MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

ZUR THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENZEN-GLEICHUNGEN, ANFANGSWERTPROBLEME
(THEORY OF PARTIAL DIFFERENCE EQUATIONS)

A. B. Riedl

IPP 6/108 March 1972

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 6/108 A.B. Riedl Theory of Partial Difference Equations
March 1972
(in German)

Abstract

In the author's opinion, it is essential to develop an independent theory of difference equations, especially for initial value problems (not relative to the theory of differential equations in a certain sense of approximation), by attempting to separate the principal conditions for solving difference equations from those which ensure a good approximation to the solutions of differential equations assigned to them. With regard to the point of the independent theory developed here, Neumann's stability condition is to be seen as a principal condition for solving the special case of difference equations with constant parameters. The corresponding generalized conditions can be formulated by making use of the causality condition which in the general case impresses certain structures on the defined propagation matrices. In Richtmyer-Morton's theory the most important work on the subject to date these relatively simple facts remain shadows, because they define "stability" by relating the solutions of differential and difference equations in a certain sense of approximation, thereby mixing principal solution conditions with the special idea of approximation.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am IPP, Abt. Theorie, in den Jahren 1964 - 1967. Sie wurde dort auszugsweise im Rahmen des damals aktuellen Seminars über numerische Mathematik im Frühjahr 1967 vorgetragen. Durch Krankheit verhindert, konnte erst im Sommer des darauffolgenden Jahres die Arbeit, in der nun vorliegenden Form, dem IPP zur Redaktion übergeben werden, mit Ausnahme des ersten Teils, der schon Anfang November 1967 dem Institut vorlag und der Einleitung zu dieser Arbeit, welche in dieser Art zu formulieren dem Verfasser, zur Verdeutlichung und Bekräftigung seiner im Hauptteil vorzubringenden Aussagen, zweckmäßig erschien, und die erst Anfang April 1970 dem IPP vorgelegt wurde.

Es gibt bis heute keine vollständige und geordnete Theorie der linearen partiellen Differenzengleichungen analog der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, wie wir sie aus der mathematischen Physik kennen und zu gebrauchen gewohnt sind. Der Verfasser möchte nicht den Anspruch erheben, eine solche mit der vorliegenden Arbeit geleistet zu haben. Dennoch ist damit ein wesentlicher Schritt in dieser Richtung wohl getan worden.
Inhaltlich wird die Arbeit beherrscht von zwei fundamentalen (nicht unabhängigen) Prinzipien der mathematischen Physik: Dem Kausalprinzip und dem Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzip. Das zweite kann, in spezieller Anwendung, als verschärfte Formulierung des ersten Prinzips aufgefaßt werden.

Zum Ende des Vorworts noch ein Wort zum Kausalprinzip selbst, an die Adresse derjenigen Kritiker gerichtet, die, sogleich die Hand erhebend, dieses Prinzip als "unmathematisch" zu verbannen gewillt sind, um es in den Bereich der Physik zu verweisen. Gewiß, so ist es ja auch! Aber woher nimmt der so mathematisch orientierte Kritiker die Sicherheit, mit Recht behaupten zu können, sein Wesen und Denken liege außerhalb

physikalischer Reichweite? Benützt er nicht ständig ein logisches Kalkül, etwa in der Aussagenform "aus A folgt B"? Also zuerst muß "A" wahr sein, damit dann "B" wahr sein kann! Die Aussage enthält also sehr wohl ein Nacheinander, eine Reihenfolge:
"A" zuerst, dann "B", eine Reihenfolge, die in der Physik als derartige Zeitfolge (Zeit als physische Empfindung) gedeutet werden kann, wie sie das Kausalprinzip impliziert. Vielleicht ist dieses Prinzip die physikalische Notwendigkeit für die Möglichkeit logischen Denkens. Vielleicht sind die logischen Denkstrukturen nur Isomorphismen der Wirklichkeit. So ähnlich muß es sich ja wohl auch verhalten, wie sonst wäre mathematische Naturbeschreibung (mathematische Formulierung der Naturgesetze) mit dem so bekannten Erfolg möglich?

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich im ersten Abschnitt mit der Untersuchung von Lösbarkeitsbedingungen linearer, partieller Differenzengleichungen zweier unabhängiger, variabler, ganzzahliger Indizes[+] m, ν und zweiter Ordnung bezgl. der Differenzen in ν .
Die Differenzengleichungen werden unter dem Gesichtspunkt, daß ν einen Evolutionsparameter darstellt, also als Vorschriften zur Lösung von Anfangswertproblemen mit willkürlichen Quellverteilungen, betrachtet.
Die formale Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems wird mit der Forderung der Konvergenz bestimmter Matrix-Reihen zur eindeutigen, allein-existenten Lösung erhoben. Die Konvergenzforderung erzwingt automatisch die Einführung eines speziellen Lösungsraumes bei Betrachtung des jeweils speziellen Falles.

Die Formulierung mit Hilfe einer Green'schen Matrix (zeitl. Randwertproblem) und die formale Lösung desselben erfordert somit die Einführung eines normierten Folgenraumes $\mathcal{L}$.
Gewisse fundamentale Reihen treten dabei auf, und die unter ihnen konvergenten entscheiden über den Lösungscharakter, welcher seinerseits durch die Forderung, daß die Lösung dem Kausalprinzip zu unterwerfen ist, festgelegt ist, weil nur dann das Anfangswertproblem unbedingt lösbar ist.
Das bedeutet:

Damit das Anfangswertproblem generell lösbar ist, müssen bestimmte unendliche Matrixreihen in $\mathcal{L}$ konvergent sein (kausale Lösung).

[+] Im ersten Abschnitt darf der Index m einen Satz endlich vieler, ganzzahliger Indizes m (m_1, m_2, m_3 ....) vertreten.

In Konsequenz dieser Kausalforderung ergeben sich gewisse, an die Koeffizienten der Differenzengleichungen zu stellende Bedingungen.
Diese liefern eine Beschränkung der Propagationsmatrizen R und S.

Über diese Lösbarkeitsbedingungen hinausgehend, bedingt die Forderung nach guter Annäherung der Lösung der Differenzengleichung an eine Lösung der evtl. zugeordneten Differentialgleichung zusätzliche Beschränkungen hinsichtlich der Propagationsmatrizen, die gewöhnlich darauf hinauslaufen, vorkommende Parameter (Maschenweiten etc.) zu beschränken. Diese weitergehenden Bedingungen zu Gunsten einer guten Annäherung, sind in der vorliegenden Arbeit nicht Gegenstand der Betrachtung. Eine notwendige, scharfe Trennung dieser zusätzlichen Bedingungen von den Lösbarkeitsbedingungen halte ich zu Gunsten eines klaren Verständnisses der bei Differenzengleichungen auftretenden Phänomene für unumgänglich. Diese Notwendigkeit scheint mir allerdings bisher in der betreffenden Literatur zu wenig, oder gar unbeachtet geblieben zu sein.

Die Anwendung des Kausalprinzips ist in voller Allgemeinheit auf dem Gebiet partieller Differenzengleichungen bisher nicht vorgenommen worden, und wenn überhaupt, so doch nur bei partiellen Differenzengleichungen zweiter Ordnung bezüglich des Entwicklungsparameters und zwar verschleiert in Form eines sogenannten Stabilitätsprinzips, insofern die in der Literatur üblicherweise angewandte Form des Stabilitätsprinzips auf partielle Differenzengleichungen zweiter Ordnung zufällig die kausale Lösung unter anderen möglichen Lösungen auswählt. Dieses Stabilitätsprinzip versagt indessen, wenn man nichtkausale Lösungen (avancierte) betrachten will.

Auf die Zufälligkeit des Zusammenhangs von Kausalprinzip mit der Anwendung des Stabilitätsprinzips ist soeben hingewiesen worden.
Natürlich gibt es einen Grund für diesen Zusammenhang, die Zufälligkeit jedoch liegt in der üblicherweise kommentarlos als statthaft befundenen Anwendung der sukzessiven Methode. Die Anwendbarkeit dieser Methode ist aber keineswegs so trivial, wie dies gemeinhin gehandhabt wird. Das erkennt man bei der Betrachtung der partiellen Differenzengleichungen zweiter Ordnung besonders deutlich, weil diese avancierte Lösungen zulassen, die dann natürlich bei Anwendung des üblichen Stabilitätsprinzips unter die Kategorie der instabilen Lösungen fallen müssen, weil diese Lösungen mit dieser Methode gewissermaßen vom Dach her zum Fundament hin aufgebaut werden und nicht umgekehrt.
Die sukzessive Methode unter Anwendung des üblichen Stabilitätsprinzips versucht die avancierte Lösung vom Endstadium her zum Anfang hin aufzubauen. Es ist klar, daß dies nicht gutgehen kann. Es sieht so aus, als ob die sogenannten "instabilen Lösungen" (oszillierendes Aufschaukeln), gleichgültig ob bei partiellen Differenzengleichungen erster oder zweiter Ordnung bezüglich des Entwicklungsparameters, denjenigen Lösungen zugeordnet werden müssen, die Bestandteile enthalten, die nicht dem Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzip genügen, also avancierten Charakter besitzen, aber in falscher Richtung der zeitlichen Entwicklung gerechnet werden. Der Beweis hierfür wird nicht erbracht, gezeigt wird nur, daß bei Einhaltung des Kausalprinzips und des Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzips, sogenannte instabile Lösungen nicht auftreten.

Im zweiten und dritten Abschnitt wird auf die Fourierdarstellung Green'scher Funktionen eingegangen und an Hand von leicht zu bewältigenden Differenzengleichungen, deren Koeffizienten weitgehend beliebige analytische Funktionen der Verschiebungsmatrix sein dürfen, wird der Zusammenhang von Eigenschaften der Green'schen Funktion mit dem Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzip untersucht. Wenn die partielle Differenzengleichung durch Übersetzungsvorschriften aus einer partiellen Differentialgleichung hervorgegangen ist, erweist es sich als notwendig, die Formulierung der Differenzengleichung so vorzunehmen, daß die Lösbarkeitsbedingungen unabhängig von den auftretenden Maschenweiten sind. Die so verbleibenden Lösbarkeitsbedingungen besitzen dann vollständige Wesensgleichheit mit denen der Differentialgleichungen. Unter diesen Verhältnissen ist dann auch die Konvergenz der asymptotischen Lösung, der nun auch für kontinuierliche Variable x, t als gültig postulierten Differenzengleichung, gegen die asymptotische Lösung der zugeordneten Differentialgleichung gesichert. Diese Konvergenzuntersuchungen werden im Anhang des Abschnittes II durchgeführt.

Ebensowenig Anwendung wie das Kausalprinzip, fand bisher das in der theoretischen Physik außerordentlich bedeutsame Sommerfeld'sche Ausstrahlungsprinzip, das im allgemeinen eine verschärfte Form des Kausalprinzips bedeutet und dementsprechend auch den R,S - Matrizen verschärfte Beschränkungen, allerdings bezüglich ihrer asymptotischen Form, auferlegt. Daraus folgen Konsequenzen hinsichtlich der an sich möglichen und insoweit willkürlichen Übersetzungsvorschriften von Differential- in Differenzenoperatoren. Für gewisse Typen von Differentialgleichungen besteht jedoch eine so enge Verknüpfung von Kausal- und Ausstrahlungsprinzip, daß diese keine kausale Lösung haben, die nicht auch schon das Ausstrahlungsprinzip befriedigen.

In einer unabhängigen Theorie der partiellen Differenzengleichungen (ganzzahlige Schritte, nicht-reflexiv auf part. Differentialgl.), so, wie sie in der vorliegenden Arbeit formuliert wird, hat der Begriff der Maschenweite keinen Sinn. Demzufolge müssen alle an die Lösung zu stellenden Forderungen: Zugehörigkeit zu einem bestimmten Raum $\mathcal{L}$, Konvergenz der kausalen Lösung in $\mathcal{L}$, Ausstrahlungsprinzip usw. für jede beliebige Maschenweite erfüllt sein.
Diese Forderung ist so einschneidend, daß jedenfalls in all jenen Fällen, die vollständig bereits durch ihr "räumlich"--asymptotisches Verhalten gekennzeichnet sind, der Differenzenoperator im wesentlichen festgelegt ist, wenn der zugehörige Differentialoperator bekannt ist. Das muß man ja auch erwarten, weil die Forderung der Unabhängigkeit von den Maschenweiten hinsichtlich der Erfüllung der genannten Lösungsbedingungen zugleich den Übergang "Maschenweite gegen Null" impliziert. Während aber gewisse Eigenschaften, z.B. kausales Verhalten, Ausstrahlungsverhalten usw. durch besondere Formgebung dem Differenzenoperator aufgeprägt werden können, gehen diese beim Übergang "Maschenweite gegen Null" verloren.

In der theoret.Physik spielt die Forderung der Quadratsummierbarkeit bzw. - integrierbarkeit an diskrete bzw. kontinuierliche Folgen eine außerordentlich bedeutsame Rolle. Im allgemeinen führt diese zur Fourierdarstellbarkeit der Folge. Deshalb wird im II. und III. Abschnitt durchwegs Fourierdarstellbarkeit als gegebene Voraussetzung unterstellt. Dem Verfasser erscheint sie für die Behandlung von Lösungen part.Differenzengl.en, die dem Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzip zu unterwerfen sind, am natürlichsten. Unterstellt man den Hilbert-Raum, so kann der übliche mathematische Rahmen der Quantenmechanik, eingeschlossen die Vertauschungsregeln, zur theoretischen Bearbeitung der Matrixgleichungen herangezogen werden.

Die vorliegende Arbeit besitzt auch relevante Bedeutung für all diejenigen, die sich mit mathematischen Problemen der numerischen Behandlung auf der Vorstufe zur Programmierung linearer partieller Differentialgleichungen befassen müssen. Sie bietet ihnen Aufklärung und Verständnis eines großen Teils der dabei auftretenden (und zur Zeit der Entstehung der Arbeit noch unaufgeklärten) Schwierigkeiten im allgemeinen, wie im speziellen. Abgesehen von dem bereits im Vorwort erwähnten Ziel der Bestrebungen des Verfassers hinsichtlich einer umfassenden Theorie, auf die, zum Zwecke einer erfolgreichen numerischen Bearbeitung von Gegenständen der Theorie, nicht gut verzichtet werden kann, sei vom Speziellen nur die erhebliche Bedeutung der Anwendung ganz bestimmter Differenzenschematas erwähnt, die sich als notwendig im Rahmen der Theorie, infolge der vorausgesetzten Gültigkeit sehr allgemeiner Prinzipien, erweisen. Sie besitzen ihre besondere Relevanz im Hinblick auf Erhaltungsgrößen.

Die der Arbeit zu Grunde gelegte Konzeption der Formulierung des Anfangswertproblems (mit oder ohne Randwertvorgabe) zeigt die Möglichkeit auf, im Computerverfahren für gängige partielle, lineare Differentialgleichungen die zugehörige Green'sche Matrix zu speichern, so daß damit ein für alle Mal die Näherungslösung der Differentialgleichung auf ein einfaches Summationsverfahren zurückgeführt wird und nicht für jedes neue System von Anfangswerten, die Differentialgleichung erneut numerisch gelöst werden muß. Dies bedeutet erhebliche Ersparnis des Rechenaufwandes.

Die theoretischen Überlegungen und Ergebnisse gehen über das Resultat des sogenannten Neumann'schen Stabilitätskriteriums [1] hinaus. Dieses ist seiner Herkunft nach nur auf lineare, partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten anwendbar (nur dann existiert der Amplifikationsfaktor bezw.-matrix). Demgegenüber sind hier beliebige Koeffizienten zugelassen, die lediglich Beschränkungen unterliegen, soweit sie das Kausalprinzip erforderlich macht. Natürlich kann das Neumann'sche Stabilitätskriterium als spezieller Fall daraus abgeleitet werden, so, wie dies an Hand von Beispielen der Abschnitte II, (III) vorgeführt wird.

Das indirekt formulierte Stabilitätsprinzip von Richtmyer-Morton [4] nimmt eindeutig und untrennbar Bezug auf eine der Differenzengleichung zugeordnete Differentialgleichung. Damit werden prinzipielle Lösbarkeitsbedingungen, wie sie im Sinne einer unabhängigen Theorie der partiellen, linearen Differenzengleichungen formuliert werden müssen, mit fremden Approximationsforderungen in unerwünschter, weil in nicht zusammen gehöriger Weise, miteinander verflochten derart, daß die eigentliche Herkunft wesentlicher Ergebnisse des Stabilitätskriteriums aus dem, als umfassend gültig vorausgesetzten Kausalprinzip, bis zur Unkenntlichkeit verwischt wird.

Hinweise auf die Literatur befinden sich am Schluß des Berichts. Sie sind in zwei Gruppen eingeteilt, eine allgemeine bezüglich mathematischer Hilfsmittel und Methoden und eine spezielle, die sich auf das moderne und wohl auch umfassende Werk über die Lösung von Anfangswertproblemen mittels "Finite Difference Equations" von Richtmyer und Morton konzentriert.

Einleitung

Über die Notwendigkeit der Einführung einer unendlichen "Zeit"-Skala

Als erstes müssen die Gegenstände meiner Betrachtung kurz erklärt werden. Sie lassen sich unter dem Begriff der linearen (partiellen) Differenzengleichungen zweiter Ordnung bezüglich des Entwicklungsparameters unterordnen. Diese besitzen die Gestalt

$$g(\nu+1) + p\,g(\nu) + q\,g(\nu-1) = 0$$

p, q irgendwelche Matrizen, ν - unabhängig, $\nu \geq 1$

bei gegebenen, speziellen Anfangsbedingungen

$$g(0) = 0 \,, \quad g(1) = 1 \,, \qquad 1 = \text{Einheitsmatrix}$$

Die p, q - Matrizen müssen nicht notwendig Differenzenoperatoren bezügl. "räumlicher"-Indizes enthalten. Für das Folgende genügt es anzunehmen, p, q mögen irgendwie definierte Matrizen sein, so daß die Differenzengleichung oben auch im Sinne eines Iterationsverfahrens verstanden werden kann.

Es ist leicht, mit Hilfe von g (ν) eine Lösung der Differenzengleichung mit Quellglied

$$v(\nu+1) + p\,v(\nu) + q\,v(\nu-1) = u(\nu)$$

und den allgemeinen Anfangsbedingungen

$$v(0) = v_0$$
$$v(-1) = v_{-1} \qquad \text{gegebene Spaltenmatrizen}$$

zu konstruieren. Diese Formulierung des allgemeinen Anfangswertproblems wird der Arbeit zu Grunde gelegt und die Lösung formal durch Konstruktion der "Green'schen Matrix" mittels unendlicher Matrixreihen gewonnen.
Im Folgenden werden häufig, an Hand des einfacheren Beispiels

$$v(\nu+1) + p\,v(\nu) = u(\nu) \quad , \nu \geq 1$$

jene Aussagen zu demonstrieren versucht, die im Rahmen der Arbeit für wesentlich zu halten sind.

Veranlassung zu dieser Arbeit gab die Erfahrung der häufig unadäquaten Betrachtung und Behandlung von partiellen Differenzengleichungen in Literatur und Vortrag. Diese bestand im wesentlichen darin:

> Beschränkung des Entwicklungsparameters auf endliche Werte $\nu \leq N$. Anwendung der sukzessiven Methode bei vorgegebenem Anfangswert. Damit "Lösung" gesichert. Beschränkung auf prospektive Typen.

Wenn die Differenzengleichung aus einer Differentialgleichung durch Übersetzung abgeleitet worden ist, und man verlangt Vergleichbarkeit der Lösungen beider Gleichungen im Sinne einer Annäherung und innerhalb gewisser Schranken, so führt die Beschränkung auf das sukzessive Lösungsverfahren mit $\nu \leq N$ dazu, daß man sich mit dieser auferlegten Beschränkung die Möglichkeit raubt, denjenigen Problemkreis aufzuklären, der sich aus der Tatsache ergibt, daß ein und dieselbe partielle Differenzengleichung in einem zugelassenen Parameterbereich sowohl "gutartige"="stabile" wie auch "bösartige"="instabile" Lösungen besitzen kann:
Stabile Lösungen: Annäherung an die Lösung der Part. Differentialgleichung für $N \longrightarrow \infty$ möglich.
Instabile Lösungen: Keine Annäherung für $N \longrightarrow \infty$ vorhanden.

In der Praxis hat man dieses Phänomen tatsächlich vor sich, natürlich dann für endliche, aber große Werte von N, und es besteht dann die Aufgabe, ein Kriterium zu finden, welches die Handhabe bietet, die unerwünschten "instabilen Lösungen" absondern zu können. Ein derartiges Stabilitätskriterium [4] stellt im allgemeinen Anforderungen an die Parameter der Differenzengleichung, schränkt also den Parameterbereich ein. Es besagt, wie sich gewisse Größen der Differenzengleichung mit gegen unendlich strebenden Entwicklungsparameter $\nu \longrightarrow \infty$ verhalten müssen. Eine solche Forderung läßt aber sinnfällig die Bedeutung erkennen, welche dem Übergang von einer endlichen Folge

$$v_n \equiv \{ v(0), v(1), v(2), \ldots, v(n) \}$$

in eine unendliche Folge

$$v = \lim_{n \to \infty} v_n$$

zukommt. Der Übergang setzt natürlich die Kenntnis des Entwicklngsgesetzes für diese Folge für alle $\nu \geq 0$ voraus. Anscheinend wesentlich für die zu untersuchenden Eigenschaften der Folgen sind daher nicht nur die bei endlichem n abbrechenden Folgen v_n , sondern die unendliche Folge v . Das sukzessive Verfahren führt aber jeweils nur ein Element der Folge über in ein im allgemeinen benachbartes Element derselben Folge, und dieses Verfahren enthält potentiell den Abbruch der Folge bei endlichem n, zwingt also nicht zu einer Fortsetzung bis n $\longrightarrow \infty$. Es bezieht sich auch lediglich auf die Berechnung der Elemente der Folge, entspricht so genau dem, was mit dem Begriff der Operationsvorschrift zusammenfällt. Es sagt nichts aus über den Status der so erzeugten Folge als mathematisches Element eines Folgenraumes.

Nun bietet die allgemeine Form linearer, partieller Differenzengleichungen die Möglichkeit, ein demgegenüber anderes Verfahren anzuwenden, das der Eigenschaft der Lösung, eine Gesamtheit

$$v = \{ v(0), v(1), v(2), \cdots, v(\nu), \cdots \}$$

zu sein, Rechnung trägt. Es ist dies das in der Arbeit angewandte Matrixverfahren. Das Rechnen mit e n d l i c h e n Folgen in der Form von Matrizen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v(0) \\ v(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ v(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(0) \\ u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{pmatrix} \underset{\mathrm{def}}{\equiv} \begin{pmatrix} u'(0) \\ u'(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ u'(n) \end{pmatrix}$$

ist gleichbedeutend mit der sukzessiven Methode, bleibt aber auch hinsichtlich einer Entscheidung über eine Zugehörigkeit der Lösung zu instabilen oder stabilen Folgen ohne Konsequenzen. Mit der Abkürzung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \underset{\mathrm{def}}{\equiv} e_n , \quad \begin{pmatrix} v(0) \\ v(1) \\ \vdots \\ v(n) \end{pmatrix} \underset{\mathrm{def}}{\equiv} v_n$$

und

$$\begin{pmatrix} u'(0) \\ u'(1) \\ \vdots \\ u'(n) \end{pmatrix} \underset{\mathrm{def}}{\equiv} u'_n , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \underset{\mathrm{def}}{\equiv} \varkappa_n$$

erhält man die Matrixgleichung

$$M_n v_n = u'_n , \quad M_n \underset{\mathrm{def}}{\equiv} e_n + p \varkappa_n .$$

Nun ist

$$(r_n)^\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu \geq n+1 ,$$

daher lautet die Auflösung dieser Matrixgleichung b e d i n g u n g s l o s

$$v_n = (e_n + p r_n)^{-1} u_n' = \left\{ e_n + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu p^\nu r_n^\nu \right\} u_n' ,$$

oder also mit Definition der Green'schen Matrix

$$G_n \underset{\text{df}}{\equiv} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu p^\nu r_n^\nu , \quad r_n^0 \underset{\text{df}}{\equiv} e_n$$

auch

$$v_n = G_n u_n' , \quad (e_n + p r_n) G_n = e_n .$$

Das Rechnen mit unendlichen Matrizen hat dagegen Konsequenzen. Zunächst sieht man schon am Beispiel

$$G_\infty \equiv G = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu p^\nu r^\nu , \quad r_\infty \underset{\text{df}}{\equiv} r ,$$

daß nicht einmal für gewöhnliche Zahlen diese Summe für $|p| \geq 1$, $r = 1$ konvergiert, und darüberhinaus stellt sich sofort die Frage, was bedeutet hier Konvergenz, hier sind ja die mathematischen Elemente nicht Elemente aus dem Raum der komplexen Zahlen, sondern Matrizen von komplexen Zahlen.

Man kann zeigen, daß die Angabe einer unendlichen Folge

$$\{\phi_n\} \equiv \{\phi_0 \ldots \phi_n \ldots\} , \quad \phi_{n+1} = A_n \phi_n$$

falls

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n \qquad \text{existiert}$$

vollkommen äquivalent der Angabe einer bestimmten, durch die Folge definierten Differentialgleichung (einer Variablen, etwa die Zeit t) ist. Die Beurteilung der Existenz des Limes

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n$$

entfällt jedoch, falls n auf $0 \leq n \leq N$ beschränkt wird. Die Rückkehr zur Differentialgleichung ist dann im allgemeinen unmöglich geworden, d.h. eine Annäherung

$$\phi \to \phi_n \qquad \text{für} \qquad t \to t_n$$

findet höchstens bei Einhaltung besonderer Voraussetzungen statt, und diese sind wiederum nur auf Grund einer Fortsetzung der Definition von

$$A_n\,, \quad 0 \leq n \leq N$$

auf

$$A_n\,, \quad 0 \leq n \leq \infty$$

und aus der dann wieder sinnvoll gewordenen Forderung der Konvergenz der Folge $\{\phi_n\}$ für $n \to \infty$ erhältlich. Das Programm dieses Vorgehens enthält genau die Aussagen der üblichen und so bezeichneten Stabilitätsforderung [4] (Richtmyer-Morton),

und diese stellt somit nichts anderes dar, als das verkappte Eingeständnis dafür, daß die Beschränkung des Laufindex n auf endliche Werte $0 \leq n \leq N$ tatsächlich nicht vorgenommen werden darf.

Beim Übergang $n \longrightarrow \infty$ stellen sich die bekannten Komplikationen ein, die beim Rechnen mit unendlichen Matrizen stets gebührlich zu beachten sind. Man überwindet sie durch Einführung eines geeigneten Folgenraumes $\mathcal{L}$, der darüber entscheidet, welche Folgen als konvergent zu betrachten sind. Da in der Arbeit vorzüglich Eigenschaften der Green'schen Matrix betrachtet werden, die wir als einen Matrixoperator auffassen, so sagen wir:

Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ zwei Folgenräume und es sei

$$Mv = u' \curvearrowright v = Gu', \quad v \in \mathfrak{M}, \; u' \in \mathfrak{M}'.$$

Der Operator G überführt dann ein Element aus $\mathfrak{M}'$ in ein Element aus $\mathfrak{M}$, weshalb, so sagen wir, $\mathcal{L}$ ein Element des topologischen Produktraumes

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}')$$

ist.

Selbstverständlich kann eine Theorie der partiellen Differenzengleichungen unabhängig, also ohne konstruktive Herleitung aus einer Theorie der partiellen Differentialgleichungen aufgestellt werden. Wegen der dann fehlenden Übersetzungsvorschrift, hat darin der Begriff "Maschenweite" = Abstandsmaß im Sinne einer Metrik+ keinen Sinn und eine solche kommt in einer unabhängigen Theorie auch nicht vor. Auch gibt es keine Möglichkeit von "stabilen" oder "instabilen" Lösungen im oben genannten Sinne zu sprechen, weil diese ja Bezug auf eine bestimmte Lösung der zugeordneten Differentialgleichung nimmt [4]. Jedoch wird man in einer unabhängigen Theorie der partiellen Differenzengleichungen automatisch zu einer Unterscheidung zwischen konvergenten Folgen und nichtkonvergenten Folgen geführt, deren Elemente im sukzessiven Verfahren aus ein und derselben Differenzengleichung bei verschiedenen Parameterwerten gewonnen werden können. Diese Einteilung

+(Geometrie des Raumes)

"konvergent in $\mathcal{L}$ "
"nichtkonvergent in $\mathcal{L}$ "

entspricht vollkommen der Einteilung

"stabil"
"instabil"

Man betrachte daher das Problem der "stabilen bzw. instabilen" Folgen dem Problemkreis der "konvergenten Folgen in $\mathcal{L}$ " eingeordnet.

Gewöhnlich wird in der Literatur das Problem der "instabilen" Lösungen mit dem Begriff Maschenweite und ihrer Größe in Verbindung gebracht, weil die Anwendung z.B. des v. Neumann'schen Stabilitätskriteriums [1] im Falle einer Übersetzung Differentialgl. $\longrightarrow$ Differenzengl. bei der üblichen naiven Art, die Übersetzung vorzunehmen, eine Begrenzung dieser Maschenweiten und natürlich auch der vorkommenden Parameter zur Folge hat. Auch gibt es eine Richtung, z.B. Lax-Richtmyer, [3] die das Problem der instabilen Lösungen dadurch zu lösen beabsichtigen, daß sie den Soll-Grad [2] der Annäherung durch Größen von der Ordnung der Maschenweiten, oder ihrer Quadrate ausdrücken. Wir sehen aber, daß die Maschenweiten aus oben dargelegten Gründen prinzipiell nicht die Rollen spielen kann, die ihnen damit zugeordnet wird. Eine Lösung kann auch "stabil" sein, wenn die Maschenweiten von z.B. Kilometer-Größenordnung sind. Auch hat der Grad der Annäherung prinzipiell mit dem Problem der "instabilen Lösungen" nur insofern zu tun, als die Lösungen in die Kategorie der konvergenten Folgen einzureihen sind, welche nach unserer Betrachtung hier mit den stabilen Lösungen identifiziert werden.

Das Problem der instabilen Lösungen sehen wir also an den Begriff der "Konvergenz in $\mathcal{L}$ " gebunden und es tritt dann praktisch in Erscheinung, wenn eine nicht erlaubte Wahl des Folgenraumes $\mathcal{L}$ zugelassen wird. Dieser ist gegeben durch die partielle Differentialgleichung, der die Differenzengleichung zugeordnet ist. Es liege z.B. die Differentialgleichung

$$DV = U'$$

vor. Seien $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ zwei Räume und es gelte

$$V \in \mathfrak{M}, \quad U' \in \mathfrak{M}'$$

Dann vermittelt der Operator also die Abbildung $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$.
Die Übersetzung

Differentialoperator D $\to$ Differenzenoperator M

hat man selbstverständlich so vorzunehmen, daß mit

$$Mv = u'$$

die Größen v und u' den gleichen Räumen angehören.

Literaturhinweise

Allgemeine:

Collatz: Numerical Treatment of Differential Equations
Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen Springer
Funktionanalysis und numerische Mathematik

Kantorowitsch: Funktionanalysis in normierten Räumen VEB

Henrici. P.: Diskret variable methods in ordinary differential equations, John Wiley & Sons, 1962 New York-London

Laasonen: Über eine Methode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung, Acta Math. 81, 309-317 1949

Zurmühl: Matrizen, Springer, Berlin

Lawrentjew, Schabat: Methoden der Komplexen Funktionstheorie VEB

Spezielles:

Friedrichs und Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der math. Physik. Math. Ann. 100,32-74, 1928

Richtmyer und Morton: Difference methods for initial-value problems, New York-London-Sidney, Interscience Publishers 1967

[1] Kapitel 4, Absatz 7
[2] " 4, " 5
[3] inhaltlich Vorläufer von 2
[4] Kapitel 4

Hildebrand: Finite Difference Equations and Simulations, Prentice-Hall. Inc.Englewood Cliffs, New Jersey
Kapitel 3 Abs. 2

I. Abschnitt, (Teil 1)

Die Rolle der Kausalbedingung bei Differenzengleichungen erster und zweiter Ordnung als Auswahlprinzip

Zu lösen sei die Differenzengleichung

$$g(m,\nu+1|m_0)+\sum_{m'}p(m,m')g(m',\nu|m_0)+\sum_{m'}q(m,m')g(m',\nu-1|m_0)=0 \qquad (I,1)$$

für $\nu \geq 1$ und mit den speziellen Anfangsbedingungen

$$g(m,1|m_0)=\delta_{mm_0} \text{ und } g(m,0|m_0)=0 \qquad (I,2)$$

p und q seien von ν unabhängig. Über die Anfangsbedingungen hängt g von m_0 ab.
Für $\nu \leq 0$ ist $g(m,\nu|m_0)$ nicht definiert. Die für alle ν definierte Größe

$$G_0(m,m_0|\nu)=\begin{cases} g(m,\nu|m_0) & \text{für } \nu\geq 1 \\ 0 & \text{für } \nu\leq 0 \end{cases} \qquad (I,3)$$

ist die Lösung der Differenzengleichung (I,1) für $\nu \geq 1$, wenn $g(m,\nu|m_0)$ eine ist. Die für alle ν gültige Schreibweise

$$G_0(m,m_0|\nu+1)+\sum_{m'}p(m,m')G_0(m',m_0|\nu)+\sum_{m'}q(m,m')G_0(m',m_0|\nu-1)=\delta_{mm_0}\delta_{\nu,0} \qquad (I,4)$$

$$G_0(m,m_0|\nu)=0 \text{ für } \nu\leq 0 \qquad (I,4a)$$

enthält bereits die Aussage über die Anfangsbedingungen. Es gilt nämlich nach (I,4)

$$G_0(m,m_0|1)+\sum_{m'}p(m,m')G_0(m',m_0|0)+\sum_{m'}q(m,m')G_0(m',m_0|-1)=\delta_{mm_0}$$

d.h. wegen $G_0(m,m_0|0)=G_0(m,m_0|-1)=0$ aus (I,4a) ist

$$G_0(m,m_0|1)=g(m,1|m_0)=\delta_{mm_0}$$

Wenn also G_0 für alle ν die Differenzengleichung (I,4) mit (I,4a) befriedigt, erfüllt sie die Anfangsbedingung (I,2). Mit (I,4a) ist die Lösung der Differenzengleichung (I,4), wenn sie überhaupt eine hat, eindeutig bestimmt. Denn seien $G_0^{(1)}$ und $G_0^{(2)}$ zwei verschiedene Lösungen, so befriedigt ihre Differenz $G_0^{(1)}-G_0^{(2)}=\overline{G}_0$ die homogene Gleichung

$$\overline{G}_0(m,m_0|\nu+1)+\sum_{m'}p(m,m')\overline{G}_0(m',m_0|\nu)+\sum_{m'}q(m,m')\overline{G}_0(m,m_0|\nu-1)=0$$

$$\overline{G}_0(m,m_0|\nu)=0 \text{ für } \nu\leq 0$$

Daraus folgt $\bar{G}_0(m,m_0|1) = \bar{G}(m,m_0|2) = \dots = 0$,
also $\bar{G}(m,m_0|\nu) = 0$ für alle ν.
Man kann die Differenzengleichung (I,4) als Bestimmungsgleichung für Elemente einer Matrix auffassen. Dazu definiere man folgende Matrizen:

$$(G)_{mn,m'n'} = G_0(m,m'|n-n') \equiv G(m,n|m',n') \tag{I,5}$$

$$(P)_{mn,m'n'} = \delta_{nn'}(p)_{mm'} = \delta_{nn'}\,p(m,m') \tag{I,6}$$

$$(Q)_{mn,m'n'} = \delta_{nn'}(q)_{mm'} = \delta_{nn'}\,q(m,m') \tag{I,6a}$$

$$(V)_{mn,m'n'} = \delta_{mm'}\,\delta_{n+1,n'} \tag{I,7}$$

$$(E)_{mn,m'n'} = \delta_{mm'}\,\delta_{nn'}\,. \tag{I,8}$$

Mit $\nu = n-n'$ wird aus (I,4)

$$VG + PG + QV^{-1}G = E \quad \text{oder} \quad (V+P+QV^{-1})G = E \tag{I,9}$$

Die zu V inverse Matrix V^{-1} existiert und hat die Komponenten

$$(V^{-1})_{mn,m'n'} = \delta_{mm'}\,\delta_{n-1,n'}\ , \quad -\infty \leq n,n' \leq +\infty\,. \tag{I,10}$$

Es ist nämlich

$$\sum_{m''n''}(V)_{mn,m''n''}(V^{-1})_{m''n'',m'n'} = \sum_{m''n''}\delta_{mm''}\delta_{m''m'}\delta_{n+1,n''}\delta_{n''-1,n'} = (E)_{mn,m'n'}$$

Hat man eine Lösung der Matrixgleichung (I,9) gefunden und befriedigen ihre Matrixelemente $(G)_{mn,m'n'}$ die Bedingung (I,4a), so ist sie die allein mögliche. Nun ist

$$\left.\begin{aligned} G &= V^{-1}\sum_{\nu'}\epsilon(\nu')V^{-\nu'}S^{\nu'}\cdot\sum_{\nu''}\epsilon(\nu'')V^{-\nu''}R^{\nu''} = \\ &= V^{-1}\sum_{\bar{\nu}}\epsilon(\bar{\nu})V^{-\bar{\nu}}\Big\{\sum_{\nu'\geq 0}\epsilon(\bar{\nu}-\nu')S^{\nu'}R^{\bar{\nu}-\nu'}\Big\} \end{aligned}\right\} \quad \epsilon(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu < 0 \\ 1 & \text{für } \nu \geq 0 \end{cases} \tag{I,11}$$

formal eine Lösung, wenn R und S Matrizen sind, die den Matrixgleichungen (I,11a)

$$R + S = -P\ , \quad R\cdot S = Q\ , \quad (R,S)_{nn'} = (r,s)\cdot\delta_{nn'}$$

genügen, denn es ist mit +)

$$V+P+QV^{-1}=(V^2+PV+Q)V^{-1}=(V-R)(V-S)V^{-1}$$

die Matrixgleichung (I,9) erfüllt:

$$(V+P+QV^{-1})G=(V-R)(V-S)V^{-1}\sum_{\nu'}\epsilon(\nu')V^{-\nu'}S^{\nu'}\cdot V^{-1}\sum_{\nu''}\epsilon(\nu'')V^{-\nu''}R^{\nu''}$$

$$=(V-R)V^{-1}\sum_{\nu''}\epsilon(\nu'')V^{-\nu''}R^{\nu''}=E\ .$$

Im allgemeinen sind R,S aus (I,11a) nicht eindeutig bestimmbar. Dennoch ist G durch R und S eindeutig festgelegt, denn die Summen

$$\sum_{\bar\nu}^{(+)}=\sum_{\nu'}\epsilon(\bar\nu-\nu')S^{\nu'}R^{\bar\nu-\nu'}\ ,\quad \bar\nu\geq 0$$

erfüllen die Rekursionsgleichung

$$\sum_{\bar\nu}^{(+)}+\sum_{\bar\nu-1}^{(+)}P+\sum_{\bar\nu-2}^{(+)}Q=0\ ,\quad \sum_{0}^{(+)}=1\ ,\quad \sum_{1}^{(+)}=-P\ ,$$

sind also eindeutig festgelegte Polynome von P und Q. Die Matrixelement von G sind

$$(G)_{mn,m'n'}=\sum_{\bar\nu}\epsilon(\bar\nu)\delta_{n-\bar\nu-1,n'}\Big(\sum_{\nu'}\epsilon(\bar\nu-\nu')S^{\nu'}R^{\bar\nu-\nu'}\Big)_{mm'}= \qquad (I,12)$$

$$=\epsilon(\nu-1)\Big(\sum_{\nu'}\epsilon(\nu-1-\nu')S^{\nu}R^{\nu-1-\nu'}\Big)_{mm'}=$$

$$=\epsilon(\nu-1)\Big(\sum_{\nu-1}^{(+)}\Big)_{mm'}\ ,$$

also gleich Null für $n-n'=\nu<1$, wie gefordert.

