

Gleichzeitige spektroskopische Bestimmung von  
Elektronendichte und Elektronentemperatur zum  
Nachweis von Relaxationseffekten in einem  
strömenden Argon-Kalium-Plasma

Simultaneous Spectroscopic Determination of  
Electron Density and Temperature as a Proof  
of Relaxation Effects in a Streaming  
Argon-Potassium-Plasma

G. Dodel

IPP IV/12

Juni 1971

Die Arbeit wurde teils am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (IPP),  
Garching, in der Abteilung Experimentelle Plasmaphysik 4 (Leitung  
Dr. S. Witkowski), teils am Institut für Plasmaforschung (IPF) der  
Universität Stuttgart (Leitung Prof. Dr. R. Wienecke) durchgeführt.

## Abstract

Simultaneous measurements of electron temperature and density distributions prove that significant relaxation effects of the electron density occur in a MHD generator type argon-potassium plasma streaming through a channel with segmented electrode array. Both parameters are determined spectroscopically; the electron temperature by line reversal of the potassium resonance doublet  $4S_{1/2} - 4P_{1/2,3/2}$  and the electron density by absolute intensity measurement of the  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  transition. The applicability of these two spectroscopic methods which is by no way trivial in a transient plasma is investigated on the basis of BATES, KINGSTON and McWHIRTER's quasi steady state theory of the relaxation process. The principal problem of spectroscopy in transient plasmas is substantiated in terms of this theory in a rather general way. The numerical calculations of the theory are based on an eighteen-level model of the potassium atom, the semi-classical THOMSON-GRYZINSKI collision cross sections being used. They yield population densities of the excited levels as well as ionization and recombination coefficients as functions of the electron density and temperature. Thus density and temperature ranges can be specified in which the spectroscopic methods mentioned above are justified. Furthermore, the specific relaxation problems occurring in the experiment can be calculated and compared to the measurements. Good qualitative agreement is found. Quantitatively, the measured electron density relaxation occurs faster than is predicted by the calculations. Finally, the numerical calculations yield the equilibrium electron density as a function of the electron temperature. Due to radiation escape this equilibrium density appreciably deviates from the Saha density. In the experiment, however, such a significant deviation could not be verified. The discrepancy between calculated and measured equilibrium electron densities can be reduced by taking wall radiation into account. This seems to indicate that wall radiation plays a role in establishing equilibrium.

# INHALTSVERZEICHNIS

		Seite
	Einleitung	9
1.	<u>Zur Bedeutung von Relaxationseffekten der Elektronendichte in Argon-Kalium-Plasmen</u>	12
2.	<u>Grundlagen der Problematik der angewandten spektroskopischen Meßverfahren</u>	16
2.1	Ausgangspunkt für die Elektronentemperaturbestimmung	17
2.2	Ausgangspunkt für die Elektronendichtebestimmung	19
2.3	Ein einfaches Modell zum anschaulichen Verständnis der spektroskopischen Problematik	21
2.4	Die quasistationäre Behandlung des Relaxationsproblems nach BATES, KINGSTON und McWHIRTER (1962)	26
2.5	Die spektroskopische Problematik aus der Sicht der quasistationären Theorie	39
3.	<u>Zur quantitativen Durchführung der quasistationären Rechnungen</u>	45
3.1	Elektronenstoßquerschnitte und Berechnung der Elektronenstoßkoeffizienten	45
3.2	Photorekombinationskoeffizienten	52
3.3	Strahlungsübergangswahrscheinlichkeiten für spontane Emission	52
3.4	Berücksichtigung von Strahlungsanregungen	52
3.5	Zählung der Energieniveaus	57
3.6	Dimension des linearen Gleichungssystems	58
4.	<u>Grundlagen der experimentellen Durchführung</u>	60
4.1	Die Linienumkehrmethode	61
4.2	Besetzungsdichtebestimmung durch Absolutmessung der Linienintensität	66
4.3	Die Wolframbandlampe als Strahlungsnormal	70

		Seite
5.	<u>Experiment</u>	71
5.1	Plasmaerzeugung	72
5.2	Meßkanal	73
5.3	Optisches System und Aufzeichnungsverfahren	74
5.4	Betriebsdaten	77
5.5	Bemerkungen zur Durchführung der Experimente	78
6.	<u>Ergebnisse in Theorie und Experiment</u>	80
6.1	Das stoßbestimmte Kaliumplasma als Modellfall	81
6.2	Numerische und experimentelle Ergebnisse für das realistische, nicht-stoßbestimmte Plasma	98
6.2.1	Das Ionisationsgleichgewicht	101
6.2.2	Nachweis von Relaxationseffekten	110
6.2.3	Fehlerbetrachtung	120
6.2.4	Grenzen der experimentellen Durchführbarkeit der beiden Meßmethoden	122
7.	<u>Zusammenfassung</u>	123
	Literaturverzeichnis	126

Verzeichnis der verwendeten Symbole

(a) Lateinische Symbole:

- $a_p$  - Koeffizient im Ausdruck für die quasistationäre Besetzungsdichte des Niveaus  $p$  (definiert in Gl. 2,23)
- $A_{pq}$  - Einsteinsche Übergangswahrscheinlichkeit für spontane Emission
- $b_p$  - siehe  $a_p$
- $B_{pq}$  - Einsteinsche Übergangswahrscheinlichkeit für Absorption ( $p < q$ ) bzw. induzierte Emission ( $p > q$ )
- $B_\nu$  - PLANCKSche Strahlungsintensität bezogen auf die Frequenzeinheit
- $B(E_1/U)$  - Steigung der linearen Näherung der GRYZINSKI-Funktion (def. in Gl. 3,12)
- $c$  - Lichtgeschwindigkeit
- $d$  - als Index für die Bezeichnung des Niveaus gebraucht, aus dessen Besetzungsdichte die Elektronendichte bestimmt wird
- $D(\lambda)$  - spektrale Durchlässigkeit des Monochromators
- $e$  - Elementarladung
- $e(\lambda, T)$  - Emissivität des Wolframbandes
- $e$  - als Index für Elektronendichte
- $E_{pq}$  - positiver Energieabstand zwischen den Niveaus  $p, q$
- $E_1$  - Energie des gestoßenen Elektrons (Abschn. 3.1)
- $E_2$  - Energie des stoßenden Elektrons (Abschn. 3.1)
- $\tilde{E}$  - Energie, bei der die lineare Näherung der GRYZINSKI-Funktion abgebrochen wird (Abschn. 3.1)
- $f(v_e)$  - Geschwindigkeitsverteilung des Elektronengases
- $g_p$  - statistisches Gewicht (Entartung) des Niveaus  $p$
- $g_j(\frac{E_2}{U}; \frac{E_1}{U})$  - GRYZINSKI-Funktion (Gl. 3,7)
- $h$  - PLANCKSche Konstante
- $I_\nu$  - spektrale Strahlungsintensität bezogen auf die Frequenzeinheit
- $I_\lambda$  - spektrale Strahlungsintensität bezogen auf die Wellenlängeinheit
- $I^{(p, q)}$  - integrale Intensität (def. in Gl. 4,12)
- $I^{(w)}$  - definiert in Gl. (4,14)
- $j$  - Betrag der elektrischen Stromdichte
- $k$  - BOLTZMANNkonstante
- $K$  - als Index für Kalium

$K_{pq}$	- Elektronenstoßkoeffizient der Stoßrate von p nach q (def. in Gl. 3,1 ; 3,2)
$K_{pe}$	- Elektronenstoßkoeffizient der Ionisationsrate vom Niveau p aus (def. in Gl. 2,14)
$K_{ep}$	- Elektronenstoßkoeffizient der Dreierstoßrekombinationsrate nach dem Niveau p (def. in Gl. 2,14)
$l$	- Schichtdicke des Plasmas
$l'$	- Ortskoordinate in Strahlungsrichtung
$m_e$	- Elektronenmasse
$m_o$	- Masse der "schweren" Teilchen (Ar, K, $K^+$ , wobei $m_{Ar} \approx m_K \approx m_{K^+}$ )
$n_o$	- Teilchendichte im Grundzustand
$n_e$	- Elektronendichte
$n_{es}$	- SAHAElektronendichte
$n_{e(eq)}$	- Elektronendichte im Gleichgewichtszustand des Plasmas
$n_p$	- Besetzungsdichte des Niveaus p
$n_{ps}$	- Sahabesetzungsdichte des Niveaus p (def. in Gl. 2,52)
$n_{pB}$	- Boltzmannbesetzungsdichte des Niveaus p bezogen auf die Besetzungsdichte des Grundzustands
$N$	- Dimension des linearen Gleichungssystems für die quasistationären Besetzungsdichten
$q_e$	- Nettorate der pro Zeit- und Volumeneinheit entstehenden bzw. rekombinierenden Elektronen (def. in Gl. 1,1)
$q_p$	- Nettorate der pro Zeit- und Volumeneinheit entstehenden bzw. verschwindenden Teilchen im Zustand p
$Q, Q_{pq}$	- Stoßquerschnitt für Elektronenstoß, Stoßquerschnitt für einen Übergang von p nach q
$\vec{r}$	- Ortsvektor
$r_{pq}$	- vollständige Nettorate der Strahlungsübergänge zwischen den Niveaus p und q (def. in Gl. 3,16)
$R_{pq}$	- lokaler Energieverlust pro Zeit- und Volumeneinheit durch Strahlung des Übergangs p nach q
$r_{pj}, s_{pj}$	- Polynomkoeffizienten in Gl. (2,43) $j = 0, \dots, N$
$s_1, s_2$	- Spaltbreiten am Monochromator ( $s_2$ wird für den breiteren Spalt genommen)
$S_{ep}$	- Koeffizient der Strahlungs(Zweierstoß)rekombination nach dem Niveau p
$t$	- Zeitkoordinate
$T_e$	- Elektronentemperatur
$T_o$	- Gastemperatur
$T_{pq}$	- Besetzungstemperatur für die Niveaus p, q (def. in Gl. 3,19)
$T_s$	- "schwarze" Temperatur (def. in Gl. 4,18)
$T_U$	- Umkehrtemperatur (def. in Gl. 4,5)

$u_{\nu}$	- spektrale Strahlungsenergiedichte
$u_{pq}$	- über das Linienprofil gemittelte Strahlungsenergiedichte (def. in Gl. 3,17)
$u_{pq}^{\text{Planck}}$	- PLANCK'sche Strahlungsenergiedichte bei der Frequenz des Strahlungsübergangs p nach q
$U$	- Energieschwellwert (def. in Gl. 3,6)
$U_{pq}$	- in Abschnitt 3.1; positiver Energieabstand der Niveaus p,q
$v$	- Strömungsgeschwindigkeit des Plasmas
$\vec{v}_e$	- Schwerpunktgeschwindigkeit des Elektronengases
$\vec{v}_p$	- Schwerpunktgeschwindigkeit der Teilchen im Zustand p
$W_{\lambda}, W$	- Intensität der von der Wolframbandlampe emittierten Strahlung
$x$	- Ortskoordinate in Strömungsrichtung

(b) Griechische Symbole

$\alpha$	- Rekombinationskoeffizient (def. in Gl. 2,24)
$\beta$	- Ionisationskoeffizient (def. in Gl. 2,24)
$\delta$	- Dispersion des Monochromators
$\Delta\lambda_H$	- Bandbreite des Monochromators
$\varepsilon$	- die beim Stoß übertragene Energie (in Abschnitt 3.1)
$\varepsilon_{\nu}$	- spektraler Emissionskoeffizient bezogen auf die Einheit der Frequenz
$\varepsilon_{\lambda}$	- spektraler Emissionskoeffizient bezogen auf die Einheit der Wellenlänge
$\varepsilon_{\nu}^{(p,q)}$	- spektraler Emissionskoeffizient im Bereich des Strahlungsübergangs p nach q
$\kappa_{\nu}$	- spektraler Absorptionskoeffizient
$\kappa_{\nu}^{(p,q)}$	- spektraler Absorptionskoeffizient im Bereich des Strahlungsübergangs p nach q
$\lambda$	- Wellenlänge
$\lambda_{pq}$	- Wellenlänge der Strahlung des Übergangs p nach q
$\lambda_M$	- Wellenlängeneinstellung am Monochromator
$\nu$	- Frequenz
$\nu_{pq}$	- Frequenz der Strahlung des Übergangs p nach q
$\nu_e$	- Stoßfrequenz der Elektronen gegen die schweren Teilchen
$\beta_{pq}$	- Strahlungsverlustfaktor für den Übergang p nach q (def. in Gl. 3,20)
$\sigma$	- elektrische Leitfähigkeit
$\Sigma$	- zusammenfassender Term in der Elektronenenergiebilanz Gl. 1,3

- $\Sigma_J$  - Zustandssumme der Ionen
  - $\tau_e$  -
  - $\tau_{pq}$  -
  - $\tau_p$  -
  - $\tau_{pp} = \tilde{\tau}_p$  -
  - $\tau_{pe}$  -
- } in Gl. (2,17) definierte Zeitgrößen
- $\psi_\nu, \psi_\lambda$  - Linienprofil bezogen auf die Einheit der Frequenz bzw. der Wellenlänge
  - $\psi_{pq}$  - Linienprofil des Strahlungsübergangs p nach q
  - $\chi_d$  - Bindungsenergie des Niveaus d (= Ionisierungsenergie minus Anregungsenergie vom Grundzustand aus)
  - $d\Omega$  - Raumwinkelement
  - $\vec{\Omega}$  - symbolische Schreibweise für Raumrichtung

(c) Abgekürzte Schreibweisen

$$\left(\frac{n_p}{n_q}\right)_B = \left(\frac{n_p}{n_q}\right)_{\text{Boltzmann}} \Big|_{T_e} = \left(\frac{g_p}{g_q}\right) \cdot \exp(-E_{pq}/kT_e)$$

$$\left(\frac{n_e^2}{n_p}\right)_S = \left(\frac{n_e^2}{n_p}\right)_{\text{Saha}} \Big|_{T_e} = \frac{2 \Sigma_J}{g_p} \cdot \left(\frac{2\pi m_e k T_e}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp(-\chi_p/kT_e)$$

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{für } x > y \\ y & \text{für } y > x \end{cases}$$

## Einleitung

Bei der Entwicklung von magnetohydrodynamischen (MHD-) Generatoren<sup>†)</sup> für den Gastemperaturbereich zwischen etwa  $1500^{\circ}\text{K}$  und  $2000^{\circ}\text{K}$ , den die Kernreakorteknik vorzeichnet, ist mit den von KERREBROCK (1962) vorgeschlagenen Edelgas-Alkali-Plasmen ein mögliches Arbeitsmittel gefunden, das zumindest die Grundvoraussetzung für eine ökonomische Generatorleistungsdichte erfüllt, nämlich trotz der relativ niedrigen Gastemperatur eine hinreichend gute elektrische Leitfähigkeit zu besitzen.

Der Grund für diese günstige Eigenschaft liegt darin, daß in Edelgas-Alkali-Plasmen die Temperatur der Elektronen bei Stromdurchgang über die Temperatur der schweren Teilchen ("Gastemperatur") ansteigen kann. Dies kann zu einer beträchtlichen Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit führen, da die Ionisierung im wesentlichen durch Elektronenstöße erfolgt, für den Ionisierungsgrad also die Elektronentemperatur maßgebend ist. Zum Beispiel steigt nach Messungen von SCHWENN, BREDERLOW, SALVAT (1968) die Elektronentemperatur in einem Argon-Kalium-Plasma mit 3 Promille Kaliumzusatz,  $1500^{\circ}\text{K}$  Gastemperatur und Atmosphärendruck bei einer Stromdichte von  $5 \text{ A/cm}^2$  auf  $2800^{\circ}\text{K}$ . Die Leitfähigkeit ist in diesem Fall  $1,7 \text{ ohm}^{-1}\text{cm}^{-1}$  und liegt um einen Faktor  $5 \cdot 10^3$  über der Leitfähigkeit, die auf Grund von thermischer Ionisation bei der Gastemperatur vorhanden wäre.

Die Elektronentemperaturerhöhung beruht auf der Energieaufnahme der Elektronen im elektrischen Feld und auf der schwachen "energetischen Kopplung" des Elektronengases mit dem Schwerteilchengas in solchen Edelgas-Alkali-Gemischen. Sie stellt sich - im einfachsten Fall - so ein, daß die Elektronen im zeitlichen Mittel genau so viel Energie durch Stöße mit schweren Teilchen abgeben, wie sie aus dem elektrischen Feld aufnehmen. Die energetische Kopplung ist schwach, weil die Stöße der Elektronen mit den Edelgasatomen überwiegend elastisch verlaufen (atomares Gas mit hohen Anregungsenergien!), wobei die Energieübertragung pro Stoß wegen des kleinen Massenverhältnisses der Stoßpartner gering ist. Hinzu kommt die relativ niedrige Stoßfrequenz auf Grund der kleinen Wirkungsquerschnitte der Edelgase bezüglich elastischer Elektronenstöße. Mit den

---

<sup>†)</sup> über MHD-Generatoren siehe, z.B., SUTTON und SHERMAN (1965)

Alkaliteilchen führen die Elektronen elastische und unelastische Stöße aus. Die im Vergleich zu den Edelgasen sehr viel größeren Wirkungsquerschnitte der Alkaliatome und -ionen werden jedoch in ihrer Bedeutung für die Stoßfrequenz durch die geringe Teilchendichte des Alkalizusatzes kompensiert.

Die "plasmaphysikalische Rolle" in einem solchen Edelgas-Alkali-Gemisch fällt also fast ausschließlich dem anteilmäßig geringen Alkalizusatz zu. Er liefert, wegen der niedrigen Ionisierungsenergie der Alkalimetalle, die nötigen Ladungsträger. Die Alkaliniveaus sind angeregt und erlauben optische Plasmadiagnostik. Der bei weitem überwiegende Anteil des Edelgases dagegen ist Träger der Enthalpie und der kinetischen Energie. Ihm kommt bei einer Verwendung als Arbeitsmittel in MHD-Generatoren mehr die "thermodynamische Rolle" zu. Er ist weder merklich ionisiert noch angeregt. Plasmaphysikalisch ist er im wesentlichen nur deshalb von Bedeutung, weil die Edelgase von allen in Frage kommenden Elementen den Effekt der Elektronentemperaturerhöhung am wenigsten stören.

Der eben skizzierte grundlegende Sachverhalt der Elektronentemperaturerhöhung in Edelgas-Alkali-Plasmen ist in der Theorie im wesentlichen verstanden und im Experiment in guter Übereinstimmung mit der Theorie verifiziert (siehe, z.B., KERREBROCK, 1962; KERREBROCK und HOFFMAN, 1964; ZUKOSKI, COOL und GIBSON, 1964; ZUKOSKI und COOL, 1965; RIEDMÜLLER, 1965; COOL und ZUKOSKI, 1966; RIEDMÜLLER, BREDERLOW und SALVAT, 1968; SCHWENN, BREDERLOW und SALVAT, 1968). Während seither Messungen der Elektronentemperatur in den meisten Experimenten mit Edelgas-Alkali-Plasmen eine wichtige Rolle spielen, wurde der experimentellen Bestimmung der Elektronendichte bislang relativ wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Der Hauptgrund mag darin liegen, daß bei homogenen Plasmen, die man zunächst untersuchte, die Anwendung der Sahaformel auf die Alkaliteilchendichte im allgemeinen in sich konsistente Ergebnisse erbrachte. Bei Untersuchungen an strömenden Argon-Kalium-Plasmen unter inhomogenen Bedingungen (FISCHER, 1968; DODEL, 1970), wie man sie etwa in der Nähe der Elektrodenwand eines MHD-Generators zu erwarten hat, ergaben sich jedoch Hinweise, daß als Folge von Relaxationseffekten möglicherweise erhebliche Abweichungen der tatsächlichen Elektronendichte von der Saha-dichte auftreten können. Gestützt wurde diese Vermutung durch verschiedenartige Rechnungen mehrerer Autoren (z.B. BYRON, BORTZ und RUSSELL, 1963; EICHERT, KAEPPELER und MAYSER, 1965; BERTOLINI, TOSCHI und McNAB, 1966; STÄHLE und BURKHARDT, 1966;

LENGYEL, 1969; DODEL, 1970). Ein direkter experimenteller Nachweis jedoch fehlte, wenn auch die in den beiden letztgenannten Arbeiten verwendeten Rekombinationskoeffizienten von COOL und ZUKOSKI (1966) zu einem gewissen Grad experimentell abgesichert waren.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es deshalb, in einem strömenden Argon-Kalium-Plasma die Existenz von Relaxationseffekten der Elektronendichte durch gleichzeitige Elektronentemperatur- und Elektronendichtemessung direkt nachzuweisen. Beide Parameter werden wir spektroskopisch bestimmen, einmal, um auf der Tradition aufbauen zu können, welche die spektroskopische Elektronentemperaturbestimmung in diesen Plasmen bereits besitzt, zum anderen, weil die Spektroskopie bei den gegebenen experimentellen Anforderungen am ehesten durchführbar ist. Dabei stoßen wir aber unmittelbar auf die grundsätzliche Problematik der Spektroskopie in relaxierenden Plasmen. Diese besteht darin, daß bei dem komplexen Vorgang der Ionisation bzw. Rekombination in Plasmen die Teilchen aller Energieanregungsstufen beteiligt sind. Als Folge davon lassen sich die Besetzungsdichten der angeregten Niveaus während der Relaxationsphase - selbst bei Vernachlässigung anderer Komplikationen, wie z.B. Strahlungseffekten - nicht mehr in einfacher Weise mit der Elektronentemperatur oder der Elektronendichte verknüpfen. Diese Frage wird uns, losgelöst von den speziellen Eigenschaften unseres Argon-Kalium-Plasmas, im theoretischen Teil dieser Arbeit beschäftigen. In numerischen Berechnungen der Kaliumbesetzungsdichten, werden wir dann zeigen können, daß, trotz der prinzipiellen Schwierigkeiten, die spektroskopische Elektronentemperatur- und -dichtebestimmung in unserem Plasma innerhalb praktisch wichtiger Parameterbereiche mit annehmbaren Fehlergrenzen möglich ist. Im Experiment werden wir damit den Nachweis von Relaxationseffekten der Elektronendichte erbringen und zusätzlich noch einige Aussagen der Theorie der Besetzungsdichten bestätigen können.

1. Zur Bedeutung von Relaxationseffekten der Elektronendichte in Argon-Kalium-Plasmen

Bevor wir uns den spektroskopischen Problemen zuwenden, soll anhand eines Beispiels der praktische Hintergrund unserer Aufgabe anschaulich gemacht werden. Wir wollen ein Argon-Kalium-Plasma betrachten, das an einer Elektrode eines Generators vorbeiströmt. Durch den elektrischen Strom werde entlang der Elektrode die in Bild 1a gezeichnete stationäre Elektronentemperaturverteilung in Strömungs(x-)richtung erzeugt. Bei Anwendung der Sahaformel auf die Alkaliteilchendichte würde sich dann der in Bild 1b gestrichelt gezeichnete Elektronendichteverlauf errechnen. Tatsächlich kann die Elektronendichte aber auf Grund der Strömung des Plasmas und der relativ langen Relaxationszeit den Elektronentemperaturgradienten nicht schnell genug "folgen" und sich auf die jeweiligen Gleichgewichtswerte einstellen. Es kommt zu einer Verschiebung der Elektronendichteverteilung in Strömungsrichtung. Mathematisch wird dieses Verhalten durch die Kontinuitätsgleichung für die Elektronendichte  $n_e$  beschrieben.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \vec{v}_e = q_e \quad (1,1)$$

wo  $\vec{v}_e$  die Schwerpunktgeschwindigkeit des Elektronengases und  $q_e$  die Nettorate der pro Zeit- und Volumeneinheit entstehenden bzw. rekombinierenden Elektronen bedeutet. Im betrachteten stationären, eindimensionalen Fall ergibt sich bei der konstanten Strömungsgeschwindigkeit  $v$  des Plasmas und einer "Produktionsrate"  $q_e$ , die durch Stoßionisation und Dreierstoßrekombination bestimmt sei (vergleiche hierzu Abschnitt 2.4 und 2.5) folgende Form

$$v \frac{\partial n_e}{\partial x} = \alpha(T_e) \cdot n_e \cdot (n_{es}^2 - n_e^2) \quad (1,2)$$

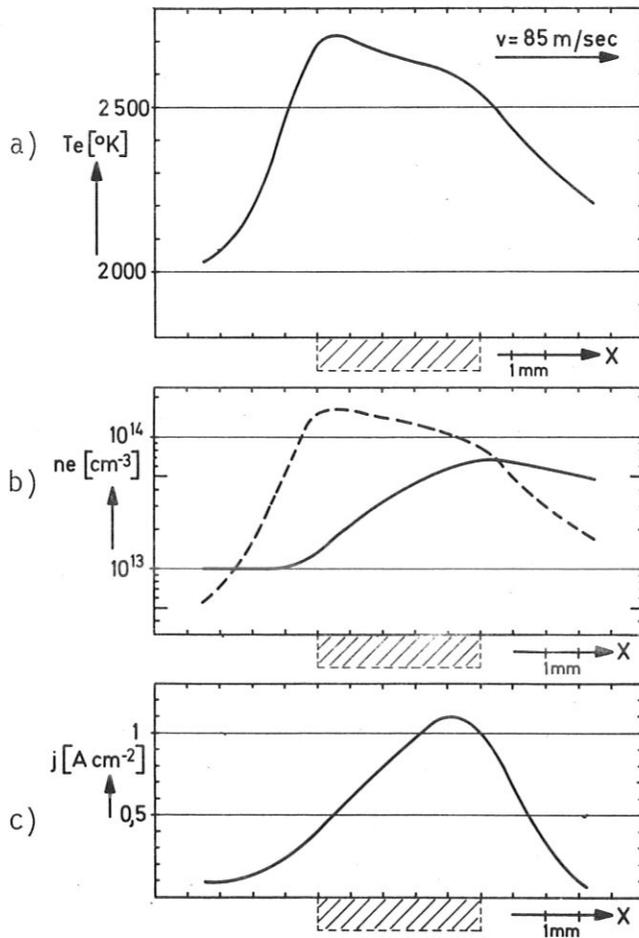


Bild 1

Bei einer  $T_e$ -Verteilung gemäß a) entlang der Elektrode (durch Schraffur angedeutet) ist infolge von Relaxationseffekten mit der in b) durchgezogen gezeichneten Elektronendichteverteilung zu rechnen. Die Energiebilanz ergibt mit a) und b) die in c) gezeichnete Stromverteilung längs der Elektrode (DODEL, 1967)

Dabei ist  $\alpha$  der Rekombinationskoeffizient und  $n_{es}$  die Sahaelektronendichte. Die durchgezogene Kurve in Bild 1b ist eine numerische Lösung von (1,2), wobei, neben den aus dem Bild hervorgehenden Daten,  $\alpha(T_e)$  von COOL und ZUKOSKI (1966) übernommen und eine Kaliumteilchendichte von  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  angenommen wurde.

Man erkennt, daß die Elektronendichte im Bereich der strömungsaufwärts gelegenen Elektrodenkante um eine Größenordnung unter der Sahadichte liegt, die man auf Grund der Elektronentemperatur erwarten würde. In Gegenwart von Relaxationseffekten kann man der Elektronentemperatur also nicht in eindeutiger Weise eine Elektronendichte zuordnen; wir können sagen, die Elektronendichte ist keine Funktion (im mathematischen Sinne) der Elektronentemperatur mehr. Beide hat man als unabhängige Parameter zu betrachten, die lediglich über die Differentialgleichung (1,1) miteinander verknüpft sind.

Die Strömungsgeschwindigkeit (85m/sec) und die Elektrodenbreite (0,5 cm) in Bild 1 sind den Verhältnissen unseres Experiments angepaßt, doch ändert sich am Ergebnis nichts, wenn beide Größen um einen Faktor 10 erhöht werden, d.h. unter Bedingungen, wie sie für künftige MHD-Generatoren realistisch sind. An Bild 1b kann man sich deshalb plausibel machen, daß die Elektronendichterelaxation (falls sie wirklich so langsam vor sich geht, wie berechnet) nicht ohne Einfluß auf das Betriebsverhalten dieser Generatoren wäre, beispielsweise was die Stromausbreitung im Plasma anbelangt (siehe, z.B., LENGYEL 1969).

Es soll hier aber noch auf eine andere Konsequenz der langsamen Elektronendichterelaxation im Hinblick auf die experimentelle Untersuchung von Stromverteilungen in Edelgas-Alkali-Plasmen hingewiesen werden. Solche Untersuchungen sind auf der Grundlage von Elektronentemperaturmessungen begonnen worden (FISCHER, 1968). Elektronentemperatur und Stromdichte sind über die Elektronenenergiebilanz miteinander verknüpft:

$$\frac{j^2}{\sigma} = n_e \nu_e \frac{2m_e}{m_0} \frac{3}{2} k (T_e - T_0) + \sum \quad (1,3)$$

$\uparrow$  Ohmsche Aufheizung       $\uparrow$  Elastische Stoßverluste       $\uparrow$  Zusammenfassung aller restlichen Terme, z.B. unelast. Stoßverluste, Konvektion, Wärmeleitung

Dabei bedeuten, neben den üblichen Bezeichnungen,  $T_0$ ,  $m_0$  die Schwerteilchentemperatur bzw. -masse. Mit

$$\sigma = n_e e^2 / m_e \nu_e \quad \text{ergibt sich}$$

$$j = n_e \left( c_1 (T_e - T_0) + c_2 \frac{\sum}{n_e \nu_e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1,4)$$

$c_1, c_2$ -Konstante

Wenn  $n_e$  eine Funktion von  $T_e$  ist (z.B. durch die Sahagleichung) und  $\Sigma$  abgeschätzt werden kann, ist es somit möglich, aus der gemessenen Elektronentemperatur auf die Stromdichte rückzuschließen. In der Praxis ist man oft hauptsächlich an der relativen Verteilung des Stroms im Plasma interessiert. Hierfür gilt dann als grobe Regel: Je höher die lokale Elektronentemperatur, desto höher die lokale Stromdichte. Diese einfache Interpretation von Elektronentemperaturmessungen ist in Gegenwart von Relaxationseffekten der Elektronendichte nicht mehr möglich (DODEL, 1970). In Bild 1c ist die Stromverteilung entlang der Elektrode gezeichnet, die mit der Elektronentemperaturverteilung von Bild 1a, der durchgezogenen Elektronendichteverteilung von Bild 1b und der Energiebilanz (1,4) konsistent ist. Man sieht, daß die Charakteristik der Stromverteilung, "das Stromprofil", mit dem Elektronentemperaturprofil keine Ähnlichkeit besitzt, vielmehr dagegen mit dem Profil der Elektronendichte. Eine Messung der Elektronentemperatur allein könnte in diesem Fall also zu Fehlschlüssen verleiten. Da, wie noch zu zeigen sein wird, die stärkste vom Argon-Kalium-Plasma ausgehende Strahlung - die Kaliumresonanzstrahlung - hauptsächlich mit der Elektronentemperatur verknüpft ist und monoton mit ihr steigt, läßt sich das Ergebnis von Bild 1a und 1c auch wie folgt zusammenfassen: Die "hellste" Stelle im Plasma muß nicht immer diejenige sein, die auch am meisten Strom führt und umgekehrt.

Zum Abschluß dieser einführenden Skizze sei noch darauf hingewiesen, daß der Relaxationsvorgang, den man sich gewohnterweise zeitlich vorstellt, bei einer eindimensionalen, stationären Strömung konstanter Geschwindigkeit räumlich aufgelöst erscheint. Die mathematische Behandlung geht ineinander über, wenn man  $\frac{\partial}{\partial t}$  durch  $v \cdot \frac{\partial}{\partial x}$  und  $t$  durch  $x/v$  ersetzt.

2. Grundlagen und Problematik der angewandten spektroskopischen Meßverfahren

Da wir nicht nur Einzelwerte von Elektronendichte und -temperatur gleichzeitig bestimmen wollen, sondern auch räumliche Verteilungen davon, ferner unsere apparativen Bedingungen ohnehin kompliziert sind (vgl. Abschnitt 5.) weist die Spektroskopie den experimentell gangbarsten Weg für eine Messung der beiden Parameter. Was die Elektronentemperatur betrifft, so werden wir von dem bei der experimentellen Untersuchung von Argon-Kalium-Plasmen am häufigsten benutzten Meßverfahren ausgehen: der Linienumkehrmethode angewandt auf den Kaliumresonanzübergang  $4S_{1/2} - 4P_{1/2, 3/2}$  (vgl. Bild 2), deren Anwendbarkeit für die Bestimmung der Elektronentemperatur von RIEDMÜLLER, BREDERLOW und SALVAT (1968) theoretisch und experimentell untersucht wurde.

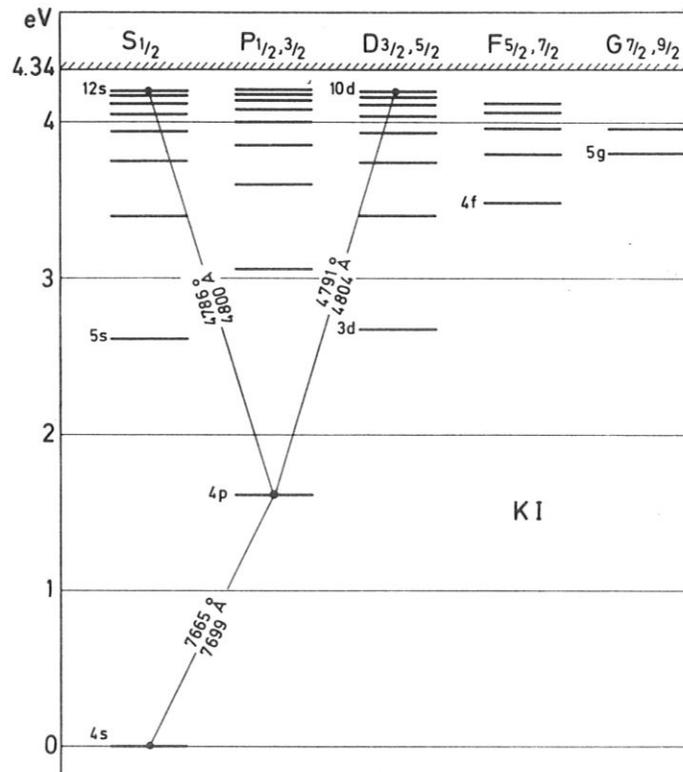


Bild 2

Termschema des Kaliums

Allerdings werden wir die Methode vor ihrer Anwendung in einem relaxierenden Plasma auf eine ihrer Grundvoraussetzungen hin prüfen müssen. Was die Elektronendichte betrifft, so wollen wir, einem Vorschlag von MAHN (1968) folgend, davon ausgehen, sie aus den Besetzungsdichten kontinuumsnaher Kaliumenergieniveaus zu bestimmen. Experimentell verlangt dies die Absolutmessung der Intensität entsprechender Linien. Die praktische Durchführung dieser beiden Methoden macht das Experiment nicht zusätzlich kompliziert, denn wir haben nur die vom Plasma ausgehende Strahlung spektral in die uns interessierenden Bereiche aufzulösen und gleichzeitig zu registrieren. Zunächst sollen die beiden Methoden jedoch theoretisch begründet werden.

## 2.1 Ausgangspunkt für die Elektronentemperaturbestimmung

Wie in Abschnitt 4.1 ausführlicher dargestellt wird, bestimmt man durch Anwendung der Linienumkehrmethode auf einen Strahlungsübergang  $p \rightarrow q$  seine "Besetzungstemperatur"  $T_{pq}$ , die durch Gleichung (2,1) definiert ist

$$\frac{n_p}{n_q} = \frac{g_p}{g_q} \exp\left(-\frac{h\nu_{pq}}{kT_{pq}}\right) \quad (2,1)$$

Dabei bedeuten  $n_p$ ,  $n_q$ ;  $g_p$ ,  $g_q$  die Besetzungsdichten bzw. statistischen Gewichte der am Übergang beteiligten Niveaus;  $\nu_{pq}$  die Frequenz der Linie;  $h$ ,  $k$  die Planck- bzw. Boltzmannkonstante. Soll die Umkehr der Kaliumresonanzlinie (Übergang  $1 \rightarrow 0$ , wenn wir mit 0 den Grundzustand bezeichnen) also die Elektronentemperatur liefern, so muß gezeigt werden, daß die Besetzungstemperatur  $T_{10}$  gleich ist der Elektronentemperatur

$$T_{10} = T_e \quad (2,2)$$

Gemäß Gleichung (2,1) ist also zu zeigen, daß das Kaliumresonanzniveau in Bezug auf den Grundzustand eine Boltzmannbesetzung bei der Elektronentemperatur aufweist. RIEDMÜLLER, BREDERLOW und SALVAT (1968) haben

nachgewiesen, daß dies unter folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:

- (a) Das Elektronengas hat eine MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung.
- (b) Das Plasma ist im überwiegenden Teil des Resonanzlinienbereichs optisch dick.
- (c) Die Besetzung des Resonanzniveaus wird nur durch Elektronenstoßprozesse (Anregung durch inelastische Stöße, Löschung durch Stöße zweiter Art) und Strahlungsprozesse (Anregung durch Absorption, Löschung durch Emission von Lichtquanten) bestimmt, der Einfluß von Atomstößen ist demgegenüber vernachlässigbar.
- (d) Für die Besetzung des Resonanzniveaus spielen nur Übergänge von und zum Grundzustand eine Rolle.

Die Bedingung (a) wurde kürzlich in einer Arbeit von MCGREGOR, MITCHNER und SHAW (1970) für ein Argon-Cäsium-Plasma untersucht, mit dem Ergebnis, daß nur der "Schwanz" der Maxwellverteilung durch Resonanzstrahlungsverluste "herabgedrückt" wird. Bei großer optischer Dicke des Plasmas im Resonanzlinienbereich ist dieser Effekt jedoch nicht stark ausgeprägt. Die Voraussetzung (b) ist unter den vorliegenden Bedingungen zweifellos erfüllt. Bei typischen Kaliumteilchendichten von  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  liegt der Absorptionskoeffizient in der "Linienmitte" bei einigen  $10^4 \text{ cm}^{-1}$ . Zur Bedingung (c) haben RIEDMÜLLER, BREDERLOW und SALVAT (1968) gezeigt, daß Atomstöße höchstens im Bereich geringer Elektronentemperaturerhöhungen eine Rolle spielen. Problematisch ist bei einem relaxierenden Plasma, in dem wir die Meßmethode anwenden wollen, die Bedingung (d). Für den Fall eines relaxierten Plasmas fanden die genannten Autoren diese Vorschrift - unter Vernachlässigung der Übergänge zwischen dem angeregten Resonanzzustand und dem "Kontinuum" des Kaliums - erfüllt. Bei unserer Problemstellung ergibt sich dagegen die Frage: Spielen für die Besetzung des Kaliumresonanzniveaus auch dann nur die Übergänge vom und zum Grundzustand eine Rolle, wenn z.B. zu Beginn eines Rekombinationsvorganges die Elektronendichte weit über der des relaxierten Plasmas liegt, das Kontinuum also stark überbesetzt ist, so daß die Vernachlässigung der Übergänge zwischen Kontinuum und Resonanzzustand u.U. nicht mehr möglich ist? Bevor wir uns der Beantwortung dieser Frage zuwenden, soll jedoch das in der Arbeit angewandte Konzept

zur spektroskopischen Elektronendichtebestimmung beschrieben werden. Es wird sich dann zeigen, daß wir die Frage in einen allgemeineren Zusammenhang bringen können.

## 2.2 Ausgangspunkt für die Elektronendichtebestimmung

Bei der Messung der Elektronendichte wollen wir nach dem Vorschlag von MAHN (1968) von folgender Grundlage ausgehen:

Die Linien der beiden Nebenserien des Kalium  $4P_{1/2, 3/2} - nS_{1/2}$  bzw.  $4P_{1/2, 3/2} - mD_{3/2, 5/2}$  ( $n \geq 5$ ;  $m \geq 3$ ; vgl. Bild 2) liegen für  $n \neq 5$  bzw.  $m \neq 3$  im Sichtbaren und sind unter den gegebenen Plasmabedingungen optisch dünn. Sie lassen sich spektroskopisch also bequem beobachten. Da ihre Übergangswahrscheinlichkeiten bekannt sind, kann die Besetzungsdichte der  $nS$ ,  $mD$  Niveaus durch Absolutmessung der Linienintensitäten bestimmt werden (vgl. Abschnitt 4.2).

