

H. Preis

Die Analyse transienter Vorgänge in
linearen, elektrischen Netzwerken

H. Preis

IPP/4/87

Juli 1971

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

IPPE/4/87 The analysis of transient
MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN

(in German)
H. Preis
July 1971
Die Analyse transients Vorgänge in
linearen, elektrischen Netzwerken

This report describes a calculation method for determining the
transient behaviour of the current and voltage in an arbitrary
multiloop electrical circuit. Matrix computation is used to
formulate the circuit equations, which in the case of transient
phenomena yield a system of coupled second-order linear differen-
tial equations. This system is transformed into one of first
order and is solved by the predictor-corrector-method.
The procedure is tested on two special examples, and the results
are compared with data already available.
The programming language used is FORTRAN IV.

IPPE/4/87 Juli 1971

Für die Ausführung der Programmierung danke ich
Frau Ch. Ludescher

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP/4/87

The analysis of transient
phenomena in linear electric
networks

(in German)

H. Preis

July 1971

Abstract

This report describes a calculation method for determining the transient behaviour of the current and voltage in an arbitrary multi-loop electrical circuit. Matrix computation is used to formulate the circuit equations, which in the case of transient phenomena yield a system of coupled second-order linear differential equations. This system is transformed into one of first order and numerically solved by the predictor-corrector-method. The procedure is tested in two special examples, and the results are compared with data, already available.

The programming language used is FORTRAN IV.

Inhaltsverzeichnis

	Seite:
Zusammenfassung	4
1. Einleitung	4
2. Die Struktur elektrischer Schaltungen	6
2.1 Grundlegende topologische Begriffe	6
2.2 Entwicklung der Netzgleichungen für stationäre Vorgänge	8
2.3 Das Bildungsgesetz der Impedanzmatrix	10
3. Ausgleichsvorgänge	11
3.1 Erweiterung der stationären Theorie auf Ausgleichsvorgänge	11
3.2 Transformation und Normierung des Differentialgleichungs-Systems	15
3.3 Der Sonderfall singulärer Koeffizientenmatrix	19
3.4 Formulierung der Anfangsbedingungen	23
4. Numerische Lösung	24
5. Anwendungsbeispiele	29
5.1 Crowbar-Schaltkreis	29
5.2 Die Entladung eines Kettenleiters	36
6. Liste der verwendeten Symbole	42
7. Literaturverzeichnis	43

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Berechnungsmethode angegeben, die es ermöglicht, das transiente Verhalten von Strom und Spannung in einem beliebig vermaschten, elektrischen Netzwerk zu berechnen. Mit Hilfe der Matrizenrechnung werden zunächst die Netzgleichungen formuliert, die im Falle transienter Vorgänge ein System verkoppelter, linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung ergeben. Dieses Differentialgleichungs-System wird dann in ein 1. Ordnung transformiert und numerisch nach der Predictor-Corrector-Methode gelöst. Das Verfahren ist an zwei speziellen Beispielen getestet worden, wobei die Ergebnisse mit bereits vorhandenen verglichen wurden.

Als Programmiersprache ist FORTRAN IV verwendet worden.

Einleitung

Im Laufe der letzten Jahre sind viele Methoden zur theoretischen Analyse elektrischer Netzwerke veröffentlicht worden, [1], [2], [3]; insbesondere, da heute mit Hilfe leistungsfähiger elektronischer Rechenanlagen das Verhalten von Strom und Spannung auch in großen Netzen beschrieben werden kann. Ausser den bereits zitierten Veröffentlichungen wäre noch das von IBM entwickelte Programm ECAP, zur Berechnung elektrischer Schaltungen, zu erwähnen. Dieses Programm sieht unter anderem zwar grundsätzlich die Analyse von Schaltvorgängen vor, doch haben sich bei mehreren Anwendungsbeispielen falsche Ergebnisse gezeigt. Da aber auf vielen Teilgebieten der Elektrotechnik die Beschreibung von Ausgleichsvorgängen eine entscheidende Rolle spielt, ist ein Anlaß gegeben, das genannte Berechnungsverfahren zu erweitern. Dies soll an einem

Beispiel aus der plasmaphysikalischen Technik veranschaulicht werden. Für den Einschluß und die schnelle Kompression eines Plasmas durch magnetische Felder werden energiereiche Stromimpulse mit speziellen Eigenschaften benötigt. Sie sollen einerseits eine steile Anstiegsflanke und zum anderen einen flachen Dachabfall aufweisen. Bisher wurden dazu ausschließlich Ausgleichsvorgänge bei der Kondensatorentladung ausgenutzt. Es sind also Schaltkreise zu entwickeln, - die sicher wegen des großen Leistungsbedarfs vielmaschig sein müssen, - in denen solche Impulse erzeugt werden können. Bei der Lösung dieser Aufgabe bietet die mathematische Interpretation des Problems eine wesentliche Hilfe, denn sie ermöglicht den Strom (die Spannung) als Funktion der Zeit darzustellen. Außerdem sind mit ihr die Einflüsse der zahlreichen Netzwerksparameter auf die Kurvenform des Impulses relativ leicht zu bestimmen, wenn andernfalls aufwendige Experimente durchgeführt werden müßten.

Die folgende Untersuchung befaßt sich mit der Analyse linearer, elektrischer Netzwerke, an deren Struktur und Größe keinerlei Voraussetzungen gebunden sind. Es werden also beliebig vermaschte Netze betrachtet, deren Zweige willkürlich mit Spulen, Kondensatoren, Ohm'schen Widerständen und Energiequellen beschaltet sind. Die Kenngrößen dieser Schaltelemente $L, C, R^{1.)}$ und die Erregung U dürfen dabei durchaus Funktion der Zeit sein. Von solchen Anordnungen wird das zeitliche Verhalten der einzelnen Zweigströme (Spannungen) untersucht und zwar unter besonderer Berücksichtigung von Schaltvorgängen. Dabei ist es gleichgültig, wie oft hintereinander geschaltet wird, lediglich muß nach jedem Schaltvorgang die Netzwerkgleichung neu formuliert werden, weil danach eine Veränderung des Netzzustandes eintritt.

1.)

Siehe Symbolliste auf Seite 42

Das sich dann einstellende transiente Verhalten der Zweigströme wird mathematisch mit linearen Differentialgleichungen beschrieben. Besser gesagt, da es sich um vielmaschige Netzwerke handelt, durch Systeme gekoppelter Differentialgleichungen. Zuvor wird jedoch ein Schema entworfen, das ermöglicht, von vornherein ein eindeutiges, linearunabhängiges System von Differentialgleichungen zu bestimmen [4].

Das Problem der Netzwerkanalyse ist damit auf die Lösung dieses Gleichungssystems zurückgeführt, die für große Netze sicher nicht analytisch exakt erzielt werden kann. Es ist daher naheliegend, ein numerisches Verfahren zu verwenden. Dazu bietet sich die Predictor-Corrector-Methode [5] an, mit der Differentialgleichungen des Typs 2.)

$$(y'(x)) = (A(x)) (y(x)) + (F(x))$$

selbst bei großen Systemen vorteilhaft gelöst werden können.

2. Die Struktur elektrischer Schaltungen

2.1 Grundlegende topologische Begriffe

In einem linearen Netzwerk sind Energiequellen G und komplexe Widerstände Z willkürlich miteinander verknüpft (z.B. wie in Abb.1). Durch die Verknüpfung entstehen also Netzzweige, die von den Schaltelementen gebildet werden und Knoten, in denen mehrere Zweige zusammentreffen. Für jeden Knoten und jede Masche

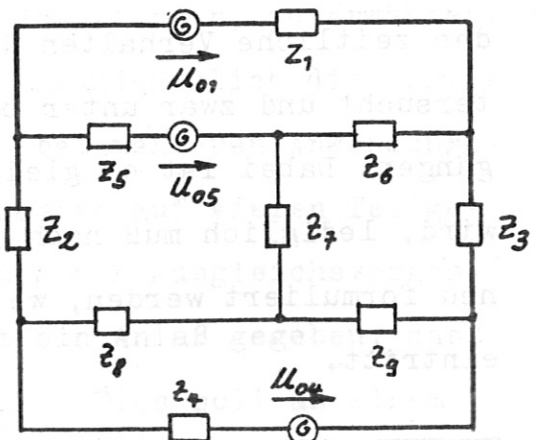


Abb.1

2.) Buchstaben in Klammern stehen symbolisch für Matrizen bzw. Vektoren.

des Netzwerkes gelten die Kirchhoff'schen Gleichungen

$$\sum I_v = 0 \text{ Knotengleichung}$$

$$\sum U_v = 0 \text{ Maschengleichung}$$

die zum Teil voneinander linear abhängig sind. Soll aber Strom oder Spannung an einer beliebigen Stelle der Schaltung berechnet werden, so ist dazu ein System unabhängiger Gleichungen notwendig. Um diese von vornherein zu bestimmen - was im allgemeinen nicht so ohne weiteres möglich ist - ist es zweckmäßig, ein eindeutiges Schema zu entwerfen.

Die Struktur eines Netzwerkes ist, unabhängig von dem speziellen Aufbau der einzelnen Zweige, durch einen Streckenkomplex darzustellen, d. h. jede Strecke, die sinnvollerweise zusätzlich nummeriert und orientiert wird, ist charakteristisch für den entsprechenden Zweig. (Abb. 2.,

Streckenkomplex der in Abb.1 dargestellten Schaltung). Aus diesem Graphen geht hervor, daß nicht in jedem Zweig ohne die Kirchhoff'schen Gleichungen zu verletzen,

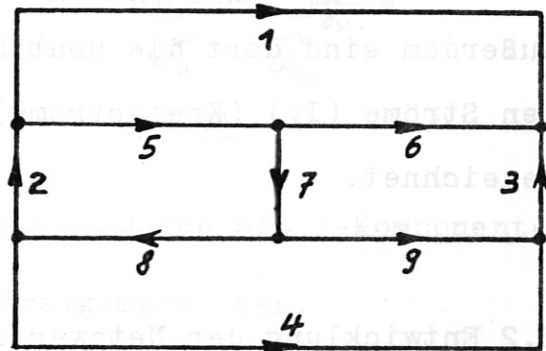


Abb.2

ein unabhängiger Strom bzw. eine unabhängige Spannung vorgegeben werden kann. Demzufolge wird unterschieden zwischen den sogenannten Verbindungszweigen und den Baumzweigen, wobei in den Verbindungszweigen unabhängige Ströme, während in den Baumzweigen unabhängige Spannungen existieren können (z.B. sind I_1 und I_2 unabhängige Ströme, so ist I_5 automatisch mit festgelegt).

Wird nach diesem Prinzip der Streckenkomplex unterteilt, so

ergibt sich für die Gesamtheit aller Baumzweige der sogenannte vollständige Baum, ein Streckenzug, der alle Knoten verbindet aber keinen geschlossenen Umlauf bildet.

