgelegt.

Die Frage der Meßbarkeit.

Grundsätzlich ist zu fordern, daß die Gaußströmungen meßbar sein sollten und die ganze Ebene wieder in sich überführen. Explosive Gegenbeispiele haben wir kennengelernt. Daß ähnliche Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Hopf-Gleichung auftreten, ist kein Wunder, denn diese ist mit der Kontinuitätsgleichung durch eine Fouriertransformation verbunden.

Eine einfache Bedingung im unkorrelierten Fall war die Beschränktheit der Radialgeschwindigkeit gewesen wegen ihrer Rolle als "Fluchtgeschwindigkeit". Es gelingt leicht, dies auf den korrelierten Fall zu übertragen, wenn man den Radius naheliegender Weise durch die Metrik bestimmt:

$$r^2 = g^{ab} x_a x_b$$

Denn jetzt wird

$$r\dot{r} = g^{ab} x_a \dot{x}_b$$

Also:

$$\dot{r} = g^{ab} \frac{x_a}{r} h_b + L^a \frac{x_a}{r}$$

Es kommt nur auf das Verhalten für  $r \rightarrow \infty$  an,

$$|g^{ab} x_a h_b| \leq \text{Const.} \cdot r$$

Wenn man die Gaußbedingung ausnützt, kann man hierfür schreiben:

$$\left( \frac{\partial h_a}{\partial x_a} \right)^2 = O(\Sigma x_a^2).$$

Zufallsfelder.

Bislang haben wir uns auf endlich -dimensionale Verteilungen beschränkt. Die Ergebnisse legen aber die Ausdehnung auf  $n \rightarrow \infty$  nahe. Zwar kann für die Wahrscheinlichkeitsmaße selbst der entsprechende Übergang zum Funktionalmaß nur mit der üblichen Vorsicht gemacht werden; am leichtesten geht dies noch via charakteristischem Funktional: Doch dann muß man die gesamte Diskussion an der Hopfgleichung aufhängen. Diese ist aber nur für polynomiale Bewegungsgleichungen wirklich verfügbar. Andererseits sehen wir, daß es keine Schwierigkeiten macht, die Gaußkondition der Bewegungsgleichungen

$$\sum_{a=1}^n \frac{\partial h_a}{\partial x_a} = \sum_{a,b=1}^n g^{ab} h_a x_b$$

unmittelbar auf den Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  zu übertragen. Denn in dieser ist das Wahrscheinlichkeitsmaß völlig herausgefallen!

Zunächst: Der Limes zufälliger Folgen

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

ist trivial. Man braucht nur in der obigen Gaußbedingung  $n = \infty$  zu setzen. Hiernach wird man schon vermuten, daß auch der Fall stochastischer Funktionen, die auf einem Kontinuum erklärt sind, möglich ist. In der Tat, ist der Definitionsbereich kompakt, so kann man sich in der Regel die betrachteten Funktionen nach irgend einem Standard-System von abzählbar vielen Funktionen entwickelt denken. Die Folge der zugehörigen Fourierkoeffizienten bildet dann eine zufällige Folge im obigen Sinne. Denn jeder einzelne Koeffizient wird durch eine lineare Transformation aus den ursprünglichen Funktionen gewonnen. Bei dieser bleibt aber ein Gaußmaß als solches erhalten. Wie die ursprünglichen Funktionen, so sind daher auch die Fourierkoeffizienten Gauß'isch verteilt.

Dies legt nahe, daß auch eine direktere Übersetzung auf den kontinuierlichen Fall möglich sein sollte, mehr im Sinne eines "Stützpunktverfahrens". Man wird dann folgende Regeln anwenden:

- a,b, ... werden kontinuierliche Indizes: x,y,...
- $x_a, \dots$  werden zufällige Funktionen:  $\psi(x), \dots$
- Summen werden Integrale.

Sinngemäß lauten die Bewegungsgleichungen dann

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = f(t, x \{ \psi \})$$

worin { } die funktionale Abhängigkeit explizit andeuten soll.

Diesen Luxus werden wir uns fürderhin sparen. Für die metrischen Tensoren wollen wir schreiben:

$$g^{ab} \rightarrow g(x, y)$$

$$g_{ab} \rightarrow \rho(x, y)$$

wobei

$$\int \rho(x, y) g(y, z) dy = \delta(x-z)$$

zu beachten ist.

Zerlegen wir das Strömungsfeld f wieder in einen linearen und einen homogenen Anteil:

$$f(x, \psi) = \int L(x, y) \psi(y) dy + h(x, \psi)$$

so wird der lineare wiederum durch die Zeitabhängigkeit der Korrelationsfunktion bestimmt sein:

$$\frac{\partial g(t, x, y)}{\partial t} + \int g(x, z) L(z, y) dz + \int g(y, z) L(z, x) dz = 0$$

während sich für den homogenen die Gaußbedingung in der Form schreibt:

$$\int \frac{\delta h(x, \psi)}{\delta \psi(x)} dx = \iint h(x, \psi) g(x, y) \psi(y) dx dy$$

Man kann diese beiden Forderungen auch aus einem symbolischen Gaußmaß der Form

$$N e \quad - \frac{1}{2} \iint g(x,y) \psi(x) \psi(y) dx dy$$

durch direkte Anwendung der "Kontinuitätsgleichung" erhalten. Ich möchte aber hierauf keinen Wert legen.