Nimmt man nun an, daß sich zumindest die "nahe" der Kontinuumsgrenze liegenden Energieniveaus im Sahagleichgewicht mit den freien Elektronen befinden, so gilt für die Besetzungsdichte  $n_d$  eines solchen Niveaus

$$\frac{n_e^2}{n_d} = \frac{2 \sum_I}{g_d} \left( \frac{2\pi m_e k T_e}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\chi_d / k T_e) \quad (2,3)$$

$\sum_I$  Zustandssumme der Ionen;  $\chi_d$  Energieabstand des Niveaus  $d$  vom Kontinuum.

Bei Kenntnis von  $n_d$  und  $T_e$  läßt sich also die Elektronendichte bestimmen. Die zunächst zu klärende Frage ist jedoch, ob und ab welchem Energieabstand vom Kontinuum wir die Niveaus tatsächlich als "sahabesetzt" gemäß Gleichung (2,3) ansehen können. Da wir in einem relaxierenden Plasma messen wollen, muss ferner für das verwendete Niveau die Saha-Beziehung (2,3) gelten unabhängig davon, wie weit die Besetzung tieferliegender Niveaus, insbesondere die des Grundzustandes von dieser Beziehung abweicht. (Das Vorhandensein solcher Abweichungen ist in einem relaxierenden Plasma ja bereits impliziert.)

Fassen wir die Bedingungen für die Anwendbarkeit der beiden Methoden zur Elektronentemperatur- und Elektronendichtemessung noch einmal zusammen:

- (a) Das Kaliumresonanzniveau (Index 1) muß in Bezug auf den Grundzustand (Index 0) eine Boltzmannbesetzung bei der Elektronentemperatur aufweisen und zwar - dies ist die problematische Forderung bei einem nicht relaxierten Plasma - unabhängig davon, ob die an der Meßstelle vorhandene Elektronendichte über oder unter dem Wert liegt, der im relaxierten Zustand vorhanden wäre. Es soll also gelten:

$$n_1 = n_0 \frac{g_1}{g_0} \exp(-E_{10} / kT_e) \quad (2,4)$$

$E_{10}$  - Anregungsenergie des Resonanzniveaus

- (b) Das noch zu bestimmende Niveau d hingegen, das wir zur Elektronendichtemessung verwenden wollen, muß eine Sahabesetzung (Gleichung 2,3) in Bezug auf die an der Meßstelle vorhandenen Elektronendichte und -temperatur aufweisen, unabhängig davon, ob dies auch für die Besetzung anderer Niveaus, insbesondere die des Grundzustandes zutrifft.

Bevor wir weiterfahren, soll noch eine Bemerkung zu den hier getrennt verwendeten Begriffen "Boltzmannbesetzung" und "Sahabesetzung" mögliche Mißverständnisse vermeiden helfen. Von einer "Boltzmannbesetzung eines Niveaus" zu sprechen ist nur sinnvoll, wenn man - neben einer Temperatur - ein Bezugsniveau nennt. (In dieser Arbeit wird das Bezugsniveau im Zusammenhang mit dem Begriff Boltzmannbesetzung immer der Grundzustand sein.) Die Bezeichnung "Sahabesetzung eines Niveaus" impliziert als Bezugsniveau bereits den Kontinuumszustand. Sind zwei gebundene Energiezustände sahabesetzt, so ist ihr Besetzungsdichteverhältnis auch boltzmannsch. Die Umkehrung braucht jedoch - außer im thermodynamischen Gleichgewicht - nicht zu gelten. Die Besetzungsdichten zweier Niveaus können ein Boltzmannverhältnis aufweisen, sich aber um Größenordnungen von einer Sahabesetzung unterscheiden.

### 2.3 Ein einfaches Modell zum anschaulichen Verständnis der spektroskopischen Problematik

Wir können die in Abschnitt 2.2 genannten Bedingungen für die Anwendbarkeit der beiden Meßmethoden anschaulich wie folgt ausdrücken: Die Kaliumresonanzstrahlung, die wir sozusagen als "Thermometer" verwenden wollen, kann diese Funktion nur erfüllen, wenn die Besetzung des Resonanzniveaus viel von der an der Meßstelle vorhandenen Elektronentemperatur "spürt", aber nur wenig von der jeweiligen Elektronendichte. Bei dem Energieniveau  $d$ , das wir zur Dichtemessung verwenden wollen, muß es sich umgekehrt verhalten: Seine Besetzungsdichte muß empfindlich auf die Elektronendichte reagieren. Aus praktischen Gründen werden wir noch fordern, daß das Niveau wenig von der Elektronentemperatur spürt, damit Fehler in der Temperaturbestimmung nicht stark in die Dichtebestimmung eingehen. In Abschnitt 3.6 werden wir sehen, daß zur Dichtebestimmung nur kontinuumsnahe Niveaus in Frage kommen für die letzteres von selbst erfüllt ist. (vgl. Gleichung (2,3) und Abschnitt 6.2.3).

Wir wollen zum besseren Verständnis des Problems ein einfaches Modell berechnen. Dazu denken wir uns ein fiktives Atom mit nur drei Energiezuständen, dem Grundzustand (0), einem angeregten Zustand (1) und dem ionisierten Zustand (e). Zwischen den Niveaus seien nur Elektronenstoßübergänge von Bedeutung. Ein aus diesen Atomen erzeugtes Plasma ströme durch eine Elektronentemperaturstufe (vgl. Skizze in Bild 3a links oben). Wie stellt sich dann die Elektronendichte- und die Besetzungsdichteverteilung des angeregten Niveaus ein?

Das Problem wird beschrieben durch die Kontinuitätsgleichungen für die Besetzungsdichten  $n_p$  der betrachteten Zustände  $p$  und ihre Be- oder Entvölkerungsraten  $q_p$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \operatorname{div} n_p \vec{v}_p = q_p \quad p = 0, 1, e \quad (2,5)$$

bei stationärer eindimensionaler Strömung konstanter Geschwindigkeit  $v$  also durch

$$v \frac{\partial n_p}{\partial x} = q_p \quad p = 0, 1, e \quad (2,6)$$

Da wir nur Elektronenstoßübergänge betrachten ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\partial n_1}{\partial x}} &= n_e n_0 K_{01} - n_e n_1 K_{10} + n_e^3 K_{e1} - n_e n_1 K_{1e} \\ \sqrt{\frac{\partial n_e}{\partial x}} &= n_e n_0 K_{0e} - n_e^3 K_{e0} + n_e n_1 K_{1e} - n_e^3 K_{e1} \end{aligned} \quad (2,8)$$

Die  $K_{ij}$  sind die Koeffizienten für Stoßanregung des Niveaus  $j$  vom Niveau  $i$  aus oder für Stoßlöschung (Dreierstoßrekombination) des Niveaus  $i$  durch Übergang nach  $j$ . Die Gleichung für den Grundzustand 0 ergibt sich aus der Erhaltung der Gesamtteilchenzahl  $n$

$$n_0 + n_1 + n_e = n \quad (2,9)$$

doch befinden wir uns in einem Gebiet in dem

$$n_1, n_e \ll n_0, \text{ also } n_0 \approx n \text{ ist.}$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht bei der Elektronentemperatur würde "detailliertes Gleichgewicht" zwischen den einzelnen Prozessen und ihren Umkehrprozessen herrschen, also gelten

$$\frac{K_{01}}{K_{10}} = \left( \frac{n_1}{n_0} \right)_{\text{Boltzmann}} \Big|_{T_e} ; \quad \frac{K_{je}}{K_{ej}} = \left( \frac{n_e^2}{n_j} \right)_{\text{Saha}} \Big|_{T_e} \quad (2,10)$$

Da die  $K_{ij}$  nur Funktionen von  $T_e$  sind, gelten diese Beziehungen allgemein (vgl. Abschnitt 3.1). Mit (2,10) läßt sich das Gleichungssystem (2,8) umformen in

$$\sqrt{\frac{\partial n_1}{\partial x}} = n_e K_{10} (n_{1B} - n_1) + n_e^3 K_{e1} \left( 1 - \frac{n_1}{n_{1S}} \right) \quad (2,11)$$

$$\sqrt{\frac{\partial n_e}{\partial x}} = -n_e K_{e0} (n_e^2 - n_{eS}^2) - n_e^3 K_{e1} \left( 1 - \frac{n_1}{n_{1S}} \right) \quad (2,12)$$

dabei bedeuten

$$n_{1B} = n_0 \cdot \left( \frac{n_1}{n_0} \right)_{\text{Boltzmann}} \Big|_{T_e} ; \quad n_{eS} = \left( n_0 \cdot \left( \frac{n_e^2}{n_0} \right)_{\text{Saha}} \Big|_{T_e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2,13)$$

die Boltzmannbesetzungsdichte des angeregten Niveaus bzw. die Saha-elektronendichte bezogen auf den Grundzustand.

$$n_{1s} = n_e^2 \cdot \left( \frac{n_1}{n_e^2} \right)_{\text{Saha}} \Big|_{T_e} \quad (2,13a)$$

ist die Sahabesetzungsdichte des angeregten Niveaus.

Wir wollen nun das Differentialgleichungssystem (2,11) und (2,12) für unser Beispiel einer Elektronentemperaturstufe (2000<sup>0</sup>K nach 2500<sup>0</sup>K) numerisch lösen. Damit unser Modell nicht allzusehr von der Wirklichkeit abweicht, geben wir dem fiktiven Atom die Kaliumionisierungsenergie. Das angeregte Niveau legen wir an die Stelle des Kaliumresonanzniveaus. Als Gesamtteilchendichte nehmen wir 10<sup>16</sup>cm<sup>-3</sup> an, als Anfangswerte die Gleichgewichtswerte bei 2000<sup>0</sup>K, als Strömungsgeschwindigkeit 100m/s. Den Stoßkoeffizienten K<sub>10</sub> und K<sub>e0</sub> geben wir mit 10<sup>-7</sup>cm<sup>3</sup>/s bzw. 10<sup>-25</sup>cm<sup>6</sup>/s eine realistische Größenordnung (vgl. Abschnitt 3.1).

Die besondere Eigenschaft unseres Modellatoms soll nun darin bestehen, daß sich der Wirkungsquerschnitt für Übergänge zwischen angeregtem Niveau und Kontinuum verändern läßt. Mit anderen Worten: Der Stoßkoeffizient K<sub>e1</sub> soll als Parameter für verschiedene Lösungen des Gleichungssystems (2,11) und (2,12) dienen.

Die Bilder 3a, b, c zeigen, wie sich die Elektronendichte- und Besetzungsdichteverteilung des angeregten Niveaus einstellt, wenn wir nacheinander K<sub>e1</sub> = 10<sup>-24</sup>; 10<sup>-20</sup>; 10<sup>-22</sup>cm<sup>6</sup>/s setzen. Die Besetzungsdichte n<sub>1</sub> ist in Einheiten von n<sub>1B</sub>(2500<sup>0</sup>K) aufgetragen, die Elektronendichte n<sub>e</sub> in Einheiten von n<sub>es</sub>(2500<sup>0</sup>K) (vgl. Gleichung 2,13). Dazu sind noch als Grenzkurven n<sub>1B</sub>(2500<sup>0</sup>K) selbst und die Sahabesetzungsdichte n<sub>1s</sub>(n<sub>e</sub><sup>2</sup>, 2500<sup>0</sup>K) eingetragen.

In Bild 3a, bei dem mit K<sub>e1</sub> = 10<sup>-24</sup>cm<sup>6</sup>/s der kleinste Wert dieser Reihe genommen wurde, steigt die Besetzungsdichte des Niveaus sofort an und unterscheidet sich 1 mm hinter der Temperaturstufe nur mehr um 2 Prozent von einer Boltzmannbesetzung in Bezug auf den Grundzustand. Die Elektronendichte hat nach dieser kurzen Strecke noch gar nicht auf die veränderte Elektronentemperatur reagiert. Sie erreicht erst nach etwa 15 mm ihren neuen Gleichgewichtswert. Und obgleich sie sich dabei um mehr als eine Größenordnung ändert, "spürt" das angeregte Niveau davon nichts: es bleibt bei seiner angenäherten Boltzmannbesetzung.

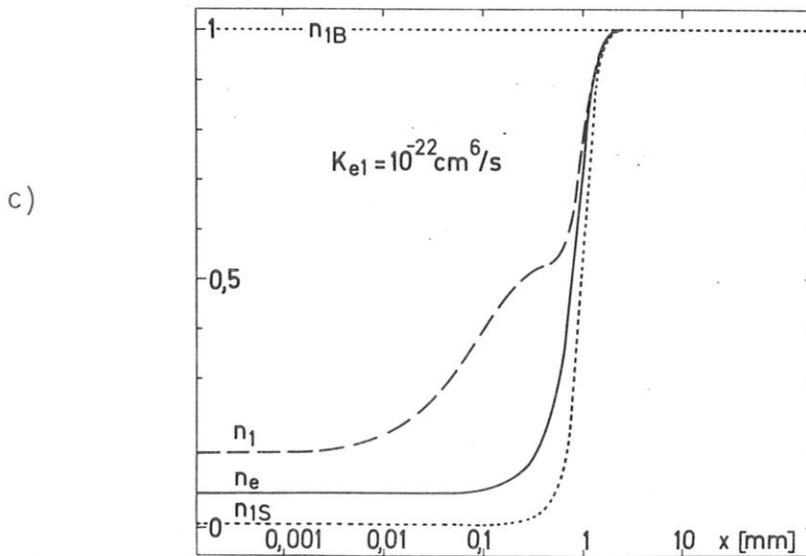
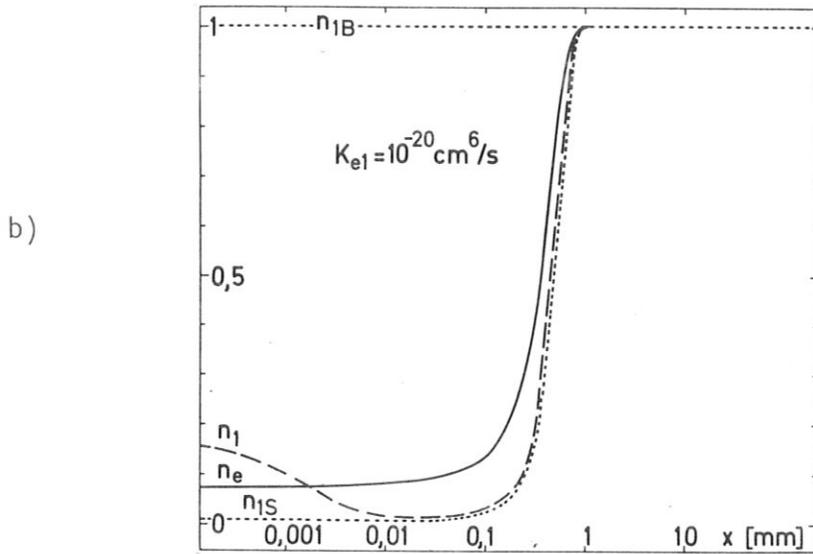
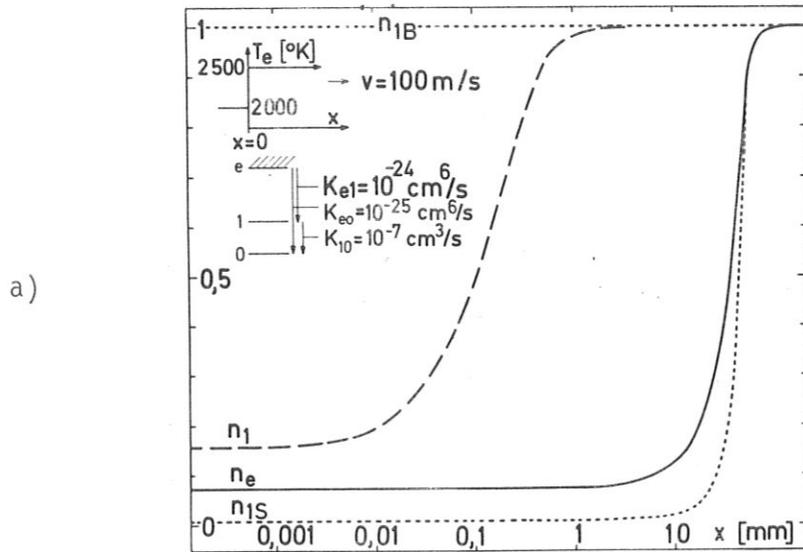


Bild 3

Besetzungsdichteverteilung  $n_1(x)$  und Elektronendichteverteilung  $n_e(x)$  hinter einer Elektronentemperaturstufe für verschiedene  $K_{e1}$

Sehen wir von der 1 mm langen Relaxationsstrecke ab, so würden wir im Sinne der eingangs formulierten Bedingungen sagen: Die Besetzung des angeregten Niveaus eignet sich zur Verwendung als "Thermometer".

In Bild 3b wurde mit  $K_{e1} = 10^{-20} \text{ cm}^6/\text{s}$  der größte Wert dieser Reihe genommen. Die Besetzungsdichte des angeregten Niveaus reagiert nun völlig anders auf den Temperaturanstieg. Sie geht zunächst zurück und nähert sich nach einer Strecke von weniger als 0,1 mm einer Sahabesetzung auf wenige Prozent. Anschließend steigt sie entsprechend der Elektronendichte bis zum neuen Gleichgewicht an. Wir würden in diesem Falle sagen, daß sich die Besetzung des angeregten Niveaus zur Dichtemessung eigne.

Nehmen wir schließlich, wie in Bild 3c, mit  $K_{e1} = 10^{-22} \text{ cm}^6/\text{s}$  einen Wert, der zwischen denen der Bilder 3a, b liegt, so sehen wir, daß die Besetzungsdichte des angeregten Niveaus im ganzen Relaxationsbereich, für den wir uns interessieren, weder eine Boltzmannbesetzung noch eine Sahabesetzung annimmt. Die Besetzung des angeregten Niveaus würde in diesem Fall weder Aussagen über die Elektronentemperatur noch über die Elektronendichte zulassen.

Wir können uns die Ergebnisse der Bilder 3a, b, c auf folgende Weise plausibel machen: Ein Temperaturanstieg hat für das angeregte Niveau eine Bevölkering durch Anregungsstöße vom Grundzustand aus zur Folge, gleichzeitig aber eine Entvölkering durch Ionisation von diesem Niveau aus (vgl. dazu den ersten bzw. zweiten Term auf der rechten Seite von Gleichung 2,11). Wenn wir, wie bei Bild 3a, den Koeffizienten  $K_{e1}$  relativ klein wählen, fällt die Entvölkering durch Ionisation gegenüber der Bevölkering durch Anregung vom Grundzustand zunächst gar nicht ins Gewicht. Die Besetzungsdichte des angeregten Niveaus wird auf den Temperaturanstieg hin also ebenfalls ansteigen, angenähert mit der Zeitkonstanten  $1/n_e K_{10}$ . Dieser Anstieg wird erst aufgehalten, wenn die Besetzungsdichte  $n_1$  sich der neuen Boltzmannbesetzungsdichte  $n_{1B}$  angenähert hat, die Differenz  $(n_{1B} - n_1)$  also so klein wird, daß beide Terme in Gleichung (2,11) von gleicher Größenordnung werden. In Bild 3b ist der Koeffizient  $K_{e1}$  dagegen so groß gewählt, daß bei einem Temperaturanstieg zunächst die Entvölkering des Niveaus durch Ionisation die Bevölkering vom Grundzustand her weit überwiegt. Die Besetzungsdichte  $n_1$  reagiert auf den Temperaturanstieg deshalb zunächst mit einem Absinken und zwar solange, bis sie sich einer Sahabesetzung nähert, die Differenz  $(1 - \frac{n_1}{n_{1s}})$  also so klein wird, daß der zweite

Term in Gleichung (2,11) mit dem ersten vergleichbar wird. Anschließend steigt  $n_1$  dann entsprechend dem Anstieg der Elektronendichte an bis die Relaxationsphase beendet ist. Im Fall von Bild 3c schließlich ist  $K_{e1}$  so gewählt, daß die beiden Terme in Gleichung (2,11) von vornherein eine vergleichbare Größenordnung haben. Hier kann man keine qualitative Diskussion durchführen.

Da die Koeffizienten  $K_{10}$  bzw.  $K_{e1}$  die "Kopplung" des angeregten Niveaus an den Grundzustand bzw. an das Kontinuum bestimmen, können wir das Ergebnis dieses Abschnitts mit diesem Terminus wie folgt beschreiben: Ist das gebundene Energieniveau sehr viel stärker an den Grundzustand gekoppelt als an das Kontinuum, so eignet sich seine Besetzungsdichte zur Messung der Elektronentemperatur. Ist die Kopplung an das Kontinuum dagegen sehr viel stärker, eignet es sich zur Messung der Elektronendichte. Wenn die Kopplung des gebundenen Energieniveaus an Grundzustand und Kontinuum von gleicher Größenordnung ist, können wir aus dessen Besetzungsdichte weder auf die Elektronentemperatur noch auf die Elektronendichte rückschließen.

Wenn wir zur Wirklichkeit des Kaliumatoms zurückkehren, so haben wir die Wirkungsquerschnitte nicht mehr in der Hand. Zum Ausgleich stehen uns aber viele Energieniveaus zur Verfügung und wir werden im Sinne der bisherigen Überlegungen zu zeigen haben, daß die Kopplung des Resonanzniveaus an das Kontinuum schwach genug ist, damit wir es zur Elektronentemperaturmessung verwenden können. Für die Elektronendichtemessung hingegen müssen wir ein Niveau finden, dessen Kopplung an das Kontinuum hinreichend stark ist.

#### 2.4 Die quasistationäre Behandlung des Relaxationsproblems nach BATES, KINGSTON und McWHIRTER (1962).

Die physikalische Durchsichtigkeit des Relaxationsvorgangs geht verloren, wenn wir von dem Modellplasma, das aus 3-Niveau-Atomen besteht, zu realistischen Plasmen übergehen, da mit der Zahl der Energieniveaus die Dimension des Gleichungssystems wächst, das den Prozeß beschreibt. Ist  $N+1$  die Zahl der Energieniveaus, die man als gebunden ansehen kann, so wird der Relaxationsvorgang durch ein aus  $N+2$  gekoppelten Differentialgleichungen bestehendes System beschrieben, das in der gewohnten zeit-

abhängigen Form wie folgt lautet ( $\dot{\phantom{x}} = \frac{\partial}{\partial t}$ ):

$$\begin{aligned} \dot{n}_p = & -n_p \left( \sum_{q>p} n_e K_{pq} + \sum_{q<p} n_e K_{pq} + \sum_{q<p} A_{pq} + n_e K_{pe} \right) \\ & + n_e \sum_{q>p} n_q K_{qp} + \sum_{q>p} n_q A_{qp} + n_e \sum_{q<p} n_q K_{qp} + n_e^3 K_{ep} + n_e^2 S_{ep} \end{aligned}$$

$p, q=0, 1, \dots, N$       0 - Grundzustand

(2,14)

$$\dot{n}_e = -n_e^3 \sum_{q \geq 0} K_{eq} - n_e^2 \sum_{q \geq 0} S_{eq} + n_e \sum_{q \geq 0} n_q K_{qe}$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Elektronenstoßprozesse alle anderen Stoßprozesse überwiegen. Die  $K_{pq}$ ,  $K_{qp}$  sind die Elektronenstoßkoeffizienten für Übergänge von p nach q und umgekehrt;  $K_{ep}$  die Koeffizienten für Dreierstoßrekombination nach dem Niveau p;  $K_{pe}$  die Koeffizienten für Stoßionisation vom Niveau p aus;  $S_{ep}$  sind die Koeffizienten für Strahlungsrekombination nach dem Niveau p und  $A_{pq}$  ( $q < p$ ) die Übergangswahrscheinlichkeiten für spontane Emission bei Strahlungsübergängen von p nach q. Im Gleichungssystem (2,14) erscheinen explizit keine Photoanregungen, obwohl unser Plasma für die auf dem Grundzustand endenden Strahlungsübergänge optisch dick ist. Die optische Dicke kann in unserem Fall jedoch durch Strahlungsverlustfaktoren  $\beta_{po}$  ( $0 \leq \beta_{po} \leq 1$ ) berücksichtigt werden, mit denen die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten  $A_{po}$  zu multiplizieren sind. Unter den  $A_{po}$  in (2,14) wollen wir diese reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten verstehen. Es ist aber zu beachten, daß die optische Dicke sich nur deshalb auf solch einfache Weise berücksichtigen läßt, weil bei den Plasmabedingungen, für die wir uns interessieren, die Teilchendichte im Grundzustand praktisch konstant und gleich ist der Gesamtteilchendichte des Kaliums. In Abschnitt 3.4 ist dies näher ausgeführt.

Die Gleichungen des Systems (2,14) sind nicht unabhängig. Es gilt

$$\sum_{q \geq 0} \dot{n}_q + \dot{n}_e = 0 \tag{2,15}$$

(2,15) drückt die Konstanz der Gesamtteilchendichte (in unserem Fall der

Kaliumteilchendichte  $n_K$ ) aus:

$$\sum_{q \geq 0} n_q + n_e = n_K \quad (2,16)$$

Wenn wir eine MAXWELLverteilung der Elektronengeschwindigkeiten voraussetzen, sind die Elektronenstoßkoeffizienten  $K_{pq}$ ,  $K_{qp}$ ,  $K_{pe}$ ,  $K_{ep}$ ,  $S_{ep}$  Funktionen der Elektronentemperatur (vgl. Abschnitt 3.1). Für einen gegebenen zeitlichen Elektronentemperaturverlauf  $T_e(t)$  -entsprechend einem Elektronentemperaturprofil  $T_e(x)$  bei unserem strömenden Plasma-ist die Integration des Systems (2,14) dann grundsätzlich möglich und mit Hilfe von Rechenmaschinen kein allzu schwieriges Problem. Allerdings kann man nicht erwarten, daß solch ein Verfahren über den speziell gerechneten Fall hinaus auch noch allgemeinere Aussagen gestatten würde. Wir wollen statt dessen die "quasistationäre Näherung" des Relaxationsproblems betrachten, wie sie BATES, KINGSTON und McWHIRTER(1962) für relaxierende Wasserstoffplasmen durchgeführt haben. Dazu schreiben wir das System (2,14) in folgender Form:

$$\dot{n}_p = -\frac{n_p}{\tau_p} + \sum_{\substack{q \geq 0 \\ q \neq p}} \frac{n_q}{\tau_{pq}} + \frac{n_e}{\tau_{pe}} \quad (2,17)$$

$p = 0, 1, \dots, N$

$$\dot{n}_e = -\frac{n_e}{\tau_e}$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} 1/\tau_p(n_e, T_e) &= n_e \left( K_{pe} + \sum_{q \neq p} \left( K_{pq} + \frac{A_{pq}}{n_e} \right) \right) \\ 1/\tau_{pq}(n_e, T_e) &= n_e \left( K_{qp} + \frac{A_{qp}}{n_e} \right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{mit } A_{ij} = 0 \\ \text{für } i < j \end{array}$$

$$1/\tau_{pe}(n_e, T_e) = n_e^2 \left( K_{ep} + \frac{S_{ep}}{n_e} \right)$$

$$1/\tau_e(n_0, n_1, \dots, n_N, n_e, T_e) = n_e^2 \sum_{q \geq 0} \left( K_{eq} + \frac{S_{eq}}{n_e} \right) - \sum_{q \geq 0} n_q K_{qe}$$

Die quasistationäre Näherung besteht darin, daß man in System (2,17) die zeitlichen Ableitungen der Besetzungsdichten aller angeregten Niveaus vernachlässigt und mit dem verbleibenden Gleichungssystem weiterrechnet. Man betrachtet also statt des Differentialgleichungssystems (2,17), das den Relaxationsvorgang exakt beschreibt, das Gleichungssystem

$$0 = -\frac{n_p}{\tau_p} + \sum_{\substack{q \geq 0 \\ q \neq p}} \frac{n_q}{\tau_{pq}} + \frac{n_e}{\tau_{pe}}$$

$$p = 1, \dots, N; \quad p \neq 0 \quad (2,18)$$

$$\dot{n}_e = -\frac{n_e}{\tau_e}$$

(Die Gleichung für  $\dot{n}_0$  kann durch (2,15) ersetzt werden).

Begründen wollen wir den quasistationären Ansatz hier nicht mit der intuitiven Vorstellung von einer "nahezu instantanen Einstellung eines Quasigleichgewichts der angeregten Niveaus" (BATES et.al.). Statt dessen wollen wir ihn zunächst wertfrei als eine Möglichkeit ansehen, zu einer "nullten Näherung" des Relaxationsproblems zu gelangen. Diese nullte Näherung verwenden wir als Ausgangspunkt für ein Iterationsverfahren und fragen uns, unter welchen Bedingungen schon das Ergebnis der ersten Iteration nur mehr wenig von der nullten Näherung abweicht. Das führt uns dann unter anderem auf diejenigen Kriterien, die üblicherweise zur Rechtfertigung des quasistationären Ansatzes genannt werden.

Zeigen wir zunächst wie die nullte Näherung - "die quasistationäre Lösung" - aussieht. Die ersten N Gleichungen von (2,18) bilden ein lineares Gleichungssystem für die  $n_p$ ,  $p=1, \dots, N$ , das wie folgt aussieht:

$$\sum_{q=1}^N \frac{n_q}{\tau_{pq}} = -\frac{n_e}{\tau_{pe}} - \frac{n_0}{\tau_{p0}}; \quad p=1, \dots, N; \quad \frac{1}{\tau_{pp}} := -\frac{1}{\tau_p} \quad (2,19)$$

Oder in Matrixform (wobei es sich später als zweckmäßig erweisen wird, die Terme  $n_e/\tau_{pe}$  durch  $n_e^2/n_e\tau_{pe}$  zu ersetzen)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_q \end{pmatrix} = -n_e^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{n_e\tau_{pe}} \end{pmatrix} - n_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_{p0}} \end{pmatrix} \quad (2,20)$$

Mit

$$\begin{pmatrix} a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{n_e \tau_{qe}} \end{pmatrix} \quad (2,21)$$

und

$$\begin{pmatrix} b_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_{q0}} \end{pmatrix} \quad (2,22)$$

kann man die Lösung des linearen Gleichungssystems, die "quasistationären Besetzungsdichten"  $n_p^{(0)}$ , in folgender Form schreiben:

$$n_p^{(0)}(n_e, T_e, n_0) = a_p(n_e, T_e) \cdot n_e^2 + b_p(n_e, T_e) \cdot n_0 \quad (2,23)$$

Geht man mit (2,23) in die Gleichung für  $\dot{n}_e$  von System (2,18), so lautet diese (mit  $a_0 := 0$ ;  $b_0 := 1$ )

$$\dot{n}_e = - n_e^3 \underbrace{\left( \sum_{q \geq 0} (K_{eq} - a_q K_{qe} + \frac{S_{eq}}{n_e}) \right)}_{\alpha(n_e, T_e)} + n_e n_0 \underbrace{\sum_{q \geq 0} b_q K_{qe}}_{\beta(n_e, T_e)} \quad (2,24)$$

Gleichung (2,24) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $n_e$ , da wir die Grundzustandsteilchendichte  $n_0$  mit Hilfe der Gleichungen (2,16) und (2,23) durch  $n_e$ ,  $T_e$  und die (konstante!) Gesamtteilchendichte  $n_K$  ausdrücken können:

$$n_0(n_e, T_e, n_K) = \frac{n_K - n_e - n_e^2 \sum_{q \geq 1} a_q(n_e, T_e)}{1 + \sum_{q \geq 1} b_q(n_e, T_e)} \quad (2,25)$$

Bezeichnen wir die Lösung der Differentialgleichung (2,24) mit  $n_e^{(0)}(t)$  und gehen damit in (2,23), so erhalten wir in Verbindung mit (2,25) schließlich einen Satz von Funktionen  $n_0^{(0)}(t)$ ,  $n_1^{(0)}(t)$ , ...,  $n_N^{(0)}(t)$ ,  $n_e^{(0)}(t)$ , den wir als nullte Näherung des Relaxationsproblems verstehen wollen.

Wir stellen uns nun folgendes Iterationsverfahren vor: Mit den Funktionen  $n_0^{(0)}(t), n_1^{(0)}(t), \dots, n_{p-1}^{(0)}(t), n_{p+1}^{(0)}(t), \dots, n_N^{(0)}(t), n_e^{(0)}(t); p=1, \dots, N$

gehen wir in die Differentialgleichungen für die  $n_p$  des Systems (2,17). Das führt auf Differentialgleichungen der Form

$$\dot{n}_p = -\frac{n_p}{\tau_p} + \sum_{\substack{q \geq 0 \\ q \neq p}} \frac{n_q^{(0)}(t)}{\tau_{pq}} + \frac{n_e^{(0)}(t)}{\tau_{pe}} \quad (2,26a)$$

$p = 1, \dots, N$

wobei  $\tau_p, \tau_{pq}, \tau_{pe}$  gemäß den Definitionen in (2,17) von  $n_e^{(0)}(t)$  abhängen. Da die Funktionen  $n_q^{(0)}(t), n_e^{(0)}(t)$  in (2,26a) Lösungen des quasi-stationären Systems (2,18) sind, ist (2,26a) identisch mit

$$\dot{n}_p = -\frac{n_p}{\tau_p} + \frac{n_p^{(0)}(t)}{\tau_p} \quad p = 1, \dots, N \quad (2,26b)$$

Die  $N$  Differentialgleichungen von (2,26b) können wir einzeln lösen und erhalten daraus einen Funktionensatz  $n_1^{(1)}(t), \dots, n_N^{(1)}(t)$ . Mit diesem können wir in die Differentialgleichung für  $n_e$  in (2,17) gehen. Deren Lösung  $n_e^{(1)}(t)$  würde die erste Iterationsstufe abschließen. Mit den Funktionen  $n_0^{(1)}(t), n_1^{(1)}(t), \dots, n_N^{(1)}(t), n_e^{(1)}(t)$  ließe sich dann analog die zweite Iteration durchführen und so fort.

Wir wollen nun die Lösungen  $n_p^{(1)}(t)$  der Differentialgleichungen (2,26b) untersuchen:

Wenn wir mit  $n_{p0}$  die Besetzungsdichten  $n_p$  zur Zeit  $t = 0$  bezeichnen, lauten die Lösungen von (2,26b)

$$n_p^{(1)}(t) = e^{-\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p}} \cdot \left( n_{p0} + \int_0^t \frac{n_p^{(0)}}{\tau_p} e^{\int_0^{t'} \frac{dt''}{\tau_p}} dt' \right) \quad (2,26c)$$

Berücksichtigen wir, daß

$$\frac{1}{\tau_p(t)} \cdot e^{\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p}} = \frac{d}{dt} e^{\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p}} \quad (2,26d)$$

und integrieren in (2,26c) partiell, so erhalten wir

$$n_p^{(1)}(t) = n_p^{(0)}(t) + (n_{p0} - n_p^{(0)}(0)) \cdot e^{-\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p}} - e^{-\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p}} \int_0^t \dot{n}_p^{(0)} e^{\int_0^{t'} \frac{dt''}{\tau_p}} dt' \quad (2,26e)$$

Der letzte Term auf der rechten Seite von (2,26e) läßt sich wie folgt ausdrücken

$$\begin{aligned} e^{-\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p}} \int_0^t \dot{n}_p^{(0)} e^{\int_0^{t'} \frac{dt''}{\tau_p}} dt' &= e^{-\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p}} \int_0^t \dot{n}_p^{(0)} \cdot \tau_p \cdot \frac{e^{\int_0^{t'} \frac{dt''}{\tau_p}}}{\tau_p} dt' = \\ &= \dot{n}_p^{(0)}(t^*) \cdot \tau_p(t^*) \cdot e^{-\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p}} = \dot{n}_p^{(0)}(t^*) \cdot \tau_p(t^*) \cdot (1 - e^{-\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p}}) \end{aligned}$$

wobei  $t^*$  ein geeigneter Wert aus dem Zeitintervall zwischen 0 und  $t$  ist.

Drücken wir das Integral  $\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p}$  noch durch den Mittelwertsatz aus, d.h.

$$\int_0^t \frac{dt'}{\tau_p} = \frac{t}{\tau_p(\tilde{t})}$$

wo  $\tilde{t}$  ebenfalls ein geeigneter Wert aus dem Zeitintervall  $[0, t]$  ist, so lautet (2,26e) schließlich

$$n_p^{(1)}(t) = n_p^{(0)}(t) + (n_{p0} - n_p^{(0)}(0)) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p(\tilde{t})}} - \dot{n}_p^{(0)}(t^*) \cdot \tau_p(t^*) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau_p(\tilde{t})}}) \quad (2,26f)$$

$$p = 1, \dots, N; \quad 0 \leq \tilde{t} \leq t; \quad 0 \leq t^* \leq t$$

Die Besetzungsdichten der angeregten Niveaus werden sich nach der ersten Iteration also dann nur wenig von den quasistationären Besetzungsdichten unterscheiden, oder - anders ausgedrückt - der quasistationäre Ansatz wird dann eine vernünftige Näherung des Relaxationsproblems liefern, wenn gilt

$$(a) \quad |\dot{n}_p^{(0)}(t^*) \cdot \tau_p(t^*)| \ll n_p^{(0)}(t) \quad \text{für beliebige } 0 \leq t^* \leq t$$

und (2,27)

$$(b) \quad |n_{p0} - n_p^{(0)}(0)| \ll n_p^{(0)}(t) \quad p = 1, \dots, N$$

Die Bedingung (b) in (2,27) drückt aus, daß die Anfangsbedingungen des Relaxationsproblems mit dem quasistationären Ansatz verträglich sein müssen. Sie ist z.B. erfüllt, wenn der Ausgangszustand ein Gleichgewichtszustand ist. Ist nur die Bedingung (b) nicht, Bedingung (a) in (2,27) jedoch erfüllt, so gehen die Funktionen  $n_p^{(1)}(t)$  spätestens nach einer Zeit von der Größenordnung  $\tau = \max_p(\tau_p)$  in die quasistationären Besetzungsdichten über.

Die Bedingung (a) in (2,27) wollen wir in der schwächeren Form

$$|\dot{n}_p^{(0)}(t) \cdot \tau_p(t)| \ll n_p^{(0)}(t) \quad (2,28)$$

untersuchen, was wegen der Relation " $\ll$ " keine wesentliche Einschränkung bedeutet. Wir werden sie im folgenden als "Selbstkonsistenzbedingung" der quasistationären Lösung bezeichnen, da sie zum Ausdruck bringt, daß die durch Vernachlässigung der zeitlichen Ableitungen  $\dot{n}_p$  in (2,17) gewonnenen quasistationären Besetzungsdichten nur sinnvoll sind, wenn ihre relative Änderung in Zeitintervallen der Größenordnung  $\tau_p$  klein bleibt.

Nach (2,23) gilt

$$|\dot{n}_p^{(0)}(t)| = |\dot{a}_p \cdot n_e^2 + a_p(\dot{n}_e^2) + \dot{b}_p \cdot n_o + b_p \cdot \dot{n}_o| \leq \quad (2,29)$$

$$\leq |\dot{a}_p n_e^2| + |a_p(\dot{n}_e^2)| + |\dot{b}_p n_o| + |b_p \dot{n}_o|$$

Ungleichung (2,28) gilt also, wenn

$$|\dot{a}_p \tau_p| n_e^2 + a_p |(\dot{n}_e^2) \tau_p| + |\dot{b}_p \tau_p| n_o + b_p |\dot{n}_o \tau_p| \ll a_p n_e^2 + b_p n_o \quad (2,30)$$

Damit lassen sich vier hinreichende Bedingungen dafür aufstellen, daß der quasistationäre Ansatz eine gute Näherung liefert:

$$|(\dot{n}_e^2)| \cdot \tau_p \ll n_e^2 \quad \text{gleichbedeutend mit} \quad |\dot{n}_e| \cdot \tau_p \ll n_e \quad (2,31)$$

$$|\dot{n}_o| \cdot \tau_p \ll n_o \quad (2,32)$$

$$|\dot{a}_p(n_e, T_e)| \cdot \tau_p \ll a_p(n_e, T_e) \quad (2,33)$$

$$|\dot{b}_p(n_e, T_e)| \cdot \tau_p \ll b_p(n_e, T_e) \quad (2,34)$$

$p = 1, \dots, N$

In Worten ausgedrückt heißt dies, daß der Zeitmaßstab, in dem sich die Änderungen der Elektronendichte, der Grundzustandsteilchendichte und der Koeffizienten  $a_p$  und  $b_p$  vollziehen, groß sein muß gegen die Zeitgrößen  $\tau_p$ .