Das so erhaltene Schema erlaubt einerseits, die abhängigen Ströme als Funktion der unabhängigen darzustellen und andererseits ein unabhängiges System von Maschengleichungen zu bekommen. Die Umläufe können nämlich so gewählt werden, daß in jedem nur ein Verbindungszweig vorkommt. Damit ist das Problem ein linear unabhängiges Gleichungssystem zu finden, auf die Konstruktion eines vollständigen Baumes zurückgeführt.

In Abb. 3 ist eine mögliche Aufteilung des Graphen (Abb. 2) in Baum- und Verbindungszweige zur Veranschaulichung ausgeführt worden. Außerdem sind dort die unabhängigen Ströme (I_K) (Kreisströme) eingezeichnet.

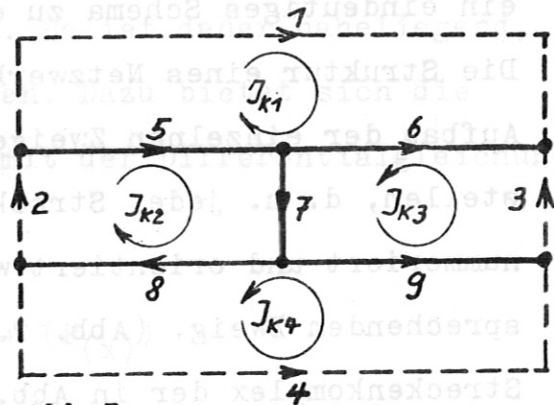


Abb.3

- Baumzweige
- Verbindungszweige

2.2 Entwicklung der Netzwerkgleichungen für stationäre Vorgänge

Die unter 2.1 gewonnenen Regeln sollen nun mathematisch formuliert werden. Hat beispielsweise ein Netzwerk k -Knoten und j -Zweige, so sind davon $n = k - 1$ Baumzweige und $m = j - n$ Verbindungszweige, was gleichbedeutend ist mit n -abhängigen und m -unabhängigen Strömen. Zwischen ihnen besteht nachstehender Zusammenhang (Knotengleichung)

$$(I) = (H) (I_K) \quad (3)$$

Darin ist:

(I) der Spaltenvektor der Zweigströme mit j -Komponenten,

(I_K) der Spaltenvektor der unabhängigen Ströme mit m -Komponenten

und

(H) die $j \cdot m$ Strukturmatrix, die eindeutig ist und allein die topologischen Eigenschaften des Netzwerkes beschreibt.

Weiter ergibt sich ein linear unabhängiges System von Maschengleichungen, indem Umläufe gebildet werden, die jeweils nur einen Verbindungszweig haben, zu

$$(H^T)(U) = 0 \quad (4)$$

Darin ist:

(U) der Vektor der Zweigspannungen mit j -Komponenten und
 (H^T) die $m \cdot j$ transponierte Strukturmatrix.

Außerdem sind Spannung und Strom in jedem Zweig nach dem Ohm'schen Gesetz folgendermaßen miteinander verbunden

$$(U) = (Z_D)(I) + (U_0) \quad (5)$$

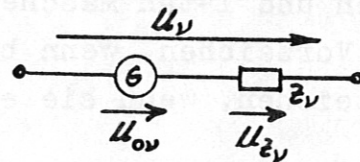


Abb.4

Darin ist:

(U_0) der Spaltenvektor der Quellenspannungen mit j -Komponenten
 (Z_D) eine $j \cdot j$ Diagonalmatrix der Zweigimpedanzen.

Werden die Gleichungen (3), (4) und (5) ineinander eingesetzt, so ergeben sich die Netzwerkgleichungen für stationäre Stromkreise zu

$$\begin{aligned} (U) &= (Z_D)(H)(I_K) + (U_0) \\ (H^T)(U) &= (H^T)(Z_D)(H)(I_K) + (H^T)(U_0) = 0 \\ \underline{(Z)(I_K)} &= - (H^T)(U_0) \end{aligned} \quad (6)$$

mit der Abkürzung

$$(Z) = (H^T)(Z_D)(H) \quad (7)$$

der Widerstandsmatrix des Netzwerks. Sie ist quadratisch und hat gerade so viele Zeilen, wie Verbindungszweige vorhanden sind.

2.3 Das Bildungsgesetz der Impedanzmatrix

Aus der Darstellung Gl. (7) geht das Bildungsgesetz der Widerstandsmatrix hervor, das sehr einfach ist und deshalb die Berechnung nach Gl. (7) erübrigt. Denn ist der vollständige Baum und die Orientierung in einer Schaltung festgelegt, so ist auch der Verlauf der unabhängigen Ströme (I_K) (Kreisströme) bestimmt. Jede Zeile und Spalte der Matrix (Z) ist einem Kreisstrom zugeordnet. In der Hauptdiagonalen steht jeweils die Summe aller komplexen Widerstände die zu einer Masche gehören. Während z.B. in der i-ten Zeile und l-ten Spalte der Widerstand steht, der der i-ten und l-ten Masche gemeinsam angehört und zwar mit positiven Vorzeichen, wenn beide Kreisströme gleiche, mit negativen Vorzeichen, wenn sie entgegengesetzte Orientierung haben.

Die Entwicklung der Impedanzmatrix soll nun an vorstehendem Beispiel demonstriert werden. Aus Abb. (3) folgt

$$(Z) = \begin{bmatrix} (Z_1+Z_5+Z_6) & -Z_5 & -Z_6 & 0 \\ -Z_5 & (Z_2+Z_5+Z_7+Z_8) & Z_7 & Z_8 \\ -Z_6 & Z_7 & (Z_3+Z_6+Z_7+Z_9) & -Z_9 \\ 0 & Z_8 & -Z_9 & (Z_4+Z_8+Z_9) \end{bmatrix}$$

(Z) kann also unmittelbar aus der Schaltung entnommen werden. Dies kann sich für eventuell notwendig werdende Kontrollrechnungen als wertvolle Hilfe erweisen. Vor allem, da später ersichtlich wird, daß dieses Gesetz allgemeine Gültigkeit besitzt.

3. Ausgleichsvorgänge

Mit der bisher abgeleiteten Gleichung (6) können nur stationäre Zustände in elektrischen Netzwerken beschrieben werden, also Zustände, die über die Zeit gesehen konstant bleiben oder periodischen Änderungen unterworfen sind. Sie gilt demnach nicht für Ausgleichsvorgänge, die beim Übergang von einem stationären Zustand in einen anderen entstehen. Beispielsweise in elektrischen Netzen, wenn sich deren Struktur plötzlich ändert, d.h. wenn Netzzweige aus- oder eingeschaltet werden, in denen Energiespeicher (Spulen, Kondensatoren) vorhanden sind. Die Kenntnis des Netzzustandes unmittelbar nach Schaltvorgängen ist aber oft von ausschlaggebender Bedeutung. Daher sollen im folgenden, die bisher abgeleiteten Gesetze, auf Ausgleichsvorgänge erweitert werden.

3.1 Erweiterung der stationären Theorie auf Ausgleichsvorgänge

Während eines Ausgleichsvorgangs sind die Momentanwerte von Strom und Spannung nicht mehr durch einfache Linearkombinationen miteinander verbunden, sondern durch lineare Differentialgleichungen. Je nach Art des Schaltelementes, nämlich Ohm'scher Widerstand, Spule oder Kondensator, lauten die Verknüpfungsgleichungen:

$$u_R(t) = R(t) i(t) \quad (8)$$

$$u_L(t) = \frac{d}{dt} (L(t) i(t)) \quad (9)$$

$$u_C(t) = u_{co} + \frac{1}{C(t)} \int i(t) dt \quad (10)$$

Dabei werden kleine Buchstaben als Symbol für Momentanwerte verwendet. Unter Beibehaltung der Matrixschreibweise und unter Verwendung von

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \dot{q}(t) \quad (11)$$

ergibt sich aus den Gl. (8) bis (10) folgender Zusammenhang zwischen Strom und Spannung in den einzelnen Zweigen des Netzes³⁾

$$(u_R) = (R_D) (q^\bullet) \quad (12)$$

$$(u_L) = (L_D^\bullet) (q^\bullet) + (L_D) (q^{\bullet\bullet}) \quad (13)$$

$$(u_{cg}) = (u_{co}) + (K_D)(q) \text{ mit } K_{mn} = \frac{1}{C_{mn}} \quad (14)$$

wobei die mit D indizierten Matrizen wie vorher Diagonalmatrizen sind. Summiert man diese Gleichungen, so erhält man den gesamten Spannungsabfall in einem Netzzweig, der zusammen mit der Quellspannung u_o die Gesamtspannung (u) ausmacht. Es ist

$$(u) = (u_L) + (u_R) + (u_{cg}) + (u_o) \quad (15)$$

oder

$$(u) = (L_D)(q^{\bullet\bullet}) + [(L_D^\bullet) + (R_D)] \cdot (q^\bullet) + (K_D)(q) + (u_{co}) + (u_o) \quad (16)$$

Die Definition der neuen Variablen $q(t)$ gemäß Gl.(11) erweist sich hier als sinnvoll. Denn bei Verwendung der Veränderlichen $i(t)$ würde an Stellen von Gl.(16) eine Integro-Differentialgleichung treten, die wegen des vorhan-

3) Der einfacheren Schreibweise wegen werden künftig die Argumente der Funktionen weggelassen.

denen Integrals nochmals differenziert werden müßte, um eine analoge Gestalt zu Gl. (16) anzunehmen. Damit wird aber die Differenzierbarkeit aller Funktionen vorausgesetzt. Diese Voraussetzung ist gerade bei Schaltvorgängen nicht gewährleistet, da mit ihnen sprunghafte Änderungen verbunden sind. Durch Einführen von $q(t)$ wird die Bedingung der Differenzierbarkeit von vornherein umgangen.

Die allgemein gültigen Beziehungen müssen nun noch mit den Netzwerkgleichungen (3) und (4) verkoppelt werden. Man erkennt, daß Gl. (4) unmittelbar befriedigt ist, wenn Gl. (16) mit der transponierten Strukturmatrix (H^T) multipliziert wird. Denn mit

$$(H^T)(u) = 0$$

wird

$$0 = (H^T)(L_D)(\dot{q}) + (H^T) \cdot [(L_D) + (R_D)] \cdot (q) + (H^T)(K_D)(q) + (H^T) \cdot [(u_{c0}) + (u_0)] \quad (17)$$

Das so gewonnene Differentialgleichungs-System erfüllt bereits die Kirchhoff'schen Maschengleichungen. Um es zusätzlich noch linear unabhängig zu machen, wird Gl. (3) - die ja die Zweigströme mit den unabhängigen Kreisströmen verbindet - in Gl (17) eingesetzt. Dazu wird jedoch eine etwas modifizierte Form von

$$(i) = (H)(i_K) \quad (3)$$

verwendet, sie ist nämlich wegen Gl.(11) identisch mit

$$(\dot{q}) = (H)(\dot{q}_K) \quad (18)$$

Daraus folgt nach Differentiation

$$\dot{(q^{**})} = (H)(\dot{q_K^{**}}) \quad (19)$$

und nach Integration

$$(q) = (H) (q_K) \quad (20)$$

wobei die Integrationskonstante weggelassen wurde, da sie schon in Gl. (14) Berücksichtigung fand. Nach Einsetzen entsteht aus Gl. (17)

$$0 = (H^T)(L_D)(H)(\dot{q_K^{**}}) + (H^T) \cdot [(L_D^{\bullet}) + (R_D)] \cdot (H)(\dot{q_K^{\bullet}}) + (H^T)(K_D)(H)(\dot{q_K}) + (H^T) \cdot [(u_{c0}) + (u_0)] \quad (21)$$

In Gl. (21) gehorchen die Koeffizientenmatrizen

$$(L) = (H^T)(L_D)(H) \quad (22)$$

$$(\dot{L}) = (H^T)(\dot{L}_D)(H) \quad (23)$$

$$(R) = (H^T)(R_D)(H) \quad (24)$$

$$(K) = (H^T)(K_D)(H) \quad (25)$$

dem unter 2.2 für die Impedanzmatrix abgeleiteten Bildungsgesetz. Außerdem wäre noch zu bemerken, daß diese Koeffizienten durchaus Funktionen der unabhängigen Variablen t sein können, da in der durchgeführten Ableitung von Gl. (21) diesbezüglich keinerlei Einschränkungen gemacht wurden.