Wir haben schließlich noch die Meßbarkeit der Abbildungen zu sichern. Nach dem früher Gesagten bedeutet dies im Wesentlichen, daß keine Explosionen oder Implosionen auftreten. Es ist aber danach auch klar, daß es schwierig ist, hierfür allgemeine Regeln zu finden. Eine hinreichende Bedingung im Endlichen war die Beschränktheit der Radialgeschwindigkeit gewesen. Dies legt die Vermutung nahe, daß auch jetzt die Forderung

$$\left( \int \frac{\delta h(x, \psi)}{\delta \psi(x)} dx \right)^2 = 0 \quad \left( \int \psi^2(x) dx \right)$$

hinreichend für Meßbarkeit sein sollte. Polynomansätze für  $f$  bis zur 3<sup>ten</sup> Ordnung in  $\psi$  wären hiernach noch uneingeschränkt zulässig. Im Übrigen wird man die Meßbarkeit häufig anders direkter sehen können.

Folgende Verallgemeinerungen sind trivial:  $\psi$  kann mehrere Komponenten haben.  $x$  kann mehrere Dimensionen haben.

Die homogene Turbulenz.

Im Rahmen dieser Untersuchung will ich hierunter die Translationsinvarianz lediglich des Gauß-Maßes verstehen.

Ein derartiges Konzept bringt eine echte Vereinfachung vom Standpunkt der Statistik. Zwar weiß man, daß das Einsetzen jeder Turbulenz von den Rändern (oder anderen kleinen Störungen) aus erfolgt: Wenn man nämlich mit einer laminaren Strömung startet. Andererseits zeigt gerade die Existenz turbulenter Strömungen, daß z.B. die Navier-Stokes'schen Gleichungen eine solche Reichhaltigkeit<sup>(+)</sup> an Lösungen besitzen, daß man den Überraschungseffekt eben als "Turbulenz" bezeichnet. Heisenberg hat dies einmal etwas pointiert etwa so ausgedrückt: "Die Existenz laminarer Lösungen ist das eigentlich Erstaunliche". Daher auch der Rückgriff auf die Statistik, sobald man die voll ausgebildete Turbulenz betrachtet. Für diese aber ist ihre Entstehung von den Rändern her relativ belanglos.

Vereinfachungen wie die oben gemeinte Translationsinvarianz sind das A und O der Physik. Sie definieren Modelle jedenfalls im Sinne geistiger Bezugssysteme. Newtons Leistung bestand nicht zum Wenigsten gerade im Einführen der Inertialsysteme, die - notabene - translationsinvariant sind. Mach's Leistung bestand u.a. jedenfalls darin, dies klar erkannt zu haben. Von Taylor stammt, m.W. das Konzept der homogenen Turbulenz.<sup>(+)</sup>

Für das charakteristische Funktional

$$\phi(\alpha, a) = E \left\{ e^{i \int \alpha(x+a) \psi(x, t) dx} \right\}$$

bedeutet es: Unabhängigkeit von a:

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{1}{2} \int \rho(x, y) \alpha(x+a) \alpha(y+a) dx dy} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \int \rho(x, y) \alpha(x) \alpha(y) dx dy} \end{aligned}$$

Dies kann nur sein, wenn

$$\rho(x, y) = \rho(x - a, y - a)$$

---

<sup>(+)</sup> zu denselben Randbedingungen!

<sup>(+)</sup> Nachträglich wird man versuchen, reale Turbulenz im "Koordinatensystem" derartig asymptotischer Begriffe einzufangen.

Die Korrelationsfunktion hängt also nur von der Relativ-Koordinaten  $x-y$  ab. Umgekehrt reicht aber auch diese schwache Forderung an das zweite Moment schon hin, die Homogenität jedenfalls für das Gauß-Maß zu sichern.

Man beachte: Wollte man der Strömung abverlangen, daß sie die Homogenität eines j e d e n anfänglich homogenen Maßes bewahrt, so müssen die Bewegungsgleichungen selbst translationsinvariant sein. Genauer besagt dies folgendes:

Sei  $\psi_a(x) := \psi(x+a)$

Dann soll auch dieses  $\psi_a$  eine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = f(x, \{\psi\})$$

sein, es soll also gelten:

$$\frac{\partial \psi_a(t,x)}{\partial t} = f(x, \{\psi_a\})$$

Andererseits folgt aus der zuerst notierten Bewegungsgleichung für  $\psi(t,x)$  sofort immer und trivial:

$$\frac{\partial \psi(t,x+a)}{\partial t} = f(x+a, \{\psi\})$$

Die linken Seiten der letzten beiden Gleichungen sind identisch, wenn man sich der Definition von  $\psi_a$  erinnert. Also ist

$$f(x+a, \{\psi\}) = f(x, \{\psi_a\})$$

die formale Ausdruck für die Forderung der Translationsinvarianz, der Bewegungsgleichungen.

Wenn man an Taylors Forderung der Homogenität denkt, hat man immer diese Invarianz der Bewegungsgleichungen vor Augen. Wenn die Strömungen aber nicht a l l e homogenen Maße zu konservieren brauchen, sondern eben nur das Gaußmaß, so läßt dies eine erheblich größere Klasse möglichen Bewegungen zu.

Es wäre schön, wenn man auch hierfür ein ähnlich "autarke" Bedingung an die entsprechenden Bewegungsgleichungen - wie oben die Translationsinvarianz - finden könnte. Indessen scheint aber jetzt das Problem verquickt zu sein mit der speziellen Form des ausersehenen Spektrums. (Eine hiervon unabhängige Formulierung würde in einem gewissen Sinne der Suche nach "Übergruppen" entsprechen).

