

Die analytische Lösung einer partiellen  
Differentialgleichung vom hyperbolischen  
Typus

H. Preis

IPP 4/89

August 1971

**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**

**GARCHING BEI MÜNCHEN**



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK  
GARCHING BEI MÜNCHEN

Die analytische Lösung einer partiellen  
Differentialgleichung vom hyperbolischen  
Typus

H. Preis

IPP 4/89

August 1971

Für die Ausführung der Programmierung danke ich

Frau Ch. Ludescher

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem  
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die  
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

An analytic solution method is given for the hyperbolic differential equation

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + b \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0$$

with constant coefficients and the boundary conditions

$$T(x,0) = T_0$$

$$T(x,0) = T_0 e^{-At}$$

This is done by the Riemann integration method, which can be used to advantage for the characteristic initial value problem, the required function  $T(x,t)$  being given on the characteristics. The solution function contains an analytically unsolvable integral, which is numerically integrated by the Gauss method. The programming language used for numerical evaluation of  $T(x,t)$  is FORTRAN IV.

Inhaltsverzeichnis

	Seite:
Zusammenfassung	2
1. Einleitung	3
2. Analytische Lösungsmethode	4
2.1 Klassifikation partieller Differential- gleichungen zweiter Ordnung	4
2.2 Die Riemannsche Integrationsmethode	7
2.3 Die Konstruktion der Riemanschen Funktion	13
2.4 Charakteristische Anfangswerte	16
3. Numerische Auswertung	20
3.1 Kurvenblätter	24
4. Literaturverzeichnis	26



Zusammenfassung

Für die hyperbolische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x \cdot \partial t} + a \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + b \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0$$

und den Randbedingungen

$$T(x,0) = T_0$$

$$T(x,0) = T_0 e^{-At}$$

wird ein analytisches Lösungsverfahren angegeben. Dies geschieht unter Benutzung der Riemannsches-Integrationsmethode; die für das hier vorliegende Charakteristische-Anfangsproblem, d. h. die gesuchte Funktion  $T(x,t)$  ist auf den Charakteristiken vorgegeben, vorteilhaft zu verwenden ist. In der erhaltenen Lösungsfunktion verbleibt ein analytisch nicht lösbares Integral, welches mit Hilfe der Gauß'schen Methode numerisch integriert wird. Als Programmiersprache für die numerische Auswertung von  $T(x,t)$  findet FORTRAN IV Verwendung.

## 1. Einleitung

Der Abkühlprozeß fester Körper, bewirkt durch ein Kühlmedium das dieselben durch- oder umströmt, läßt sich durch die partielle Differentialgleichung

$$c_1 c_2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x \partial t} + c_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + c_2 \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

darstellen. Genauer gesagt, beschreibt Gl. (1) die Temperatur  $T(x, t)$  des Körpers als Funktion seiner Längskoordinate  $x$  und der Zeit  $t$  während des Wärmeübergangs an der Grenzfläche der beiden Medien, wobei die Richtung von  $x$  als Strömungsrichtung angenommen wird. In oben angegebener Formel findet die Beschreibung der Wärmeleitung keine Berücksichtigung. Also sind die Ebenen senkrecht zur Strömungsrichtung  $x$  als isotherm anzusehen, nicht hingegen die Längsschnittebene.

Zu einer analogen Aufgabenstellung führt eine Untersuchung [1], die sich mit den Abkühlproblemen der supraleitenden Spulen des Stellarators W VII befaßt. Dabei dient Helium als Kühlmittel, welches die Spulen in dafür vorgesehenen Kanälen durchströmt. Die mathematische Formulierung des dann stattfindenden Wärmeaustauschs erfolgt durch Gleichung (1), deren Herleitung in [1] ausgeführt ist. Ebenso werden dort alle für die Herleitung notwendigen Voraussetzungen spezifiziert und festgehalten. Somit verbleibt als Aufgabe dieser Arbeit eine Lösung der abgeleiteten partiellen Differentialgleichung (1) für die Nebenbedingungen



$$\begin{aligned} T(x,t) &= T_0 && \text{(Anfangsbedingung)} \\ T(0,t) &= T_0 e^{-At} && \text{(Randbedingung)} \end{aligned} \tag{2}$$

zu bestimmen.