Unter Benutzung der Abkürzungen (22) bis(25) läßt sich dann obenstehendes Differentialgleichungs-System folgendermaßen darstellen:

$$(L)(\dot{q_K^{**}}) + [(\dot{L}) + (R)] \cdot (\dot{q_K^{\bullet}}) + (K)(\dot{q_K}) = - (H^T) [(u_{c0}) + (u_0)] \quad (26)$$

Es ist hinreichend, für die vollständige Beschreibung von Ausgleichsvorgängen in linearen Netzen, wenn zusätzlich entsprechende Anfangsbedingungen vorgegeben werden. Natürlich hat Gl. (26) nur solange uneingeschränkte Gültigkeit, wie die Gestalt des Netzes erhalten bleibt, denn mit ihr ändern sich auch dessen topologischen Eigenschaften. Im mathematischen Sinne bedeutet das, daß nach jedem Schaltvorgang die Netzgleichung (26) neu angegeben werden muß. Übertragen auf x-Schaltvorgänge ergeben sich also x-Definitionsbereiche, in denen jeweils andere Verknüpfungsgleichungen gelten. Durch diese notwendige Aufteilung in Gültigkeitsbereiche entsteht jedoch keine grundsätzliche Änderung der Berechnungsmethode, da sich lediglich die Matrizen selbst, nicht aber ihre Zusammenhänge untereinander, ändern. Alle Matrizen wiederum werden ausschließlich durch die Strukturmatrix (H) des Netzes festgelegt, d. h. mit der Definition von (H) am Anfang jedes Gültigkeitsbereiches ist gleichzeitig das zugehörige Differentialgleichungs-System bestimmt. Somit kann die Auflösung desselben stufenweise über die einzelnen Bereiche erfolgen, wobei in jedem Schaltpunkt neue Anfangsbedingungen erforderlich sind.

3.2 Transformation und Normierung des Differentialgleichungs-Systems.

Gleichung (26) ist im allgemeinen Fall analytisch geschlossen nicht lösbar. Es kommt also nur eine numerische Lösungsmethode in Betracht. Dazu wird dieses Differentialgleichungs-System 2. Ordnung noch in eins 1. Ordnung transformiert, weil dann

auf eine IBM-Subroutine zurückgegriffen werden kann. Weiterhin empfiehlt sich eine Normierung auf dimensionslose Größen. Denn oft sind die vorgegebenen Faktoren der Gleichungen um Größenordnungen voneinander verschieden, so daß sich ein günstig gewählter Normierungsfaktor stabilisierend auf die numerische Rechnung auswirkt.

Hier werden folgende Normen festgelegt:

$$1.) \quad x = \omega_0 t \quad \text{mit} \quad \frac{dx}{dt} = \omega_0 \quad (27)$$

$$2.) \quad Q_K = \frac{q_K}{q_0} \quad \text{mit} \quad \frac{dQ_K}{dt} = \frac{dQ_K}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \omega_0 \cdot \frac{dQ_K}{dx} = \omega_0 Q'_K \quad \text{usw.} \quad (28)$$

Wobei der Normfaktor ω_0 die Einheit einer Frequenz und der Normfaktor q_0 die einer Ladung haben muß.

Einsetzen von Gl. (27) und (28) in Gl. (26) führt dann zu

$$\omega_0^2 (L) (Q_K'') = -\omega_0 [(R) + \omega_0 (L')] \cdot (Q_K') - (K) (Q_K) - \frac{1}{q_0} (H^T) [(u_0) + (u_{c0})] \quad (29)$$

Schließlich ist dieses Differentialgleichungs-System noch der eben genannten Transformation zu unterwerfen und zwar

$$(V) = (Q_K) \quad (30)$$

$$(W) = (Q'_K) \quad (31)$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$(V') = (W) \quad (32)$$

und bei Anwendung auf Gl. (29)

$$\omega_0^2 (L) (W') = - (K) (V) - [\omega_0 (R) + \omega_0^2 (L')] \cdot (W) - \frac{1}{q_0} (H^T) [(u_0) + (u_{c0})] \quad (33)$$

Entstanden sind also zwei Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung, die ohne Mühe zu einem zusammengefaßt werden können. Es wird

$$\begin{bmatrix} (E) & (O) \\ (O) & \omega_o^2(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (V') \\ (W') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (O) & (E) \\ -(K) & -[\omega_o(R) + \omega_o^2(L')] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (V) \\ (W) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (O) \\ -\frac{1}{q_o} (H^T) [(u_o) + (u_{co})] \end{bmatrix} \quad (34)$$

Darin bedeuten:

(E) die Einheitsmatrix

(O) die Nullmatrix

Mit den nachstehenden Abkürzungen

$$(y) = \begin{bmatrix} (V) \\ (W) \end{bmatrix} ; \quad (y') = \begin{bmatrix} (V') \\ (W') \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$(B) = \begin{bmatrix} (E) & (O) \\ (O) & \omega_o^2(L) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$(p) = \begin{bmatrix} (O) & (E) \\ -(K) & -[\omega_o(R) + \omega_o^2(L')] \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$(G) = \begin{bmatrix} (O) \\ -\frac{1}{q_o} (H^T) (u_o) + (u_{co}) \end{bmatrix} \quad (38)$$

folgt aus Gl. (34):

$$(B) (y') = (P) (y) + (G)$$

oder

$$(y') = (B)^{-1}(P) (y) + (B)^{-1} (G) \quad (39)$$

wobei $(B)^{-1}$ die inverse Matrix von (B) ist.

Benutzt man noch

$$(A) = (B)^{-1} (P) \quad (40)$$

$$(F) = (B)^{-1} (G) \quad (41)$$

so ergibt sich aus Gl. (39)

$$\underline{(y')} = (A) (y) + (F) \quad (42)$$

mit $(y_{(x_0)}) = (y_0) \quad (43)$

als Ausgangswerte. Als Lösung von Gl. (42) entsteht der Vektor (y) aus dem die Zweigströme (I) und die Zweigladungen (Q) berechnet werden können. Es war nämlich

$$(y) = \begin{bmatrix} (V) \\ (W) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Q_K) \\ (Q'_K) \end{bmatrix} \quad (35)$$

den ersten m -Komponenten des $2m$ -dimensionalen Vektors (y) entsprechen die unabhängigen Ladungen (Q_K) , während die restlichen m -Komponenten die unabhängigen Ströme (I_K) bedeuten, d. h.

$$(Q_K)_1^m = (y)_1^m \quad (44)$$

$$(I_K)_1^m = (y)_{m+1}^{2m} \quad (45)$$

Daraus ergeben sich die Zweigströme (I) und die Zweigladungen (Q) zu

$$(Q) = (H) (Q_K) = (H) (y)_1^m \quad (46)$$

$$(I) = (H) (I_K) = (H) (y)_{m+1}^{2m} \quad (47)$$

3.3 Der Sonderfall singulärer Koeffizientenmatrix

Bei der abgeleiteten Berechnungsmethode kann der Sonderfall eintreten, daß die Koeffizientenmatrix (B) in Gl. (39) singulär wird. Dann ist also

$$\det (B) = 0 \quad (48)$$

und wegen Gl. (36)

$$\det (L) = 0 \quad (49)$$

womit Gl. (42) in der vorliegenden Form nicht mehr lösbar ist.

Aus physikalischen Gründen kann aber die Matrix (L) nur dann singular werden, wenn in mehreren, in einem Knoten zusammenlaufenden Netzweigen keine Induktivitäten auftreten, also sogenannte sprungfähige Netze vorliegen. Besser ausgedrückt, in ihnen sind sprunghafte Stromänderungen möglich. Wie man erkennt, ist diese Eigenschaft sehr vom individuellen Aufbau einer Schaltung abhängig und daher schlecht durch eine grundsätzliche Regel zusammenzufassen. Offensichtlich ist nur der Grenzfall, nämlich keine Induktivität im ganzen Netz, d.h. alle Elemente von (L) werden identisch Null. Gl.(29) reduziert sich dann in ein Differentialgleichungs-System 1. Ordnung, womit sich die Transformation nach Gl. (30), (31) erübrigt, weil die gewünschte Form bereits gegeben ist. Es folgt aus Gl. (29)

$$\omega_o(R)(Q_K') = - (K)(Q_K) - \frac{1}{q_o} (H^T) \cdot [(u_o) + (u_{co})] \quad (50)$$

oder mit den eingeführten Abkürzungen

$$(B) = \omega_o(R) \quad (51)$$

$$(P) = -(K) \quad (52)$$

$$(G) = - \frac{1}{q_o} (H^T) [(u_o) + (u_{co})] \quad (53)$$

und den Gleichungen (40), (41)

$$\underline{(y'')} = (A)(y) + (F) \quad (42)$$

Die Komponenten des Vektors (y) sind jetzt ausschließlich Ladungen, während die zugehörigen Ströme aus (y') hervorgehen. Anders liegen die Verhältnisse, wenn die Matrix (L) nur teilweise mit Nullelementen belegt ist - also nicht alle Zweige ohne Induktivität sind - und außerdem $\det (L) = 0$ gilt.

Durch entsprechende Wahl des vollständigen Baumes können die Null-
 elemente innerhalb der Matrix immer so angeordnet werden, daß sie
 zeilenweise vorkommen. Aus Symmetriegründen werden zwangsläufig
 die zugehörigen Spaltenelemente ebenfalls alle identisch Null.
 Infolgedessen verschwindet bei n-Gleichungen des Formelsystems
 (29) die linke Seite, falls n-Zeilen von (L) ausschließlich Null-
 elemente besitzen. Von den insgesamt k-Differentialgleichungen
 2. Ordnung verbleiben somit $p = k - n$, während die restlichen n-
 Differentialgleichungen 1. Ordnung sind. Folglich braucht die un-
 ter 3.2 durchgeführte Transformation nur noch auf die p-Gleichungen
 2. Ordnung angewendet zu werden. Dann folgt aus Gl. (29)

$$\begin{bmatrix} \omega_0 (L_{pp}) & (O_{pn}) \\ (O_{np}) & (O_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Q_p'') \\ (Q_n'') \end{bmatrix} = -\omega_0 \begin{bmatrix} (R_{pp}) & (R_{pn}) \\ (R_{np}) & (R_{nn}) \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} (L_{pp}') & (O_{pn}') \\ (O_{np}') & (O_{nn}') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Q_p') \\ (Q_n') \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (K_{pp}) & (K_{pn}) \\ (K_{np}) & (K_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Q_p) \\ (Q_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_p) \\ (u_n) \end{bmatrix} \quad (54)$$

Wobei der 1. Index die Anzahl der Zeilen, der 2. Index die der
 Spalten angibt.