Im Folgenden will ich mich auf den einfachen und praktisch wichtigen Fall eines Polynoms 2<sup>ten</sup> Grades für die Bewegungsgleichungen beschränken. Zudem wird  $\dot{g} = 0$  angenommen. Außerdem ist es statthaft, die linearen Terme wegzulassen. Denn wir wissen schon, daß bei allen Polynomansätzen die geraden und die ungeraden Terme untereinander eine Hierarchie bilden. Wir betrachten also

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = H_0(x) + \int H_2(x, y, z) \psi(t, y) \psi(t, z) dy dz$$

Die Gaußbedingung zerfällt in die folgenden zwei Forderungen:

$$2 \int H_2(x, x, y) dx = \int g(x-y) H_0(x) dx$$

sowie

$$\int g(x-y_1) H_2(x, y_2, y_3) dx + \text{zykl}(y_1 y_2 y_3) = 0$$

Man hätte vielleicht erwarten können, daß ein Nicht-Verschwinden des Terms nullter Ordnung den Mittelwert der Gaußverteilung verschieben müßte. Daß dies nicht notwendig ist, ersieht man aus der ersten Gleichung, die man einfach als eine Bestimmungsgleichung für  $H_0(x)$  ansehen darf.<sup>(†)</sup> In der Tat ist die notwendige "Entfaltung" durch Fouriertransformation leicht zu bewerkstelligen. Es kommt

$$\hat{H}_0(k) = 2 I(k) \int \hat{H}_2(l, -l, k) dl$$

---

<sup>(†)</sup> Bei Näherungsverfahren ist ein derartiger Tatbestand nicht ungewöhnlich.

Hier gilt er jedoch streng.

worin z.B.

$$H(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \tilde{H}(k,\ell,m) e^{i(kx+\ell y+mz)} dk d\ell dm$$

und  $I(k)$  das Spektrum ist:

$$I(k) = \int \rho(x) e^{-ikx} dx$$

Wenn wir auch die zweite Gleichung Fouriertransformieren, so entsteht

$$\iiint \frac{1}{I(k)} \tilde{H}_2(k,\ell,m) e^{i(ky_1+\ell y_2+m y_3)} dk d\ell dm + \text{zykl.} = 0$$

Statt aber über  $(y_1, y_2, y_3)$  zyklisch zu summieren, darf man dies ebensogut über  $(k, \ell, m)$  tun. Nach dieser Prozedur muß der Integrand verschwinden:

$$\frac{\tilde{H}_2(k,\ell,m)}{I(k)} + \frac{\tilde{H}_2(\ell,m,k)}{I(\ell)} + \frac{\tilde{H}_2(m,k,\ell)}{I(m)} = 0$$

Dies ist die fundamentale Gaußbedingung für  $\tilde{H}_2$ .

Man kann leicht zwei Typen von Lösungen dieser Gleichung angeben: Die "Symmetrischen" und die "Zyklischen".

#### Die symmetrischen Lösungen. (S).

Für jede beliebige Funktion  $\sigma(k)$  ist

$$\tilde{H}_2(k,\ell,m) \sim I(k)\sigma(k) \delta(\sigma(k)+\sigma(\ell)+\sigma(m))$$

eine Lösung der Gaußbedingung. Der Proportionalitätsfaktor ist dabei eine symmetrische Funktion  $\chi(k,\ell,m)$ .

Nur wenn  $\sigma$  linear und homogen ist, ist dies auch

$$\sim \delta(k + \ell + m)$$

und führt damit auf eine translationsinvariante Bewegungsgleichung.

In der Tat wird dann z.B. für  $\chi = 1$ :

$$\begin{aligned} H_2(x,y,z) &\sim \iiint I(k) k \delta(k+\ell+m) e^{-i(kx+\ell y+mz)} dk d\ell dm \\ &\sim \frac{\partial}{\partial x} \int I(k) e^{-ik(x-z)} \delta(y-z) dk \\ &\sim \rho'(x-z) \cdot \delta(y-z) \end{aligned}$$

Dies zeigt die Translationsinvarianz explizit. Weiter kommt für  $H_0(k)$

$$\tilde{H}_0(k) = \int \tilde{H}_2(\ell, -\ell, k) d\ell$$

$$\sim \int I(k) \ell d\ell \cdot \delta(k)$$

Wenn das Integral absolut konvergiert, verschwindet es, da es über eine unsymmetrische Funktion erstreckt ist. Andernfalls wird man dies durch eine Limitierung auch immer erreichen können, z.B. wenn weißes Rauschen vorliegt.<sup>†</sup>

Für die Bewegungsgleichung ergibt sich daher der Ausdruck:

$$h \sim \int \rho(x-z)\psi(z) \frac{\partial \psi}{\partial z} dz$$

Insbesondere liest man hieraus ab, daß speziell

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

einen Gauß konserviert, der ein weißes Spektrum hat. Dies ist aber ein Widerspruch. Denn diese Bewegungsgleichung hat stoßwellenartige Lösungen zu fast allen Anfangsbedingungen, wovon man sich durch ein Charakteristikenverfahren leicht überzeugt. Also bricht die Meßbarkeit der hierdurch ausgesprochenen Abbildung zusammen. Es sei darauf hingewiesen, daß auch die Hopfgleichung derlei nicht automatisch bemerkt. Wir können aber in unserem Falle leicht das früher angegebene Meßbarkeitskriterium nachprüfen.

Dabei kommt es auf den Ausdruck

$$\int \frac{\delta h}{\delta \psi(x)} dx \sim \rho'(0) \int \psi(x) dx$$

an.

<sup>†</sup>  
Was dies bedeutet, sieht man am besten, wenn man formal in den Ortsraum zurückgeht. Denn dann kommt

$$H_0(x) \sim \rho'(0)$$

Konvergenz des Integrals bedeutet: Die Ableitung existiert (und verschwindet dann bekanntlich aus Symmetriegründen). Divergenz besagt: Sie existiert nicht. Limitierung bedeutet Glättung einer Spitze, z.B. von  $\exp(-|x|)$ .