## 2. Analytische Lösungsmethode

### 2.1 Klassifikation partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die hier zu lösende Differentialgleichung (1) gehört zu der Klasse linearer, partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren allgemeine Gestalt durch

$$\begin{aligned} a(x,y)z_{xx} + 2b(x,y)z_{xy} + c(x,y)z_{yy} + d(x,y)z_x + h(x,y)z_y \\ + g(x,y)z + f(x,y) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

gegeben ist. Darin werden folgende Abkürzungen benutzt:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

In [ 2 ] wird die mit Gl. (3) verbundene charakteristische Gleichung

$$a(x,y)(dy)^2 + 2b(x,y)dy \cdot dx + c(x,y)(dx)^2 = 0 \tag{4}$$

abgeleitet. Diese in der Veränderlichen

$$y' = \frac{dy}{dx} \tag{5}$$

quadratische Gleichung besitzt folgende zwei Integrale<sup>1.)</sup>

$$y'_{1,2} = \frac{b}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2 - ac} \tag{6}$$

die man bekanntlich die Charakteristiken der Differentialgleichung (3) nennt. Entsprechend der Beschaffenheit des Wurzelausdrucks in (6) wird die Differentialgleichung (3) bezeichnet

vom hyperbolischen Typus, wenn  $b^2 - ac > 0$ , (7)

vom elliptischen Typus, wenn  $b^2 - ac < 0$ , (8)

vom parabolischen Typus, wenn  $b^2 - ac = 0$  (9)

ist.

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen soll nun die gegebene Differentialgleichung

$$c_1 c_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + c_1 \frac{\partial T}{\partial x} + c_2 \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

betrachtet werden, die mit den Beziehungen

---

1.) Der einfacheren Schreibweise wegen werden künftig die Argumente der Funktionen weggelassen.



$$T_x = \frac{\partial T}{\partial x}; \quad T_t = \frac{\partial T}{\partial t}; \quad T_{xt} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}; \quad d = \frac{1}{c_2}; \quad h = \frac{1}{c_1}$$

folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$T_{xt} + d T_x + h T_t = 0 \quad (1)$$

Ihre Koeffizienten sind konstant und erfüllen wegen

$$a = c = 0 \quad (10)$$

$$b = 1$$

Bedingung (7). Somit ist die vorliegende partielle Differentialgleichung (1) vom hyperbolischen Typ. Die zu ihr gehörende charakteristische Gleichung ergibt sich gemäß Gl. (4) unter Verwendung von Gl. (10) zu

$$dx \, dt = 0 \quad (11)$$

Lösungen dieser Gleichung sind die achsenparallelen Geraden

$$x = \xi = \text{const.} \quad (12)$$

und

$$t = \eta = \text{const.} \quad (13)$$

womit zugleich die Charakteristiken der Differentialgleichung (1) festgelegt wären.

Die beiden Hauptachsen der partiellen Ableitungen

## 2.2 Die Riemannsche Integrationsmethode

Bevor nun zur Integration von Gl. (1) übergegangen werden soll, wird diese noch durch die Transformation

$$T(x,t) = W(x,t) e^{\lambda x + \mu t} \quad (14)$$

auf eine einfachere Form gebracht. Natürlich ist die genannte Transformation nur im Fall konstanter Koeffizienten erfolgreich zu verwenden. Nach Einsetzen von Gl. (14) in (1) folgt 2.)

$$W_{xt} + (\mu+d)W_x + (\lambda+h)W_t + (\lambda\mu+h\mu+d\lambda)W = 0 \quad (15)$$

In Gl. (14) sind  $\lambda$  und  $\mu$  frei wählbare Parameter, die hier, wie Gl. (15) erkennen läßt, sinnvoll zu

$$\mu = -d$$

$$\lambda = -h$$

$$g = dh$$

gewählt werden. Dadurch verschwindet in Gl (15) der zweite und dritte Summand, so daß sie sich auf

$$W_{xt} - gW = 0 \quad (16)$$

reduziert.

---

2.) Indizes bedeuten wie vorher die partiellen Ableitungen nach der entsprechenden Variablen.



Zu ihr gehören die entsprechend transformierten Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}W(x, 0) &= T_0 e^{hx} \\W(0, t) &= T_0 e^{-(A-d)t}\end{aligned}\tag{17}$$

Das Problem beschränkt sich somit auf die Lösung der partiellen Differentialgleichung (16) mit den Nebenbedingungen (17). Es ist also diejenige Integralfläche von Gl. (16) gesucht, in der die Funktionen (17) verlaufen. Da die Nebenbedingungen (17) auf den Charakteristiken vorgegeben sind, hat das hier vorliegende Cauchy-Problem sogenannte charakteristische Anfangswerte. Mit Hilfe der Riemannschen Methode wird nun die Lösung des Cauchy-Problems auf die Konstruktion der Riemannschen Funktion  $V$  zurückgeführt. Diese Funktion ist die Lösung der homogenen partiellen Differentialgleichung