In Gl. (29) wurde

$$(u) = \frac{1}{q_0} (H^T) [(u_0) + (u_{c0})] \quad (55)$$

gesetzt.

Nach Anwendung der Transformation

$$(V_p) = (Q_p) \quad (56)$$

$$(W_p) = (Q_p^*) \quad (57)$$

auf Gl. (54) und Benutzung der Gleichung

$$(V_p^*) = (W_p) \quad (58)$$

verbunden mit einigen Umstellungen ergibt sich

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega_o(L_{pp}) & (O_{pp}) & \omega_o(R_{pn}) \\ (O_{pp}) & (E_{pp}) & (O_{pn}) \\ (O_{nn}) & (O_{np}) & \omega_o(R_{nn}) \end{bmatrix}}_{(B)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} (W_p^*) \\ (V_p^*) \\ (Q_n^*) \end{bmatrix}}_{(y')} = - \underbrace{\begin{bmatrix} (R_{pp}) + \omega_o(L_{pp}^*) & (K_{pp}) & (K_{pn}) \\ (E_{pp}) & (O_{pp}) & (O_{pn}) \\ \omega_o(R_{np}) & (K_{np}) & (K_{nn}) \end{bmatrix}}_{(P)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} (W_p) \\ (V_p) \\ (Q_n) \end{bmatrix}}_{(y)} - \underbrace{\begin{bmatrix} (u_p) \\ (O_p) \\ (u_n) \end{bmatrix}}_{(G)} \quad (59)$$

oder abgekürzt geschrieben

$$(B)(y') = (P)(y) + (G)$$

bzw. mit Gl. (40) und (41)

$$\underline{(y')} = \underline{(A)(y) + (F)} \quad (42)$$

Damit ist die ursprüngliche Gestalt von Gl. (42) selbst für diesen Sonderfall wieder hergestellt.

3.4 Formulierung der Anfangsbedingungen.

Zur eindeutigen Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung oder gleichbedeutend n-Differentialgleichungen erster Ordnung sind bekanntlich n voneinander unabhängige Anfangsbedingungen notwendig und hinreichend. Übertragen auf die vorliegende Netz-Differentialgleichung (42) bedeutet das, daß alle n Komponenten des Vektors (y), die im einzelnen Ströme bzw. Ladungen darstellen, am Anfang eines Definitionsbereichs, also unmittelbar nach jedem Schaltvorgang, vorgegeben werden müssen. Durch die Vorgabe des Anfangsvektors (y₀) wird somit der Anfangszustand des Netzwerkes vollständig festgelegt. Selbstverständlich darf durch die willkürliche Vorgabe von (y₀) physikalisch kein Widerspruch entstehen. Dazu käme es beispielsweise bei Nichtbeachtung des Schaltgesetzes, welches besagt, daß sich die Energie in einem Energiespeicher nicht sprunghaft ändern kann. Bei Betrachtung der Energiebeziehungen

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C u^2 \quad (\text{Kondensator}) \quad (60)$$

$$E_S = \frac{1}{2} L i^2 \quad (\text{Spule}) \quad (61)$$

ergibt sich daraus sofort eine wichtige Konsequenz:

In Kondensatorzweigen muß die Ladung stetig übergehen, während das gleiche für den Strom in mit Spulen besetzten Zweigen gilt. Genauer ausgedrückt muß im Schaltzeitpunkt

$$q_I = q_{II} \quad (62)$$

$$i_I = i_{II} \quad (63)$$

für oben gemachte Spezifikationen sein. Dabei sind die mit I indizierten Größen diejenigen unmittelbar vor, und die mit II indizierten diejenigen unmittelbar nach dem Schaltvorgang.

Werden diese Regeln bei der Festlegung von

$$(y_0) = (y(x_0)) = \begin{bmatrix} (V(x_0)) \\ (W(x_0)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Q_K(x_0)) \\ (Q'_K(x_0)) \end{bmatrix} = \frac{1}{q_0} \begin{bmatrix} (q_K(x_0)) \\ (q'_K(x_0)) \end{bmatrix} \quad (43)$$

oder mit Gl. (11)

$$(y_0) = \frac{1}{q_0} \begin{bmatrix} (q_K(x_0)) \\ \frac{1}{\omega_0} (i_K(x_0)) \end{bmatrix}$$

beachtet, so ist das vorliegende Differentialgleichungs-System (42) eindeutig lösbar.

4. Numerische Lösung

Die Beschreibung transienter Vorgänge in elektrischen Netzwerken ist in den vorangegangenen Abschnitten auf die Lösung von Gl. (42) zurückgeführt worden. Diese Vektordifferentialgleichung

$$(y') = (A)(y) + (F) = (f(x, y)) \quad (42)$$

mit den Anfangswerten

$$(y_{(x_i)}) = (y_0)$$

ist für beliebig viele Komponenten n nur numerisch lösbar. Von den zahlreichen Verfahren, die zur numerischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungs-Systemen zur Verfügung stehen, wurde die von Hamming [5] angegebene Predictor-Corrector-Methode für die Berechnung von Gl. (42) ausgewählt. Sie ist für große und komplizierte Systeme, in denen die Berechnung von $(f_{(x,y)})$ umfangreich ist, geeignet, da sie eine hohe Schrittgenauigkeit besitzt, nur zwei Berechnungen von $(f_{(x,y)})$ pro Integrationsschritt verlangt und stabil ist.

Die Hamming'sche Methode beruht auf der iterativen Integration, bei der folgende Integrationsschritte durchgeführt werden:

- 1.) Schätzung eines Wertes von (y) für $(x)_{n+1}$; er sei $(\bar{y})_{n+1}$ 4.)
- 2.) Berechnung von $(\bar{y}')_{n+1} = (f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}))$ unter Verwendung der gegebenen Differentialgleichung.
- 3.) Berechnung eines neuen Wertes $(y)_{n+1}$ mit der iterativen Formel.
- 4.) Wiederholung von 2.) und 3.) solange, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Im einzelnen ist das genannte Verfahren in der IBM-Subroutine HPCL ausgeführt, die auch hier verwendet wird. Sie verlangt das System in der Form

$$(y') = (A)(y) + (F)$$

4.) Index n kennzeichnet den n -ten Integrationsschritt.

und benutzt außer einer Ausgaberroutine OUTF zwei weitere externe Unterprogramme AFCT und FCT. Die beiden letzten berechnen die Matrix (A) bzw. den Vektor (F) vor jedem Integrationsschritt. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, die Elemente von (A) und (F) als willkürliche Funktionen der unabhängigen Variablen zu bestimmen und in diesen Programmen zu definieren. Das tritt jedoch nur dann ein, wenn (L), (R), (K) oder (u_0) Funktionen der Zeit sind, weil aus ihnen die Matrizen (A) und (F) hervorgehen. Genauer ausgedrückt heißt das aber, daß alle Rechenoperationen, die zur Bestimmung von (A) und (F) erforderlich sind, von den Subroutinen AFCT bzw. FCT ausgeführt werden müssen. Zumindest werden sie Rufprogramme, falls es zweckmäßiger ist, diese Operation in einem externen Programm auszuführen.

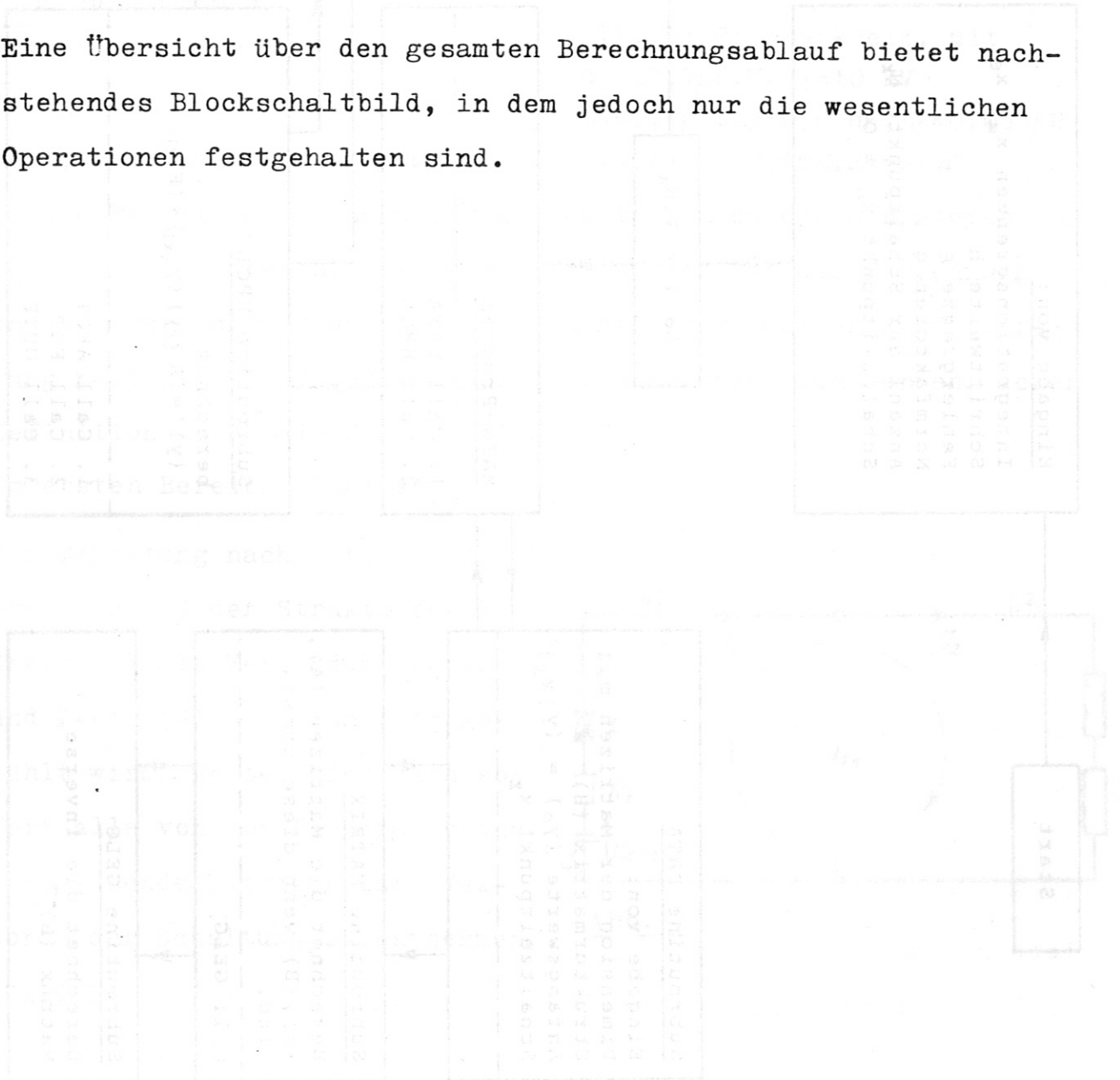
Praktisch wichtiger ist jedoch der Sonderfall konstanter Koeffizienten (A) und (F), denn meistens sind Netze zu berechnen, deren Schaltelemente über die Zeit gesehen, konstant sind. Prinzipiell verläuft der Berechnungsgang wie oben beschrieben; doch ist es nun sinnvoll, die wiederholte Berechnung der Matrizen zu vermeiden, sie also außerhalb der Subroutine AFCT bzw. FCT vorzunehmen. Dazu wird hier zusätzlich das Unterprogramm MATRIX verwendet. Durch diese Maßnahme wird zumindest bei aufwendigen Matrizenoperationen viel Rechenzeit eingespart.