Welche Forderungen sind nun an ein Plasma zu richten, wenn es die Bedingungen (2,31) bis (2,34) erfüllen soll? Dazu betrachten wir zunächst die Bedingung (2,31; rechte Form). Mit der Gleichung für  $\dot{n}_e$  in (2,17) läßt sie sich wie folgt formulieren:

$$\frac{\tau_p}{|\tau_e|} \ll 1 \quad p = 1, \dots, N \quad (2,31a)$$

Drückt man die  $\tau_p$  und  $\tau_e$  explizit aus (vgl. 2,17), so gilt folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{\tau_p}{|\tau_e|} &= \frac{\left| \sum_{q \geq 0} (n_e^2 K_{eq} - n_q K_{qe}) + \sum_{q \geq 0} n_e S_{eq} \right|}{\sum_{q=0}^{p-1} n_e K_{pq} + n_e K_{pe} + \sum_{q \geq p+1} n_e K_{pq} + \sum_{q=0}^{p-1} A_{pq}} \quad \begin{array}{l} = \\ \uparrow \\ \text{Gl. (2,10)} \\ (2,13) \\ (2,13a) \end{array} \\ &= \frac{\left| \sum_{q \geq 0} (n_{qs} - n_q) K_{qe} + \sum_{q \geq 0} n_e S_{eq} \right|}{\sum_{q=0}^{p-1} n_{qs} \frac{n_e}{n_{ps}} K_{qp} + n_e K_{pe} + \sum_{q \geq p+1} n_e K_{pq} + \sum_{q=0}^{p-1} A_{pq}} \quad \leq \\ &\leq \frac{\sum_{q \geq 0} \max(n_q, n_{qs}) K_{qe} + \sum_{q \geq 0} n_e S_{eq}}{\sum_{q=0}^{p-1} n_{qs} \frac{n_e}{n_{ps}} K_{qp} + n_e K_{pe} + \sum_{q \geq p+1} n_e K_{pq} + \sum_{q=0}^{p-1} A_{pq}} \quad = \\ &= \frac{\sum_{q=0}^{p-1} \max(n_q, n_{qs}) K_{qe} + \max(n_p, n_{ps}) K_{pe} + \sum_{q \geq p+1} \max(n_q, n_{qs}) K_{qe} + \sum_{q \geq 0} n_e S_{eq}}{\sum_{q=0}^{p-1} n_{qs} \frac{n_e}{n_{ps}} K_{qp} + n_e K_{pe} + \sum_{q \geq p+1} n_e K_{pq} + \sum_{q=0}^{p-1} A_{pq}} \quad (2,35) \end{aligned}$$

Ein exaktes Kriterium dafür, daß der Ausdruck (2,35) sehr viel kleiner als eins wird, läßt sich nicht angeben. Doch wird es i.a. ausreichen, wenn das Plasma folgende Forderungen erfüllt:

$$\max( n_p, n_{ps} ) \ll n_e \quad p = 1, \dots, N \quad (2,36)$$

und

$$\sum_{q=0}^N n_e S_{eq} \ll \sum_{q=0}^{p-1} A_{pq} \quad p = 1, \dots, N \quad (2,37)$$

Dies ergibt sich durch Vergleich der jeweils übereinander stehenden Terme in Zähler und Nenner von (2,35). Beim ersten Term im Nenner gilt nämlich wegen (2,36)  $n_e/n_{ps} \gg 1$ . Da zusätzlich noch  $K_{qp} > K_{qe}$  gilt (die Stoßkoeffizienten für Anregung sind, wegen der kleineren Energieschwelle, i.a. größer als die für Ionisation, vgl. Abschnitt 3.1), wird dieser Term im Nenner sehr viel größer sein als der erste Term im Zähler. Die beiden zweiten Terme in (2,35) lassen sich analog abschätzen. Über die beiden dritten Terme läßt sich nicht ohne weiteres etwas aussagen, da bei großen  $q$   $K_{qe} > K_{pq}$  möglich ist, was allerdings durch die bei großen  $q$  klein werdenden  $n_q$  kompensiert werden kann. Für die beiden vierten Terme schließlich soll voraussetzungsgemäß (2,37) gelten.

Daß das Kriterium (2,36) keine unrealistischen Forderungen an das Plasma stellt, kann man sich an Hand der Sahabeziehung Gl.(2,3) plausibel machen. Es ergibt sich, daß in der Tat in einer großen Klasse von Plasmen die Besetzungsdichten der angeregten Niveaus sehr viel kleiner sind als die Elektronendichte. Auch das Kriterium (2,37) bedeutet keine harte Forderung an das Plasma. Nimmt man für die  $A_{pq}$  als realistische mittlere Größenordnung  $10^6 \text{ sec}^{-1}$  und für die  $S_{eq}$  den Wert  $10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}$  (vgl. z.B. NORCROSS und STONE, 1966), so würde (2,37) erst bei Elektronendichten in der Gegend von  $10^{18} \text{ cm}^{-3}$  verletzt.

Die zweite Voraussetzung dafür, daß der quasistationäre Ansatz eine gute Näherung liefert - die Bedingung (2,32) - läßt sich aus (2,31) ableiten, wenn man sich auf Plasmen beschränkt, für die neben (2,36) auch noch gilt, daß ihre mittlere thermische Energie sehr viel kleiner ist als die kleinste Anregungsenergie vom Grundzustand aus. In diesen Plasmen ist die Besetzungsdichte des Grundzustands sehr viel größer als die Besetzungsdichte der angeregten Niveaus

$$n_p \ll n_0 \quad p = 1, \dots, N \quad (2,38)$$

Machen wir noch die Einschränkung, daß die Elektronendichte nicht größer sein soll als die Teilchendichte im Grundzustand

$$n_e \leq n_0 \quad (2,39)$$

so folgt aus (2,36), (2,38) und (2,39) in Verbindung mit Gl.(2,16), die die Konstanz der Gesamtteilchenzahl ausdrückt, daß der Zeitmaßstab in dem sich die Änderung der Grundzustandsteilchendichte vollzieht nicht kleiner ist, als der für die Elektronendichte. D.h. wenn (2,31) gilt, so gilt auch (2,32). Für unsere Plasmabedingungen ist (2,32) ohne jeden Zweifel erfüllt, da in einem Kaliumplasma mit  $T_e < 3000^{\circ}\text{K}$  und  $n_K = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  die Teilchendichte im Grundzustand praktisch konstant und gleich ist der Gesamtteilchendichte.

Die beiden letzten Bedingungen (2,33) und (2,34) für die Selbstkonsistenz der quasistationären Lösung werden, wegen

$$\dot{a}_p(n_e, T_e) = \frac{\partial a_p}{\partial n_e} \dot{n}_e + \frac{\partial a_p}{\partial T_e} \dot{T}_e \quad (2,40)$$

$$\dot{b}_p(n_e, T_e) = \frac{\partial b_p}{\partial n_e} \dot{n}_e + \frac{\partial b_p}{\partial T_e} \dot{T}_e$$

erfüllt sein, wenn gilt:

$$\left| \frac{\partial(a_p, b_p)}{\partial n_e} \dot{n}_e \tau_p \right| \ll a_p, b_p \quad (2,41)$$

und

$$\left| \frac{\partial(a_p, b_p)}{\partial T_e} \dot{T}_e \tau_p \right| \ll a_p, b_p \quad (2,42)$$

Zwar lassen sich ohne quantitative Durchführung keine exakten Kriterien für die beiden Bedingungen (2,41) und (2,42) angeben, doch läßt sich zumindest folgendes verdeutlichen:

Aus (2,21), (2,22) und den Definitionen in (2,17) folgt, daß die  $a_p, b_p$  analytisch folgende Form haben

$$a_p = \frac{r_{pN}(T_e) \cdot n_e^N + r_{pN-1}(T_e) \cdot n_e^{N-1} + \dots + r_{p0}(T_e)}{s_{pN}(T_e) \cdot n_e^N + s_{pN-1}(T_e) \cdot n_e^{N-1} + \dots + s_{p0}(T_e)} \quad (2,43)$$

$b_p$  analog, jedoch ist  $r_{p0} = 0$

wobei der Nenner jeweils nur für den physikalisch sinnlosen Fall negativer  $n_e$  verschwindet. In physikalisch sinnvollen  $n_e$ -Bereichen wird man also weit genug von den Polen der rationalen Funktion (2,43) entfernt sein. D.h. die  $n_e$ -Abhängigkeit von  $a_p, b_p$  wird "vernünftig" sein (für  $n_e \rightarrow \infty$  verschwindet sie), so daß sich die  $a_p, b_p$  bezüglich  $n_e$  in einem Zeitmaßstab ändern, der jedenfalls nicht sehr viel kürzer ist als der von  $n_e$  selbst. Die Bedingung (2,41) ist also erfüllt, wenn (2,31) gilt. Über die  $T_e$ -Abhängigkeit der  $a_p, b_p$  kann man ohne quantitative

Durchführung der Rechnungen nichts aussagen, da die Koeffizienten  $r$  und  $s$  in (2,43) sich in unübersichtlicher Weise aus Produkten der Elektronenstoßkoeffizienten zusammensetzen. Wenn wir jedoch annehmen, daß auch die  $T_e$ - Abhängigkeit von  $a_p, b_p$  "vernünftig" ist, so wird die Bedingung (2,42) i.a. gelten, wenn die Elektronentemperaturänderung im Plasma sich in einem Zeitmaßstab vollzieht, der groß ist gegen die Zeiten  $\tau_p$ , d.h. wenn

$$|\dot{T}_e \cdot \tau_p| \ll T_e \quad (2,44)$$

Zusammenfassend lassen sich also folgende Orientierungsmerkmale dafür angeben, daß die quasistationäre Lösung eine gute Näherung liefert:

$$\begin{aligned} (a) \quad n_p &\ll n_e \leq n_0 & p = 1, \dots, N \\ (b) \quad n_e S_{eq} &\ll A_{pq} & p > q = 1, \dots, N \\ (c) \quad |\dot{T}_e \cdot \tau_p| &\ll T_e & p = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2,45)$$

(d) Die Anfangsbedingungen  $n_p^{(0)}$ ,  $p = 1, \dots, N$  müssen mit dem quasistationären Ansatz (2,18<sup>po</sup>) verträglich sein.

Dabei haben wir, da es sich - wie gesagt - nur um Orientierungsmerkmale handeln soll, die Bedingung (2,36) auf die erste Ungleichung (a) und die Bedingung (2,37) auf die Ungleichung (b) abgeschwächt. Exaktere Aussagen als in diesem Abschnitt können gemacht werden, wenn man den quasistationären Ansatz quantitativ durchrechnet. Dies läßt sich, was die quasistationären Besetzungsdichten betrifft, ohne Betrachtung eines speziellen Falles durchführen. Man betrachtet  $n_e$  und  $T_e$  einfach als unabhängige Parameter. Für ein definiertes Problem läßt sich dann die quasistationäre Lösung ausrechnen und auf ihre Selbstkonsistenz prüfen. Wenn sich herausstellt, daß die quasistationäre Lösung im speziellen Fall keine gute Näherung darstellt, kann sie immerhin als Ausgangspunkt für das erwähnte Iterationsverfahren dienen.

Vermutlich würde sich schnellere Konvergenz mit folgender Modifikation des Iterationsverfahrens erreichen lassen: Mit den Funktionen  $n_2^{(0)}(t), \dots, n_N^{(0)}(t), n_e^{(0)}(t)$  gewinnt man aus der Differentialgleichung für  $n_1$  in (2,17) eine Funktion  $n_1^{(1)}(t)$ , mit  $n_1^{(1)}(t), n_3^{(0)}(t), \dots, n_N^{(0)}(t), n_e^{(0)}(t)$

entsprechend eine Funktion  $n_2^{(1)}(t)$  usw. Die  $n_1^{(1)}(t), \dots, n_N^{(1)}(t)$  würden mit der Differentialgleichung für  $n_e$  eine Funktion  $n_e^{(1)}(t)$  liefern, mit der man das Verfahren erneut beginnen könnte.

Denkbar wäre schließlich noch folgende Verallgemeinerung des quasistationären Ansatzes: Die quantitative Rechnung zeigt, daß die in (2,17) definierten Zeitgrößen  $\tau_p$  i.a. eine fallende Folge bilden, d.h.

$\tau_p > \tau_{p+1}$ , wobei sich z.B.  $\tau_1$  und  $\tau_2$  durchaus um mehr als eine Größenordnung unterscheiden können. Das Kriterium (2,28) für die Selbstkonsistenz kann also z.B. für  $p = 1$  verletzt, aber für alle  $p \geq 2$  erfüllt sein. In diesem Fall könnte möglicherweise eine Einschränkung des quasistationären Ansatzes (2,18) auf

$$0 = -\frac{n_p}{\tau_p} + \sum_{\substack{q \geq 0 \\ q \neq p}} \frac{n_q}{\tau_{pq}} + \frac{n_e}{\tau_{pe}} \quad ; \quad p = 2, \dots, N$$

$$\dot{n}_1 = -\frac{n_1}{\tau_1} + \sum_{\substack{q \geq 0 \\ q \neq 1}} \frac{n_q}{\tau_{1q}} + \frac{n_e}{\tau_{1e}} \quad ;$$

$$\dot{n}_e = -\frac{n_e}{\tau_e} \quad ;$$
(2,18a)

zum Erfolg führen. Die quasistationären Besetzungsdichten hätten dann nicht die Form (2,23), sondern die folgende:

$$\tilde{n}_p^{(0)}(t) = \tilde{a}_p(n_e, T_e) n_e^2 + \tilde{b}_p(n_e, T_e) n_0 + \tilde{c}_p(n_e, T_e) n_1 \quad (2,23a)$$

$$p = 2, \dots, N$$

Statt einer einzigen Differentialgleichung für  $n_e$  bei der einfachen quasistationären Näherung, hätte man nun zwei gekoppelte Differentialgleichungen für  $n_1$  und  $n_e$  zu berechnen, was aber immer noch sehr viel weniger Aufwand bedeuten würde, als das ganze System gekoppelter Differentialgleichungen zu behandeln.

Tatsächlich beruht die Bedeutung des quasistationären Lösungsansatzes weder in der eben skizzierten Verallgemeinerungsmöglichkeit noch darin, die nullte Näherung für ein Iterationsverfahren zu liefern. Jedenfalls ist keine Arbeit bekannt, die ein Relaxationsproblem auf eine dieser Arten durchrechnet. Große Bedeutung hat der Ansatz vielmehr erlangt, weil sich damit in relativ einfacher und allgemeiner Weise Rekombinations- und Ionisationskoeffizienten definieren und als Funktionen der Elektronendichte und Elektronentemperatur berechnen lassen. (In unserer Darstellung die Koeffizienten  $\alpha(n_e, T_e)$  und  $\beta(n_e, T_e)$  in Gl. 2,24). Mit dieser Ziel-

setzung wandten BATES, KINGSTON und McWHIRTER (1962) den Ansatz an. Für die Spektroskopie ist der quasistationäre Ansatz von Bedeutung, weil sich damit die Besetzungsdichten der angeregten Niveaus als Funktionen der Elektronendichte, der Elektronentemperatur und der Grundzustandsteilchendichte (oder der Gesamtteilchendichte) berechnen lassen. Für wasserstoffähnliche Ionen wurden solche Rechnungen von McWHIRTER und HEARN (1963) durchgeführt. Für unsere Problemstellung ist die quasistationäre Näherung in besonderer Weise geeignet, denn sie erlaubt es in einfacher Weise die Bedingungen zu präzisieren, die erfüllt sein müssen, wenn die in den Abschnitten 2.1 und 2.2 beschriebenen Meßverfahren für Elektronentemperatur und -dichte auch in einem relaxierenden Plasma möglich sein sollen. Wir wollen dies im nächsten Abschnitt ausführen. Dabei werden wir voraussetzen, daß die quantitativen Rechnungen die volle Rechtfertigung des quasistationären Ansatzes erbringen werden.

## 2.5 Die spektroskopische Problematik aus der Sicht der quasistationären Theorie

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben (Gl.2,23), liefert der quasistationäre Ansatz die Besetzungsdichten der angeregten Niveaus in folgender Form als Funktion der Elektronendichte, der Elektronentemperatur und der Teilchendichte im Grundzustand

$$n_p(n_e, T_e, n_0) = a_p(n_e, T_e) \cdot n_e^2 + b_p(n_e, T_e) \cdot n_0 \quad (2,46)$$

$$p = 1, \dots, N$$

Die Koeffizienten  $a_p, b_p$  ergeben sich dabei gemäß (2,21) und (2,22) aus den elektronentemperaturabhängigen Stoßkoeffizienten und den Strahlungsübergangswahrscheinlichkeiten. Die Elektronendichteabhängigkeit der Koeffizienten  $a_p, b_p$  wird ausschließlich durch die Strahlungsterme in den Besetzungsbilanzen verursacht, wie man sich leicht an Hand von (2,17), (2,21) und (2,22) klarmacht. Diese  $n_e$ -Abhängigkeit von  $a_p, b_p$  ist umso schwächer, je höher die Elektronendichte ist. Für ein ausschließlich elektronenstoßbestimmtes Plasma ( $n_e \rightarrow \infty$  oder  $A_{pq}, S_{eq} = 0$  für alle  $p, q$ ) sind die Koeffizienten  $a_p, b_p$  nur mehr Funktionen der Elektronentemperatur.

Den Fall des elektronenstoßbestimmten Plasmas wollen wir zunächst eingehender betrachten, da er besonders instruktiv ist. Für ein solches Plasma gilt nach dem eben Gesagten

$$n_p = a_p(T_e) \cdot n_e^2 + b_p(T_e) \cdot n_o \quad (2,47)$$

Da diese Beziehungen insbesondere im Gleichgewicht erfüllt sind und der Gleichgewichtszustand bei einem ausschließlich stoßbestimmten Plasma dadurch charakterisiert ist, daß alle Besetzungsdichten der SAHA- bzw. BOLTZMANNformel gehorchen, stehen die Koeffizienten  $a_p(T_e)$ ,  $b_p(T_e)$  in folgender Beziehung zueinander:

$$b_p(T_e) = \left(\frac{n_p}{n_o}\right)_B - \left(\frac{n_e^2}{n_o}\right)_S \cdot a_p(T_e) \quad (2,48)$$

wobei  $\left(\frac{n_p}{n_o}\right)_B$  das Boltzmannverhältnis der beiden Besetzungsdichten  $n_p$ ,  $n_o$  bei der Elektronentemperatur bedeutet und  $\left(\frac{n_e^2}{n_o}\right)_S$  entsprechend die Saha-beziehung. Gehen wir mit der Relation (2,48) zurück in (2,47), so erhalten wir durch Eliminieren von  $b_p(T_e)$

$$n_p = n_o \cdot \left(\frac{n_p}{n_o}\right)_B + a_p(T_e) \cdot \left(n_e^2 - n_o \cdot \left(\frac{n_e^2}{n_o}\right)_S\right) \quad (2,49)$$

oder durch Eliminieren von  $a_p(T_e)$  - unter Beachtung, daß  $\left(\frac{n_o}{n_e^2}\right)_S \cdot \left(\frac{n_p}{n_o}\right)_B = \left(\frac{n_p}{n_e^2}\right)_S$

$$n_p = n_e^2 \cdot \left(\frac{n_p}{n_e^2}\right)_S - \left(\frac{n_o}{n_e^2}\right)_S \cdot b_p(T_e) \cdot \left(n_e^2 - n_o \cdot \left(\frac{n_e^2}{n_o}\right)_S\right) \quad (2,50)$$

Berücksichtigen wir nun noch, daß

$$n_{pB} := n_o \cdot \left(\frac{n_p}{n_o}\right)_B \quad (2,51)$$

die Boltzmannbesetzungsdichte des Niveaus p in Bezug auf die tatsächlich vorhandene Teilchendichte im Grundzustand ist,

$$n_{pS} := n_e^2 \cdot \left(\frac{n_p}{n_e^2}\right)_S \quad (2,52)$$

die Sahabesetzungsdichte des Niveaus p bezüglich der tatsächlich vorhandenen Elektronendichte und schließlich

$$n_{es}^2 := n_o \cdot \left( \frac{n_e^2}{n_o} \right)_s \quad (2,53)$$

die Sahaelektronendichte bezüglich der tatsächlich vorhandenen Teilchendichte im Grundzustand bedeuten, so können wir die Beziehungen (2,49) und (2,50) wie folgt schreiben

$$n_p = n_{pB} - \alpha_p(T_e) \cdot (n_{es}^2 - n_e^2) \quad (2,54)$$

bzw.

$$n_p = n_{pS} + \beta_p(T_e) \cdot \left( \frac{n_o}{n_e^2} \right)_s \cdot (n_{es}^2 - n_e^2) \quad (2,55)$$

Der Differenz  $(n_{es}^2 - n_e^2)$  in (2,54) und (2,55) kommt eine anschauliche Bedeutung zu. Dies wird klar, wenn wir die Gleichung (2,24) betrachten, welche die zeitliche Änderung der Elektronendichte beschreibt. Die  $n_e$ -Abhängigkeit der beiden darin definierten Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$ , die sich formal als Dreierstoßrekombinations- bzw. Ionisationskoeffizienten auffassen lassen, verschwindet im stoßbestimmten Fall und zwischen den beiden Koeffizienten gilt die Gleichgewichtsbeziehung

$$\frac{\beta(T_e)}{\alpha(T_e)} = \left( \frac{n_e^2}{n_o} \right)_s \quad (2,56)$$

Somit lautet (2,24) im elektronenstoßbestimmten Plasma

$$\dot{n}_e = \alpha(T_e) \cdot n_e \cdot (n_{es}^2 - n_e^2) \quad (2,57)$$

Die Differenz  $(n_{es}^2 - n_e^2)$  ist also proportional zur relativen zeitlichen Elektronendichteänderung. Sie ist positiv oder negativ, je nachdem sich das Plasma in einer Ionisationsphase ( $\dot{n}_e > 0$ ) oder Rekombinationsphase ( $\dot{n}_e < 0$ ) befindet.

Für die Spektroskopie ergeben sich aus den Gleichungen (2,54), (2,55) und (2,57) folgende Konsequenzen:

- (a) In einem relaxierenden Plasma ( $n_e \neq 0$ ) kann selbst im idealen stoßbestimmten Fall nicht erwartet werden, daß ein angeregtes Niveau entweder eine reine Boltzmannbesetzung bezüglich des Grundzustandes (Gl. 2,54) oder eine reine Sahabesetzung bezüglich der Elektronendichte (Gl. 2,55) besitzt. (Ersteres mußten wir in Abschnitt 2.1 für das Kaliumresonanzniveau fordern, wenn uns die Linienumkehrmethode exakt die Elektronentemperatur liefern sollte. Letzteres mußten wir für dasjenige Niveau fordern, welches uns die Elektronendichtebestimmung gemäß Abschnitt 2.2 erlauben sollte.)
- (b) In einem relaxierenden stoßbestimmten Plasma liegen die Besetzungsdichten der angeregten Niveaus immer zwischen einer Boltzmannbesetzung bezüglich der jeweiligen Teilchendichte im Grundzustand und einer Sahabesetzung bezüglich der jeweiligen Elektronendichte, d.h.

$$\min(n_{pB}, n_{ps}) \leq n_p \leq \max(n_{pB}, n_{ps})$$

wobei  $\max(n_{pB}, n_{ps}) = n_{pB}$  in der Ionisationsphase und  
 $\max(n_{pB}, n_{ps}) = n_{ps}$  in der Rekombinationsphase.

- (c) Möglichkeiten zur spektroskopischen Bestimmung von Elektronentemperatur oder -dichte aus den Besetzungsdichten oder Besetzungsdichteverhältnissen angeregter Niveaus bestehen - innerhalb gewisser Genauigkeitsansprüche - auch in einem relaxierenden Plasma dann, wenn für die betreffenden Niveaus p entweder die Koeffizienten  $a_p(T_e)$  oder  $b_p(T_e)$  sehr klein und die Abweichungen der Elektronendichte von der jeweiligen Gleichgewichtsdichte nicht allzu groß sind, so daß entweder gilt

$$|a_p(T_e) \cdot (n_{es}^2 - n_e^2)| \ll n_{pB} \quad (2,58)$$

oder

$$|b_p(T_e) \cdot \left(\frac{n_p}{n_e}\right)_s \cdot (n_{es}^2 - n_e^2)| \ll n_{ps} \quad (2,59)$$

In unserem speziellen Fall werden wir die Elektronentemperatur also nur dann durch Anwendung der Linienumkehrmethode auf den Kaliumresonanzübergang messen können, wenn das Resonanzniveau die Bedingung (2,58) erfüllt. Umgekehrt muß das (noch zu findende) Niveau, aus dessen Besetzungsdichte wir die Elektronendichte bestimmen wollen, (2,59) erfüllen.

Betrachten wir noch den allgemeineren Fall der Elektronentemperaturbestimmung aus dem Intensitätsverhältnis zweier Linien. Diese Methode ist in einem relaxierenden Plasma dann möglich, wenn die beiden zugehörigen oberen Energieniveaus entweder die Bedingung (2,58) oder die Bedingung (2,59) erfüllen (wenn p,q die beiden oberen Niveaus sind, gilt dann entweder  $n_p/n_q = n_{pB}/n_{qB} = (n_p/n_q)_B$  oder  $n_p/n_q = n_{ps}/n_{qs} = (n_p/n_q)_B$ ). Bei der Auswahl der beiden Linien wird man dabei i.a. einen Kompromiß schließen müssen. Die Meßgenauigkeit erfordert einerseits einen großen Energieabstand der beiden zugehörigen oberen Niveaus. Andererseits werden beide Niveaus - wenn überhaupt - nur dann eine der Bedingungen (2,58) oder (2,59) gleichzeitig erfüllen können, wenn sie "nah" beieinander liegen.

Wenn wir die Voraussetzung eines ausschließlich stoßbestimmten Plasmas fallen lassen, müssen wir wieder zur allgemeinen Form (2,46) für die quasistationären Besetzungsdichten zurückkehren:

$$n_p = a_p(n_e, T_e) \cdot n_e^2 + b_p(n_e, T_e) \cdot n_0$$

Zwar sind die Verhältnisse in diesem Fall sehr viel komplizierter, weil zwischen den Koeffizienten  $a_p$  und  $b_p$  keine allgemeine Verknüpfung mehr besteht und schon die Gleichgewichtsbesetzungsdichten i.a. nicht mehr der Saha- bzw. Boltzmannformel gehorchen. Aber immer noch gestattet es die Form der quasistationären Lösung, die Bedingungen für die in den Abschnitten 2.1 und 2.2 beschriebenen Meßverfahren zu präzisieren:

Für das Kaliumresonanzniveau (Index 1) müssen wir fordern:

$$a_1(n_e, T_e) \cdot n_e^2 \ll b_1(n_e, T_e) \cdot n_0 \quad (2,60)$$

und

$$b_1(n_e, T_e) \approx \left( \frac{n_1}{n_0} \right)_B \quad (2,61)$$

Wenn Ungleichung (2,60) nicht erfüllt ist, ist das Kaliumresonanzniveau als "Thermometer" unbrauchbar, um in dem anschaulichen Bild von Abschnitt 2.3 zu sprechen, denn es spürt auch etwas von der Dichte. (2,61) muß erfüllt sein, damit die "Skala" des "Thermometers" überhaupt eine Elektronentemperatureichung besitzt. Dies wird nur möglich sein, wenn die  $n_e$ -Abhängigkeit des Koeffizienten  $b_1$  schwach ist, d.h. wenn die Strahlungsterme in den Besetzungsbilanzen nicht stark in  $b_1$  eingehen.

Natürlich werden wir nicht erwarten können, daß die Bedingungen (2,60) und (2,61) exakt und in einem beliebigen Parameterbereich erfüllt sind. Die quantitativen Rechnungen werden es uns aber erlauben, Elektronendichte- und -temperaturbereiche anzugeben, innerhalb der die Abweichung der tatsächlichen Besetzungsdichte des Resonanzniveaus von einer Boltzmannbesetzung hinreichend klein ist, um eine Temperaturmessung mit akzeptablen Fehlergrenzen zu ermöglichen. Bei einer Abweichung von maximal  $\pm 20$  Prozent von der Boltzmannbestung, z.B., beträgt der Fehler in der Temperaturmessung bei unseren Bedingungen etwa  $\pm 50^{\circ}\text{K}$ . Die Bedingung  $0,8 \cdot n_{1B} < n_1 < 1,2 \cdot n_{1B}$  wird uns also in einem  $n_e, T_e$ -Diagramm ein Gebiet definieren, derart, daß für beliebige Paare  $(n_e, T_e)$  aus diesem Gebiet die Temperaturmessung innerhalb dieser (theoretischen) Fehlergrenze möglich ist.

Im Gegensatz zu den Bedingungen (2,60) und (2,61) für das Resonanzniveau, müssen wir für das Niveau  $d$ , das uns die Elektronendichtemessung erlauben soll, fordern

$$a_d(n_e, T_e) \cdot n_e^2 \gg b_d(n_e, T_e) \cdot n_0 \quad (2,62)$$

und

$$a_d(n_e, T_e) \approx \left( \frac{n_d}{n_e^2} \right)_s \quad (2,63)$$

Auch diese Forderungen werden sich nur wieder innerhalb gewisser Parameterbereiche im Rahmen der Fehlergrenzen erfüllen lassen, die für die  $n_e$ -Messung noch vernünftig sind. Die Bedingung  $0,8 \cdot n_{ds} < n_d < 1,2 \cdot n_{ds}$  z.B. wird uns in einem  $n_e, T_e$ -Diagramm ein Gebiet definieren, innerhalb dessen die Elektronendichtebestimmung mit einer (theoretischen) Fehlergrenze von  $\pm 10$  Prozent möglich ist.

Es sei zum Abschluß dieses Abschnitts noch darauf hingewiesen, daß sich die Koeffizienten  $a_p(n_e, T_e)$ ,  $b_p(n_e, T_e)$  der quasistationären Theorie als verallgemeinertes Maß für das auffassen lassen, was wir bei unserem Modellplasma aus 3-Niveau-Atomen in Abschnitt 2.3 die "Kopplung" des angeregten Niveaus an das Kontinuum bzw. an den Grundzustand genannt haben. Die Bedingungen (2,60) und (2,62) drücken somit in allgemeiner Form die Vorstellung aus, die wir schon an dem Modell gewonnen hatten: Temperaturmessung gemäß Abschnitt 2.1 erfordert schwache Kopplung des betreffenden Niveaus an das Kontinuum, Dichtemessung gemäß Abschnitt 2.2 hingegen starke Kopplung des jeweiligen Niveaus an das Kontinuum.

### 3. Zur quantitativen Durchführung der quasistationären Rechnungen

Der quasistationäre Ansatz führt, wie wir in Abschnitt 2.4 gesehen haben, auf ein lineares Gleichungssystem für die Besetzungsdichten, dessen Lösung keine großen numerischen Probleme aufwirft. Physikalisch problematisch hingegen ist die Wahl der von den jeweiligen Atomeigenschaften abhängigen Koeffizienten des Gleichungssystems, die Wahl der Strahlungsverlustfaktoren für die Übergangswahrscheinlichkeiten der optisch dicken Linien und schließlich die Wahl einer geeigneten Dimension des Gleichungssystems.

#### 3.1 Elektronenstoßquerschnitte und Berechnung der Elektronenstoßkoeffizienten $K_{pq}$ , $K_{pe}$

Wenn im Plasma  $dn_e$  Elektronen pro Volumeneinheit eine Geschwindigkeit zwischen  $v_e$  und  $v_e + dv_e$  besitzen, ferner  $n_p$  als ruhend angenommene Teilchen der Sorte  $p$  pro Volumeneinheit vorhanden sind, so werden durch Stöße der Elektronen mit Teilchen der Sorte  $p$  pro Volumen- und Zeiteinheit  $n_p \cdot dn_e \cdot v_e \cdot Q_{pq}(v_e)$  Teilchen der Sorte  $q$  gebildet, wobei  $Q_{pq}$  der geschwindigkeits(energie-)abhängige Stoßquerschnitt ist. Wenn  $f(v_e)$  die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Elektronen ist, so ergibt sich die gesamte Stoßrate  $n_e \cdot n_p \cdot K_{pq}$  dieses Prozesses zu

$$n_e n_p K_{pq} = n_e n_p \int_0^{\infty} v_e f(v_e) Q_{pq}(v_e) dv_e \quad (3,1)$$

Der Stoßkoeffizient berechnet sich also aus

$$K_{pq} = \int_0^{\infty} v_e f(v_e) Q_{pq}(v_e) dv_e \quad (3,2)$$

Bei Annahme einer MAXWELLverteilung,

$$f(v_e) = 4\pi \left( \frac{m_e}{2\pi kT_e} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v_e^2 \cdot \exp(-m_e v_e^2 / 2kT_e) \quad (3,3)$$

die wir im folgenden machen wollen, ergeben sich die Koeffizienten  $K_{pq}$  als Funktionen der Elektronentemperatur. Ferner gelten bei Annahme einer MAXWELLverteilung zwischen den Koeffizienten  $K_{pq}$  und  $K_{qp}$  bzw.  $K_{pe}$  und  $K_{ep}$  die Beziehungen

$$\frac{K_{pq}}{K_{qp}} = \left( \frac{n_q}{n_p} \right)_{\text{Boltzmann}} \Big|_{T_e} \quad \text{bzw.} \quad \frac{K_{pe}}{K_{ep}} = \left( \frac{n_e^2}{n_p} \right)_{\text{Saha}} \Big|_{T_e} \quad (3,4)$$

(3,4) folgt aus dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts, das besagt, daß im exakten thermodynamischen Gleichgewicht die Rate jedes Elementarprozesses gleich ist der Rate des entsprechenden inversen Prozesses. Da von den Eigenschaften des exakten thermodynamischen Gleichgewichts nur die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen in die Elektronenstoßkoeffizienten eingeht (Gl.3,2), genügt für die Gültigkeit der Beziehungen (3,4) aber schon die sehr viel schwächere Bedingung einer Maxwellverteilung der Elektronen.

Voraussetzung für die Berechnung der Stoßkoeffizienten ist gemäß Gl.(3,2) die Kenntnis der Stoßquerschnitte und ihrer Geschwindigkeits- oder Energieabhängigkeit. Das geringe zuverlässige Wissen darüber ist somit leider auch schwächste Stelle aller Besetzungsdichteberechnungen und damit der Plasmadiagnostik mittels Linienintensitätsspektroskopie. Zwar ist die quantenmechanische Berechnung der Querschnitte für Elektronenstoß seit der BORNschen Arbeit von 1926 prinzipiell gelöst, doch scheitert ihre exakte Durchführung an den mathematischen Schwierigkeiten. Die 1. BORNsche Näherung gilt nur im Bereich hoher Energien des stoßenden Elektrons, bei den meisten plasmaphysikalischen Problemen also nur für die wenigen Elektronen im "Schwanz" der Energieverteilung. Für den plasmaphysikalisch wichtigen Bereich niedriger Energien des stoßenden Elektrons existiert dagegen nur eine Reihe empirischer oder halbempirischer Formeln (vgl. die zusammenfassende Darstellung von DRAWIN, 1966), über deren Güte sich jedoch wenig sagen läßt, da das experimentelle Material über Stoßquerschnitte, insbesondere über Stoßquerschnitte angeregter Atome, nicht sehr umfangreich und wegen der komplizierten experimentellen Verfahren ihrer Bestimmung auch nicht allzu zuverlässig ist.

Die bestehende Unsicherheit ist der Grund dafür, warum auch heute noch die klassische Berechnung von Elektronenstoßquerschnitten Bedeutung besitzt. Die erste Berechnung stammt von THOMSON, J.J. (1912). Ihr liegt

zugrunde, daß die Energieübertragung  $\xi$  beim Stoß eines bewegten Elektrons der Energie  $E_2$  mit einem ruhenden Elektron gegeben ist durch

$$\xi = \frac{E_2}{1 + (R \cdot E_2 / e^2)^2} \quad (3,5)$$

$$e = 4,802 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{sec}^{-1}$$

wobei  $R$  der Stoßparameter ist. Der Wirkungsquerschnitt  $Q(E_2, U)$  für einen Stoßprozess, bei dem die übertragene Energie größer oder gleich ist einem Schwellwert  $U$ , ist dann eine Kreisfläche mit dem Radius

$$R_0 = (e^2 / E_2) \cdot (E_2 / U - 1)^{1/2}, \text{ also}$$

$$Q(E_2, U) = \frac{\pi e^4}{U^2} \cdot \frac{U}{E_2} \cdot \left(1 - \frac{U}{E_2}\right) \quad ; \quad E_2 > U \quad (3,6)$$

$$Q(E_2, U) = 0 \quad ; \quad E_2 \leq U$$

GRYZINSKI (1959) hat die Theorie erweitert und statt eines ruhenden gestoßenen Elektrons ein bewegtes der kinetischen Energie  $E_1$  zugelassen. Nach umfangreichen Rechnungen findet er (seine Gl.26 mit  $\sigma_0 = \pi \cdot e^4$ )

$$Q(E_1, E_2, U) = \begin{cases} \frac{\pi e^4}{U^2} \cdot g_j \left( \frac{E_2}{U}; \frac{E_1}{U} \right) & \text{für } E_2 \geq U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3,7)$$

Für die Funktionen  $g_j(E_2/U, E_1/U)$  gibt er einen analytischen Ausdruck an (seine Gl. 27), der für  $E_1 = 0$  übergeht in  $g_j(E_2/U, 0) = U/E_2 \cdot (1 - U/E_2)$ , den Ausdruck also, der im THOMSONquerschnitt (3,6) steht.

Setzt man  $U$  gleich der Ionisierungsenergie, so kann man (3,6) bzw. (3,7) als den klassischen Ionisationsquerschnitt von Teilchen mit einem "Leuchtelektron" auffassen. Plausibel im Sinne der einfachen Atommechanik ist es, dabei die kinetische Energie  $E_1$  des gestoßenen Elektrons gleich der Bindungsenergie des Leuchtelektrons in dem Zustand anzunehmen, für den der Stoß betrachtet wird. In Bild 4 ist die Funktion  $g_j(E_2/U, E_1/U)$  mit  $E_1/U$  als Parameter aufgetragen. Die Kurven geben die Energieabhängigkeit der klassischen Ionisationsquerschnitte in Einheiten von  $\pi e^4 / U^2$  wieder.

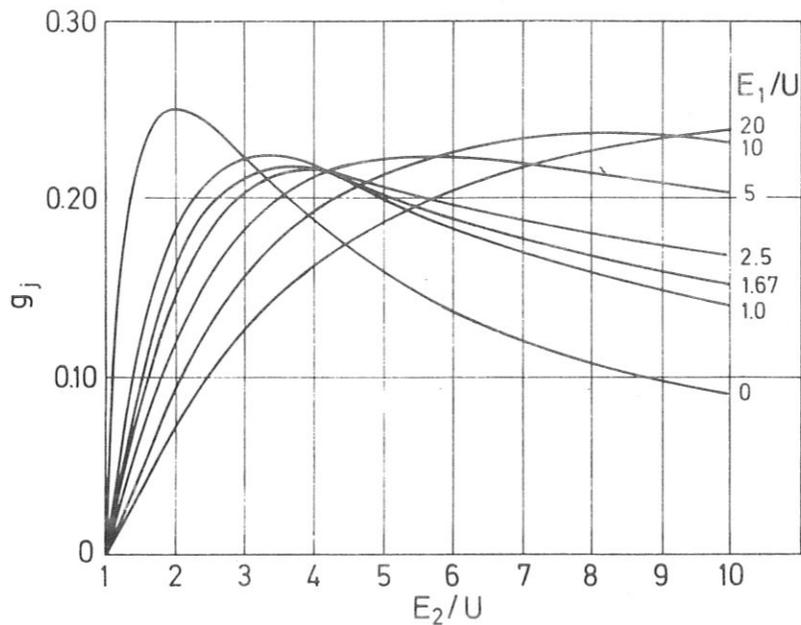


Bild 4 Energieabhängigkeit der GRYZINSKI-Querschnitte (nach BYRON, BORTZ und RUSSELL, 1963)

Den Anregungsquerschnitt  $Q_{pq}$  eines Teilchens im Zustand  $p$  für einen Stoßübergang in den Zustand  $q$  wird man im Sinne der klassischen Theorie durch den Stoßparameterbereich definieren, innerhalb dessen für die übertragene Energie  $\mathcal{E}$  gilt

$$U_{pq} \leq \mathcal{E} \leq U_{pq+1} \quad (3,8)$$

wobei  $U_{ij}$  die (positive) Energiedifferenz zwischen den Niveaus  $i, j$  ist. Man setzt also

$$Q_{pq} = Q(E_1, E_2, U_{pq}) - Q(E_1, E_2, U_{pq+1}) \quad (3,9)$$

mit  $Q(E_1, E_2, U)$  aus Gl. (3,7).