$$M(V) = V_{xt} - gV = 0\tag{18}$$

Der so eingeführte Operator  $M(V)$  ist der adjungierte zu

$$L(W) = W_{xt} - gW = 0\tag{16}$$

Beide zusammengefaßt ergeben die Identität

$$2(VL(W) - WM(V)) = (W_x V - V_x W)_t + (W_t V - V_t W)_x\tag{19}$$

oder abgekürzt geschrieben

$$2 \cdot (VL(W) - WM(V)) = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (20)$$

mit  $P = W_x V - V_x W \quad (21)$

$$Q = W_t V - V_t W \quad (22)$$

Für die Differentialgleichung (16) wird nun die Lösung des Cauchyschen Problems dargelegt. In der  $x, t$ -Ebene ist also eine Kurve  $e$  gegeben, auf der die Werte der Funktion  $W$  samt ihrer partiellen Ableitungen  $W_x$  und  $W_t$  als bekannt vorausgesetzt werden. Darüberhinaus sind alle Funktionen als stetige Funktionen anzusehen. Außerdem soll die Kurve  $e$  so verlaufen, daß sie jede der beiden Charakteristiken  $x = \xi$  und  $t = \eta$  höchstens einmal schneidet; (Abb.1) mit ihnen so-

mit einen abgeschlossenen Teilbereich  $D$  der  $x, t$ -Ebene bildet. Integriert man über diesen Bereich unter Benutzung der Greenschen Formel

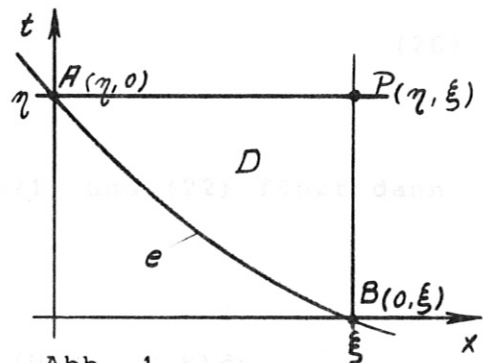


Abb. 1

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} \right) dx dt = \int_{\lambda} Q dt - P dx \quad (23)$$

die Relation (20), so entsteht die Beziehung

$$2 \iint_D (V_L(W) - W_M(V)) dx dt = \int_{\lambda} Q dt - P dx \quad (24)$$

aus der sich eine Lösungsformel für die gesuchte Funktion  $W$  herleiten läßt. In Gl. (24) wird die linke Seite wegen Gl. (16) und (18) gleich Null, andererseits ist das Kurvenintegral der rechten Seite aufspaltbar, weil sich der geschlossene Integrationsweg  $\lambda$  aus der Kurve  $e$  und den beiden Strecken  $AP$  und  $PB$  zusammensetzt. Aus Gl. (24) folgt

$$\int_e Q dt - P dx + \int_A^P Q dt - P dx + \int_P^B Q dt - P dx = 0 \quad (25)$$

eine Beziehung, die sich wegen  $dx = 0$  entlang  $PB$  und  $dt = 0$  entlang  $AP$  noch auf die Form

$$\int_e Q dt - P dx + \int_A^P -P dx + \int_P^B Q dt = 0 \quad (26)$$

vereinfachen läßt. Einsetzen von Gl. (21) und (22) führt dann zu

$$\int_e [(W_t V - V_t W) dt - (W_x V - V_x W) dx] + \int_A^P - (W_x V - V_x W) dx + \int_P^B (W_t V - V_t W) dt = 0 \quad (27)$$

oder  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$  (28)

Wegen der vorliegenden Cauchyschen Anfangswerte ist das Integral  $I_1$  über  $e$  bekannt. Des weiteren auch die Integrale  $I_2$  und  $I_3$ , denn nach Voraussetzung existiert eine Lösung  $V$  der Differentialgleichung (18). Schreibt man nun noch die Integranden der Integrale  $I_2$  und  $I_3$  in der Form

$$W_x V - V_x W = (WV)_x - 2WV_x \quad (29)$$

$$W_t V - V_t W = (WV)_t - 2WV_t \quad (30)$$

so entsteht

$$I_2 = - \int_A^P (W_x V - V_x W) dx = (WV)(A) - (WV)(P) + 2 \int_A^P WV_x dx \quad (31)$$

$$I_3 = \int_P^B (W_t V - V_t W) dt = (WV)(B) - (WV)(P) - 2 \int_P^B WV_t dt \quad (32)$$

damit nimmt Gl. (27) nachstehende Gestalt an

$$\begin{aligned} 2W_{(P)}V_{(P)} &= \int_e \left[ (W_t V - V_t W) dt - (W_x V - V_x W) dx \right] + (WV)(A) \\ &+ (WV)(B) + 2 \int_A^P WV_x dx - 2 \int_P^B WV_t dt \end{aligned} \quad (33)$$