In dem zuletzt betrachteten Fall könnte man sagen,  $\rho'(0)$  hat keinen definierten Wert. Denkt man an eine Regularisierung der  $\delta$ -Funktion, so wird man indessen  $\rho'(0) = 0$  erwarten und damit Meßbarkeit - zumindest im Sinne des "Nichtexplodierens". Tatsächlich bricht die Meßbarkeit doch zusammen, nicht, weil die Felder, sondern deren Gradienten zu steil werden, (Stoßwellen). Unser altes Meßbarkeitskriterium ist also auch noch nicht völlig hinreichend, sondern man wird daneben im Kontinuum noch geeignete Glattheitsforderungen stellen müssen.

Wenn wir für  $\sigma(k)$  keine lineare Funktion mehr wählen, so sind die Bewegungsgleichungen nicht mehr translationsinvariant.

Z.B. liefert

$$\sigma(k) = k^2 - 1,$$

$$\chi(k, \ell, m) = 1$$

sofort

$$\tilde{H}_2(k, \ell, m) \sim I(k)(k^2 - 1) \delta(k^2 + \ell^2 + m^2 - 3)$$

und für  $H_0(k)$  kommt durch Verjüngung

$$\tilde{H}_0(k) \sim \frac{I\left(\sqrt{\frac{3-k^2}{2}}\right) (1-k^2)}{\left|\sqrt{\frac{3-k^2}{2}}\right|} \quad |k| < 3$$

$$\sim 0 \quad \text{sonst.}$$

Trotzdem wird die hierdurch gegebene Abbildung den Gauß homogen erhalten, wenn nur die Spektralfunktion hinreichend "glatt" ist.

Allerdings macht die Darstellung solcher Terme im Ortsraum Schwierigkeiten. Ein besserer Vergleich ist mit den "moden" Gleichungen möglich, obwohl diese nur symbolischen Wert haben.

Gleichungen für die "moden".

Eine Warnung sei vorausgeschickt. Dieses Konzept ist zwar zu Recht sehr beliebt, ist es doch durch Fourier, Louville- Sturm und Schrödinger sanktioniert. Auch in den Augen von Ragleigh beschreibt es einen logischen Idealzustand: die stehende Welle. Es tritt aber in "" Idealkonkurrenz"" mit einem anderen Konzept. Dies ist die Translationsinvarianz - alias Homogenität. Sie ist noch elementarer. Die Details hängen von den Umständen ab. Jedenfalls spielen beide Konzepte verständlicherweise die Rolle geistiger Bezugssysteme. Für den Physiker ist dies traurig, weil sich die beiden Vorstellungen nicht verzahnen wie ein Reißverschluß. In Umwandlung eines Zitats von Res Jost bahnt sich allerdings "unter dem moralisierenden Einfluß" der Distributionstheorie ein, wie ich sagen möchte, Kompromiß an. Da ich diese Dinge - jedenfalls teilweise - andernorts ausführlicher dargestellt habe, so will ich hier weniger "juristisch" vorgehen und nur die wesentlichen Korrespondenzen entwickeln. Eigentlich setzt der Begriff der moden eine "box"  $V$  voraus:

$$\psi(t,x) = \sum_k C_k(t) e^{ikx}$$

Beschränken wir uns auf einen quadratischen Ausdruck in den Bewegungsgleichungen, so heißt dies für die  $G$ -Amplituden:

$$\dot{C}_k(t) = v_R + v_k^{\ell m} C_\ell C_m$$

Da man diese Amplituden durch

$$C_k = \frac{1}{V} \int_V \psi(t,x) e^{-ikx} dx$$

bestimmt sind, so folgt

$$\begin{aligned}
 \dot{C}_k &= \frac{1}{V} \iiint H(x,y,z) \psi(y) \psi(z) e^{-ikx} dx dy dz \\
 &= \iint H(k,y,z) \sum_{\ell,m} c_\ell c_m e^{-i(\ell y + mz)} dy dz \\
 &= V^2 \sum_{\ell,m} \tilde{H}(k, -\ell, -m) c_\ell c_m
 \end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit den früheren Gleichungen für  $\tilde{H}$ , so liest man die folgenden Korrespondenzen ab:

$$\begin{aligned}
 v_k^{\ell m} &\sim V^2 \tilde{H}(k, -\ell, -m) \\
 v_k &\sim \tilde{H}(k)
 \end{aligned}$$

Allerdings sollte man beachten, daß diese Entsprechung im Fall translationsinvarianter Bewegungen etwas fragwürdig wird.

Jetzt ist es leicht, die Gaußbedingung auf die Matrixelemente der "moden-Darstellung" umzuschreiben:

$$v_{-k}^{\ell m} / I_k + \text{zykl} = 0$$

Eine sinngemäße Formel findet sich in der Arbeit von Cook und Taylor.

Die zyklischen Lösungen (Z).

Wir brauchen einen total antisymmetrischen Tensor,  $E_{klm}^I$ .

Eine Möglichkeit ist die folgende: Sind  $k, l, m$  Vektoren im  $R_n$ ,

$$k = (k_1, \dots, k_n)$$

$$l = (l_1, \dots, l_n)$$

$$m = (m_1, \dots, m_n)$$

so sei:

$$E_{klm}^I = \begin{cases} 1 & \text{für } k_1 > l_1 > m_1 \\ -1, & \text{nach einer ungeraden Permutation} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Auszeichnung der ersten Komponente ist natürlich willkürlich. Wir brauchen auch nur den dreidimensionalen Fall. In diesem gibt es noch eine andere Möglichkeit, die sogar translationsinvariant ist:

$$E_{klm}^{II} = (1 \times m) \delta(k+l+m)$$

Die wesentlich benötigten Eigenschaften sind:

1. Antisymmetrie in den beiden letzten Indizes:

$$E_{klm} = - E_{kml}$$

Das ist für die oben angegebenen Realisierungen offenbar erfüllt.