Damit aber die formal allein mögliche Lösung auch tatsächlich existiert, müssen die Reihen

$$\sum_{\nu'=0}^{\infty}V^{-\nu'}R^{\nu'}\qquad\text{und}\qquad\sum_{\nu'=0}^{\infty}V^{-\nu'}S^{\nu'} \qquad (I,13)$$

konvergieren, d.h., nicht für alle Matrizen- R, S bzw. P, Q existiert eine Lösung von (I,4) mit (I,4a). Z.B. ist eine hinreichende Konvergenzbedingung

$$\sqrt[\nu']{|(R^{\nu'})_{mm'}|}\leq r_0<1\ ,\quad \sqrt[\nu'']{|(S^{\nu''})_{mm'}|}\leq s_0<1 \qquad (I,13a)$$

für $\nu'\geq N'$, $\nu''\geq N''$ (N',N'' beliebig, aber endlich) und alle m, m' .

+) Die Matrizen R, S sind definitionsgemäß mit der Matrix V vertauschbar.

Zum allgemeinen Anfangswertproblem übergehend braucht man nur die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{m',n'} G(m,n|m',n')\, u(m',n')\, \epsilon(n')$$

$$\sum_{m'n'} G(m,n|m',n')\, \delta_{n'+1,0} \Big(v_0(m') + \sum_{m''} p(m',m'')\, v_{-1}(m'') \Big)$$

$$\sum_{m'n'} G(m,n|m',n')\, v_{-1}(m')\, \delta_{n'+2,0} \; ,$$

mit $u(m,n), v_0(m), v_{-1}(m)$ als vorgegebene Größen, zu untersuchen. Wenn sie konvergieren, so liefert

$$v(m,n) = \sum_{m'n'} G(m,n|m',n') \Big\{ u(m',n')\,\epsilon(n') + \delta_{n'+1,0}\Big(v_0(m') + \sum_{m''} p(m',m'')\, v_{-1}(m'')\Big) + \delta_{n'+2,0}\, v_{-1}(m') \Big\} \qquad \text{(I,14)}$$

die Lösung der auch bezüglich eines Quellgliedes $u(m,n)$ verallgemeinerten Differenzengleichung

$$v(m,n+1) + \sum_{m'} p(m,m')\, v(m',n) + \sum_{m'} q(m,m')\, v(m',n-1) = u(m,n) \qquad \text{(I,14a)}$$

für $n \geq 0$, mit den Anfangsbedingungen $v(m,0) = v_0(m)$ und $v(m,-1) = v_{-1}(m)$. Denn wegen (I,4) und (I,5) gilt für $n \geq 0$

$$v(m,n+1) + \sum_{m'} p(m,m')\, v(m',n) + \sum_{m'} q(m,m')\, v(m',n-1) \equiv$$

$$\equiv \sum_{m'n'} (V + P + QV^{-1})_{mn,m'n'} \sum_{m''n''} G(m',n'|m'',n'') \Big\{ u(m'',n'')\,\epsilon(n'') +$$

$$+ \delta_{n''+1,0} \Big[\sum_{m'''} p(m'',m''')\, v_{-1}(m''') + v_0(m'') \Big] + \delta_{n''+2,0}\, v_{-1}(m'') \Big\} =$$

$$= \sum_{m''n''} \delta_{mm''}\, \delta_{nn''} \Big\{ u(m'',n'')\,\epsilon(n'') + \delta_{n''+1,0} \Big[\sum_{m'''} p(m'',m''')\, v_{-1}(m''')$$

$$+ v_0(m'') \Big] + \delta_{n''+2,0}\, v_{-1}(m'') \Big\} = u(m,n) .$$

Für $n=0$ findet man aus Gleichung (I,14)

$$v(m,0)=\sum_{m',n'}G(m,0|m',n')\,u(m',n')\,\varepsilon(n')+\sum_{m'}G(m,0|m',-1)\Big[v_0(m')+$$

$$+\sum_{m''}p(m',m'')\,v_{-1}(m'')\Big]+\sum_{m'}G(m,0|m',-2)\,v_{-1}(m')=$$

$$=\sum_{m'n'}G_0(m,m'|-n')\,u(m,n')\,\varepsilon(n')+\sum_{m'}G_0(m,m'|1)\Big[v_0(m')+$$

$$+\sum_{m''}p(m',m'')\,v_{-1}(m'')\Big]+\sum_{m'}G_0(m,m'|2)\,v_{-1}(m')$$

und mit (I,2) und (I,3)

$$v(m,0)=0+\sum_{m'}\delta_{mm'}\Big[v_0(m')+\sum_{m''}p(m,m'')\,v_{-1}(m'')\Big]+$$

$$+\sum_{m'}G_0(m,m'|2)\,v_{-1}(m')=$$

$$=v_0(m)+\sum_{m'}\Big[G_0(m,m'|2)+p(m,m')\Big]\,v_{-1}(m').$$

Aus (I,4) folgt mit (I,2) und (I,3) weiter

$$G_0(m,m'|2)+p(m,m')=0,$$

sodaß

$$v(m,0)=v_0(m).$$

Für $n=-1$ erhält man aus Gleichung (I,14) ganz analog

$$v(m,-1)=0+\sum_{m'}0\cdot\Big\{v_0(m')+\sum_{m''}p(m',m'')\,v_{-1}(m'')\Big\}+$$

$$+\sum_{m'}G(m,-1|m',-2)\,v_{-1}=\sum_{m'}G_0(m,m'|1)\,v_{-1}(m')=$$

$$=\sum_{m'}\delta_{mm'}\,v_{-1}(m')=v_{-1}(m').$$

Zum Schluß dieses Abschnitts möge noch auf die Möglichkeit, Gleichung (I,4a) physikalisch zu interpretieren, eingegangen werden:

Die Differenzengleichung (I,4) hat höchstens eine Lösung, die der Bedingung (I,4a) genügt. Sie besagt: Ein bei $m=m_0$ zur Zeit $\nu=1$ erregter Rechteckimpuls $G_0(m,m_0|1)=\delta_{mm_0}$ breitet sich nach Maßgabe der Propagationsmatrizen R, S auf andere

Stellen m aus. Der Impuls soll aber nicht schon irgendwelche Stellen m zu Zeiten $\nu \leq 0$ erreicht haben, die vor dem Zeitpunkt der Erregung $\nu = 1$ liegen ($G_0(m, m_0 | \nu) = 0$ für $\nu \leq 0$). Bedingung (I,4a) stellt somit eine Kausalbedingung dar, und die ihr unterworfene Lösung hat den durch sie bestimmten formalen Charakter (I,11), welcher seinerseits gewisse einschränkende Bedingungen (Konvergenzforderungen) gegenüber den Propagations-Matrizen R, S erzwingt. Die an die Propagations-Matrizen zu stellende Kausalforderung ist damit eine Konsequenz der primären Kausalbedingung (I,4a).

Teil 2)

Weitere Lösungen mit anderen Auswahlprinzipien

Der Vollständigkeit halber erscheint es notwendig, die Lösungen der Differenzengleichung (I,4) allgemein, d.h. unter Aufgabe der Kausalbedingung (I,4a) zu diskutieren.
Um etwas Anschauliches vor Augen zu haben betrachte man in Gleichung (I,14a) die Größe $v(m,n)$ als Feld und $u(m,n)$ als ihre Quelle. Mit (I,4a) setzt sich die Lösung $v(m,n)$ für $n \geq 0$ nach (I,14) zusammen erstens aus einem quellenfreien Feld

$$v_a(m,n) = \sum_{m'n'} G(m,n|m',n') \Big\{ \delta_{n'+1,0} \Big(v_0(m') + \sum_{m'} p(m',m'') v_{-1}(m'') \Big) + \delta_{n'+2,0} v_{-1}(m') \Big\}$$

- das ist ein Feld, welches aus einem bereits für $n < 0$ vorhandenem Feld $v_{-1}(m)$ hervorgehend, sich kraft dem Gesetz (I,14a), mit $u(m,n) = 0$, weiterentwickelt - und zweitens aus einem nur den Quellen $u(m,n)$ entstammenden Feldanteil

$$v_u(m,n) = \sum_{m'n'} G(m,n|m',n') u(m',n') \epsilon(n'), \quad \epsilon(n) = \begin{cases} 0 \text{ f. } n < 0 \\ 1 \text{ f. } n \geq 0 \end{cases}.$$

In diesem Sinne ist $G(mn|m'n')$, als Lösung von (I,4) betrachtet, selbst ein Feld vom Typ v_u mit $u(m,n) = \delta_{mm_0} \delta_{nn_0}$ als Quellerregung. $G(mn|m'n')$ ist also nicht durch ein etwa für $\nu \leq n-n' \leq 0$ vorhandenes Feld bestimmt (Anfangswertproblem), aus dem es kraft dem Entwicklungsgesetz (I,1) ($u(m,n)=0!$) für $\nu = n-n' \geq 0$ hervorgeht, sondern stellt ein Feld dar, das allein durch das Entwicklungsgesetz (I,4) mit $u(m,n) = \delta_{mm_0} \delta_{\nu,0}$ als Einheitsquelle bestimmt, ja sogar eindeutig bestimmt ist, wenn die durch die Gleichungen (I,11a) definierten Matrizen R, S die Eigenschaft haben, daß irgend ein aus den Summen

$$\sum_\nu \epsilon(\nu) R^{-\nu} V^{\nu} \qquad \sum_\nu \epsilon(\nu) S^{-\nu} V^{\nu} \tag{I,15}$$

$$\sum_\nu \epsilon(\nu) R^{\nu} V^{-\nu} \qquad \sum_\nu \epsilon(\nu) S^{\nu} V^{-\nu}$$

herausgegriffenes Paar von Summen - eine aus der linken und eine aus der rechten Spalte - <u>gleichzeitig</u> konvergiert. Falls die Reihen (I,13)

$$\sum_\nu \epsilon(\nu) R^{\nu} V^{-\nu} \quad , \quad \sum_\nu \epsilon(\nu) S^{\nu} V^{-\nu}$$

gleichzeitig konvergieren, wurde die Lösung von (I,4) als kausale Lösung bezeichnet. Für sie ist $G(m,n|m',n') = 0$ für $n-n' \leq 0$.

Ob die Differenzengleichung (I,4) eine kausale Lösung hat, hängt eben von der Konvergenz dieser Reihen ab. Konvergiert ein anderes Paar, z.B.

$$\sum_\nu \epsilon(\nu) R^{\nu} V^{-\nu} \, , \quad \sum_\nu S^{-\nu} V^{\nu} \epsilon(\nu) \, , \tag{I,16}$$

dann ist G gegeben durch

$$G = - S^{-1} \sum_{\nu'} \epsilon(\nu') V^{\nu'} S^{-\nu'} \cdot \sum_{\nu''} \epsilon(\nu'') V^{-\nu''} R^{\nu''} . \tag{I,17}$$

Mit der Abkürzung

$$T = - S^{-1} \sum_\nu \epsilon(\nu) S^{-\nu} R^{\nu} \, , \quad (T)_{nn'} = t \, \delta_{nn'} \, ,$$

ist das auch gleich

$$G = T + \sum_\nu V^{\nu} S^{-\nu} \epsilon(\nu-1) T + \tag{I,17a}$$

$$+ T \sum_\nu V^{-\nu} R^{\nu} \epsilon(\nu-1) = T \frac{V}{V-R} - \frac{V}{V-S} T .$$

Die Matrix T genügt, wie leicht zu ersehen ist, der Gleichung

$$TR - ST = 1.$$

Wenn auch R und S nicht eindeutig aus den Gleichungen (I,11a) bestimmbar sind, so ist doch G durch R und S eindeutig festgelegt, denn entwickelt man $[V+P+QV^{-1}]^{-1}$ nach Potenzen von $(V+QV^{-1})P^{-1}$

$$[V+P+QV^{-1}]^{-1} = \sum_{\nu} \epsilon(\nu)(-1)^{\nu} P^{-1}(VP^{-1}+QP^{-1}V^{-1})^{\nu},$$

so entsteht nach dem Ausmultiplizieren der ν. - Potenz von $(VP^{-1}+QP^{-1}V^{-1})$ eine Reihe der Form

$$[V+P+QV^{-1}]^{-1} =$$
$$= C_0(P,Q) + \sum_{\nu} V^{\nu}C_{\nu}^{+}(P^{-1},Q)\epsilon(\nu-1) + \sum_{\nu} V^{-\nu}C_{\nu}^{-}(P^{-1},Q)\epsilon(\nu-1).$$

Hierin sind C_0 und $C_{\nu}^{\pm}$ nur durch P^{-1} und Q gegebene Funktionen. Insbesondere ist

$$C_0 = P^{-1}\{1+(P'Q'+Q'P')+(P'^2Q'^2+P'Q'P'Q'+Q'P'Q'P'+$$
$$+P'Q'^2P'+Q'P'^2Q'+Q'^2P'^2)+\dots\}, \quad P'=P^{-1}, \quad Q'=QP^{-1},$$

ein Ausdruck, der, wenn P und Q vertauschbare Größen sind, übergeht in

$$C_0 = P^{-1}\sum_n \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\left[\frac{Q}{(\frac{P}{2})^2}\right]^n \epsilon(n) = \frac{1}{2\sqrt{(\frac{P}{2})^2-Q}} = T.$$

Falls die Reihe für C_0 konvergiert, muß die Reihe

$$C_0 + \sum_{\nu} V^{\nu}C_{\nu}^{+}\epsilon(\nu-1) + \sum_{\nu} V^{-\nu}C_{\nu}^{-}\epsilon(\nu-1)$$

mit der Reihe

$$T + \sum_{\nu} V^{\nu}S^{-1}T\epsilon(\nu-1) + \sum_{\nu} V^{-\nu}TR^{\nu}\epsilon(\nu-1)$$

identisch sein, d.h. es muß gelten

$$C_0 = T \quad , \quad C_\nu^+ = S^{-1}T \quad , \quad C_\nu^- = TR^\nu .$$

Also sind T, $S^{-\nu} \cdot T$ und $T \cdot R^\nu$ durch P und Q eindeutig gegeben, also auch G . Für die Matrixelemente von G bezgl. der Indizes n, n' erhält man mit $n - n' = \nu$

$$G(n,n') = G_0(\nu) = t\delta_{\nu,0} + \epsilon(-\nu-1) s^\nu t + \epsilon(\nu-1) t \kappa^\nu . \qquad (I,18)$$

Wenn also die Reihen (I,16) gleichzeitig konvergieren, dann besitzt die Differenzengleichung (I,4 bzw. 9) nur eine Lösung. Diese hat sowohl für positive als auch für negative ν von Null verschiedene Anteile

$$\left.\begin{aligned} G_0(\nu) &= s^{-|\nu|} \cdot G_0(0) \quad \text{für } \nu \leq -1 \\ G_0(\nu) &= \kappa^\nu \cdot G_0(0) \quad \text{für } \nu \geq +1 \end{aligned}\right\} G_0(0) = t . \qquad (I,18a)$$

Die Matrixelemente

$$(S^{-\nu})_{mm'} \quad , \quad (\kappa^\nu)_{mm'}$$

existieren, auch im Limes $\nu \to \infty$ wegen der vorausgesetzten Konvergenz der soeben genannten Reihen (I,16).

Konvergieren dagegen die Reihen

$$\sum_\nu \epsilon(\nu) R^{-\nu} V^\nu \quad , \quad \sum_\nu \epsilon(\nu) S^{-\nu} V^\nu , \qquad (I,19)$$

so ist G gegeben durch

$$G = S^{-1} \sum_{\nu'} \epsilon(\nu') S^{-\nu'} V^{\nu'} \cdot R^{-1} \sum_{\nu''} \epsilon(\nu'') R^{-\nu''} V^{\nu''} = \qquad (I,20)$$

$$= \sum_{\bar\nu} \epsilon(\bar\nu) V^{\bar\nu} \Big(\sum_{\nu' \geq 0} \epsilon(\bar\nu - \nu') S^{-\nu'} R^{-\bar\nu + \nu'} \Big).$$

Ähnlich wie in den anderen Fällen zeigt man auch hier die Eindeutigkeit der durch R, S gegebenen Lösung G . Entwickeln von $[V+P+QV^{-1}]^{-1}$ nach Potenzen von $VQ^{-1}+PQ^{-1}$ ergibt

$$[V+P+QV^{-1}]^{-1} = VQ^{-1}\sum_{\nu} \epsilon(\nu) V^{\nu} (VQ^{-1}+PQ^{-1})^{\nu}$$

und anschließende Anordnung der Glieder dieser Reihe nach Potenzen von V schliesslich auch

$$[V+P+QV^{-1}]^{-1} = V\sum_{\bar\nu} \epsilon(\bar\nu) V^{\bar\nu} \sum_{\bar\nu}^{(-)}(P,Q^{-1}).$$

Dann müssen die Summen $\sum_{\bar\nu}^{(-)}(P,Q^{-1})$, welche eindeutig festgelegte Polynome von P und Q sind, identisch sein mit $\sum_{\nu'\geq 0} \epsilon(\bar\nu-\nu') S^{-\nu'} R^{-\bar\nu+\nu'}$. Daher ist auch G selbst eindeutig durch diese Polynome in P und Q gegeben.
Für die Matrixelemente von G bezgl. der Indizes n,n' erhält man mit $n-n'=\nu$

$$G(n,n') = G_0(\nu) = \epsilon(-\nu-1)\sum_{\nu}^{(-)}(P,Q^{-1}). \qquad \text{(I,21)}$$

Wenn also die Reihen (I,19) gleichzeitig konvergieren, dann besitzt die Differenzengleichung (I,4) nur eine Lösung. Diese hat nur für negative $\nu \leq -1$ einen von Null verschiedenen Anteil

$$\begin{aligned} G_0(\nu) &= \sum_{\nu}^{(-)}(P,Q^{-1}) && \text{für } \nu\leq -1 \\ G_0(\nu) &= 0 && \text{für } \nu \geq 0 . \end{aligned} \qquad \text{(I,21a)}$$

Die Matrixelemente

$$(S^{-\nu})_{mm'} \quad , \quad (R^{-\nu})_{mm'} \quad , \quad \nu > 0$$

existieren, auch im Limes $\nu \to \infty$, wegen der vorausgesetzten Konvergenz der soeben genannten Reihen (I,19).

Die Ergebnisse des ersten und zweiten Teiles dieses Abschnittes I zusammenfassend, kann folgende Feststellung getroffen werden:

Die partielle Differenzengleichung (I,4 bezw. 9) hat stets eine und nur eine Lösung G , wenn immer es möglich ist, zwei Propagationsmatrizen R, S so zu finden, daß sie den Gleichungen (I,11a)

$$R+S=-P \quad , \quad R\cdot S=Q \quad , \quad (R,S)_{nn'}=\delta_{nn'}(R,S)$$

mit beliebig vorgebbaren P und Q gehorchen. Die Matrixelemente von G bezgl. der Indizes n, n'

$$(G)_{nn'}=G(n|n')=G_0(\nu) \quad , \quad n-n'=\nu$$

existieren, auch im Limes $\nu \longrightarrow \pm\infty$. Diese Eigenschaft von $G_0(\nu)$ ist durch die Konvergenz der jeweils für die Lösung maßgebenden Reihen (I,15) gesichert.
Das Phänomen der sogenannten "numerischen Instabilität" existiert nicht! Darunter versteht man in der Literatur den Vorgang des unbeschränkten Anwachsens der Matrixelemente der ν - ten Potenz der "Propagationsmatrizen" $(R,S)_{mm'}$ mit wachsendem ν (unter gleichzeitiger Oszillation bei veränderlichen m, m' um den Wert Null). Tatsächlich tritt bei keiner Lösung von (I,4 bzw. 9) ein derartiges Phänomen auf. Solche erhält man allerdings, wenn man etwas als Lösung von (I,4 bzw. 9) ausgibt, was tatsächlich keine ist. Als Beispiel hierfür sei der Einfachheit halber in Gleichung (I,9) die Größe $Q=\sigma$ gesetzt. Dann ist $S=-P$, $R=\sigma$ (oder $S=\sigma$, $R=-P$).
Wenn die Reihe $\sum \epsilon(\nu) S^{\nu} V^{-\nu}$ konvergiert, ist die Lösung durch (I,11) gegeben ($R=\sigma$)

$$G=V^{-1}\sum_{\nu'}\epsilon(\nu')V^{-\nu'}S^{\nu'}$$

Die Matrixelemente bezgl. der Indizes n, n' sind

$$(G)_{nn'}=G_0(\nu)=\epsilon(\nu-1)S^{\nu-1}=(-1)^{\nu-1}\epsilon(\nu-1)P^{\nu-1}$$

und diese sind sinnvoll für alle ν .

Konvergiert dagegen die Reihe $\sum \epsilon(\nu) S^{-\nu} V^{\nu}$, so ist die Lösung durch (I,17) bezw. (I,17a) gegeben ($T = -S^{1}$)

$$G = -S^{-1} \sum_{\nu'} \epsilon(\nu') V^{\nu'} S^{-\nu'}.$$

Die Matrixelemente bezgl. der Indizes n, n' sind

$$(G)_{nn'} = G_0(\nu) = -\epsilon(-\nu) S^{\nu-1} = (-1)^{\nu} \epsilon(-\nu) p^{\nu-1}$$

und diese sind wiederum sinnvoll für alle ν .

Löst man nun die mit $u(m,n) = 0$ homogene Differenzgleichung (I,14a) ebenfalls unter der vereinfachenden Bedingung $q = 0$, so findet man aus (I,14)

$$\begin{aligned} v(n) &= (-1)^{n-n'-1} \epsilon(n-n'-1) p^{n-n'-1} \delta_{n'+1,0} v_0 = \\ &= (-1)^{n} \epsilon(n) p^{n} v_0 , \end{aligned} \qquad \text{(I,22)}$$

falls $\sum_{\nu} \epsilon(\nu)(-p)^{\nu} V^{-\nu}$ konvergiert und

$$\begin{aligned} v(n) &= (-1)^{n-n'} \epsilon(n-n') p^{n-n'-1} \delta_{n'+1,0} v_0 = \\ &= (-1)^{n+1} \epsilon(-n-1) p^{n} v_0 , \end{aligned} \qquad \text{(I,23)}$$

falls $\sum \epsilon(\nu)(-p)^{-\nu} V^{\nu}$ konvergiert. Das in der Literatur mit "numerische Instabilität" bezeichnete Phänomen kommt nun dadurch zustande, daß fälschlicherweise die Lösung (I,22) auch für solche p in Anspruch genommen wird, für welche die Reihe $\sum \epsilon(\nu) (-p)^{\nu} V^{-\nu}$ garnicht konvergiert. Es ist aber nicht so, daß für solche p keine mathematisch sinnvollen (d.h. konvergenten) Lösungen existieren. Sie sind tatsächlich durch (I,23) gegeben. Ob diese Lösungen (I,23) physikalisch sinnvoll sind, kann in diesem Rahmen natürlich nicht entschieden werden.

Welche Rolle spielt nun die Forderung der Konvergenz, z.B. der Reihe

$$\sum_{\nu} \epsilon(\nu) R^{\nu} V^{-\nu-1} \qquad ?$$

Eine Antwort auf diese Frage kann man bekommen durch eine geeignete unitäre Transformation der Matrixelemente dieser Reihe bezgl. der Indizes n, n'

$$\langle \psi | \sum_\nu \epsilon(\nu) R^\nu V^{-\nu-1} | \psi' \rangle \equiv \sum_{nn'} \frac{e^{in\psi}}{\sqrt{2\pi}} \Big(\sum_\nu \epsilon(\nu) R^\nu V^{-\nu-1}\Big)_{nn'} \frac{e^{-in'\psi'}}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \sum_{nn'} \frac{e^{in\psi}}{\sqrt{2\pi}} \epsilon(n-n'-1) R^{n-n'-1} \frac{e^{-in'\psi'}}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \delta_p(\psi-\psi'; 2\pi) \sum_\nu \epsilon(\nu-1) R^{\nu-1} e^{i\nu\psi}$$

$$= \delta_p(\psi-\psi'; 2\pi) \sum_\nu G_0(\nu) e^{i\nu\psi}$$

Hierin ist $\delta_p(\psi; 2\pi)$ die in ψ periodische Dirac'sche δ - Funktion von der Periodenlänge 2π , und die Matrixelemente von $G_0(\nu)$ bezgl. der Indizes m, m' sind

$$(G_0(\nu))_{mm'} = G_0(m, m'|\nu).$$

Wenn die Reihe $\sum_\nu \epsilon(\nu) R^\nu V^{-\nu-1}$ konvergiert, dann muß gleiches gelten für die Reihe

$$\sum_\nu G_0(\nu) e^{i\nu\psi} \quad \text{bezw.} \quad \sum_\nu G_0(m, m'|\nu) e^{i\nu\psi}$$

und umgekehrt.
Interpretiert man $\nu\tau$ (τ =Skalenfaktor) als Zeit und ψ/τ als Frequenz ω , so kann die Forderung der Konvergenz der Reihe $\sum \epsilon(\nu) R^\nu V^{-\nu-1}$ in die Forderung gekleidet werden:
Der, durch die Differenzengleichung (I,4 bezw. 9) definierte, zeitliche Vorgang muß durch die Fourierdarstellung

$$\sum_\nu G_0(m, m'|\nu) e^{i\nu\tau\omega} = \tilde{G}_0(m, m'|\omega)$$

und

$$G_0(m, m'|\nu) = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau} G_0(m, m'|\omega) e^{-i\nu\tau\omega} d\omega$$

beschrieben werden können. Daraus folgt Quadratintegrabilität von $\tilde{G}_0$ bezgl. ω bezw. Quadratsummierbarkeit von G_0 bezgl. ν

$$\sum_{\nu} |G_0(u,u'|\nu)|^2 = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau} |G_0(u,u'|\omega)|^2 d\omega$$

Damit aber ist klar, daß dann eine "Lösung" von (I,4 bezw. 9), der das Phänomen der sogenannten "numerischen Instabilität" anhaftet, tatsächlich keine Lösung von (I,4 bezw. 9) sein kann.

Teil 3)

Wenn die Kausalbedingung (I,4a nicht erfüllt ist, ist das Anfangswertproblem nur bedingt lösbar

Es kann vorkommen, daß keine der Reihen (I,15) konvergiert. Im Falle $Q = 0$ heißt das, daß, unter der ausdrücklichen Voraus- aussetzung der Existenz von P^{-1}, weder

$$\sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu) P^{-(\nu+1)} V^\nu \quad \text{noch} \quad \sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu) P^\nu V^{-(\nu+1)} \qquad (I,25)$$

konvergiert, und dies wiederum bedeutet: Die Differenzengleichung (I,9)

$$(V+P)G = E\,, \quad (G)_{mm',nn'} \equiv G(m,n|m',n') \equiv G_0(mm'|n-n') \qquad (I,26)$$

besitzt weder eine Lösung der Art

$$G_0(m,m'|\nu) = 0 \text{ für } \nu \leq 0,\; G_0 \neq 0 \text{ für } \nu \geq 1$$

noch eine Lösung der Art

$$G_0(m,m'|\nu) = 0 \text{ für } \nu \geq 1,\; G_0 \neq 0 \text{ für } \nu \leq 0.$$

Tatsächlich gibt es Differenzengleichungen vom Typ (I,26), die simultan sowohl für $\nu \leq 0$ als auch für $\nu \geq 1$ von Null verschiedene Lösungen haben, wie an einfachen Beispielen leicht zu ersehen ist. Wenn diese Reihen (I,25) einzeln nicht konvergieren, so liegt dies eben daran, daß

$$\lim_{\nu \to \infty} P^\nu \qquad \text{bezw.} \qquad \lim_{\nu \to \infty} P^{-\nu}$$

keinen Sinn hat. Unter gewissen Voraussetzungen kann man aber zeigen, daß es (Projektions-) Matrizen Π und $\overline{\Pi}$ gibt so, daß die Limites

$$\lim_{\nu \to \infty} (P^\nu \Pi) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\nu \to \infty} (P^{-\nu} \overline{\Pi})$$

simultan einen Sinn haben und, daß

$$G = \sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu) \left[V^{-(\nu+1)} P^\nu \Pi + V^\nu P^{-(\nu+1)} \overline{\Pi} \right] \qquad (I,27)$$

die gewünschte Lösung der Differenzengleichung (I,26) im Sinne einer Green'schen Funktion darstellt.

Offensichtlich sind dann

$$G_0^{(+)}(\nu) = \epsilon(\nu-1)(-1)^{\nu-1} p^{\nu-1} \Pi = 0 \text{ für } \nu \leq 0$$
$$G_0^{(-)}(\nu) = \epsilon(-\nu)(-1)^\nu p^{\nu-1} \overline{\Pi} = 0 \text{ für } \nu \geq 1 \qquad (I,28)$$

die im allgemeinen von Null verschiedenen Matrixelemente von $G = G^{(+)} + G^{(-)}$ bezügl. der Indizes $n - n' = \nu$ für $\nu \geq 1$ bezw. für $\nu \leq 0$, wenn unter

$$(\Pi, \overline{\Pi})_{nn'} = \delta_{nn'} (\Pi, \overline{\Pi}), \quad (P)_{nn'} = p \delta_{nn'} \qquad (I,29)$$

verstanden wird.

Die Matrizen

$$G^{(-)} = \sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu) V^{-(\nu+1)} P^\nu \Pi \quad \text{bzw.} \quad G^{(+)} = \sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu) V^\nu P^{-(\nu+1)} \overline{\Pi} \qquad (I,30)$$

existieren simultan sicher dann, wenn es eine Diagonaldarstellung von P gibt

$$\langle \psi, q | P | \psi', q' \rangle = \langle \psi | \psi' \rangle \langle q | q' \rangle \, p(q)$$

und eine Basistransformation $m \to q$, deren Elemente $\langle q | m \rangle$ bzw. $\langle m | q \rangle$ den (Vollständigkeits-) Relationen

$$\sum_m \langle q | m \rangle \langle m | q' \rangle = \langle q | q' \rangle \quad (= 0 \text{ f. } q \neq q')$$

$$\int_{q_a}^{q_b} dq \, \langle m' | q \rangle \langle q | m \rangle = \delta_{mm'}, \quad \int_{q_a}^{q_b} dq \, \langle q | q' \rangle = \int_{q_a}^{q_b} dq' \langle q | q' \rangle = 1$$

genügen, sowie eine Basistransformation $n \to \psi$, deren

Elemente $\langle n|\psi\rangle$ bzw. $\langle\psi|n\rangle$ entsprechende Relationen (hier $\langle n|\psi\rangle = \langle\psi|n\rangle^* = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-in\psi}$) erfüllen. Das Symbol $S_{q_a}^{q_b}{}_q$ bezeichne eine Summation oder Integration über den vollständigen Orthogonalitätsbereich $q_a \leq q \leq q_b$

Im Basissystem der ψ, q nimmt die Gleichung (I,26) die Gestalt

$$\left(e^{-i\psi} + p(q) \right) G(q,\psi) = 1$$

an. Wenn für fast alle q der Faktor $e^{-i\psi} + p(q)$ von Null verschieden ist, gilt

$$G(q,\psi) = \frac{1}{e^{-i\psi} + p(q)}$$

sonst hat man für alle q aus einem endlichen Intervall, in welchem $|p(q)| = 1$ ist,

$$G(q,\psi) = \alpha \frac{1}{e^{-i(\psi+i\varepsilon)} + p(q)} + \beta \frac{1}{e^{-i(\psi-i\varepsilon)} + p(q)}, \quad \alpha+\beta =$$

zu setzen. Wegen

$$\frac{1}{e^{-i(\psi \pm i\varepsilon)} + p(q)} = \frac{e^{\mp\varepsilon}}{e^{-i\psi} + p_1(q)}, \quad p_1(q) = p(q)\, e^{\mp\varepsilon},$$

darf somit für die folgenden Überlegungen angenommen werden, daß für fast alle q der Nenner nicht verschwindet.

Im vollständigen Orthogonalitätsbereich $q_a \leq q \leq q_b$ nimmt dann $|p(q)|$ Werte an, die entweder größer oder kleiner als Eins sind. Sei $J_\kappa(q_\kappa \leq q \leq q_\kappa')$ bezw. $\bar{J}_s(\bar{q}_s \leq q \leq \bar{q}_s')$ ein Teilintervall so, daß dort $|p(q)| \leq 1$ bezw. $|p(q)| > 1$ ist, dann konvergiert die

Reihe $\sum\limits_\nu e^{-i\nu\psi} p^{-(\nu+1)}(q) \epsilon(\nu)(-1)^\nu$ im Intervall $\bar{J}_s$

und die Reihe $\sum\limits_\nu e^{i(\nu+1)\psi} p^\nu(q) \epsilon(\nu)(-1)^\nu$ im Intervall J_κ.