die sich weiter vereinfacht, wenn  $V$  nicht eine beliebige

Lösung von

$$M(v) = 0 \quad (18)$$

ist, sondern den zusätzlichen Bedingungen

$$V_x = 0 \quad \text{auf der Charakteristik AP} \quad (34)$$

$$V_t = 0 \quad \text{auf der Charakteristik PB} \quad (35)$$

$$V(p) = 1 \quad (36)$$

genügt. Denn bei Erfüllung von Gl. (34) und (35) verschwinden die Integrale über AP und PB, so daß sich für die gesuchte Funktion W die Darstellung

$$\frac{2 W(p)}{e} = \frac{\int [(W_t V - V_t W) dt - (W_x V - V_x W) dx] + (WV)(A) + (WV)(B)}{\quad} \quad (37)$$

ergibt. Mit G. (37) ist eine Lösungsformel der Differentialgleichung (16) gegeben. Sie erfordert die Kenntnis der Riemannschen Funktion V, die im nächsten Abschnitt entwickelt werden soll.



### 2.3 Die Konstruktion der Riemannschen Funktion

Im folgenden wird die Riemannsche Funktion  $V$  als Lösung von

$$M(V) = V_{xt} - gV = 0 \quad (18)$$

ermittelt. Dabei soll  $V$  die unter 2.2 festgelegten Nebenbedingungen (34) bis (36) erfüllen. Um das angestrebte Ziel zu erreichen, wird der Lösungsansatz

$$V = V_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} g^n V_{(n)} \quad (38)$$

benutzt, der die Differentialgleichung (18) befriedigt, wenn die Koeffizienten von  $g^n$  für  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$  identisch Null werden. Denn nach Einsetzen von Gl. (38) in Gl. (18) entsteht die Beziehung

$$V_{xt} - gV = V_{(0)xt} + \sum_{n=1}^{\infty} g^n V_{(n)xt} - \sum_{n=1}^{\infty} g^n V_{(n-1)} = 0 \quad (39)$$

oder zusammengefaßt

$$V_{(0)xt} + \sum_{n=1}^{\infty} (V_{(n)xt} - V_{(n-1)}) g^n = 0 \quad (40)$$

Aus Gl. (40) folgt dann unmittelbar das Entwicklungsgesetz der Reihenglieder zu

$$V_{(0)xt} = 0$$

$$V_{(1)xt} = V_{(0)}$$

$$V_{(2)xt} = V_{(1)}$$

usw. bis zum n-ten Glied

$$V_{(n)xt} = V_{(n-1)}$$

Nach der Methode der sukzessiven Approximation ist also das n-te Reihenglied aus dem (n-1)-ten zu berechnen. Für die hier gegebenen Nebenbedingungen ergibt sich:

$$V_{(0)xt} = 0$$

$$V_{(0)x} = 0 \quad \text{wegen } V_{(0)x} = 0 \text{ für } t = \eta$$

$$V_{(0)} = 1 \quad \text{wegen } V_{(0)} = 1 \text{ für } t = \eta \text{ und } x = \xi$$

weiter ist

$$V_{(1)xt} = V_{(0)} = 1$$

$$V_{(1)} = \int_{\xi}^x \int_{\eta}^t dudv$$

$$\underline{V_{(1)} = (x - \xi)(t - \eta)}$$

daraus folgt wiederum

$$\begin{aligned}
 V(2)_{xt} &= V(1) = (x - \xi)(t - \eta) \\
 V(2) &= \int_{\xi}^x \int_{\eta}^t (u - \xi)(v - \eta) \, du \, dv \\
 V(2) &= \frac{(x - \xi)^2 (t - \eta)^2}{2! 2!}
 \end{aligned}$$

Auf diese Weise lassen sich alle Reihenglieder aus dem vorhergehenden bestimmen. Sie unterliegen einem eindeutigen Bildungsgesetz, so daß das allgemeine Reihenglied

$$V(n) = \frac{(x - \xi)^n (t - \eta)^n}{n! n!} \quad (41)$$

ohne weiteres hingeschrieben werden kann. Damit entsteht aus Gl. (38) für die Funktion

$$v = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \frac{(x - \xi)^n (t - \eta)^n}{n! n!} \quad (42)$$

eine Reihe, die gerade der Summendarstellung der modifizierten Besselfunktion nullter Ordnung entspricht. Gemäß Definitionsgleichung für die Besselfunktion ist nämlich

$$I_0(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{(n!)(n!)} \quad (43)$$