2. Zyklische Symmetrie:

$$E_{klm} = - E_{lmk}$$

Da die zyklische Vertauschung dreier Elemente eine gerade Permutation ist, so ist diese Eigenschaft für  $E^I$  evident. Für  $E^{II}$  kommt:

$$\begin{aligned}
 E^{\text{II}}_{\ell m k} &= (m \times k) \delta(k + \ell + m) \\
 &= m \times (-\ell - m) \delta(k + \ell + m) \\
 &= - (m \times \ell) \delta(k + \ell + m) \\
 &= E^{\text{II}}_{k \ell m}
 \end{aligned}$$

Mit zwei willkürlichen Funktionen,  $\xi(k)$  und  $\chi(k, \ell, m)$ , der letzteren symmetrisch, können wir nun ansetzen

$$\tilde{H}_2(k, \ell, m) = I(k) \xi(k) E_{k \ell m} (\xi(\ell) - \xi(m)) \chi(k, \ell, m)$$

Daß dies eine Lösung der Gaußbeziehung ist, prüft man leicht nach.

In der Tat wird die Gaußbedingung proportional zu

$$\begin{aligned}
 E_{k \ell m} \xi_k (\xi_\ell - \xi_m) + E_{\ell m k} \xi_\ell (\xi_m - \xi_k) \\
 + E_{m k \ell} \xi_m (\xi_k - \xi_\ell)
 \end{aligned}$$

Ist hierin  $E_{k \ell m} = 0$ , so ist man fertig, ist es  $\neq 0$ , so kommt

$$\xi_k (\xi_\ell - \xi_m) + \xi_\ell (\xi_m - \xi_k) + \xi_m (\xi_k - \xi_\ell)$$

denn bei den zyklischen Vertauschungen bleibt es in jedem Faktor 1.

Dies verschwindet aber. Ebenso schließt man für die "-1" Komponente von  $E_{k \ell m}$ .

Für  $H_0(k)$  kommt

$$H_0(k) = \int I(k) (\xi^2(k) - \xi(\ell) \xi(k)) E_{\ell, -\ell, k} \chi(\ell, -\ell, k) d\ell$$

Wegen der Unsymmetrie

$$E_{\ell, -\ell, k} = - E_{-\ell, \ell, k}$$

Spielt nur der ungerade Anteil von  $\xi(\ell)$  eine Rolle:

$$\begin{aligned}
 H_0(k) = \int I(\ell) \chi(\ell, -\ell, k) \cdot \frac{1}{2} (\xi^2(\ell) - \xi(\ell) \xi(k)) \\
 - (\xi^2(-\ell) - \xi(-\ell) \xi(k)) E_{\ell, -\ell, k} d\ell
 \end{aligned}$$

Wird in den letzten beiden Termen die Integrationsvariable  $(-\ell)$  durch  $\ell$  ersetzt, so kommt

$$\int I(\ell) \chi(\ell, -\ell, k) (\xi^2(\ell) - \xi(\ell)\xi(k)) \cdot \frac{1}{2} (E_{\ell, -\ell, k} - (-1)^n E_{-\ell, \ell, k}) d\ell$$

Für  $n = 1, 3$  verschwindet dies immer, weil dann wieder die Unsymmetrie von  $E$  wirkt, für gerade  $n$  aber nur, wenn  $\xi$  symmetrisch ist.

Wir wählen jetzt einen Spezialfall, der auf das Ergebnis von Cook und Taylor führt:

$$\begin{aligned} E_{k\ell m} &= E_{k\ell m}^{II} \cdot \\ I(k) &= \frac{k^2}{a^2 + k^2} \cdot \\ \xi(k) &= \frac{a}{k^2} + \frac{1}{a} \quad a > 0 \\ \chi(k, \ell, m) &= -\frac{1}{2} \vec{e}_z \quad (\text{Einheitsvektor in } z\text{-Richtung}) \end{aligned}$$

Damit wird  $H_0 = 0$  und wir erhalten:

$$\tilde{H}_2(k, \ell, m) = \frac{1}{2} \vec{e}_z \cdot (\ell \times m) \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{\ell^2} \right) \delta(k + \ell + m)$$

Das entspricht genau der moden Gleichung für die zweidimensionale Euler-Turbulenz in der Ebene, denn Cook und Taylor geben für die Matrixelemente, die die zeitliche Änderung der Fourierkomponenten der Wirbelgeschwindigkeit regeln, den Ausdruck an:

$$V_k^{\ell m} = \frac{\vec{e}_z}{2} (\ell \times m) \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{\ell^2} \right) \delta_{k, -\ell, m} \cdot$$

Die G- und U-Hierarchie.

Wir hatten diese für die polynominalen Ansätze kennengelernt. Ist die Turbulenz homogen, so ist Fouriertransformation sowohl für die Korrelationsfunktion, als auch die Koeffizienten angezeigt. Die im Übrigen benötigten Operationen werden jetzt besonders einfach:

- "Heben eines Index k" = Division durch I(k)
- "Senken eines Index k" = Multiplikation mit I(k)
- "Verjüngung zweier Indizes" = Summation über diametrale Werte.