Die Matrixelemente von G bezügl. m, m' und ψ, ψ' werden damit

$$\langle m,\psi|G|m',\psi'\rangle =$$

$$= \langle\psi|\psi'\rangle \Big\{ \sum_{\kappa} {}_{q_\kappa}S_q^{q_\kappa'} \langle m|q\rangle \sum_{\nu} e^{i(\nu+1)\psi} p^{\nu}(q)\,\epsilon(\nu)(-1)^{\nu}\langle q|m'\rangle +$$

$$+ \sum_{s} {}_{q_s}S_q^{\bar{q}_s'} \langle m|q\rangle \sum_{\nu} e^{-i\nu\psi} p^{-(\nu+1)}(q)\,\epsilon(\nu)(-1)^{\nu}\langle q|m'\rangle \Big\}$$

und das ist wegen

$$\sum_{m_1} {}_{q_\kappa}S_q^{q_\kappa'} \langle m|p^{\nu}|m_1\rangle\langle m_1|q\rangle\langle q|m'\rangle =$$

$$= \sum_{m_1,m_2} {}_{q_a}S_{q'}^{q_b}\, {}_{q_\kappa}S_q^{q_\kappa'} \langle m|q'\rangle\langle q'|m_2\rangle\langle m_2|p^{\nu}|m_1\rangle\langle m_1|q\rangle\langle q|m'\rangle =$$

$$= {}_{q_a}S_{q'}^{q_b}\, {}_{q_\kappa}S_q^{q_\kappa'} \langle m|q'\rangle\langle q'|p^{\nu}|q\rangle\langle q|m'\rangle =$$

$$= {}_{q_a}S_{q'}^{q_b}\, {}_{q_\kappa}S_q^{q_\kappa'} \langle m|q'\rangle\langle q'|q\rangle p^{\nu}(q)\langle q|m'\rangle =$$

$$= {}_{q_\kappa}S_q^{q_\kappa'} \langle m|q\rangle\, p^{\nu}(q)\, \langle q|m'\rangle$$

und der entsprechend beweisbaren Gleichheit

$$\sum_{m_1} {}_{\bar{q}_s}S_q^{\bar{q}_s'} \langle m|p^{-(\nu+1)}|m_1\rangle\langle m_1|q\rangle\langle q|m'\rangle =$$

$$= {}_{\bar{q}_s}S_q^{\bar{q}_s'} \langle m|q\rangle\, p^{-(\nu+1)}(q)\, \langle q|m'\rangle$$

also auch gleich

$$\langle m,\psi|G|m',\psi'\rangle =$$

$$= \langle\psi|\psi'\rangle \Big\{ \sum_{\nu} (-1)^{\nu}\epsilon(\nu)\, e^{i(\nu+1)\psi} \sum_{m_1} \langle m|p^{\nu}|m_1\rangle \sum_{\kappa} {}_{q_\kappa}S_q^{q_\kappa'} \langle m_1|q\rangle\langle q|m'\rangle +$$

$$+ \sum_{\nu} (-1)^{\nu}\epsilon(\nu)\, e^{-i\nu\psi} \sum_{m_1} \langle m|p^{-(\nu+1)}|m_1\rangle \sum_{s} {}_{q_s}S_q^{\bar{q}_s'} \langle m_1|q\rangle\langle q|m'\rangle .$$

Definiert man zwei Matrizen $\overline{\Pi}$, $\overline{\overline{\Pi}}$ durch ihre Matrixelemente

$$\langle m|\overline{\Pi}|m'\rangle \equiv \sum_{\kappa} {}_{q_\kappa}S_q^{q_\kappa'} \langle m|q\rangle\langle q|m'\rangle \qquad \text{(I,31)}$$

$$\langle m|\overline{\overline{\Pi}}|m'\rangle \equiv \sum_{s} {}_{\bar{q}_s}S^{\bar{q}_s'} \langle m|q\rangle\langle q|m'\rangle ,$$

so erhält damit das Matrixelement von G selbst die Form

$$\langle m,\psi|G|m',\psi'\rangle = \langle\psi|\psi'\rangle \Big\{ \sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu)\, e^{i(\nu+1)\psi} \langle m|p^\nu \pi|m'\rangle +$$

$$+ \sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu)\, e^{-i\nu\psi} \langle m|p^{-(\nu+1)}\bar{\pi}|m'\rangle \Big\} .$$

Aus ihr liest man sofort die zu Beginn dieses Abschnittes als gültig behauptete Form (I,27) der Matrix G ab:

$$G = \sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu) \left[V^{-(\nu+1)} P^\nu \Pi + V^\nu P^{-(\nu+1)} \bar{\Pi} \right] .$$

Daß dieses G auch die Differenzengleichung (I,26) befriedigt, ist leicht zu sehen, denn es ist sowohl

$$(V+P) \sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu) V^{-(\nu+1)} P^\nu \Pi = \Pi$$

als auch

$$(V+P) \sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu) V^\nu P^{-(\nu+1)} \bar{\Pi} = \bar{\Pi} .$$

Also gilt für die Summe beider Anteile

$$(V+P)G = \Pi + \bar{\Pi}$$

Nun gilt aber für die Matrixelemente von $\Pi + \bar{\Pi}$ nach (I,31) sowie (I,29)

$$\langle mn|\Pi+\bar{\Pi}|m'n'\rangle = \langle n|n'\rangle\langle m|\pi+\bar{\pi}|m'\rangle = \qquad \text{(I,3}$$

$$= \delta_{nn'} \Big(\sum_{\kappa\, q_\kappa} S_q^{q_\kappa'} + \sum_{s\, q_s} S_q^{q_s'} \Big) \langle m|q\rangle\langle q|m'\rangle =$$

$$= \delta_{nn'} \, {}_{q_a}S_q^{q_b} \langle m|q\rangle\langle q|m'\rangle = \delta_{nn'}\delta_{mm'} = \langle mn|E|m'n'\rangle$$

und daher ist G Lösung der Differenzengleichung (I,26)

$$(V+P)G = E ,$$

wie behauptet.

Es verbleibt noch zu überlegen, wie und ob sich mit dem eben entwickelten Formalismus eine Lösung der Differenzengleichung (I,14a) ($q(m,m')=0$ und speziell $u(m,n)=0$)

$$v(m,n+1)+\sum_{m'} p(m,m')\,v(m',n)=0\,,\quad n>0 \qquad (I,33)$$

mit beliebiger Anfangsbedingung $v(m,0)=v_0(m)$ finden läßt. Zunächst definiert

$$v(m,n)=\sum_{m'n'} G(mn|m',n')\,\delta_{n'+1,0}\,\bar{v}_0(m') \qquad (I,34)$$

eine Funktion von m und n (auch für negative n !) die, wegen (V + P) G = E, der Gleichung (I,33) genügt. Doch $v(m,n)$ aus (I,34) befriedigt nur unter ganz bestimmten Voraussetzungen die Anfangsbedingung $v(m,0)=v_0(m)$. Die Gleichung (I,34 schreibt ja vor, daß

$$v(m,0)=\sum_{m'} G(m,0|m',-1)\,\bar{v}_0(m')=\sum_{m'} G_0^{(+)}(m,m'|1)\,\bar{v}_0(m')=$$

$$=\sum_{m'}\langle m|\Pi|m'\rangle\,\bar{v}_0(m')$$

sein soll. Da das Reziproke der Projektionsmatrix Π nicht existiert, gibt es keine Auflösung der Gleichung

$$v(m,0)=\sum_{m'}\langle m|\Pi|m'\rangle\,\bar{v}_0(m')$$

nach $\bar{v}_0(m')$. Daraus folgt: Die bezüglich des Index n quadratsummierbare Lösung (I,34) - man beachte hierzu die Gleichungen $G_0^{(+)}=0$ für $\nu\leq 0$, $G_0^{(-)}=0$ für $\nu\geq 1$ und (I,24) - befriedigt die vorgegebene Anfangsbedingung $v(m,0)=v_0(m)$ nur dann, wenn für diese gilt

$$\bar{v}_0(m)=v_0(m)\,,\ \text{d.h.}\ \sum_{m'}\langle m|\bar{\Pi}|m'\rangle v_0(m')=0.$$

In der q - Darstellung von $v_0(m)$ - sie wird als existent vorausgesetzt - heißt das

$$v_0(q)=\sum_m\langle q|m\rangle\,v_0(m)=0$$

in allen Teilintervallen $\bar{J}_s(\bar{q}_s\leq q\leq\bar{q}_s')$ des Orthogonalitätsintervalles $q_a\leq q\leq q_b$. Es sind dies diejenigen, in denen $|p(q)| > 1$ ist. Von $v_0(m)$ wird also die Darstellbarkeit

$$v_0(m) = \sum_{\varkappa} \sum_{q_\varkappa} S_q^{q_\varkappa'} \langle m|q\rangle v_0(q) \tag{I,35}$$

verlangt.

Dieses Verhalten von G ist natürlich durch die <u>Nicht</u>erfüllung der Kausalbedingung (I,4a)

$$G = 0 \quad \text{für} \quad \nu \leq 0$$

begründet.

Entstammt die partielle Differenzengleichung (I,26) durch Übersetzung einer partiellen Differentialgleichung und sind die Matrixelemente $\langle m|\Pi|m'\rangle$ für hinreichend kleine Maschenweiten $(\tau,h) \leq (\tau_0,h_0)$ alle gleich Null (oder konvergieren mit $(\tau_0,h_0) \to 0$ nach Null), so kann doch auch

$$v(m,n) = \sum_{m'} G_0^{(+)}(m,m'|n+1)\, v_0(m) \quad , \quad n \geq 0$$

als Näherungslösung für Werte der Maschenweiten $(\tau,h) > (\tau_0,h_0)$ in dem Sinne betrachtet werden, als dieses $v(m,n)$ die Differenzengleichung (I,26) exakt erfüllt, jedoch eine beliebig gewählte Anfangsbedingung $v_0(m)$ im allgemeinen nur näherungsweise produziert, doch so, daß mit gegen Null strebenden Abständen $(\tau-\tau_0\ ,\ h-h_0) \to 0$ die Lösung $v(m,n)$ für $n=0$ gegen $v_0(m)$ strebt.

Der Fall $Q \neq 0$ bietet dem hier untersuchten Fall $Q = 0$ gegenüber keine wesentlichen Neuheiten, weshalb ein Eingehen auf ihn vorerst unterbleiben kann.

Dagegen wird es nicht unterlassen, an Hand eines simplen Beispiels den begrifflichen Inhalt dieses Teils zu demonstrieren.

Hierfür diene die Übersetzung der einfachen Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \ , \ \sigma > 0 \ , \ t > 0 \tag{I,36}$$

in eine Differenzengleichung der Form

$$v(m,n+1)-v(m,n)-\frac{\tau\sigma}{h^2}\left[v(m+2,n)-2v(m+1,n)+v(m,n)\right]=\sigma. \qquad \text{(I,36a)}$$

Aus ihr liest man die Matrixelemente von p

$$\langle m|p|m'\rangle=-\left(1+\frac{\sigma\tau}{h^2}\right)\delta_{mm'}-\frac{\tau\sigma}{h^2}\left(\delta_{m+2,m'}-2\delta_{m+1,m'}\right) \qquad \text{(I,37)}$$

ab. Sie sind darstellbar durch

$$\langle m|p|m'\rangle=\frac{(-1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[1+\frac{\sigma\tau}{h^2}(e^{-i\varphi}-1)^2\right]e^{-i(m-m')\varphi}d\varphi$$

und die der ν - ten Potenz von p durch

$$\langle m|p^\nu|m'\rangle=\frac{(-1)^\nu}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[1+\frac{\sigma\tau}{h^2}(e^{-i\varphi}-1)^2\right]^\nu e^{-i(m-m')\varphi}d\varphi. \qquad \text{(I,38)}$$

Offensichtlich ist

$$(-1)\left[1+\frac{\sigma\tau}{h^2}(e^{-i\varphi}-1)^2\right]=p(\varphi) \qquad \text{(I,39)}$$

das Matrixelement von p in der Diagonaldarstellung

$$\langle\varphi|p|\varphi'\rangle=\langle\varphi|\varphi'\rangle\,p(\varphi)$$

mit

$$\langle m|\varphi\rangle=\langle\varphi|m\rangle^*=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-im\varphi},\quad -\pi\leq\varphi\leq+\pi.$$

Der Betrag von $p(\varphi)$ ist stets ungleich Null für alle φ aus dem Intervall $-\pi\leq\varphi\leq+\pi$

$$|p(\varphi)|=\left|1-\frac{4\sigma\tau}{h^2}e^{-i\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right|^2=$$

$$=\left(1-\frac{4\sigma\tau}{h^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2+4\cdot\frac{4\sigma\tau}{h^2}\sin^4\frac{\varphi}{2}\geq\frac{1}{1+\frac{\sigma\tau}{h^2}}.$$

Daher existieren für alle endlichen, positiven und negativen ν-Werte die Matrixelemente (I,38)

$$\langle m|p^\nu|m'\rangle.$$

Dagegen existiert weder

$$\lim_{\nu\to\infty} \langle m|p^{\nu}|m'\rangle \qquad \text{noch} \qquad \lim_{\nu\to\infty} \langle m|\bar{p}^{\nu}|m'\rangle ,$$

da $|p(\varphi)|$ für $|\varphi_0|<|\varphi|\leq\pi$ größer und im Zwischenbereich $|\varphi|\leq|\varphi_0|$ kleiner bezw. gleich Eins ist $(|p(\varphi_0)|=1\ ,\ \varphi_0>0)$.

). Mit dieser Kenntnis können die Matrixelemente der Projektionsmatrizen Π, $\bar{\Pi}=e-\Pi$ nach (I,31) berechnet werden +)

$$\langle m|\Pi|m'\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} e^{-i(m-m')\varphi}d\varphi=\frac{\sin(m-m')\varphi_0}{\pi(m-m')}, \tag{I,40}$$

sowie die Matrixelemente $G_0^{\pm}(m,m'|\nu)$ nach (I,28 und 38)

$$\begin{aligned} G_0^{(+)}(m,m'|\nu) &= \epsilon(\nu-1)(-1)^{\nu-1}\sum_{m_1}\langle m|p^{\nu-1}|m_1\rangle\langle m_1|\Pi|m'\rangle= \\ &= \frac{\epsilon(\nu-1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[1+\frac{\sigma\tau}{h^2}(e^{-i\varphi}-1)^2\right]^{\nu-1} e^{-i(m-m')\varphi}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0}\delta_p(\varphi-\varphi';2\pi)\,d\varphi\,d\varphi' \\ &= \frac{\epsilon(\nu-1)}{2\pi}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0}\left[1+\frac{\sigma\tau}{h^2}(e^{-i\varphi}-1)^2\right]^{\nu-1} e^{-i(m-m')\varphi}d\varphi \end{aligned}$$

$$G_0^{(-)}(m,m'|\nu)=-\frac{\epsilon(-\nu)}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\varphi_0}+\int_{+\varphi_0}^{+\pi}\right\}\frac{e^{-i(m-m')\varphi}d\varphi}{\left[1+\frac{\sigma\tau}{h^2}(e^{-i\varphi}-1)^2\right]^{-\nu+1}}$$

und schließlich findet man damit als Lösung des Anfangswertproblems (I,33) unter Berücksichtigung (I,34)

$$v(m,n)=\epsilon(n)\sum_{m'}\frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0}\left[1+\frac{\sigma\tau}{h^2}(e^{-i\varphi}-1)^2\right]^{n}e^{-i(m-m')\varphi}d\varphi\, v_0(m').$$

Speziell für n = o ergibt sich daraus

$$v(m,0)=\sum_{m'}\frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0}e^{-i(m-m')\varphi}d\varphi\cdot v_0(m')=\sum_{m'}\frac{\sin(m-m')\varphi_0}{\pi(m-m')}v_0(m'),$$

+) Eine Verwechslung der Projektionsmatrix Π mit der Zahl π darf wohl als ausgeschlossen gelten.

und das ist, falls die Darstellbarkeit von $v_0(m)$ durch (I,35) möglich ist, exakt gleich der Anfangsbedingung

$$v(m,0) = v_0(m).$$

Ist (I,35) nicht erfüllt, so wird zwar für n = o der exakte Anfangswert $v_0(m)$ nicht angenommen, doch ist, wenn die Darstellung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m'} e^{im'\varphi} v_0(m') = v_0(\varphi)$$

existiert, $|v_0(m) - v(m,0)|$ um so kleiner, je weniger die Funktion $v_0(\varphi)$ an den Intervallenden zum Integral

$$\int_{\pm\varphi_0}^{\pm\pi} v_0(\varphi) e^{im\varphi} d\varphi$$

beiträgt.

Die hier offen darliegende Schwierigkeit, daß nicht beliebig vorgegebene Anfangswerte durch die Lösung $v(m,n)$ für n = o reproduziert werden, ist eine Folge, wie schon früher dargelegt, der hier unerfüllbaren Kausalforderung (I,4a), und - das darf nicht übersehen werden - somit kein spezielles, nur für Differenzgleichungen spezifisches Phänomen. Es sind beliebig viele Beispiele von Differentialgleichungen angebbar, die entsprechendes leisten. Z.B. ist die für $|t| \to \infty$ beschränkte Lösung der Differentialgleichung ($\alpha > 0$)

$$\frac{\partial G_0}{\partial t}(x,x_0|t) - i\alpha \frac{\partial G_0}{\partial x}(x,x_0|t) = \delta(t)\delta(x-x_0)$$

durch

$$G_0(x,x_0|t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{i e^{-i\omega t - ik(x-x_0)}}{\omega - i\alpha k} d\omega dk = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(x-x_0)+i\alpha t}$$

gegeben. G_0 ist nicht Null für $t<0$ und erfüllt daher nicht die Kausalbedingung $G_0 = 0$ für $t<0$. Demzufolge gilt

$$G_0^{(+)}(x,x_0|t) = -\frac{\epsilon(t)}{2\pi i} \frac{1}{(x-x_0)+i\alpha t}, \quad G_0^{(-)}(x,x_0|t) = -\frac{\epsilon(-t)}{2\pi i} \frac{1}{(x-x_0)+i\alpha t},$$

$$G_0 = G_0^{(+)} + G_0^{(-)}$$

und

$$\lim_{t\to+0} G_0^{(+)}(x,x_0|t) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{t\to+0}\frac{1}{x-x_0+i\alpha t} - \delta_+(x-x_0) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ik(x-x_0)}dk$$

Daher befriedigt

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0^{(+)}(x,x_0|t)\, v_0(x_0)\, dx_0$$

zwar die Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} - i\alpha\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{für } t>0,$$

reproduziert aber nur solche Anfa-ngsbedingungen, die eine Darstellung

$$v_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-ikx} v_0(k)\, dk$$

zulassen, das heißt, wenn $v_0(k) = 0$ für $k < 0$ ist.

Die Projektionsmatrix Π ist hier in der k- Darstellung durch

$$\langle k|\Pi|k'\rangle = \delta(k-k')\,\epsilon(-k)$$

und in der x - Darstellung durch

$$\langle x|\Pi|x'\rangle - \delta_+(x-x') - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-ik(x-x')}dk$$

gegeben.

Zu Beginn dieses Teils war die Existenz von P^{-1} vorausgesetzt worden. Wenn P^{-1} nicht existiert und die Reihe

$$\sum_\nu (-1)^\nu \epsilon(\nu) P^\nu V^{(\nu+1)}$$

nicht konvergiert, dann ist es unmöglich, die für $|\nu|\to\infty$ beschränkte Lösung von (I,26) durch die Matrixelemente $\langle m|P^\nu|m'\rangle$ allein anzugeben. Zwar hat

$$\langle m|G_0^{(+)}(\nu)|m'\rangle = \epsilon(\nu-1)(-1)^{\nu-1}\langle m|P^{\nu-1}\Pi|m'\rangle$$

noch einen Sinn, jedoch existiert die entsprechende Darstellung von $\langle m|G_0^{(-)}(\nu)|m'\rangle$ nicht. Demzufolge kann in der Darstellung

$$\langle m,\psi|G|m'\psi'\rangle = \langle\psi|\psi'\rangle \Big\{ \sum_{\kappa} \int_{q_\kappa}^{q_\kappa'} \langle m|q\rangle \sum_{\nu} e^{i(\nu+1)\psi} p^{\nu}(q)\,\epsilon(\nu)(-1)^{\nu}\langle q|m'\rangle +$$

$$+ \sum_{s} \int_{\bar q_s}^{\bar q_s'} \langle m|q\rangle \sum_{\nu} e^{-i\nu\psi} p^{-(\nu+1)}(q)\,\epsilon(\nu)(-1)^{\nu}\langle q|m'\rangle \Big\}$$

nur das erste Glied in eine m - Darstellung von p überführt werden

$$\langle m,\psi|G|m'\psi'\rangle = \langle\psi|\psi'\rangle \Big\{ \sum_{\nu} e^{i(\nu+1)}(-1)^{\nu}\epsilon(\nu) \sum_{m_1} \langle m|p^{\nu}|m_1\rangle\langle m_1|\Pi|m'\rangle +$$

$$+ \sum_{s} \int_{\bar q_s}^{\bar q_s'} \langle m|q\rangle \sum_{\nu} e^{-i\nu\psi} p^{-(\nu+1)}(q)\,\epsilon(\nu)(-1)^{\nu}\langle q|m'\rangle \Big\}.$$

während das zweite Glied in der geschweiften Klammer das Matrixelement einer Summe von nicht durch p ausdrückbaren Operatoren g_ν in der m - Darstellung angibt, welche in der Diagonaldarstellung die Elemente

$$\langle q|g_\nu|q'\rangle = \langle q|q'\rangle \sum_{s} \epsilon(\bar q_s' - q)\,\epsilon(q-\bar q_s)\, p^{-(\nu+1)}(q)\,, \quad \nu>0$$

besitzen.

Zum Ende dieses Teiles möge noch auf einen eventuellen Einwand bezüglich der Existenzforderung der Limites

$$\lim_{\nu\to\infty} P^{\nu}\Pi \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\nu\to\infty} P^{-\nu}\overline{\Pi}$$

eingegangen werden.

Die Differenzengleichung

$$G_0(\nu+1)+pG_0(\nu)=\delta_{\nu,0}e \quad , \quad \begin{array}{l}\langle m|e|m'\rangle=\delta_{mm'} \\ \langle m|G_0(\nu)|m'\rangle=G_0(m,m'|\nu)\end{array}$$

wird natürlich formal durch

$$G_0(\nu)=\epsilon(\nu-1)(-1)^{\nu-1}p^{\nu-1}\overline{\Pi}+\epsilon(-\nu)(-1)^{-\nu}p^{\nu-1}\overline{\overline{\Pi}}$$

mit

$$\overline{\Pi}=E-pG_0(0) \quad , \quad \overline{\overline{\Pi}}=pG_0(0)$$

befriedigt. Damit formal die Anfangsbedingung des Anfangswertproblems (I,33) mit beliebigen $\vartheta_0(m)$ reproduziert wird

$$\vartheta(m,0)=\vartheta_0(m) ,$$

muß offensichtlich $pG_0(0)=\overline{\overline{\Pi}}=0$ sein. Wenn aber $G_0(\nu)$ für $\nu\to\infty$ gar keinen Sinn hat, was ja häufig der Fall ist, kann $G_0(\nu)$ mit $\overline{\overline{\Pi}}=0$ keine Lösung sein.

Der Ausweg, zu sagen, man interessiere sich für die (zeitliche) Entwicklung von $\vartheta(m,n)$ nach (I,33) nur für $1\leq\nu\leq\nu_0$, ν_0 endlich, ist tatsächlich nicht gangbar. Zwar bleibt es unbenommen für den Vorgang nur innerhalb der "Zeitspanne" $1\leq\nu\leq\nu_0$ Interesse zu haben, doch erläßt dieses begrenzte Interesse nicht auch schon die Angabe über das Entwicklungsgesetz für $\nu>\nu_0$. Was soll die Aussage "das Entwicklungsgesetz gelte nur für Zeiten $1\leq\nu\leq\nu_0$ bedeuten, wenn über die zukünftige Entwicklung für alle $\nu>\nu_0$ geschwiegen wird. Schweigen ist kein Ersatz für ein Entwicklungsgesetz, denn bei zeitlich andauernder Fortsetzung des Vorganges bedeutet der gedankliche Abbruch zu einer beliebigen Zeit einen Verlust an Information, der sich mathematisch darin ausdrückt, daß die zeitliche und spektrale Analyse des gedanklich abgebrochenen Vorganges anders ausfällt als bei physikalisch bedingter, gehöriger Fortsetzung des Vorganges. Die Analyse bezieht sich auf den Gesamtvorgang.

Teil 4)

Das allgemeine Anfangs- und Randwertproblem

Mit Rücksicht auf größtmögliche Allgemeinheit wurde der rechten Seite der Gleichung (I,14a) ein Quellglied $u(m,n)$ zugefügt. Es kann u.a. auch zur Lösung eines Anfangswertproblems mit Randbedingungen herangezogen werden. Dann wird selbstverständlich die Quellenverteilung $u(m,n)$ nicht unabhängig von der Lösung selbst sein, denn man wird von ihr verlangen, daß sie der Lösung die vorgegebenen, i.a. zeitabhängigen Randwerte aufzwingt, was die zusätzliche Lösung einer oder mehrerer "Integral"-Gleichungen zur Folge hat.

Es sei die Differenzengleichung

$$v(m,n+1)+\sum_{m'} p(m,m')\,v(m',n)+\sum_{m'} q(m,m')\,v(m',n-1)=u(m,n)$$

für den Gültigkeitsbereich $-\infty < m,m' \leq +\infty$, $n \geq 0$ und mit

$$v(m,0)=v_0(m)\,,\quad v(m,-1)=v_{-1}(m)$$

als Anfangswerte zu lösen.

Nach Abschnitt I, Gleichung (I,14) wird dieses Problem gelöst durch

$$v(m,n)=\sum_{m',n'} G(m,n|m',n')\Big\{u(m',n')\,\epsilon(n')+$$

$$+\,\delta_{n'+1,0}\Big[v_0(m')+\sum_{m''} p(m',m'')\,v_{-1}(m'')\Big]+$$

$$+\,\delta_{n'+2,0}\,v_{-1}(m')\Big\},$$

wenn

$$G(m,n|m',n') \equiv G_0(m,m'|\nu) \; , \; n-n'=\nu$$

die kausale Lösung (I,4a)

$$G_0(m,m'|\nu) = 0 \quad \text{für } \nu \leq 0$$

der Differenzengleichung (I,4)

$$G_0(m,m'|\nu+1) + \sum_{m''} p(m,m'') \, G_0(m'',m'|\nu) +$$

$$+ \sum_{m''} q(m,m'') \, G_0(m'',m'|\nu-1) = \delta_{\nu,0} \, \delta_{m,m'}$$

ist, was nur dann eintritt, wenn die Reihen (I,13)

$$\sum_{\nu} \epsilon(\nu) V^{-\nu} R^{\nu} \; , \; \sum_{\nu} \epsilon(\nu) V^{-\nu} S^{\nu}$$

konvergieren, was vorausgesetzt sei.

Sei p, q, u definiert durch

$$p(m,m') = \begin{cases} \bar{p}(m,m') & \text{für } m_a \leq m,m' \leq m_b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(I,41)}$$

$$q(m,m') = \begin{cases} \bar{q}(m,m') & \text{für } m_a \leq m,m' \leq m_b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(I,42)}$$

und

$$u(m,n) = \begin{cases} \bar{u}(m,n) + \bar{u}_a(n)\delta_{mm_a} + \bar{u}_b(n)\delta_{mm_b} & \text{für } m_a \leq m \leq m_b \, , \; 0 \leq n \leq \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(I,43)}$$

dann befriedigt

$$v(m,n) = \sum_{m'n'} G(mn|m'n') \Big\{ \bar{u}(m',n')\epsilon(n') +$$

$$+ \delta_{n'+1,0} \Big[v_0(m') + \sum_{m''} p(m',m'') v_{-1}(m'') \Big] +$$

$$+ \delta_{n'+2,0} \, v_{-1}(m') \Big\} +$$

$$+ \sum_{n'} G(m,n|m_a,n') \, \bar{u}_a(n') \epsilon(n') +$$

$$+ \sum_{n'} G(m,n|m_b,n') \, \bar{u}_b(n') \epsilon(n') \, .$$

für alle $\cancel{M}\ m$ aus $m_a < m < m_b$ die Differenzengleichung

$$\bar{v}(m,n+1) + \sum_{m'=m_a}^{m_b} \bar{p}(m,m')\,\bar{v}(m',n) + \sum_{m'=m_a}^{m_b} \bar{q}(m,m')\,\bar{v}(m',n-1) = \bar{u}(m,n)$$

$$n \geq 0$$

und nimmt die Anfangswerte

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}(m,-1) &\equiv \bar{v}_{-1}(m) = v_{-1}(m) \\ \bar{v}(m,0) &\equiv \bar{v}_0(m) = v_0(m) \end{aligned}\right\}, \quad m_a \leq m \leq m_b$$

stets an, die vorgebbaren Randwerte

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}(m_a,n) &= v(m_a,n) = \bar{v}_a(n) \\ \bar{v}(m_b,n) &= v(m_b,n) = \bar{v}_b(n) \end{aligned}\right\}, \quad n \geq 1$$

jedoch nur dann, falls $G_0(m,m'|\nu)$ die Eigenschaft hat, daß das Gleichungssystem

$$F_a(n) = \sum_{n'=0}^{n} G_0(m_a,m_a|n-n')\,\bar{u}_a(n') + \sum_{n'=0}^{n} G_0(m_a,m_b|n-n')\,\bar{u}_b(n')$$

$$(I,44)$$

$$F_b(n) = \sum_{n'=0}^{n} G_0(m_b,m_a|n-n')\,\bar{u}_a(n') + \sum_{n'=0}^{n} G_0(m_b,m_b|n-n')\,\bar{u}_b(n')$$

eindeutig nach den $\bar{u}_a(n), \bar{u}_b(n)$ auflösbar ist ("Integral"-Gleichung). Hierin ist

$$F_a = \Big[v_a(n) - \sum_{m',n'} G_0(m_a,m'|n-n')\,C(m',n')\Big]\,\epsilon(n-1)$$

$$F_b = \Big[v_b(n) - \sum_{m',n'} G_0(m_b,m'|n-n')\,C(m',n')\Big]\,\epsilon(n-1)$$

mit

$$C(m,n) = \bar{u}(m,n)\,\epsilon(n) + \delta_{n+1,0}\Big[v_0(m) + \sum_{m'} p(m,m')\,v_{-1}(m')\Big] + \delta_{n+2,0}\,v_{-1}(m).$$

Voraussetzungsgemäß konvergieren die Reihen (I,13). Nach (I,11) besitzt dann die Matrix G die Darstellung

$$G = \sum_{\bar{\nu}} \epsilon(\bar{\nu}) \Big[\sum_{\nu'} \epsilon(\nu') \epsilon(\bar{\nu}-\nu') \, S^{\nu'} R^{\bar{\nu}-\nu'} \Big] V^{-\bar{\nu}-1} .$$

Die Summe

$$\sum_{\nu'} \epsilon(\nu') \epsilon(\bar{\nu}-\nu') S^{\nu'} R^{\bar{\nu}-\nu'} \equiv \sum\nolimits^{(+)}_{\nu-1} , \quad \nu = n-n'$$

stellt das Matrixelement von G bezügl. der Indizes n, n' dar

$$(G)_{nn'} = \sum\nolimits^{(+)}_{n-n'-1} \equiv G_0(\nu) , \quad \nu = n-n' .$$

In einer Fourier-Diagonaldarstellung von G bezügl. der Verschiebungsmatrix V lautet damit das Diagonalelement

$$G_0(\psi) = \sum_{\nu} G_0(\nu) e^{i\nu\psi} , \quad |e^{i\psi}| = 1 , \quad -\pi \leq \psi \leq +\pi . \qquad \text{(I,45)}$$

Daher existiert die Fourierdarstellung von $G_0(\nu)$

$$G_0(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} G_0(\psi) \, e^{-i\nu\psi} d\psi .$$

Nach Ausweis von (I,45) ist $G_0(\psi + i\sigma)$ eine im Streifen $0 \leq \sigma \leq \infty$, $-\pi \leq \psi \leq +\pi$ reguläre, analytische Funktion von $\psi + i\sigma$ ($G_0(\nu) = 0$ für $\nu \leq 0$!). Unter der ausdrücklichen Voraussetzung der Beschränktheit der Randwerte $v_a(n)$, $v_b(n)$, $1 \leq n \leq \infty$, konvergieren die Reihen

$$\sum_{n \geq 1} v_a(n) e^{in(\psi+i\sigma)} , \quad \sum_{n \geq 1} v_b(n) e^{in(\psi+i\sigma)}$$

sicher für alle $\sigma > 0$ und stellen eben- regulär-analytische Funktionen von $\psi + i\sigma$ im Streifen $0 < \sigma \leq \infty, -\pi \leq \psi \leq \pi$ dar

$$\left.\begin{matrix} \vartheta_a(\psi+i\sigma) \\ \vartheta_b(\psi+i\sigma) \end{matrix}\right\} = \sum_{n\geq 1} \left.\begin{matrix} \vartheta_a(n) \\ \vartheta_b(n) \end{matrix}\right\} \cdot e^{in(\psi+i\sigma)} .$$

Daher sind auch

$$\left.\begin{matrix} F_a(\psi+i\sigma) \\ F_b(\psi+i\sigma) \end{matrix}\right\} = \sum_{n} \left.\begin{matrix} F_a(n) \\ F_b(n) \end{matrix}\right\} e^{in(\psi+i\sigma)}$$

regulär-analytische Funktionen von $\psi + i\sigma$ im zuletzt genannten Streifen. Die Summe

$$\sum_{n'=0}^{n} G_0(m,m'|n-n')\,\bar{u}(n') = \sum_{-\infty}^{+\infty} G_0(m,m'|n-n')\,\bar{u}(n')\,\epsilon(n')$$

besitzt die Eigenschaft einer Faltung aus G_0 mit $\bar{u}$. Die aus ihr durch Fouriertransformation hervorgehende Größe ist das Produkt aus den Fouriertransformierten von $G_0(n-n')$ und $\bar{u}(n')\,\epsilon(n')$.

Damit läßt das Gleichungssystem (I,44) eine Auflösung nach $\bar{u}$ zu, wenn für fast alle Wertepaare (ψ , $\sigma > 0$) die Determinante

$$D(\psi+i\sigma) = \begin{vmatrix} G_0(m_a m_a|\psi+i\sigma) \, , & G_0(m_a m_b|\psi+i\sigma) \\ G_0(m_b m_a|\psi+i\sigma) \, , & G_0(m_b, m_b|\psi+i\sigma) \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. ~~Das~~ Dann kann durch geeignete Wahl von $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ erreicht werden, daß $D(\psi+i\sigma) \neq 0$

ist für alle Wertepaare $(\psi, \sigma \geq \sigma_0)$, vorausgesetzt, daß alle im Regularitätsbereich liegenden Nullstellen von $D(\psi + i\sigma)$ im endlichen Teil des Streifens liegen.

Sei

$$\left.\begin{matrix} \bar{u}_a(\psi+i\sigma) \\ \bar{u}_b(\psi+i\sigma) \end{matrix}\right\} = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \left.\begin{matrix} \bar{u}_a(n') \\ \bar{u}_b(n') \end{matrix}\right\} \epsilon(n') e^{in'(\psi+i\sigma)}, \quad \sigma \geq \sigma_0$$

und

$$\left.\begin{matrix} \bar{u}_a(\psi+i\sigma) \\ \bar{u}_b(\psi+i\sigma) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{D(\psi+i\sigma)} \cdot \left\{ \begin{matrix} \begin{vmatrix} F_a(\psi+i\sigma), & G_0(m_a m_b|\psi+i\sigma) \\ F_b(\psi+i\sigma), & G_0(m_b m_b)\psi+i\sigma) \end{vmatrix} & (\equiv D_a) \\ \\ \begin{vmatrix} G_0(m_a m_a|\psi+i\sigma), & F_a(\psi+i\sigma) \\ G_0(m_b m_a|\psi+i\sigma), & F_b(\psi+i\sigma) \end{vmatrix} & (\equiv D_b) \end{matrix} \right.$$

die Auflösung des transformierten Gleichungssystems (I,44), dann ist

$$\left.\begin{matrix} \bar{u}_a(n) \\ \bar{u}_b(n) \end{matrix}\right\} \epsilon(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left.\begin{matrix} D_a(\psi+i\sigma) \\ D_b(\psi+i\sigma) \end{matrix}\right\} \cdot \frac{e^{in(\psi+i\sigma)}}{D(\psi+i\sigma)} \, d\psi, \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0$$

die eindeutige Auflösung des Gleichungssystems (I,44).