Vergleicht man die beiden Beziehungen (42) und (43) miteinander, so bekommt das Argument  $z$  der modifizierten Besselfunktion  $I_0(z)$  folgende Form

$$z = 2\sqrt{g(x - \xi)(t - \eta)} \quad (44)$$

Aus Gl. (42) ergibt sich somit die gesuchte Riemannsche Funktion zu

$$V(x, t) = I_0(2\sqrt{g(x-\xi) \cdot (t-\eta)}) \quad (45)$$

Nach Voraussetzung Gl. (40) erfüllt sie die Differentialgleichung (18) und darüber hinaus alle Nebenbedingungen. Denn es ist:

- a)  $V(P) = V(\xi, \eta) = I_0(0) = 1$
- b)  $V_x(x, \eta) \sim I_1(0) = 0$  auf der Charakteristik AP
- c)  $V_t(\xi, t) \sim I_1(0) = 0$  auf der Charakteristik PB

Mit der erhaltenen Gl. (45) sind alle in Gl. (37) enthaltenen Funktionen bekannt, womit diese als Lösungsformel der ursprünglichen Differentialgleichung (16) verwendet werden kann.

#### 2.4 Charakteristische Anfangswerte

Bei dem hier vorliegenden Charakteristischen-Anfangswertproblem sind die Werte der Funktion W entlang der Charakteristiken

$t = \eta = 0$  und  $x = \xi = 0$  vorgegeben. Es ist

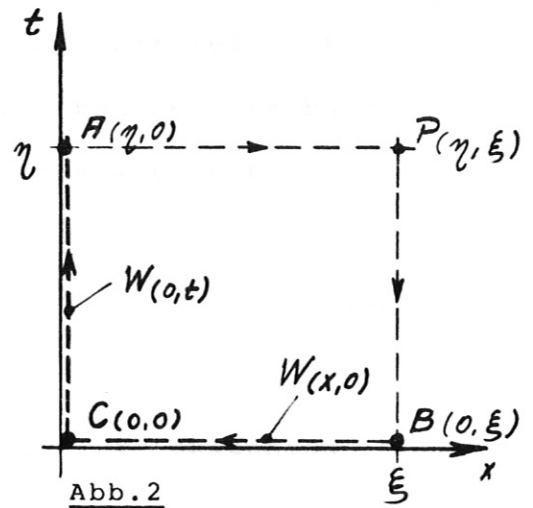
$$W(x, 0) = T_0 e^{hx} \quad (\text{auf } t = 0, \text{ Strecke BC})$$

und

(17)

$$W(0, t) = T_0 e^{-(A-d)t} \quad (\text{auf } x = 0, \text{ Strecke CA})$$

Der Integrationsweg  $e$  in Abb. 1 setzt sich nunmehr aus den Strecken BC und CA zusammen (Abb.2). Damit spaltet sich das Integral über  $e$  der Gl. (37) auf in die Integrale über BC und CA. Berücksichtigt man noch das  $dt = 0$  ist entlang BC und  $dx=0$  ist entlang CA, so läßt sich Gl. (37) folgendermaßen darstellen



$$2W(P) = (WV)(A) + (WV)(B) - \int_B^C (W_x V - V_x W) dx + \int_C^A (W_t V - V_t W) dt \quad (46)$$

Darin lassen sich die Integranden wieder auf die Form

$$W_x V - V_x W = (WV)_x - 2 V_x W$$

$$W_t V - V_t W = (WV)_t - 2 V_t W$$

bringen, die ihrerseits die Integration des jeweils ersten Summanden ermöglicht. Danach folgt aus Gl. (46)

$$W(P) = (WV)(A) + (WV)(B) - (WV)(C) + \int_B^C v_x W dx - \int_C^A v_t W dt \quad (47)$$



Die beiden verbliebenen Integrale sind noch partiell integrierbar. Nach Ausführung der Integration und Beschreibung der einzelnen Punkte durch ihre Koordinaten entsteht

$$W(\xi, \eta) = W(0)V(0) + \int_0^{\xi} VW_x dx + \int_0^{\eta} VW_t dt \quad (48)$$

In diese endgültige Gleichung werden jetzt die bekannten Funktionen

$$V(x, t) = I_0(2\sqrt{g(x-\xi)(t-\eta)})$$

$$V(0) = I_0(2\sqrt{g\xi\eta})$$

$$W_x(x, 0) = T_0 h e^{hx} \quad \text{aus } W(x, 0) \text{ längs der Strecke BC}$$

$$W_t(0, t) = -T_0(A-d)e^{-(A-d)t} \quad \text{aus } W(0, t) \text{ längs der Strecke CA}$$

$$W(0) = T_0$$

eingesetzt. Mit ihnen ergibt sich aus Gl. (48)

$$W(\xi, \eta) = T_0 \left[ I_0(2\sqrt{g\xi\eta}) + h \int_0^{\xi} e^{hx} I_0(2\sqrt{g(x-\xi)(-\eta)}) dx + \right. \\ \left. - (A-d) \int_0^{\eta} e^{-(A-d)t} \cdot I_0(2\sqrt{g(-\xi)(t-\eta)}) dt \right] \quad (49)$$