Die allgemeine Charakteristik der Energieabhängigkeit der klassischen Ionisationsquerschnitte - Anstieg von Null beim "Schwellwert"  $E_2/U = 1$  zu einem Maximum mit anschließendem Abfallen - stimmt mit dem Ergebnis quantenmechanischer Überlegungen überein (vgl., z.B., SEATON, 1962). Allerdings verlangt die Quantenmechanik einen  $\ln(E_2/U)/(E_2/U)$ -Abfall der Ionisationsquerschnitte für  $E_2/U \gg 1$ . Diese Schwäche der klassischen Stoßquerschnitte bleibt jedoch bei den meisten plasmaphysikalischen

Problemen ohne Auswirkung, da in die Stoßkoeffizienten und damit die Stoßraten überwiegend die Stoßquerschnitte im Bereich einiger Vielfacher der Schwellenergie eingehen. Die klassischen Anregungsquerschnitte (3,9) haben beim Schwellwert  $E_2/U_{pq} = 1$  ebenfalls den Wert Null, steigen dann zu einem Maximum an und fallen schließlich monoton. Bei Atomen stimmt diese Charakteristik qualitativ wieder mit quantenmechanischen Überlegungen überein. Für Ionenanregung hingegen erwartet man quantenmechanisch einen endlichen Querschnitt beim Schwellwert.

Wir werden bei unseren Berechnungen durchwegs die klassischen THOMSON-GRYZINSKI-Querschnitte verwenden. Allerdings müssen wir uns der quantitativen Unsicherheit der damit erzielten Ergebnisse bewußt bleiben, denn angesichts der "naiven" Annahmen der klassischen Theorie wird man zufrieden sein müssen, wenn sie die Größenordnung der Wirkungsquerschnitte, sowie deren Relationen untereinander (z.B. die  $1/U^2$ -Abhängigkeit) richtig wiedergibt.

Bei der Berechnung der Stoßkoeffizienten  $K_{pq}$  ist das Integral (3,2) auszuwerten. Mit  $E_2 = \frac{1}{2}m_e v_e^2$ , (3,3) und (3,9) führt das auf Integrale der Form

$$J = \frac{g}{\pi m_e} \cdot \left( \frac{g k T_e}{\pi m_e} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_u^{\infty} \frac{E_2}{k T_e} \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{k T_e}\right) \cdot Q(E_1, E_2, U) dE_2 \quad (3,10)$$

Wegen der prinzipiellen Unsicherheit der klassischen Wirkungsquerschnitte, die wir verwenden, ist es physikalisch nicht sinnvoll, viel Mühe für eine numerisch exakte Integration von (3,10) aufzubringen. BYRON, BORTZ und RUSSELL (1963) ersetzten bei der Berechnung von Stoßkoeffizienten die  $E_2$ -Abhängigkeit von  $Q(E_1, E_2, U)$  im ganzen Wertebereich von  $E_2$  durch eine lineare Funktion, wodurch sich eine analytische Darstellung für das Integral (3,10) ergibt. Diese Näherung ist zulässig, solange der Energieschwellwert der Stoßquerschnittfunktion in den Bereich des exponentiellen Abfalls der Maxwellverteilung fällt, d.h.

$$U \gg k T_e \quad (3,11)$$

erfüllt ist. Da (3,11) für die dicht beieinander liegenden oberen Energieniveaus nicht erfüllt ist, modifizieren wir das Verfahren in der Weise, daß wir die Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte nur in einem Bereich  $U \leq E_2 \leq \tilde{E}$  linear annähern und sie für  $E_2 > \tilde{E}$  als konstant annehmen. Wir setzen also

$$Q(E_1, E_2, U) = \begin{cases} \frac{\pi e^4}{U^2} \cdot B\left(\frac{E_1}{U}\right) \cdot \left(\frac{E_2}{U} - 1\right) & \text{für } U \leq E_2 \leq \tilde{E} \\ \frac{\pi e^4}{U^2} \cdot B\left(\frac{E_1}{U}\right) \cdot (\tilde{E} - 1) & \text{für } E_2 > \tilde{E} \end{cases} \quad (3,12)$$

wo  $B(E_1/U)$  die Steigung der linearen Näherung angibt und  $\tilde{E}$  ein geeigneter Energiewert (von der Größenordnung einiger  $U$ ) ist, den man etwas kleiner wählen wird als den Wert, bei dem der jeweilige Stoßquerschnitt sein Maximum hat (vgl. Bild 5). Mit (3,12) ergibt das Integral (3,10)

$$J = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \cdot \pi e^4 \cdot \frac{B\left(\frac{E_1}{U}\right)}{U^2} \cdot \left(1 + \frac{2kT_e}{U} - \left(\frac{\tilde{E}}{U} + \frac{2kT_e}{U}\right) \cdot e^{-\frac{\tilde{E}-U}{kT_e}}\right) \cdot e^{-\frac{U}{kT_e}} \quad (3,13)$$

Solange  $(\tilde{E} - U)/kT_e \gg 1$  ist, in unserem Fall für die unteren Energieniveaus, gilt

$$J = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \cdot \pi e^4 \cdot \frac{B\left(\frac{E_1}{U}\right)}{U^2} \cdot \left(1 + \frac{2kT_e}{U}\right) \cdot e^{-\frac{U}{kT_e}} \quad (3,14)$$

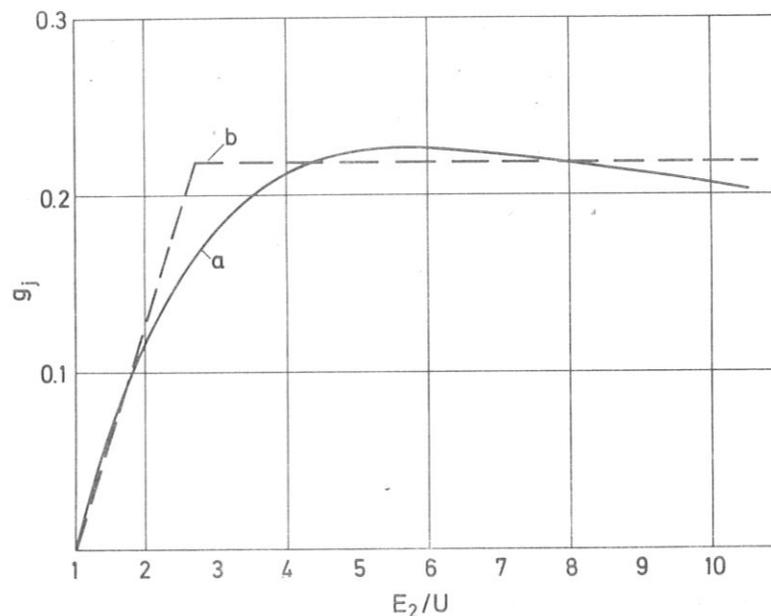


Bild 5

Beispiel für die Näherung (3,12)

a - exakte Funktion

b - Näherung

d.h. von der Stoßquerschnittfunktion geht nur die Steigung B der linearen Näherung in die Stoßkoeffizienten und somit die Stoßraten ein. Umgekehrt gilt für  $(\tilde{E}-U)/kT_e \ll 1$  (also für die eng benachbarten oberen Niveaus)

$$J = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \cdot \pi e^4 \cdot \frac{B(\frac{E_1}{U})}{U^2} \cdot \left(\frac{\tilde{E}}{kT_e} + 1\right) \cdot \left(\frac{\tilde{E}}{U} - 1\right) \cdot e^{-\frac{U}{kT_e}} \quad (3,15)$$

In diesem Fall hängen die Stoßkoeffizienten außer von der Steigung B der linearen Näherung auch noch relativ empfindlich - über den Faktor  $(\tilde{E}/U-1)$  - von der Energie  $\tilde{E}$  ab, bei der man die lineare Näherung abbricht, wobei  $\tilde{E}$ , wie erwähnt, von der Lage des Stoßquerschnittmaximums abhängt.

Die analytische Form (3,13) des Stoßintegrals reduziert die erforderliche Information über die Energieabhängigkeit der Stoßquerschnitte näherungsweise auf die Größen B und  $\tilde{E}$ . Sie ist verwendbar, solange sich die Stoßquerschnittfunktionen sinnvoll durch die Form (3,12) annähern lassen und insofern nicht an die klassischen Stoßquerschnitte gebunden, die wir verwenden werden. Andere Stoßquerschnitte hätten in dieser Näherung lediglich andere Wertepaare  $B, \tilde{E}$  zur Folge.

Bei den numerischen Rechnungen übernehmen wir die Steigung  $B(E_1/U)$  der linearen Näherung der GRYZINSKI-Querschnitte von BYRON et al. (1963) (Bild 6). Die Energie  $\tilde{E}$ , ab der wir die Energieabhängigkeit der Stoßquerschnitte durch eine Konstante ersetzen, wählen wir gemäß Bild 7. Die Werte in Bild 7 wurden durch Schätzung aus den Bildern 4 und 6 gewonnen.

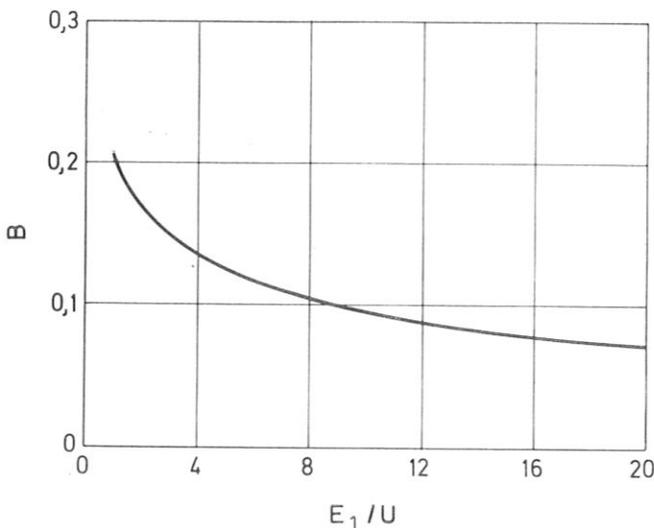


Bild 6 Steigung B der linearen Näherung der GRYZINSKI-Querschnitte

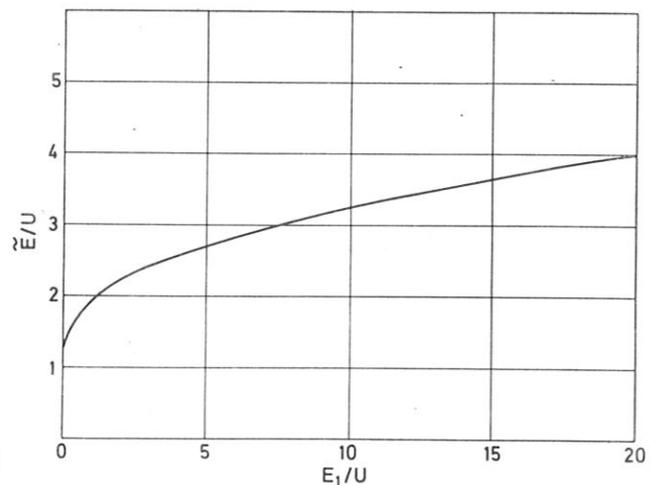


Bild 7 Energie  $\tilde{E}$ , bei der die lineare Näherung abgebrochen und durch eine Konstante ersetzt wird

### 3.2 Photorekombinationskoeffizienten $S_{eq}$

In Ermangelung von Querschnitten für Kalium verwenden wir die von NORCROSS und STONE (1966) berechneten Photorekombinationskoeffizienten für Cäsium. Angesichts der ähnlichen Termstruktur von Cs und K erscheint das gerechtfertigt, umsomehr, wenn man an die Unsicherheit bei den verwendeten klassischen Anregungs- und Ionisationsquerschnitten denkt.

### 3.3 Strahlungsübergangswahrscheinlichkeiten $A_{pq}$ für spontane Emission

Für Kalium finden wir die  $A_{pq}$  für die wichtigsten Strahlungsübergänge nach den sieben untersten Energieniveaus (4S, 4P, 3D, 5S, 5P, 4D, 6S) bei WIESE, SMITH und GLENNON (1966) tabelliert. Der maximale Fehler wird überwiegend mit  $\pm 30$  Prozent angegeben. Bei den Übergängen nach höheren Energieniveaus, für die keine Werte vorliegen, setzen wir die  $A_{pq}$  für die erlaubten Übergänge konstant gleich  $10^6 \text{ sec}^{-1}$ .

### 3.4 Berücksichtigung von Strahlungsanregungen

Wie schon zu Beginn von Abschnitt 2.4 erwähnt wurde, lassen sich Photoanregungen, die bei optisch dicken Strahlungsübergängen nicht vernachlässigbar sind, unter gewissen Bedingungen einfach dadurch berücksichtigen, daß man die Übergangswahrscheinlichkeiten für spontane Emission reduziert. Wir wollen das hier präzisieren. Die Nettorate  $r_{pq}$  von Strahlungsübergängen zwischen einem oberen Energieniveau  $p$  und einem unteren Niveau  $q$  ist gegeben durch

$$r_{pq} = n_p A_{pq} + n_p u_{pq} B_{pq} - n_q u_{pq} B_{qp} \quad (3,16)$$

Dabei bedeutet

$$u_{pq} = \int_{\text{Linienbereich } p,q} u_\nu \varphi_{pq}(\nu) d\nu \quad (3,17)$$

die über das Linienprofil  $\varphi_{pq}(\nu)$  gemittelte spektrale Energiedichte der am Aufpunkt herrschenden Strahlung.  $B_{pq}$ ,  $B_{qp}$  sind die EINSTEINSchen Übergangswahrscheinlichkeiten für induzierte Emission bzw. Absorption. Berücksichtigen wir die Beziehungen (3,18) zwischen den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$g_p \cdot B_{pq} = g_q \cdot B_{qp} \quad ; \quad \frac{g_p A_{pq}}{g_q B_{qp}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \quad (3.18)$$

und definieren eine Besetzungstemperatur  $T_{pq}$  derart, daß gilt

$$\frac{n_p}{n_q} = \frac{g_p}{g_q} \cdot \exp\left(-\frac{h\nu_{pq}}{kT_{pq}}\right) \quad (3.19)$$

$\nu_{pq}$ -Frequenz der Linie

so können wir die Nettorate der Strahlungsübergänge (3,16) auf folgende Form bringen

$$r_{pq} = n_p A_{pq} \left(1 - \frac{u_{pq}}{u_{pq}^{\text{Planck}}(T_{pq})}\right) =: n_p A_{pq} \mathcal{S}_{pq} \quad (3.20)$$

$u_{pq}^{\text{Planck}}$  - Plancksche Strahlungsenergiedichte bei der Frequenz des Übergangs  $p \rightarrow q$

Der in (3,20) definierte Faktor  $\mathcal{S}_{pq}$  gibt an, welcher Bruchteil an spontanen Emissionen nicht durch Absorption kompensiert wird. Er ist somit ein Maß für den Anteil der Strahlung, der aus dem Plasma entweicht. Wir wollen ihn im folgenden deshalb als Strahlungsverlustfaktor bezeichnen.

Das formal einfache Aussehen, das die Nettorate der Strahlungsübergänge durch Einführung des Strahlungsverlustfaktors bekommt, darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Besetzungsdichteberechnungen für den optisch dicken Fall i.a. prinzipiell schwieriger sind, da die  $\mathcal{S}_{pq}$  vom Strahlungsfeld  $u_{pq}$  und damit von der Plasmageometrie, sowie von den Besetzungsdichten  $n_p$ ,  $n_q$  im gesamten Plasmabereich abhängen. Das System von Ratengleichungen, aus dem sich die Besetzungsdichten berechnen, wird damit i.a. nichtlinear und kann streng genommen auch nicht mehr isoliert betrachtet werden.

Um eine Vorstellung über den Strahlungsverlustfaktor zu bekommen, betrachten wir als Modell ein Plasma beliebiger Geometrie, aber mit räum-

lich konstanten Plasmaparametern. Wenn keine Strahlung von außen in das Plasma eindringt, ist die Strahlungsintensität an einer Stelle  $\vec{r}$  des Plasmas als Funktion der Raumrichtung  $\vec{\Omega}$  gegeben durch

$$J_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} (1 - \exp(-\kappa_\nu \cdot l(\vec{r}, \vec{\Omega}))) \quad (3,21)$$

$l(\vec{r}, \vec{\Omega})$  ist die Ausdehnung des Plasmas in der Raumrichtung  $\vec{\Omega}$  vom Rand bis zur Stelle  $\vec{r}$ . (3,21) ergibt sich als Lösung der Strahlungstransportgleichung

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial l} = \epsilon_\nu - \kappa_\nu J_\nu \quad (3,21a)$$

mit der Randbedingung  $J_\nu|_{\text{Plasmarand}} = 0$ . Die spektralen Emissions- und Absorptionskoeffizienten  $\epsilon_\nu$  bzw.  $\kappa_\nu$  sind im Fall von Linienstrahlung durch folgende Gleichungen mit den zugehörigen Besetzungsdichten verbunden:

$$\epsilon_\nu^{(p,q)} = \frac{h\nu_{pq}}{4\pi} n_p A_{pq} \varphi_{pq}(\nu) \quad (3,22)$$

$$\kappa_\nu^{(p,q)} = \frac{h\nu_{pq}^2}{c} (n_q B_{qp} - n_p B_{pq}) \cdot \varphi_{pq}(\nu) \quad (3,23)$$

Mit (3,18) und (3,19) folgt dann

$$\frac{\epsilon_\nu^{(p,q)}}{\kappa_\nu^{(p,q)}} = \frac{c}{4\pi} u_{pq}^{\text{Planck}}(T_{pq}) \quad (3,24)$$

Die an der Stelle  $\vec{r}$  des Plasmas vorhandene spektrale Strahlungsenergiedichte  $u_\nu$  berechnet sich aus der Strahlungsintensität aller Raumrichtungen zu

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int d\Omega J_\nu \quad d\Omega \text{ -Raumwinkelelement} \quad (3,25)$$

Im Bereich der Linie p, q gilt also wegen (3,21), (3,24)

$$u_\nu = u_{pq}^{\text{Planck}}(T_{pq}) \cdot \left(1 - \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \exp(-\kappa_\nu^{(p,q)} l(\vec{r}, \vec{\Omega}))\right) \quad (3,26)$$

Aus (3,17), (3,20) und (3,26) folgt dann

$$S_{pq} = 1 - \frac{U_{pq}}{U_{pq}^{\text{Planck}}(T_{pq})} = \frac{1}{4\pi} \int d\omega \varphi_{pq}(\omega) \int d\Omega \exp(-\kappa_{\omega}^{(p,q)} \cdot l(\vec{r}, \vec{\Omega})) \quad (3,27)$$

wobei die Normiertheit des Linienprofils  $\int \varphi_{pq}(\omega) d\omega = 1$  benutzt wurde.

Der Strahlungsverlustfaktor  $S_{pq}$  hängt in einem homogenen Plasma also vom Ort innerhalb des Plasmas, von der Geometrie des Plasmas, vom Linienprofil und vom Absorptionskoeffizienten  $\kappa_{\omega}$  ab. Die Abhängigkeit von  $\kappa_{\omega}$  bedingt gemäß Gleichung (3,23) eine Abhängigkeit von den Besetzungsdichten  $n_p, n_q$ . Wenn  $n_p \ll n_q$  ist, d.h. wenn induzierte Emission vernachlässigbar ist, verbleibt nur mehr eine Abhängigkeit von der Besetzungsdichte des unteren Energieniveaus  $n_q$ .

Für unser Kalium-Plasma läßt sich nun abschätzen, daß nur die auf dem Grundzustand (Index 0) endenden Strahlungsübergänge optisch dick sind. Da bei den betrachteten Bedingungen  $n_p \ll n_0$  für alle  $p \neq 0$  gilt, sind unter homogenen Bedingungen die Strahlungsverlustfaktoren  $S_{p0}$  - was die Besetzungsdichten angeht - nur abhängig von der Grundzustandsteilchendichte  $n_0$ .  $n_0$  ist aber im betrachteten Elektronentemperaturbereich  $1500 \text{ }^{\circ}\text{K} < T_e < 3000 \text{ }^{\circ}\text{K}$  praktisch gleich der Gesamtteilchendichte des Kaliums, d.h. unabhängig von der Elektronentemperatur und somit eine Konstante unseres Problems. Folglich sind bei homogenen Bedingungen auch die  $S_{p0}$  nur orts-, geometrie- und linienprofilabhängige Größen. Betrachten wir unser Plasma in erster Näherung als homogen, so wird durch die optische Dicke also lediglich die zusätzliche Komplikation einer richtigen Wahl der Größen  $S_{p0}$  hervorgerufen, nicht aber die prinzipielle Komplikation einer Nicht-Linearität.

Zu einer Abschätzung der Strahlungsverlustfaktoren  $S_{p0}$  gelangen wir über den lokalen Energieverlust  $R_{pq}$  des Plasmas durch Strahlung der Linie pq, der gegeben ist durch

$$R_{pq} = n_p A_{pq} S_{pq} h \nu_{pq} \quad (3,28)$$

Nach einer Berechnung des lokalen Energieverlustes durch Kaliumresonanzstrahlung (4S-4P) für Zylindergeometrie (DODEL, 1970), ergibt sich bei unseren Verhältnissen für  $S_{10}$  die Größenordnung

$$\mathcal{S}_{10} = 10^{-3} \quad (3,29)$$

Die zitierten Berechnungen bestehen im wesentlichen in einer numerischen Durchführung des Integrals (3,27) für einen unendlich langen Plasmazylinder. Aus den Rechnungen folgt ferner, daß die Ortsabhängigkeit des lokalen Strahlungsverlustes und damit von  $\mathcal{S}_{10}$  relativ schwach ist (die Änderungen liegen, wenn man von einer dünnen Randschicht absieht, innerhalb eines Faktors 2.)

Für die Strahlungsverlustfaktoren der Übergänge 4S-nP ( $n > 4$ ) läßt sich aufgrund dieser Rechnungen folgende grobe empirische Beziehung rechtfertigen

$$\mathcal{S}_{i0} = \mathcal{S}_{10} \cdot \sqrt{\frac{A_{i0} E_{i0}^3}{A_{10} E_{10}^3}} \quad (3,30)$$

( $E_{i0}$  ist der Energieabstand zwischen Niveau  $i$  und Grundzustand. Beim Aufstellen der Beziehung (3,30) wurde benutzt, daß sich die Strahlungsverluste bei verschiedenen Zylinderradien grob als umgekehrt proportional zur Wurzel aus den Zylinderradien erwiesen und ferner in Gleichung (3,27), die den Strahlungsverlust und  $\mathcal{S}_{pq}$  bestimmt, eine Veränderung von  $\ell$  bei festgehaltenem  $\alpha_{\nu}$  gleichwertig ist einer Veränderung von  $\alpha_{\nu}$  bei festgehaltenem  $\ell$ , ferner  $\alpha_{\nu}^{(i,0)}$  proportional  $B_{0i}$  und  $B_{0i}$  proportional  $A_{i0}/E_{i0}^3$  ist.)

Denken wir uns ein homogenes Plasma in ein isotropes Strahlungsfeld der spektralen Energiedichte  $U_{pq}^{(\text{außen})}$  eingebettet (z.B. durch Wandstrahlung verursacht), so verringern sich die Strahlungsverlustfaktoren  $\mathcal{S}_{pq}$  gemäß Gleichung (3,31)

$$\mathcal{S}_{pq} \left| \begin{array}{l} \text{mit Strahlung} \\ \text{von außen} \end{array} \right. = \left( 1 - \frac{U_{pq}^{(\text{außen})}}{U_{pq}^{\text{Planck}}(T_{pq})} \right) \cdot \mathcal{S}_{pq} \left| \begin{array}{l} \text{ohne Strahlung} \\ \text{von außen} \end{array} \right. \quad (3,31)$$

Auf diesen wichtigen Effekt werden wir beim Vergleich der theoretischen mit den experimentellen Ergebnisse noch zu sprechen kommen (Abschnitt 6.2). (3,31) ergibt sich, wenn man statt von (3,21) von der Lösung der Strahlungstransportgleichung mit der Randbedingung

$$J_{\nu} \Big|_{\text{Plasmrand}} = \frac{c}{4\pi} U_{pq}^{(\text{außen})} \text{ ausgeht.}$$

### 3.5 Zählung der Energieniveaus

Um die Dimension des linearen Gleichungssystems, das uns die quasi-stationären Besetzungsdichten liefern wird, nicht unnötig groß werden zu lassen, fassen wir Energieniveaus, die im Vergleich mit anderen umgebenden Niveaus dicht beieinanderliegen, zusammen und berücksichtigen die Zusammenfassung über das statistische Gewicht. Dies ist gerechtfertigt, weil zwischen eng benachbarten Energieniveaus eine sehr starke Stoßkopplung besteht (die klassischen Stoßquerschnitte sind umgekehrt proportional zum Quadrat des Energieabstands!). Die Besetzungsdichten dieser Niveaus weisen also zueinander ein Boltzmannverhältnis auf, was bei kleinem Energieabstand ( $\Delta E \ll kT_e$ ) bedeutet, daß sich ihre Besetzungsdichten wie ihre statistischen Gewichte verhalten. Bei den Rechnungen werden wir die Energieniveaus gemäß Tabelle 1 zusammenfassen und zählen. Es wird sich zeigen, daß die dort aufgeführten Energieniveaus zur Lösung des Problems ausreichen.

Tabelle 1

Niveau Nr.	zugehörige Zustände des angeregten Elektrons	statist. Gewicht	gemittelte Anregungs- energie [eV]
0	4S	2	0
1	4P	6	1,615
2	5S; 3D	12	2,64
3	5P	6	3,06
4	6S; 4D	12	3,40
5	4F	14	3,48
6	6P	6	3,60
7	7S; 5D	12	3,74
8	5F	14	3,79
9	7P	6	3,85
10	8S; 6D; 6F; 6G; 6H	66	3,94
11	8P	6	4,0
12	9S; 7D; 7F	26	4,05
13	9P	6	4,08
14	10S; 8D; 8F	26	4,12
15	10P	6	4,14
16	11S; 9D; 9F	26	4,17
17	11P	6	4,18
18	12S; 10D	12	4,20
19	12P	6	4,21

Ionisierungsenergie des ungestörten K-Atoms 4,34 eV

### 3.6 Dimension des linearen Gleichungssystems

Streng genommen hat man die Dimension  $N$  des linearen Gleichungssystems (2,19), auf das der quasistationäre Ansatz führt, gleich der Zahl der angeregten Energieniveaus zu wählen, die man im Plasma "gerade noch als gebunden" ansehen kann. Die schwierige und noch nicht einheitlich beantwortete Frage, wo - in Abhängigkeit von den Plasmabedingungen - die Grenze der gerade noch als gebunden anzusehenden Energieniveaus verläuft, wird jedoch bei Besetzungsdichteberechnungen i.a. wie folgt umgangen: Man beginnt die Rechnungen mit einer nicht zu großen, willkürlich gewählten Dimension  $N$  und nimmt für alle  $q > N$  die Niveaus als sahabesetzt an, setzt also  $n_q = n_{qs} = n_e^2 \cdot \left(\frac{n_q}{n_e^2}\right)_s \Big|_{T_e}$ . Ergibt sich, daß die so erhaltenen Besetzungsdichten  $n_1, \dots, n_j, \dots, n_N$  sich für  $j \rightarrow N$  ebenfalls der jeweiligen Sahabesetzung nähern, so liegt eine in sich konsistente Lösung für die Besetzungsdichten vor. Ist dies nicht der Fall, so wird die Dimension des Gleichungssystems erhöht und erneut in dieser Weise verfahren. Zwar ist die Existenz einer solchen selbstkonsistenten Lösung keineswegs mathematisch notwendig, wie man z.B. aus Gleichung (2,55) ablesen kann: Für  $n_e \ll n_{es}$  wird der zweite Term auf der rechten Seite unabhängig von  $n_e$  während  $n_{ps}$  quadratisch mit  $n_e$  abnimmt, so daß für jedes Niveau bei hinreichend kleinen Elektronendichten eine Abweichung von der Sahabesetzung auftritt (vgl. den späteren Abschnitt 6.1). Daß man bei nicht zu kleinen Elektronendichten aber hoffen kann, eine selbstkonsistente Lösung zu finden, wird plausibel, wenn man beachtet, daß die Energieabstände der Niveaus  $q$  untereinander und zum Kontinuum mit zunehmendem  $q$  immer kleiner werden und dies mit einer starken Zunahme der betreffenden Elektronenstoßkoeffizienten verbunden ist (vgl. Abschnitt 3.1). Die Teilchendichten der oberen Energieniveaus und die Elektronendichte können deshalb als stoßbestimmtes Teilsystem betrachtet werden, auf das Strahlungsübergänge sowie Stoßübergänge nach entfernteren Energieniveaus nur vernachlässigbaren Einfluß haben. Die Sahabesetzung folgt dann im wesentlichen aus der Tatsache, daß die Stoßkoeffizienten  $K_{qe}$  und  $K_{eq}$  über das Prinzip des detaillierten Gleichgewichts durch

$$\frac{K_{qe}}{K_{eq}} = \left(\frac{n_e^2}{n_q}\right)_{\text{Saha}} \Big|_{T_e} \quad (3,32)$$

miteinander verbunden sind.

Dieses Verfahren, die Dimension  $N$  des linearen Gleichungssystems festzulegen, wird uns schon eine Fragestellung dieser Arbeit beantworten: Das noch nicht bestimmte Niveau  $d$ , welches uns die Messung der Elektronendichte ermöglichen soll und von dem wir deshalb eine Sahabesetzung verlangen müssen, werden wir mit dem Auffinden einer geeigneten Dimension  $N$  des Gleichungssystems festlegen können.

Wir haben nun alle Voraussetzungen für die quasistationären Rechnungen erarbeitet. Die numerische Durchführung erfolgte auf der CDC 6600 der Universität Stuttgart. Bevor wir die Ergebnisse mitteilen, wollen wir jedoch in den nächsten beiden Abschnitten die notwendigen Bemerkungen zum Experiment machen, da es zweckmäßig sein wird, die Ergebnisse der Theorie in direktem Zusammenhang mit denen des Experiments darzustellen und zu vergleichen.

4. Grundlagen der experimentellen Durchführung

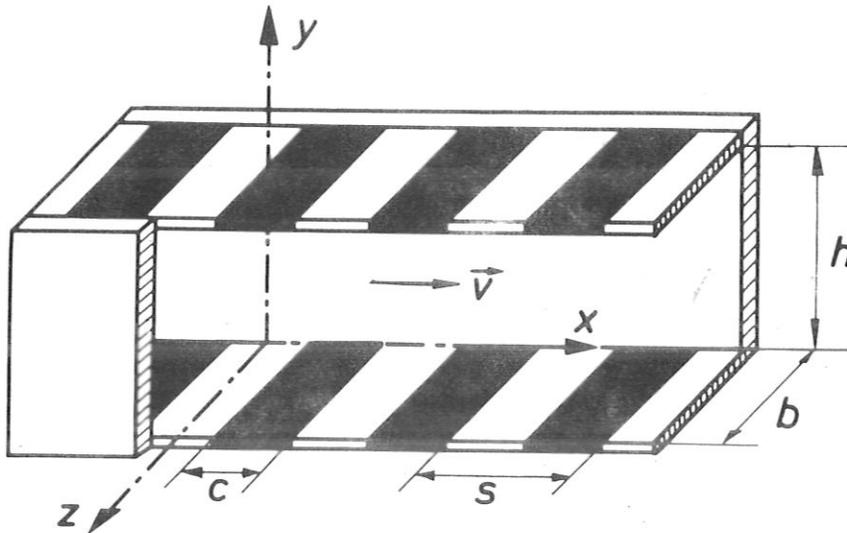


Bild 8 Schema des Meßkanals

(schwarz: Elektroden;  $c = 0,5$  cm;  
 $s = 1$  cm;  $h = 2$  cm;  $b = 1,5$  cm)

Die Experimente werden an einem Argon-Kalium-Plasma ausgeführt, das durch eine lineare Kanalordnung strömt. Bild 8 zeigt hierzu eine Orientierungsskizze. Das Plasma strömt in x-Richtung. Über die segmentierten Elektroden können quer zur Strömung Entladungen in y-Richtung gebrannt werden, mit deren Hilfe sich MHD-Generatorbedingungen simulieren lassen. Zur Untersuchung von Relaxationsphänomenen wählen wir eine möglichst einfache Simulation: Wir werden ohne Magnetfeld eine oder mehrere stationäre Entladungen quer zur Strömungsrichtung brennen. Die inhomogene Verteilung des elektrischen Stroms besonders im Bereich der Elektroden verursacht eine in x- und y-Richtung stark inhomogene räumliche Elektronentemperaturverteilung. Wir werden in etwa 1 mm Abstand von der Elektrodenwand die Elektronentemperaturverteilung  $T_e(x)$  und die sich ausbildende Elektronendichteverteilung  $n_e(x)$  spektroskopisch bestimmen. Dazu beobachten wir das Plasma in z-Richtung (in der wir es angenähert als homogen betrachten wollen) und verschieben die Beobachtungsachse in x-Richtung. Im folgenden sollen zunächst die optischen Meßverfahren, anschließend

in Abschnitt 5 das Experiment beschrieben werden.

#### 4.1 Die Linienumkehrmethode

Betrachtet man ein in der Beobachtungsrichtung homogenes Plasma im Spektralbereich einer emittierten Linie vor dem Hintergrund eines Kontinuumsstrahlers, dessen Strahlungsintensität sich verändern läßt, so stellt man folgendes fest: Bei geringer Intensität des Vergleichsstrahlers erscheint die Linie "in Emission". Erhöht man die Intensität des Strahlers, so hebt sich die Linie zunehmend schwächer vom Kontinuum ab, bis sie schließlich ganz im Kontinuum "verschwindet". Erhöht man die Intensität des Strahlers weiter, so kehren sich die Verhältnisse um, die Linie erscheint "in Absorption". Ordnet man der Strahlung der Kontinuumslichtquelle die PLANCKsche Strahlungsintensität  $B_\nu(T)$  zu, so nennt man die Temperatur  $T$ , bei der die Linie im Strahlungskontinuum verschwindet, die Umkehrtemperatur. Die Umkehrtemperatur liefert unmittelbar die Besetzungstemperatur, wie man sich an folgender Betrachtung klarmacht: Die Strahlungsintensität, die man beobachtet, berechnet sich aus der Strahlungstransportgleichung

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial l'} = \epsilon_\nu - \kappa_\nu J_\nu \quad (4,1)$$

$l'$ -Ortskoordinate in Strahlungsrichtung

Mit  $\epsilon_\nu, \kappa_\nu = \text{const}$  und  $J_\nu|_{l'=0} = B_\nu(T)$  lautet die Lösung

$$J_\nu(T) = B_\nu(T) e^{-\kappa_\nu l} + \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} \cdot (1 - e^{-\kappa_\nu l}) \quad (4,2)$$

$l$ -Dicke der Plasmaschicht

Sind  $p, q$  die am Übergang  $p \rightarrow q$  beteiligten Energieniveaus so gilt nach Gleichung (3,24)

$$\frac{\epsilon_\nu^{(p,q)}}{\kappa_\nu^{(p,q)}} = \frac{c}{4\pi} U_\nu^{\text{Planck}}(T_{pq}) = B_\nu(T_{pq}) \quad (4,3)$$

wo  $T_{pq}$  die gemäß (3,19) definierte Besetzungstemperatur des Energiepaars  $p, q$  ist.

Mit (4,3) ergibt (4,2)

$$J_\nu(T) = B_\nu(T_{pq}) + (B_\nu(T) - B_\nu(T_{pq})) e^{-\kappa_\nu^{(p,q)} l} \quad (4,4)$$

An (4,4) läßt sich der Linienumkehreffekt direkt diskutieren. Da die PLANCK-Funktion  $B_\nu$  innerhalb des schmalen Spektralbereichs einer Linie als frequenzunabhängig angesehen werden kann, wird die Linienstruktur der beobachteten spektralen Intensität  $J_\nu(T)$  nur durch den stark frequenzabhängigen Faktor  $e^{-\kappa_\nu^{(p,q)} l}$  in (4,4) verursacht. Demnach verschwindet die Linie im Kontinuum, wenn der Koeffizient bei  $e^{-\kappa_\nu^{(p,q)} l}$  verschwindet. Bei der Umkehrtemperatur  $T = T_U$  des Vergleichsstrahlers muß also gelten

$$B_\nu(T_U) - B_\nu(T_{pq}) = 0 \quad (4,5)$$

d.h.

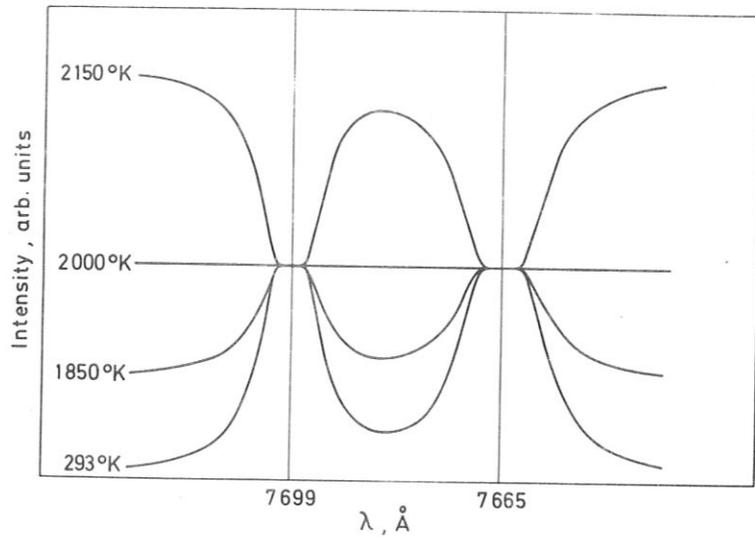
$$T_U = T_{pq} \quad (4,6)$$

Bild 9a zeigt den Linienumkehreffekt anhand eines numerisch gerechneten Beispiels für das Kaliumresonanzdublett  $4S_{1/2} - 4P_{1/2, 3/2}$ . Parameter ist die "schwarze Temperatur" der Vergleichslichtquelle. Im gewählten Beispiel, das unseren Plasmabedingungen angepaßt ist, sind die beiden Linien die "umgekehrt" werden, optisch sehr dick ( $\kappa_\nu \cdot l$  ist in der Linienmitte von der Größenordnung  $10^4$ ). Ist für eine Linie, die umgekehrt werden soll,  $\kappa_\nu \cdot l$  in der Linienmitte von der Größenordnung 1, so ist der Umkehreffekt nach wie vor gut zu beobachten, jedoch fallen die verschiedenen Kurven in der Linienmitte nicht mehr wie in Bild 9a zusammen. Bei optisch dünnen Linien ( $\kappa_\nu \cdot l \ll 1$ ) hingegen ist der Linienumkehreffekt mit einfachen Mitteln nicht mehr beobachtbar. Wenn  $\kappa_\nu \cdot l \ll 1$ , emittiert das Plasma die Intensität  $\epsilon_\nu \cdot l$  und es gilt die Ungleichung

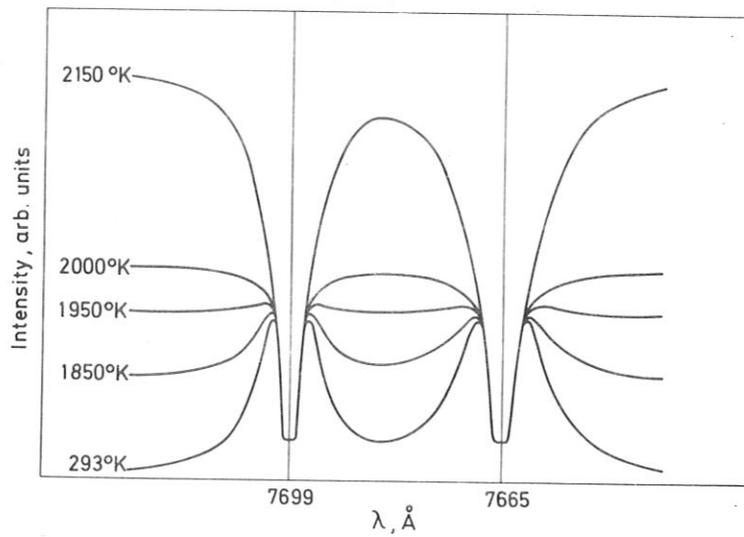
$$\epsilon_\nu \cdot l \ll \epsilon_\nu \cdot \frac{1}{\kappa_\nu} = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu(T_U) \quad (4,7)$$

Die Intensität der Linie ist in diesem Fall also sehr viel kleiner als die Intensität, bei der Umkehr eintritt. Die Linie geht deshalb im Rauschen

a)



b)



c)

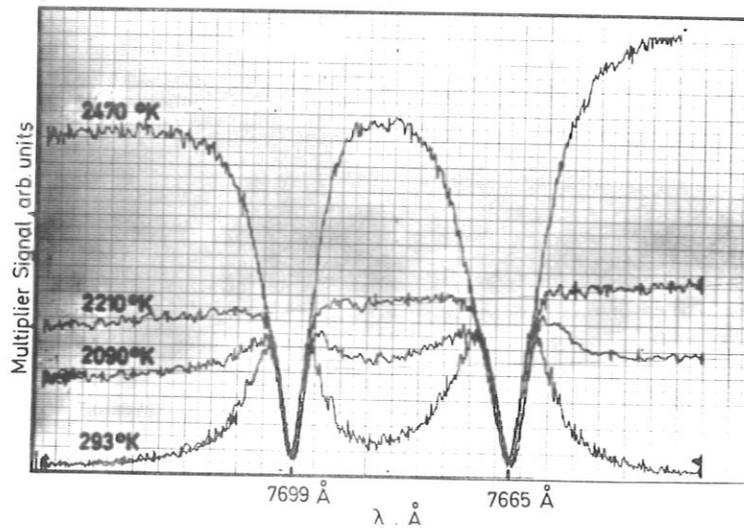


Bild 9

Linienumkehr des Kaliumresonanzdoublets

- a) berechnet für homogene Schicht
- b) berechnet für inhomogene Schicht
- c) typische experimentelle Aufnahme (Schichtdicke jeweils 1,5 cm; Linienprofil für die Rechnungen von DODEL, 1970)

der Vergleichslichtquelle unter.