Die Lösbarkeit des betrachteten Rand- und Anfangswertproblems ist daher generell lediglich an die Existenz der kausalen Green'schen Funktion gebunden, die gesichert ist, wenn Matrizen

$$(P)_{mm',nn'} = \delta_{nn'}(p)_{mm'}$$

$$(Q)_{mm',nn'} = \delta_{nn'}(q)_{mm'}$$

definiert werden, die im Lösungsbereich $m_a \leq m, m' \leq m_b$ die vorgegebenen Werte annehmen und außerhalb gleich Null gesetzt werden und die so beschaffen sind, daß die Reihen (I,13) konvergieren. Somit fällt das Randwertproblem unter das bereits im Abschnitt (I,1) behandelte randbedingungsfreie Anfangswertproblem für den unendlich ausgedehnten Bereich $-\infty \leq m', m \leq +\infty$.

A n h a n g zu (I,1)

Im weiteren soll noch ein Punkt besprochen werden, der vielleicht zu Irrtümern über die Absicht des hier behandelten Problems führen könnte. Man könnte ja fragen, weshalb hier Lösungen der Matrixgleichung (I,9) betrachtet werden, nachdem doch die Differenzengleichung (I,1) mit Hilfe der Anfangsbedingung (I,2) für jedes ν aus $1 \leq \nu < \infty$ im sukzessiven Verfahren ohne Beschränkung der $p(m,m')$ und $q(m,m')$ eine eindeutige Lösung zu liefern scheint. Diese Frage mag zunächst berechtigt erscheinen, doch hat man zu bedenken, daß dieses sukzessive Verfahren nichts anderes als eine Transformation bestimmter Größen $\vartheta_a(s)$ in die entsprechenden $\vartheta_e(s)$ nach ν Schritten darstellt. s möge als Symbol für einen Satz von diskreten Variablen stehen. Dann wird die Transformation durch eine Martix G, deren Elemente G (s, s') seien, beschrieben werden können

$$\vartheta_e(s) = \sum_{s'} G(s,s')\,\vartheta_a(s') \qquad (A,I,1)$$

Das Problem ist nun, aus der Differenzengleichung (I,1) eine Matrix M mit den Elementen $M(s,s')$ zu gewinnen, aus der sich in eindeutiger Weise die Transformations-Matrix G ableiten läßt. G ist dann eine der Green'schen Funktion völlig entsprechende Größe. Kann man nun die Differenzengleichung (I,1) in eine Form bringen, so daß

$$\sum_{s'} M(s,s')\,\vartheta_e(s') = \vartheta_a(s) \qquad (A,I,2)$$

gilt? Wenn ja, dann muß

$$MG = E \qquad (E = \text{Einheits-Matrix}) \qquad (A,I,3)$$

sein. Das ist nun tatsächlich der Fall und dasjenige G ,

welches aus dem sukzessiven Lösungsverfahren nach der Vorschrift (I,1) ablesbar ist, befriedigt diese Matrixgleichung zwar, doch bestimmt Gleichung (I,1) umgekehrt G nicht vollständig, weil Gleichung (I,1) für negative ν nicht definiert ist. G nimmt aber für negative ν eindeutig definierte Werte, nämlich gleich Null, an. Damit stellt sich die Frage, wie die Vorschrift (I,1) erweitert werden muß, um eine vollständige Bestimmung von G zu garantieren. Diese Erweiterung wurde von (I,1) nach (I,4) vollzogen. Von der Differenzengleichung (I,4) kommt man zur Matrixgleichung (I,9), die genau eine Lösung hat, welche unter gewissen Bedingungen bezgl. P, Q die Kausalforderung (I,4a) erfüllt.
An Hand eines einfachen Beispiels soll dies noch näher erläutert werden. Betrachtet werde das Gleichungssystem

$$v(n+1) + p\,v(n) = u(n)\,, \quad p \text{ unabhängig von } n \qquad \text{(A,I,4)}$$

mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ und für alle n aus $0 \leq n \leq N$.
Ihre Lösung kann leicht angegeben werden:

$$v(n) = \sum_{n'=1}^{n-1} p^{n-n'-1}(-1)^{n-n'-1} \left\{ u(n')\epsilon(n') + \delta_{n'+1,0}\, v_0 \right\}$$

oder mit der Abkürzung $\epsilon(n-n'-1)p^{n-n'-1}(-1)^{n-n'-1} = G_N(n,n')$

$$v(n) = \sum_{n'=-1}^{\infty} G_N(n,n') \left\{ u(n')\epsilon(n') + \delta_{n'+1,0}\, v_0 \right\}.$$

Das Gleichungssystem (A,I,4) definiert eine quadratische Matrix von N+2 Spalten (man vergleiche mit (A,I,2))

$$\sum_{n''=0}^{N+1} (M_N)_{nn''}\, v(n'') = u(n)\epsilon(n) + \delta_{n+1,0}\, v(0) \qquad \text{(A,I,5)}$$
$$-1 \leq n \leq N$$

$$(M_N)_{nn''} = \delta_{n+1,n''} + p\,\delta_{nn''}$$
$$0 \leq n'' \leq N+1$$

oder ausgeschrieben

$$
\begin{array}{c|c}
 n \downarrow \; \xrightarrow{\quad} n'' & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & N+1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ N \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
p & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & p & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} v(0) \\ v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(N+1) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} v(0) \\ u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N) \end{pmatrix} .
\end{array}
$$

Daher gilt

$$\sum_{n''=0}^{N+1} (M_N)_{nn''} \sum_{n'=-1}^{\infty} G_N(n'',n') \left\{ u(n')\epsilon(n') + \delta_{n'+1,0} v_0 \right\} = u(n)\epsilon(n) + \delta_{n+1,0} v_0$$

und wegen der Willkür von $u(n)\epsilon(n) + \delta_{n+1,0} v_0$ auch die Beziehung

$$\sum_{n''=0}^{N+1} (M_N)_{nn''} G_N(n'',n') = \delta_{nn'}$$

jedenfalls für $-1 \leq n,n' \leq N$. Die Größen $\epsilon(n-n'-1)(-p)^{n-n'-1}$ ______ können ebenfalls als Elemente einer quadratischen Matrix von N+2 Spalten aufgefaßt werden:

$$(G_N)_{nn'} = G_N(n,n') = \epsilon(n-n'-1)\, p^{n-n'-1} (-1)^{n-n'-1} .$$

So kommt man zur Matrixgleichung

$$M_N \; G_N = E_N \quad (E_N = \text{quadratische Einheitsmatrix}) \quad (A,I,6)$$

oder ausgeschrieben

$$
(E_N) = \begin{pmatrix}
M_{-1,0} & M_{-1,1} & M_{-1,2} \cdots & M_{-1,N+1} \\
M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} \cdots & M_{0,N+1} \\
M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} \cdots & M_{1,N+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
M_{N,0} & M_{N,1} & M_{N,2} \cdots & M_{N,N+1}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
G_{0,-1} & G_{0,0} & G_{0,1} \cdots & G_{0,N} \\
G_{1,-1} & G_{1,0} & G_{1,1} \cdots & G_{1,N} \\
G_{2,-1} & G_{2,0} & G_{2,1} \cdots & G_{2,N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
G_{N+1,-1} & G_{N+1,0} & G_{N+1,1} \cdots & G_{N+1,N}
\end{pmatrix} .
$$

Da die Elemente (G_N) nn' nur von der Differenz n-n' abhängen, kann vereinfachend mittels $n''-n'=\nu'$ und $n-n'=\nu$ die Beziehung

$$\sum_{n''=0}^{N+1} \left\{ \delta_{n+1,n''} + p\,\delta_{nn''} \right\} G_N(n'',n') = \delta_{nn'} \,, \; -1 \leq n,n' \leq N$$

überführt werden in $\left(G_N(n'',n') \equiv G_{N,0}(n''-n') \right)$

$$\sum_{\nu'=-n'}^{N+1-n'} \left\{ \delta_{\nu+1,\nu'} + p\,\delta_{\nu\nu'} \right\} G_{N,0}(\nu') = \delta_{\nu,0} \qquad \text{(A,I,7)}$$

gültig für jedes n,n' aus $-1 \leq n,n' \leq N$, $n-n'=\nu$.

Für den speziellen Wert $n'=-1$ folgt daraus

$$\sum_{\nu'=1}^{N+2} \left\{ \delta_{\nu+1,\nu'} + p\,\delta_{\nu,\nu'} \right\} G_{N,0}(\nu') = \delta_{\nu,0} \,, \quad 0 \leq \nu \leq N+1$$

und wenn hierin ν durch $\nu+1$, ν' durch $\nu'+1$ ersetzt wird, auch

$$\sum_{\nu'=0}^{N+1} \left\{ \delta_{\nu+1,\nu'} + p\,\delta_{\nu,\nu'} \right\} G_{N,0}(\nu'+1) = \delta_{\nu+1,0} \,.$$

Ein Vergleich mit (A,I,5) zeigt, daß $G_{NO}(\nu+1) = v(\nu)$ eine Lösung des Gleichungssystems (A,I,4) mit der speziellen Anfangsbedingung $G_{N,0}(1) = v(0) = 1$ und der speziellen Quellverteilung $u(\nu) = 0$ ist. Also ist $G_{N,0}(\nu)$ für alle ν aus $1 \leq \nu \leq N+2$ Lösung der Gleichung (I,1) mit (I,2), wenn dort die Werte von q gleich Null gesetzt werden. Aber die Differenzengleichung (I,1) mit (I,2) bestimmt ihrerseits $G_{N,O}(\nu)$ nicht vollständig, da $G_{N,O}(\nu)$ auch für negative ν definiert ist.

Welche Gleichung bestimmt nun $G_{N,O}(\nu)$ für positive und negative ν - Werte eindeutig? Die Antwort auf diese

Frage ist durch (A,I,7) gegeben. Alle aus (A,I,7) folgenden, von einander verschiedenen Gleichungen sind, wie leicht zu sehen ist, durch die Fälle $n' = -1$ und $n' = N$ gegeben

$$\sum_{\nu'=1}^{N+2} \left\{ \delta_{\nu+1,\nu'} + p\,\delta_{\nu,\nu'} \right\} G_{N,0}(\nu') = \delta_{\nu,0} \;, \qquad 0 \leq \nu \leq N+1$$

$$\sum_{\nu'=-N}^{0} \left\{ \delta_{\nu+1,\nu'} + p\,\delta_{\nu,\nu'} \right\} G_{N,0}(\nu') = 0 \;, \qquad -(N+1) \leq \nu \leq -1 \,.$$

Hier darf in beiden Gleichungen der Laufindex ν unbeschadet auf den Bereich $-(N+1) \leq \nu \leq N+1$ ausgedehnt werden. Die Addition beider Gleichungen ergibt daher

$$\sum_{\nu'=-N}^{\nu'=N+2} \left\{ \delta_{\nu+1,\nu'} + p\,\delta_{\nu,\nu'} \right\} G_{N,0}(\nu') = \delta_{\nu,0} \qquad \text{(A,I,8)}$$
$$-(N+1) \leq \nu \leq N+1$$

eine Gleichung, die <u>inhaltlich</u> mit den beiden vorhergehenden identisch ist. Werden die Indizes ν, ν' durch $\nu+1,\ \nu'+1$ ersetzt und vergleicht

$$\sum_{\nu'=-N-1}^{\nu'=N+1} \left\{ \delta_{\nu+1,\nu'} + p\,\delta_{\nu,\nu'} \right\} G_{N,0}(\nu') = \delta_{\nu+1,0} \qquad \text{(A,I,8)}'$$

mit (A,I,5), so erkennt man die Erweiterung der dortigen Matrix von

$$(M_N)_{nn'} = \delta_{n+1,n'} + p\,\delta_{n,n'} \;, \qquad \begin{array}{l} -1 \leq n \leq N \\ 0 \leq n' \leq N+1 \end{array}$$

auf

$$(\overline{M}_N)_{\nu\nu'} = \delta_{\nu+1,\nu'} + p\,\delta_{\nu,\nu'} \;, \qquad \begin{array}{l} -1-(N+1) \leq \nu \leq N \\ -(N+1) \leq \nu' \leq N+1 \end{array}$$

in (A,I,8). Dies besagt: Diejenige Differenzengleichung, welche das aus dem sukzessiven Verfahren gewonnene G_N eindeutig bestimmt, geht aus der Differenzengleichung des Systems (A,I,5) dadurch hervor, daß der Gültigkeitsbereich der dortigen Matrix $(M_N)_{nn'}$ in geeigneter Weise auf negative Werte der Indizes ausgedehnt wird. Dies entspricht völlig dem Übergang von Gleichung (I,1) zu Gleichung (I,4).
Die einzige Lösung von (A,I,8) ist

$$G_{N,0}(\nu) = \epsilon(\nu-1)(-1)^{\nu-1}\,p^{\nu-1}\;, \quad -N \leq \nu \leq N+2$$

Sie hat kausalen Charakter entsprechend (I,4a).
Beim Übergang $N \to \infty$ verliert diese Lösung als Matrixelement einer Matrix

$$(G_N)_{nn'} \to (G)_{nn'} \equiv G(n,n') = G_0(n-n')$$

$$G_{N,0}(\nu) \to G_0(\nu)$$

unter Umständen aber ihren Sinn, wenn nicht $|p| < 1$ ist. Denn falls z.B. eine durch unitäre Transformation aus $G(n,n')$ hervorgehende Diagonaldarstellung existieren soll,

$$\sum_{n,n'} \frac{e^{in\psi}}{\sqrt{2\pi}}(G)_{nn'}\frac{e^{-in\psi}}{\sqrt{2\pi}} = \delta_p(\psi-\psi';2\pi)\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} G_0(\nu)\,e^{i\nu\psi} = \frac{\delta_p(\psi-\psi';2\pi)}{e^{-i\psi}+p}\,,$$

muß $|p| < 1$ sein!
Zunächst sieht man sofort, daß dann die Gleichung

$$(V+P)G = E\,, \quad (V)_{nn'} = \delta_{n+1,n'} \qquad \text{(A,I,9)}$$

$$(P)_{nn'} = p\,\delta_{nn'}\,, \quad |p| \neq 1$$

$$(E)_{nn'} = \delta_{nn'}$$

$$-\infty \leq n,n' \leq +\infty$$

eine eindeutige Lösung hat, denn seien $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ zwei Lösungen von (A,I,9), so genügt ihre Differenz $G^{(1)}-G^{(2)}=\bar{G}$ der homogenen Gleichung

$$(V+P)\bar{G}=0 \tag{A,I,10}$$

oder auch der für jeden Spaltenvektor $\bar{G}_{n'}$ gültigen Gleichung

$$V\bar{G}_{n'}=(-p)\bar{G}_{n'} \tag{A,I,10}$$

die nur dann eine nicht-triviale Lösung $\bar{G}_{n'}\neq 0$ hat, wenn (-p) Eigenwert der Eigenwertgleichung

$$V\phi=\lambda\phi \tag{A,I,11}$$

ist.

Die Matrix V wird in irgendeiner äquivalenten Darstellung im allgemeinen nicht-reelle Matrixelemente haben. Daher ist nicht $\phi^T\phi$ (T = transponierter Vektor) positiv definit, sondern $\phi^+\phi$ ($\phi^+=(\phi^T)^*$). Multiplikation von (A,I,11) mit $\phi^+(\lambda')$ ergibt

$$\phi^+(\lambda')V\phi(\lambda)=\lambda\phi^+(\lambda')\phi(\lambda)=\left(V^+\phi(\lambda')\right)^+\phi(\lambda).$$

Nun hat V die gegenüber unitäre Transformation invariante Eigenschaft

$$V\,V^T=1\,.$$

Daher gilt

$$V^+\phi(\lambda)=V^{-1}\phi(\lambda)=\lambda^{-1}\phi(\lambda),$$

also auch ($*$ bedeutet konjungiert-komplex)

$$\lambda\phi^+(\lambda')\phi(\lambda)=\left(\lambda'^{-1}\phi(\lambda')\right)^+\phi(\lambda)=(\lambda'^*)^{-1}\phi^+(\lambda')\phi(\lambda)$$

und schließlich

$$(\lambda\lambda'^{*}-1)\,\phi^{+}(\lambda')\,\phi(\lambda)=0 .$$

Daraus folgt

$$\phi^{+}(\lambda')\,\phi(\lambda)=0 \qquad \text{für } \lambda\neq\lambda'$$

und

$$\lambda\lambda'^{*}=1 \qquad \text{für } \lambda=\lambda' .$$

Demnach sind die Eigenwerte von V sämtlich vom Betrag Eins

$$\lambda=e^{-i\psi}, \quad \psi \text{ reell} .$$

Gleichung (A,I,10) besitzt daher, mit der ausdrücklichen Voraussetzung $|p|\neq 1$, nur die triviale Lösung

$$\bar{G}=G^{(1)}-G^{(2)}=0 .$$

Wie bekannt, hat Gleichung (A,I,9) die Lösung +

$$G=\sum_{\nu}\epsilon(\nu)\,V^{-(\nu+1)}(-1)^{\nu}P^{\nu} \qquad \text{wenn } |p|<1$$

$$G=\sum_{\nu}\epsilon(\nu)\,V^{-\nu}(-1)^{\nu+1}P^{-(\nu+1)} \qquad \text{wenn } |p|>1 .$$

Sie ist, wegen $\bar{G}=0$, dann auch die einzige. Fordert man die Kausalbedingung (I,4a), so folgt, daß

$$|p|<1$$

sein muß. Selbstverständlich konvergiert dann die Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} G_{0}(\nu)\,e^{i\nu\psi}=\frac{1}{e^{-i\psi}+p} .$$

+Es wird besonders darauf hingewiesen, daß diese Lösung für jedes $|p|\neq 1$ definiert ist und dennoch nicht den Charakter einer "~~idealen~~ instabilen Lösung" trägt.

Wenn p nicht wie in dem soeben besprochenen einfachen Beispiel eine Zahl, sondern eine Matrix

$$(p)_{mm'} = p(m,m')$$

darstellt, so besitzt die (A,I,9) entsprechende Gleichung zwar die gleiche äußere Form, doch kommt dann den dortigen Matrizen etwas veränderte Bedeutung zu (siehe (I,5) - (I,8))

$$(V+P)G = E \quad , (V)_{mn,m'n'} = \delta_{mm'}\delta_{n+1,n'} \qquad \text{(A,I,12)}$$

$$(P)_{mn,m'n'} = \delta_{nn'}\, p(m,m')$$

$$(E)_{mn,m'n'} = \delta_{mm'}\delta_{nn'} .$$

Ob die (A,I,10) entsprechende Gleichung

$$(V+P)\bar{G} = 0 \qquad \text{(A,I,13)}$$

eine nichttriviale Lösung $\bar{G} \neq 0$ besitzt, ist jedenfalls dann leicht zu beantworten, wenn die Matrix p durch eine unitäre Transformation

$$u^+ p u = p' \quad , \quad u^+ u = e ,$$

auf Diagonalform gebracht werden kann

$$(p')_{qq'} = \langle q|q'\rangle\, p(q)$$

$\langle q|q'\rangle$ ist das Element der Einheitsmatrix e in der neuen Basis. Die Eigenwerte Λ der Eigenwertgleichung

$$V^+ P\, \phi = \Lambda \phi$$

sind durch

$$\Lambda = e^{i\psi} p(q)$$

gegeben. Die Gleichung (A,I,13), oder die ihr äquivalente

$$(E + V^{+}P)\,\bar{G} = 0,$$

hat sicher dann keine nichttriviale Lösung, wenn keiner der Eigenwerte $e^{i\psi}\,p(q)$ den Wert Eins annimmt, wenn also

$$|p(q)| = 1 \qquad \text{(A,I,14)}$$

ist. Unter der ausdrücklichen Voraussetzung der Gültigkeit von (A,I,14) ist die Gleichung (A,I,12) eindeutig lösbar. Nun ist sicher

$$G^{(1)} = \sum_{\nu} \epsilon(\nu)\, V^{-(\nu+1)} (-1)^{\nu} P^{\nu}$$

formal eine Lösung von (A,I,12), aber auch

$$G^{(2)} = \sum_{\nu} \epsilon(\nu)\, V^{\nu} (-1)^{\nu+1} P^{-(\nu+1)}.$$

$G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ können aber nicht simultan, d.h. unter gleichen Bedingungen Lösungen von (A,I,12) sein, weil sonst $G^{(1)} - G^{(2)} = \bar{G} \neq 0$ ebenfalls Lösung von (A,I,12) wäre. $G^{(1)}$ ist also Lösung von (A,I,12), wenn $G^{(2)}$ keine ist und umgekehrt. Unter welchen Voraussetzungen sind also $G^{(1)}$ bezw. $G^{(2)}$ Lösungen? Die Antwort ist: $G^{(1)}$ bezw. $G^{(2)}$ sind Lösungen im Konvergenzbereich der angeschriebenen Reihen, und diese konvergieren sicher dann, wenn die Diagonaldarstellung der Reihen

$$G = \begin{cases} \sum_{\nu} \epsilon(\nu)\, e^{-i(\nu+1)\psi} (-p(q))^{\nu} & \text{1)} \\ \sum_{\nu} \epsilon(\nu)\, e^{i\nu\psi} (-p(q))^{-(\nu+1)} & \text{2)} \end{cases}$$

konvergent ist. Reihe 1) konvergiert, wenn für alle Eigenwerte

$$|p(q)| < 1$$

gilt, während Reihe 2) konvergiert, wenn für alle Eigenwerte

$$|p(q)| > 1$$

gilt.
Fordert man die Kausalbedingung (I,4a), so muß notwendig $|p(q)| < 1$ sein. Für den Fall, daß die Eigenwerte Werte annehmen, deren Beträge sowohl größer als auch kleiner als Eins sein können, wird auf Abschnitt I, Teil 3, verwiesen. Da dann die Kausalbedingung unerfüllbar ist, ist das Anfangswertproblem im allgemeinen nur bedingt lösbar, d.h. nur für jeweils eine ganz bestimmte Klasse von Funktionen als Anfangsbedingungen.

II. Abschnitt

Die Fourierdarstellung der Green'schen Funktionen von partiellen Differenzengleichungen erster Ordnung und das Sommerfeld'sche Ausstrahlungsprinzip.

Teil 1)

Transformation der Differenzengleichung erster Ordnung.

Die einfache Differenzengleichung

$$G_0(m,m'|\nu+1) + \sum_{m''} p(m,m'')\, G_0(m'',m'|\nu) = \delta_{mm'}\delta_{\nu,0}$$

bzw. in Matrixschreibweise hinsichtlich des Index-Paares m,m´

$$G_0(\nu+1) + p\, G_0(\nu) = \delta_{\nu,0} \qquad \text{(II,1,1)}$$

kann durch Transformation von G_o mit der Matrix r durch

$$G_0(\nu) = r^{\nu-1}\, G'(\nu) \qquad \text{(II,1,2)}$$

in die Differenzengleichung

$$r^{\nu} G'(\nu+1) + p\, r^{\nu-1} G'(\nu) = \delta_{\nu,0}$$

überführt werden. Existiert r^{-1}, so ist G_o auch über G´durch

$$G'(\nu+1) + p' G'(\nu) = \delta_{\nu,0}\,, \qquad p' = p r^{-1}$$
$$r p = p r$$

definiert.

Wenn die in der Differenzengleichung (II,1,1) vorkommende Matrix p nicht der Bedingung (I,13) genügt, hat (II,1,1) keine kausale Lösung.

Mittels der soeben durchgeführten Transformation kann aber stets ein G´gewonnen werden, das der Kausalbedingung genügt, wenn nur die Transformationsmatrix r so beschaffen ist, daß $p' = pr^{-1}$ die Konvergenzbedingung (II,13a) befriedigt. Das aber ist stets erreichbar, denn bei gegebenen

p und p′ kann r aus p$\acute{r}$ = p berechnet werden.
Wenn (II,1,1) einer partiellen Differentialgleichung so zugeordnet ist, daß (II,1,1) im Limes $(\tau, h) \to 0$ in die Differentialgleichung übergeht und befriedigt die Matrix p nicht die Kausalbedingung (I,13), so hat man eine Matrix r zu suchen, die folgenden Bedingungen gehorcht:

1) r^{-1} existiert
2) pr^{-1} = p′ befriedigt (I,13)
3) $r^{\nu} \to 1$ für $\tau \to 0$, $\nu\tau$ = endlich.
4) rp-pr = o .

Die vorletzte garantiert den Übergang von G′ in G für $\tau \to 0$, $\nu\tau$ = endlich.
Ein spezielles, einfaches Beispiel ist die Transformation mit

$$r = (1-\tau A)\,\frac{1+b\tau A}{1-a\tau A}\,,\quad a+b=1\,,\quad p=-1+\tau A.$$

Die Entwicklung nach τ bis einschließlich Glieder proportional τ^2 ergibt

$$r = 1 - b\tau^2 A^2$$

also

$$r^{\nu} = (1-b\tau^2A^2)^{\nu} \to e^{-b(\tau\nu)\cdot\tau A^2} \to 1$$

für $\tau \to 0$, $\nu\tau$ endlich.
Diese Transformation führt die Differenzengleichung

$$G_0(\nu+1) - (1-\tau A)G_0(\nu) = \delta_{\nu,0}$$

über in

$$G'(\nu+1) - \frac{1-a\tau A}{1+b\tau A}\,G'(\nu) = \delta_{\nu,0}\,.$$

Im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen kann die Transformation (II,1,2) noch auf andere Weise gedeutet werden. Die Bedingung 3) besagt: Durch die Transformation (II,1,2) wird die Differenzengleichung (II,1,1) so manipuliert, daß beim Übergang $\tau \rightarrow 0$ die ursprüngliche Ausgangs-Differentialgleichung zurückgewonnen wird. Die Transformation (II,1,2) mit den Bedingungen 1) - 4) wird unter Ausnützung des natürlichen Spielraumes bei der Übersetzung Differentialgleichung $\longrightarrow$ Differenzengleichung vollzogen. Dieser Übergang ist ja im allgemeinen nicht eindeutig.
Fallenlassen der Bedingung 3) unter Beibehaltung von 1) und 2) bedeutet demnach im Limes $\tau \rightarrow 0$ eine Transformation der Lösung der Differentialgleichung. Man hat sich dabei jedoch zu vergewissern, daß die so vorgenommene Transformation im Sinne einer Differentialgleichung zulässig ist.

Teil 2)

<u>Pro- und retrospektive Differenzengleichung, einfaches Beispiel (Kontinuitätsgleichungstyp).</u>

Nach den Ausführungen des ersten Abschnittes gewinnt man dann kausale Lösungen der Differenzengleichung (I,1), wenn die Propagations-Matrix P den Bedingungen (I,12) unterworfen ist. In der Praxis sind diese Matrizen selbst meist mehr oder weniger komplizierte Bildungen aus primären Matrizen. Man interessiert sich dann für die Bedingungen, die aus den Forderungen (I,13) hinsichtlich der primären Matrizen fließen. Sie können natürlich nur bei spezieller Vorgabe der Propagations-Matrizen in Abhängigkeit der primären Matrizen ermittelt werden. Wegen des Zusammenhangs der Differenzengleichungen mit den totalen oder partiellen

Differentialgleichungen wird hier als Beispiel eine Differenzengleichung vom Kontinuitätsgleichungstyp herangezogen:

Prospektiv

$$G_+(m,m_0|\nu+1)-G_+(m,m_0|\nu)+\beta_0\left[G_+(m+1,m_0|\nu)-G_+(m,m_0|\nu)\right]=\delta_{mm_0}\delta_{\nu,0}$$

retrospektiv

$$-G_-(m,m_0|\nu-1)+G_-(m,m_0|\nu)+\beta_0\left[G_-(m+1,m_0|\nu)-G_-(m,m_0|\nu)\right]=\delta_{mm_0}\delta_{\nu,1}$$

Es wird angenommen, daß eine erzeugende Funktion $G_\pm(z,\zeta)$, $z=e^{i\varphi}$, $\zeta=e^{i\psi}$ existiert, die im Intervall $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$ bezgl. φ und $-\pi \leq \psi \leq +\pi$ bezüglich ψ periodisch ist. Die Koeffizienten der Fourierdarstellung von $G_\pm(z,\zeta)$ seien die gesuchten $G_\pm(m,m_0|\nu)$:

$$G_\pm(m,m_0|\nu)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\pi}^{+\pi} G_\pm(z,\zeta)\,e^{-im\varphi-i\nu\psi}\,d\varphi\, d\psi .$$

Dann ist

$$G_\pm(z,\zeta)=\sum_{m,\nu} G_\pm(m,m_0|\nu)\,\zeta^\nu z^m .$$

Multipliziert man die betrachtete Differenzengleichung mit ζ^ν und z^m, summiert über ν und m, so findet man

$$G_\pm(z,\zeta)\left\{\zeta^{\mp 1}-\left[(1\pm\beta_0)\mp\frac{\beta_0}{z}\right]\right\}=\pm z^{m_0}\zeta^{\epsilon_\pm}$$

mit $\epsilon_+=0$, $\epsilon_-=1$.

Kausale Lösungen der Differenzengleichung müssen die Bedingung (I,4a) erfüllen:

$$G_\pm(m,m_0|\nu)=0 \text{ für } \nu\leq 0 .$$

Daher darf die Funktion von ζ

$$\frac{\pm z^{m_0}\zeta^{\epsilon_\pm}}{\zeta^{\mp 1} - \left[(1\pm\beta_0) \mp \frac{\beta_0}{z}\right]}$$

im Inneren des Einheitskreises $|\zeta| < 1$ keinen Pol haben:

$$|\zeta_\pm| = \left| \left[(1\pm\beta_0) \mp \frac{\beta_0}{z}\right]^{\mp 1} \right| \geq 1, \quad |z| = 1.$$

Denn dann ist tatsächlich

$$G_\pm(m,m_0|\nu) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{|z|=1}\oint\limits_{|\zeta|<1} \frac{\pm z^{m_0-m}\zeta^{\epsilon_\pm}}{\zeta^{\mp 1} - \left[(1\pm\beta_0)\mp\frac{\beta_0}{z}\right]} \frac{d\zeta\, dz}{\zeta^{\nu+1} z} = 0 \text{ für } \nu \leq 0$$

und für $\nu \geq 1$

$$G_\pm(m,m_0|\nu) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{m_0-m} \oint\limits_{|\zeta|<1} \frac{d\zeta}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1\pm\beta_0)\mp\frac{\beta_0}{z}\right]^{\pm(n+\epsilon_\pm)} \zeta^{n-\nu+1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{m_0-m} \left[(1\pm\beta_0)\mp\frac{\beta_0}{z}\right]^{\pm(\nu-1+\epsilon_\pm)}.$$

Aus der Bedingung

$$\left|(1\pm\beta_0)\mp\frac{\beta_0}{z}\right|^{\mp 1} \geq 1 \quad \text{für } z = e^{i\varphi}$$

folgt

$$1 \pm 4\beta_0(1\pm\beta_0)\sin^2\frac{\varphi}{2} \begin{array}{l} \leq 1 \text{ für (+) Zeichen} \\ \geq 1 \text{ für (−) Zeichen} \end{array}$$

also $-1 \leq \beta_0 \leq 0$ für die prospektive Differenzengleichung,

$1 \leq \beta_0 \leq \infty$ für die retrospektive Differenzengleichung.
Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\pm(\nu-1+\epsilon_\pm)}{n} (1-|\beta_0|)^n |\beta_0|^{\pm(\nu-1+\epsilon_\pm)-n} z^{\mp(\nu-1+\epsilon_\pm)+n+m_0-m}$$

konvergiert daher und stellt den Ausdruck

$$z^{m_0-m}\left[(1\pm\beta_0) \mp \frac{\beta_0}{z}\right]^{\pm(\nu-1+\epsilon_\pm)}$$

dar (für das obere Vorzeichen verschwinden die Glieder der Reihe mit dem Laufindex $n \geq \nu-1$ wegen $\binom{\nu-1}{n} = 0$).
Für $G_\pm(m,m_0|\nu)$, $\nu \geq 1$ erhält man damit:

$$G_\pm(m,m_0|\nu) = \binom{\pm(\nu-1)\pm\epsilon_\pm}{\pm(\nu-1)\pm\epsilon_\pm - m_0 + m} \cdot$$

$$\cdot\ (1-|\beta_0|)^{\pm(\nu-1+\epsilon_\pm)-m_0+m} |\beta_0|^{m_0-m} \epsilon(\pm(m_0-m)) \epsilon[\pm(\nu-1+\epsilon_\pm \mp (m_0-m))] \epsilon(\nu).$$

Daran ist zu erkennen, daß $G_\pm(m,m_0|\nu)$ als Funktion von $|\beta_0|$ ein Maximum durchläuft, das um so schärfer ausgeprägt ist, je größer die Zahlen ν und $|m-m_0|$ sind.
Es liegt bei

$$|\beta_0| = \frac{m_0-m}{\pm(\nu-1+\epsilon_\pm)}.$$

Darüberhinaus hat $G_\pm(m,m_0|\nu)$ die Eigenschaft

$$G_+(m,m_0|\nu) = 0 \quad \text{für} \quad m_0-m < 0$$

$$G_-(m,m_0|\nu) = 0 \quad \text{für} \quad m_0-m > 0.$$

Daher liegt das Maximum bei

$$|\beta_0| = \frac{|s|}{\nu-1+\epsilon_\pm} \simeq \frac{|s|}{\nu}$$

mit $s = m - m_0$.
Für große $|s|, \nu$ ergeben sich hiernach unter Verwendung der Stirling'schen Formel für die Fakultät folgende Ausdrücke für G_+ und G_- in der Umgebung $\eta = |\beta_0| - \frac{|s|}{\nu - 1 + \epsilon_\pm}$ des Maximums:

$$G_+(m, m_0 | \nu+1) =$$

$$= \epsilon(s)\epsilon(\nu)\epsilon(\nu-s) \frac{1}{\sqrt{2\pi s (1-\frac{s}{\nu})}} \frac{(1-\frac{s}{\nu}-\eta)^{\nu-s}}{(1-\frac{s}{\nu})^{\nu-s}} \cdot \frac{(\frac{s}{\nu}+\eta)^s}{(\frac{s}{\nu})^s} =$$

$$= \frac{\epsilon(s)\epsilon(\nu)\epsilon(\nu-s)}{\sqrt{2\pi s (1-\frac{s}{\nu})}} \exp\left\{(\nu-s)\ln\left(1-\frac{\eta}{1-\frac{s}{\nu}}\right) + s\ln\left(1+\frac{\eta}{(\frac{s}{\nu})}\right)\right\} \simeq$$

$$\simeq \frac{\epsilon(s)\epsilon(\nu)\epsilon(\nu-s)}{\sqrt{2\pi s (1-\frac{s}{\nu})}} e^{-\frac{(\nu|\beta_0| - s)^2}{2s(1-\frac{s}{\nu})}},$$

$$G_-(m, m_0 | \nu+1) =$$

$$= \epsilon(-s)\epsilon(|s|-1-\nu)\epsilon(\nu) \frac{1}{|\beta_0|\sqrt{2\pi\nu\left(1-\frac{\nu}{|s|-1}\right)}} \frac{\left(\eta+\frac{|s|}{\nu+1}-1\right)^{|s|-1-\nu}\left(\eta+\frac{|s|}{\nu+1}\right)^{-|s|-1}}{\left(1-\frac{\nu}{|s|-1}\right)^{|s|-1+\nu}\left(\frac{\nu}{|s|-1}\right)^{\nu}} \simeq$$

$$\simeq \epsilon(-s)\epsilon(|s|-1-\nu)\epsilon(\nu) \frac{\exp\left\{(|s|-\nu)\ln\left(1+\frac{\eta}{\frac{|s|}{\nu}-1}\right) - |s|\ln\left(1+\frac{\eta}{\frac{|s|}{\nu}}\right)\right\}}{\left(\frac{|\beta_0|\nu}{|s|}\right)\cdot\sqrt{2\pi|s|\left(\frac{|s|}{\nu}-1\right)}} \simeq$$

$$\simeq \frac{\epsilon(-s)\epsilon(|s|-1-\nu)\epsilon(\nu)}{\left(\frac{|\beta_0|\nu}{|s|}\right)\sqrt{2\pi|s|\left(\frac{|s|}{\nu}-1\right)}} e^{-\frac{(\nu|\beta_0|-|s|)^2}{2|s|\left(\frac{|s|}{\nu}-1\right)}}.$$

Für $|s|, \nu \to \infty$ gehen die Ausdrücke

$$e^{-s\frac{\left(\frac{\nu}{s}|\beta_0|-1\right)^2}{1-\frac{s}{\nu}}} \quad \text{bzw.} \quad e^{-|s|\frac{\left(\frac{\nu}{|s|}|\beta_0|-1\right)^2}{\frac{|s|}{\nu}-1}}$$

$$\frac{s}{\nu}<1,\ |\beta_0|<1 \qquad\qquad \frac{|s|}{\nu}>1,\ |\beta_0|>1$$

gegen Null, ausgenommen es ist gerade $\frac{\nu}{|s|}|\beta_0| \simeq 1$.
Mit genügender Genauigkeit gilt also für $G_\pm$

$$G_\pm(m,m_0|\nu+1)=\epsilon(\pm s)\,\epsilon\left[\pm(\nu-1+\epsilon_\pm-|s|)\right]\frac{e^{-\frac{(\nu|\beta_0|-|s|)^2}{2|s|\left|1-\frac{|s|}{\nu}\right|}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2|s|\left|1-\frac{|s|}{\nu}\right|}}\,,\quad s=m-m_0$$

Deutet man $x=mh,\ x_0=m_0h$ als Koordinaten eines eindimensionalen Ortsraumes und $t=\nu\tau$ als Zeit, so geht sinngemäß die betrachtete Differenzengleichung

$$\frac{1}{h}\left\{\frac{G_\pm(m,m_0|\nu+1)-G_\pm(m,m_0|\nu)}{\tau}\pm\frac{\beta_0 h}{\tau}\,\frac{G_\pm(m+1,m_0|\nu)-G_\pm(m,m_0|\nu)}{h}\right\}=\pm\frac{\delta_{mm_0}\,\delta_{\nu,\epsilon_\pm}}{h\cdot\tau}$$

im Limes $(h,\tau)\to 0$ über in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial G_0}{\partial t}(x,x_0|t)+v\frac{\partial G_0}{\partial x}(x,x_0|t)=\delta(x-x_0)\,\delta(t).$$

Dabei entsprechen sich (Symbol $\div$)

$$v \div \frac{h\beta_0}{\tau}$$

und

$$G_0(x,x_0|t) \mathrel{\dot{=}} \frac{1}{h}\begin{cases} G_+(m,m_0|\nu) \text{ für } \beta_0<0 & (\dot{=}\, v<0) \\ G_-(m,m_0|\nu) \text{ für } \beta_0>0 & (\dot{=}\, v>0) \end{cases}$$

im Detail also:

$$G_0(x,x_0|t) = \epsilon(t)\epsilon\left(\frac{x-x_0}{v}\right)\delta(|x-x_0|-|v|t) =$$

$$= \epsilon(t)\lim_{k\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi k}}e^{-\frac{(|x-x_0|-vt)^2}{k}}\cdot\begin{cases}\epsilon(x_0-x) \text{ f. } v<0 \\ \epsilon(x-x_0) \text{ f. } v>0\end{cases} \mathrel{\dot{=}} \qquad \text{(II,2,1)}$$

$$\mathrel{\dot{=}} \frac{\epsilon(t)}{\sqrt{\pi h a}}e^{-\frac{(|x-x_0|-|v|t)^2}{ha}}\cdot\begin{cases}\epsilon(x_0-x)\epsilon\left(t-\tau-\frac{\tau}{h}(x_0-x)\right) \text{ f. } \beta_0<0 \\ \epsilon(x_0-x)\epsilon\left((x-x_0)\frac{\tau}{h}-t\right) \text{ f. } \beta_0>0\end{cases}$$

mit $a = |x_0-x|\left|1-\frac{\tau}{h}\frac{|x_0-x|}{t}\right|$.