Die Umbenennung der Variablen führt dann zu der allgemeinen Lösung der partiellen Differentialgleichung (16)

$$W(x,t) = T_0 \left[ I_0(2\sqrt{dhxt}) + h \int_0^x e^{h\xi} I_0(2\sqrt{dh(\xi-x)(-t)}) d\xi + (A-d) \int_0^t e^{-(A-d)\eta} I_0(2\sqrt{dh(-x)(\eta-t)}) d\eta \right] \quad (50)$$

und mit der Transformation Gl. (14) zu der allgemeinen Lösung des Problems

$$T(x,t) = T_0 e^{-hx-dt} \left[ I_0(2\sqrt{dhxt}) + h \int_0^x e^{h\xi} \cdot I_0(2\sqrt{dh(\xi-x)(-t)}) d\xi + (A-d) \int_0^t e^{-(A-d)\eta} I_0(2\sqrt{dh(-x)(\eta-t)}) d\eta \right] \quad (51)$$

Es ist nun noch zu überprüfen, ob die berechnete Funktion Gl (51) für  $x=0$  und  $t=0$  die Gestalt der vorgegebenen Anfangsfunktionen Gl. (2) annimmt.

a) Für  $x = 0$  folgt:

$$T(0,t) = T_0 e^{-dt} \left[ 1 - (A-d) \int_0^t e^{-(A-d)\eta} d\eta \right]$$

$$\underline{T(0,t) = T_0 e^{-At}} \quad (52)$$

b) Für  $t = 0$  folgt:

$$T(x, 0) = T_0 e^{-hx} \left[ 1 + h \int_0^x e^{h\xi} d\xi \right]$$

$$\underline{T(x, 0) = T_0} \tag{53}$$

Die Gleichungen (52) und (53) sind also identisch mit Gl.(2) was zu beweisen war. Bis auf die beiden Integrale der Gl.(51) ist somit die hyperbolische partielle Differentialgleichung (1) analytisch geschlossen gelöst.

### 3. Numerische Auswertung

In diesem Abschnitt wird dazu übergegangen, die abgeleitete Lösung Gl.(51) numerisch auszuwerten. Zuvor empfiehlt sich eine Normierung auf dimensionslose Größen vorzunehmen.

Es werden die Normen

$$x = hx = \frac{x}{c_1} \left[ \frac{m}{m} \right] \tag{54}$$

$$x_1 = h\xi = \frac{\xi}{c_1} \longrightarrow \frac{\partial x_1}{\partial \xi} = h = \frac{1}{c_1} \left[ \frac{1}{m} \right] \tag{55}$$

$$y = dt = \frac{t}{c_2} \left[ \frac{\text{sec}}{\text{sec}} \right] \tag{56}$$

$$y_1 = d\eta = \frac{\eta}{c_2} \longrightarrow \frac{\partial y_1}{\partial \eta} = d = \frac{1}{c_2} \left[ \frac{1}{\text{sec}} \right] \tag{57}$$

festgelegt.

Die normierte Darstellung von Gl.(51) ergibt sich dann zu

$$T(x,y) = T_0 e^{-(x+y)} \left[ I_0(2\sqrt{xy}) + \int_0^x e^{x_1} I_0(2\sqrt{y(x-x_1)}) \cdot dx_1 + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{A}{d}\right) \int_0^y e^{(1-\frac{A}{d})y_1} I_0(2\sqrt{x(y-y_1)}) \cdot dy_1 \right] \quad (58)$$

Darin bedeutet:

$T_0$  die Anfangstemperatur

$I_0$  die modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung

Da diese Arbeit im Zusammenhang mit [1] angefertigt wurde, und sich dort aus physikalischen Gründen der Sonderfall  $A = d$  ergibt, wird hier die Auswertung auf denselben beschränkt. Für  $A = d$  verschwindet der dritte Summand in Gl.(58) und es verbleibt

$$T(x,y) = T_0 e^{-(x+y)} \left[ I_0(2\sqrt{xy}) + \int_0^x e^{x_1} \cdot I_0(2\sqrt{y(x-x_1)}) dx_1 \right] \quad (59)$$

Wie schon erwähnt, ist das in Gleichung (59) enthaltene Integral nur numerisch lösbar. Als numerische Integrationsmethode bietet sich das von Gauß angegebene Verfahren [3] an. Es ist im einzelnen in der für die Auswertung von Gl.(59) entwickelten FORTRAN -Routine ausgeführt.