Die Annahme einer homogenen Plasmaschicht, auf die wir uns bislang beschränkten, ist experimentell selten verwirklicht. Meist ist in den Randschichten ein Temperaturabfall vorhanden, der bei optisch dicken Linien i.a. zu Selbstabsorption führt. Trotzdem ist die Linienumkehrmethode noch durchführbar und liefert einen über die Beobachtungslinie gemittelten Wert der Besetzungstemperatur. Bild 9b zeigt hierzu ein numerisch gerechnetes Beispiel, bei dem für das Kaliumresonanzdublett ein Besetzungstemperaturprofil der Form  $T_{pq} = T_0 - \left(\frac{2l'}{l}\right)^6 \cdot \Delta T$  mit  $T_{pq} = T_0 = 2000$  °K in der Mitte der Plasmaschicht und  $T_{pq} = T_0 - \Delta T = 1700$  °K an beiden Rändern angenommen wurde. Die Strahlungstransportgleichung muß in diesem Fall numerisch integriert werden. Beide Linien zeigen in der Mitte starke Selbstabsorption. Als "Umkehrtemperatur" wird man zweckmäßigerweise den Temperaturwert definieren, ab dem die Maxima an den Flanken der selbstabsorbierten Linien nicht mehr auftreten. In Bild 9b wäre das eine Temperatur von etwa 1960 °K. Bild 9c zeigt zum Vergleich einen experimentell aufgezeichneten typischen "Satz" von Umkehrkurven. Als Umkehrtemperatur gemäß obiger Definition ergibt sich  $T_U = 2210$  °K. Das spektrale Intensitätsprofil der selbstabsorbierten Linien birgt im vorliegenden Fall noch eine einfach zu gewinnende Information: Wegen der großen optischen Dicke in der Linienmitte ist die Intensität in den Minima der beiden selbstabsorbierten Linien gegeben durch  $J_{\nu, \min} = \frac{\epsilon_{\nu}}{\kappa_{\nu}} \Big|_{T_{\text{Rand}}} = B_{\nu}(T_{\text{pq}}^{\text{Rand}})$ . Aus der Intensität in den Minima läßt sich also auf die Besetzungstemperatur am Rand der Plasmaschicht rückschließen. Im Beispiel von Bild 9c ergibt sich eine Randtemperatur von etwa 1800 °K.

Es wäre noch interessant zu wissen, wie bei inhomogener Schicht der mit der Linienumkehrmethode gewonnene Mittelwert der Besetzungstemperatur vom Profil der Besetzungstemperatur abhängt. Eine Untersuchung dieses keineswegs trivialen Problems (vgl. die Arbeiten von BARTELS, 1949 "Über Linienemission aus inhomogener Schicht") würde aber über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen.

Beim Experiment wollen wir die Verteilung  $T_{10}(x)$  der Besetzungstemperatur des Kaliumresonanzniveaus  $4P_{1/2, 3/2}$  bestimmen. Es ist nun nicht erforderlich, die Linienumkehrmethode an vielen Stellen des Plasmas durchzuführen. Vielmehr genügt es die relative Intensitätsverteilung der Kaliumresonanzstrahlung, im interessierenden Plasmabereich zu registrieren und die aufgenommenen Signale mittels der Linienumkehrmethode zu eichen, wozu

im Prinzip eine Eichmessung ausreicht. Dieses einfache Verfahren ist möglich, weil, wie oben an anderer Stelle erwähnt, die Besetzungsdichte des Kalium-Grundzustandes bei unseren Plasmabedingungen ( $T_e < 3000 \text{ }^\circ\text{K}$ ;  $n_K = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ) praktisch gleich der Gesamtteilchendichte des Kaliums ist und folglich nahezu konstant, d.h. unabhängig ist von Elektronentemperatur und -dichte. Die Intensität  $J_\nu$  der Kaliumresonanzstrahlung aus in Beobachtungsrichtung homogener Schicht ist somit proportional zur Besetzungsdichte des Resonanzniveaus. Für zwei Meßstellen A, B gilt also

$$\frac{J_\nu^{(A)}}{J_\nu^{(B)}} = \frac{n_1^{(A)}}{n_1^{(B)}} = \frac{g_1/g_0 \cdot n_0^{(A)} \exp(-h\nu_{10}/kT_{10}^{(A)})}{g_1/g_0 \cdot n_0^{(B)} \exp(-h\nu_{10}/kT_{10}^{(B)})} = \exp\left(-\frac{h\nu_{10}}{k} \left(\frac{1}{T_{10}^{(A)}} - \frac{1}{T_{10}^{(B)}}\right)\right) \quad (4,8)$$

oder

$$\frac{1}{T_{10}^{(B)}} = \frac{1}{T_{10}^{(A)}} + \frac{k}{h\nu_{10}} \ln \left( J_\nu^{(A)} / J_\nu^{(B)} \right) \quad (4,9)$$

d.h. die Besetzungstemperatur an der Stelle B läßt sich gemäß (4,9) berechnen, wenn sie an der Stelle A bekannt ist.

Da wir beim Experiment ein in der Beobachtungsrichtung streng homogenes Plasma nicht realisieren können, werden wir zur Intensitätsmessung nicht den gesamten, relativ breiten spektralen Bereich verwenden, in dem Resonanzstrahlung emittiert wird (vgl. Bild 9c). Vielmehr werden wir nur einen Spektralbereich von etwa  $10 \text{ \AA}$  Breite in den Linienflügeln zur Intensitätsmessung verwenden, z.B.  $7630 \text{ \AA} < \lambda < 7640 \text{ \AA}$ . In diesem Spektralbereich "sehen" wir weit in das Plasma hinein, so daß Randschichteffekte keinen wesentlichen Einfluß auf die Intensitätsmessung haben. Wenn wir im folgenden von "Intensität der Kaliumresonanzstrahlung" sprechen, wird immer die Intensität in einem schmalen Spektralbereich der Linienflügel gemeint sein. Diese Intensität brauchen wir gemäß Gleichung (4,9) nicht absolut zu kennen.

Als Vergleichslichtquelle für die Linienumkehrmethode dient uns eine Wolframbandlampe. Über ihre Eichung wird im übernächsten Abschnitt noch etwas gesagt werden.

#### 4.2 Besetzungsdichtebestimmung durch Absolutmessung der Linienintensität

Die spektrale Intensität der Strahlung, die von einer optisch dünnen Schicht der Dicke  $l$  emittiert wird, ist gegeben durch

$$J_{\lambda} = \epsilon_{\lambda} \cdot l \quad (4,10)$$

Bei einem Strahlungsübergang  $p \rightarrow q$  ist der spektrale Emissionskoeffizient  $\epsilon_{\lambda}^{(p,q)}$  durch Gleichung (3,22) mit der Besetzungsdichte  $n_p$  des oberen Niveaus und der Übergangswahrscheinlichkeit  $A_{pq}$  verknüpft, so daß die spektrale Intensität der emittierten optisch dünnen Linienstrahlung gegeben ist durch

$$J_{\lambda}^{(p,q)} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{hc}{\lambda_{pq}} \cdot n_p \cdot A_{pq} \cdot l \cdot \varphi_{\lambda}(\lambda - \lambda_{pq}) \quad (4,11)$$

$\lambda_{pq}$  -Wellenlänge der Linienmitte;

$\varphi_{\lambda}(\lambda - \lambda_{pq})$  -Linienprofil

In einen Empfänger, der die Linienstrahlung hinter einem Spektralfilter der Durchlässigkeit  $D(\lambda)$  registriert, gelangt die integrale Intensität

$$J^{(p,q)} = \int J_{\lambda}^{(p,q)} \cdot D(\lambda) d\lambda = \frac{1}{4\pi} \frac{hc}{\lambda_{pq}} \cdot n_p \cdot A_{pq} \cdot l \cdot \int \varphi_{\lambda}(\lambda - \lambda_{pq}) \cdot D(\lambda) d\lambda \quad (4,12)$$

Wenn der Empfänger auf Absolutintensität geeicht ist, kann die Besetzungsdichte  $n_p$  im Prinzip aus (4,12) ermittelt werden. Dabei wird man die Schwierigkeit der Integration in (4,12) zu umgehen suchen. Das könnte man z.B. durch Wahl eines Filters erreichen, dessen Durchlässigkeitskurve ein hinreichend flaches Maximum bei der Wellenlänge der Linienmitte hätte und dessen spektrale Bandbreite groß wäre gegen die Halbwertsbreite der Linie. Da wir aber die Intensitäten verschiedener Linien messen wollen, werden wir als Spektralfilter zweckmäßigerweise einen Monochromator verwenden. Allerdings weist die Durchlässigkeitskurve von Monochromatoren bei der üblichen Anwendungsweise mit gleicher Ein- und Austrittsspaltbreite keineswegs ein flaches Maximum auf: Sie hat die Form eines Dreiecks (Bild 10a). Ein ideal flaches Maximum der Durchlässigkeitskurve läßt sich jedoch er-

reichen, wenn man Ein- und Austrittsspalt des Monochromators verschieden breit macht. Sie nimmt dann nämlich die Form eines Trapezes an (Bild 10b). Bezeichnen wir mit  $s_1$  die Breite des engeren Spaltes, mit  $s_2$  die des weiteren Spaltes und mit  $\delta$  die Dispersion des Monochromators, so ist die Durchlässigkeit über einen Spektralbereich  $\Delta\lambda = (s_2 - s_1) \cdot \delta$  konstant. Die spektrale Bandbreite ist in diesem Fall durch  $\Delta\lambda_H = s_2 \cdot \delta$ , also durch den breiteren der beiden Spalte gegeben. Für die Trapezform des Durchlässigkeitsprofils ist es gleichgültig, welchen der beiden Spalte man schmaler oder breiter macht.

Wir werden bei den Messungen einen Gittermonochromator mit einer Dispersion von  $\delta = 40 \text{ \AA/mm}$  verwenden. Als Eintrittsspaltbreite wählen wir  $0,04 \text{ mm}$ , als Austrittsspaltbreite  $0,12 \text{ mm}$ . Der Monochromator hat bei diesen Parametern eine Bandbreite von  $4,8 \text{ \AA}$ . Seine Durchlässigkeit ist über einen Spektralbereich von  $3,2 \text{ \AA}$  konstant. Da die Halbwertsbreiten der Linienprofile bei unseren Plasmabedingungen sicher klein sind gegen  $3,2 \text{ \AA}$ , ferner für die Linienprofile  $\int \varphi_\lambda d\lambda = 1$  gilt, folgt für das Integral in (4,12)

$$\int \varphi_\lambda \cdot D(\lambda) d\lambda = D(\lambda_{pq}) \quad (4,13)$$

Bedingung ist lediglich, daß der Monochromator ungefähr auf die Linienmitte eingestellt ist.

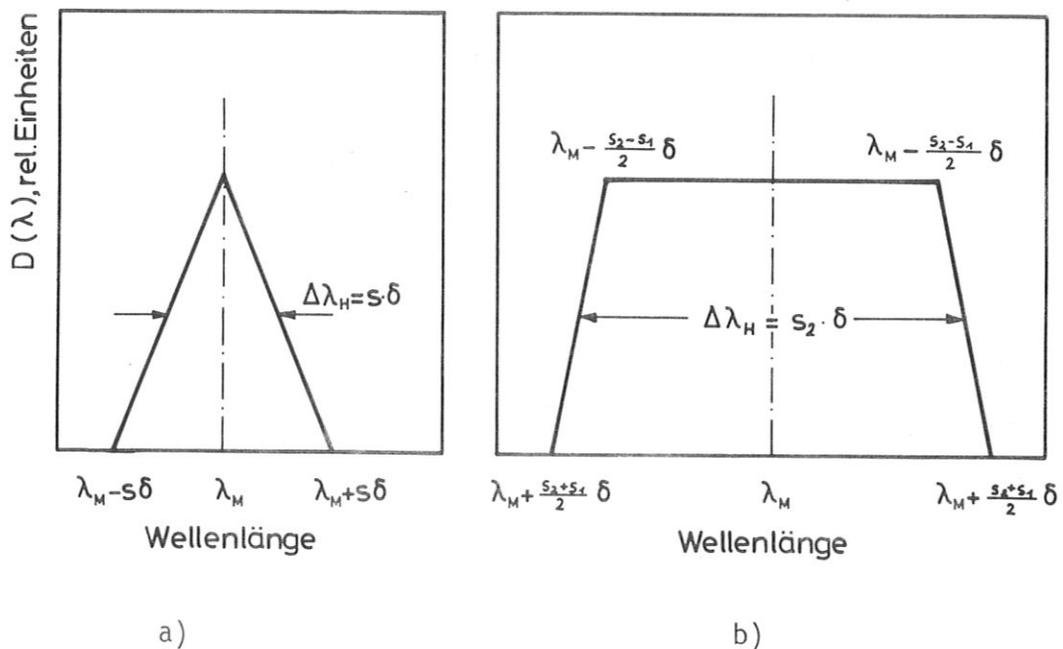
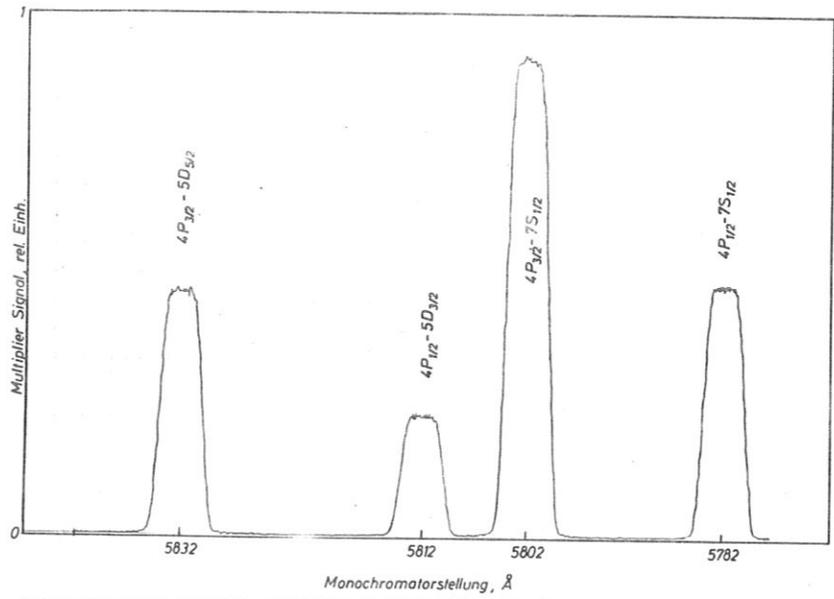


Bild 10

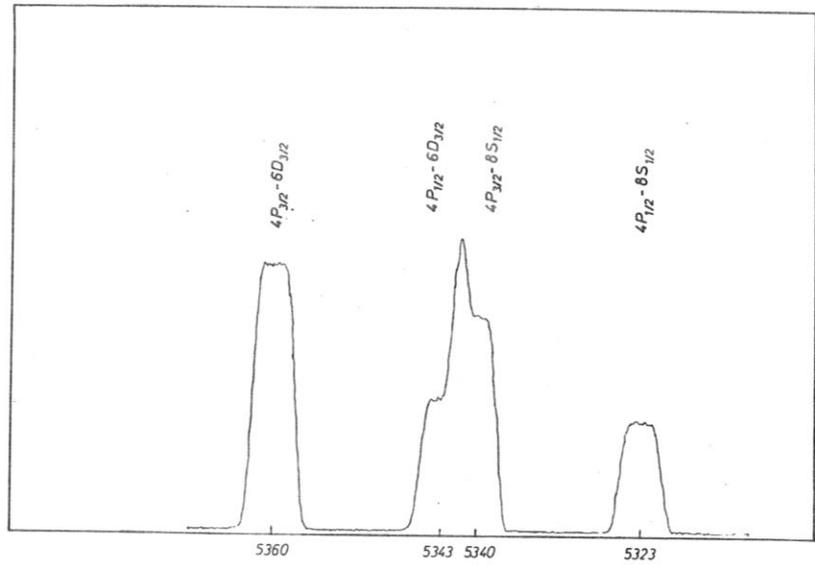
Spektrale Durchlässigkeit eines Monochromators

- a) Eintrittsspaltbreite = Austrittsspaltbreite =  $s$
- b) Eintrittsspaltbreite  $\neq$  Austrittsspaltbreite

a)



b)



c)

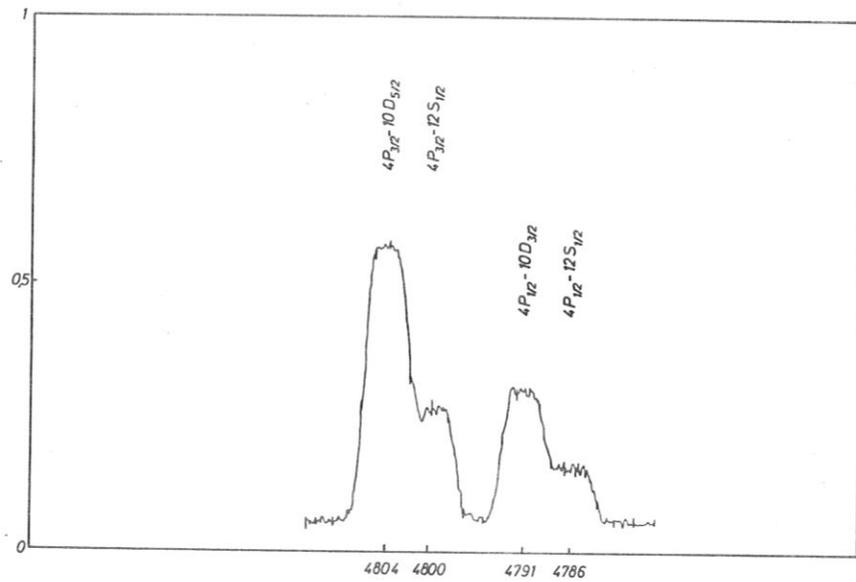


Bild 11

Liniensignale bei Verwendung eines Monochromators mit verschiedener Breite von Ein- und Austrittsspalt

Die Bilder 11a, b, c zeigen am Beispiel einiger Linien der beiden Kaliumnebensenien, wie bei solcher Verwendung des Monochromators das registrierte Signal aussieht, wenn man den Spektralbereich der Linien durchfährt, d.h. die Schwerpunktswellenlänge  $\lambda_M$  des Monochromators verändert: Die Signale bleiben über einen gewissen Bereich konstant, ein Zeichen dafür, daß das Plateau der Durchlässigkeitskurve breiter ist als die Linien. In Bild 11b beträgt der Abstand der mittleren beiden Linien nur  $3 \text{ \AA}$ . Sie werden vom Monochromator nicht mehr ganz getrennt, der Empfänger sieht über einen kurzen Bereich Strahlung von beiden Linien, was die Spitze im Signal erklärt. Das von den einzelnen Linien herrührende Signal läßt sich jedoch an der Höhe der beiden Stufen ablesen. Dasselbe gilt für die Linien der Übergänge  $4P_{1/2, 3/2} - 12S_{1/2}, 10D_{3/2, 5/2}$  in Bild 11c. Diese Linien sind, wie sich in Abschnitt 6. erweisen wird, zur Elektronendichtemessung geeignet. Wie aus Bild 11c hervorgeht, "sitzen" diese Linien auf einer kontinuierlichen Hintergrundstrahlung. Das Signal, das von den Linien allein herrührt, erhalten wir, wenn wir vom Gesamtsignal das Hintergrundsignal abziehen.

Zur Eichung der Signale benutzen wir eine Wolframbandlampe. Wenn diese mit der Intensität  $W_\lambda(\lambda)$  strahlt, so gelangt durch den Monochromator die integrale Intensität

$$J^{(w)} = \int W_\lambda(\lambda) D(\lambda) d\lambda \quad (4,14)$$

Da  $W_\lambda$  im schmalen Bereich, in dem  $D(\lambda) \neq 0$  ist, als konstant angenommen werden kann, gilt

$$J^{(w)} = W_\lambda(\lambda_{pq}) \cdot \int D(\lambda) d\lambda \quad (4,15)$$

und es folgt mit Bild 10b

$$J^{(w)} = W_\lambda(\lambda_{pq}) \cdot D(\lambda_{pq}) \cdot S_2 \cdot \delta \quad (4,16)$$

Aus (4,12), (4,13) und (4,16) ergibt sich die Besetzungsdichte  $n_p$  dann zu

$$n_p = 4\pi \cdot \frac{\lambda_{pq}}{h \cdot c} \cdot \frac{1}{A_{pq}} \cdot \frac{1}{\ell} \cdot W_\lambda(\lambda_{pq}) \cdot S_2 \cdot \delta \cdot \frac{J^{(pq)}}{J^{(w)}} \quad (4,17)$$

#### 4.3 Die Wolframbandlampe als Strahlungsnormal

Wolframbandlampen werden gewöhnlich mit Eichdaten geliefert, die bestimmten Betriebsstromstärken der Lampe bei einer bestimmten Eichwellenlänge  $\lambda_E$  eine "schwarze Temperatur"  $T_S(\lambda_E)$  zuordnen. Sie ist definiert durch

$$W(\lambda_E, T) = B(\lambda_E, T_S(\lambda_E)) \quad (4,18)$$

wo  $W$  die Intensität der von der Lampe ausgehenden Strahlung bedeutet,  $B$  die Plancksche Strahlungsintensität und  $T$  die "wahre" Temperatur der Lampe. Eichet man die Lampe selbst, so ist die Eichwellenlänge durch die Schwerpunktswellenlänge der in handelsüblichen Pyrometern eingebauten Farbfilter definiert.

Will man die Wolframbandlampe in einem von der Eichwellenlänge verschiedenen Spektralbereich als Strahlungsnormal benutzen, so geht man wie folgt vor:

$W(\lambda, T)$  ist über die "Emissivität"  $e(\lambda, T)$  des Wolframbandes mit  $B(\lambda, T)$  verknüpft, derart, daß gilt

$$W(\lambda, T) = e(\lambda, T) \cdot B(\lambda, T) \quad (4,19)$$

Insbesondere gilt also

$$W(\lambda_E, T) = e(\lambda_E, T) \cdot B(\lambda_E, T) \quad (4,20)$$

Zusammen mit (4,18) führt dies auf

$$B(\lambda_E, T_S(\lambda_E)) = e(\lambda_E, T) \cdot B(\lambda_E, T) \quad (4,21)$$

Bei Kenntnis der Emissivität  $e(\lambda, T)$  läßt sich aus (4,21) die wahre Temperatur  $T$  der Lampe als Funktion der schwarzen Temperatur  $T_S(\lambda_E)$  berechnen. Mit der wahren Temperatur  $T$  der Lampe läßt sich ihre Strahlungsintensität dann mit Hilfe von (4,19) für beliebige  $\lambda$  berechnen.

Bei unseren Messungen verwenden wir die von DE VOS (1954) experimentell ermittelten Werte für die Emissivität  $e(\lambda, T)$  des Wolframbandes.

5. Experiment

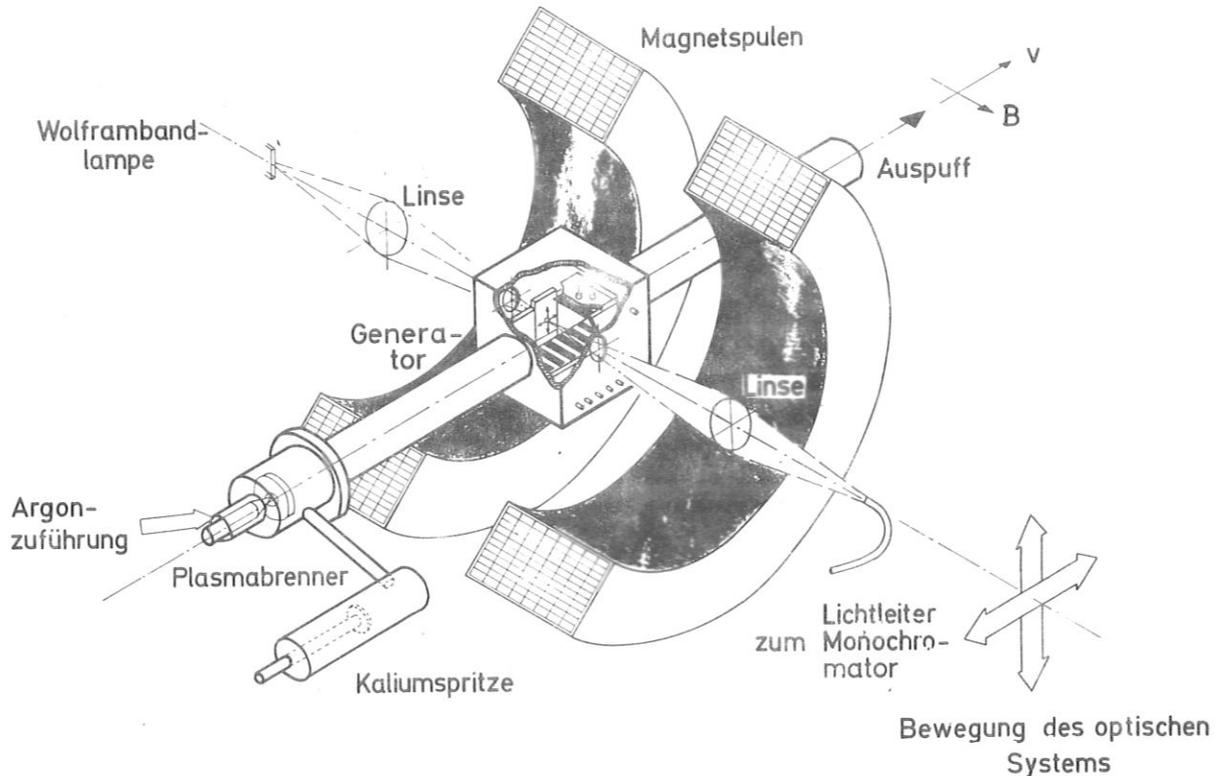


Bild 12 Schema der Apparatur

Bild 12 zeigt ein Schema der Apparatur. Strömendes Argon wird in einem Plasmabrenner erhitzt. Mittels einer Kaliumspritze wird dem heißen Argonstrahl Kalium zugesetzt. Das Argon-Kalium-Plasma homogenisiert sich in einer Mischkammer, durchläuft danach den Elektrodenkanal und passiert nach Kühlung einen Filter, in dem das Kalium wieder abgeschieden wird. Der Elektrodenkanal befindet sich im Inneren zweier Magnetspulen ohne Eisenkern, die jedoch bei den Messungen, über die wir hier berichten, nicht in Anwendung kommen, da es uns ausschließlich um das Studium von Relaxationseffekten geht. Eine bewegliche optische Meßanordnung ist mit beweglichen Seitenplatten des Elektrodenkanals verbunden. Die optische Achse dieser Anordnung ist senkrecht zur Richtung der Plasmaströmung. Die Apparatur ist vakuumdicht, so daß Gasverunreinigungen aus der Atmosphäre ausgeschlossen sind.

Im folgenden werden die wesentlichen Teile der Meßanordnung näher beschrieben.

## 5.1 Plasmaerzeugung

Nachgereinigtes Argon (Reinheitsgrad 99,99 %) strömt über einen Durchflußzähler durch einen Plasmabrenner. (Der hohe Reinheitsgrad ist erforderlich, da Verunreinigungen sowohl die Elektronentemperaturerhöhung verringern, als auch durch chemische Reaktion mit dem zugesetzten Kalium starke Verschmutzungen der Apparatur bewirken können). Beim Plasmabrenner handelt es sich um einen Lichtbogen, der im strömenden Argon zwischen einer spitzen Wolframkathode und einer trichterförmigen Kupferanode brennt und dabei das Edelgas erhitzt. Die Elektroden des Brenners sind wassergekühlt. Die Zündung des Bogens erfolgt mit einem Hochfrequenzzündgerät. Kurz nach dem Brenner wird dem Argonstrom, dessen Temperatur an dieser Stelle noch höher als  $2400^{\circ}\text{K}$  ist, Kalium zugesetzt. Das Kalium kommt aus einem geheizten Vorratszylinder (Temperatur  $80^{\circ}\text{C}$ ), wo es in flüssiger Form vorliegt. Von hier aus wird es mit Hilfe eines Kolbens zunächst in eine kleine Verdampfungskammer aus Wolfram gedrückt, die in den heißen Argonstrahl ragt und mit einer feinen Düse (Durchmesser  $0,15\text{ mm}$ ) versehen ist. Dort verdampft das flüssige Kalium (Siedepunkt  $1033^{\circ}\text{K}$ ) sofort und es entsteht wegen der engen Düse ein Überdruck. Dieser bewirkt ein gleichmäßiges Ausströmen durch die Düse, da eventuelle Schwankungen im Kaliumnachschub (Siedeverzüge, kleine Unregelmäßigkeiten im Kolbenvorschub) ausgeglichen werden. Die Rate des Kaliumzusatzes wird durch die Vorschubgeschwindigkeit des Kolbens geregelt. Das so gebildete Argon-Kalium-Plasma durchströmt, bevor es in den Meßkanal gelangt, einen  $40\text{ cm}$  langen Kanal. In der turbulenten Strömung (Reynoldszahl  $R_e \approx 10^4$ ) findet ein Temperatur- und Konzentrationsausgleich innerhalb des Plasmas statt. Der Strömungskanal, der somit als Mischkammer wirkt, besteht aus Magnesiumoxid-Rohren, die innen mit einem Wolframrohr ausgekleidet sind. Die Keramikteile sind von einem wassergekühlten Edelstahlgehäuse umschlossen, das für mechanischen Halt und Vakuumdichtigkeit sorgt.

## 5.2 Meßkanal

Der Meßkanal hat rechteckigen Querschnitt. Seine wesentlichen Teile sind zwei Elektrodenwände mit je 9 Elektroden und zwei bewegliche Seitenwände, die es ermöglichen, die optischen Messungen nicht nur an einem Punkt, sondern in einem ganzen Bereich des Kanals durchzuführen. Er ist aus Aluminiumoxid gefertigt. Die Elektroden bestehen aus 1 mm starkem Tantalblech. Form und Abmessungen des Kanals und der Elektroden sind Bild 13 zu entnehmen.

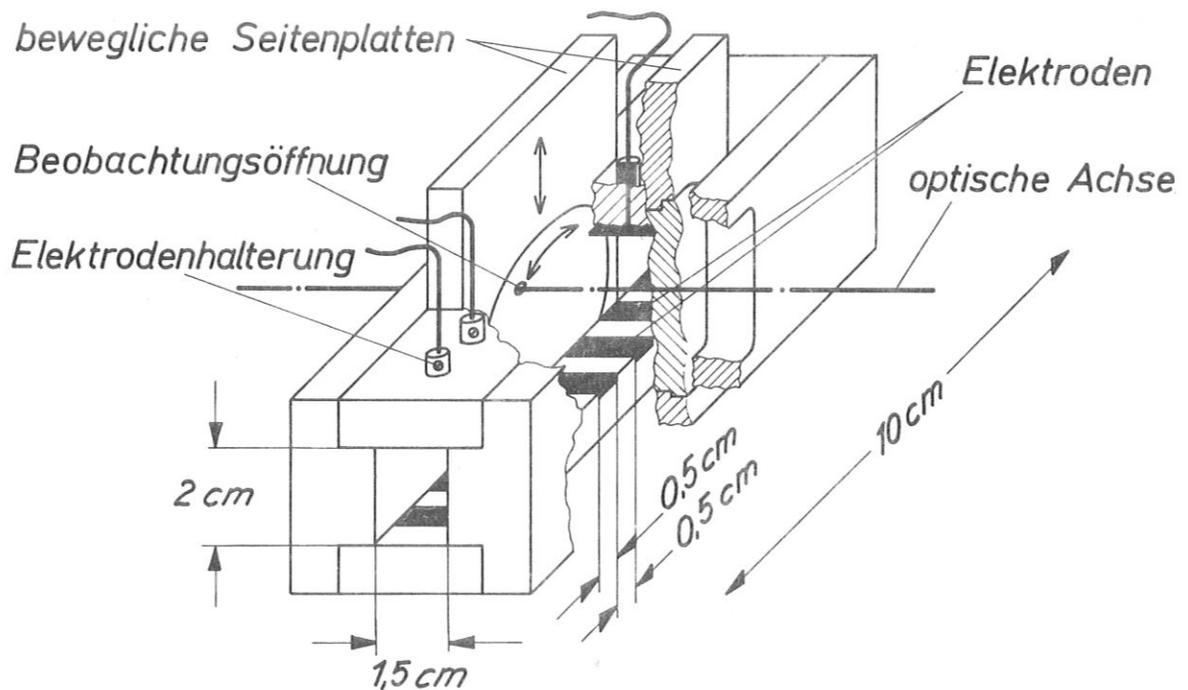


Bild 13 Meßkanal

Die beweglichen Seitenwände setzen sich aus einem rechteckigen und einem runden Teil zusammen. Das rechteckige Teil läßt sich in vertikaler Richtung bewegen und besitzt einen runden Ausschnitt, in dem sich eine kreisförmige Platte drehen kann. Die Beobachtungsöffnungen (Durchmesser 2 mm) für das Plasma befinden sich jeweils im kreisförmigen Teil. Sie sind mit der optischen Schiene so verbunden, daß sich eine Bewegung der

Schiene auf die Seitenplatten überträgt. Auf diese Weise entsteht ein bewegliches System mit zwei Freiheitsgraden, das es ermöglicht, den Bereich zwischen drei Elektrodenpaaren optisch "abzutasten". Die beiden Seitenplatten werden so justiert, daß die Verbindungslinie der beiden gegenüberliegenden Beobachtungsöffnungen, die die optische Achse bildet, senkrecht zur Kanalachse zeigt. Ein besonderer Vorteil der Konstruktion der beweglichen Seitenwände liegt darin, daß sie den Kanalquerschnitt unverändert lassen, so daß auch die Strömungsverhältnisse des Plasmas an der Meßstelle keine Veränderung erfahren. Der Meßkanal befindet sich in einem unmagnetischen Edelstahlgehäuse, das mit Kupferdichtungen an die Apparatur angeflanscht ist. Er ist mit Magnesiumoxidplatten gegen das Gehäuse thermisch isoliert.

### 5.3 Optisches System und Aufzeichnungsverfahren

Die optische Schiene kann durch einen Schraubspindelmechanismus unabhängig sowohl in horizontaler (x-) Richtung als auch in vertikaler (y-) Richtung über einen Bereich von  $20 \times 20 \text{ mm}^2$  parallel verschoben werden. Zusammen mit den beweglichen Seitenwänden des Meßkanals ermöglicht dies die Messung der räumlichen Intensitätsverteilung. Die Kopplung der beweglichen Seitenwände mit der optischen Schiene wird durch trichterförmige Edelstahlteile erreicht, die starr auf optischen Reitern justiert sind. (Bild 14). Sie besitzen Quarzfenster und sind durch elastische Gummibälge gasdicht mit dem Gehäuse verbunden. Die Horizontalbewegung der Schiene erfolgt durch einen Motor. Zwei lineare Präzisionspotentiometer, die mit der optischen Schiene verbunden sind, liefern ein der Horizontal- bzw. Vertikalverschiebung proportionales elektrisches Signal. Dieses kann mittels zweier Meßuhren (Genauigkeit 0,01 mm) geeicht und auf den für die Aufzeichnung der Meßergebnisse verwendeten Koordinatenschreiber gegeben werden.

Die Anordnung von Wolframbandlampe, Linsen und Blenden zur Durchführung der Linienumkehrmethode und der Intensitätsmessungen geht aus Bild 15 hervor. Die Optik muß folgenden Erfordernissen genügen:

a) Der Empfänger für die Strahlungsintensität darf nur solche vom Plasma ausgehenden Strahlen "sehen", für die auch ein Vergleichsstrahl der Wolframbandlampe existiert.

b) Der Durchmesser des beobachteten Plasmabereichs muß möglichst klein sein, damit bei den Intensitätsmessungen ein gutes örtliches Auflösungsvermögen erzielt wird.

c) Die in den Empfänger gelangende Strahlungsenergie muß möglichst groß sein.

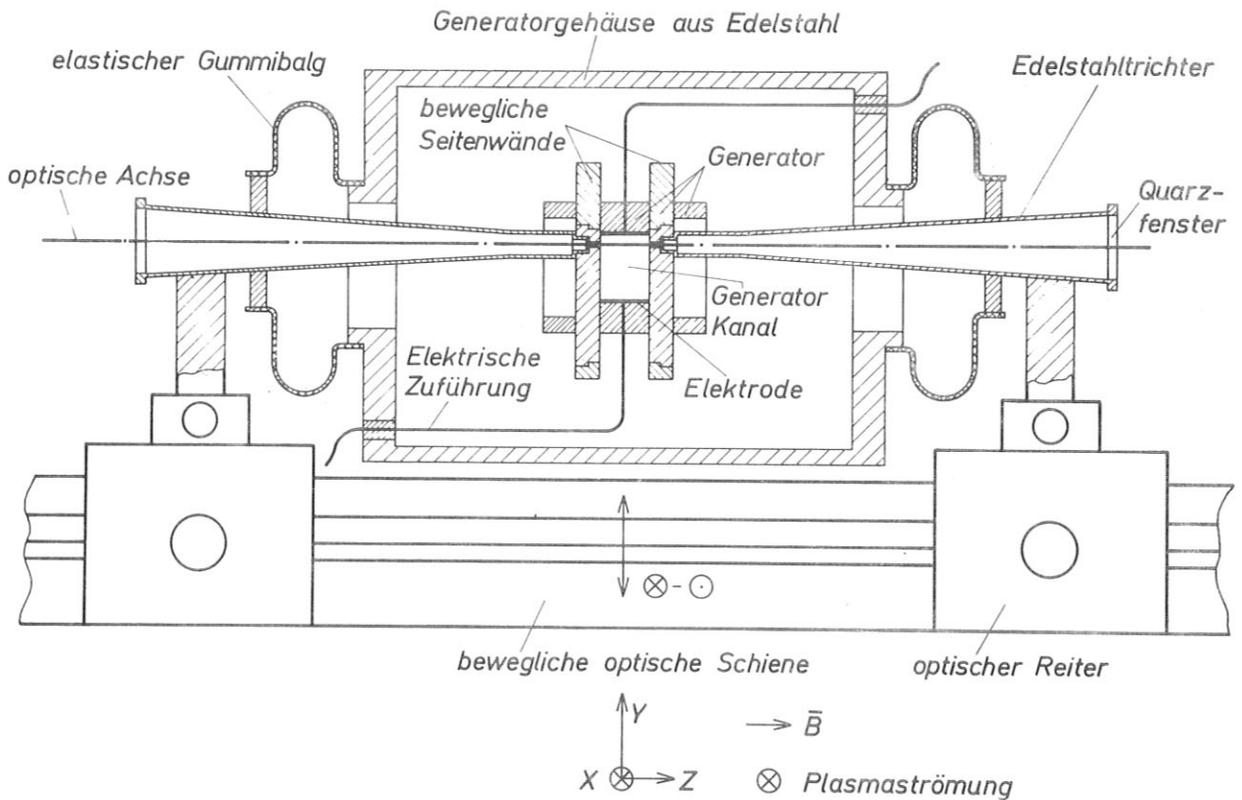


Bild 14 Querschnitt durch die Meßkammer in einer Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung

Es ist deshalb zweckmäßig, die Wolframbandlampe mit der Linse 1 zuerst in das Plasma und dann mit Linse 2 in die Blende  $B_1$  hinein abzubilden. Blende B bestimmt den Durchmesser des beobachteten Plasmabündels und damit das örtliche Auflösungsvermögen. Bei den im Experiment gewählten Abbildungsverhältnissen "sieht" das Empfängersystem ein Plasmabündel von etwa 0,7 mm Durchmesser. Dadurch ist auch gewährleistet, daß die beiden Beobachtungsöffnungen in den Kanalseitenwänden (Durchmesser 2 mm) nicht in den Strahlengang eintreten. Sie wirken also nicht als Blenden, so daß

es auf die Messungen ohne Einfluß bleibt, falls sich die beiden Öffnungen bei der Bewegung des Systems oder durch thermische Einwirkung ein wenig gegeneinander verschieben. Die Blende  $B_2$  sorgt dafür, daß das Bild der Wolframbandlampe und das Plasma unter demselben Raumwinkel gesehen werden. Dadurch ist Bedingung a) erfüllt.