Zu erwähnen ist noch die Eingaberoutine DATA, die wegen der Behandlung von Schaltvorgängen notwendig ist. Denn unmittelbar nach jedem Schaltvorgang muß die Differentialgleichung samt ihrer Anfangswerte neu festgelegt werden. Dies besorgt das Unterprogramm DATA mit Hilfe der Strukturmatrix (H), die im jeweiligen Schaltmoment gemeinsam mit den Anfangswerten und den

übrigen Systemparametern eingelesen wird. Selbstverständlich erübrigt sich die Vorgabe von Anfangswerten für diejenigen Funktionswerte, welche aus dem vorhergehenden in den folgenden Bereich stetig übergehen. Gegebenenfalls werden also die errechneten Grenzwerte durch die Subroutine DATA übernommen.

Die numerische Lösungsmethode berücksichtigt auch den Sonderfall singulärer Koeffizientenmatrix, bei dem das Programm lediglich eine Umbelegung der Matrizen vornimmt (Einzelheiten unter 3.3). Dadurch bleibt der anschließende Integrationsprozeß unverändert.

Eine Übersicht über den gesamten Berechnungsablauf bietet nachstehendes Blockschaltbild, in dem jedoch nur die wesentlichen Operationen festgehalten sind.



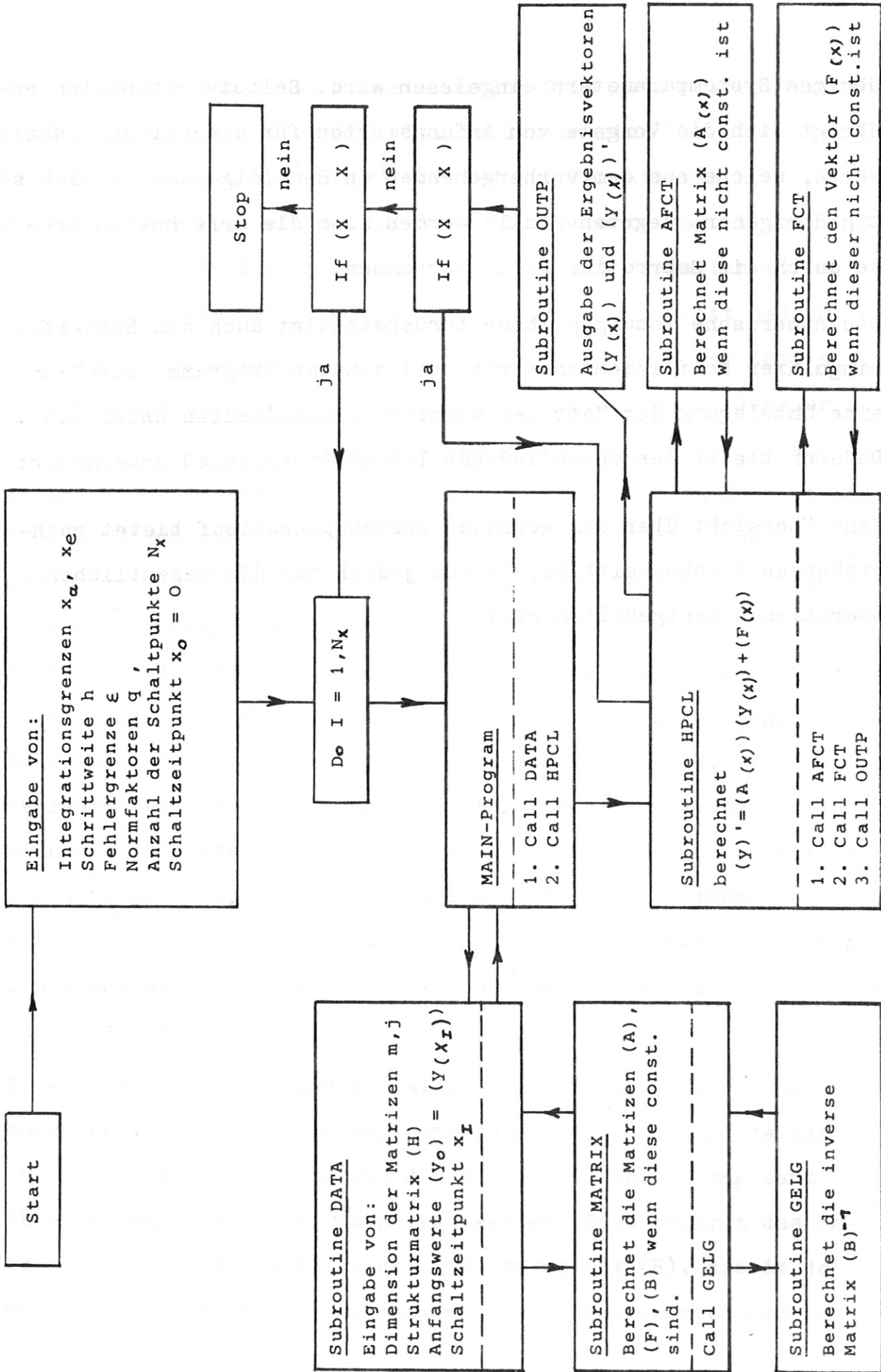


Abb. 5 : Blockschahtbild des FORTRAN-Programms

5. Anwendungsbeispiele.

5.1 Der Crowbar-Schaltkreis

An nebenstehender Crowbar-Schaltung soll nun die ausgeführte Berechnungsmethode demonstriert werden. Es handelt sich hier um einen Kondensator-Entladekreis, in dem eine stufenförmige Entladung des Kondensators C_1 vorgenommen wird.

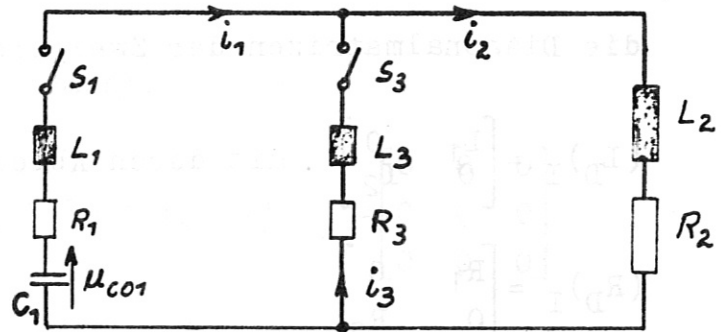


Abb. 6: Crowbarkreis, mit $C_1=53,7\mu\text{F}$, $U_{C01}=40\text{KV}$
 $L_1=0,1\mu\text{H}$, $L_2=0,87\mu\text{H}$, $L_3=0,035\mu\text{H}$
 $R_1=7\text{m}\Omega$, $R_2=0,4\text{m}\Omega$, $R_3=6\text{m}\Omega$

Gesucht ist der Verlauf der Zweigströme als Funktion der Zeit, wenn Schalter s_1 zum Zeitpunkt $t=t_1=0$ und Schalter s_3 zusätzlich zu einem späteren Zeitpunkt $t=t_2$ geschlossen wird. Demzufolge ist die Berechnung in zwei Bereiche zu unterteilen, da nach dem zweiten Schaltvorgang neue Netz-Differentialgleichungen erforderlich werden, deren Definition durch die Matrix $(H)_{II}$ erfolgt.

Im ersten Bereich ($0 \leq t \leq t_2$) gilt

die Schaltung nach Abb. 7, in der entsprechend der Strukturregel Zweig (1) als Verbindungszweig und Zweig (2) als Baumzweig gewählt wird. Weiter sind dann sofort alle von der Rechenmaschine einzulesende Matrizen bzw. Vektoren der Schaltung zu entnehmen, nämlich:

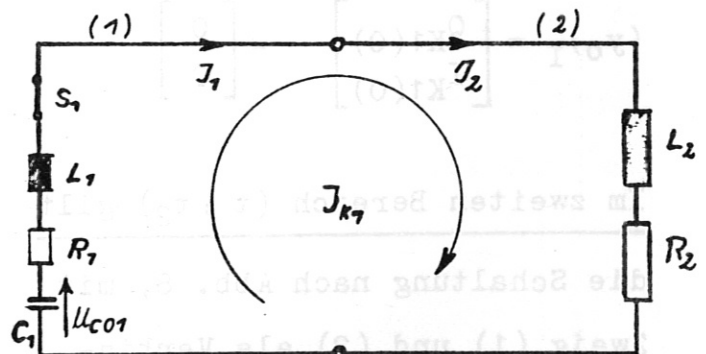


Abb. 7

die Strukturmatrix

$$(H)_I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ sie folgt aus } (I) = (H) \cdot (I_K)$$

die Diagonalmatrizen der Zweigelemente

$$(L_D)_I = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \text{ mit deren Ableitung } (L'_D)_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(R_D)_I = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

$$(K_D)_I = \begin{bmatrix} 1/c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

die Vektoren der Quellspannungen

$$(u_o)_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(u_{co})_I = \begin{bmatrix} u_{co1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

der Anfangsvektor

$$(y_o)_I = \begin{bmatrix} Q_{K1}(0) \\ I_{K1}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Im zweiten Bereich ($t \geq t_2$) gilt

die Schaltung nach Abb. 8, mit
Zweig (1) und (2) als Verbindungs-
zweige und Zweig (3) als
Baumzweig. In Analogie zum er-
sten Bereich werden jetzt fol-
gende Matrizen bzw. Vektoren
eingelassen:

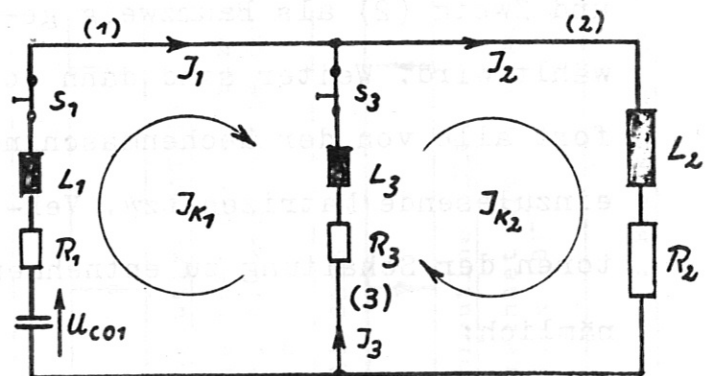


Abb. 8

die Strukturmatrix

$$(H)_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Diagonalmatrizen der Zweigelemente

$$(L_D)_{II} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \text{ mit deren Ableitung } (L'_D)_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(R_D)_{II} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix}$$

$$(K_D)_{II} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

die Vektoren der Quellspannungen

$$(u_o)_{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(u_{co})_{II} = \begin{bmatrix} u_{co1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

der Anfangswertvektor

$$(y_o)_{II} = \begin{bmatrix} Q_1(t_2) \\ Q_2(t_2) \\ I_1(t_2) \\ I_2(t_2) \end{bmatrix}$$

Mit diesen Angaben werden die gesuchten Funktionen $i_y(t)$ in dem vorgegebenen Intervall ($0 \leq t \leq t_{\text{Ende}}$) kontinuierlich nach Gl. (42) berechnet; unter der Voraussetzung, daß der Schalter S_3 gerade dann eingeschaltet wird, wenn der Strom $i_1(t) = i_2(t)$ sein erstes Maximum durchläuft. Die Ergebnisse sind in Abb. 9 festgehalten. Diese Kurven stimmen mit experimentell ermittelten - die demnächst in einem IPP-Bericht [7] veröffentlicht werden - überein. Außerdem gehen die Ströme $i_2(t)$ und $i_3(t)$ nach beendetem Einschwingvorgang ineinander über, während der Strom $i_1(t)$ gegen Null strebt. Sie zeigen also ein Verhalten, wie es theoretisch zu erwarten war. Die Erfüllung dieses Kriteriums, verbunden mit dem Vergleich der Kurvenformen, gestatten kaum Zweifel an der Richtigkeit der Berechnung.

Um eben Besagtes zu bekräftigen, soll noch der in Abb. 10 dargestellte Grenzfall $R_2=R_3=0$ von Schaltung Abb. 6 kurz erörtert werden. Er läßt nämlich infolge der wegfallenden Dämpfung in den Netzzweigen (2) und (3) den Schluß zu, daß $i_2(t)$ nach Einschalten von S_3 konstant bleiben muß. Natürlich abgesehen von einer minimalen Dämpfung während der Einschwingphase bewirkt durch R_1 .

Der gerade beschriebene Verlauf $i_2(t)$ wird durch Abb. 10 bestätigt.

Darüberhinaus zeigt Abb. 11 den Einfluß des Schaltzeitpunktes auf die Kurvenform der Ströme $i_y(t)$.

Abb. 9: Zweigströme $i_{\nu}(t)$ der Crowbar-Schaltung mit Dämpfung
Schaltzeitpunkt im Strommaximum

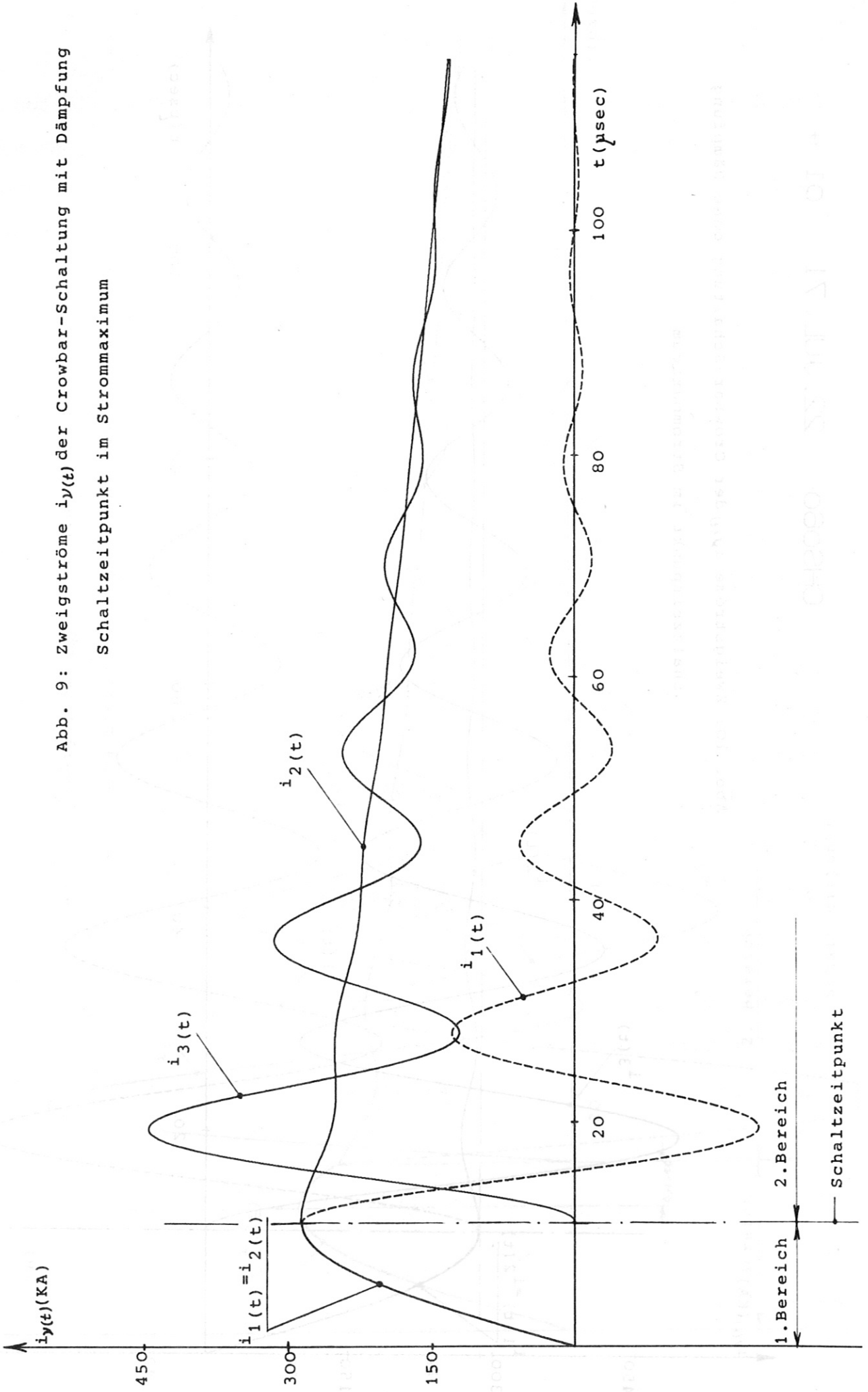
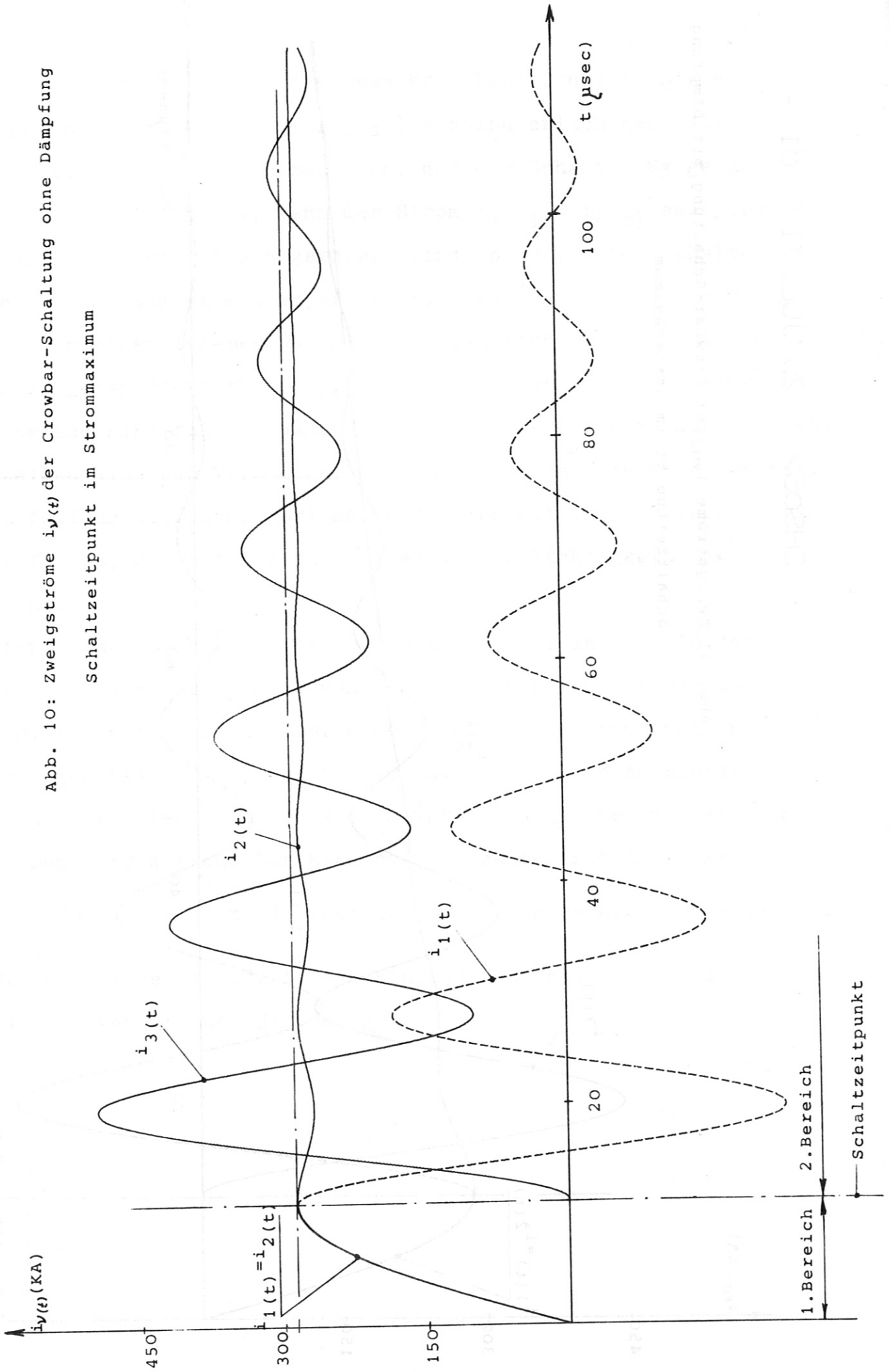


Abb. 10: Zweigströme $i_{\nu}(t)$ der Crowbar-Schaltung ohne Dämpfung
Schaltzeitpunkt im Strommaximum