Die Entsprechung wäre unvollständig, hätte man nur die prospektive Differenzengleichung

$$G_+(m,m_0|\nu+1)-G_+(m,m_0|\nu)+\beta_0\left[G_+(m+1,m_0|\nu)-G_+(m,m_0|\nu)\right] = \delta_{mm_0}\delta_{\nu,0}$$

betrachtet.

Die retrospektive Differenzengleichung

$$G_-(m,m_0|\nu-1)-G_-(m,m_0|\nu)-\beta_0\left[G_-(m+1,m_0|\nu)-G_-(m,m_0|\nu)\right] = -\delta_{mm_0}\delta_{\nu,1}$$

ist durchaus legitim, denn sie geht mit $\nu \to \nu+1$ und Vorzeichenumkehr über in die implizite Differenzengleichung

$$G_-(m,m_0|\nu+1)-G_-(m,m_0|\nu)+\beta_0\left[G_-(m+1,m_0|\nu+1)-G_-(m,m_0|\nu+1)\right] = \delta_{mm_0}\delta_{\nu,0}.$$

$G_\pm(m,m_0|\nu)$ stellen somit die Grenzfälle der impliziten Differenzengleichung

$$\tilde{G}(m,m_0|\nu+1)-\tilde{G}(m,m_0|\nu)+a\beta_0\left[\tilde{G}(m+1,m_0|\nu)-\tilde{G}(m,m_0|\nu)\right]+$$
$$+b\beta_0\left[\tilde{G}(m+1,m_0|\nu+1)-\tilde{G}(m,m_0|\nu+1)\right]=$$
$$= \delta_{mm_0}\delta_{\nu,0}\ , \quad a+b=1$$

in dem Sinne dar, daß

$$G_+ = \tilde{G} \quad \text{für} \quad b \to 0 \, , \, a = 1$$

$$G_- = \tilde{G} \quad \text{für} \quad a \to 0 \, , \, b = 1$$

ist.
Allerdings erfüllt die Lösung $\tilde{G}$ dieser impliziten Differenzengleichung nicht die normierte Anfangsbedingung $\tilde{G}(m, m_0 | 1) = \delta_{m m_0}$. Denn für $\nu = 0$ ist ja $\tilde{G}(m, m_0 | \nu) = 0$ und aus der Gleichung folgt dann

$$\tilde{G}(m, m_0|1) + b\beta_0 [\tilde{G}(m+1, m_0|1) - \tilde{G}(m, m_0|1)] = \delta_{m m_0}$$

Also ist $\tilde{G}(m, m_0|1) \neq \delta_{m m_0}$. Dies liegt natürlich daran, dass schon $G_-(m, m_0|\nu)$ nicht die normierte Anfangsbedingung erfüllt. Aus der retrospektiven Differenzengleichung folgt für $\nu = 1$

$$G_-(m, m_0|1) + \beta_0 [G_-(m+1, m_0|1) - G_-(m, m_0|1)] = \delta_{m m_0}$$

und das ist für den retrospektiven Fall $b = 1$ identisch mit der obigen Gleichung. Man rechnet leicht nach, daß

$$G_-(m, m_0|1) = \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{\beta_0 - 1}{\beta_0}\right)^{m - m_0 - 1} \epsilon(m - m_0 - 1) \, , \, \beta_0 > 1$$

ist. $G_-(m, m_0|1)$ ist Null für $m < m_0 + 1$ und nur wenig von Null verschieden für $m > m_0 + 1$, falls β_0 nicht stark von Eins abweicht. Für $m = m_0 + 1$ ist $G_-(m, m_0|1) = 1$. $G_-(m, m_0|\nu)$ erfüllt also nur annähernd die normierte Anfangsbedingung.
Dieser Nachteil der impliziten Gleichung kann leicht durch Abänderung der Quellenverteilung behoben werden.
Damit aus der Gleichung

$$G_0(m, m_0|\nu+1) - G_0(m, m_0|\nu) + a\beta_0 [G_0(m+1, m_0|\nu) - G(m, m_0|\nu)]$$
$$+ b\beta_0 [G_0(m+1, m_0|\nu+1) - G(m, m_0|\nu+1)] =$$
$$= \delta_{\nu,0} \, Q_{m m_0}$$

die Anfangsbedingung

$$G_0(m,m_0|1) = \delta_{mm_0}$$

folgt, ermittelt man φ_{mm_0} durch Einsetzen der Anfangsbedingung in die Differenzengleichung für $\nu = 0$ unter Berücksichtigung von $G_0(m,m_0|0) = 0$:

$$G_0(m,m_0|1) + \beta_0 b\,[G_0(m+1,m_0|1) - G_0(m,m_0|1)] =$$

$$= \delta_{mm_0} + \beta_0 b\,[\delta_{m+1,m_0} - \delta_{m,m_0}] = Q_{mm_0}\,.$$

Die implizite Differenzengleichung

$$G_0(m,m_0|\nu+1) - G_0(m,m_0|\nu) + a\beta_0[G_0(m+1,m_0|\nu) - G_0(m,m_0|\nu)] + \qquad \text{(II,2,2)}$$

$$+\, b\beta_0[G_0(m+1,m_0|\nu+1) - G_0(m,m_0|\nu+1)] =$$

$$= [\delta_{mm_0} + b\beta_0(\delta_{m+1,m_0} - \delta_{mm_0})]\,\delta_{\nu,0}$$

fasst den pro- und retrospektiven Fall zusammen und ihre Lösung erfüllt die normierte Anfangsbedingung $G(m,m_0|1) = \delta_{mm_0}$.

Welche Bedingungen müssen nun die Größen a und β_0, $a+b=1$ erfüllen, damit $G_0(m,m_0|\nu) = 0$ für $\nu \leq 0$ wird?

Mittels der Methode der erzeugenden Funktion

$$G(z,\zeta) = \sum_{m,\nu} G_0(m,m_0|\nu)\, z^m \zeta^\nu$$

findet man aus der Differenzengleichung

$$G(z,\zeta) = \frac{z^{m_0}}{\zeta^{-1} + P}\,, \quad P \equiv \frac{1 - a\beta_0\left(\frac{1}{z} - 1\right)}{1 + b\beta_0\left(\frac{1}{z} - 1\right)}\,.$$

Damit $G_0(m,m_0|\nu)$ für $\nu \leq 0$ verschwindet, muß das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|<1} \frac{\zeta}{\zeta^{-1} + P}\,\frac{d\zeta}{\zeta^{\nu+1}}$$

für $\nu \leq 0$, $|z| = 1$ gleich Null sein, was dann eintritt, wenn für fast alle z

$$|P| = \left| \frac{1 + a\beta_0 - \frac{a\beta_0}{z}}{1 - b\beta_0 + \frac{b\beta_0}{z}} \right| < 1 \qquad \text{(II,2,3)}$$

ist. Für die Größen a, β_0 bedeutet dies

$$(b - a) + \frac{1}{\beta_0} > 0 \quad . \qquad \text{(II,2,4)}$$

findet man

$$-i\,(\omega + kv)\,G(k,\omega) = e^{ikx_0}.$$

Für reelle Werte von ω und k , das ist auf den Integrationswegen der Fall, ist die Division mit $\omega + vk$ nicht eindeutig. Sie ist als Superposition der beiden Grenzwerte $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\omega + vk + i\varepsilon)^{-1}$ und $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\omega + vk - i\varepsilon)^{-1}$ zu verstehen:

$$G(k,\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \alpha \frac{i e^{ikx_0}}{\omega + kv + i\varepsilon} + \beta \frac{i e^{ikx_0}}{\omega + kv - i\varepsilon} \right\}, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Die spezielle, für $t<0$ verschwindende Lösung erhält man für $\varepsilon > 0$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$. Denn dann läßt sich der Integrationsweg im Integral

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + kv + i\varepsilon}\, d\omega$$

in das Unendliche der oberen $\Omega = \omega + i\gamma$ - Halbebene hinaufziehen. Dort verschwindet der Integrand wie $e^{-\gamma |t|}$, $\gamma \to \infty$.

Die der behandelten Differentialgleichung entsprechende Differenzengleichung liefert nun diesen imaginären Anteil $i\varepsilon$ von selbst. Die Kausalbedingung (I,4a) erzwingt ε positiv zu sein. Das ist für das Verschwinden von G_0 für $t < 0$ eine notwendige Bedingung.

Den Grenzübergang von Differenzengleichung zur Differentialgleichung erkauft man mit dem Verlust von ε !

Dies zu zeigen ist die dem folgenden Teil dieses Abschnittes zu Grunde liegende Absicht.

Die Fourierdarstellung der Stufenfunktion $G_S(x,x_0|t)$, die im Intervall $mh < x \leq (m+1)h$, $\nu\tau < t \leq (\nu+1)\tau$ die Werte $h^{-1}\,G_0(m,m_0|\nu)$ (II,2,2) annimmt lautet:

$$G_S(x,x_0|t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, dk\, \frac{e^{ikh}-1}{ikh}\,\frac{e^{i\omega\tau}-1}{i\omega\tau}\,\frac{\tau e^{-ik(x-x_0)-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}+P(kh)} .$$

Hierin ist

$$P(kh) = -\frac{1+a\beta_0(1-e^{-ikh})}{1-b\beta_0(1-e^{-ikh})}\ , \quad e^{-i\Omega_0\tau}+P(kh)=0 \ \text{ Definition von } \Omega_0 .$$

Die Pole des Integranden liegen bei $\Omega = \omega + i\gamma = \Omega_0 + \frac{2\pi n}{\tau}$.
Wenn Ω_0 einen negativen imaginären Anteil hat, ist $|e^{-i\Omega_0\tau}| < 1$. $G_s(x,x_0|t)$ ist dann gleich Null für $t<0$. In der vorliegenden Form kann der Grenzübergang $(h,\tau) \longrightarrow 0$ nicht ohne weiteres vollzogen werden, da die Pol-Serie an die Periodizität des Faktors $e^{-i\omega\tau}$ gebunden ist. Durch Aufspalten des Integrations-weges in geeignete Teilstücke kann man sich davon frei machen:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau}-1}{i\omega\tau}\cdot\frac{\tau e^{-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}+P}\,d\omega = \frac{1}{2\pi\tau}\int\limits_0^{\tau} d\tau' \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\ \int\limits_{\frac{2\pi n-\pi}{\tau}}^{\frac{2\pi n+\pi}{\tau}} \frac{\tau e^{-i\omega(t-\tau')}}{e^{-i\omega\tau}+P}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi\tau}\int\limits_0^{\tau} d\tau' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{2\pi n}{\tau}(t-\tau')} \cdot \int\limits_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau} \frac{\tau e^{-i\omega(t-\tau')}}{e^{-i\omega\tau}+P}\,d\omega .$$

Die Summe stellt die in t periodische Dirac'sche δ_p - Funktion dar

$$\delta_p(t;\tau) \equiv \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n \frac{t}{\tau}} .$$

Für sie gilt

$$\int_0^\tau d\tau' \delta_p(t-\tau';\tau) f(t-\tau') = \begin{cases} f(\nu\tau) & \text{für } \nu\tau \leq t < (\nu+1)\tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Ganz entsprechend zerlegt man den Integrationsweg längs $-\infty \leq k \leq +\infty$ in Teilstücke der Länge $2\pi/h$.
Unter Beachtung der Periodizität von $P(kh)$ erhält man schließlich

$$G_s(x,x_0|t) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{1}{h}\int_0^h d\tau' dh' \, \delta_p(t-\tau';\tau)\, \delta_p(x-x_0-h';h) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} dk \int_{-\frac{\pi}{\tau}}^{+\frac{\pi}{\tau}} d\omega \cdot \frac{\tau e^{-ik(x-x_0-h')-i(t-\tau')}}{e^{-i\omega\tau} + P(kh)} .$$

Die Integraldarstellung

$$G_F(x,x_0|t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} dk \int_{-\frac{\pi}{\tau}}^{+\frac{\pi}{\tau}} d\omega \cdot \frac{\tau e^{-ik(x-x_0)-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau} + P(kh)}$$

definiert nun für beliebige $(x-x_0)$, t - Werte und $|P|<1$ eine Funktion $G_F(x,x_0|t)$ die an den Stellen $x=mh$, $x_0=m_0h$, $t=\nu\tau$ die Werte der Stufenfunktion $G_S(x,x_0|t)=h^{-1}G_0(m,m_0|\nu)$ annimmt, wobei $G_0(m,m_0|\nu)$ die Lösung der Differenzengleichung (II,2,2) ist, die für $\nu\leq 0$ verschwindet:

$$G_s=\frac{1}{\tau h}\int_0^\tau\int_0^h d\tau' dh'\,\delta_p(t-\tau';\tau)\,\delta_p(x-x_0-h';h)\,G_F(x-h',x_0|t-\tau').$$

G_F genügt der Differenzengleichung (II,3,2)

$$G_F(x,x_0|t+\tau)-G_F(x,x_0|t)+a\beta_0[G_F(x+h,x_0|t)-G_F(x,x_0|t)]+$$
$$+b\beta_0[G_F(x+h,x_0|t+\tau)-G_F(x,x_0|t+\tau)]=$$
$$=\frac{1}{h}\left\{\frac{\sin(x-x_0)\frac{\pi}{h}}{(x-x_0)\frac{\pi}{h}}+b\beta_0\left[\frac{\sin(x-x_0+h)\frac{\pi}{h}}{(x-x_0+h)\frac{\pi}{h}}-\frac{\sin(x-x_0)\frac{\pi}{h}}{(x-x_0)\frac{\pi}{h}}\right]\right\}\frac{\sin t\frac{\pi}{\tau}}{t\frac{\pi}{\tau}}.$$

Sie geht mit $x-x_0=(m-m_0)h$, $t=\nu\tau$ in die Differenzengleichung für $G_0(m,m_0|\nu)$ (II,2,2) über.
In der Integraldarstellung der Funktion G_F kann nun der Nenner $e^{-i\omega\tau}+P(kh)$ bei festem Verhältnis $\eta=h/\tau=v/\beta_0$ nach Potenzen von τ entwickelt werden.
Das ergibt bei kleinem τ unter Mitnahme aller Terme einschließlich der von zweiter Ordnung in τ +)

$$e^{-i\omega\tau}+P\left(\frac{vk}{\beta_0}\tau\right)=-i\omega\tau+\frac{(i\omega\tau)^2}{2}-ivk\tau+\frac{1}{2}(vk\tau)^2\left(\frac{1}{\beta_0}-2b\right)+\dots$$

Die für die Integration wesentliche Nullstelle dieses

+) Daß die Beschränkung der Entwicklung nach τ auf Glieder einschließlich zweiter Ordnung statthaft ist, wird im letzten Abschnitt (II,A) bewiesen.

Polynoms in ω liegt in der Umgebung von $\omega = -vk$.
Deshalb darf in der zweiten Ordnung der Term $(i\omega\tau)^2$ durch $(ivk\tau)^2$ ersetzt werden:

$$e^{-i\omega\tau} + P\left(\frac{vk}{\beta_0}\tau\right) = -i\tau\left(\omega + kv + i\varepsilon(\tau)\right), \quad \varepsilon(\tau) = \frac{\tau}{2}(vk)^2\left[b - a - \frac{1}{\beta_0}\right]$$

Dieser Ausdruck ist genau dann positiv, wenn die Ungleichung

$$b - a - \frac{1}{\beta_0} > 0$$

[siehe hierzu (II,2,3) und (II,2,4)] die aus der Kausalbedingung $|P| < 1$ für reelles k folgt, erfüllt ist. Der Pol liegt dann bei $\Omega = \omega + i\gamma = -vk - i\varepsilon$, also in der unteren Ω - Halbebene.
Im Limes [+)] $\tau \to 0$ erhält man

$$\lim_{\tau \to 0} G_F = \lim_{\tau \to 0} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} \int_{-\frac{\pi}{\tau}}^{+\frac{\pi}{\tau}} \frac{\tau e^{-i\omega t - ik(x-x_0)}}{e^{-i\omega\tau} + P} \, d\omega dk =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \int_{-\pi/\tau\eta}^{+\pi/\tau\eta} \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau} \frac{i e^{-i\omega t - ik(x-x_0)}}{\omega + vk + i\varepsilon(\tau) + \cdots} \, d\omega dk =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i e^{-i\omega t - ik(x-x_0)}}{\omega + vk + i\varepsilon} \, d\omega dk$$

Im Limes $\tau \to 0$ geht G_F in die Lösung der Differentialgleichung über $(h/\tau = v/\beta_0 = \text{fest})$

$$\lim_{\tau \to 0} G_F(x, x_0 | t) = G_0(x, x_0 | t)$$

+) Daß der Grenzprozeß in der hier vorgenommenen Weise korrekt ist, wird ebenfalls im Abschnitt (II,7) bewiesen.

Unter Hinweis auf den vorhergehenden Abschnitt (II,2,1) stellt man folgende Tatsachen fest:

Im Fall der prospektiven Differenzengleichung (II,3,2) - er ist durch $b = 0$, $a = 1$ gekennzeichnet - fordert die Kausalbedingung $|P| < 1$ die Beschränkung

$$|\beta_0| < 1 \ \underline{\text{und}} \ \operatorname{sign} \beta_0 = \operatorname{sign} v = -1 .$$

Nur dann ist

$$\mathcal{E}(\tau) = \frac{\tau}{2}(vk)^2 \left[b - a - \frac{1}{\beta_0} \right] = \frac{\tau}{2}(vk)^2 \left(\frac{1}{|\beta_0|} - 1 \right) > 0 .$$

Die Lösung G_F^+ der prospektiven Differenzengleichung geht im Limes $\tau \to 0$, $h/\tau = v/\beta_0 = \eta$ = fest, in die Lösung der Differentialgleichung (II,3,1) über, allerdings nur für den Parameterbereich $v/\beta_0 = \eta =$ fest, also wegen $-\beta_0 < 1$ für $-\eta < v < 0$.

Im Fall der retrospektiven Differenzengleichung (II,3,2) - er ist durch $b = 1$, $a = 0$ gekennzeichnet - fordert die Kausalbedingung $|P| < 1$ die Beschränkung

$$|\beta_0| > 1 \ \underline{\text{und}} \ \operatorname{sign} \beta_0 = \operatorname{sign} v = +1 .$$

Nur dann ist

$$\mathcal{E}(\tau) = \frac{\tau}{2}(vk)^2 \left[b - a - \frac{1}{\beta_0} \right] = \frac{\tau}{2}(vk)^2 \left(1 - \frac{1}{\beta_0} \right) > 0 .$$

Die Lösung $G_{\underline{F}}$ der retrospektiven Differenzengleichung geht im Limes $\tau \to 0$, $h/\tau = v/\beta_0 = \eta =$ fest, in die Lösung der Differentialgleichung (II,3,1) über, allerdings nur für den Parameterbereich $v/\beta_0 = \eta =$ fest, also wegen $\beta_0 > 1$ für $\eta < v < \infty$.

Das bedeutet: Die pro- bezw. retrospektive Differenzengleichung liefert unter Berücksichtigung der Kausalbedingung $|P|<1$ im Limes $\tau \to 0$, $\tau/h = \vartheta/\beta_0 = \eta =$ fest, jeweils nur einen Teil der kausalen Lösung der Differentialgleichung (II,3,1) hinsichtlich des dort zulässigen Parameterbereiches bezüglich ϑ . Erst die Gesamtheit beider Differenzengleichungstypen liefert hinsichtlich des Parameterbereiches von ϑ eine vollständigere Lösung. Daraus folgt: Es ist im allgemeinen durchaus unzulässig, kausale Lösungen retrospektiver Differenzengleichungen zu ignorieren.

Die mit a und b gewichtete Zusammenfassung beider Differenzengleichungstypen zu einer sogenannten "impliziten" Differenzengleichung ergibt erwartungsgemäß von selbst eine Vervollständigung des zulässigen Parameterbereiches von β_0 auf $b-a > 1/\beta_0$.
Bei vorgegebenen $b > a$, $a+b = 1$ und festzuhaltendem Verhältnis $h/\tau = \eta = \vartheta/\beta_0$ bedeutet das immerhin noch eine Beschränkung ϑvon ϑ auf $-\infty < \vartheta < \sigma$ und $\vartheta > \eta/(2b-1)$.
Dieser Mangel kann behoben werden, wenn auch für die Differenzenbildung hinsichtlich der Ortskoordinaten eine gewichtete Zusammenfassung von pro- und retrospektiven Differenzen vorgenommen wird. Für die Differenzengleichung

$$
\begin{aligned}
& G_F(x,x_0|t+\tau) - G_F(x,x_0|t) + \\
& +2a\beta_0\Big\{a'\Big[G_F(x+\tfrac{h}{2},x_0|t) - G_F(x,x_0|t)\Big] + \\
& \qquad + b'\Big[G_F(x,x_0|t) - G_F(x-\tfrac{h}{2},x_0|t)\Big]\Big\} + \qquad\qquad (\mathrm{II},3,3) \\
& +2b\beta_0\Big\{a'\Big[G_F(x+\tfrac{h}{2},x_0|t+\tau) - G_F(x,x_0|t+\tau)\Big] + \\
& \qquad + b'\Big[G_F(x,x_0|t+\tau) - G_F(x-\tfrac{h}{2},x_0|t+\tau)\Big]\Big\} = \\
& = -\frac{1}{h}\Big\{\frac{\sin(x-x_0)\frac{\pi}{h}}{(x-x_0)\frac{\pi}{h}} + 2\beta_0 b\Big[a'\Big(\frac{\sin(x-x_0+\frac{h}{2})\frac{\pi}{h}}{(x-x_0+\frac{h}{2})\frac{\pi}{h}} - \frac{\sin(x-x_0)\frac{\pi}{h}}{(x-x_0)\frac{\pi}{h}}\Big) + \\
& \qquad + b'\Big(\frac{\sin(x-x_0)\frac{\pi}{h}}{(x-x_0)\frac{\pi}{h}} - \frac{\sin(x-x_0-\frac{h}{2})\frac{\pi}{h}}{(x-x_0-\frac{h}{2})\frac{\pi}{h}}\Big)\Big\} \cdot \frac{\sin\pi\frac{t}{\tau}}{\pi\frac{t}{\tau}},
\end{aligned}
$$

$$a' + b' = 1,$$

oder in Operatorschreibweise ($\bar{\nabla}_\tau, \bar{\nabla}_h$ =Zeit,-Ortsverschiebungsoperatoren, $a' = b' = \frac{1}{2}$,

$$\left(\bar{\nabla}_\tau - \frac{1 - a\beta_0(\bar{\nabla}_{\frac{h}{2}} - \bar{\nabla}_{-\frac{h}{2}})}{1 + b\beta_0(\bar{\nabla}_{\frac{h}{2}} - \bar{\nabla}_{-\frac{h}{2}})}\right) G_F = \frac{1}{h}\,\frac{\sin t\frac{\pi}{\tau}}{t\frac{\pi}{\tau}} \cdot \frac{\sin (x-x_0)\frac{\pi}{h}}{(x-x_0)\frac{\pi}{h}} \qquad \text{(II,3,3')}$$

fordert die Kausalbedingung
die Erfüllung von

$$|P(kh)| < 1, \quad P(kh) = -\frac{1 + 2ia\beta_0 \sin\frac{kh}{2}}{1 - 2ib\beta_0 \sin\frac{kh}{2}}$$

mit $\beta_0 = \frac{\vartheta\tau}{h}$. Wenn $b - a > 0$ gewählt wird, ist diese Forderung für jede beliebige Wahl von $(h, \tau) > 0$ und damit ohne jede Beschränkung des Parameterbereiches von ϑ erfüllbar. Die Einführung von pro- und retrospektiven Differenzen in partielle Differenzengleichung als Bestimmungsgleichungen für eine, der Lösung einer partiellen Differentialgleichung zugeordneten approximativen Lösung, bedeutet nicht etwa einen formalen mathematischen Trick oder eine bequeme Methode um sich von Maschenweiten (etwa h, τ) frei zu machen oder ihren Begrenzungsbereich zu erweitern, sondern ist im allgemeinen eine mathematische Notwendigkeit, wenn die durch die Parameterbereiche gegebenen Lösungsmanigfaltigkeiten von Differential- und Differenzengleichung übereinstimmen sollen.

Die Kausalbedingung (I,13 bezw. 13a) hat im Prinzip mit einer Beschränkung der Maschenweiten und der damit Hand in Hand gehenden Beschränkung der Parameterbereiche rein gar nichts zu tun. Die Forderung, daß die Lösung einer, einem physikalischen Problem zugeordneten Differenzengleichung physikalisch vernünftig, also wenigstens dem Kausalprinzip unterworfen sein soll, beschränkt möglicherweise bei unzweckmäßiger Auswahl des angewandten Differenzen-Typs (z.B. pro- oder retrospektiv oder implizit usw.) die Maschenweiten und damit die Parameterbereiche, doch ist dies keine aus dem Kausalprinzip ableitbare Notwendigkeit. Notwendig hingegen ist es, die einer Differentialgleichung zugeordnete Differenzengleichung so aufzustellen, daß die durch die Parameterbereiche gegebene Lösungsmanigfaltigkeit bei Differential- und Differenzengleichung auch bei gehöriger Berücksichtigung der Kausalbedingung (I, 13 bezw. 13 a) übereinstimmen. Wenn dies gewährleistet ist, kann es auch keine Beschränkung der Maschenweiten geben, denn diese sind stets faktoriell mit Parametern verknüpft. Dann gibt es auch keinen Grund, das Verhältnis von Maschenweiten z.B. h/τ oder h^2/τ beim Grenzübergang $h, \tau \to 0$ festzuhalten. Die Grenzübergänge $h \to 0$ oder $\tau \to 0$ können dann getrennt für sich durchgeführt werden.

Wenn eine Differenzengleichung so aufgestellt ist, daß die aus physikalischen Gründen erforderlichen oder zulässigen Parameterbereichen durch die Kausalbedingung eingeschränkt wird, so ist diese Differenzengleichung nur bedingt brauchbar. Man hat dann eine andere zu suchen, die den Parameterbereichen entsprechend Rechnung trägt.

Eine Differenzengleichung wird hier vollständig genannt, wenn die Kausalbedingung keine Forderungen an die Maschenweiten stellt. Z.B. ist die Differenzengleichung (II,3,3) in diesem Sinne vollständig. Jede Differenzengleichung, deren Kausalbedingung auf

$$\left| \frac{1 - i a \tau A}{1 + i b \tau A} \right| < 1 \qquad \text{für fast alle reellen } k, \quad A \text{ Fktn. v. } k.$$

führt, ist vollständig, wenn $\mathrm{Jm}\{A\} \leq 0$ und $b-a>0,\ a+b=1$ ist. Über die Bedeutung der Forderung $\mathrm{Jm}\{A\}$ (= Imaginärteil) siehe Abschnitt (II,5). Von ihr abgesehen verlangt die Kausalbedingung lediglich $b-a=\varepsilon'>0$ oder wegen a + b = 1, auch $a=\frac{1}{2}-\varepsilon',\ b=\frac{1}{2}-\varepsilon'$. Diese Forderungen entsprechen völlig denjenigen, die mindestens gestellt werden müssen, damit

$$G_0(x,x_0|t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\,e^{-i\omega t-ik(x-x_0)}}{\omega-A_0+i\varepsilon}\,dk\,d\omega\,,$$

$A_0 =$ Funktion von k allein

für $t>0$ existiert und für $t<0$ verschwindet:

$$\varepsilon>0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Jm}\{A_0\}\leq 0\,.$$

Teil 4)

Der Zusammenhang der Kausalbedingung mit dem Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzip, dargetan am einfachen Beispiel (Diffusionsgleichungstyp).

Ein weiteres Beispiel für eine vollständige Differenzengleichung ist die aus der einfachen Diffusionsgleichung gewonnene implizite Differenzengleichung

$$\frac{1}{\tau}\left[G_s(x,x_0|t+\tau)-G_s(x,x_0|t)\right]-$$
$$-i\frac{\sigma}{h^2}a\left[G_s(x+h,x_0|t)-2G_s(x,x_0|t)+G_s(x-h,x_0|t)\right]-$$
$$-i\frac{\sigma}{h^2}b\left[G_s(x+h,x_0|t+\tau)-2G_s(x,x_0|t+\tau)+G_s(x-h,x_0|t+\tau)\right]=$$
$$=\frac{1}{\tau}\left[\epsilon(t)-\epsilon(t-\tau)\right]\cdot\Big\{\frac{1}{h}\left[\epsilon(x-x_0)-\epsilon(x-x_0-h)\right]-$$
$$-i\frac{\sigma}{h^2}b\Big(\frac{1}{h}\left[\epsilon(x-x_0+h)-\epsilon(x-x_0)\right]-\frac{2}{h}\left[\epsilon(x-x_0)-\epsilon(x-x_0-h)\right]+$$
$$+\frac{1}{h}\left[\epsilon(x-x_0-h)-\epsilon(x-x_0-2h)\right]\Big)\Big\}\,. \qquad \text{(II,4,1)}$$

Die Kausalbedingung (I,13) fordert

$$|P|=\left|\frac{1-i\tau a e^{i\rho}H(k)}{1+i\tau b e^{i\rho}H(k)}\right|<1 \quad \text{für fast alle } k \qquad \text{(II,4,2)}$$

mit $\sigma=|\sigma|e^{i\rho}$ und

$$H(k)=|\sigma|\left(\frac{\sin\frac{kh}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2= \text{ reell und positiv für } k \text{ reell.}$$

Sie ist erfüllt, wenn gilt

$$\operatorname{Im}\left\{\tau e^{i\rho} H\right\} < \frac{1}{2}(b-a)\left|\tau e^{i\rho} H\right|^2,$$

oder als Folge davon

$$\sin\rho < \frac{1}{2}\tau(b-a)H.$$

Ist ρ = o oder π, was beispielsweise für die Schrödingergleichung zutrifft, so hat die prospektive Differenzengleichung mit a = $\underline{1}$, b = o für alle Werte (τ, h) $>$ o keine kausale Lösung, denn die Ungleichung

$$0 < -\frac{1}{2}\tau H$$

ist nicht erfüllbar.