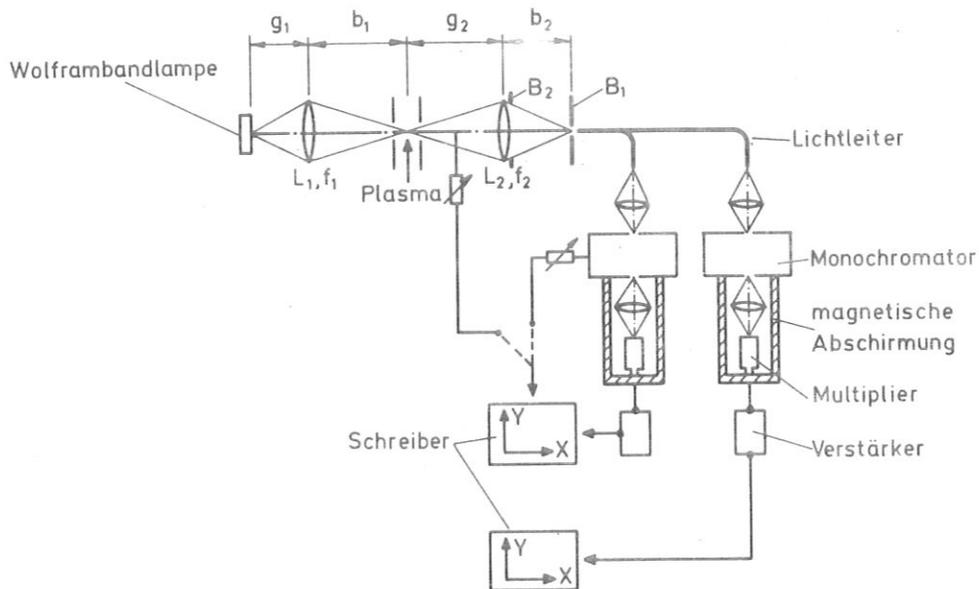


Bild 15      Optisches System

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = 186 \text{ mm} \\ g_1 &= g_2 = b_1 = b_2 = 372 \\ B_2 &= 30 \text{ mm } \varnothing \\ B_1 &= 0,7 \text{ mm } \varnothing \end{aligned}$$

Das Empfängersystem für die spektralen Intensitätsmessungen besteht aus zwei Monochromatoren (Carl Zeiss M 4 G II und Zeiss Jena), zwei Photo-Multipliern (E M I 9558), zwei Verstärkern und den Y-Eingängen zweier Koordinatenschreiber (Moseley 135 M). Mit den Monochromatoren wählen wir die Spektralbereiche der zu beobachtenden Strahlung aus. Die

Multipliiere arbeiten im linearen Bereich und liefern der Lichtintensität proportionale elektrische Signale, die verstärkt an die Y-Eingänge der beiden Schreiber gehen. Die Photokathoden der EMI 9558 Multiplier besitzen im ganzen sichtbaren Spektralbereich eine für unsere Anforderungen ausreichende Quantenausbeute. Die optische Verbindung zwischen dem feststehenden Empfängersystem und der beweglichen Schiene wird durch einen Lichtleiter hergestellt, dessen Fasern in zwei Stränge aufgespalten sind, die zu den beiden Monochromatoren führen. Die Fasern sind auf der dem Plasma zugewandten Seite rundgebündelt, an den Enden der beiden Stränge spaltförmig, damit die ankommende Strahlung mit möglichst wenig Verlusten in die Empfänger gelangt. Die X-Eingänge der Schreiber können mit einem der Potentiometer an der optischen Schiene oder mit Potentiometern an den Wellenlängenspindeln der Monochromatoren verbunden werden. Dadurch lassen sich wahlweise räumliche Intensitätsverteilungen oder spektrale Intensitätsverteilungen aufzeichnen.

#### 5.4 Betriebsdaten

In nachstehender Tabelle sind typische Betriebsdaten für das Experiment zusammengestellt.

Brennerspannung	50 V - 80 V
Brennerstrom	100 A - 200 A
Brennerleistung	5 kW - 16 kW
Strom über die Kanalelektroden	0,05 A - 10 A
An den Kanalelektroden anliegende Spannung	5 V - 20 V
Druck vor dem Brenner	7 atm - 9 atm
Argondurchflußmenge	3 g/sec - 10 g/sec
Strömungsgeschwindigkeit im Kanal	50 m/sec - 150 m/sec
Gastemperatur im Kanal	1500 °K - 2200 °K
Druck im Kanal	1 atm - 1,3 atm
Kaliumzusatz	0,3 %

## 5.5 Bemerkungen zur Durchführung der Experimente

Der Inbetriebnahme des Experiments mußte ein sorgfältiger Einbau des Meßkanals vorausgehen. Die Teile mußten, wegen der zu erwartenden starken thermischen Ausdehnung, mit genügend viel "Spiel" zusammengesetzt werden, ohne daß dadurch die Meßgenauigkeit oder die geometrischen Randbedingungen zu sehr beeinträchtigt werden durften. Die relativ komplizierten beweglichen Seitenwände waren bruchempfindlich. Durch Verklammerung mit Tantaldrähten konnten sie jedoch über Betriebsdauern von insgesamt etwa 15 Stunden funktionstüchtig erhalten werden.

Die Brenneranode befand sich auf Erdpotential. Deshalb durfte das Plasma keinen Kontakt mit den ebenfalls geerdeten Teilen des Gehäuses haben, da sonst ein Strom von der Brennerkathode durch das Plasma zum Gehäuse möglich gewesen wäre, der im Meßkanal die Messungen gestört hätte. Die metallischen Endteile der Apparatur, die wieder Kontakt mit dem Plasma hatten, wurden deshalb erdfrei gehalten. Der Strömungskanal zwischen diesen Endteilen und dem Meßkanal wurde mit durchgehenden isolierenden Aluminiumoxidrohren ausgekleidet.

An den zur thermischen Isolation vorhandenen Magnesiumoxidplatten zwischen Meßkanal und Metallgehäuse kondensierten in den kühleren Randzonen Kaliumdämpfe. Es wurde deshalb sorgfältig vermieden, daß die elektrischen Zuführungen vom Gehäuse zu den Elektroden mit den Magnesiumoxidteilen in Berührung kamen, um Kurz- oder Nebenschlüsse zu vermeiden. Der Meßkanal selbst war während des Experiments genügend heiß um eine Kondensation von Kaliumdämpfen (Kondensationspunkt von Kalium:  $1033^{\circ}\text{K}$ ) zu verhindern. Durch "Vor- bzw. Nachbrennen" der Apparatur ohne Kalium wurde zudem verhindert, daß es am Anfang oder Ende eines Experiments zu einem Kaliumniederschlag an den kritischen Teilen der Apparatur kam.

Zur Erzeugung der Elektrodenströme wurde pro Elektrodenpaar ein Netzgerät verwendet. Die Geräte waren elektrisch voneinander unabhängig. Zur Stromstabilisierung waren die Elektrodenpaare mit Vorwiderständen in Reihe geschaltet, deren Widerstand etwa das zwanzigfache des Plasmawiderstandes betrug. Widerstandsschwankungen bis zu einem Faktor zwei an den Elektrodenpaaren hatten so nur eine Stromänderung von weniger als fünf Prozent zur Folge.

Um die Selbstabsorption der Kaliumresonanzlinien in den kühleren Randschichten des Plasmas herabzusetzen, wurde als "Fensterspülung" reines

(kaltes) Argon durch die beiden Beobachtungsöffnungen an den Kanalwänden geblasen. Die Fensterspülung machte nicht mehr als fünf Prozent des gesamten Gasdurchsatzes aus.

Vor jeder Messung von räumlichen Intensitätsverteilungen wurde zunächst die Position des Meßkanals, d.h. die Lage der Elektrodenwände und Elektroden im heißen Zustand festgestellt. Dazu wurde die Optik so weit verschoben, daß die Elektrodenwand etwa die Hälfte der Beobachtungsöffnungen an den beweglichen Seitenwänden verdeckte. Auf einem Schirm an der Lichtleiterblende wurde mit Hilfe der Wolframbandlampe ein scharfes Schattenbild des Teils der Elektrodenwand entworfen, der durch die Beobachtungsöffnungen freigegeben wurde. Anhand der Kontur des Schattenbildes konnte dann die Elektrodenlage mit den Meßuhren genau bestimmt werden.

Zur Absolutmessung der Linienintensität wurden vor und nach dem Experiment Eichsignale mit der Wolframbandlampe bei den entsprechenden Wellenlängen aufgenommen. Dadurch konnte auch geprüft werden, ob die Beobachtungsfenster während des Experiments sauber geblieben waren.

## 6. Ergebnisse in Theorie und Experiment

Bei allen Ergebnissen, über die wir hier berichten, ist eine Gesamtteilchendichte des Kaliums von  $n_K = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  zugrundegelegt. Im Bereich  $1500 \text{ }^\circ\text{K} < T_e < 3000 \text{ }^\circ\text{K}$ , für den wir uns interessieren, entspricht dieser Kaliumteilchendichte die in Bild 16 gezeichnete Sahaelektronendichte. Auf das durch die Achsenabschnitte von Bild 16 definierte Gebiet innerhalb der  $n_e, T_e$ -Ebene wollen wir uns im folgenden beschränken. Die untere Elektronendichtegrenze für die Gültigkeit unserer Rechnungen werden wir aus Gründen des Rechenaufwandes i.a. sogar höher legen müssen als  $5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ . Dies kann in Kauf genommen werden, da uns aus Empfindlichkeitsgründen mit dem beschriebenen Empfängersystem ohnehin nur der Bereich  $n_e \gtrsim 5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  experimentell zugänglich ist und wir den für die Anwendung in MHD-Generatoren wichtigen Bereich  $n_e \gtrsim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  jedenfalls erfassen werden. Die Teilchendichte  $n_0$  im Grundzustand weicht bei den genannten Plasmabedingungen ungünstigstenfalls etwa 6 Prozent von der Gesamtteilchendichte ab. Wir können deshalb bei der Berechnung der quasistationären Besetzungsdichten (2,23) auf Gleichung (2,25) verzichten und mit guter Näherung  $n_0 = n_K = 10^{16} \text{ cm}^{-3} = \text{const}$  setzen.

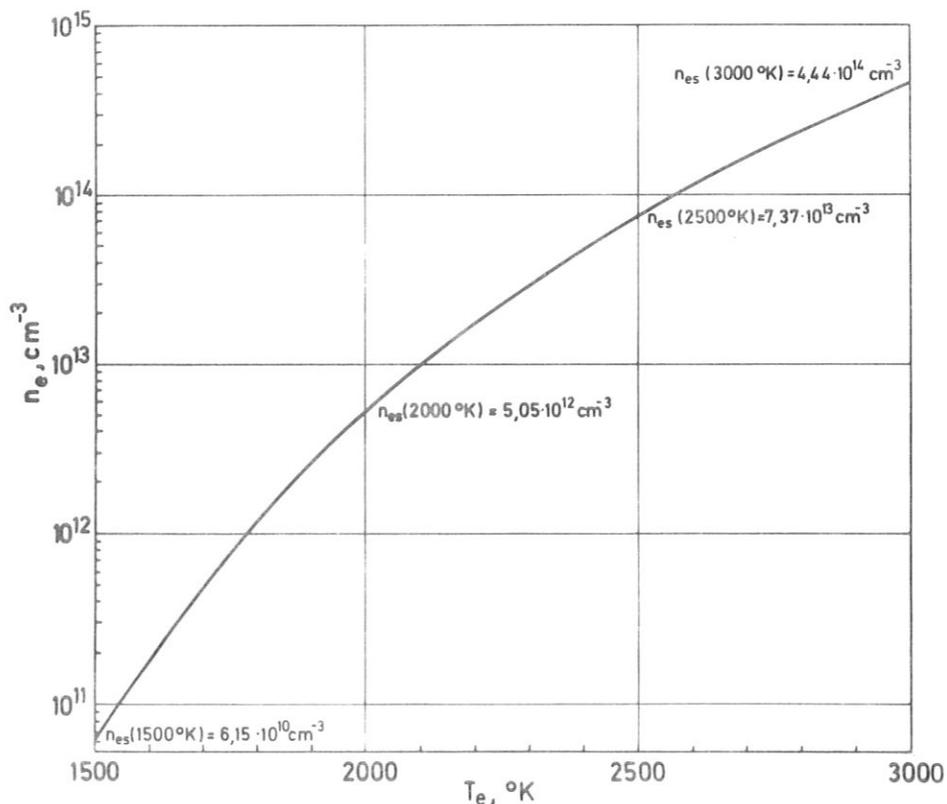


Bild 16 Sahaelektronendichte bei  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  Kaliumteilchendichte

In einer eindimensionalen Strömung konstanter Geschwindigkeit erscheint bei stationären Bedingungen die Relaxationsphase eingefroren. An der mathematischen Behandlung des Problems ändert sich gegenüber dem ruhenden instationären Plasma nichts (vgl. Gleichung (2,5) und (2,6)). Es handelt sich einfach um die Transformation  $t = x/v$ ;  $d/dt = vd/dx$ . Wenn im folgenden irgendwelche Parameter gegen den Ort  $x$  aufgetragen sind, so hat man sich das Plasma immer von links nach rechts strömend zu denken. Ist man daran gewöhnt, "zeitlich" zu denken, so kann man diese Bilder auch als Oszillogramme eines zeitlich veränderlichen Vorganges auffassen. Wir werden deshalb an der Abszisse dieser Bilder auch den Zeitmaßstab angeben

Unter dem Gleichgewichtszustand des Plasmas ist im weiteren der relaxierte Zustand des Plasmas gemeint, d.h.  $d/dx = 0$  für alle Parameter.

Wir wollen zunächst das rein stoßbestimmte Plasma numerisch untersuchen. Wie wir schon in Abschnitt 2.5 betont hatten, ist dieser Fall besonders instruktiv, da hier im Gleichgewichtszustand alle Besetzungsdichten der Saha- bzw. Boltzmannformel gehorchen. Abweichungen von der Saha- bzw. Boltzmannbesetzung treten im stoßbestimmten Plasma also ausschließlich in der Relaxationsphase auf. Anschließend werden wir das realistischere nicht ausschließlich stoßbestimmte Plasma numerisch und experimentell vergleichen. Die Verhältnisse sind in diesem Fall schwieriger, weil Abweichungen von der Saha- bzw. Boltzmannbesetzung sich als Folge einer Überlagerung von Strahlungs- und Relaxationseffekten ergeben.

## 6.1 Das stoßbestimmte Kaliumplasma als Modellfall

Bei den numerischen Rechnungen realisieren wir den stoßbestimmten Fall, indem wir alle Strahlungsübergangswahrscheinlichkeiten und Photorekombinationskoeffizienten im zu lösenden Gleichungssystem (2,20) gleich Null setzen. Die praktische Durchführung der Rechnungen erfordert zunächst eine geeignete Wahl der Dimension  $N$  des Gleichungssystems. Gehen wir gemäß Abschnitt 3.6 vor, so zeigt sich, daß  $N = 12$  z.B. noch nicht ausreicht, um in einem größeren Gebiet der  $n_e, T_e$ -Ebene Selbstkonsistenz in dem Sinne zu erreichen, daß die Besetzungsdichten  $n_p(n_e, T_e)$  für  $p \rightarrow 12$  sich einer Sahabesetzung  $n_{ps}(n_e, T_e)$  nähern. Erhöhen wir die Dimension des Gleichungssystems auf  $N = 18$ , so ergibt sich für die Besetzungsdichte des Niveaus 18 das in Bild 17

gezeichnete Ergebnis. Die Kurven markieren die Menge der Wertepaare  $(n_e, T_e)$ , für welche die berechnete Besetzungsdichte des Niveaus 18 um -1; -0,5; 0; +20; +50; +100 Prozent usw. bis zu einem Faktor  $10^4$  von der jeweiligen Sahabesetzung abweicht. Für die Wertepaare der Kurve  $n_{18} = n_{18s}$  ist das Plasma im Gleichgewicht. Diese Kurve ist im stoßbestimmten Fall identisch mit der Sahaelektronendichtekurve von Bild 16. Sie teilt die  $n_e, T_e$ -Ebene in eine Rekombinations- und eine Ionisationszone auf. In der gesamten Rekombinationszone weicht die berechnete Besetzungsdichte des Niveaus 18 um weniger als 1,5 Prozent von der jeweiligen Sahabesetzung ab. In diesem Gebiet ist die Lösung des Gleichungssystems also ohne Zweifel selbstkonsistent mit der Voraussetzung  $n_p = n_{ps}$  für  $p > 18$ . In der Ionisationsphase des Plasmas ist die Sahabesetzung des Niveaus 18 nicht so uneingeschränkt garantiert. Analytisch läßt sich dieser Sachverhalt, wie schon in Abschnitt 3.6 erwähnt, aus Gleichung (2,55) ablesen. Er ist aber auch physikalisch ohne weiteres verständlich: Wenn die Elektronendichte zu weit unter dem Gleichgewichtswert liegt, beginnt die Besetzung des Niveaus von tieferliegenden Energiezuständen her eine Rolle zu spielen.

Wir könnten nun die Dimension unseres Gleichungssystems weiter erhöhen, wollen dies aber aus Gründen des Rechenaufwandes nicht tun, sondern statt dessen den Parameterbereich einschränken, für den wir unsere Rechnungen als zuverlässig betrachten können. Als Gültigkeitsbereich wollen wir das nicht-punktierte Gebiet in Bild 17 ansehen, wobei die Wahl der unteren Grenzkurve natürlich je nach Genauigkeitsanspruch höher oder tiefer ausfallen könnte.

Im nicht-punktierten Gebiet von Bild 17 weicht die Besetzungsdichte des Niveaus 18 also um weniger als 1,5 Prozent nach unten (in der Rekombinationszone) und um weniger als 20 Prozent nach oben (in der Ionisationszone) von einer Sahabesetzung ab. Für die Spektroskopie würde das bedeuten, daß in einem rekombinierenden Plasma die Elektronendichtebestimmung aus der Besetzungsdichte des Niveaus 18 innerhalb eines (theoretischen!) Fehlers von etwa -1 Prozent möglich wäre. In der Ionisationsphase des Plasmas läge der Fehler innerhalb von  $+20/2 = 10$  Prozent.

Qualitativ wollen wir noch diskutieren, wie sich das Ergebnis bei einer Erhöhung der Dimension des Gleichungssystems auf, sagen wir,  $N = \tilde{N} > 18$  ändern würde. Alle mit  $N = 18$  errechneten Koeffizienten  $a_p(T_e)$ ,  $p=1, \dots, 18$  von Gleichung (2,47) würden kleiner ausfallen, da die Kopplung der Niveaus

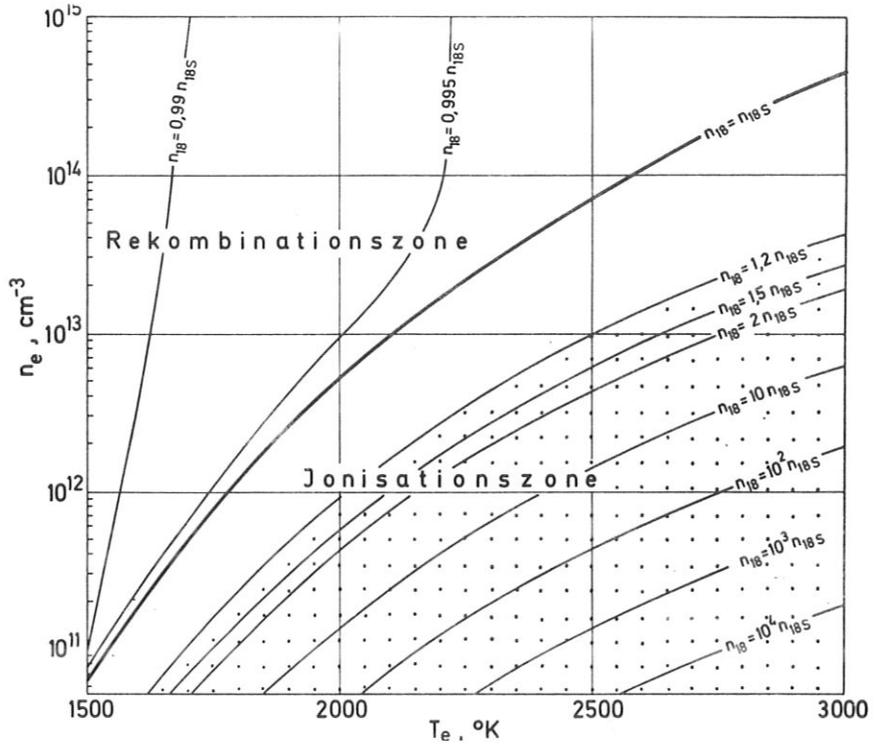


Bild 17

Kurven gleicher Abweichung von der Saha-besetzung für das Niveau 18 (stoßbestimmtes Plasma)

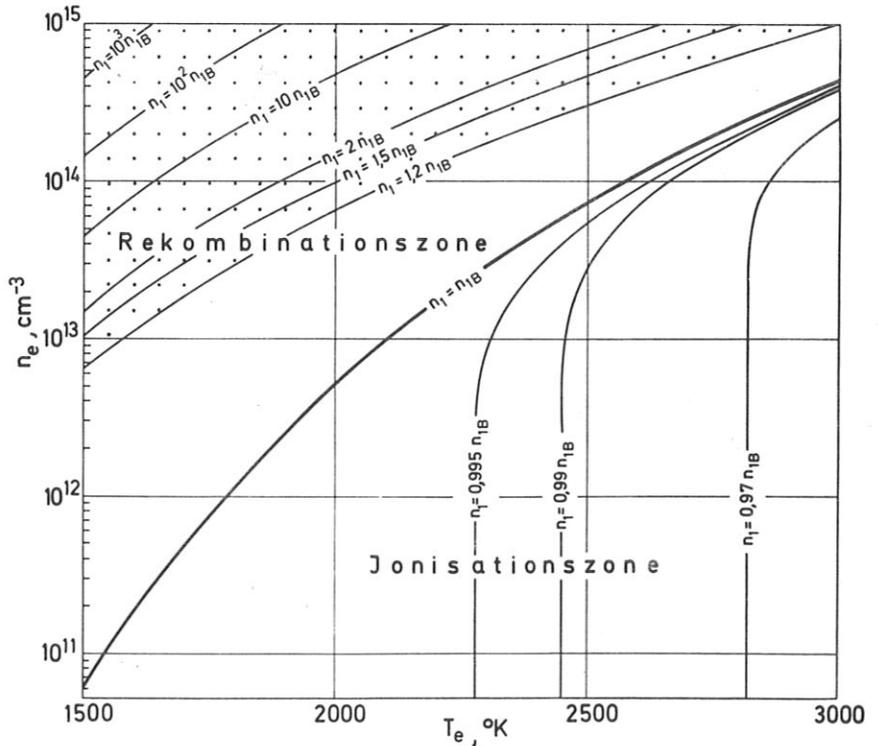


Bild 18

Kurven gleicher Abweichung von der Boltzmannbesetzung für das Niveau 1 (stoßbestimmtes Plasma)

an das Kontinuum durch die Bedingung  $n_p \equiv n_{ps}$  für  $p > 18$  künstlich verstärkt war. Nach Gleichung (2,48) würden die Koeffizienten  $b_p(T_e)$   $p=1, \dots, 18$  dementsprechend größer ausfallen. Für das Ergebnis von Bild 17 würde das bedeuten, daß die Kurven etwas näher an die Gleichgewichtskurve  $n_{18} = n_{18s}$  heranrücken würden, denn ihr Abstand ist nach (2,55) durch den Koeffizienten  $b_{18}(T_e)$  bestimmt. Die oben angegebenen Fehlergrenzen für die Elektronendichtemessung mit dem Niveau 18 würden sich um das Verhältnis  $V = b_{18}^{(\tilde{N})}(T_e) / b_{18}^{(N)}(T_e)$  erhöhen. In der Rekombinationsphase des Plasmas würde aber selbst ein Verhältnis von z.B.  $V = 40$ , in der Ionisationsphase immerhin noch ein Verhältnis von  $V = 3$  die akzeptable Fehlergrenze von 30 Prozent für die Elektronendichtemessung ergeben. Natürlich wäre zu hoffen, daß wir durch Erhöhung der Dimension des Gleichungssystems ein Niveau  $p > 18$  finden würden, das die Elektronendichtebestimmung in der Ionisationszone in einem breiteren Parameterbereich als dem in Bild 17 gezeichneten erlauben würde. Das hätte aber keine praktische Bedeutung, da wir mit den Strahlungsübergängen von den Kaliumniveaus  $12S_{1/2}$ ,  $10D_{3/2, 5/2}$ , die dem Niveau 18 der Rechnung entsprechen, ohnehin nahe an der Grenze der experimentellen Möglichkeiten liegen werden.

Wie stellt sich nun im stoßbestimmten Fall die Besetzungsdichte  $n_1$  des Kaliumresonanzniveaus ein, die für unsere Elektronentemperaturmessung von so großer Wichtigkeit ist? Wir können das Ergebnis anhand von Bild 18 diskutieren. Hier sind in Analogie zu Bild 17 Kurven gezeichnet, die die Menge aller Wertepaare  $(n_e, T_e)$  markieren, für welche die Besetzungsdichte des Niveaus 1 um -3; -1; -0,5; 0; +20; +50; +100 Prozent usw. bis zu einem Faktor  $10^3$  von der jeweiligen Boltzmannbesetzung bezüglich der Teilchendichte im Grundzustand abweicht. Auf der Kurve  $n_1 = n_{1B}$  ist das Plasma im Gleichgewicht. Sie ist wieder identisch mit der Sahaelektronendichtekurve von Bild 16, welche die  $n_e, T_e$ -Ebene in eine Rekombinations- und Ionisationszone aufteilt. Für beliebige  $(n_e, T_e)$  aus dem nicht-punktierten Gebiet von Bild 18 weicht die Besetzungsdichte des Niveaus 1 um weniger als 5 Prozent nach unten (in der Ionisationsphase) und um weniger als 20 Prozent nach oben (in der Rekombinationsphase) von einer Boltzmannbesetzung ab. Das bedeutet, daß wir die Elektronentemperatur innerhalb eines (theoretischen) Fehlers von  $-10^\circ K$  in der ganzen Ionisationszone und innerhalb eines (theoretischen) Fehlers von  $+50^\circ K$  im nicht-punktierten Teil der Rekombinationszone ermitteln könnten. Wenn die Elektronendichte zu hoch über der Gleichgewichtsdichte liegt, beginnt die Besetzung des Niveaus vom Kontinuum her eine dominierende Rolle zu spielen, so daß die Besetzungsdichte

des Niveaus 1 als "Thermometer" im Sinne von Abschnitt 2.3 unbrauchbar wird.

Eine Erhöhung der Dimension des Gleichungssystems würde sich, was die Fehlergrenzen bei der Temperaturbestimmung betrifft, günstig auswirken, da die Kopplung der Niveaus an das Kontinuum dann eher noch schwächer wäre.

Bislang haben wir die für uns wichtigen Resultate der Bilder 17 und 18 unter der stillschweigend gemachten Voraussetzung diskutiert, daß der quasistationäre Ansatz die Relaxationsvorgänge bei unseren Plasmabedingungen überhaupt sinnvoll beschreibt. Zwar hatten die qualitativen Überlegungen in Abschnitt 2.4 gezeigt, daß dieser Ansatz eine vernünftige Näherung erwarten läßt. Ein endgültiges Urteil über die Qualität der quasistationären Näherung kann aber immer nur auf Grund der quantitativen Durchführung und im Zusammenhang mit einem definierten Problem gegeben werden.

Voraussetzung für eine gute Näherung durch den quasistationären Ansatz war die Gültigkeit der Ungleichung (2,28) und hierfür waren die Bedingungen (2,31a), (2,32), (2,33) und (2,34) hinreichend. Zur Prüfung dieser Bedingungen brauchen wir zunächst die in (2,17) definierten Zeitgrößen  $\tau_p$ , die sich im stoßbestimmten Fall wie folgt aus den Elektronenstoßkoeffizienten berechnen

$$\tau_p = \frac{1}{n_e (K_{pe} + \sum_{q \neq p} K_{pq})} \quad (6,1)$$

In Bild 19 ist für verschiedene p das Produkt  $n_e \cdot \tau_p$  aufgetragen. Die  $\tau_p$  sind in unserem Temperaturbereich schwache Funktionen der Elektronentemperatur. Sie bilden i.a. eine fallende Folge, d.h.  $\tau_p > \tau_{p+1}$ . Bei einer Elektronendichte von  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , z.B., liegen die  $\tau_p$  im Bereich zwischen 10 psec und 10  $\mu$ sec.

Wir wollen nun zuerst prüfen, ob die Bedingung (2,31a) -  $\tau_p / |\tau_e| \ll 1$  - erfüllt ist. In Abschnitt 2.4 hatten wir gesehen, daß sie i.a. erfüllt ist, wenn die Besetzungsdichten der angeregten Niveaus sehr viel kleiner sind als die Elektronendichte. Wir wollen nun die Bedingung an Hand unserer numerischen Ergebnisse prüfen. Nach (2,17) gilt

$$\dot{n}_e = - \frac{n_e}{\tau_e} \quad (6,2)$$

wobei die Zeitgröße  $\tau_e$  im stoßbestimmten Fall gegeben ist durch

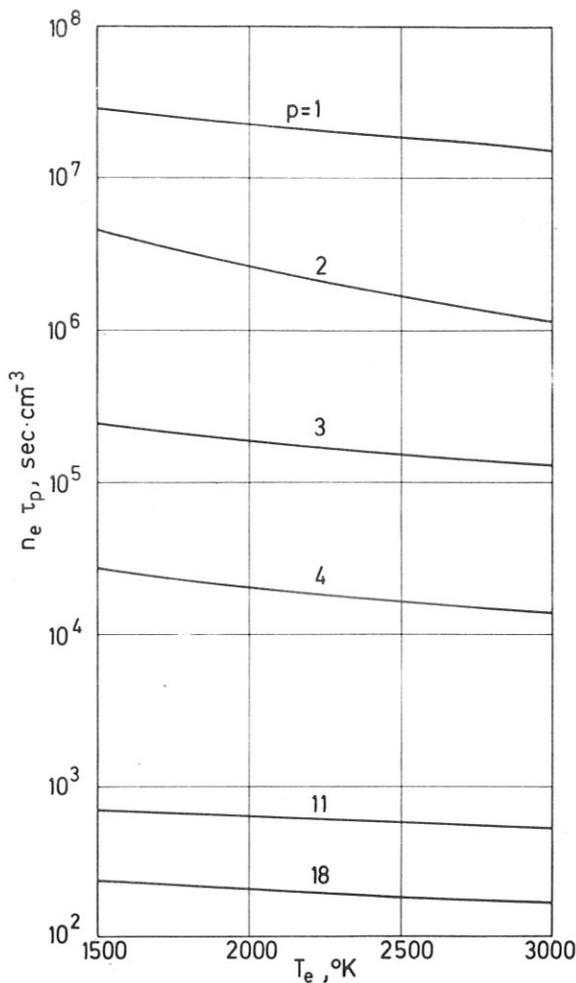


Bild 19  $n_e \cdot \tau_p$  als Funktion der Elektronentemperatur für verschiedene  $p$

$$\tau_e = \frac{1}{n_e^2 \cdot \sum_{q \geq 0} K_{eq} - \sum_{q \geq 0} n_q K_{qe}} \quad (6,3)$$

In Bild 20 haben wir in die  $n_e, T_e$ -Ebene Kurven eingezeichnet, auf denen das Verhältnis  $|\tau_1 / \tau_e|$  jeweils konstant ist. Auf der Gleichgewichtskurve ist  $|\tau_p / \tau_e| = 0$  für alle  $p$ , da wegen (6,2)  $|\tau_e| \rightarrow \infty$  geht für  $|\dot{n}_e| \rightarrow 0$ . In einem breiten Bereich links und rechts der Gleichgewichtskurve ist  $|\tau_1 / \tau_e| < 10^{-1}$ . Sehen wir  $|\tau_1 / \tau_e| = 10^{-1}$  als Grenze für die Bedingung  $|\tau_1 / \tau_e| \ll 1$  an, so ist sie nur in den beiden punktierten Teilen von Bild 20 nicht mehr erfüllt, und die Rechnung zeigt, in Übereinstimmung mit den qualitativen Überlegungen von Abschnitt 2.4, daß hier  $n_1 \ll n_e$  nicht mehr erfüllt ist. Berücksichtigen wir nun noch, daß nach dem Ergebnis von Bild 19  $\tau_p < \tau_1$  für alle  $p > 1$  ist, so können wir festhalten, daß die Bedingung  $|\tau_p / \tau_e| \ll 1$  im nicht-punktierten  $n_e, T_e$ -Gebiet von Bild 20 für alle  $p$  gut erfüllt ist.

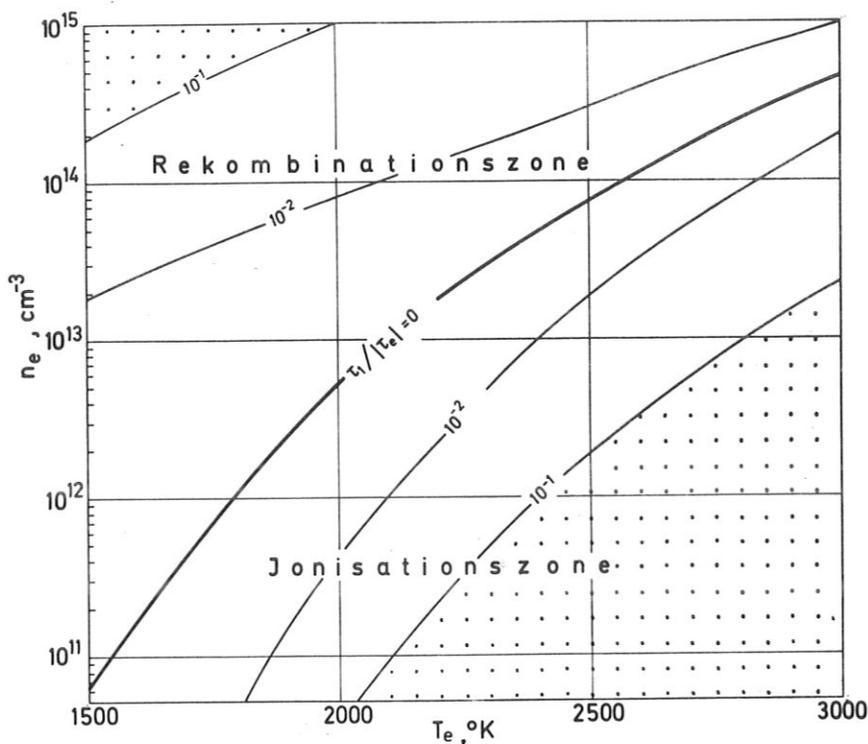


Bild 20 Kurven, auf denen das Verhältnis  $\tau_1 / \tau_e$  den angegebenen, konstanten Wert hat

Die zweite Bedingung für eine gute Näherung durch den quasistationären Ansatz, die Bedingung (2,32)  $|\dot{n}_0 \cdot \tau_p| \ll n_0$ , ist in unseren Parameterbereichen ganz ohne Zweifel erfüllt, weil, wie bereits mehrfach betont, die Teilchendichte im Grundzustand nahezu gleich ist der Gesamtteilchendichte des Kaliums.

Es bleiben also noch die beiden Bedingungen

$$|\dot{a}_p \cdot \tau_p| \ll a_p \quad p = 1, \dots, N$$

$$|\dot{b}_p \cdot \tau_p| \ll b_p$$

zu untersuchen. Im stoßbestimmten Fall sind die beiden Koeffizienten  $a_p, b_p$  nur Funktionen der Elektronentemperatur, es gilt also

$$\dot{a}_p \cdot \tau_p = \frac{da_p}{dT_e} \cdot T_e \tau_p \quad ; \quad \text{für } b_p \text{ analog} \quad (6,4)$$

Folglich sind die beiden Bedingungen erfüllt, wenn gilt

$$|\dot{T}_e| \ll \frac{1}{\tau_p} \cdot \frac{1}{|d \ln a_p / dT_e|}$$

$$p = 1, \dots, N \quad (6,5)$$

$$|\dot{T}_e| \ll \frac{1}{\tau_p} \cdot \frac{1}{|d \ln b_p / dT_e|}$$

Die Elektronentemperaturänderungen in der Relaxationsphase dürfen also nicht beliebig schnell erfolgen, wenn die quasistationäre Näherung den Vorgang gut beschreiben soll. In Tabelle 6.1 sind die Koeffizienten  $a_p, b_p$  für verschiedene Elektronentemperaturen ausgedrückt. In den Bildern 21 und 22 ist für einige der Koeffizienten die  $T_e$ -Abhängigkeit graphisch wiedergegeben. Aus einem Vergleich der verschiedenen Steigungen der Kurven und aus den  $\tau_p$  von Bild 19 ergibt sich, daß die obere Grenze der "zulässigen" Elektronentemperaturänderungen durch

$$|\dot{T}_e| \ll \frac{1}{\tau_1} \cdot \frac{1}{|d \ln b_1 / dT_e|} \quad (6,6)$$

gegeben ist, d.h., wenn (6,6) erfüllt ist, sind die Ungleichungen (6,5) für alle  $a_p, b_p$  erfüllt. Aus der graphisch ermittelten Steigung erhalten wir schließlich

$$|\dot{T}_e| \ll \frac{n_e}{2,8 \cdot 10^7} \cdot \frac{1}{7,5 \cdot 10^{-3}} \approx 5 \cdot 10^{-6} \cdot n_e \left[ \frac{^\circ K}{\text{sec}} \right] \quad (6,7)$$

$n_e \text{ in } \text{cm}^{-3}$

Bei einer Elektronendichte von  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$  heißt das z.B., daß  $|\dot{T}_e| \ll 5 \cdot 10^7 \text{ }^\circ\text{K/sec} = 50 \text{ }^\circ\text{K}/\mu\text{sec}$  sein muß, wenn man die Ergebnisse der quasistationären Theorie vorbehaltlos als gute Näherung ansehen will. Auf ein strömendes Plasma mit der für unser Experiment typischen Strömungsgeschwindigkeit von 100 m/sec angewandt, würde dies bedeuten, daß bei  $n_e = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  ab Elektronentemperaturgradienten über  $50 \text{ }^\circ\text{K/mm}$  Vorsicht geboten wäre. Wir werden dieses Problem zum Ende dieses Abschnitts noch einmal ansprechen, wollen aber zuerst als Beispiel einen Relaxationsvorgang explizit quasistationär durchrechnen:

Dazu nehmen wir in einem strömenden Plasma ( $v = 10^4 \text{ cm/sec}$ ) in Strömungsrichtung ein sinusoidales Elektronentemperaturprofil an (Bild 24a), das wir uns durch irgend eine experimentelle Anordnung erzeugt denken.