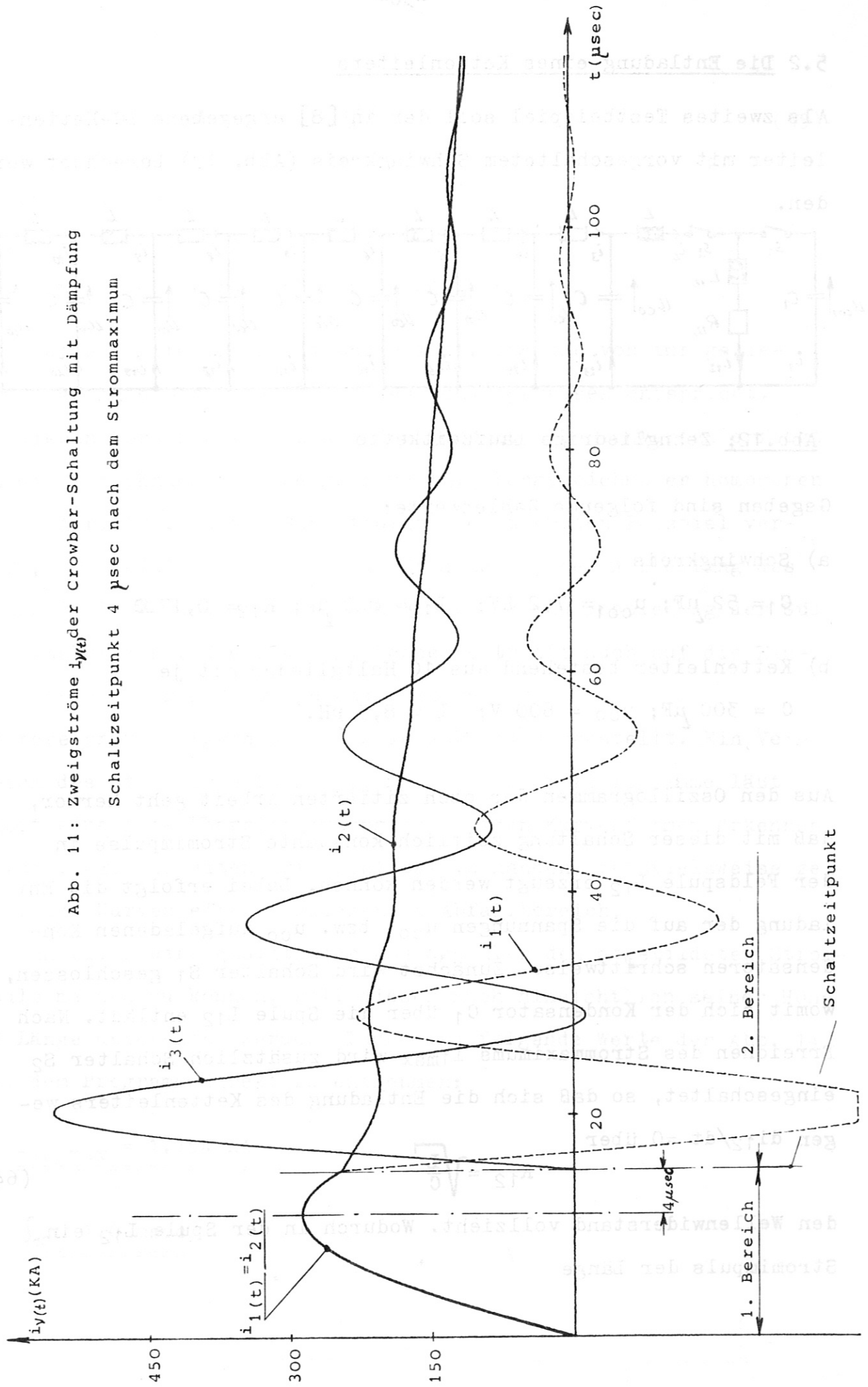


Abb. 11: Zweigströme $i_Y(t)$ der Crowbar-Schaltung mit Dämpfung
Schaltzeitpunkt 4 μsec nach dem Strommaximum

5.2 Die Entladung eines Kettenleiters

Als zweites Testbeispiel soll der in [8] angegebene LC-Kettenleiter mit vorgeschaltetem Schwingkreis (Abb. 12) berechnet werden.

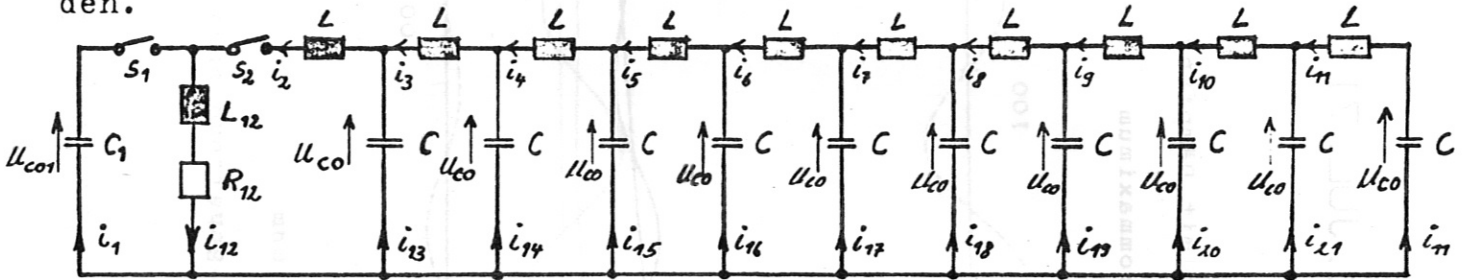


Abb.12: Zehngliedrige Laufzeitkette

Gegeben sind folgende Zahlenwerte:

a) Schwingkreis

$$C_1 = 52 \mu\text{F}; u_{c01} = 7,2 \text{ KV}; L_{12} = 820 \mu\text{H}; R_{12} = 0,17 \Omega$$

b) Kettenleiter bestehend aus 10 Halbglieder mit je

$$C = 300 \mu\text{F}; u_{c0} = 600 \text{ V}; L = 8,3 \mu\text{H}.$$

Aus den Oszillogrammen der oben zitierten Arbeit geht hervor, daß mit dieser Schaltung zeitlich konstante Stromimpulse in der Feldspule L_{12} erzeugt werden können. Dabei erfolgt die Entladung der auf die Spannungen u_{c01} bzw. u_{c0} aufgeladenen Kondensatoren schrittweise. Zunächst wird Schalter S_1 geschlossen, womit sich der Kondensator C_1 über die Spule L_{12} entlädt. Nach Erreichen des Strommaximums $i_{1\text{max}}$ wird zusätzlich Schalter S_2 eingeschaltet, so daß sich die Entladung des Kettenleiters wegen $di_{12}/dt = 0$ über

$$R_{12} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (64)$$

den Wellenwiderstand vollzieht. Wodurch in der Spule L_{12} ein Stromimpuls der Länge

$$\delta = 2T = 2m\sqrt{LC} \quad (65)$$

entsteht. Darin ist

T die Laufzeit der Kette und

m die Anzahl der verwendeten Kettenglieder.

Die Laufzeitkette ist so dimensioniert, daß die von ihr gelieferte maximale Stromstärke der des Schwingkreises entspricht.

Mit diesen Voraussetzungen und den gegebenen Zahlenwerten erfolgt nun die Berechnung der Zweigströme $i_{\nu}(t)$ obengezeichneter homogenen Kette (Abb. 12). Da die Schaltfolge wie im ersten Beispiel verläuft, erscheint eine nochmalige Erläuterung der Aufteilung des Netzes in Baum- und Verbindungszweige, wie die Festlegung der Gültigkeitsbereiche, überflüssig. Dasselbe trifft auch auf die Eingabe der einzelnen Matrizen und Vektoren zu.

Die berechneten Ergebnisse sind in Abb. 14 dargestellt. Ein Vergleich des Stromverlaufs $i_{12}(t)$ mit dem der Oszillogramme läßt sofort eine gute Übereinstimmung der beiden Kurvenformen erkennen. Selbst in Einzelheiten ist Identität vorhanden, beispielsweise zeigen beide Kurven einen abknickenden Abfallbereich.

Um zusätzlich eine qualitative Aussage über den abgebildeten Stromimpuls machen zu können, soll dieser noch hinsichtlich seiner Höhe und Länge untersucht werden. Dazu sind folgende Werte der Abb. 14 bzw. dem Programm direkt zu entnehmen:

1.) $\underline{\underline{i_{12 \max} = 1,754 \text{ KA}}}$

2.) $\underline{\underline{\delta_{10} = 1,0 \text{ msec}}}$

Andererseits stehen zur Bestätigung dieser Werte exakte Formeln zur Verfügung.

Mit $m=10$ (Kettenglieder), $L=8,3 \mu\text{H}$ und $C = 300 \mu\text{F}$ ergibt sich nach Gl. (65) die Impulslänge δ_{10} zu

$$\delta_{10} = 2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \sqrt{8,3 \cdot 300}$$

$$\underline{\underline{\delta_{10} = 0,998 \text{ msec}}}$$

Ein entsprechender Test wird jetzt an einer sechsgliedrigen Kette (Abb. 13) bei sonst gleichen Zahlenwerten durchgeführt.

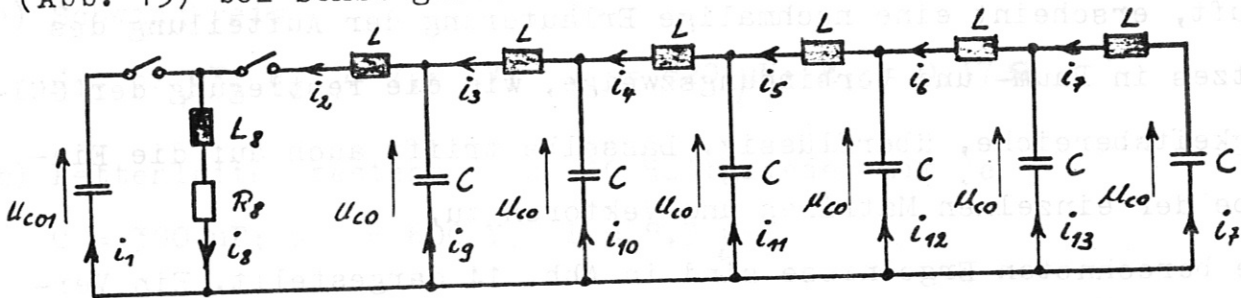


Abb. 13: Sechsgliedrige Laufzeitkette

Gemäß Gl. (65) müßte die theoretische Impulslänge

$$\delta_6 = 2 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \sqrt{8,3 \cdot 300}$$

$$\underline{\underline{\delta_6 = 0,5988 \text{ msec}}}$$

betragen. Demgegenüber steht der dem Programm entnommene Wert von

$$\underline{\underline{\delta_6 = 0,599 \text{ msec}}}$$

der in Abb. 15 eingezeichnet ist. (Abb.15 zeigt die Übergangsfunktionen $i_{\nu}(t)$ der sechsgliedrigen Kette).

Sowohl für die zehn- wie die sechsgliedrige Kette ergeben sich sehr gut übereinstimmende Resultate.

Der Wert des Strommaximums, welcher durch die Anzahl der Ketten-
glieder nicht beeinflusst wird, kann durch die Gleichung

$$i = i_0 e^{-\delta t} \sin \omega t \quad (66)$$

mit
$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1}{L_1}$$

für die Stelle $t = t_1$ (Lage des Maximums) bestimmt werden. Sie
beschreibt den Stromverlauf in einem einfachen Serienschwing-
kreis. Aus Gl. (66) folgt

$$i_{\max} = 1,754 \text{ KA}$$

=====

also genau der numerisch ermittelte Wert.