Die errechneten Ergebnisse sind in den Abbildungen 3 und 4 dargestellt. Diese Kurven sollen nur den prinzipiellen Verlauf der Funktion  $T(x, y)$  Gl. (59) vermitteln. Sie sind daher hier für willkürlich gewählte Konstanten gezeichnet. Eine projektbezogene Auswertung geschieht in [1], wo die gleiche Darstellungsform wie in den Abbildungen 3 und 4 verwendet wird. In beiden Arbeiten wird die normierte Zeit  $Y$  als Parameter benutzt, d. h. für jeweils konstantes  $Y$  ist die Temperatur  $T$  als Funktion der normierten Abmessung  $X$  aufgetragen. Das Verhalten von  $T$  für kleine  $Y$  veranschaulicht die Kurvenschar der Abb. 3 und das für große  $Y$  die der Abb. 4.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die modifizierte Besselfunktion  $I_0(z)$  für große Argumente  $z$  sehr rasch anwächst. Für  $z > 160$  überschreiten ihre Funktionswerte bereits den von der Rechenmaschine erfaßbaren Bereich. In diesem Gebiet wird daher ihre asymptotische Näherung

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{ I_0(z) \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^z}{\sqrt{z}} \quad (60)$$

verwendet, um so die Berechnung von  $I_0(z)$  durch ihre externe Routine zu vermeiden. Mit Hilfe von Gl. (60) läßt sich Gl. (59) nämlich folgendermaßen zusammenfassen:



$$T(x, y) = \frac{T_0}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{z_1 - x - y}}{\sqrt{z_1}} + \int_0^x \frac{e^{z_2 + x_1 - x - y}}{\sqrt{z_2}} dx_1 \right] \quad (61)$$

Darin ist:

$$z_1 = 2 \sqrt{xy} \quad (62)$$

$$z_2 = 2 \sqrt{y(x-x_1)} \quad (63)$$

Aus Gl. (61) geht unmittelbar hervor, daß wegen der leicht zu beweisenden Aussage

$$z_1 < x + y$$

und

$$x_1 + z_2 < x + y$$

der Integrand wie auch der vor dem Integralzeichen stehende Summand für größer werdende  $x$  oder  $y$  gegen Null strebt. Dementsprechend muß also  $T(x, y)$  auch für genügend große  $x$  bzw.  $y$  einen konstanten Wert annehmen. Dieses Verhalten wird durch die Kurven der Abbildungen 3 und 4 bestätigt.