Dies liegt daran, daß die Kausalbedingung $G_3(x, x_0 | t) = 0$ für $t < 0$ eng mit dem Sommerfeld'schen Ausstrahungsprinzip verknüpft ist. Hier ist wieder nicht die Begrenzung der Maschenweiten maßgebend, sondern die Erfüllung des Ausstrahlungsprinzips. Es besagt hier im Zusammenhang mit der partiellen Differenzengleichung (II,4,1): Die kausale Lösung von (II,4,1) ist aus nur auslaufenden Wellen komponiert. Dies sind monochromatische Wellen, deren Stellen fester Phase von einem im Endlichen liegenden Quellpunkt weg in Richtung zum Unendlichen hin laufen:

$$e^{\pm i(\alpha(\omega)|x-x_0| - |\omega| t)}, \quad t>0, \alpha>0.$$

Mit zunehmender Zeit vergrößert sich der Abstand $|x - x_0|$ eine Stelle fester Phase $\varphi(x,t)$ vom Quellpunkt x_0

$$|x - x_0| = \frac{|\omega|}{\alpha(\omega)} t + \frac{\varphi}{\alpha(\omega)} .$$

Die Komponierbarkeit der Lösung G_s aus nur auslaufenden Wellen

$$G_s = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_+(\omega)\, e^{i(K_+(\omega)\bar{x} - \omega t)}\, d\omega & \text{für } \bar{x} = x_0 - x > 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_-(\omega)\, e^{i(K_-(\omega)\bar{x} - \omega t)}\, d\omega & \text{für } \bar{x} = x_0 - x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \int_{0}^{+\infty} f_+(\omega)\, e^{i(K_+(\omega)\bar{x} - \omega t)}\, d\omega + \int_{0}^{+\infty} f_+(-\omega)\, e^{-i(-K_+(\omega)\bar{x} - |\omega| t)}\, d\omega & \text{für } x_0 - x > 0 \\ \int_{0}^{+\infty} f_-(\omega)\, e^{i(-K_-(\omega)|\bar{x}| - \omega t)}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} f_-(-\omega)\, e^{-i(K_-(-\omega)|\bar{x}| - |\omega| t)}\, d\omega & \text{für } x_0 - x < 0 \end{cases}$$

erfordert $(K_\pm = k_\pm + i\lambda_\pm$

$k_+ \geq 0 \,,\quad \lambda_+ \geq 0 \quad \text{für } \omega > 0$

$k_+ \leq 0 \,,\quad \lambda_+ \geq 0 \quad \text{für } \omega < 0$

$k_- \leq 0 \,,\quad \lambda_- \leq 0 \quad \text{für } \omega > 0$

$k_- \geq 0 \,,\quad \lambda_- \leq 0 \quad \text{für } \omega < 0 \quad .$

Die Punkte $K_\pm(\omega)$ liegen also für $\omega > 0$ im 1. oder 3. Quadranten der komplexen K-Ebene, für $\omega < 0$ im 2. oder 4. Quadranten

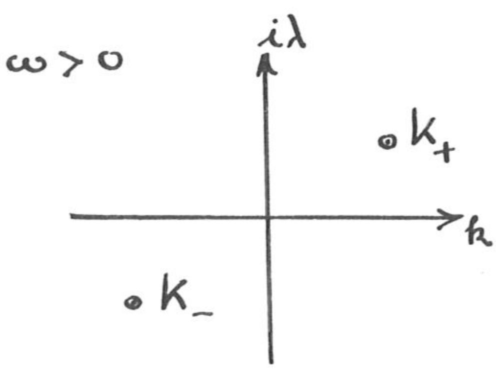


Abb. (II, 1)

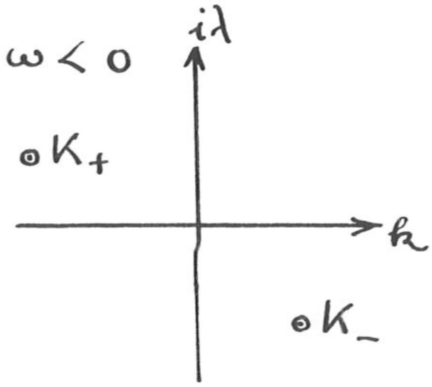


Abb. (II, 2)

$G_s\,(x, x_0 | t)$ ist nun aus nur auslaufenden Wellen komponierbar. Um dies einzusehen, führt man in der Fourierdarstellung von G_s zuerst die Integration über die Wellenzahl k aus. Die Darstellung lautet:

$$G_s(x,x_0|t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} dk\,d\omega\, \frac{e^{ikh}-1}{ikh}\, \frac{e^{i\omega\tau}-1}{i\omega\tau}\, \frac{\tau e^{-ik(x-x_0)-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}+P(kh)} .$$

Wegen der Periodizität des Integranden in $\tau\omega$ und kh ist dies auch gleich

$$\int_0^{\tau}\!\!\int_0^{h} d\tau' dh'\, \delta_p(t-\tau';\tau)\,\delta_p(x_0-x+h';h)\, \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\!\int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \frac{\tau e^{-ik(x-x_0-h')-i\omega(t-\tau')}}{e^{-i\omega\tau}+P(kh)}$$

mit

$$P(kh) = -\,\frac{1-i\tau a e^{i\rho}|\sigma|\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)^2}{1+i\tau b e^{i\rho}|\sigma|\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)^2}, \quad \left(\sin\frac{kh}{2}\right)^2 = \frac{1-\cos kh}{2}$$

Mit der Abkürzung

$$D(k,\omega) = \frac{1}{\tau}\left[e^{-i\omega\tau} + P(kh)\right]$$

und der Aufteilung in positive und negative Frequenzen erhält man folgenden Ausdruck für G_s

$$G_s(x,x_0|t) = \int_0^{\tau}\!\!\int_0^{h} \delta_p(t-\tau';\tau)\,\delta_p(x_0-x+h';h)\,d\tau' dh' \;\cdot$$

$$\cdot\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\pi/\tau} d\omega \left\{ \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} dk \left(\frac{e^{ik(x_0-x+h')-i\omega(t-\tau')}}{D(k,\omega)} + \frac{e^{ik(x_0-x+h')+i\omega(t-\tau')}}{D(k,-\omega)} \right) \right\} .$$

Von Interesse sind nun die Vorzeichen des Real- und Imaginäranteils von $K\,(\omega)$, die aus der Dispersionsgleichung

$$D(K,\omega) = 0 \quad , \quad K = k + i\lambda$$

für reelles ω gewonnen werden. $e^{-i\omega\tau}$ ist dann ein Phasenfaktor vom Betrage Eins, wenn

$$|e^{-i\omega\tau}| = \left|\frac{1-i\tau a e^{i\rho}H(K)}{1+i\tau b e^{i\rho}H(K)}\right| = 1\,, \quad H(k) = \left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)^2 |\sigma|\,.$$

Das ist wegen der Kausalbedingung (II,4,2)

$$\left|\frac{1-i\tau a e^{i\rho}H(k)}{1+i\tau b e^{i\rho}H(k)}\right| < \underline{1}$$ für fast alle k, k reell

im allgemeinen nur für komplexe K erreichbar. H (K) wird damit ebenfalls komplex

$$H = |H(K)|\, e^{i\delta}$$

und man findet die Phasenbedingung

$$\sin(\rho+\delta) = \frac{1}{2}\tau(b-a)\,|H(K)|\,, \qquad \text{(II,4,4)}$$

sowie

$$\operatorname{sign}\omega = \operatorname{sign}\cos(\delta+\rho)\,.$$

Die Kausalbedingung (II,4,2) fordert dagegen

$$\sin\rho < \frac{\tau}{2}(b-a)\, H(k)\,, \quad k = \text{reell}. \qquad \text{(II,4,5)}$$

Für $0 < \rho < \pi$ ist $\sin\rho > 0$. Dieser Bereich von ρ ist verboten, da wegen $H(k) > 0$ auch $b-a > 0$ folgt und somit ist

$$H(k) > \frac{\sin\rho}{\frac{\tau}{2}(b-a)}\,,$$

während doch für einen endlichen Bereich $-k_0 \leq k \leq k_0$, $k_0 > 0$

$$0 \leq H(k) \leq \frac{\sin\rho}{\frac{\tau}{2}(b-a)}\,, \quad H(k_0) = \frac{\sin\rho}{\frac{\tau}{2}(b-a)}$$

auch sein kann.

Für $\pi \leq \rho \leq 2\pi$ ist $\sin\rho < 0$. Dann ist die Ungleichung (II,4,5) stets erfüllt für $b-a>0$, dagegen ist sie für $b-a<0$ nur dann erfüllbar, wenn

$$\frac{\tau}{2}(a-b)\,H(k) < 1 \quad , \qquad H(k) = |\sigma|\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)^2$$

ist. Bei vorgegebenen a, τ und h bedeutet das eine Beschränkung des Parameters $|\sigma|$.
Für a= 1, b = o z.B. besagt die Ungleichung

$$\frac{1}{2}\tau\,H(k) < 1 \qquad \text{oder wegen} \qquad H(k) \leq \frac{4|\sigma|}{h^2}$$

$$\frac{2\tau|\sigma|}{h^2} < 1 .$$

Um von dieser Beschränkung frei zu sein, wird für die folgende Untersuchung der Nullstellen von D (K,ω) in der komplexen K-Ebene die Gültigkeit der Ungleichung b-a$>$o und die Beschränkung von ρ auf den Bereich $\pi \leq \rho < 2\pi$, gemäß den Konsequenzen aus der Kausalbedingung (II,4,2), vorausgesetzt. Aus der Phasenbedingung (II,4,4) entnimmt man

$$\left.\begin{aligned} \rho+\delta &= 2\pi n + \tau\mu \\ \text{oder} \qquad \rho+\delta &= 2\pi n + \pi - \tau\mu \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq \tau\mu \leq \frac{\pi}{2} ,$$

sowie

$$\operatorname{sign}\omega = \operatorname{sign}\cos(\rho+\delta) = \begin{cases} \operatorname{sign}\cos\tau\mu = +1 \\ \text{oder} \\ \operatorname{sign}\cos(\pi-\tau\mu) = -1 \end{cases} .$$

Die Zuordnung zu positiven oder negativen Frequenzen ist also so

$$\left.\begin{aligned} \delta+\rho &= 2\pi n + \tau\mu \quad \text{für } \omega > 0 \\ \delta+\rho &= 2\pi n + \pi - \tau\mu \quad \text{für } \omega < 0 \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq \tau\mu \leq \frac{\pi}{2} .$$

Bei der Abbildung von H auf K durch

$$H(K) = |H(K)|\, e^{i\delta} = |\sigma| \left(\frac{2}{h} \sin \frac{Kh}{2}\right)^2 , \quad K = k + i\lambda$$

wird k und λ eine Funktion des Winkels $\delta/2$

$$\sin \frac{Kh}{2} = \frac{h}{2} \sqrt{\left|\frac{H}{\sigma}\right|}\, e^{i\,\delta/2}$$

mit

$$\left.\begin{array}{ll} \delta/2 = n\pi + \frac{\tau\mu}{2} - \rho/2 & \text{für } \omega > 0 \\ \delta/2 = n\pi + \pi/2 - \frac{\tau\mu}{2} - \rho/2 & \text{für } \omega < 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \le \frac{\tau\mu}{2} \le \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} \le \rho/2 \le \pi . \end{array}$$

Im Streifen $-\pi/2 \le \frac{hk}{2} \le \pi/2$, $-\infty \le \frac{h\lambda}{2} \le +\infty$ gelten auf Grund der Abbildung folgende Bereichszuordnungen

$n = 0$, $\omega > 0$

$$0 < \frac{hk}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{wenn } \pi/4 < \rho/2 - \frac{\tau\mu}{2} < \pi/2$$

$$-\pi/2 < \frac{hk}{2} < 0 \quad \text{wenn } \pi/2 < \rho/2 - \frac{\tau\mu}{2} < \pi$$

$$\frac{\lambda h}{2} < 0$$

$n = 0$, $\omega < 0$

$$0 < \frac{hk}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{wenn } \pi/2 < \rho/2 + \frac{\tau\mu}{2} < \pi$$

$$-\pi/2 < \frac{hk}{2} < 0 \quad \text{wenn } \pi < \rho/2 + \frac{\tau\mu}{2} < \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\lambda h}{2} < 0 .$$

Mit Beschränkung auf die Vorzeichen sind diese Aussagen gleichbedeutend mit

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im}\{K\} = 1$$

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re}\{K\} = -\operatorname{sign}\omega \quad \text{für } \pi/2 < \rho/2 - \operatorname{sign}\omega \cdot \frac{\tau\mu}{2} < \pi$$

sowie

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re}\{K\} = \operatorname{sign}\omega \text{ für } \begin{cases} \pi/4 < P/2 - \frac{\tau\mu}{2} < \pi/2, & \omega > 0 \\ \pi < P/2 - \frac{\tau\mu}{2} < \pi + \pi/4, & \omega < 0 \end{cases}.$$

Der zweite Fall n = 1 entsteht aus dem Fall n = o durch Vorzeichenumkehr von k. Für $\mu \to 0$ verbleibt wegen $\pi/2 \leq P/2 \leq \pi$ lediglich

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im}\{K\} = \pm 1$$

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re}\{K\} = \pm \operatorname{sign}\omega$$

wobei entweder nur das obere (n = 1) oder nur das untere (n = o) Vorzeichen gleichzeitig gilt. Diese Vorzeichenregelung für K (ω) erfüllt aber gerade die Forderungen, welche die Komponierbarkeit der Lösung G_s aus nur auslaufenden Wellen stellt. Siehe hierzu Abbildung (II,1 und 2), Seite 72. Daß die kausale Lösung G_s sich nun tatsächlich so verhält, ersieht man leicht aus der Integraldarstellung (II,4,3). Sie enthält die Integrale:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^h \delta_p(\bar{x}+h';h)\,dh' \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \frac{e^{ik(\bar{x}+h')-i\omega(t-\tau')}}{D(k,\omega)}\,dk, \quad \omega \gtrless 0, \ \bar{x} = x_0 - x.$$

Der Integrand hat nun zwei Polstellen mit $\operatorname{sign} \operatorname{Im}\{K(\omega)\} = \pm 1$. Für $\bar{x}+h' > 0$ kann der Integrationsweg in das Unendliche der oberen K-Halbebene verschoben werden. Dort verschwindet der Betrag des Integranden wie $e^{-\lambda(\bar{x}+h')}$, $\lambda \to \infty$. Die Beiträge der dadurch entstehenden Randintegrale längs der Wege $\pm\pi/h + i\lambda$, $\lambda \geq 0$ heben sich gegenseitig auf, denn es ist

$$\int_0^h \delta_p(\bar{x}+h';h) \sin\frac{\pi}{h}(\bar{x}+h')\,dh' = 0 .$$

Damit verbleibt für $\bar{x}+h'>0$ nur das Residuum am Pol $K = K_+(\omega)$, $\operatorname{sign} \operatorname{Im}\{K_+(\omega)\}=+1$, während man für $\bar{x}+h'<0$ ganz entsprechend nur das Residuum am Pol $K = K_-(\omega)=-K_+(\omega)$ als Beitrag zum Integral erhält:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^h \delta_p(\bar{x}+h',h)\,dh'\cdot 2\pi i\,\operatorname{Res}\{D^{-1}\}\,e^{iK_+(\omega)|\bar{x}+h'|-i\omega(t+\tau')}.$$

Zusammenfassend läßt das Ergebnis der Untersuchung über die durch die Kausalbedingung (II,4,2) fixierte Lage der Nullstellen von $D(K,\omega)$ folgende Feststellung zu:

Die kausale Lösung G_s der Differenzengleichung (II,4,1) ist komponierbar aus Wellen, die im Grenzfall $\mu \to +0$ auslaufende Wellen sind. Mit anderen Worten: Diejenige Lösung (II,4,1), welche die Kausalbedingung (II,4,2) erfüllt, befriedigt für beliebige Werte $(\tau, h) > 0$ das Sommerfeld'sche Ausstrahlungsprinzip, wenn $\mu \to +0$ d.h. $b-a=\varepsilon' \to +0$ geht.

Wegen $b + a = 1$ bedeutet die Kausalbedingung $b - a > 0$ auch gleich

$$a=\frac{1}{2}-\varepsilon' \quad , \quad b=\frac{1}{2}+\varepsilon'$$

mit positiven aber sonst beliebigen $\varepsilon'>0$. Die kausale Lösung von (II,4,1) besitzt für beliebige $\tau>0$ und $h>0$ die Fourierdarstellung

$$G_s=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ikh}-1}{ikh}\cdot\frac{e^{i\omega\tau}-1}{i\omega\tau}\cdot\frac{\tau\, e^{-ik(x_0-x)-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}+P(kh)}\,dk\,d\omega$$

$$P=-\frac{1-i\tau(\frac{1}{2}-\varepsilon')\bar{H}}{1+i\tau(\frac{1}{2}+\varepsilon')\bar{H}} \quad , \quad \bar{H} \underset{def}{=} H(k)\,e^{iP} \quad , \quad H(k)=\sqrt{(\tfrac{2}{h})\sin\tfrac{kh}{2}}$$

Sie enthält noch die willkürliche Größe ε'. Die Forderung, dass G_s die Kausalbedingung (II,4,2) und für beliebige $(\tau, h) > 0$ das Sommerfeld'sche Ausstrahlungsprinzip erfüllen soll, legt nun G_s eindeutig fest zu

$$G_s = \lim_{\varepsilon' \to 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikh}-1}{ikh} \frac{e^{i\omega\tau}-1}{i\omega\tau} \cdot \frac{\tau e^{ik(x_0-x)-i\omega t}\, dk\, d\omega}{e^{-i\omega\tau} - \frac{1-i\tau(\frac{1}{2}-\varepsilon')H(k)e^{i\rho}}{1+i\tau(\frac{1}{2}+\varepsilon')H(k)e^{i\rho}}} .$$

Leicht einzusehen ist auch die Tatsache, daß das Sommerfeld'sche Ausstrahlungsprinzip nicht erfüllbar ist, wenn die Kausalbedingung (II,4,2) nicht befriedigt wird. Denn dann ist z.B. ρ nicht auf den Bereich $\pi \leq \rho \leq 2\pi$ beschränkt.
Für $0 < \rho < \pi$ findet man jedoch die Vorzeichenregelung

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im}\{k\} = \pm 1 \, , \operatorname{sign} \operatorname{Re}\{k\} = \mp \operatorname{sign} \omega$$

Das entspricht der Forderung nach Komposition der Lösung aus einlaufenden Wellen, deren Quellen sinngemäß im Unendlichen liegen. Ist die Kausalbedingung (II,4,2) nicht erfüllt, so hat die Gleichung D (k, ω) = 0 bei reellem k nur für Frequenzen mit positivem Imaginärteil eine Lösung. Dann aber verschwindet G_s für $t > 0$. Denkt man sich dann den Ausdruck G_s für $t < 0$ aus der Differenzengleichung (II,4,1) berechnet und hingeschrieben, verwendet daraufhin aber das so gewonnene G_s für $t > 0$, so erhält man natürlich ganz unsinnige Resultate, für die häufig die Bezeichnung "numerische Instabilität" in Gebrauch genommen wird.
Die hier erörterten Überlegungen hinsichtlich des Zusammenhangs der Kausalbedingung (I,4) mit dem Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzip können auch auf Differenzengleichungen allgemeineren Typs als (II,4,1) ausgedehnt werden. Dies geschieht in den folgenden Teilen dieses Abschnitts.

Teil 5)

Die Fourierdarstellung der Green'schen Funktion.

Sei V + A (ϑ) eine und nur eine Funktion der Verschiebungs-Matrizen V , ϑ, erklärt durch ihre Elemente

$$(V)_{mm',nn'} = \delta_{mm'}\,\delta_{n+1,n'} \quad , \quad (\vartheta)_{mm',nn'} = \delta_{m+1,m'}\,\delta_{n,n'},$$

und G eine Lösung der Differenzengleichung

$$\sum_{m''n''}\left\{(V)_{mm'',nn''} + (P)_{mm'',nn''}\right\} G(m'',n''|m',n') = \delta_{mm'}\delta_{nn'}$$

mit

$$(P)_{mm'',nn''} = -\left(\frac{1-ia\tau A(\vartheta)}{1+ib\tau A(\vartheta)}\right)_{mm''} \cdot \delta_{nn''} \underset{def}{=} -(p)_{mm''}\,\delta_{nn''}.$$

Wegen der damit vorausgesetzten expliziten Unabhängigkeit der Elemente $(p)_{mm''}$ von n, n'' hängt G nur von der Differenz $n-n' = \nu$ ab:

$$G(m,n|m',n') = G_0(m,m'|\nu).$$

Die zu V, ϑ gehörenden Eigenvektoren besitzen die Elemente ζ^n, z^m (m, n ganz). Sie bilden für (ζ, z) = ($e^{-i\psi}, e^{-i\varphi}$), $-\pi \leq (\psi, \varphi) \leq +\pi$ vollständige Basissysteme. In diesen wird G diagonal, da G über P + V nur von V, abhängt:

$$\langle \varphi,\psi|VG|\varphi',\psi'\rangle + \int_{-\pi}^{+\pi} \langle\varphi,\psi|P|\varphi''\psi''\rangle\langle\varphi'',\psi''|G|\varphi',\psi'\rangle d\varphi'' d\psi'' =$$

$$= \langle\psi|\psi'\rangle\cdot\langle\varphi|\varphi'\rangle \left\{ e^{-i\psi} G(\varphi,\psi) + P(\varphi)\, G(\varphi,\psi)\right\} =$$

$$= \langle\psi|\psi'\rangle\langle\varphi|\varphi'\rangle .$$

also

$$\left(e^{-i\psi} + P(\varphi)\right) G(\varphi,\psi) = 1 \; , \; P(\varphi) = -\frac{1 - ia\tau A(e^{-i\varphi})}{1 + ib\tau A(e^{-i\varphi})} .$$

Als Lösung der Differenzengleichung erhält man somit

$$G(m,n|m',n') \equiv G_0(m,m'|\nu) =$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} \langle m,n|\varphi,\psi\rangle\langle\varphi,\psi|G|\varphi',\psi'\rangle\langle\varphi',\psi'|m',n'\rangle d\varphi\, d\psi\, d\varphi' d\psi' =$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} \langle m,n|\varphi,\psi\rangle \frac{\langle\varphi|\varphi'\rangle\cdot\langle\psi|\psi'\rangle}{e^{-i\psi} + P(\varphi)} \langle\varphi',\psi'|m',n'\rangle d\varphi\, d\psi\, d\varphi' d\psi' =$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} \langle m|\varphi\rangle \frac{\langle n|\psi\rangle\langle\psi|n'\rangle}{e^{-i\psi} + P(\varphi)} \langle\varphi|m'\rangle d\varphi\, d\psi$$

wenn $|P(\varphi)| \neq 1$ für fast alle φ .

Beim Übergang zu den Integrationsvariablen $\omega = \frac{1}{\tau}\psi, \; k = \frac{1}{h}\varphi$ wird daraus ($\langle m|kh\rangle \equiv \langle mh|k\rangle$)

$$\frac{1}{h} G_0(m,m'|\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \langle mh|k\rangle \frac{\tau\langle\nu\tau|\omega\rangle}{e^{-i\omega\tau} + P(kh)} \langle k|m'h\rangle dk\, d\omega .$$

Hieran anknüpfend definiert

$$G_F(x,x'|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \langle x|k\rangle \frac{\tau\langle t|\omega\rangle}{e^{-i\omega\tau} + P} \langle k|x\rangle dk\, d\omega \tag{II,5,1}$$

für beliebige x, x', t eine Funktion, die die Werte

$$G_F(x,x'|t) = \frac{1}{h} G_0(m,m'|\nu)$$

annimmt, wenn x,x',t ganzzahlige Vielfache von h bezw. τ sind. G_F befriedigt die Differenzengleichung

$$\frac{1}{\tau}\left\{G_F(x,x'|t+\tau) - G_F(x,x'|t)\right\} +$$

$$+\frac{1}{\tau}\left\{1 - \frac{1-ia\tau A}{1+ib\tau A}\right\} G_F(x,x'|t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \langle x-x'|k\rangle dk \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau} \langle t|\omega\rangle d\omega, \qquad \text{(II,5,2)}$$

wenn A (ϑ) eine definierte Funktion des Differenzenoperators ϑ, erklärt durch

$$\vartheta f(x) = f(x+h),$$

darstellt. Die Lösung G_s der Differenzengleichung

$$\frac{1}{\tau}\left\{G_s(x,x'|t+\tau) - G_s(x,x'|t)\right\} +$$

$$+\frac{1}{\tau}\left\{1 - \frac{1-ia\tau A}{1+ib\tau A}\right\} G_s(x,x'|t) = \frac{1}{\tau}\left[\epsilon(t) - \epsilon(t-\tau)\right]\frac{1}{h}\left[\epsilon(x-x'+h) - \epsilon(x-x\right.$$

hängt mit G_F durch eine Integraltransformation

$$G_F(x,x'|t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(T,\tau) f(X,h) G_s(x,x'-X|t-T)\, dX\, dT$$

zusammen (spezielle Quellverteilung und Anfangsbedingung für G_F).

Hierin ist

$$f(T,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau} \frac{i\omega\tau}{e^{-i\omega\tau} - 1} \langle T|\omega\rangle d\omega.$$

Um dies einzusehen, multipliziere man die Differenzengleichung für $G_s(x, x'-X|t-T)$ mit $f(T,\tau)\cdot f(X,h)$ und integriere über T und X. Auf der rechten Seite der Gleichung entsteht dabei z.B.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(T,\tau)\frac{dT}{\tau}\int_0^\tau \delta(t-\tau'-T)d\tau' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\frac{i\omega\tau}{e^{i\omega\tau}-1}\int_0^\tau \langle t-\tau'|\omega\rangle d\omega d\tau' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\langle t|\omega\rangle d\omega .$$

Ganz analog gilt für den zweiten Faktor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X,h)\frac{dX}{h}\int_0^\tau \delta(x-(x'-h'-X))dh' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h}\langle x-x'|k\rangle dk .$$

Wenn $\lim_{h\to 0} A = A_0$ einen Sinn hat und $\lim_{(\tau,h)\to 0} G_s$ existiert, dann geht die Differenzengleichung für G_s im Limes $(\tau, h)\to 0$ in die Differentialgleichung für $\lim_{(\tau,h)\to 0} G_s = G$ über:

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} + iA_0 G_0 = \lim_{\tau\to 0}\frac{\epsilon(t)-\epsilon(t-\tau)}{\tau}\lim_{h\to 0}\frac{\epsilon(x'-x)-\epsilon(x'-x-h)}{h} =$$

$$= \delta(t)\,\delta(x'-x) .$$

Nun gilt

$$\lim_{\tau\to 0} f(T,\tau) = \delta(T), \quad \lim_{h\to 0} f(X,h) = \delta(X).$$

Das wird im Abschnitt (II,A) bewiesen; hierzu bilde man die zeitliche Ableitung der dort (II,A,4) definierten Funktion I (τ, h), setze P = - 1 und bilde den Limes. Aus der Integraltransformation G_s G_F folgt damit

$$\lim_{\tau,h\to 0} G_F(x,x'|t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\tau,h\to 0} f(T,\tau) f(X,h) \cdot$$

$$\cdot \lim_{\tau,h\to 0} G_s(x,x'-X|t-T)\,dX\,dT =$$

$$= \lim_{\tau,h\to 0} G_s(x,x'|t).$$

Der Limes

$$\lim_{\tau,h\to 0} G_s(x,x'|t)$$

existiert also dann, wenn

$$\lim_{\tau,h\to 0} G_F(x,x'|t)$$

existiert. Im Abschnitt (II,A) wird dieser Grenzübergang untersucht. Von dort wird das Ergebnis

$$\lim_{\tau,h\to 0} G_F(x,x'|t) = G_0(x,x'|t) \quad , \; t>0$$

vorweg genommen.

Nun existiert folgender Satz:

(II,5,3)

> Notwendig und hinreichend dafür, daß F (ω), $(-\infty \leq \omega \leq +\infty)$ die Fouriertransformierte einer für negative Werte von t verschwindende Funktion ist, ist die Existenz einer analytischen Funktion F (Ω), $\Omega = \omega + i\gamma$ für $\gamma > 0$ sodaß:

1) $F(\Omega) \to F(\omega)$ für fast alle ω wenn $\gamma \to 0$
2) $F(\Omega)$ ist regulär für $\gamma > 0$
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\Omega)|^2 d\omega \leq M$ für $\gamma > 0$ und unabhängig von γ.

Demzufolge ist G_F keine für negative $t \neq \nu\tau$ (ν ganz) verschwindende Funktion, denn

$$\in \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \omega^2 \right) \frac{\tau}{e^{-i\omega\tau} + P}$$

ist nicht der Grenzwert einer analytischen Funktion von Ω für $\gamma \to 0$. Aber die Funktion $G_{FS}(x,x'|t) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \epsilon\left(\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 - k^2\right) \langle x|k\rangle \frac{\tau\langle t|\omega\rangle}{e^{-i\omega\tau} + P} \frac{e^{-i\omega\tau} - 1}{i\omega\tau} \langle k|x'\rangle \, dk \, d\omega \qquad \text{(II,5,4)}$$

welche Lösung der Differenzengleichung

$$\frac{1}{\tau}\left\{ G_{FS}(x,x'|t+\tau) - G_{FS}(x,x'|t) \right\} + \qquad \text{(II,5,5)}$$

$$\frac{1}{\tau}\left\{ 1 - \frac{1 - ia\tau A}{1 + ib\tau A} \right\} G_{FS}(x,x'|t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi/h}^{+\pi/h} \langle x - x'| k\rangle \, dk \cdot \frac{1}{\tau} \int\limits_0^{\tau} \delta(t - \tau') \, d\tau'$$

ist, verschwindet für $t < 0$, wenn $e^{-i\Omega\tau} + P \neq 0$ für $\Omega = \omega + i\gamma$, $\gamma > 0$ und fast alle k. Der Faktor $(e^{-i\omega\tau} - 1)/i\omega\tau$ kann durch Integration von $\langle t - \tau'|\omega\rangle$ über τ' erzeugt werden

$$\frac{1}{\tau} \int\limits_0^{\tau} \langle t - \tau'|\omega\rangle \, d\tau' = \frac{e^{i\omega\tau} - 1}{i\omega\tau} \langle t|\omega\rangle .$$

Der Integrand $\tau(e^{-i\omega\tau} + P)^{-1}$ ist periodisch in ω mit der Periode $\omega = 2\pi/\tau$. Durch Aufspalten des Integrationsweges längs $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ in Teilstücke zu je einer Periodenlänge entsteht aus (II,5,4)

$$G_{FS}(x,x'|t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\tau} \int\limits_0^{\tau} d\tau' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \epsilon\left(\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 - k^2\right) \langle x|k\rangle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{2\pi n}{\tau}(t-\tau')} \int\limits_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau} \frac{\tau\langle t - \tau'|\omega\rangle}{e^{-i\omega\tau} + P} \langle k|x'\rangle \, d\omega \, dk .$$

Die mit $\frac{1}{\tau}$ multiplizierte Summe ist eine Darstellung der in $t' = t - \tau$ periodischen Dirac'schen δ - Funktion

$$\frac{1}{\tau}\sum_n e^{-i\frac{2\pi n}{\tau}t'} = \delta_p(t';\tau)\,, \quad \text{Periode } \tau .$$

Daher ist $G_{FS}(x,x'|t)$ bezüglich t eine Stufenfunktion, die für alle Werte t aus $\nu\tau < t < (\nu+1)\tau, \; -\infty \leq \nu \leq +\infty$ den Funktionswert $G_F(x,x'|\nu\tau)$ annimmt

$$G_{FS}(x,x'|t) = \int_0^\tau d\tau'\, \delta_p(t-\tau';\tau)\, G_F(x,x'|t-\tau') .$$

Für $\nu\tau = t' \leq 0$ verschwindet $G_F(x,x'|t)$,
wenn $e^{-i\Omega\tau} + P \neq 0$ für $\Omega = \omega + i\gamma, \; \gamma > 0$,
denn dann läßt sich der Integrationsweg in

$$\int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau} \frac{\langle t'|\omega\rangle}{e^{-i\omega\tau}+P}\,d\omega = \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau} \frac{\langle t'+\tau|\omega\rangle}{1+e^{i\omega\tau}P}\,d\omega\,, \quad \nu\tau = t' \leq 0$$

in das Unendliche der oberen Ω - Halbebene hinaufziehen und dort verschwindet der Integrand wie $e^{-(|\nu|+1)\tau\gamma}$.
Die dabei entstehenden Randintegrale

$$\int_{-\pi/\tau+i\infty}^{-\pi/\tau} \frac{\langle t'|\Omega\rangle}{e^{-i\Omega\tau}+P}\,d\Omega + \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau+i\infty} \frac{\langle t'|\Omega\rangle}{e^{-i\Omega\tau}+P}\,d\Omega =$$

$$= 2i\sin\frac{\pi t'}{\tau}\int_0^{i\infty} \frac{\langle t'|\Omega\rangle}{P-e^{i\Omega\tau}}\,d\Omega$$

heben sich wenn $\sin\frac{\pi t'}{\tau} = \sin\nu\pi = 0$ gerade auf.

Die Kausalforderung G = o für t $<$ o (I,4a) verlangt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{\tau e^{-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}+P} \, \frac{e^{i\omega\tau}-1}{i\omega\tau} = 0$$

für t $<$ o.

Der Satz (II,5,3) besagt dann, daß

$$F(\Omega) = \frac{e^{i\Omega\tau}-1}{i\Omega\tau} \, \frac{\tau}{e^{-i\Omega\tau}+P}$$

in der oberen Ω-Halbebene regulär ist, d.h. es ist

$$e^{-i\Omega\tau} \neq -P(kh) \qquad \text{für} \quad \Omega = \omega + i\gamma, \; \gamma > 0$$

und alle k, also auch

$$1 < |e^{-i\Omega\tau}| = e^{\gamma\tau} \neq |P(kh)|.$$

Daraus folgt

$$|P(kh)| \leq 1 \qquad \text{für alle k} \qquad \text{(II,5,6)}$$

oder

$$|P(kh)| < 1 \qquad \text{für fast alle k.}$$

Die Nullstellen von

$$D(\Omega,k) = e^{-i\Omega\tau} + P(kh) \,, \quad k \text{ reell},$$

liegen demnach in der unteren Ω- Halbebene $\gamma < 0$, oder auf der Achse γ = o. P (kh) nimmt den Wert (- 1) an für Ω = o und das ist für physikalisch vernünftige, laufende Wellen jedenfalls für k = o d.h. für unendlich große Wellenlängen $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ der Fall. Für die Eigenwerte von A bedeutet die Forderung $|P| \leq 1$ für alle reellen k

$$\sin p \leq (b-a)\frac{1}{2}\tau |A(e^{-ikh})| \,, \quad A = e^{ip}|A|.$$

Darin steht das Gleichheitszeichen, wenn $|P| = 1$ d.h. wenn A = O. Tritt dies ein, so kann die rechte Seite der Ungleichung beliebig klein gemacht werden und sie besagt dann

$$\sin \rho \leq 0 ,$$

was nur für $\pi \leq \rho \leq 2\pi$ richtig ist. Dann aber ist die Ungleichung für alle k ohne weitere Beschränkung bezüglich τA, also auch für alle $(\tau, h) > 0$ erfüllt, wenn nur $b - a > 0$ und $\lim_{h \to 0} A(e^{-ikh}) = A_0$ existiert. Die Bedingung $\pi \leq \arg A \leq 2\pi$ schließt die Forderung mit ein, daß $1 + ib\tau A$ keine Nullstellen für reelle k haben darf. Denn aus b-a > o und a + b = 1 folgt b $> \frac{1}{2} >$ o. Damit also der Ausdruck 1 + i b τ A eine Nullstelle hat, müßte

$$\arg A = \arg \frac{i}{b\tau} = \arg i = \pi/2$$

sein, was ersichtlich nicht für reelle k zutrifft. Die Kausalbedingung (II,5,6) ist natürlich nur dann erfüllbar, wenn die Bedingung $\pi \leq \rho \leq 2\pi$ für alle h, also auch für h→o erfüllt ist:

$$A_0 = e^{i\rho_0} |A_0| , \quad \pi \leq \rho_0 \leq 2\pi , \quad k \text{ reell} .$$

Wenn G_o irgendeine physikalisch meßbare Größe repräsentiert, muß die Gültigkeit dieser Beschränkung von ρ_0 akzeptiert werden, denn dasjenige G_o, welches für t < o verschwindet, wäre andernfalls für t $\to + \infty$ nicht beschränkt. Die Dispersionsgleichung $\Omega = e^{i\rho_0} |A_0|$ liefert nämlich für

$0 < \rho_0 < \pi$ einen positiven Imaginärteil von Ω.
G_o wird dann wie $e^{\Gamma t}$, $\Gamma > 0$ für $t \to +\infty$ unendlich.
D.h. nicht, daß ein physikalischer Prozeß nicht etwa wie $e^{\Gamma t}$ beginnen kann, sondern daß er sich nicht für alle Zeiten $0 < t \leq \infty$ so verhalten darf. Zu irgendwelchen endlichen Zeiten muß das Anwachsen von G_o beendet sein, sodaß G_o für $t \to +\infty$ beschränkt bleibt.

Die Ansicht, man könne die Differentialgleichung

$$\frac{\partial G_o}{\partial t} + i A_o G_o = \delta(t)\, \delta(x - x_o)$$

bezw. die ihr zugeordnete Differenzengleichung für einen endlichen Zeitabschnitt z.B. von 0 bis T lösen, ist natürlich irrig.

Hierzu wäre es nötig, die Lösung im Sinne eines Randwertproblems zu suchen, d.h. man hätte bei t = T eine Finalbedingung zu stellen. Das aber widerspricht dem Kausalprinzip. Ein einmal per Anfangsbedingung einsetzender und Kraft seinem Entwicklungsgesetz ablaufender zeitlicher Vorgang läuft eben unbegrenzt weiter. Denn sein Fourierspektrum ist durch den gesamten Entwicklungsvorgang von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ bestimmt. Einem zeitlich veränderlichen, durch G_o ($= 0$ für $t < 0$) beschriebenen Vorgang kommt ohne weitere Angabe über seine Entwicklung für $t > T$ kein bestimmtes Fourierspektrum zu, ist also auch durch keine Fourierdarstellung beschreibbar. Dann aber auch nicht durch eine äquivalente Matrixdarstellung, die ja durch unitäre Transformation aus der Fourierdarstellung hervorgeht. Man kann deshalb z.B. nicht $v(\nu)$ aus

$$v(\nu+1) + \rho v(\nu) = 0 \quad , \quad \nu \leq \nu_o$$

bei $\nu = 0$ mit vorgegebenen $v(0)$ anfangend durch Iteration bis $\nu = \nu_0 > 0$ berechnen, ohne zu sagen, wie das Entwicklungsgesetz für $\nu < 0$ <u>und</u> $\nu > \nu_0$ aussieht. Leider wird häufig so verfahren und entsprechend argumentiert.

Teil 6)

Die Rolle des Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzips als Eindeutigkeitsprinzip.