Man bestätigt diese Regeln leicht an dem im letzten Abschnitt ausführlich gerechneten Beispiel. Wir brauchen dazu nur im Hinblick auf die formale Evidenz die kontinuierlichen Variablen jetzt als Indizes zu notieren:

$$\tilde{H}_k^{\ell m} : = \tilde{H}_2(k, \ell, m)$$

$$\tilde{H}_k : = \tilde{H}_0(k)$$

Dann wird offenbar

$$\tilde{H}^{k\ell m} = \frac{1}{I_k} \tilde{H}_k^{\ell m}$$

und die Abbruchsbedingung (4) liefert unmittelbar die Forderung an  $H_2$ , in jetziger Notierung:

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(k\ell m)} &= \frac{1}{I_k} \tilde{H}_k^{\ell m} + \text{zykl} \\ &= 0 \end{aligned}$$

In Formel (2) der G-Hierarchie wird verjüngt:

$$\tilde{H}^k = 2 \tilde{H}_\ell^{-\ell k}$$

Wenn man anschließend den Index k noch senkt, so kommt unsere frühere Beziehung für  $H_0(k)$ :

$$\tilde{H}_k = 2 I_k H_\ell^{-\ell k}$$

(Rechts wird nicht über k summiert.)

Dies alles legt eine besonders einfache Berücksichtigung der Gaußbedingung (4) nahe: Sei  $\hat{H}^{k\ell m}$  ein "Tensor" mit folgenden Symmetrien:

$$\hat{H}^{k[\ell m]} = 0$$

$$\hat{H}^{(k\ell m)} = 0$$

so repräsentiert

$$\hat{H}_k^{\ell m} = I_k \hat{H}^{k\ell m}$$

offenbar den Koeffizienten 2<sup>ter</sup> Ordnung einer Bewegung, die automatisch Gaußerhaltend ist. Die zugehörige "moden" Gleichung lautet ausführlich

$$\dot{c}_k = V^2 I_k \hat{H}^{k, -\ell, -m} c_\ell c_m + 2 I_k I_\ell \hat{H}^{\ell, -\ell, k}$$

Im letzten Term haben wir dabei den einen Index  $\ell$  angehoben, um alles explizit durch  $\hat{H}$  ausdrücken zu können.

Man kann diese Beziehungen in den Ortsraum zurücktransformieren. Man kann sie dort aber auch unmittelbar gewinnen. Dabei ist die Translationsinvarianz nicht einmal wesentlich. Dazu formen wir die Gaußkondition

$$\int g(y_1, x) H_2(x, y_2, y_3) dx + \text{zykl}(y_1 y_2 y_3) = 0$$

durch die Einführung einer neuen Funktion  $\hat{H}$  um, die durch

$$H_2(x, y_2, y_3) = \int \rho(x, z) \hat{H}(z, y_2, y_3) dz$$

erklärt sei. Da nun  $\rho$  und  $g$  zueinander invers sind, so folgt unmittelbar

$$\hat{H}(y_1, y_2, y_3) + \text{zykl} = 0$$

aus der Symmetrie von  $H$  in den beiden letzten Indizes auch diejenige von  $\hat{H}$  in denselben:

$$\hat{H}(y_1 y_2 y_3) - \hat{H}(y_1 y_3 y_2) = 0$$

Hat man also eine Funktion  $\hat{H}$  gefunden, die diesen beiden letzten Forderungen genügt, so ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = \iiint \rho(x, y_1) \hat{H}(y_1, y_2, y_3) \psi(y_2) \psi(y_3) dy_1 dy_2 dy_3$$

$$+ 2 \iiint \rho(x, y_3) \rho(y_1, y_2) \hat{H}(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3$$

eine Gaußerhaltende Strömung. Die Richtigkeit des letzten Terms ergibt sich dabei so: Aus

$$2 \int H_2(x, x, y) dx = \int g(x, y) H_0(x) dx$$

folgt durch Faltung mit  $\rho(y, z)$  eine explizite Auflösung nach  $H_0$ :

$$H_0(z) = 2 \iint \rho(z, y) H_2(x, x, y) dx dy$$

und, wenn man die Darstellung von  $H_2$  durch  $\hat{H}$  beachtet

$$= 2 \iiint \rho(z, y_3) \rho(x, y_1) \hat{H}(y_1, x, y_3) dx dy_1 dy_3$$

Die Substitution  $z \rightarrow x, x \rightarrow y_2$  führt dies genau in den gewünschten Term über.

Bislang haben wir überwiegend Beispiele zur G-Hierarchie betrachtet. Der nächste Abschnitt bringt eine einfache Illustration für U-Terme.

### Dispersion.

Ein linearer Term ist das einfachste Beispiel, das unter die U-Bedingung fällt:

$$H^{(k\ell)} = 0$$

oder

$$\frac{H_k^\ell}{I_k} + \frac{H_\ell^k}{I_\ell} = 0$$

Ist die Bewegungsgleichung zudem translationsinvariant, so können wir schreiben:

$$H_k^\ell = i \omega_k \delta(k + \ell)$$

und unsere Forderung wird dann ganz unabhängig vom Spektrum:

$$\omega_k + \omega_{-k} = 0$$

Im moden-Bild bedeutet dies reine Dispersion! (Daß das Spektrum hiervon nicht beeinflußt wird, ist plausibel, weil im stationären Fall

$$I_k(t) = |c_k(v)e^{i\omega_k t}|^2 = |c_k(0)|^2 = I_k(0)$$

gilt, wenn die Frequenz keinen Imaginärteil hat.)

Ein einfaches Beispiel liefert die Korteweg de Vries Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Der dritte Term liefert

$$\omega_k \sim k^3$$

Den zweiten haben wir schon früher im Zusammenhang mit der G-Hierarchie behandelt. Er wäre mit einem weißen Spektrum verträglich, sofern die gesamte Abbildung - inklusive der Dispersion - meßbar ist. Anschaulich bedeutet dies, da die Gleichung z.B. Oberflächenwellen von Wasser beschreibt: Diese sollen sich nicht "überschlagen".