TE = 1.5000E+03

P	A(P)	B(P)
1	5.43E-16	1.18E-05
2	1.31E-15	8.19E-09
3	6.16E-18	1.58E-10
4	9.09E-18	1.97E-11
5	5.85E-18	1.23E-11
6	1.08E-18	2.06E-12
7	1.48E-18	1.11E-12
8	1.21E-18	8.67E-13
9	3.39E-19	2.29E-13
10	3.38E-18	8.01E-13
11	1.83E-19	4.29E-14
12	6.20E-19	9.53E-14
13	1.14E-19	1.73E-14
14	4.25E-19	3.14E-14
15	8.39E-20	6.24E-15
16	3.23E-19	8.39E-15
17	6.89E-20	1.83E-15
18	1.24E-19	7.37E-16

TE = 2.0000E+03

P	A(P)	B(P)
1	1.26E-16	2.65E-04
2	3.03E-17	1.28E-06
3	2.11E-18	5.39E-08
4	2.38E-18	1.04E-08
5	1.77E-18	7.60E-09
6	3.96E-19	1.58E-09
7	5.19E-19	9.76E-10
8	4.62E-19	8.30E-10
9	1.42E-19	2.45E-10
10	1.30E-18	8.77E-10
11	7.91E-20	5.28E-11
12	2.75E-19	1.23E-10
13	5.35E-20	2.37E-11
14	1.98E-19	4.40E-11
15	4.07E-20	9.11E-12
16	1.56E-19	1.24E-11
17	3.41E-20	2.77E-12
18	6.21E-20	1.13E-12

TE = 2.5000E+03

P	A(P)	B(P)
1	3.76E-17	1.69E-03
2	9.36E-18	2.38E-05
3	8.86E-19	1.58E-06
4	8.82E-19	3.69E-07
5	7.17E-19	2.93E-07
6	1.81E-19	6.92E-08
7	2.38E-19	4.55E-08
8	2.23E-19	4.07E-08
9	7.30E-20	1.28E-08
10	6.57E-19	4.62E-08
11	4.27E-20	2.98E-09
12	1.52E-19	7.12E-09
13	3.06E-20	1.42E-09
14	1.15E-19	2.67E-09
15	2.41E-20	5.67E-10
16	9.34E-20	7.78E-10
17	2.06E-20	1.76E-10
18	3.79E-20	7.21E-11

TE = 3.0000E+03

P	A(P)	B(P)
1	1.33E-17	5.68E-03
2	3.55E-18	1.49E-04
3	4.24E-19	1.32E-05
4	4.07E-19	3.41E-06
5	3.51E-19	2.87E-06
6	9.62E-20	7.38E-07
7	1.29E-19	5.00E-07
8	1.25E-19	4.64E-07
9	4.28E-20	1.53E-07
10	3.87E-19	5.48E-07
11	2.63E-20	3.72E-08
12	9.62E-20	9.01E-08
13	1.98E-20	1.84E-08
14	7.50E-20	3.48E-08
15	1.60E-20	7.50E-09
16	6.27E-20	1.03E-08
17	1.39E-20	2.35E-09
18	2.59E-20	9.69E-10

Tabelle 6.1

Koeffizienten  $a_p$  und  $b_p$  für verschiedene Elektronentemperaturen  $T_e$

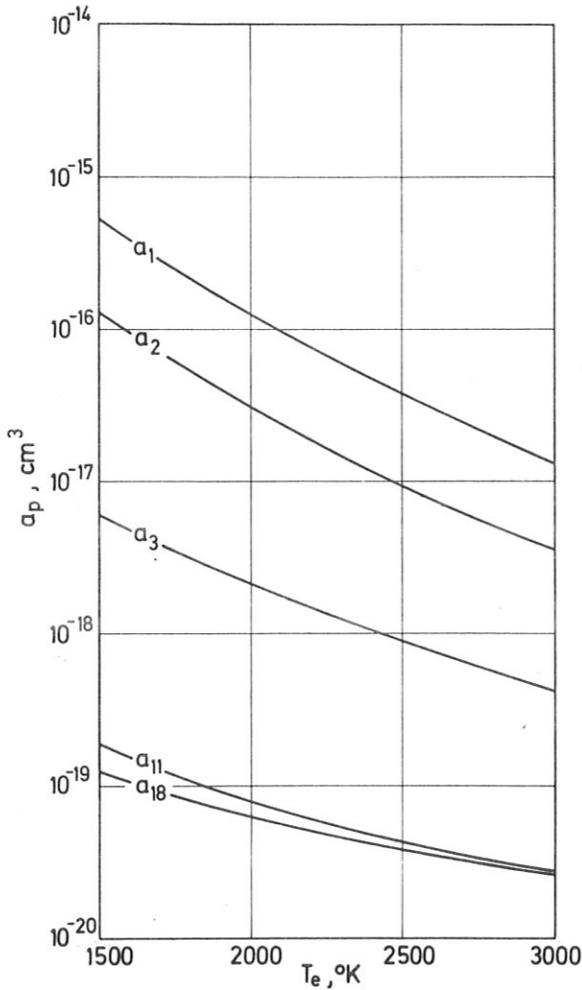


Bild 21  $a_p(T_e)$  für verschiedene  $p$

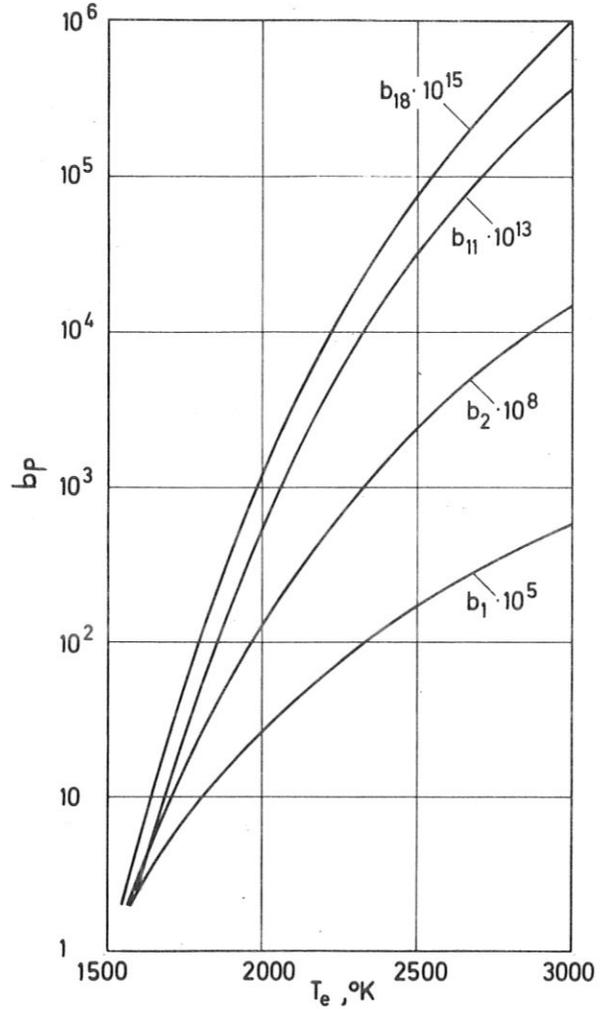


Bild 22  $b_p(T_e)$  für verschiedene  $p$

Das Plasma durchströmt das ganze Profil in 0,6 msec. Am Ort  $x = 0$  sei das Plasma noch im Gleichgewicht. Berechnen wollen wir in quasistationärer Näherung, wie die Elektronendichte und die Besetzungsdichten der angeregten Niveaus sich zu diesem Temperaturprofil einstellen.

Mit den in Tabelle 6.1 angegebenen Koeffizienten  $a_p$ ,  $b_p$  können wir zunächst die in Gl. (2,24) definierten formalen Rekombinations- und Ionisationskoeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  berechnen, die im stoßbestimmten Fall nur von der Elektronentemperatur abhängen und deshalb über die Gleichgewichtsbeziehung (2,56) miteinander verknüpft sind. In Bild 23 ist das Ergebnis für den Rekombinationskoeffizienten  $\alpha(T_e)$  wiedergegeben. Zum Vergleich ist der Verlauf des Rekombinationskoeffizienten angegeben, den COOL und

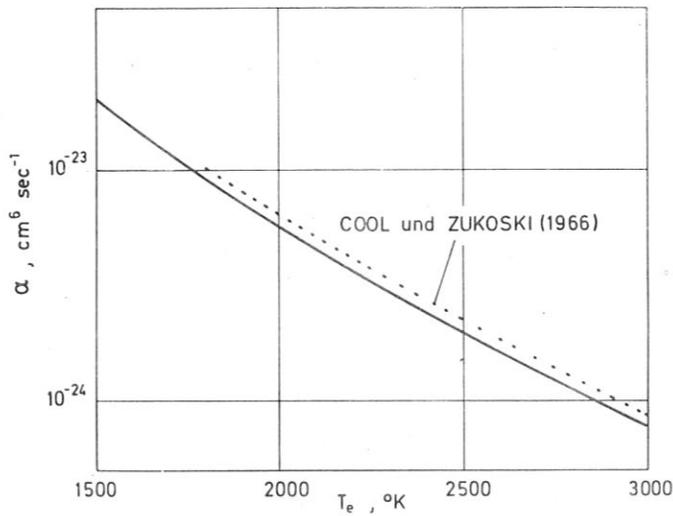


Bild 23 Rekombinationskoeffizient  $\alpha(T_e)$  der quasi-stationären Näherung für das stoßbestimmte Kaliumplasma

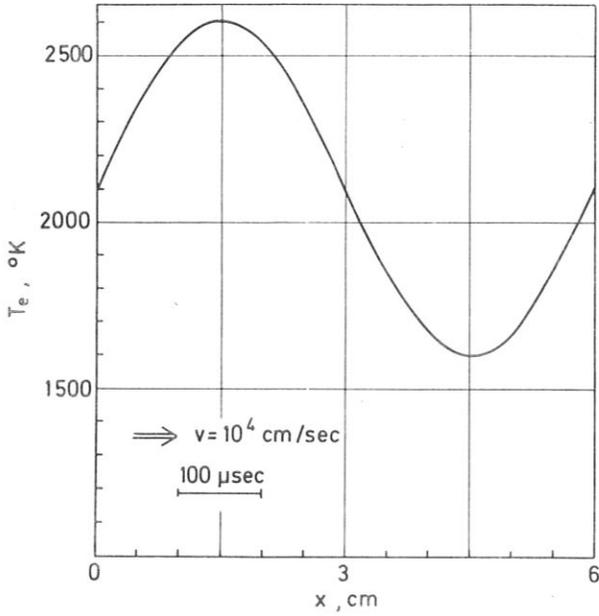
ZUKOSKI (1966) nach einem Verfahren von BYRON, BORTZ und RUSSELL (1963) berechnet haben, das nicht auf dem quasistationären Ansatz beruht. Denkt man an einige Annahmen, die bei diesem Verfahren gemacht werden müssen, so ist die gute Übereinstimmung überraschend, trotz der gleichen Wirkungsquerschnitte, auf denen beide Ergebnisse beruhen.

Mit dem Rekombinationskoeffizienten  $\alpha(T_e)$  können wir nun aus der Differentialgleichung für die Elektronendichte (2,57) für das vorgegebene  $T_e(x)$  die zugehörige Verteilung  $n_e(x)$  berechnen. Das Ergebnis der numerischen Integration ist in Bild 24b wiedergegeben. Zum Vergleich ist gestrichelt die Sahaelektronendichteverteilung eingezeichnet, die dem vorgegebenen  $T_e(x)$  von Bild 24a entsprechen würde.

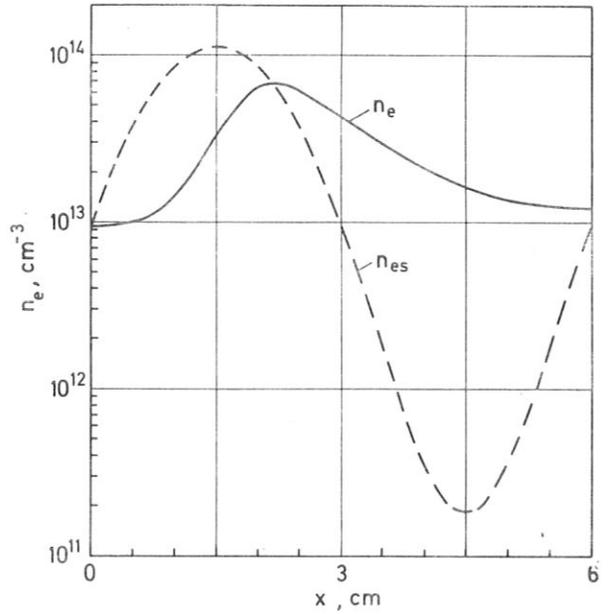
Die Verteilungen der Besetzungsdichten erhalten wir aus Gl.(2,47) durch Einsetzen von  $T_e(x)$  und  $n_e(x)$

$$n_p(x) = a_p(T_e(x)) \cdot n_e^2(x) + b_p(T_e(x)) \cdot n_0$$

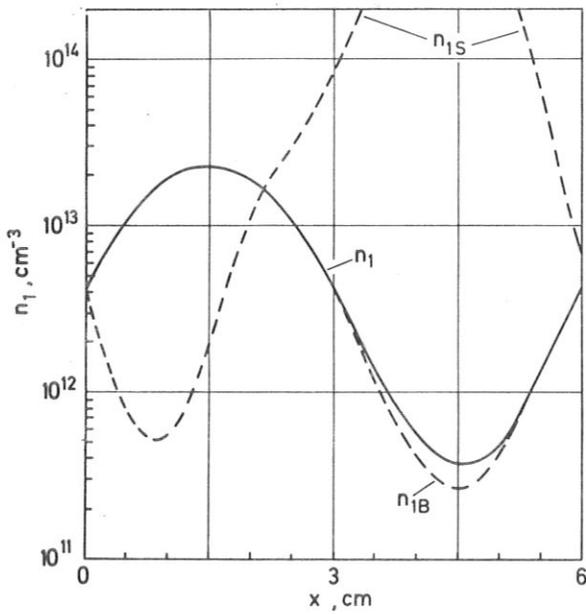
In den Bildern 24 c bis h ist das Ergebnis für verschiedene Energieniveaus aufgetragen. Zum Vergleich ist eingezeichnet, welche Boltzmannbesetzung



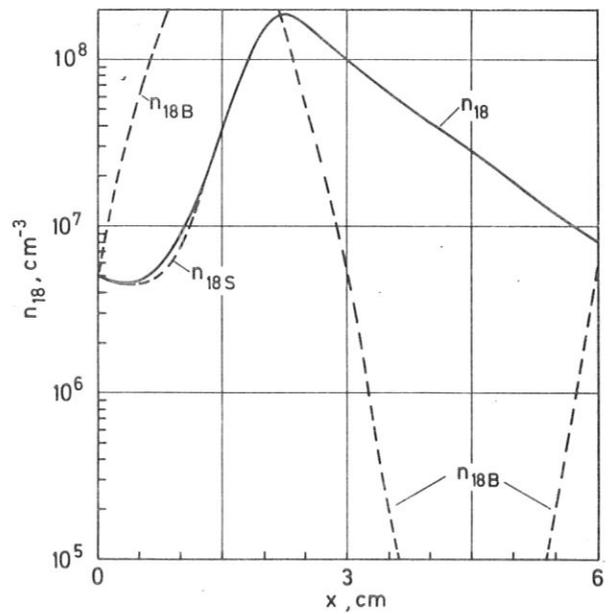
a)



b)

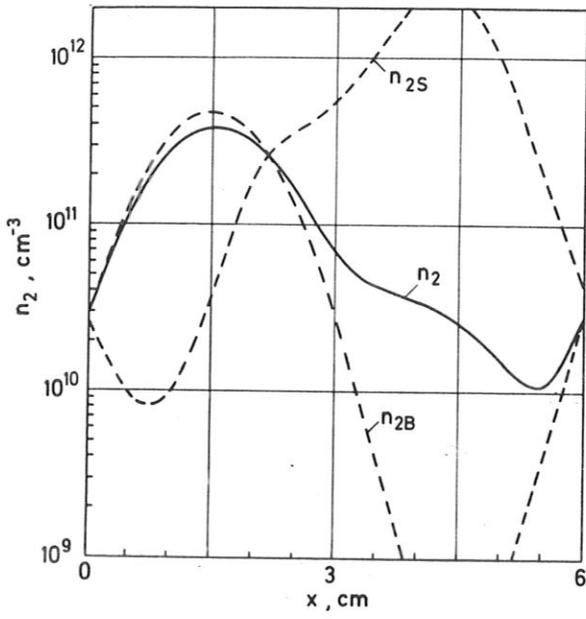


c)

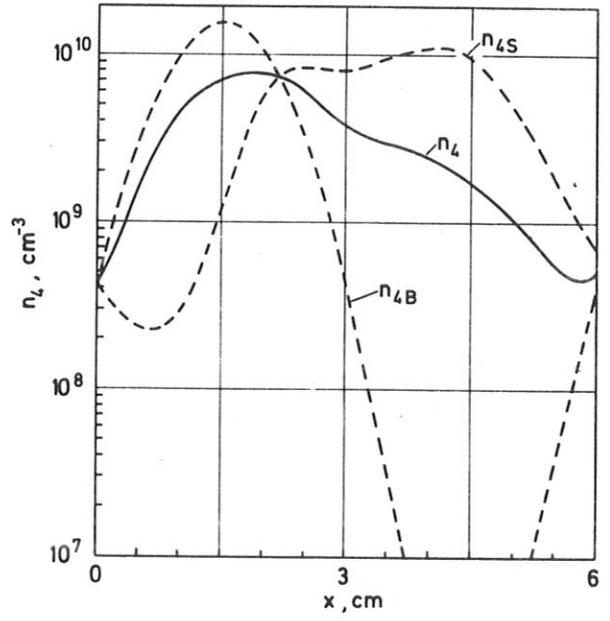


d)

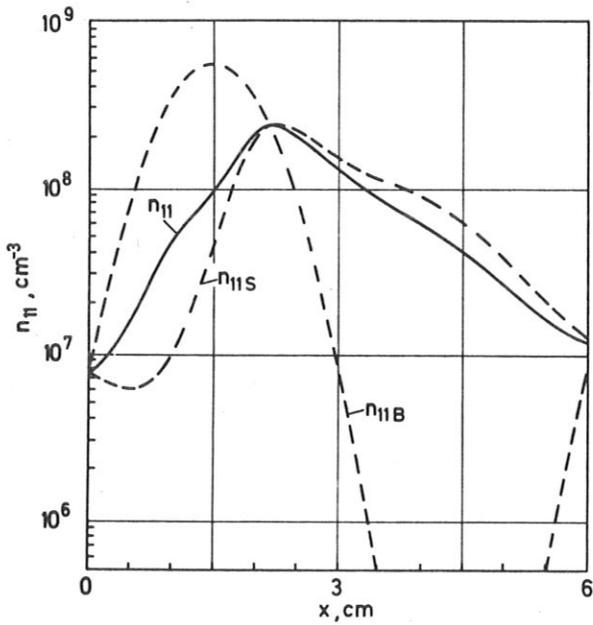
Bild 24 Beispiel zur Berechnung eines Relaxationsproblems in quasi-stationärer Näherung: Das Elektronentemperaturprofil von a) wird vorgegeben. Daraus berechnen sich die in b) durchgezogen gezeichnete Elektronendichteverteilung, sowie die in c) bis h) durchgezogen gezeichneten Besetzungsdichteverteilungen



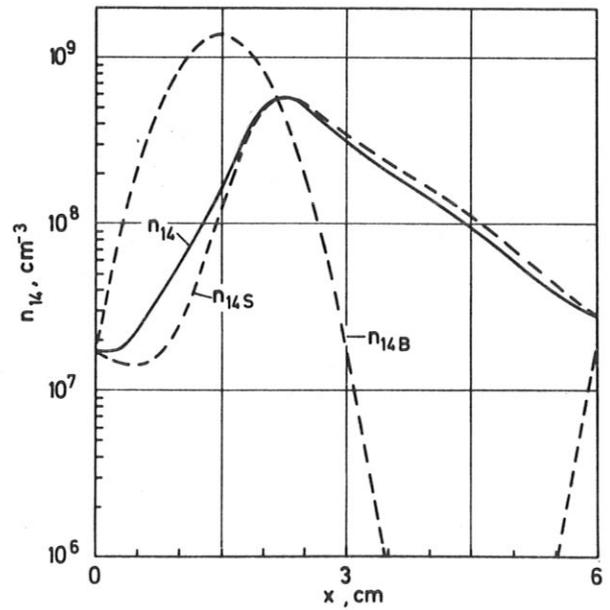
e)



f)



g)



h)

Bild 24 e) - h)

bezüglich des Grundzustandes der vorgegebenen Temperaturverteilung entspräche (gestrichelte Kurven mit dem Index B). Ferner ist - ebenfalls gestrichelt - eingezeichnet, welche Sahabesetzung der errechneten Elektronendichteverteilung entspräche. Die Bilder 24c und d zeigen, was wir aufgrund der Diskussion zu Beginn dieses Abschnitts bereits erwarten: Die Besetzung des Niveaus 1 (Resonanzniveau) bleibt im ganzen Bereich sehr nahe einer Boltzmannbesetzung bezüglich des Grundzustandes. Nur in der Rekombinationsphase, bei der die Elektronendichte maximal um nahezu 2 Größenordnungen über der Gleichgewichtsdichte liegt, "spürt" die Besetzung des Niveaus 1 merklich etwas vom Nichtgleichgewicht. Eine Temperaturbestimmung aus der Besetzung des Resonanzniveaus würde die Charakteristik des Temperaturprofils im ganzen Bereich richtig wiedergeben und lediglich in der zweiten Halbwelle quantitativ etwas zu hohe Temperaturen liefern (maximaler Fehler + 100 °K). Die Besetzung des Niveaus 18 andererseits stimmt fast im ganzen betrachteten Bereich nahezu identisch mit der entsprechenden Sahabesetzung überein. Die Elektronendichtebestimmung aus der Besetzung dieses Niveaus würde die "tatsächliche" Elektronendichteverteilung von Bild 24b mit einer Abweichung von weniger als 5 Prozent wiedergeben. Teils erhebliche Abweichungen sowohl von der Sahabesetzung als auch von einer Boltzmannbesetzung bezüglich des Grundzustandes zeigen hingegen die Energieniveaus  $1 < p \leq 14$ . (Bild 24e, f, g, h). Die Besetzungen liegen, wie schon aus den allgemeinen Überlegungen von Abschnitt 2.5 (Ungleichung 2,58) folgte, irgendwo zwischen einer Sahabesetzung und einer Boltzmannbesetzung. Dabei ist folgende Tendenz festzustellen: Je weiter wir uns im Termschema vom Grundzustand entfernen desto mehr weichen die Besetzungen von einer Boltzmannbesetzung bezüglich des Grundzustandes ab und nähern sich einer Sahabesetzung. Während das Resonanzniveau 1 in unserem Beispiel noch mit guter Näherung eine Boltzmannbesetzung aufweist und folglich zur Spektroskopie brauchbar wäre, zeigt schon die Besetzung des Niveaus 2 einen sehr komplizierten Verlauf, dessen Charakteristik weder mit dem Elektronentemperaturprofil noch mit dem Elektronendichteprofil der Bilder 24a und b viel Ähnlichkeit besitzt. Erst die Besetzung des Niveaus 11 zeigt wieder einen Verlauf, dessen Charakteristik grob derjenigen der Elektronendichteverteilung entspricht. Welche sinnlosen Resultate z.B. eine Temperaturbestimmung aus dem Besetzungsverhältnis der Niveaus 4 und 2 erbringen würde, findet man in Bild 25 demonstriert. Hier ist die Verteilung der Besetzungstemperatur  $T_{42}$  (Definition:  $n_4/n_2 = g_4/g_2 \exp(-E_{42}/k \cdot T_{42})$ ) aufgetragen, wie sie sich aus den Bildern 24e

und  $f$  berechnet. Die Charakteristik dieser Verteilung besitzt, wie man sieht, keine Ähnlichkeit mehr mit der vorgegebenen Elektronentemperaturverteilung.

Die Bilder 24b bis h zeigen das Relaxationsproblem, das wir uns vorgegeben haben, in quasistationärer Näherung. Selbstverständlich haben wir die Parameter unserer Aufgabe so gewählt, daß die quasistationäre Näherung auch tatsächlich eine gute Näherung darstellt. Das geht einmal daraus hervor, daß alle Wertepaare  $n_e(x), T_e(x)$  innerhalb des nichtschraffierten Bereiches von Bild 20 liegen und wir mit dem vorgegebenen  $T_e(x)$  bei einer Strömungsgeschwindigkeit von  $10^4$  cm/sec die Bedingung (6,7) nicht verletzen. Zum anderen könnten wir nun, nachdem die Lösung vorliegt, die Selbstkonsistenzbedingung (2,28) auch dadurch prüfen, daß wir die  $\dot{n}_p$  (d.h.  $v \frac{d}{dx} n_p(x)$ ) numerisch oder graphisch ermitteln.

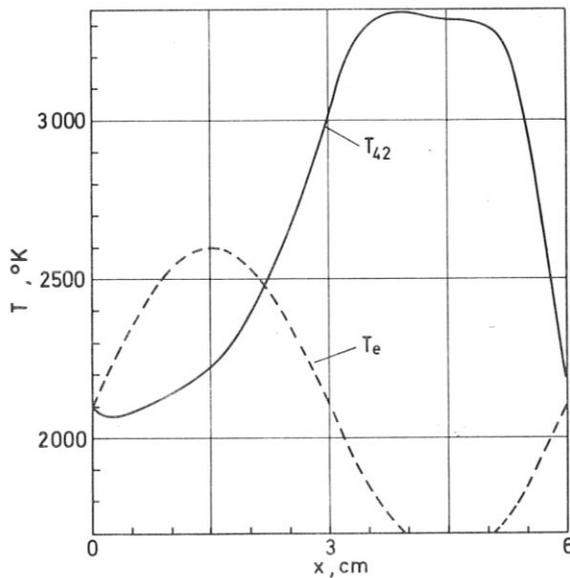


Bild 25 Besetzungstemperatur  $T_{42}$  im Vergleich zur vorgegebenen Elektronentemperatur

Was geschieht nun, wenn wir in unserem Beispiel von Bild 24 den Zeitmaßstab um eine Größenordnung verkürzen, also z.B. eine höhere Strömungsgeschwindigkeit zulassen, oder die Intervalllänge für die Elektronentemperaturänderung verkürzen? Natürlich können wir das Problem nach wie vor quasistationär durchrechnen (Bild 26a bis d). An Bild 26c können wir aber ab-

lesen, daß die Selbstkonsistenzbedingung (2,28) für das Niveau 1 nicht mehr erfüllt ist: An der Stelle  $x = 0$  ist  $v \cdot \partial n_1^{(0)} / \partial x \approx 0,5 n_1^{(0)} / \tau_1$ , also von derselben Größenordnung. Wie steht es in diesem Fall um den physikalischen Wert der quasistationären Ergebnisse?

Zur Beantwortung dieser Frage wollen wir zwei Schritte des in Abschnitt 2.4 vorgeschlagenen Iterationsverfahrens durchführen. Gehen wir mit den Funktionen  $n_e^{(0)}(x), n_2^{(0)}(x), \dots, n_{18}^{(0)}(x)$  der quasistationären Näherung in die Differentialgleichung für  $n_1$  von (2,17) so lautet diese

$$v \cdot \frac{d}{dx} n_1 = - \frac{n_1}{\tau_1} + \sum_{q=2}^{18} \frac{n_q^{(0)}(x)}{\tau_{1q}} + \frac{n_0}{\tau_{10}} + \frac{n_e^{(0)}(x)}{\tau_{1e}} \quad (6,8)$$

und da  $n_e^{(0)}(x), n_2^{(0)}(x), \dots, n_{18}^{(0)}(x)$  Lösungen des quasistationären Ansatzes sind, ist (6,8) identisch mit

$$v \cdot \frac{d n_1}{d x} = - \frac{n_1}{\tau_1(x)} + \frac{n_1^{(0)}(x)}{\tau_1(x)} \quad (6,9)$$

Bezeichnen wir mit  $n_1^{(1)}(x)$  die Lösung der Differentialgleichung (6,9) und gehen wir mit den Funktionen

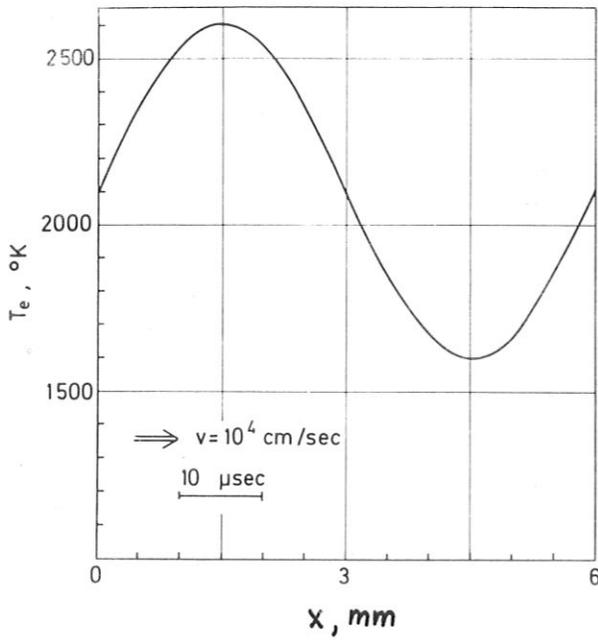
$$n_e^{(0)}(x), n_1^{(1)}(x), n_3^{(0)}(x), \dots, n_{18}^{(0)}(x)$$

in die Differentialgleichung für  $n_2$  von (2,17) so erhalten wir

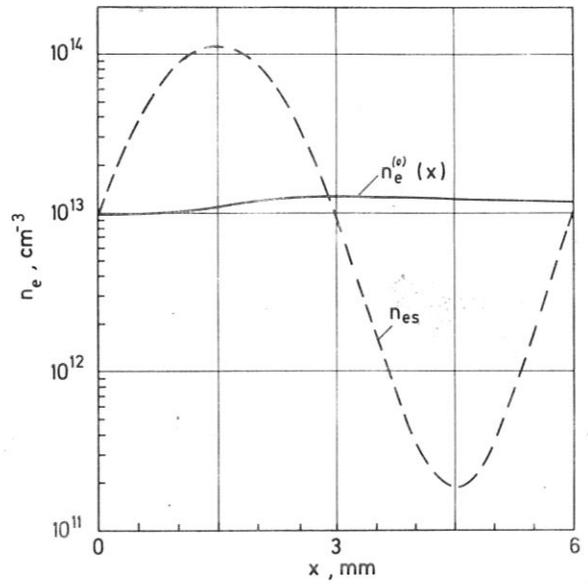
$$v \cdot \frac{d}{dx} n_2 = - \frac{n_2}{\tau_2} + \frac{n_1^{(1)}(x)}{\tau_{21}} + \underbrace{\sum_{q=3}^{18} \frac{n_q^{(0)}(x)}{\tau_{2q}} + \frac{n_0}{\tau_{20}} + \frac{n_e^{(0)}(x)}{\tau_{2e}}}_{\frac{n_2^{(0)}}{\tau_2} - \frac{n_1^{(0)}}{\tau_{21}}}$$

oder

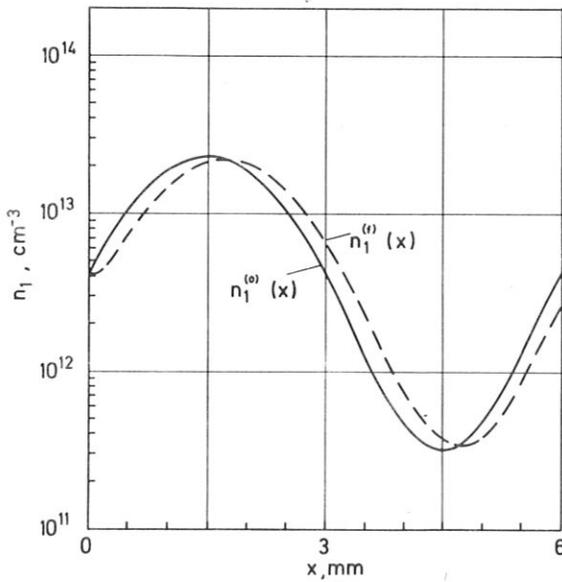
$$v \cdot \frac{d n_2}{d x} = - \frac{n_2}{\tau_2(x)} + \frac{n_2^{(0)}(x)}{\tau_2(x)} + \frac{n_1^{(1)}(x) - n_1^{(0)}(x)}{\tau_{21}(x)} \quad (6,10)$$



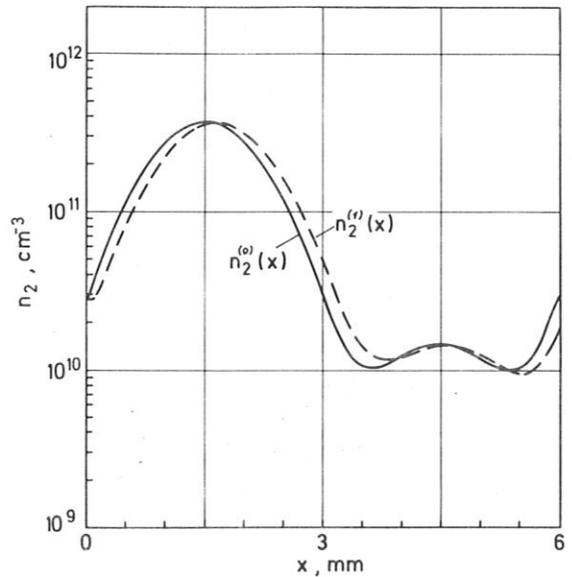
a)



b)



c)



d)

Bild 26

Beispiel für ein Relaxationsproblem, bei dem die quasistationäre Näherung nicht mehr selbstkonsistent ist. Die Bilder c), d) zeigen die quasistationären Besetzungsdichten  $n_1^{(0)}$  und  $n_2^{(0)}$  im Vergleich mit den Ergebnissen  $n_1^{(1)}$  und  $n_2^{(1)}$  einer ersten Iteration.

Die Lösung  $n_1^{(1)}(x)$  für unser Beispiel ist in Bild 26c gestrichelt eingezeichnet. Wie man sieht, unterscheidet sie sich bei dem gewählten Beispiel noch nicht gravierend von der Lösung  $n_1^{(0)}(x)$ . Für die Lösung  $n_2^{(1)}(x)$  der Gleichung (6,10) ist der Unterschied gegenüber  $n_2^{(0)}(x)$  noch etwas geringer (Bild 26d). Wir haben somit guten Grund zu der Annahme, daß die quasistationäre Näherung auch bei Elektronentemperaturänderungen im Zeitmaßstab der Bilder 26 noch zu physikalisch vernünftigen Aussagen führt. Im nicht ausschließlich stoßbestimmten Plasma, zu dem wir nun übergehen wollen, werden die Verhältnisse eher noch günstiger: Die Zeitgrößen  $\tau_p$ , die den zulässigen Zeitmaßstab für die Gültigkeit der quasistationären Näherung bestimmen, verkleinern sich bei der Zunahme von Strahlungsprozessen, wie man direkt an den Definitionen in (2,17) ablesen kann.

## 6.2 Numerische und experimentelle Ergebnisse für das realistische, nicht-stoßbestimmte Plasma

Um zu Ergebnissen zu gelangen, die mit dem Experiment vergleichbar sind, sollen nun die in den Abschnitten 3.2 bis 3.3 zitierten Photorekombinationskoeffizienten und Strahlungsübergangswahrscheinlichkeiten in die quasistationären Rechnungen mit einbezogen werden. Die optische Dicke der auf dem Grundzustand endenden Strahlungsübergänge berücksichtigen wir entsprechend Abschnitt 3.4 durch die dort beschriebenen Strahlungsverlustfaktoren. Wir wollen bei der Diskussion der Ergebnisse zunächst genauso vorgehen wie in Abschnitt 6.1.

Als erstes haben wir zu klären, ob die Dimension  $N = 18$  unseres Gleichungssystems auch im nicht-stoßbestimmten Fall ausreicht. Dazu haben wir in Bild 27 - in Analogie zu Bild 17 - Kurven in die  $n_e, T_e$ -Ebene eingezeichnet, auf denen die Besetzungsdichte des Niveaus 18 um den jeweils angegebenen Faktor von der Sahabesetzung abweicht. Die mit  $n_{e(eq)}$  benannte stark gezeichnete Kurve gibt die Wertepaare  $(n_e, T_e)$  an, für die das Plasma im Gleichgewicht ist. Sie trennt die  $n_e, T_e$ -Ebene in eine Rekombinations- und eine Ionisationszone. Zur Orientierung ist gestrichelt die Sahaelektronendichtekurve ( $n_{es}$ ) eingetragen. Zwar kommt dieser im nicht-stoßbestimmten Fall keinerlei Auszeichnung zu. Was aber auffällt und uns gleich noch beschäftigen wird, ist die außergewöhnlich starke Abweichung der berechneten Gleichgewichtselektronendichte von der Sahaelektronendichte. Zunächst wollen

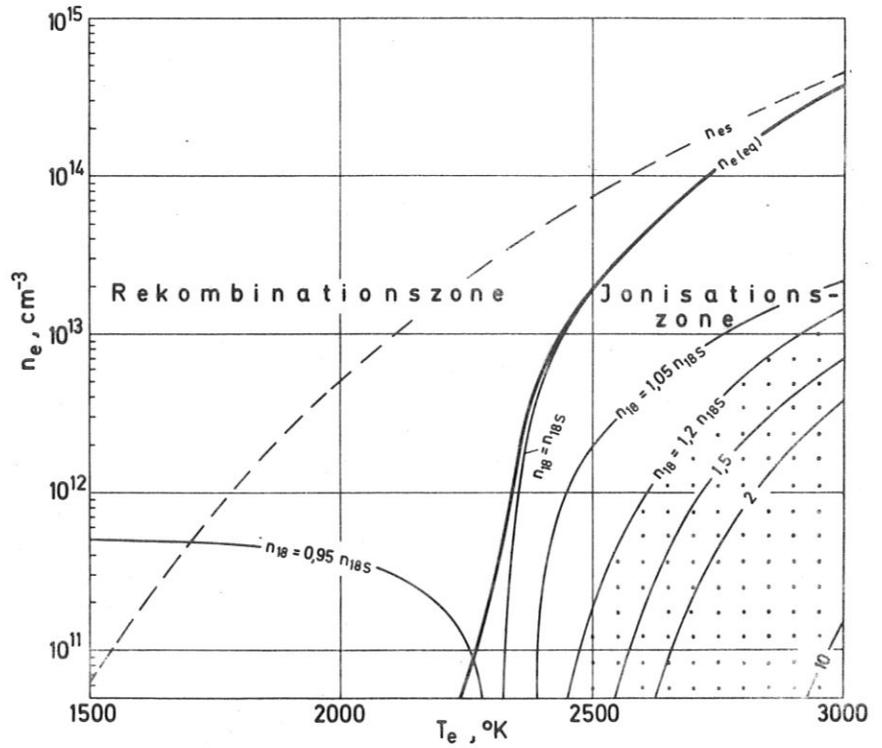


Bild 27

Kurven gleicher Abweichung von der Sahabesetzung für das Niveau 18 (nicht-stoßbestimmtes Plasma)

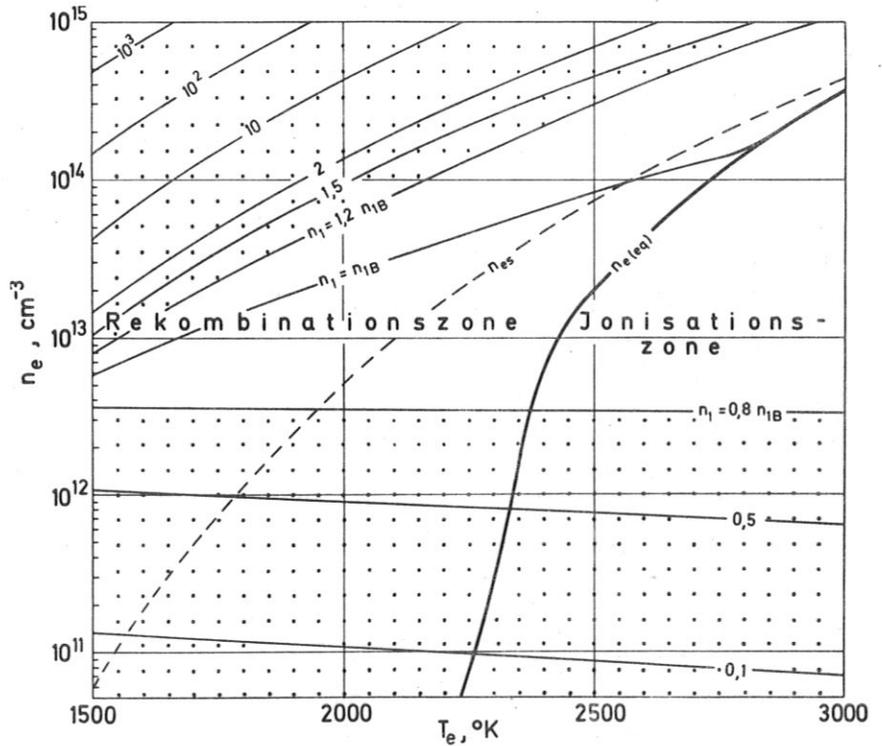


Bild 28

Kurven gleicher Abweichung von der Boltzmannbesetzung für das Niveau 1 (nicht-stoßbestimmtes Plasma)

wir jedoch nur festhalten, daß die Besetzungsdichte des Niveaus 18 nahezu in der ganzen Rekombinationszone um weniger als 5 Prozent, im nicht-punktierten Gebiet der Ionisationszone um weniger als +20 Prozent von einer Sahabesetzung abweicht. Was die Dimensionswahl  $N = 18$  unseres Gleichungssystems sowie die Selbstkonsistenz mit der Annahme  $n_p = n_{ps}$  für  $p > 18$  betrifft, hat sich, wie der Vergleich mit Bild 17 zeigt, der Gültigkeitsbereich unserer Berechnungen gegenüber dem stoßbestimmten Fall erweitert. Gleichzeitig ergibt sich aus dem Ergebnis von Bild 27 die Möglichkeit, innerhalb des nicht-punktierten Gebietes die Elektronendichte aus der Besetzungsdichte des Niveaus 18 zu bestimmen. Da wir in Abschnitt 3.5 die Niveaus  $12S_{1/2}$ ,  $10D_{3/2, 5/2}$  zum Niveau 18 der Berechnungen zusammengefaßt hatten, eignet sich demnach die Strahlung der Übergänge  $4P_{1/2, 3/2} - 12S_{1/2}$ ,  $10D_{3/2, 5/2}$  zur Elektronendichtebestimmung.