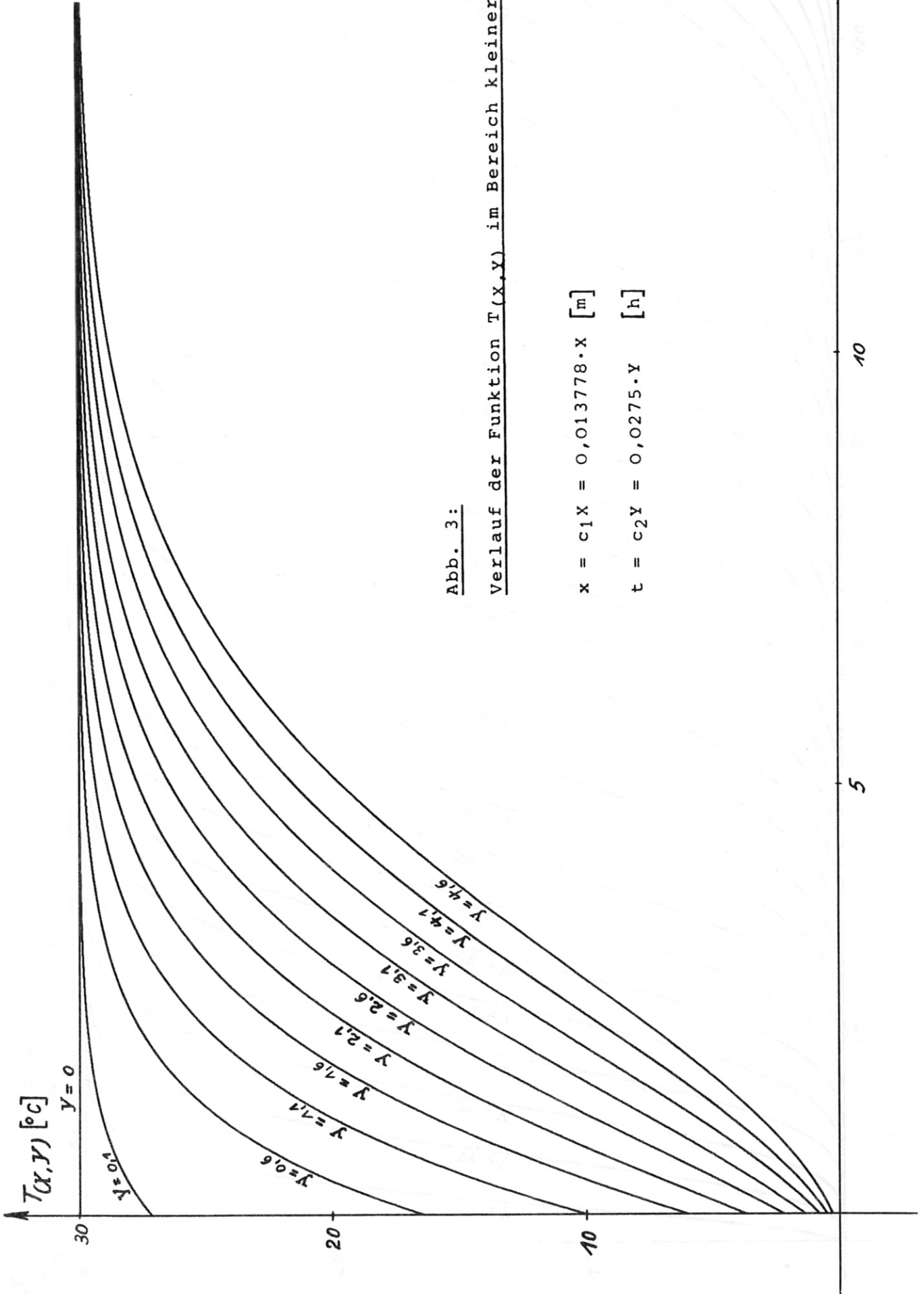


Abb. 3:

Verlauf der Funktion  $T(x,y)$  im Bereich kleiner  $y$

$$x = c_1 X = 0,013778 \cdot X \quad [m]$$

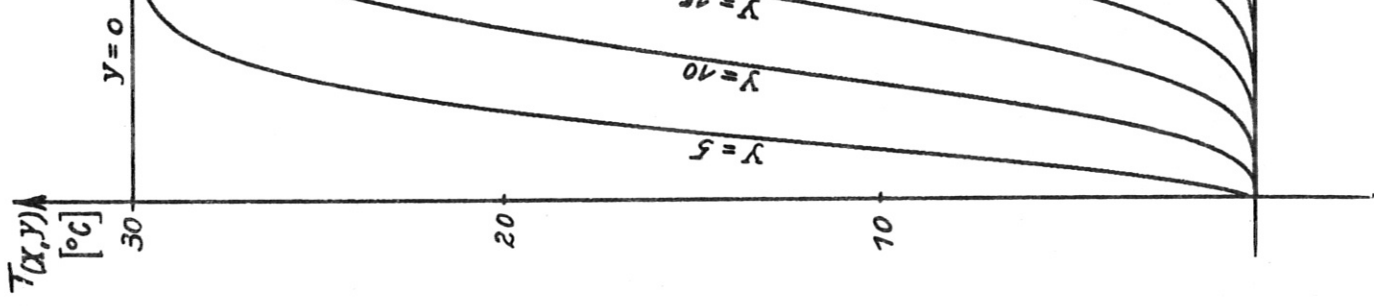
$$t = c_2 Y = 0,0275 \cdot Y \quad [h]$$

$y=0,6$   
 $y=1,1$   
 $y=1,6$   
 $y=2,1$   
 $y=2,6$   
 $y=3,1$   
 $y=3,6$   
 $y=4,1$   
 $y=4,6$

15  
10  
5

$x = c_1 X = 0,013778 \cdot X \quad [m]$   
 $t = c_2 Y = 0,0275 \cdot Y \quad [h]$

Abb. 4:  
Verlauf der Funktion  $T(x, y)$  im Bereich großer  $Y$



4. Literaturverzeichnis

- [ 1 ] Schickel, H.: Rechnerische Erfassung der Abkühlzeiten bei den supraleitenden Spulen des Stellarator W VII/ erscheint in Kürze als IPP-Bericht.
  
- [ 2 ] Smirnov, W.J.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil IV/ VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966
  
- [ 3 ] Ralston, A.; Wilf, H.S.: Mathematische Methoden für Digitalrechner/R.Oldenbourg-Verlag, München-Wien 1967
  
- [ 4 ] Tychonoff, A.N.; Samarski, A.A.: Differentialgleichungen der mathematischen Physik / VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959