Schließlich sei noch erwähnt, daß auch im Limes  $n \rightarrow \infty$  die differentiellen Rotationen eine Untergruppe bilden. Allerdings muß man das Lieprodukt dann "funktional" schreiben:

$$\begin{aligned} h(x, \psi) &= (f, g) \\ &= \int \left( f(y, \psi) \frac{\delta g(x, \psi)}{\delta \psi(y)} - g(y, \psi) \frac{\delta f(x, \psi)}{\delta \psi(y)} \right) dy. \end{aligned}$$

Zwei exotischere Beispiele.

1. Wir betrachten die Korrelationsfunktion

$$\rho(x-y) = e^{-|x-y|}$$

und fragen nach möglichen 1-dimensionalen Gaußströmungen. Zunächst ist  $g(x)$  aus der Gleichung

$$\int g(x) \rho(x-y) dx = \delta(y)$$

zu ermitteln. Die Lösung wird durch Fouriertransformation nahegelegt. Sie lautet:

$$g(x) = \frac{1}{2} (\delta(x) - \delta''(x))$$

In der Tat wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int (\delta(x-y) - \delta''(x-y)) e^{-|x|} dx &= \frac{1}{2} \{ e^{-|y|} - (e^{-|y|})'' \} \\ &= \frac{1}{2} e^{-|y|} - \frac{1}{2} \{ -e^{-|y|} \int \} , \end{aligned}$$

worin das merkwürdige Zeichen die Funktion: 1 für  $x > 0$ , -1 für  $x < 0$  meint ,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} e^{-|y|} - \frac{1}{2} \{ + 2 \delta(y) e^{-|y|} + 1 \cdot e^{-|y|} \} \\ &= \delta(y) \end{aligned}$$

Daher kommt als Gaußforderung:

$$\int \frac{\delta h(x, \psi)}{\delta \psi(x)} dx = \frac{1}{2} \int (h(x, \psi) - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, \psi)) \psi(x) dx$$

Jetzt machen wir den Ansatz:

$$h(x, \psi) = F(x) e^{-\frac{\lambda}{2} \int V(y) \psi^2(y) dy}$$

und erhalten

$$-\lambda \int V(x) \psi(x) F(x) dx = \frac{1}{2} \int (F(x) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}) \psi(x) dx$$

Eine hinreichende Bedingung damit diese Forderung erfüllt ist, lautet:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \lambda V(x) F(x) = -\frac{1}{2} F(x)$$

Das sieht, bis auf die Stellung des Eigenwertparameters, der Schrödingergleichung ähnlich.  $V$  sollte für große Werte von  $x$  gegen Null streben, denn nur dann wird  $h(x, \psi)$  auch für  $\psi = 1$  oder ähnliche Funktionen konvergent sein, wie sie als Realisierungen bei homogener Turbulenz auftreten.

Man kann auch  $\lambda$  in  $V$  absorbieren und  $F$  gegeben denken. Dann ist  $V$  durch

$$V(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{F''}{F} - 1 \right)$$

bestimmt und  $F$  nur durch die eben erwähnte Forderung eingeschränkt.

Ein hiermit verträglicher Ansatz ist z. B.

$$F(x) = e^{-\frac{1}{1+x^2}} + \frac{e^{-\alpha x^2}}{1+x^4} + e^x$$

2. Schließlich wollen wir noch das Beispiel von Pfirsch verallgemeinern.

Sei zunächst für einen Hilfssatz von  $2n$  Variablen:

$$\dot{x}'_i = x'_i \cdot y'_i$$

$$\dot{y}'_i = 1 - x'^2_i$$

Dann wissen wir schon, daß in der  $i$ -ten Ebene Gaußerhaltung für ein Produktmaß in  $x$  und  $y$  herrscht. Mischt man jetzt diese Koordinaten linear, so bleibt der Gaußcharakter sicher gewahrt, und wenn wir nur die  $x$ 's und  $y$ 's untereinander mischen, auch deren wechselseitige Unabhängigkeit.

$$x'_i = A_i^k x_k$$

$$y'_i = B_i^l y_l$$

Für die neuen Koordinaten kommt daher:

$$\dot{x}_k = \sum_i A_k^{-1 i} A_i^j B_i^\ell x_j y_\ell$$

$$\dot{y}_k = \sum_i B_k^{-1 i} - \sum_i B_k^{-1 i} A_i^j A_i^k x_j x_k$$

kurz, mit geeigneten  $\alpha$  und  $\beta$ 's:

$$\dot{x}_k = \alpha_k^{j\ell} x_j y_\ell$$

$$\dot{y}_k = \beta_k - \beta_k^{j\ell} x_j x_\ell$$

Die Korrelationsfunktionen sind jetzt gegeben durch

$$\langle x_i x_j \rangle = \sum_k A_k^{-1 i} A_k^{-1 j}$$

und ganz analog für die y-Korrelation mittels B. Die Gaußverteilungen sind nach Maßgabe dieser Korrelationen unabhängig in x und y verteilt und bleiben es auch so.

Der limes  $n \rightarrow \infty$  ist leicht möglich, man hat dann zwei Zufallsfelder  $\phi$  und  $\psi$ , die sich gemäß

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} = \iint \alpha(x, y, z) \phi(y) \psi(z) dy dz$$

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = \beta(x) - \iint \beta(x, y, z) \phi(y) \psi(z) dy dz$$

Bei geeigneter Wahl von  $\alpha$  und  $\beta$  bleiben sie dann immer Gaußisch verteilt, und zwar bleibt eine anfängliche Unabhängigkeit von  $\phi$  und  $\psi$  auch immer erhalten, obwohl die Bewegungsgleichungen diese - dem Anschein nach - zu vernichten drohen.