Die ausgeführten Testbeispiele dürften hinreichend sein, die ab-
geleitete Berechnungsmethode zu bestätigen.

Es verbleibt noch eine Bemerkung zu den Kurvenblättern Abb. 14
und 15. Hier sind aus Gründen der Übersicht nicht alle Zweig-
ströme $i_{\nu}(t)$ eingezeichnet worden, sondern nur die interessantesten;
in der Tat geben die gewählten einen guten Überblick über die Ent-
stehung der Impulsform.

Abb. 14: Zweigströme $i_y(t)$ des zehngliedrigen Kettenleiters mit vorgeschaltetem Schwingkreis

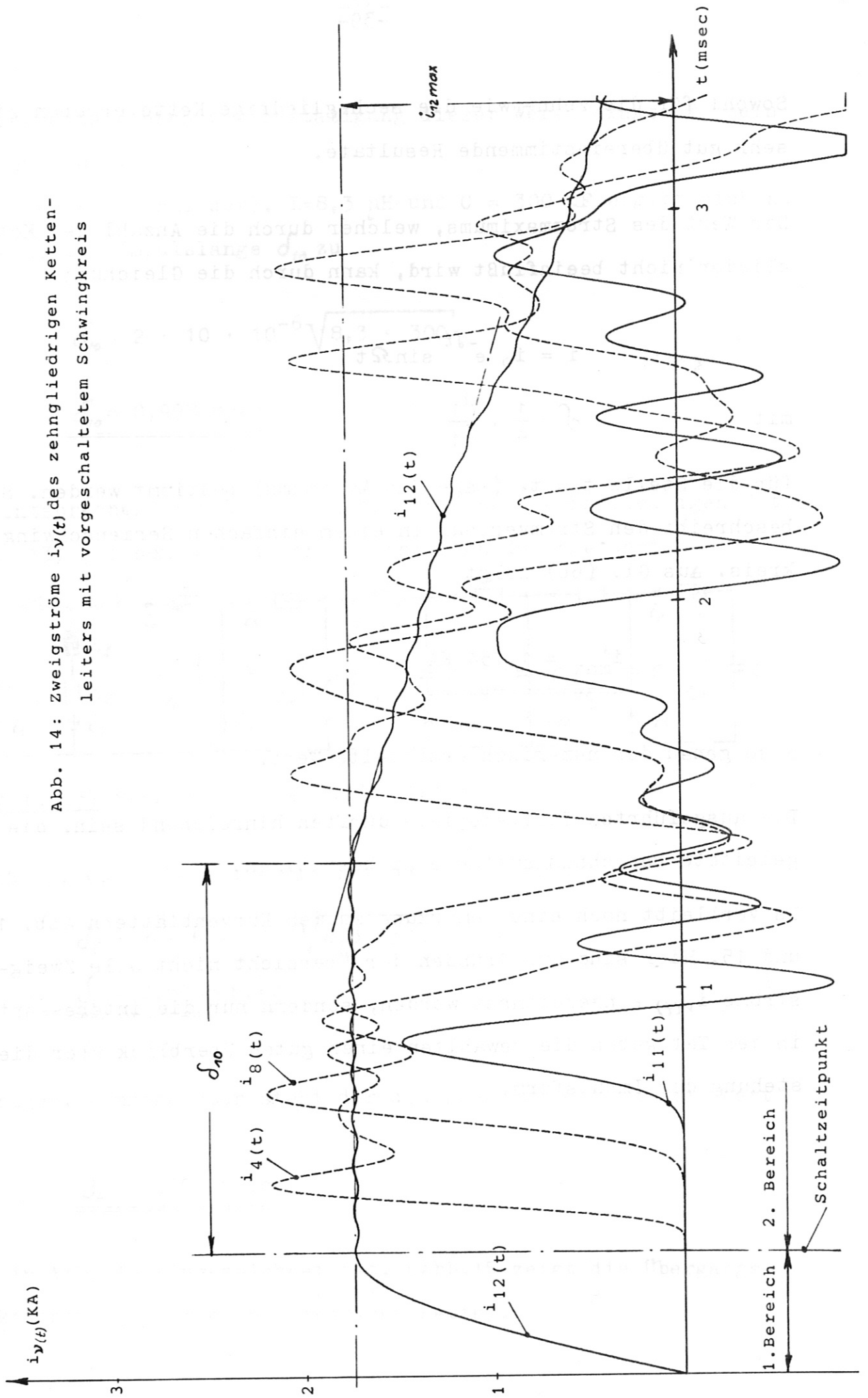
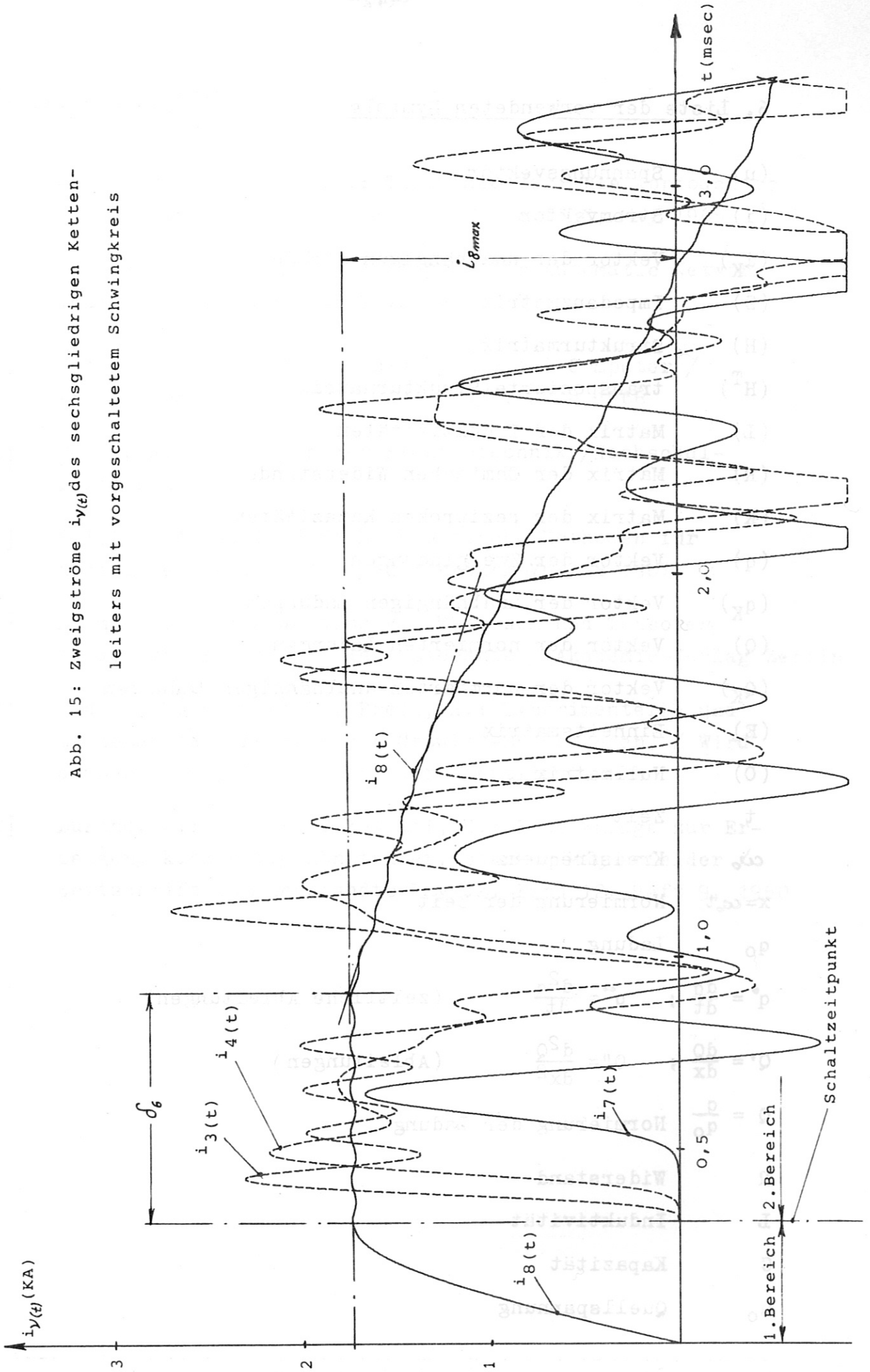


Abb. 15: Zweigströme $i_{\nu(t)}$ des sechsgliedrigen Kettenleiters mit vorgeschaltetem Schwingkreis



6. Liste der verwendeten Symbole

(u)	Spannungsvektor
(i)	Stromvektor
(i_K)	Vektor der unabhängigen Ströme
(Z)	Impedanzmatrix
(H)	Strukturmatrix
(H^T)	transponierte Strukturmatrix
(L)	Matrix der Induktivitäten
(R)	Matrix der Ohm'schen Widerstände
(K)	Matrix der reziproken Kapazitäten
(q)	Vektor der Zweigladungen
(q_K)	Vektor der unabhängigen Ladungen
(Q)	Vektor der normierten Ladungen
(Q_K)	Vektor der normierten unabhängigen Ladungen
(E)	Einheitsmatrix
(O)	Nullmatrix
t	Zeit
ω_0	Kreisfrequenz
$x = \omega_0 t$	Normierung der Zeit
q_0	Ladung
$q' = \frac{dq}{dt}$; $q'' = \frac{d^2q}{dt^2}$	(zeitliche Ableitungen)
$Q' = \frac{dQ}{dx}$; $Q'' = \frac{d^2Q}{dx^2}$	(Ableitungen)
$Q = \frac{q}{q_0}$	Normierung der Ladung
R	Widerstand
L	Induktivität
C	Kapazität
u_0	Quellspannung

7. Literaturverzeichnis

- [1] Kuh, E.S.; Rohrer, R.A.: The State-Variable Approach to Network Analysis/ Proceedings of the IEEE, May 1965
- [2] Sedore, S.R.: Sceptre: A Program for Automatic Network Analysis / IBM Journal November 1967
- [3] Kuo, F.F.: Network Analysis by Digital Computer / Proceedings of the IEEE, Vol. 54/6, June 1966
- [4] Bosse, G: Grundlagen der Elektrotechnik /Hochschul-Taschenbuch
- [5] Ralston, A; Wilf, H.S: Mathematische Methoden für Digitalrechner, Band I / Oldenbourg-Verlag 1967
- [6] Promberger, M: Anwendung von Matrizen und Tensoren in der theoretischen Elektrotechnik / Akademie-Verlag Berlin
- [7] Wedler, H; Klement G., Preis, H.: Experimentelle und mathematische Analyse von Crowbar-Schaltungen, / Wird demnächst als IPP-Bericht veröffentlicht.
- [8] Durand, J.; Klüber, O.; Wulff, H.: Eine Anlage zur Erzeugung kurzzeitig konstanter, starker Magnetfelder / Zeitschrift für angewandte Physik, Band 12, Heft 9, 1960