Die Fourierdarstellung der Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} + i A_0\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) G_0 = \delta(x-x_0)\,\delta(t)$$

führt mit dem Ansatz

$$G_0(x,x_0|t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(k,\omega)\, e^{-ik(x-x_0)-i\omega t}\, dk\, d\omega$$

auf die algebraische Gleichung

$$\left(-i\omega + i A_0(k)\right) G_0(k,\omega) = e^{ikx_0}.$$

Dabei wird angenommen, daß A_0 (K) eine analytische Funktion der komplexen Variablen $K = k + i\lambda$ ist.+ Wenn die Dispersionsgleichung

$$\omega = A_0(K)\ ,\quad K = k + i\lambda$$

für reelle k (ω) mit ω aus $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ eine oder mehrere Lösungen hat, so ist die Division mit $\omega - A_0(k)$ nicht eindeutig. Vielmehr gilt dann mit einem $\varepsilon > 0$

$$G_0(k,\omega) = \alpha \frac{i e^{ikx_0}}{\omega - A_0(k) + i\varepsilon} + \beta \frac{i e^{ikx_0}}{\omega - A_0(k) - i\varepsilon}\ ,\quad \alpha + \beta = 1$$

und

$$G_0(x,x_0|t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(k,\omega)\, e^{-ik(x-x_0)-i\omega t}\, dk\, d\omega\ .$$

Die für $t < 0$ verschwindende Lösung erhält man mit $\alpha = 1, \beta = 0$:

$$G_0(x,x_0|t) = \frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x_0-x) - iA_0(k)t}\, dk\ .$$

+A_0 (K) regulär auf der Achse K = k

Die Gleichung $\omega = A_0(k)$, $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ kann darüberhinaus natürlich auch noch für komplexe K (ω) Lösungen haben. Wenn die Dispersionsgleichung $\omega = A_0(k)$ für reelle k (ω) mit ω aus $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ keine Lösung hat, so ist die Division mit $\omega - A_0(k)$ eindeutig. $A_0(k)$ besitzt dann einen von Null verschiedenen $\arg A_0(k) = \rho_0$. Ist der $\mathrm{Im}\{A_0(k)\}$ für reelle k positiv und für k aus $-\infty \leq k \leq +\infty$ nicht beschränkt, so hat das Integral

$$G_0(x, x_0|t) = \frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-x_0) - iA_0(k)t} dk$$

für positive t keinen Sinn. Ist der $\mathrm{Im}\{A_0(k)\}$ für reelle k positiv, jedoch beschränkt, so existiert das Integral zwar für alle endlichen Werte $t > 0$, nicht jedoch für $t \to +\infty$. In diesem Fall kann man sich formal dadurch behelfen, daß nicht $G_0(x, x_0|t)$ sondern $\bar{G}_0(x, x_0|t) = G_0 e^{-\Gamma t}$ mit $\Gamma - \max\limits_{-\infty \leq k \leq +\infty} \mathrm{Im}\{A_0(k)\} \geq 0$ betrachtet wird. $\bar{G}_0(x, x_0|t)$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \bar{G}_0}{\partial t} + \left[iA_0\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \Gamma\right]\bar{G} \equiv \frac{\partial \bar{G}_0}{\partial t} + i\bar{A}_0\bar{G}_0 = \delta(t)\delta(x-x_0)$$

und $\arg \bar{A}_0$ liegt im Bereich $\pi \leq \arg \bar{A}_0 \leq 2\pi$. Man darf daher von Anfang an $\arg A_0 = \rho_0$ doch auf $\pi \leq \rho_0 \leq 2\pi$ beschränken ($\rho_0 = \arg A_0$).

Die Komposition von G_0 aus laufenden Wellen erhält man durch vorrangige Integration über k

$$G_0(x, x_0|t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i e^{-ik(x-x_0)}}{\omega - A_0(k) + i\epsilon} dk .$$

Seien $K_n(\omega)$, n = 1,2,3, ... die für $\epsilon \to +0$ und für reelles ω reellen Lösungen von $\omega - A_0(k) + i\epsilon = 0$:

$$K_n(\omega) = A^{-1}_{o,n}(\omega+i\varepsilon) = A^{-1}_{o,n}(\omega) + i\varepsilon \frac{\partial A^{-1}_{o,n}(\omega)}{\partial\omega} = k_n + i\lambda_n .$$

Dann verbleibt im asymptotischen Bereich $|x - x_o| \to \infty$ nur

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i e^{-ik(x-x_o)}}{\omega - A_o(k) + i\varepsilon} dk = \sum_n \Gamma_n^c \left\{ \epsilon(x-x_o) e^{ik_n|x-x_o|} + \epsilon(x_o-x) e^{-ik_n|x-x_o|} \right\},$$

denn für $x - x_o \to$ schiebt man den Integrationsweg unter Ausschluß aller Singularitäten in das Unendliche der unteren K-Halbebene ($\lambda < o$). Dort verschwindet der Integrand wie $e^{\lambda|x-x_o|}$, während die von den Singularitäten erzeugten Residuen - ihr Gesamtanteil ist durch

$$Res = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\lambda_o}^{+\infty+i\lambda_o} \frac{e^{-iK(x-x_o)}}{\omega - A_o(K)} dK = \frac{e^{-|\lambda_o|(x-x_o)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i e^{-ik(x-x_o)}}{\omega - A_o(k+i\lambda_o)} dk, \quad \lambda_o < o,$$

gegeben - im Limes $|x - x_o| \to \infty$ verschwindet. Denn man kann stets ein $\lambda_o < o$ so angeben, daß $A_o(k+i\lambda)$ regulär ist für $\lambda_o \leq \lambda < o$ ($A_o(k)$ ist ja auf der Achse K = k als regulär vorausgesetzt) und $\omega - A_o(k+i\lambda_o) \neq 0$ (Isoliertheit der Nullstellen). Daher wird $|Res|$ mit wachsendem $x-x_o > o$ beliebig klein. Ganz entsprechendes gilt im Falle $x - x_o < o$.
Der in das Unendliche laufende Anteil der Wellen rührt also nur von den reellen Lösungen der Dispersionsgleichung her. Damit dieser aus nur auslaufenden Wellen besteht, muß wegen $\varepsilon > 0$ der aus $\omega + i\varepsilon = A_o(k+i\lambda)$ folgende Imaginärteil von A_o positiv sein. Nach Abb. (II,1 und 2) Seite 72, trägt $\lambda(\varepsilon,\omega)$ das Vorzeichen von k/ω, also ist

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = \left(\frac{k}{\omega} \Big/ \left|\frac{k}{\omega}\right|\right) \cdot f(\omega), \quad f(\omega) \underset{def}{=} \frac{\varepsilon}{|\lambda(\varepsilon,\omega)|} > 0,$$

oder auch

$$\frac{\omega}{k}\frac{\partial\omega}{\partial k}-\frac{\partial\omega^2}{\partial k^2}=\left|\frac{\omega}{k}\right|\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|}-\frac{|\omega|}{|k|}f(\omega).$$

Daraus folgt eine Forderung an die Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|}=f(\omega)>0 \text{ für fast alle } k: \qquad \text{(II,6,1)}$$

Die für positive Frequenzen und Wellenlängen definierte Gruppengeschwindigkeit muß positiv sein, damit die Lösung im asymptotischen Bereich aus nur auslaufenden Wellen komponierbar ist.

Diese Formulierung bedarf allerdings noch einer Ergänzung. Der Ausdruck $\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|}$ ist nicht invariant gegen Nullpunktsverschiebung von ω. Deshalb darf man im allgemeinen zur Berechnung dieses Ausdruckes nicht $\omega=A_0(k)$ verwenden, sondern

$$\omega-\omega_0=A_0(k)\,,\qquad \omega_0=\text{reell}\,,$$

mit einer geeigneten Wahl von ω_0. Diese hängt noch von der Bedingung $\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|}>0$ ab. Z.B. ist für den dispersiven Zusammenhang

$$\omega=\alpha e^{\beta k}\,,\ \beta>0$$

die Gruppengeschwindigkeit vom Vorzeichen von k abhängig

$$\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|}=\beta|\alpha|e^{\beta k}\frac{k}{|k|}\,,$$

während dies für

$$\omega-\omega_0=\alpha e^{\beta k}\,,\ \beta>0$$

mit $\omega_0=-\alpha$ nicht eintritt

$$\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|}=\beta|\alpha|e^{\beta k}>0.$$

Der Übergang von $\omega = A_0(k)$ zu $\omega - \omega_0 = A_0(k)$ bedeutet lediglich eine Abspaltung des Faktors $e^{i\omega_0 t}$ von G_0.

Zur Behandlung des Zusammenhangs der Kausalbedingung (I,4a) mit dem Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzip und dem Grenzübergang (τ, h) $\rightarrow$ o muß hier vorausgesetzt werden, daß $A(e^{-ikh})$ (________) eine für reelle $K = k + i\lambda$ reguläre analytische Funktion von $K = k + i\lambda$ ist. Siehe hierzu auch die Forderung des Satzes (II,5,3). Andernfalls können die Integrale der Fourierdarstellung nicht in der hier vorgenommenen Weise behandelt werden. Weiter soll vorausgesetzt werden, daß der (Matrix-) Operator A, seiner Herkunft nach, der Übersetzung eines explizit von der Ortskoordinate unabhängigen Differentialoperators $i\,A_0(i\nabla_0)$, $\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial x}$ entstammt und zwar in dem Sinne, daß ∇_0 durch die gleichgewichtete Superposition der pro- und retrospektiven Differenzenoperatoren ersetzt wird:

$$\nabla_0 \longrightarrow \frac{1}{2}\nabla^+_{\frac{h}{2}} + \frac{1}{2}\nabla^-_{\frac{h}{2}} .$$

$\nabla^{\pm}_{\frac{h}{2}}$ .... ist dabei erklärt durch

$$\nabla^{\pm}_{\frac{h}{2}} f(x) = \frac{f(x \pm \frac{h}{2}) - f(x)}{\pm \frac{h}{2}} , \quad x = mh .$$

In der k-Darstellung wird A wieder diagonal

$$\langle kh|A|k'h\rangle = \delta_p(kh - k'h; 2\pi)\, A(e^{-ikh}) =$$

$$= \langle kh|A_0|k'h\rangle =$$

$$= \sum_{mm'} \frac{e^{imkh}}{\sqrt{2\pi}} \left(A_0\left(\frac{i}{h}\nabla^+_{\frac{h}{2}} + \frac{i}{h}\nabla^-_{\frac{h}{2}}\right)\right)_{mm'} \frac{e^{-im'k'h}}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \sum_{mm'} \frac{e^{imkh}}{\sqrt{2\pi}} A_0\left(\frac{i}{2}\,\frac{e^{-ik\frac{h}{2}} - 1}{\frac{h}{2}} - \frac{i}{2}\,\frac{e^{ik\frac{h}{2}} - 1}{\frac{h}{2}}\right) \cdot \delta_{mm'} \frac{e^{-im'k'h}}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= A_0\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)\frac{1}{2\pi}\sum_m e^{imh(k-k')} = A_0\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)\delta_p(kh - k'h, 2\pi) .$$

Es wird also

$$A(e^{-ikh}) = A_0\left(k \cdot \frac{\sin\frac{kh}{2}}{\frac{kh}{2}}\right), \quad \lim_{h\to 0} A(e^{-ikh}) = A_0(k)$$

und $A(e^{-iKh})$, $K = k + i\lambda$ ist analytisch, wenn es A_0 (K) ist. Darüberhinaus ist A (e^{-ikh}) reell für reelle k, wenn A_0 (k) reell für reelle k ist. Das wird sich für die Komposition der kausalen Lösung im asymptotischen Verlauf $|x - x_0| \to \infty$ aus nur auslaufenden Wellen als sehr wichtig erweisen. Erreicht wurde diese Eigenschaft durch die Einführung der gleichgewichteten Superposition von pro- und retrospektiven Differenzen.

Die aus der Dispersionsgleichung

$$e^{-i\omega\tau} = \frac{1 - ia\tau A_0\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)}{1 + ib\tau A_0\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)}, \quad (\omega, k) \text{ reell}, \ a + b = 1$$

folgende Wellenlängenabhängigkeit der Frequenz ω(k) erfüllt die an die Gruppengeschwindigkeit zu stellende Bedingung (II,6,1)

$$\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|} > 0 \quad , (\omega, k) \text{ reell},$$

wenn

$$\frac{\partial|A_0(k)|}{\partial|k|} > 0, \quad (A_0, k) \text{ reell},$$

erfüllt ist, <u>Beweis:</u> Die Differention des $\operatorname{Re}\{e^{-i\omega\tau}\} = \cos\omega\tau = \cos|\omega|\tau$ nach dem Betrag von k ergibt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial|k|}\cos|\omega|\tau = -\tau\sin|\omega|\tau\,\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|} = \frac{\partial}{\partial|k|}\,\frac{1 - ab(\tau A_0)^2}{1 + b^2(\tau A_0)^2} =$$

$$= -\frac{2b\tau^2|A_0|}{[1 + b^2(\tau A_0)^2]^2}\,\frac{\partial\left|\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right|}{\partial|k|}\left(\frac{\partial|A_0(k')|}{\partial|k'|}\right)_{k' = \frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}} =$$

$$= -\tau\sin|\omega|\tau \cdot \frac{2b\cos\frac{kh}{2}}{1 + b^2(\tau A_0)^2}\left(\frac{\partial|A_0(k')|}{\partial|k'|}\right)_{k' = \frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}},$$

also $\dfrac{\partial|\omega|}{\partial|k|}=2b\cdot\dfrac{\cos\frac{kh}{2}}{1+b^2(\tau A_0)^2}\cdot\left(\dfrac{\partial|A_0|}{\partial|k'|}\right)_{k'=\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}}$.

Da $\cos\frac{kh}{2}$ im zulässigen Intervall $-\pi\le kh\le+\pi$ positiv ist, hat $\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|}$ das Vorzeichen von $\frac{\partial|A_0(k')|}{\partial|k'|}$.
Im Limes $(\tau,h)\to 0$ bekommt man aber [+]

$$\lim_{(\tau,h)\to 0}\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|}=\frac{\partial|A_0(k)|}{\partial|k|}$$ nur dann, wenn $b-\frac{1}{2}=\varepsilon'\to 0$.

Wegen $a+b=1$ und $b-a>0$ heißt das auch $a-\frac{1}{2}=-\varepsilon'$ und $0<\varepsilon'\to+0$. Das Ausstrahlungsprinzip bestimmt die Größen a bezw. b zu $(a,b)\to\frac{1}{2}$.

Diejenige Lösung der Differenzengleichung (II,5,5), welche die Kausalbedingung und das Sommerfeld'sche Ausstrahlungsprinzip befriedigt, ist durch die Fourierdarstellung

$$G_{FS}(x,x'|t)=\lim_{\varepsilon'\to+0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint_{-\infty}^{+\infty}\epsilon\left(\left(\tfrac{\pi}{h}\right)^2-k^2\right)\langle x|k\rangle\frac{\tau\langle t|\omega\rangle}{e^{-i\omega\tau}+P(kh)}\frac{e^{i\omega\tau}-1}{i\omega\tau}\langle k|x'\rangle\,dk\,d\omega$$

mit $A=A_0\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)$ und $-P(kh)=\dfrac{1-i\tau\left(\frac{1}{2}-\varepsilon'\right)A_0}{1+i\tau\left(\frac{1}{2}+\varepsilon'\right)A_0}=\dfrac{1-i\frac{\tau}{2}A_0'}{1+i\frac{\tau}{2}A_0'}$

eindeutig gegeben. $$A_0'=\frac{A_0}{1+i\tau\varepsilon'A_0}.$$

Die Übersetzung von $K'=k'+i\lambda'$ im Ausdruck $A_0\,(K')$ der Differentialgleichung in $\frac{2}{h}\sin\frac{Kh}{2}$, $K=k+i\lambda$ im Ausdruck $A=A_0\left(\frac{2}{h}\sin\frac{Kh}{2}\right)$ der Differenzengleichung entspricht der Abbildung

$$\frac{K'h}{2}=\sin\frac{Kh}{2}\,.$$

[+] ε' muß nicht von τ, h abhängig sein!

Sie ist allgemein vorzeichentreu im Streifen $-\pi \leq kh \leq \pi$, $0 \leq |\lambda| \leq \infty$

$$\operatorname{sign} k' = \operatorname{sign} k$$
$$\operatorname{sign} \lambda' = \operatorname{sign} \lambda .$$

Die Nullstellen der Dispersionsgleichung

$$e^{-i\omega\tau} = \frac{1 - i\frac{\tau}{2}A_0'\left(\frac{2}{h}\sin\frac{Kh}{2}\right)}{1 + i\frac{\tau}{2}A_0'\left(\frac{2}{h}\sin\frac{Kh}{2}\right)}, \quad \begin{array}{l} \omega = \text{reell} \\ K = k + i\lambda(\epsilon') \\ \lambda(\epsilon') \to 0 \text{ für } \epsilon' \to 0 \end{array}$$

bezw.

$$A_0'\left(\frac{2}{h}\sin\frac{Kh}{2}\right) = \frac{2}{\tau}\operatorname{tg}\frac{\omega\tau}{2} = \omega'$$

liegen daher im gleichen Quadranten wie die der Gleichung

$$A_0\,(K') - i\gamma' = \omega'$$

Denn wenn $K'\,(\omega') = A_0^{-1}\,(\,\omega' + i\gamma'\,)$ die Auflösung der letzten Gleichung nach K' bezeichnet, dann ist

$$\frac{2}{h}\sin\frac{Kh}{2} = A_0^{-1}\left(\frac{\omega'}{1 - i\epsilon'\tau\omega'}\right), \quad \omega' + i\gamma' = \frac{\omega'}{1 - i\epsilon'\tau\omega'} .$$

Also werden die Punkte der Kurve

$$K'(\omega'(\omega)) = A_0^{-1}\left(\omega'(\omega) + i\gamma'(\omega)\right)$$

durch die vorzeichentreue Abbildung

$$\sin\frac{K(\omega)h}{2} = \frac{h}{2}K'(\omega')$$

auf Punkte der Kurve

$$K = k\;(\omega) + i\;\lambda\;(\omega)$$

abgebildet.

Bei der Komposition der Lösung G_{FS} aus laufenden Wellen liegen demnach die Polstellen

$$K(\omega) = k(\omega) + i\lambda(\omega, \epsilon') \quad , \quad \lambda(\omega, \epsilon') \to 0 \text{ für } \epsilon' \to 0$$

des Integranden in

$$\int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \frac{\langle x|k\rangle\langle k|x'\rangle}{e^{-i\omega\tau} + P(kh)}\, dk$$

im gleichen Quadranten, wie die Polstellen $k'(\omega') + i\lambda'(\omega', \epsilon')$, $(\lambda(\omega', \epsilon') \to 0$ für $\epsilon' \to 0)$ des Integranden in

$$\int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \frac{\langle x|k'\rangle\langle k'|x'\rangle}{\omega' - A_0(k') + i\epsilon}\, dk'$$

Ist daher $G_o\,(x, x'|t)$ asymptotisch aus nur auslaufenden Wellen komponierbar, so gilt gleiches für $G_{FS}\,(x, x'|t)$. Denn schiebt man den Integrationsweg in

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \frac{e^{-ik(x-x')}}{e^{-i\omega\tau} + P(kh)}\, dk$$

für $x - x' > o$ in das Unendliche der unteren K-Halbebene $(\lambda < o)$, so verbleiben asymptotisch nur die von den Polstellen stammenden Residuenbeiträge, während die dabei entstehenden Randintegrale längs $k = \pm\frac{\pi}{h}$, $-\infty \leq \lambda \leq 0$ asymptotisch verschwinden. Die beiden Randintegrale liefern nämlich den Beitrag

$$\pm \int_{K = \pm\frac{\pi}{h}}^{\pm\frac{\pi}{h} - i\infty} \frac{e^{-iK(x-x')}}{e^{-i\omega\tau} + P(Kh)}\, dK = \pm\, e^{\mp i\frac{\pi(x-x')}{h}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(x-x')}\, d\lambda}{e^{-i\omega\tau} + P(\pm\pi - i\lambda h)} \, .$$

Nun ist

$$\left| P(\pm\pi - i\lambda h) \right| = \left| \frac{1 - i\frac{\tau}{2} A_0'\left(\pm\frac{2}{h} \operatorname{Cof}\frac{\lambda h}{2}\right)}{1 + i\frac{\tau}{2} A_0'\left(\pm\frac{2}{h} \operatorname{Cof}\frac{\lambda h}{2}\right)} \right| < 1 \, , \quad \operatorname{Cof} \equiv \text{hyperbolischer Kosinus}$$

denn nach Voraussetzung ist für reelles Argument $\arg A_0'$ auf $\pi < \arg A_0' < 2\pi$ beschränkt. Daher hat $P(\pm\pi - i\lambda h) + e^{-i\omega\tau}$ wegen $|e^{-i\omega\tau}| = 1$ längs $0 \leq \lambda \leq \infty$ keine Nullstelle. Also gilt

$$\lim_{x-x' \to \infty} \left| \int_0^\infty \frac{e^{\lambda|x-x'|}}{e^{-i\omega\tau} + P} d\lambda \right| \leq \frac{\lim\limits_{x-x' \to \infty} \frac{1}{|x-x'|}}{\min\limits_{0 \leq \lambda \leq \infty} |e^{-i\omega\tau} + P|} = 0.$$

Ganz entsprechend zeigt man das asymptotische Verschwinden der Randintegrale für $x - x' < 0$.

Die Beachtung des Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzips ist von entscheidender Bedeutung vor allem dann, wenn G_{FS} den Transport einer Erhaltungsgröße beschreibt. Dann wird G_{FS} asymptotisch i.a. nicht verschwinden, sondern dort aus auslaufenden Wellen komponierbar sein, wenn die Gleichung $A_0(k) - \omega = 0$ für reelle ω reelle Lösungen $k(\omega)$ hat und $\frac{\partial|A_0|}{\partial|k|} > 0$ ist. Wenn bei der Übersetzung der Differentialgleichung in eine Differenzengleichung die Größe $A_0(k)$ übergeht in $A_0(f(k,h))$, $f(k,h)$ aber für reelle k nicht reell gewählt wird, so hat die Gleichung

$$D(K,\omega) = e^{-i\omega\tau} - \frac{1 - i\frac{\tau}{2} A_0(f(K,h))}{1 + i\frac{\tau}{2} A_0(f(K,h))} = 0, \quad \omega = \text{reell}$$

i.a. keine Lösungen für reelle $K = k$. Bei der Komposition der Lösung G_{FS} aus laufenden Wellen

$$G_{FS} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau} - 1}{i\omega\tau} e^{-i\omega t} \sum_{Res} \frac{e^{-ik(\omega)|x| - |\lambda(\omega)||x|}}{\left(\frac{\partial D(K,\omega)}{\partial k}\right)} d\omega$$

erhalten dann die komplexen Wellenzahlen K (ω) einen imaginären Anteil $\lambda(\omega)$. Die Wellen sind dann räumlich gedämpft und infolgedessen verschwindet der Integrand im asymptotischen Bereich exponentiell, damit aber auch G_{FS}. G_{FS} kann dann nicht den Transport einer Erhaltungsgröße beschreiben.

Im Anschluß hieran wird ein Beispiel zu Verletzung des Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzips angeführt.

Wie schon im Abschnittsteil (II,3) wird wieder die für $t < o$ verschwindende Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial G_o}{\partial t} + v\,\frac{\partial G_o}{\partial x} \equiv \frac{\partial G_o}{\partial t} + i A_o\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G_o = \delta(\bar{x})\,\delta(t)$$

betrachtet

$$\bar{x} = x - x_o$$

$$G_o = \epsilon(t)\left[\epsilon(-\bar{x})\epsilon(-v) + \epsilon(\bar{x})\epsilon(v)\right]\delta(|\bar{x}| - |v|t) \quad ,$$

und es sei zur Aufgabe gestellt, die Differentialgleichung in eine Differenzengleichung zu überführen. Der Kürze wegen sei nur positives v vorausgesetzt. Mit den in früheren Abschnitten dargelegten Methoden ist die Aufgabe leicht zu bewältigen. Bei der Übersetzung der Operation

$$v \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \text{ in } v \cdot \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \text{ oder in } v \cdot \frac{F(x) - F(x-h)}{h}$$

hat man darauf zu achten, daß der Ausdruck $A_o\ (f(k,h))$ auf den Bereich $\pi \leq \arg A_o \leq 2\pi$ beschränkt bleibt.

Mit der Übersetzung

$$\frac{\partial F}{\partial x} \to \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

wird

$$A_o = -iv\,\frac{e^{-ikh} - 1}{h} \quad , \quad v > 0 \,, \quad |kh| \leq \pi$$

unbrauchbar, wegen $0 \leq \arg A_o \leq \pi$, aber mit der Übersetzung

$$\frac{\partial F}{\partial x} \to \frac{F(x) - F(x-h)}{h}$$

wird

$$A_0 = -iv\,\frac{1-e^{ikh}}{h}\,,\quad v>0,\quad |kh|\leq\pi\,,$$

und damit $\pi \leq \arg A_0 \leq 2\pi$.

In der Dispersionsbeziehung (ω reell)

$$0 = D(K,\omega) = e^{-i\omega\tau} - \frac{1-i\frac{\tau}{2}A_0'}{1+i\frac{\tau}{2}A_0'}\,,\quad A_0' = \frac{A_0}{1+i\varepsilon'\tau A_0}$$

kann ε' Null gesetzt werden, da in diesem Beispiel (für fast alle k) $\arg A_0 \neq \pi, 2\pi$ ist:

$$e^{-i\omega\tau} - \frac{1-i\frac{\tau}{2}A_0}{1+i\frac{\tau}{2}A_0} = 0\,.$$

Hieraus gewinnt man

$$A_0 = -iv\,\frac{1-e^{iKh}}{h} = \frac{2}{\tau}\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega\tau}{2}\,,\quad K = k+i\lambda\,,$$

oder

$$e^{iKh} = 1 - i\,\frac{h\omega}{v}\,g(\omega\tau)\,,\quad g(\omega\tau) = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

und

$$|e^{iKh}| = e^{-\lambda h} = \sqrt{1+\left(\frac{h\omega}{v}g\right)^2} > 1\,,\ \text{d.h. } \lambda < 0\,.$$

Also liegt die Nullstelle von D (K,ω) in der unteren K-Halbebene. Dann wird

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h}\frac{e^{-ik\bar{x}}}{D(k,\omega)}\,dk = \frac{\epsilon(\bar{x})}{\left[1+\left(\frac{h\omega g}{v}\right)^2\right]^{\frac{\bar{x}}{2h}}}\cdot e^{i\varphi(\omega)\bar{x}} + \ldots\ldots$$

mit

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{h\omega}{v}g\right).$$

Mit den Punkten seien die asymptotisch ($|\bar{x}| \to \infty$) ohnedies verschwindenden Randintegrale angedeutet, die beim Hinunterziehen des Integrationsweges in die untere K-Halbebene ($\Im\{k\} < 0$) entstehen. Da für fast alle ω $\sqrt{1+(h\omega g/v)^2} > 1$ ist, verschwindet das Integral exponentiell wie $e^{-\frac{\bar{x}}{2h}\ln(1+(h\omega g/v)^2)}$ im asymptotischen Bereich, obwohl

$$\frac{\partial |A_0(k)|}{\partial |k|} = |v| > 0$$

ist. Die Übersetzung

$$\frac{\partial F}{\partial x} \to \frac{F(x) - F(x-h)}{h}$$

widerspricht in diesem Beispiel dem Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzip: A_0 ($f(kh)$) ist nicht reell für reelles k. Wählt man dagegen die Übersetzung

$$\frac{\partial F}{\partial x} \to \frac{F(x+\frac{h}{2}) - F(x-\frac{h}{2})}{h},$$

so bekommt man, wie leicht zu verifizieren ist

$$-\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \frac{e^{-ik\bar{x}}}{D(k,\omega)} dk = \epsilon(\bar{x}) \left[\sqrt{1-(\frac{h\omega}{2v}g)^2} - i\frac{h\omega}{2v}g\right]^{-\frac{\bar{x}}{h/2}} + \ldots,$$

also asymptotisch einen aus allen Frequenzen

$$\left| \frac{h\omega}{2v} g \right| \leq 1$$

zusammengesetzten, von Null verschiedenen Beitrag, denn hierfür ist

$$\left| \sqrt{1-(\frac{h\omega}{2v}g)^2} - i\frac{h\omega}{2v}g \right| = 1.$$

Anhang zu Teil II

Die Konvergenz der Fourierdarstellung der asymptotischen Lösung der Differenzengleichung gegen die asymptotische Lösung der zugeordneten Differentialgleichung.

Die kausale Lösung der partiellen Differenzengleichung

$$G_{FS}(x,x'|t+\tau)+PG_{FS}(x,x'|t)=\frac{\sin(x-x')\frac{\pi}{h}}{\pi(x-x')}[\epsilon(t)-\epsilon(t-\tau)]$$

mit

$$P=-\frac{1-i\frac{\tau}{2}A'}{1+i\frac{\tau}{2}A'},\quad A'=\frac{A}{1+i\tau\varepsilon'A},\quad \pi\leq\arg A\leq 2\pi$$

(II,A,1)

besitzt die Fourierdarstellung

$$G_{FS}=\int_0^{\tau}\delta\tau'\delta_p(t+\tau';\tau)G_F(x,x'|t+\tau'),\quad G_F=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h}\frac{\tau e^{-ik(x-x')-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}+P(kh)}dk\,d\omega.$$

Die entsprechende Lösung der ihr zugeordneten Differentialgleichung

$$\frac{\partial G_0}{\partial t}+iA_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)G_0=\delta(x-x_0)\,\delta(t)\qquad \text{(II,1,2)}$$

besitzt die Fourierdarstellung

$$G_0=\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i e^{-ik(x-x_0)-i\omega t}}{\omega-A_0(k)+i\varepsilon}dk\,d\omega=$$

$$=\frac{\epsilon(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ik(x-x_0)-iA_0(k)t}dk.$$

Nun kann man zeigen, daß für beliebige Werte x, t gilt:

$$\lim_{\varepsilon'\to 0}\lim_{h\to 0}\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h}\frac{\tau e^{-ikx-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}+P(kh)}\,dk\,d\omega = \qquad \text{(II,1,3)}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{i e^{-ikx-i\omega t}}{\omega - A_0(k)+i\varepsilon}\,dk\,d\omega .$$

Beim Grenzübergang $\tau \to 0$ kommt es auf das Integral

$$I(\tau,h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\frac{\tau e^{-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}+P}\,d\omega \qquad \text{(II,1,4)}$$

an. Die Abbildung

$$e^{i\Omega(W)\tau} = \frac{1+i\frac{\tau}{2}W}{1-i\frac{\tau}{2}W}\;,\; \Omega=\omega+i\gamma\;,\; W=U+iV$$

führt die von den Verzweigungspunkten $W=\pm\frac{2}{i\tau}$ nach $\pm i\infty$ aufgeschnittene, volle W-Ebene über in den Streifen $-\frac{\pi}{\tau}\leq\omega\leq+\frac{\pi}{\tau}$, $-\infty\leq\gamma\leq+\infty$ der Ω-Ebene. Dabei werden die Punkte der reellen W-Achse auf die Punkte $\gamma=0$, $-\frac{\pi}{\tau}\leq\omega\leq+\frac{\pi}{\tau}$ so abgebildet, daß die Punkte $\gamma<0$ der Ω-Ebene den Punkten $V<0$ der W-Ebene entsprechen.

In der neuen Variablen ausgedrückt erhält man

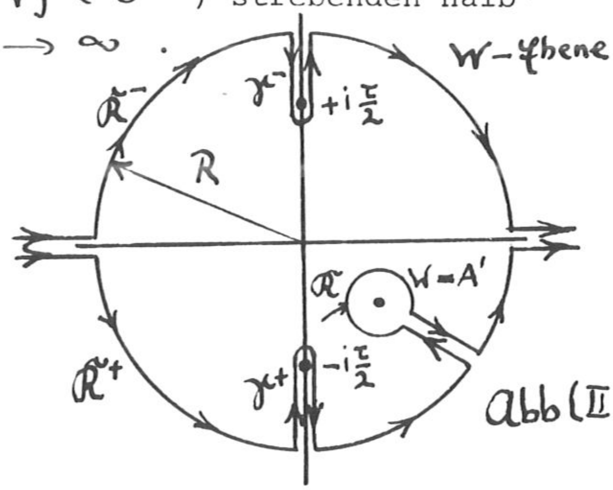
$$I(\tau,h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i e^{-i\Omega(U)t}}{U-A'}\cdot\frac{1+i\frac{\tau}{2}A'}{1-i\frac{\tau}{2}U}\,dU .$$

Im Limes $\tau\to 0$ geht der Faktor $1+i\frac{\tau}{2}A'$, $A'=\frac{A}{1+i\varepsilon' A\tau}$ gegen Eins, so daß das Integral eine etwas vereinfachte Gestalt bekommt

$$\lim_{\tau\to 0} I(\tau h) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\tau\to 0}\frac{(-1)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\Omega(U)t}}{U-A'}\,\frac{dU}{1-i\frac{\tau}{2}U} .$$

Der Grenzübergang $\tau \to 0$ kann nicht in der vorliegenden Integraldarstellung am Integranden vollzogen werden, da die Integrationsgrenzen in das Unendliche verlaufen und damit strebt $\tau \cdot U$ keinem sinnvollen Grenzwert zu. Es ist aber möglich, den Integrationsweg τ- unabhängig zu machen und ganz in das Endliche der W-Ebene zu verlegen. Die Beiträge auf den dabei entstehenden Zusatzwegen können beliebig klein gemacht werden.

Für $t > 0$ deformiert man unter Ausschluß der Singularitäten den Integrationsweg zu einen in das Unendliche der unteren W-Halbebene ($\operatorname{Im}\{W\} < 0$) strebenden Halbkreis $\mathfrak{R}^{u+}$ vom Radius $R \to \infty$. Siehe hierzu nebenstehende Abbildung. Der Beitrag zum Integral I längs $\mathfrak{R}^{u+}$ geht für $R \to \infty$ gegen Null, der längs der Schleife $\gamma^{\tau+}$ für $\tau \to 0$:



Abb(II,3)

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau,h) =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{(-1)}{2\pi}\left\{\oint_{\mathfrak{R}^u} + \lim_{R\to\infty}\int_{\mathfrak{R}^+} + \int_{\gamma^{\tau+}}\right\} \frac{e^{-i\Omega(W)t}}{W-A'}\,\frac{dW}{1-i\tau\frac{W}{2}} =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{(-1)}{2\pi}\oint_{\mathfrak{R}} \frac{e^{-i\Omega(W)t}}{W-A'}\,\frac{dW}{1-i\frac{\tau}{2}W}\,, \quad A' = \frac{A}{1+i\tau\varepsilon' A}.$$

Hier darf nun die Limesbildung unter dem Integralzeichen durchgeführt werden, denn $\mathfrak{R}$ ist unabhängig von τ so wählbar, dass W = A' im Inneren von $\mathfrak{R}$ liegt, und auf $\mathfrak{R}$ ist W beschränkt, so daß bei genügend kleinem τ die Funktion $\Omega(W)$ nach Potenzen von τ entwickelt werden kann

$$\Omega(W) = \frac{1}{i\tau}\ln\frac{1+i\frac{\tau}{2}W}{1-i\frac{\tau}{2}W} = W\left[1+\frac{1}{3}\left(i\frac{\tau}{2}W\right)^2+\dots\right].$$

Der Limes

$$\lim_{\tau \to 0} \Omega(W) = W$$

existiert dann auf $\mathcal{R}^{c}$, also gilt auch

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau, h) = \frac{(-1)}{2\pi i} \oint_{\mathcal{R}^{c}} \frac{e^{-iWt}}{W - A} dW \, , \quad t > \tau \to 0 \, .$$

Für negative t deformiert man den Integrationsweg ganz entsprechend unter Ausschluß des Verzweigungsschnittes zu einem, in das Unendliche der oberen W-Halbebene strebenden Halbkreis $\mathcal{R}^{-}$ vom Radius $R \to \infty$

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau, h) = \frac{(-1)}{2\pi i} \left\{ \lim_{R \to \infty} \int_{\mathcal{R}^{-}} + \int_{\gamma^{-}} \right\} \frac{e^{-i\Omega(W)t}}{W - A'} \frac{dW}{1 - i\frac{\tau}{2}W} \, .$$

Der Beitrag zum Integral I längs $\mathcal{R}^{-}$ geht wieder für $R \to \infty$ gegen Null, der längs der Schleife γ^{-} für $\tau \to 0$. Also

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau, h) = 0 \, , \quad t < 0 \, .$$

Für beliebige t kann das Ergebnis in der Darstellung

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau, h) = \frac{(-1)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iUt}}{U - A'} dU = \epsilon(t) e^{-iA't}$$

zusammengefaßt werden.