#### Schlußbemerkung.

Läßt man irgend eine Strömung auf ein beliebiges Maß einwirken, so kann es vorkommen, daß für eine breite Klasse solcher Maße sich immer ein Gaußisches Verhalten für große Zeiten ergibt. Da insbesondere dann immer ein Gaußmaß erhalten bleibt, so sind diese Strömungen unter den oben behandelten zu suchen.

Literatur und Bemerkungen zu den einzelnen Abschnitten.

Warum?

Die Anregungen entstammen im Wesentlichen den folgenden Literaturstellen:

J.L.Doob: The brownian movement and stochastic equations.  
Ann.Math. 43, 351 (1942). Abgedruckt in Wax: Selected  
papers on noise and stochastic processes (Dover)

E. Hopf: Journal of Ration. Mech.Anal. 1, 87 (1972)

I. Cook und J.B.Taylor:

Stationary states of two-dimensional turbulence  
PRL 28, 82 (72)

G.S.Deem und N.J.Zabuski:

Ergodic boundary in numerical simulations of two-dimensional  
Turbulence, PRL 27, 396 (71)

!: Norman Zabuski selbst glaubt nicht, daß seine und Deem's Rechnungen  
die Gaußannahme stützen (mündliche Mitteilung).

Die erwähnten Bezüge auf andere Invarianzgruppen der Physik verdanke ich:

W. Heisenberg: Einführung in die einheitliche Theorie der Elementarteilchen  
(Hirzel, Stuttgart 1967)

J. Ehlers: Vorlesung über Relativitätstheorie, München 1971.

Die Wiener-Hermite Entwicklung wurde von Norbert Wiener in sehr allgemeiner  
Form für Funktionalmaße vorgeschlagen:

N. Wiener: Nonlinear problems in random theory. MIT press.

Erheblich leichter ist das 1-dimensionale "pendant" zu durchschauen. Dabei denke man sich eine Zufallsgröße  $x$ , deren Verteilungsfunktion etwa  $p(x)$  sein möge (und die explizit schwer zugänglich ist), aufgefaßt als das Bild einer anderen - Gaußisch verteilten! - Hilfsgröße  $\xi$ :

$$\xi \rightarrow x(\xi)$$

Man versucht nun, diese Abbildung in eine Reihe Hermitescher Polynome in  $\xi$  zu entwickeln. Man hat  $L_2$ -Konvergenz bezüglich der Gaußverteilung. Der Hauptvorteil ist jedoch, daß sich Mittelwert und Schwankung von  $x$  bequem durch die Entwicklungskoeffizienten ausdrücken lassen. Anwendungen dieses Verfahrens in der Turbulenztheorie gaben Meecham, Siegel und Mitarbeiter im Verlauf der letzten Jahre, man vergleiche z.B.

W.Meecham and W.C.Clever: Use of Cameron-Martin-Wiener representations for nonlinear random process applications. In:

Lecture notes in physics 12, Statistical models and turbulence, Springer 1972, Seite 205.

#### Eine Verallgemeinerung

Das Pfirsch'sche Beispiel ist die Frucht der Kritik einer ersten Fassung dieser Arbeit durch Herrn D.Pfirsch (mündlich). Hierbei wurde auch die Explosionsgefahr erkannt. Hinsichtlich dieser habe ich Herrn R.Wegmann befragt.

Das Problem explosiver Lösungen spielt auch eine Rolle in der Astronomie: In der Monographie von

H.F. Chilmi: Qualitative Methoden beim  $n$ -Körperproblem der Himmelsmechanik, Akademie-Verlag Berlin, 1961

finden sich ähnliche Beispiele im Kapitel IV "Die Methode des invarianten Maßes".

Die Druyvestein-Verteilung

Vgl.z.B. I.P.Shkarofski et al.: The particle kinetics of plasmas,  
Addison-Wesley. 1966. Kapitel 4-6.

Lie-Gruppen

Eine anschauliche Einführung gibt:

G.Kowalewski:Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen  
Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1931.

Gleichungen für die "moden".

Das Zitat von Res Jost findet man in

R.F.Streater und A.S.Wightman, Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie,  
Bibliographisches Institut Mannheim und Zürich.

Die Vermeidung der moden ist aber möglich:

K.Elsässer, P.Gräff: The Langevin equation of weak turbulence.  
Ann.of physics, 68, 305 (1971)

Die zyklischen Bewegungen (Z)

Die Arbeit von Cook und Taylor wurde schon zitiert. Nach einer Bemerkung von Herrn Zabuski haben Orszag und Kraichnan dieses Ergebnis schon vorher gehabt.

Verschiedenen Kollegen, besonders den Herren Dr.K.Elsässer und Dr.R.Wegmann vom MPI für Physik und Astrophysik und Prof.Pfirsch von diesem Institut bin ich für anregende Gespräche und sachliche Kritik sehr dankbar.

This IPP report is intended for internal use.

IPP reports express the views of the authors at the time of writing and do not necessarily reflect the opinions of the Max-Planck-Institut für Plasmaphysik or the final opinion of the authors on the subject.

Neither the Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, nor the Euratom Commission, nor any person acting on behalf of either of these:

1. Gives any guarantee as to the accuracy and completeness of the information contained in this report, or that the use of any information, apparatus, method or process disclosed therein may not constitute an infringement of privately owned rights; or
2. Assumes any liability for damage resulting from the use of any information, apparatus, method or process disclosed in this report.