Den Nachweis über das Verschwinden des Beitrages längs $\mathcal{R}^{+}$ zu erbringen ist sehr einfach:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\mathcal{R}^+}\frac{\exp\frac{t}{\tau}\ln\frac{1-i\frac{\tau}{2}W}{1+i\frac{\tau}{2}W}}{W-A'}\,\frac{dW}{1-i\frac{\tau}{2}W}\right| =$$

$$= \lim_{\frac{\tau}{2}R=R'\to\infty}\left|\int_{\mathcal{R}^+}\frac{\exp\frac{t}{\tau}\ln\frac{1-i\frac{\tau}{2}W'}{1+i\frac{\tau}{2}W'}}{W'-\frac{\tau}{2}A'}\,\frac{dW'}{1-iW'}\right| \leq \lim_{R'\to\infty}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\psi}{|R'e^{i\psi}-\frac{\tau}{2}A'|} = 0$$

Im Integral längs der Schleife γ^+ führt man durch die Transformation der Integrationsvariablen W

$$W \to W' = i\frac{\tau}{2}W - 1\ ,\ W' = U' + iV'$$

die Schleife um W $= -i(2/\tau)$ über in eine Schleife $\gamma^{+\prime}$ um $W' = 0$ längs der positiven, reellen W'-Achse:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+}\frac{e^{-i\Omega(W)t}}{W-A'}\,\frac{dW}{1-i\frac{\tau}{2}W} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^{+\prime}}\frac{\exp\frac{t}{\tau}\frac{(-W')}{2+W'}}{1+W'-i\frac{\tau}{2}A'}\,\frac{dW'}{W'}\,.$$

Unter Berücksichtigung von Arg W'=o auf dem oberen und von $\arg W' = 2\pi$ auf dem unteren Ufer des Schnittes findet man dafür

$$-\frac{\sin\pi\frac{t}{\tau}}{\pi}\int_0^\infty\frac{\left(\frac{U'}{2+U'}\right)^{\frac{t'}{\tau}}}{1-i\frac{\tau}{2}A'+U'}\,\frac{dU'}{U'+2}\ ,\quad t' = t-\tau > 0\,,$$

und nach neuerlicher Variablen-Transformation $\frac{U'}{2+U'} = x$ auch

$$-\frac{\sin\pi\frac{t}{\tau}}{\pi}\int_0^1\frac{x^{\frac{t'}{\tau}}}{x+P}\,\frac{dx}{1+i\frac{\tau}{2}A'} \equiv -\frac{\sin\pi\frac{t}{\tau}}{\pi}\,\frac{J(\frac{t'}{\tau})}{1+i\frac{\tau}{2}A'}$$

$$P = \frac{1-i\frac{\tau}{2}A'}{1+i\frac{\tau}{2}A'}\,.$$

Für $J(v)$ gilt die Rekursionsgleichung

$$J(v+1) - P\,J(v) = \frac{1}{v+1} .$$

Nun existiert $\lim\limits_{v\to\infty} J(v)$, denn es ist

$$\lim_{v\to\infty} |J(v)| < \lim_{v\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{x+P} = \ln 2 .$$

Also gilt, wegen $\lim\limits_{\tau\to 0} P = 1$

$$\left|\lim_{\tau\to 0}\left\{J\left(\tfrac{t}{\tau}\right) - P\,J\left(\tfrac{t'}{\tau}\right)\right\}\right| \leq 2\lim_{\tau\to 0}\left|J\left(\tfrac{t}{\tau}\right)\right| = \lim_{\tau\to 0}\frac{\tau}{t} = 0 .$$

Eine ganz entsprechende Beweisführung für den Fall $t<0$ kann der Kürze wegen unterbleiben.

Beim Grenzübergang $h\to 0$ ist das Verhalten des Integrals

$$\bar{I}(h) = \frac{\epsilon(t)}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h} e^{-ikx - iA_0\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)}\,dk$$

von Interesse.

Der Integrand hat einen oszillatorischen Charakter, weshalb durch Abschätzung nach Beträgen keine Auskunft über das Verhalten von $\bar{I}(h)$ im Limes $h \to 0$ zu erhalten ist.

Man erwartet natürlich

$$\lim_{h\to 0} \bar{I}(h) = G_0(x,0|t) .$$

Mit den hier in Gebrauch genommenen, einfachen Methoden, läßt sich aber nur die Gleichheit

$$\lim_{h\to 0}\int_{x_1}^{x_2} \bar{\bar{I}}(h)\,\phi(x')\,dx' = \int_{x_1}^{x_2} G_0(x',0|t)\,\phi(x')\,dx'$$

zeigen, wenn $\phi(x')$ im Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$ stückweise stetig und beschränkt ist. Das genügt aber auch für alle Vorgänge, die $\phi(x')$ zur Anfangsbedingung oder Quellenverteilung haben. Das beliebige Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$ wird in Teilintervalle so zerlegt, daß in ihnen $\phi(x)$ monoton abnehmend oder monoton zunehmend ist. Sei $x_1' \leq x \leq x_2'$ ein derartiges Intervall und $0 < 2\delta \leq x_2' - x_1'$. Unter Benützung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung ist dann die Gleichheit

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\delta}^{+\delta} \bar{\bar{I}}(h)\,\phi(x-x')\,dx' = \int_{-\delta}^{+\delta} G_0(x,x'|t)\,\phi(x-x')\,dx'$$

leicht zu zeigen.
Nach dem soeben erwähnten Satz gilt mit einem Zwischenwert δ_0 aus dem Intervall $-\delta \leq \delta_0 \leq +\delta$

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-ik(x-x')}\phi(x-x')\,dx' = \phi(x-\delta)\,e^{-ikx}\,\frac{e^{-ik\delta_0} - e^{-ik\delta}}{-ik} -$$
$$- \phi(x+\delta)\,e^{-ikx}\,\frac{e^{-ik\delta_0} - e^{-ik\delta}}{-ik}.$$

δ_0 wird natürlich noch funktionell von $\phi(x')$ abhängen.
Nach Aufteilung des Integrals $\bar{\bar{I}}(h)$ in die Anteile

$$\bar{\bar{I}}_0 = \frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int_{-k_0}^{+k_0} e^{-ikx - iA_0 t}\,dk, \quad \bar{\bar{I}}_{\pm 1}(h) = \pm \int_{\pm k_0}^{\pm \frac{\pi}{h}} e^{-ikx - iA_0 t}\,dk$$

$$\bar{\bar{I}}(h) = \bar{\bar{I}}_{-1}(h) + \bar{\bar{I}}_0(h) + \bar{\bar{I}}_{+1}(h)$$

und Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes auf diese mit $\phi(x)$ multiplizierten Integrale entstehen neue Integrale der Form

$$\frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int_{\pm k_0}^{\pm\frac{\pi}{h}} e^{-ikx - iA_0 t} \frac{dk}{-ik} = F_{\pm 1}(x,t)$$

und

$$\pm \frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int_{-k_0}^{+k_0} e^{-ikx - iA_0 t} \frac{e^{-ik\delta_0} - e^{\pm ik\delta}}{-ik} dk = F_{\pm 0}(x,t).$$

Die Funktionen $F_{\pm 1}(x,t)$ verschwinden für unbegrenzt anwachsende k_0 -bezw. π/h - Werte. Es gilt nämlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_{\pm}(x,t)|^2 dx = \frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int_{\pm k_0}^{\pm\frac{\pi}{h}} e^{2\operatorname{Im}\{A_0\}t} \frac{dk}{k^2} \leq \frac{\epsilon(t)}{2\pi}\left(\frac{1}{k_0} - \frac{h}{\pi}\right)$$

wegen $\pi \leq \arg A_0 \leq 2\pi$. Also

$$\lim_{k_0 \to \infty} \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{\pm}(x,t)|^2 dx' = 0,$$

was nur sein kann, wenn

$$\lim_{k_0 \to \infty} \lim_{h \to 0} F_{\pm}(x,t) = 0$$ für fast alle x.

Dies besagt aber gerade, daß die Bedingung für die Vertauschbarkeit der Limites $\lim_{k_0}$, $\lim_{h}$ erfüllt ist. Denn, wenn $\psi(k)$ eine Funktion ist, die nicht von k_0 abhängt, gilt

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h}\psi(k)\,dk=\lim_{k_0\to\infty}\lim_{h\to 0}\left\{\int_{-\pi/h}^{-k_0}+\int_{-k_0}^{+k_0}+\int_{+k_0}^{+\frac{\pi}{h}}\right\}\psi(k)\,dk=$$

$$=\lim_{k_0\to\infty}\lim_{h\to 0}\left\{\int_{-\frac{\pi}{h}}^{-k_0}+\int_{k_0}^{\frac{\pi}{h}}\right\}\psi(k)\,dk+\lim_{k_0\to\infty}\lim_{h\to 0}\int_{-k_0}^{+k_0}\psi(k)\,dk\,,$$

also falls

$$\lim_{k_0\to\infty}\lim_{h\to 0}\int_{\pm k_0}^{\pm\frac{\pi}{h}}\psi(k)\,dk=0$$

ist, gilt auch

$$\lim_{h\to 0}\lim_{k_0\to\frac{\pi}{h}}\int_{-k_0}^{+k_0}\psi(k)\,dk=\lim_{k_0\to\infty}\lim_{h\to 0}\int_{-k_0}^{+k_0}\psi(k)\,dk.$$

Daher ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{\pm\epsilon(t)}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h}e^{-ikx-iA_0t}\,\frac{e^{-ik\delta_0}-e^{\pm ik\delta}}{-ik}\,dk=$$

$$=\lim_{k_0\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{\pm\epsilon(t)}{2\pi}\int_{-k_0}^{+k_0}e^{-ikx-iA_0t}\,\frac{e^{-ik\delta_0}-e^{\pm ik\delta}}{-ik}\,dk=\lim_{k_0\to\infty}\lim_{h\to 0}F_{\pm 0}(x,t)$$

Im zweiten Integral darf, da die Integrationsgrenzen nicht von h abhängen und $\lim_{h\to 0}A_0(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2})=A_0(k)$ existiert, der Grenzübergang $h\to 0$ am Integranden vollzogen werden

$$\lim_{k_0\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{\pm\epsilon(t)}{2\pi}\int_{-k_0}^{+k_0}e^{-ikx-iA_0(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2})t}\,\frac{e^{-ik\delta_0}-e^{\pm ik\delta}}{-ik}\,dk=$$

$$=\lim_{k_0\to\infty}\frac{\pm\epsilon(t)}{2\pi}\int_{-k_0}^{+k_0}e^{-ikx-iA_0(k)t}\,\frac{e^{-ik\delta_0}-e^{\pm ik\delta}}{-ik}\,dk\,.$$

Also ist (bezgl. G_F siehe (II,5,1) bzw.(III,7,1))

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \lim_{h\to 0} \lim_{\tau\to 0} G_F(x,x'|t)\phi(x-x')dx' = \lim_{h\to 0} \int_{-\delta}^{+\delta} \overline{I}(h)\phi(x-x')dx' =$$

$$= \phi(x-\delta) \lim_{h\to 0} \frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} e^{-ikx - iA_0(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2})t} \cdot \frac{e^{-ik\delta_0} - e^{ik\delta}}{-ik} dk -$$

$$- \phi(x+\delta) \lim_{h\to 0} \frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} e^{-ikx - iA_0(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2})t} \cdot \frac{e^{-ik\delta_0} - e^{-ik\delta}}{-ik} dk =$$

$$= \phi(x-\delta) \lim_{k_0\to\infty} \frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int_{-k_0}^{+k_0} e^{-ikx - iA_0(k)t} \frac{e^{-ik\delta_0} - e^{ik\delta}}{-ik} dk$$

$$- \phi(x+\delta) \lim_{k_0\to\infty} \frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int_{-k_0}^{+k_0} e^{-ikx - iA_0(k)t} \frac{e^{-ik\delta_0} - e^{-ik\delta}}{-ik} dk .$$

Der Ausdruck der letzten beiden Zeilen entsteht aber gerade durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes auf die mit $\phi(x-x')$ multiplizierte Lösung $G_0(x, x'|t)$ der Differentialgleichung (II,A,1). Daher besagt diese Gleichheitsfolge

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \lim_{h\to 0} \lim_{\tau\to 0} G_F(x,x'|t)\phi(x-x')dx' = \int_{-\delta}^{+\delta} G_0(x,x'|t)\phi(x-x')dx',$$

und, weil $\phi(x)$ stückweise stetig und beschränkt vorausgestzt wurde, gilt auch für ein beliebiges Intervall

$$\int_{x'}^{x''} \left\{ \lim_{h\to 0} \lim_{\tau\to 0} G_F(x,x_0|t) - G_0(x,x_0|t) \right\} \phi(x_0)dx_0 = 0.$$

In diesem Sinne ist die zu Beginn dieses Abschnittes aufgestellte Behauptung (II,A,2)

$$\lim_{h \to 0} \lim_{\tau \to 0} G_F (x, x_0 | t) = G_0 (x, x_0 | t)$$

zu verstehen.

III. Abschnitt

Die Fourierdarstellung der Green'schen Funktionen von partiellen Differenzengleichungen zweiter Ordnung und das Sommerfeld'sche Ausstrahlungsprinzip.

Teil 1)

Die Fourierdarstellung der Green'schen Funktion

Sei $V + P(\mathcal{V}) + Q(\mathcal{V})\, V^{-1}$ eine und nur eine Funktion der Verschiebungsmatrizen $V, \mathcal{V}$ erklärt durch ihre Elemente

$$(V^{\pm 1})_{mm',nn'} = \delta_{mm'}\,\delta_{n\pm 1,n'} \quad , -\infty \leq n, n' \leq +\infty$$

$$(\mathcal{V})_{mm',nn'} = \delta_{m+1,m'}\,\delta_{nn'} \quad , -\infty \leq m, m' \leq +\infty$$

und $G(m,m'|n,n')$ eine Lösung der Differenzengleichung (I,9)

$$\sum_{m''n''} \Big\{ (V+P)_{mm'',nn''} + $$

$$+ \sum_{\bar m \bar n} (Q)_{m\bar m, n\bar n} (V^{-1})_{\bar m m'', \bar n n''} \Big\} G(m''n''|m'n') = \delta_{mm'}\delta_{nn'} \qquad (III,1,1)$$

mit

$$(P)_{mm',nn'} = (p)_{mm'}\,\delta_{nn'} \,,\quad (Q)_{mm',nn'} = (q)_{mm'}\,\delta_{nn'} \,.$$

Wegen der expliziten Unabhängigkeit der Elemente von p und q von n, n' hängt G nur von der Differenz $n-n' = \nu$ ab

$$G(mn|m'n') \equiv G_0(m,m'|\nu) \,.$$

Wie im Abschnitt (II,5) erhält man die Lösung als Integraldarstellung

$$G_0(m,m'|\nu) = \iint\limits_{-\pi}^{+\pi} \langle m|\varphi\rangle \frac{\langle n|\psi\rangle\langle\psi|n'\rangle}{e^{-i\psi} + P(\varphi) + Q(\varphi)e^{i\psi}} \langle\varphi|m'\rangle\, d\varphi\, d\psi \,, \qquad (III,1,2)$$

wenn $e^{-i\psi} + P(\varphi) + Q(\varphi) e^{+i\psi} \neq 0$ ist, für fast alle φ.

Wie dort (II,5,1) definiert

$$G_F(x,x'|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{+\infty} \epsilon\left(\left(\tfrac{\pi}{\tau}\right)^2 - \omega^2\right) \epsilon\left(\left(\tfrac{\pi}{h}\right)^2 - k^2\right) \frac{\langle x|k\rangle\, \tau^2 \langle t|\omega\rangle \langle k|x'\rangle}{e^{-i\omega\tau} + P(kh) + Q(kh)\, e^{+i\omega\tau}}\, dk\, d\omega \qquad \text{(III,1,3)}$$

für beliebige x,x',t eine Funktion, welche die Werte

$$G_F(x,x'|t) = \frac{\tau}{h} G_0(m,m'|\nu)$$

annimmt, wenn x,x',t ganzzahlige Vielfache von h und τ sind und ebenso wie in (II,5,4) definiert

$$G_{FS}(x,x'|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{+\infty} \epsilon\left(\left(\tfrac{\pi}{h}\right)^2 - k^2\right) \frac{\langle x|k\rangle\langle k|x'\rangle\, \tau^2 \langle t|\omega\rangle}{e^{-i\omega\tau} + P(kh) + Q(kh)\, e^{+i\omega\tau}} \, \frac{e^{i\omega\tau} - 1}{i\omega\tau}\, dk\, d\omega \qquad \text{(III,1,4)}$$

eine Funktion, die, wenn für $\left[e^{-i\Omega\tau} + P + Q e^{i\Omega\tau}\right]^{-1} = F(\Omega)$

der Satz (II,5,3) erfüllt ist, für $t < o$ verschwindet und

die für ganzzahlige Werte $t = \nu\tau$, $-\infty \leq \nu \leq +\infty$

den Funktionswert $G_F(x,x'|\nu\tau)$ annimmt.

Der Satz (II,5,3) ist dann erfüllt, wenn die Beträge von

R und S, definiert durch

$$e^{-2i\omega\tau} + P e^{-i\omega\tau} + Q \equiv (e^{-i\omega\tau} - R)(e^{-i\omega\tau} - S)$$

kleiner als Eins sind (I,13)

$$|R|, |S| < 1, \qquad \text{(III,1,5)}$$

denn dann ist

$$[e^{-i\Omega\tau} - R]^{-1} \cdot [e^{-i\Omega\tau} - S]^{-1}$$

eine reguläre Funktion von $\Omega = \omega + i\gamma$ für $\gamma > 0$.

Um zu sehen, welche Konsequenzen diese Forderung für P

und Q hat, transformiert man die Variable Ω durch die schon bekannte Abbildung (II,A,)

$$e^{i\Omega\tau} = \frac{1+i\frac{\tau}{2}W}{1-i\frac{\tau}{2}W}, \quad \Omega = \omega + i\gamma, \quad \begin{matrix} -\pi < \omega\tau < +\pi \\ -\infty < \gamma < +\infty \end{matrix}$$

in die Variable W. Das ergibt für den Ausdruck der Dispersion

$$D(\Omega,k) = e^{-i\Omega\tau} + P(kh) + Q(kh)e^{i\Omega\tau} =$$

$$= \frac{1}{1+(\frac{\tau}{2}W)^2}\left\{(1+P+Q)+2\frac{i\tau}{2}(Q-1)W+(\frac{\tau W}{2})^2(-1+P-Q)\right\} =$$

$$= \frac{\tau}{2}\frac{P-Q-1}{1+(\frac{\tau}{2}W)^2}\left\{W^2+2i\left(\frac{2}{\tau}\right)\frac{Q-1}{P-Q-1}W+\left(\frac{2}{\tau}\right)^2\frac{P+Q+1}{P-Q-1}\right\}.$$

Setzt man hierin

$$\frac{P+Q+1}{P-Q+1} = -\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\left(B_0+(\varepsilon\tau)^2\right), \quad \frac{Q-1}{P-Q+1} = \frac{\varepsilon\tau^2}{2},$$

so wird

$$\frac{P}{2} = -\frac{1}{1+\tau^2\varepsilon'}\,\frac{1-(\frac{\tau}{2})^2(B_0+(\varepsilon\tau)^2)}{1+(\frac{\tau}{2})^2(B_0+(\varepsilon\tau)^2)}, \quad Q = \frac{1-\tau^2\varepsilon'}{1+\tau^2\varepsilon'} \qquad \text{(III,1,6)}$$

und

$$D(\Omega(W),k) = \frac{(\frac{\tau}{2})^2\left[(W+i\varepsilon\tau)^2-B_0\right]}{(1+\tau^2\varepsilon')\left[1+(\frac{\tau}{2})^2(B_0+\varepsilon^2\tau^2)\right]\left(1+(\frac{\tau W}{2})^2\right)} \qquad \text{(III,1,7)}$$

mit

$$\varepsilon'\tau^2 = \varepsilon\tau^2\left[1+(\tfrac{\tau}{2})^2(B_0+\varepsilon^2\tau^2)\right]^{-1}. \qquad \text{(III,1,8)}$$

R, S sind die Nullstellen des Polynoms D =o

$$(R,S) = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - Q}.$$

mit der Abkürzung $C = (\frac{\tau}{2})^2\,(B_0+\varepsilon^2\tau^2)$ und den obigen Ausdrücken für P und Q erhält man

$$(R,S) = \frac{1}{1+\varepsilon'\tau^2}\left\{\frac{1-C}{1+C} \pm \sqrt{\left(\frac{1-C}{1+C}\right)^2 - 1 + \left(\frac{\tau^2\varepsilon}{1+C}\right)^2}\right\} = \frac{1-C\pm i\tau\sqrt{B_0}}{(1+\varepsilon'\tau^2)(1+C)} .$$

Wenn B_o und ε reell und positiv ist - dies sei von nun ab vorausgesetzt - sind R und S zueinander konjungiert - komplex, ihre Beträge also einander gleich und kleiner als Eins, wie gefordert

$$|R| = |R^*| = |S| = \sqrt{Q} = \sqrt{\frac{(1-C)^2+\tau^2 B_0}{(1+\varepsilon'\tau^2)(1+C)}} = \sqrt{\frac{(1-\frac{\tau^2}{2}\varepsilon)^2+(\frac{\tau}{2}\sqrt{B_0})^2}{(1+\frac{\tau^2}{2}\varepsilon)^2+(\frac{\tau}{2}\sqrt{B_0})^2}}$$

$$(|R|,|S|) < 1 , \quad \lim_{\varepsilon\to 0}(|R|,|S|) = 1 .$$

Die Ausdrücke für R und S können nach einiger Umformung auf die übersichtliche Gestalt

$$R = \frac{1-i\frac{\tau}{2}(\sqrt{B_0}-i\varepsilon\tau)}{1+i\frac{\tau}{2}(\sqrt{B_0}-i\varepsilon\tau)} , \quad S = \frac{1+i\frac{\tau}{2}(\sqrt{B_0}+i\varepsilon\tau)}{1-i\frac{\tau}{2}(\sqrt{B_0}+i\varepsilon\tau)} \qquad \text{(III,1,9)}$$

gebracht werden, die ihre Eigenschaft, im Limes $\varepsilon \to 0$ komplexe Einheitsvektoren zu sein, ohne weiteres erkennen läßt. Diese Eigenschaft ist für die Erfüllbarkeit des Ausstrahlungsprinzips wichtig.

Teil 2)

Die Rolle des Sommerfeld'schen Ausstrahlungsprinzips als Eindeutigkeitsprinzip

Von der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich der Ableitung nach t

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} + B_1 \frac{\partial G_1}{\partial t} + B_{01}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) G_1 = \delta(x-x_0)\,\delta(t)$$

wird vorausgesetzt, daß sie durch geeignete Transformation auf die, den folgenden Überlegungen zu Grunde gelegte Normalform

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial t^2}(x,x_0|t) + B_0\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) G_0(x,x_0|t) \qquad \text{(III,2,1)}$$

gebracht werden kann. Die Fourierdarstellung ihrer Lösung führt mit dem Ansatz,

$$G_0(x,x_0|t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(k,\omega)\, e^{-ik(x-x_0)-i\omega t}\, dk\, d\omega$$

auf die algebraische Gleichung

$$\left(-\omega^2 + B_0(k)\right) G_0(k,\omega) = e^{ikx_0}.$$

Dabei wird angenommen, daß $B_0(K)$ eine für reelle $K = k$ reguläre, analytische Funktion von $K = k + i\lambda$ ist.
Ist B_0 (k) für reelles k komplex oder reell und negativ, so ist die Division mit $-\omega^2 + B_0(k)$, ω = reell, eindeutig

$$G_0(k,\omega) = \frac{e^{ikx_0}}{-\omega^2 + B_0(k)}.$$

Der Nenner hat dann die Nullstellen

$$\Omega_{1,2} = \pm \sqrt{|B_0|}\, e^{i\frac{\sigma}{2}} , \qquad B_0 = |B_0| e^{i\sigma} ,$$

welche zum Ursprung $\Omega = 0$ spiegelbildlich liegen. Die Differentialgleichung (III,2,1) besitzt deshalb dann, wenn für fast alle k die Phase $\frac{1}{2}\sigma(k) \neq \sigma$ ist, keine Lösung, die für $t<o$ verschwindet und für $t \to +\infty$ beschränkt ist. Siehe hierzu (II,6).
Damit die Differentialgleichung (III,2,1) eine kausale d.h. eine für $t<o$ verschwindende und für $t \to +\infty$ beschränkte Lösung besitzt, muß

$$\sigma(k) = \arg B_0(k) = \sigma \qquad \text{für k reell} \qquad \text{(III,2,2)}$$

sein.
Dann aber ist die Division mit $-\omega^2 + B_0(k)$ nicht eindeutig. Vielmehr trifft man mit einem $\varepsilon > 0$

$$G_0(k,\omega) = \frac{e^{ikx_0}}{B_0(k) - (\omega + i\varepsilon)^2} = \frac{e^{ikx_0}}{2\sqrt{B_0(k)}}\left(\frac{1}{\omega - \sqrt{B_0} + i\varepsilon} - \frac{1}{\omega + \sqrt{B_0} + i\varepsilon}\right)$$

diejenige Auswahl aus der Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung (III,2,1), welche die kausale, d.h. die für $t<o$ verschwindende Lösung liefert

$$G_0(x,x_0|t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\omega + \sqrt{B_0} + i\varepsilon} - \frac{1}{\omega - \sqrt{B_0} + i\varepsilon}\right) \frac{e^{-ik(x-x_0) - i\omega t}}{2\sqrt{B_0(k)}}\, dk\, d\omega =$$

$$= \frac{\epsilon(t)}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{B_0(k)}\, t}{\sqrt{B_0(k)}}\, e^{-ik(x-x_0)}\, dk. \qquad \text{(III,2,3)}$$

Die Komposition von G_o aus laufenden Wellen erhält man durch Integration über k

$$G_0(x, x_0|t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik(x-x_0)}}{B_0(k) - (\omega + i\varepsilon)^2}\, dk \quad .$$

Für $x-x_o > o$ kann der Integrationsweg längs der reellen k-Achse unter Aussparung aller Singularitäten in das Unendliche der unteren $K = k + i\lambda$ - Halbebene ($\lambda < 0$) geschoben werden. Im asymptotischen Bereich $|x - x_o| \longrightarrow \infty$ verschwinden alle Residuenbeiträge mit Ausnahme derjenigen, die durch die Polstellen $k(\omega) + i\lambda(\varepsilon,\omega)$ erzeugt werden, deren Imaginärteile für verschwindendes ε gegen Null streben. Es sind dies die für reelle ω reellen Lösungen $k\ (\omega)$ der Dispersionsgleichung

$$\omega^2 - B_o(k) = 0.$$

Wenn für diese Lösungen die Bedingung (II,6,1)

$$\frac{\partial|\omega|}{\partial|k|} > 0$$

erfüllt ist, dann ist die Lösung aus nur auslaufenden Wellen asymptotisch komponierbar. Diese Lösung befriedigt das Sommerfeld'sche Ausstrahlungsprinzip.

Die Aufgabe, die Differentialgleichung (III,2,1) in eine Differenzengleichung zu überführen, deren Kausalbedingung (I,13) für beliebige Werte $(\tau, h) > 0$, also ohne jede Beschränkung von B_o erfüllbar ist und deren Lösung das Sommerfeld'sche Ausstrahlungsprinzip befriedigt, wenn gleiches für die für $t < o$ verschwindende Lösung der Differentialgleichung (III,2,1) gilt, ist nun mit der Kenntnis von P und Q (III,1,6) bezw. von R und S (III,1,9) erledigt, wenn in diesen Ausdrücken die Identifizierung der Funktion B_o mit der Funktion B_o der Differentialgleichung (III,2,1) unter Berücksichtigung der Übersetzung

$$\nabla F \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \rightarrow \frac{F(x+\frac{h}{2}) - F(x-\frac{h}{2})}{h} \equiv \nabla_{\frac{h}{2}} F(x)$$

vorgenommen wird. Denn in den Ausdrücken P, Q bzw. R,S wird damit

$$B_0 = B_0\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)$$

eine reelle, positive Funktion für reelles Argument, wenn B_0 (k) entsprechend der Forderung (III,2,2) eine reelle, positive Funktion von k ist . Die Differenzengleichung für G_{FS} lautet (man vergleiche mit (II,5,5)

$$\frac{1}{\tau^2}\left\{G_{FS}(x,x'|t+\tau) - 2G_{FS}(x,x'|t) + G_{FS}(x,x'|t-\tau)\right\} +$$
$$+\frac{2}{\tau^2}\left\{1 - \frac{1-(\frac{\tau}{2})^2(B_0+\varepsilon^2\tau^2)}{1+(\frac{\tau}{2})^2(B_0+\varepsilon^2\tau^2)}\,\frac{1}{1+\tau^2\varepsilon'}\right\}G_{FS}(x,x'|t) + \qquad \text{(III,2,3)}$$
$$+\frac{1}{\tau^2}\left\{\frac{1-\tau^2\varepsilon'}{1+\tau^2\varepsilon'}-1\right\}G_{FS}(x,x'|t+\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h}\langle x-x'|k\rangle dk\,\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\delta(t-\tau')d\tau',$$

oder unter Benützung der Ausdrücke ($\underline{III}$,1,9), mit V_τ als Differenzenoperator (-Matrix)

$$V_\tau G(t) = G(t+\tau)$$

und der Bezeichnung+ $(\pm\sqrt{B_0} - i\varepsilon\tau) = A_0^{\pm}$, $\mathrm{Im}\{A_0^{\pm}\} < 0$, etwas übersichtlicher

$$\left(V_\tau - \frac{1-\frac{i\tau}{2}A_0^+}{1+\frac{i\tau}{2}A_0^+}\right)\left(V_\tau - \frac{1-\frac{i\tau}{2}A_0^-}{1+\frac{i\tau}{2}A_0^-}\right)G_{FS} = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h}\langle x-x'|k\rangle dk\int_0^{\tau}\delta(t+\tau')d\tau' \qquad \text{(III,2,4)}$$

+Wenn B_0 (k) bekannt ist, kennt man auch die Matrixelemente

$$(\sqrt{B_0})_{mm'} = \langle m|\sqrt{B_0}|m'\rangle = \iint_{-\pi}^{+\pi}\langle m|\varphi\rangle\langle\varphi|\sqrt{B_0}|\varphi'\rangle\langle\varphi'|m'\rangle d\varphi\, d\varphi' =$$
$$= \int_{-\pi}^{+\pi}\langle m|\varphi\rangle\langle\varphi|m'\rangle\sqrt{B_0\left(\frac{2}{h}\sin\frac{\varphi}{2}\right)}\,d\varphi$$

und natürlich auch

$$\left(\frac{1-\frac{i\tau}{2}A_0^{\pm}}{1+\frac{i\tau}{2}A_0^{\pm}}\right)_{mm'} = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-i\frac{\tau}{2}A_0^{\pm}\left(\frac{2}{h}\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{1+i\frac{\tau}{2}A_0^{\pm}\left(\frac{2}{h}\sin\frac{\varphi}{2}\right)}\langle m|\varphi\rangle\langle\varphi|m'\rangle d\varphi .$$

Die Größen

$$\mathcal{R}(kh) = \frac{1 - i\frac{\tau}{2}\, A_0^+\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)}{1 + i\frac{\tau}{2}\, A_0^+\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)} = S^*(kh)$$

sind im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ komplexe Einheitsvektoren, also haben die Gleichungen

$$e^{-i\omega_+\tau} - \mathcal{R}(K_+h) = 0, \quad e^{-i\omega_-\tau} - S(K_-h) = 0$$

für reelle $\omega_\pm$ Lösungen $K_\pm = k_\pm(\omega_\pm) + i\lambda(\varepsilon, \omega_\pm)$, deren Imaginärteil $\lambda_\pm(\varepsilon, \omega_\pm)$ gegen Null strebt für $\varepsilon \rightarrow 0$. Diese Lösungen erfüllen die Bedingung (siehe (II,6,1) und ff)

$$\frac{\partial |\omega_\pm|}{\partial |k|} > 0$$

dafür, daß die Lösung der Differenzengleichung (III,2,3) bezw. (III,2,4) asymptotisch aus nur auslaufenden Wellen komponierbar ist, wenn $\frac{\partial |A_0^\pm(k)|}{\partial |k|} > 0$ ist.

Die Lösung G_{FS} der Differenzengleichung (III,2,3, bzw. 4) befriedigt somit das Sommerfeld'sche Ausstrahlungsprinzip, wenn dies für die Lösung G_0 der Differentialgleichung (III,2,1) gilt.

Teil 3)

Die Konvergenz der Fourierdarstellung der asymptotischen Lösung der Differenzengleichung gegen die asymptotische Lösung der zugeordneten Differentialgleichung

Die kausale Lösung der partiellen Differenzengleichung (III,2,4)

$$(V_\tau - R)(V_\tau - S)\, G_{FS} = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \langle x - x' | k\rangle dk \int_0^\tau \delta(t+\tau')d\tau'$$

besitzt die Fourierdarstellung (III,1,4) mit

$$D(\omega,k) = e^{-i\omega\tau} + P + Q e^{i\omega\tau} = e^{i\omega\tau}\left(e^{-i\omega\tau} - R(kh)\right)\left(e^{-i\omega\tau} - S(kh)\right).$$

Wegen des periodischen Charakters von D (ω, k) in ω ist diese auch gleich

$$G_{FS} = \int_0^\tau d\tau' \delta_p(t+\tau'; \tau)\, G_F(x, x_0 | t+\tau')$$

mit

$$G_F(x,x_0|t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \frac{\tau^2 e^{-ik(x-x_0) - i\omega(t+\tau)}}{\left(e^{-i\omega\tau} - R(kh)\right)\left(e^{-i\omega\tau} - S(kh)\right)} dk\, d\omega .$$

G_F läßt die Aufspaltung in zwei Anteile zu:

$$G_F^+ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \frac{\tau e^{-i\omega\tau}}{R(kh) - S(kh)} \; \frac{\tau e^{-ik(x-x_0) - i\omega t}}{e^{-i\omega\tau} - R(kh)} dk\, d\omega$$

$$G_F^- = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \frac{\tau e^{-i\omega\tau}}{-R(kh) + S(kh)} \; \frac{\tau e^{-ik(x-x_0) - i\omega t}}{e^{-i\omega\tau} - S(kh)} dk\, d\omega$$

$$G_F = G_F^+ + G_F^- .$$

Ihrem Charakter nach entspricht $G_F^{\pm}$, vom Faktor

$$\frac{\tau e^{-i\omega\tau}}{R-S} = \frac{1}{2} i e^{-i\omega\tau}\left[\frac{(1-\frac{\varepsilon}{2}\tau^2)^2}{\sqrt{B_0}} + (\tfrac{\tau}{2})^2\sqrt{B_0}\right]$$

abgesehen, dem im Abschnitt II besprochenen Typ. Beim Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$ kommt es auf die Integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\frac{\tau e^{-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}-R(kh)}d\omega \;, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\frac{\tau e^{-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}-S(kh)}d\omega$$

an. Im Abschnitt (II,A) wurde dieser Grenzübergang besprochen und ausgeführt. Von dort kann das Ergebnis

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\frac{\tau e^{-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}-R}d\omega = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{R}^0}\frac{e^{-iWt}dW}{W-A_0} = \epsilon(t)e^{-i\sqrt{B_0}t}$$

und

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/\tau}^{+\pi/\tau}\frac{\tau e^{-i\omega t}}{e^{-i\omega\tau}-S}d\omega = \epsilon(t)e^{+i\sqrt{B_0}t}$$

übernommen werden. Die Zusammensetzung zu $\lim\limits_{\tau\to 0} G_F$ ergibt mit

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\tau e^{-i\omega\tau}}{R-S} = \frac{i}{2\sqrt{B_0}}$$

die zu (III,2,3) parallele Darstellung

$$\lim_{\tau\to 0} G_F = \frac{\epsilon(t)}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{+\pi/h}\frac{\sin\sqrt{B_0(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2})}\,t}{\sqrt{B_0(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2})}}e^{-ik(x-x_0)}dk.$$

Bedenkt man, daß

$$\frac{\sin\sqrt{B_0}\,t}{\sqrt{B_0}} = \frac{1}{2}\int_{-t}^{+t} e^{-i\sqrt{B_0}\,t'}\,dt'$$

ist, so kann für die obige Darstellung auch

$$\lim_{\tau\to 0} G_F = \frac{\epsilon(t)}{2\pi}\,\frac{1}{2}\int_{-t}^{+t} dt' \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} e^{-ik(x-x_0)-i\sqrt{B_0\left(\frac{2}{h}\sin\frac{kh}{2}\right)}\,t'}\,dk$$

geschrieben werden. Nach den Ausführungen des Abschnittes (II,A) kann daher mit $A_0 = \sqrt{B_0}$, $\pi \leq \arg\sqrt{B_0} \leq 2\pi$, das Ergebnis bezüglich des Grenzüberganges $\lim_{h\to 0}\,(\lim_{\tau\to 0} G_F)$ von dort übernommen werden.