Das Ergebnis der quasistationären Berechnungen für die Besetzungsdichte  $n_1$  des Resonanzniveaus können wir an Bild 28 diskutieren. Hier sind - in Analogie zu Bild 18 - Kurven eingezeichnet, auf denen die Besetzungsdichte jeweils um den angegebenen Faktor von einer Boltzmannbesetzung bezüglich des Grundzustandes abweicht. Abweichungen von der Boltzmannbesetzung treten im nicht-stoßbestimmten Fall aus zweierlei Gründen auf: Einmal haben wir bei hohen Elektronendichten die Abweichung nach oben, die uns schon vom stoßbestimmten Fall her vertraut ist. Hier beginnt die Kopplung des Resonanzniveaus an das Kontinuum eine Rolle zu spielen. Ein Vergleich der Bilder 18 und 28 zeigt, daß die Kurven  $n_1 > 1,2 n_{1B}$  in beiden Bildern nahezu identisch verlaufen. Bei niedrigen Elektronendichten schließlich wird die Besetzungsdichte des Resonanzniveaus durch Strahlungsverluste "herabgedrückt". Dieser Effekt hat mit der Problematik der Spektroskopie im relaxierenden Plasma nichts zu tun. Er gehört vielmehr zu den "klassischen" Problemen der Spektroskopie.

Da die Abweichung der Besetzungsdichte des Niveaus 1 von einer Boltzmannbesetzung im Gebiet niedriger Elektronendichten auf Strahlungsverluste zurückzuführen ist, hängt sie erwartungsgemäß besonders stark vom Strahlungsverlustfaktor  $\mathcal{S}_{10}$  (vgl. Abschnitt 3.4) ab. Dem Ergebnis von Bild 28 liegt  $\mathcal{S}_{10} = 10^{-3}$  zugrunde. Wählen wir statt  $\mathcal{S}_{10} = 10^{-3}$  ein  $\tilde{\mathcal{S}}_{10}$  größer oder kleiner als  $10^{-3}$ , so verschieben sich die Kurven  $n_1 = 0,8 n_{1B}$ ;  $0,5 n_{1B}$ ;  $0,1 n_{1B}$  in Bild 28 angenähert um das Verhältnis  $\tilde{\mathcal{S}}_{10}/10^{-3}$  nach oben oder unten.

Setzen wir voraus, daß der Wert  $\mathcal{S}_{10} = 10^{-3}$ , der dem Ergebnis von Bild 28

zugrunde liegt, realistisch ist, so können wir innerhalb des ganzen nicht-punktierten Bereiches der  $n_e, T_e$ -Ebene die Elektronentemperatur durch Umkehr der Resonanzlinien  $4S_{1/2} - 4P_{1/2, 3/2}$  innerhalb eines Fehlers von  $\pm 50$  °K gewinnen.

Wir könnten die Diskussion der numerischen Ergebnisse nun analog zum stoßbestimmten Fall fortsetzen, also die Bedingungen (2,31) - (2,34) für die Selbstkonsistenz der quasistationären Näherung überprüfen. Wir wollen dies jedoch nicht tun und uns statt dessen darauf beschränken, die Größen  $a_p, b_p, \tau_p, \tau_e, \alpha, \beta$ , die die ganze Information der quasistationären Näherung beinhalten und nun alle von  $T_e$  und  $n_e$  abhängen, in Tabelle 6.2 für verschiedene Wertepaare wiederzugeben. Es wird sich nämlich im nächsten Abschnitt zeigen, daß die bisherige Berücksichtigung von Strahlungsprozessen, was unser Experiment betrifft, noch nicht realistisch ist.

### 6.2.1 Das Ionisationsgleichgewicht

Man wird zuallererst natürlich interessiert sein, ob die Ergebnisse in Theorie und Experiment für den relativ einfachen Fall eines Plasmas, das sich im Gleichgewicht befindet, in sich konsistent sind. Im Experiment realisieren wir Gleichgewichtsbedingungen dadurch, daß wir durch eine Entladung, die längs der Meßkanalachse brennt, hinreichend homogene Plasmabedingungen in Strömungsrichtung herstellen. Wenn die Stelle, an der wir messen, weit genug strömungsabwärts vom Anfang der Entladung liegt, können wir Relaxationseffekte ausschließen. Verändern wir durch Variieren der Entladungsstromstärke die Elektronentemperatur, so sollten bei gleichzeitiger Messung von  $n_e$  und  $T_e$  die Meßpunkte auf der in den Bildern 27 und 28 eingezeichneten Gleichgewichtskurve  $n_{e(eq)}$  liegen.

Das Experiment bestätigt diese Erwartung nicht. Bild 29 zeigt ein Meßergebnis im Vergleich mit den Kurven  $n_e$  Saha und  $n_{e(eq)}$ . Die Umkehrtemperatur bei abgeschalteter Entladung (Stromdichte  $j = 0$ ) war bei diesem Experiment 2070 °K. Die gemessene Elektronendichte liegt an dieser Stelle mit  $3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  um einen Faktor 3 über der Saha-Elektronendichte und sogar um 3 Größenordnungen über der errechneten Gleichgewichtselektronendichte. Mit zunehmender Elektronentemperatur steigt die Elektronendichte dann zunächst schwach an. Im Bereich zwischen 2500 °K und 3000 °K schließlich



NE = 1.0000E+13			TE = 1.5000E+03			NE = 1.0000E+13			TE = 2.0000E+03			NE = 1.0000E+13			TE = 2.5000E+03			NE = 1.0000E+13			TE = 3.0000E+03		
ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E
P	A(P)	TAU(P)	P	A(P)	TAU(P)	P	A(P)	TAU(P)	P	A(P)	TAU(P)	P	A(P)	TAU(P)	P	A(P)	TAU(P)	P	A(P)	TAU(P)	P	A(P)	TAU(P)
1	6.44E-16	2.55E-05	1	1.87E-16	2.44E-04	2.11E-06	1	7.27E-17	1.60E-03	1.76E-05	1	3.45E-17	5.59E-03	1	3.45E-17	5.59E-03	1	3.45E-17	5.59E-03	1	3.45E-17	5.59E-03	1.45E-06
2	3.87E-18	1.92E-08	2	1.37E-18	4.32E-08	1.86E-08	2	6.46E-19	1.09E-06	1.79E-08	2	3.74E-19	9.51E-06	2	3.74E-19	9.51E-06	2	3.74E-19	9.51E-06	2	3.74E-19	9.51E-06	1.71E-08
3	2.55E-18	6.41E-12	3	7.40E-19	3.32E-09	1.69E-08	3	3.00E-19	1.21E-07	1.40E-08	3	1.54E-19	1.33E-06	3	1.54E-19	1.33E-06	3	1.54E-19	1.33E-06	3	1.54E-19	1.33E-06	1.29E-09
4	4.22E-18	6.51E-13	4	1.27E-18	4.63E-09	1.97E-09	4	5.16E-19	2.26E-08	1.61E-09	4	2.56E-19	1.39E-09	4	2.56E-19	1.39E-09	4	2.56E-19	1.39E-09	4	2.56E-19	1.39E-09	1.39E-09
5	2.77E-18	4.08E-13	5	9.61E-19	3.37E-10	1.85E-09	5	4.25E-19	1.80E-09	1.08E-09	5	2.24E-19	2.47E-07	5	2.24E-19	2.47E-07	5	2.24E-19	2.47E-07	5	2.24E-19	2.47E-07	9.75E-10
6	5.69E-19	7.00E-14	6	2.31E-19	7.17E-11	9.80E-10	6	1.14E-19	4.34E-09	8.13E-10	6	6.45E-20	6.49E-08	6	6.45E-20	6.49E-08	6	6.45E-20	6.49E-08	6	6.45E-20	6.49E-08	7.41E-10
7	1.12E-18	3.71E-14	7	8.33E-19	4.40E-11	6.25E-10	7	1.89E-19	2.85E-09	5.36E-10	7	1.06E-19	4.40E-08	7	1.06E-19	4.40E-08	7	1.06E-19	4.40E-08	7	1.06E-19	4.40E-08	4.78E-10
8	9.30E-19	2.89E-14	8	3.58E-19	3.74E-11	4.04E-10	8	1.78E-19	2.55E-09	3.57E-10	8	1.03E-19	4.08E-08	8	1.03E-19	4.08E-08	8	1.03E-19	4.08E-08	8	1.03E-19	4.08E-08	3.25E-10
9	2.64E-19	7.67E-15	9	1.12E-19	1.11E-11	2.38E-10	9	5.89E-20	8.07E-10	2.16E-10	9	3.95E-20	1.35E-08	9	3.95E-20	1.35E-08	9	3.95E-20	1.35E-08	9	3.95E-20	1.35E-08	1.99E-10
10	2.91E-18	2.54E-14	10	1.14E-18	3.82E-11	8.53E-10	10	5.82E-19	2.82E-08	7.28E-10	10	3.89E-19	4.73E-08	10	3.89E-19	4.73E-08	10	3.89E-19	4.73E-08	10	3.89E-19	4.73E-08	6.47E-10
11	1.58E-19	1.36E-15	11	6.93E-20	2.31E-12	6.30E-11	11	3.80E-20	1.83E-10	5.77E-11	11	2.38E-20	3.25E-09	11	2.38E-20	3.25E-09	11	2.38E-20	3.25E-09	11	2.38E-20	3.25E-09	5.37E-11
12	5.64E-19	3.03E-15	12	2.52E-19	5.37E-12	1.95E-10	12	1.41E-19	4.37E-11	1.73E-10	12	8.98E-20	7.81E-09	12	8.98E-20	7.81E-09	12	8.98E-20	7.81E-09	12	8.98E-20	7.81E-09	1.58E-10
13	1.04E-19	5.51E-16	13	4.90E-20	1.04E-12	4.36E-11	13	2.83E-20	8.72E-11	3.98E-11	13	1.85E-20	1.60E-09	13	1.85E-20	1.60E-09	13	1.85E-20	1.60E-09	13	1.85E-20	1.60E-09	3.70E-11
14	8.00E-20	1.00E-15	14	3.89E-20	1.93E-12	9.09E-11	14	1.10E-19	1.64E-10	8.09E-11	14	7.44E-20	3.03E-09	14	7.44E-20	3.03E-09	14	7.44E-20	3.03E-09	14	7.44E-20	3.03E-09	7.37E-11
15	3.17E-19	2.67E-16	15	1.54E-19	5.45E-13	2.05E-11	15	3.48E-20	3.48E-11	1.87E-11	15	1.35E-20	6.52E-10	15	1.35E-20	6.52E-10	15	1.35E-20	6.52E-10	15	1.35E-20	6.52E-10	1.73E-11
16	6.74E-20	5.84E-17	16	3.35E-20	1.21E-13	5.48E-12	16	2.02E-20	1.08E-11	2.95E-12	16	2.05E-20	2.05E-10	16	2.05E-20	2.05E-10	16	2.05E-20	2.05E-10	16	2.05E-20	2.05E-10	4.55E-12
17	1.24E-19	2.35E-17	17	6.19E-20	4.96E-14	2.08E-11	17	5.78E-20	4.44E-12	1.87E-11	17	2.59E-20	6.44E-11	17	2.59E-20	6.44E-11	17	2.59E-20	6.44E-11	17	2.59E-20	6.44E-11	1.71E-11
18	1.0000E+14	TE = 1.5000E+03	18	1.0000E+14	TE = 1.5000E+03	NE = 1.0000E+03	18	1.0000E+14	TE = 1.0000E+14	TE = 2.5000E+03	18	1.0000E+14	TE = 1.0000E+14	TE = 2.5000E+03	18	1.0000E+14	TE = 1.0000E+14	TE = 2.5000E+03	18	1.0000E+14	TE = 1.0000E+14	TE = 2.5000E+03	3.0000E+03
ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E	ALPHA(NE,TE)	BETA(NE,TE)	TAU E
2.10E-23	1.82E-18	-4.77E-06	2.42E-24	4.17E-15	-1.60E-05	2.42E-24	4.17E-15	-1.60E-05	2.42E-24	4.17E-15	-1.60E-05	2.42E-24	4.17E-15	-1.60E-05	2.42E-24	4.17E-15	-1.60E-05	2.42E-24	4.17E-15	-1.60E-05	2.42E-24	4.17E-15	-1.60E-05
1	5.79E-16	1.17E-05	1	1.43E-16	2.63E-04	2.28E-07	1	4.75E-17	1.79E-03	1.97E-07	1	1.92E-17	5.82E-03	1	1.92E-17	5.82E-03	1	1.92E-17	5.82E-03	1	1.92E-17	5.82E-03	1.52E-07
2	2.97E-17	1.85E-09	2	8.60E-18	3.49E-07	1.14E-08	2	3.34E-18	8.33E-06	9.07E-09	2	1.59E-18	6.24E-05	2	1.59E-18	6.24E-05	2	1.59E-18	6.24E-05	2	1.59E-18	6.24E-05	7.33E-09
3	4.06E-18	3.99E-11	3	1.19E-18	1.61E-08	1.87E-09	3	4.98E-19	5.72E-07	1.52E-09	3	2.58E-19	5.86E-06	3	2.58E-19	5.86E-06	3	2.58E-19	5.86E-06	3	2.58E-19	5.86E-06	1.29E-09
4	8.00E-18	4.71E-12	4	2.06E-18	3.02E-10	2.03E-10	4	7.57E-19	1.31E-07	1.65E-09	4	3.93E-19	1.49E-06	4	3.93E-19	1.49E-06	4	3.93E-19	1.49E-06	4	3.93E-19	1.49E-06	1.42E-10
5	5.16E-18	2.95E-12	5	1.54E-18	2.19E-09	1.27E-10	5	6.18E-19	1.04E-07	1.10E-10	5	3.05E-19	1.26E-06	5	3.05E-19	1.26E-06	5	3.05E-19	1.26E-06	5	3.05E-19	1.26E-06	9.89E-11
6	9.63E-19	4.93E-13	6	3.49E-19	4.57E-10	9.21E-11	6	1.58E-19	2.47E-08	8.14E-11	6	8.7E-20	3.24E-07	6	8.7E-20	3.24E-07	6	8.7E-20	3.24E-07	6	8.7E-20	3.24E-07	7.42E-11
7	1.41E-18	2.66E-13	7	4.88E-19	2.83E-10	6.28E-11	7	2.22E-19	1.62E-08	5.34E-11	7	1.21E-19	2.20E-07	7	1.21E-19	2.20E-07	7	1.21E-19	2.20E-07	7	1.21E-19	2.20E-07	4.80E-11
8	1.16E-18	2.07E-13	8	4.95E-19	2.40E-10	4.95E-11	8	2.09E-19	1.45E-08	3.45E-11	8	1.18E-19	2.04E-07	8	1.18E-19	2.04E-07	8	1.18E-19	2.04E-07	8	1.18E-19	2.04E-07	3.26E-11
9	3.24E-19	5.48E-14	9	1.34E-19	7.10E-11	2.38E-11	9	6.85E-20	4.58E-09	2.16E-11	9	4.04E-20	6.73E-06	9	4.04E-20	6.73E-06	9	4.04E-20	6.73E-06	9	4.04E-20	6.73E-06	1.99E-11
10	3.30E-18	1.90E-13	10	1.27E-18	2.53E-10	9.61E-11	10	6.39E-19	1.64E-08	7.34E-11	10	3.77E-19	2.41E-07	10	3.77E-19	2.41E-07	10	3.77E-19	2.41E-07	10	3.77E-19	2.41E-07	6.52E-11
11	1.79E-19	1.02E-14	11	7.07E-20	1.52E-11	3.30E-12	11	4.15E-20	1.06E-09	5.77E-12	11	2.57E-20	1.63E-08	11	2.57E-20	1.63E-08	11	2.57E-20	1.63E-08	11	2.57E-20	1.63E-08	3.38E-12
12	6.12E-19	2.87E-14	12	2.91E-19	3.55E-11	1.96E-11	12	1.45E-19	2.54E-09	1.74E-11	12	9.45E-20	3.96E-08	12	9.45E-20	3.96E-08	12	9.45E-20	3.96E-08	12	9.45E-20	3.96E-08	1.58E-12
13	1.22E-19	4.12E-15	13	5.25E-20	6.89E-12	4.36E-12	13	3.00E-20	5.06E-10	3.99E-12	13	1.94E-20	8.08E-09	13	1.94E-20	8.08E-09	13	1.94E-20	8.08E-09	13	1.94E-20	8.08E-09	3.70E-12
14	4.22E-19	7.48E-15	14	1.27E-19	1.05E-12	9.10E-12	14	1.44E-19	9.62E-10	8.10E-12	14	7.44E-20	1.53E-08	14	7.44E-20	1.53E-08	14	7.44E-20	1.53E-08	14	7.44E-20	1.53E-08	7.37E-12
15	8.33E-20	1.49E-15	15	4.04E-20	2.63E-12	2.95E-12	15	2.39E-20	2.02E-10	1.87E-12	15	1.45E-20	3.30E-09	15	1.45E-20	3.30E-09	15	1.45E-20	3.30E-09	15	1.45E-20	3.30E-09	1.73E-12
16	3.22E-19	2.00E-15	16	1.36E-19	3.96E-12	2.39E-12	16	9.30E-20	2.77E-10	2.13E-12	16	6.25E-20	1.94E-12	16	6.25E-20	1.94E-12	16	6.25E-20	1.94E-12	16	6.25E-20	1.94E-12	4.54E-12
17	6.87E-20	4.30E-16	17	3.39E-20	8.00E-13	5.48E-13	17	2.05E-20	6.25E-11	4.95E-13	17	1.39E-20	1.03E-09	17	1.39E-20	1.03E-09	17	1.39E-20	1.03E-09	17	1.39E-20	1.03E-09	1.94E-12
18	1.24E-19	1.75E-16	18	6.21E-20	3.26E-13	2.04E-12	18	3.79E-20	2.57E-11	1.87E-12	18	2.59E-20	4.26E-10	18	2.59E-20	4.26E-10	18	2.59E-20	4.26E-10	18	2.59E-20	4.26E-10	1.71E-12

Tabelle 6.2<sub>3</sub>

NE = 5.0000E+14 TE = 1.5000E+03				NE = 5.0000E+14 TE = 2.0000E+03				NE = 5.0000E+14 TE = 2.5000E+03				NE = 5.0000E+14 TE = 3.0000E+03			
ALPHA(NE,TE) = 2.04E-23				ALPHA(NE,TE) = 5.83E-24				ALPHA(NE,TE) = 2.12E-24				ALPHA(NE,TE) = 8.94E-25			
BETA (NE,TE) = 4.60E-18				BETA (NE,TE) = 9.56E-15				BETA (NE,TE) = 7.83E-13				BETA (NE,TE) = 1.33E-11			
TAU E = -1.96E-07				TAU E = -6.86E-07				TAU E = -1.92E-06				TAU E = -1.07E-05			
P	A(P)	B(P)	TAU(P)												
1	5.58E-16	1.18E-05	5.63E-19	1	1.32E-16	2.65E-04	4.59E-09	1	4.11E-17	1.70E-03	3.76E-09	1	1.52E-17	5.74E-03	3.06E-08
2	7.79E-17	4.87E-09	6.33E-09	2	1.40E-17	8.36E-07	4.17E-09	2	6.81E-18	1.71E-05	2.85E-09	2	2.82E-18	1.11E-04	2.07E-09
3	5.13E-18	9.62E-11	4.94E-10	3	1.68E-18	3.60E-08	3.77E-10	3	7.82E-19	1.15E-06	3.06E-10	3	3.62E-19	1.05E-05	2.59E-10
4	8.79E-18	1.19E-11	5.60E-11	4	2.27E-18	6.92E-09	4.58E-11	4	8.36E-19	2.68E-07	3.31E-11	4	3.49E-19	2.69E-06	2.85E-11
5	5.65E-18	7.44E-12	3.12E-11	5	1.69E-18	5.03E-09	2.55E-11	5	6.91E-19	2.13E-07	2.21E-11	5	3.35E-19	2.27E-06	1.98E-11
6	1.04E-18	1.24E-12	2.21E-11	6	3.80E-19	1.05E-09	1.84E-11	6	1.73E-19	5.04E-08	1.63E-11	6	9.23E-20	5.84E-07	1.48E-11
7	1.04E-18	6.71E-13	1.58E-11	7	5.28E-19	6.47E-10	1.26E-11	7	2.33E-19	3.31E-08	1.08E-11	7	1.27E-19	3.96E-07	1.48E-12
8	1.20E-18	5.22E-13	9.63E-12	8	4.52E-19	5.50E-10	8.10E-12	8	2.18E-19	2.96E-08	7.17E-12	8	1.83E-19	3.67E-07	6.51E-12
9	3.33E-18	1.38E-13	5.49E-12	9	1.39E-19	1.62E-10	4.77E-12	9	7.14E-20	9.33E-09	4.31E-12	9	4.20E-20	1.21E-07	3.99E-12
10	3.33E-18	4.82E-13	2.19E-11	10	1.29E-18	5.81E-10	1.72E-11	10	6.51E-19	3.38E-08	1.47E-11	10	3.84E-19	4.34E-07	1.30E-11
11	1.83E-19	2.58E-14	1.42E-12	11	7.84E-20	3.50E-11	1.26E-12	11	4.33E-20	2.11E-09	1.15E-12	11	2.61E-20	2.94E-08	1.08E-12
12	6.18E-19	5.73E-14	4.62E-12	12	2.74E-19	8.15E-11	3.91E-12	12	1.81E-19	5.18E-09	3.47E-12	12	9.56E-20	7.13E-08	3.16E-12
13	1.14E-19	1.04E-14	9.77E-13	13	5.32E-20	1.57E-11	1.72E-13	13	3.04E-20	1.03E-09	7.97E-13	13	1.97E-20	1.45E-08	7.40E-13
14	4.24E-19	1.89E-14	2.13E-12	14	1.98E-20	2.92E-11	1.42E-12	14	1.14E-19	1.93E-09	1.62E-12	14	7.98E-20	2.76E-08	1.47E-13
15	8.37E-20	3.76E-15	4.63E-13	15	4.16E-20	6.03E-12	4.11E-12	15	2.40E-20	4.12E-10	3.74E-13	15	1.60E-20	5.93E-09	3.45E-13
16	3.23E-19	5.05E-15	5.54E-13	16	1.56E-19	8.23E-12	4.88E-13	16	9.03E-20	5.66E-10	4.26E-13	16	6.27E-20	8.18E-09	3.89E-13
17	6.89E-20	1.10E-15	1.25E-13	17	3.44E-20	1.83E-12	1.10E-13	17	2.05E-20	1.28E-10	9.91E-14	17	1.39E-20	1.84E-09	9.11E-14
18	1.24E-19	4.44E-16	4.80E-13	18	6.21E-20	7.49E-13	4.17E-13	18	3.79E-20	5.22E-11	3.74E-13	18	2.59E-20	7.67E-10	3.42E-13

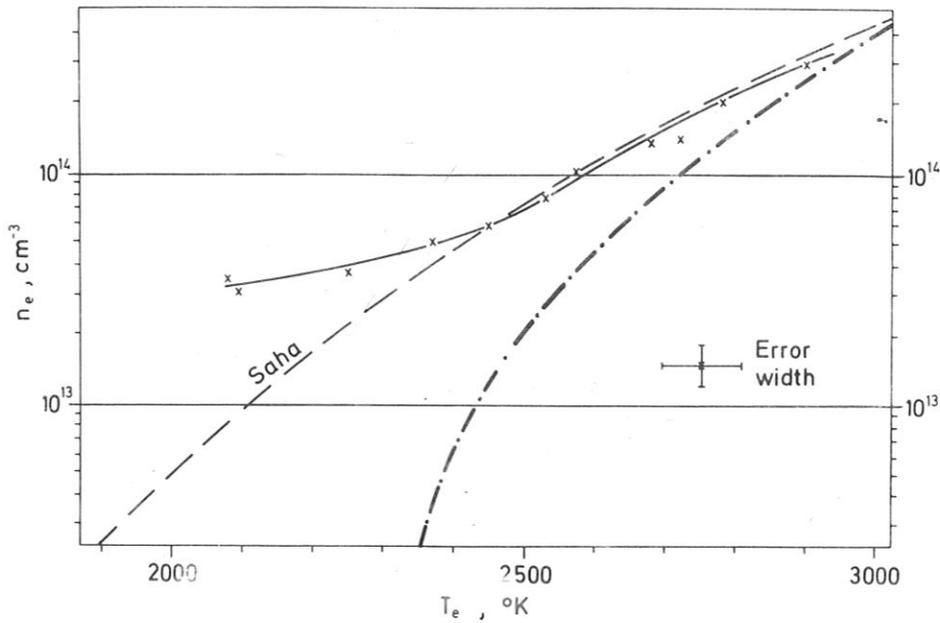


Bild 29 Gemessene Elektronendichte als Funktion der gemessenen Elektronentemperatur in einer homogenen Entladung

verläuft die Meßkurve knapp unterhalb der Sahakurve, aber noch deutlich über der errechneten Gleichgewichtskurve.

Wie ist dieses Ergebnis zu erklären? An der Elektronendichtemessung, d.h. an der vertikalen Einordnung der Meßpunkte in Bild 29 werden wir kaum zweifeln, da wir nach Bild 27 mit großer Sicherheit eine Sahabesetzung des Niveaus 10D erwarten dürfen, auf der das Meßergebnis für die Elektronendichte basiert. Zweifeln könnte man eher an der Elektronentemperaturmessung. Ein mit  $\mathcal{P}_{10} = 10^{-3}$  möglicherweise zu klein angenommener Strahlungsverlustfaktor könnte uns z.B. niedrigere Elektronentemperaturen vortäuschen als tatsächlich vorhanden sind. Wir hätten dann unsere Meßpunkte in Bild 29 zu weit links eingeordnet. Diese Möglichkeit ist jedoch mit ziemlicher Sicherheit auszuschließen. Selbst wenn wir den Strahlungsverlustfaktor  $\mathcal{P}_{10}$  um eine Größenordnung erhöhen würden, läge bei den gemessenen Elektronendichten die Abweichung der Besetzungsdichte  $n_1$  von der Boltzmannbesetzung noch unter 20 Prozent.

Gehen wir davon aus, daß an der experimentellen Kurve in Bild 29 nicht zu zweifeln ist, so ist zunächst die Frage zu beantworten, warum die Elek-

tronendichte im Bereich niedriger Elektronentemperaturerhöhung nicht nur weit über der errechneten Gleichgewichtselektronendichte liegt, sondern auch noch beträchtlich über der Saha-Elektronendichte. Auf diesen Effekt haben SCHWENN, BREDERLOW und SALVAT (1968) aufgrund von Leitfähigkeitsmessungen mittels Sonden bereits hingewiesen. Die Autoren erklären die "Überschuß"elektronendichte mit einer Verschleppung von Ladungsträgern aus den heißen Zonen des Brennsystems, letztlich also als einen Relaxationseffekt, dessen Ursache jedoch nicht innerhalb des Meßkanals zu suchen ist. Diese plausible Erklärung für die Diskrepanz zwischen Experiment und Theorie im Bereich niedriger Elektronentemperaturerhöhungen beantwortet aber noch nicht die Frage, warum sich die gemessene  $n_e(T_e)$  Kurve nicht, wie wir erwarten, nach flachem Anstieg der errechneten Gleichgewichtselektronendichtekurve  $n_{e(eq)}$  annähert, sondern der Saha-Dichtekurve  $n_{es}$ . Wir müssen deshalb als letzte Möglichkeit in Zweifel ziehen, daß die berechnete Gleichgewichtselektronendichte realistisch ist. Dies um so mehr, als man bislang keinerlei Anzeichen dafür gefunden hat, daß bei homogenen Plasma-Bedingungen solch starke Abweichungen der Elektronendichte von der Saha-Dichte auftreten.

Was kann nun der Grund für die unrealistische Gleichgewichtselektronendichte sein, die aus den Rechnungen folgt? Am naheliegendsten wäre es natürlich, an den Stoßquerschnitten zu zweifeln und anzunehmen, daß das Plasma in Wirklichkeit eben "stoßbestimmter" ist als es die klassischen Stoßquerschnitte erwarten lassen. Diese Möglichkeit kann nicht ausgeschlossen werden, solange keine gesicherten Stoßquerschnitte zur Verfügung stehen. Vor wir uns jedoch mit dieser bequemen Antwort zufrieden geben, wollen wir - einer Anregung folgend, die von der Arbeit von FRÖHLICH (1968) ausgeht - zeigen, daß es noch einen anderen Grund geben kann, warum das berechnete Ionisationsgleichgewicht noch nicht mit dem gemessenen übereinstimmt.

Zunächst zeigt eine Analyse der Rechnungen, daß die starke Abweichung der Gleichgewichtselektronendichte von der Saha-Dichte in der Hauptsache durch die Strahlungsübergänge der beiden Kaliumnebenserien verursacht wird. Dies geht aus Bild 30 hervor, wo die Gleichgewichtselektronendichte gezeichnet ist, die sich bei Vernachlässigung verschiedener Strahlungsprozesse ergibt. Der starke Sprung von Kurve 4 nach Kurve 5 ergibt sich bei Vernachlässigung der  $A_{p1}$ , während z.B. die Photorekombination, wie der Vergleich der Kurven 1 und 2 zeigt, nur geringen Einfluß auf das Ionisationsgleichgewicht hat. Eine Untersuchung der berechneten Besetzungsdichten der angeregten Niveaus zeigt

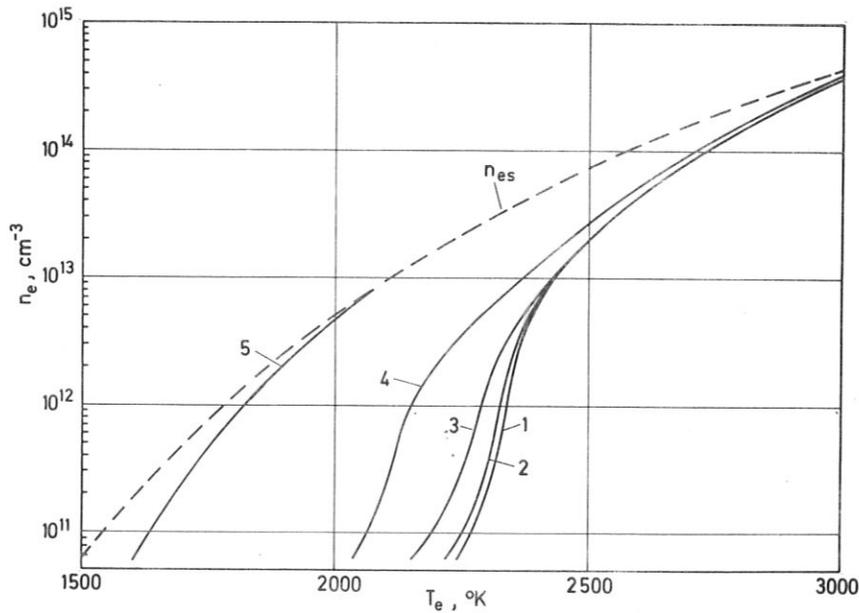


Bild 30

Berechnete Gleichgewichtselektronendichte bei Vernachlässigung verschiedener Strahlungsprozesse:

- Kurve 1: identisch mit den Kurven  $n_e(eq)$  der Bilder 27-29
- 2: wie 1, jedoch  $S_{eq} = 0$  für alle  $q$
- 3: wie 2, jedoch  $A_{pq} = 0$  für  $q > 4$
- 4: wie 3, jedoch  $A_{pq} = 0$  für  $q > 1$
- 5: wie 4, jedoch  $A_{pq} = 0$  für  $q > 0$

ferner, daß die Besetzungstemperaturen  $T_{p1}$  ( $p > 1$ ) auf der Gleichgewichtskurve 1 in Bild 30 beträchtlich unter der jeweiligen Elektronentemperatur liegen. Das geht z.B. aus Bild 31 hervor, wo für das Wertepaar ( $n_e = 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e = 2330 \text{ }^\circ\text{K}$ ) die Besetzungsdichten  $n_p$  gegen die Anregungsenergien der Niveaus  $p$  aufgetragen sind. Die Besetzungstemperaturen  $T_{p1}$  liegen für alle  $1 < p \leq 18$  zwischen  $1130 \text{ }^\circ\text{K}$  ( $=T_{21}$ ) und  $1550 \text{ }^\circ\text{K}$  ( $=T_{18,1}$ ).

Solch niedrige Besetzungstemperaturen bedeuten aber, daß bei den Berechnungen der Einfluß der strahlenden Wände, die das Plasma umgeben, nicht mehr vernachlässigt werden darf. Dies läßt sich aus Gleichung (3,31) ablesen: Alle Strahlungsverlustfaktoren  $\mathcal{S}_{pq}$  (bei den optisch dünnen Übergängen sind sie gleich 1) verringern sich unter dem Einfluß eines äußeren Strahlungsfeldes der Dichte  $u_{pq}^{(außen)}$  um den Faktor  $(1 - u_{pq}^{(außen)}) / u_{pq}^{Planck}(T_{pq})$ . Definieren wir eine "effektive Wandtemperatur"  $T_W$  derart, daß gilt  $u_{pq}^{(außen)} \equiv u_{pq}^{Planck}(T_W)$ , so folgt, daß selbst bei optisch dünnen Linien der Strahlungsverlustfaktor  $\mathcal{S}_{pq}$

und damit die Nettorate der Strahlungsübergänge  $r_{pq}$  (Gleichung 3,20) gegen Null geht, wenn die entsprechende Besetzungstemperatur  $T_{pq}$  die effektive Wandtemperatur  $T_W$  erreicht.

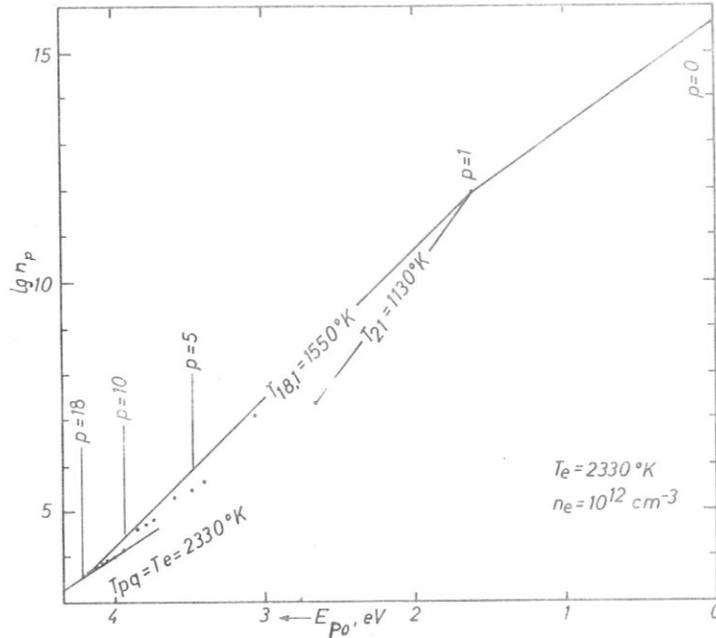


Bild 31

Berechnete Besetzungsdichten der Niveaus als Funktion ihres Energieabstandes zum Grundzustand für ein Wertepaar  $(n_e, T_e)$  auf der Gleichgewichtskurve 1 in Bild 30

Auf die möglicherweise wichtige Rolle, die die Wandstrahlung für das Ionisationsgleichgewicht besitzt, ist anhand einer Modellrechnung schon von STÄHLE und BURKHARDT (1966) hingewiesen worden. Detailliert hat sich FRÖHLICH (1968) mit diesem Thema befaßt. Er berücksichtigt in seinen Rechnungen auch Anisotropien des äußeren Strahlungsfeldes.

In unserer Darstellung läßt sich bei den numerischen Rechnungen eine "effektive Wandstrahlung" leicht dadurch berücksichtigen, daß wir in die Ratengleichungen (2,14) mit den vollständigen Nettoraten (3,16) der Strahlungsübergänge eingehen, wobei wir  $u_{pq} = u_{pq}^{\text{Planck}}(T_W)$  setzen. (Photoionisations- und -rekombinationsprozesse vernachlässigen wir in diesem Zusammenhang.) Der damit errechnete Einfluß der Wandstrahlung auf die Gleichgewichtselektronendichte geht aus Bild 32 hervor. Die Gleichgewichtskurven schneiden die Sahakurve erwartungsgemäß bei  $T_e = T_W$ . Man sieht, daß selbst

bei einer Elektronentemperatur von  $2500\text{ }^{\circ}\text{K}$  eine mit  $1500\text{ }^{\circ}\text{K}$  relativ kalte "schwarz" strahlende Wand noch einen bemerkenswerten Einfluß auf das berechnete Ionisationsgleichgewicht besitzt.

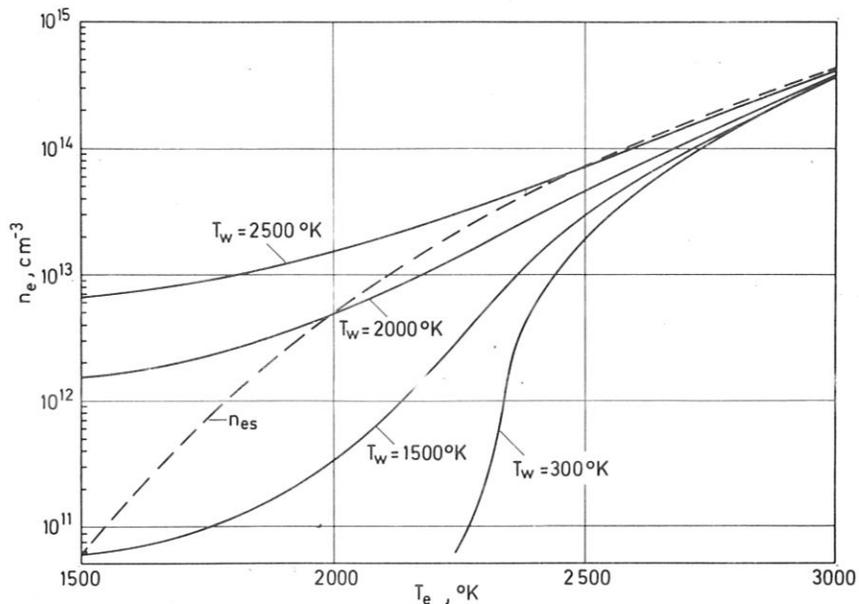


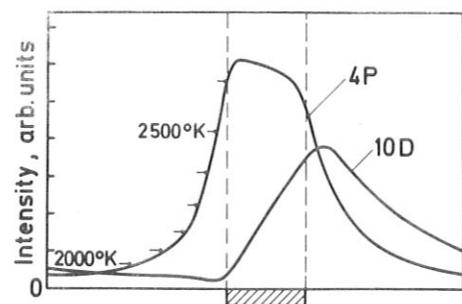
Bild 32

Gleichgewichtselektronendichte bei verschiedenen effektiven Wandtemperaturen  $T_w$

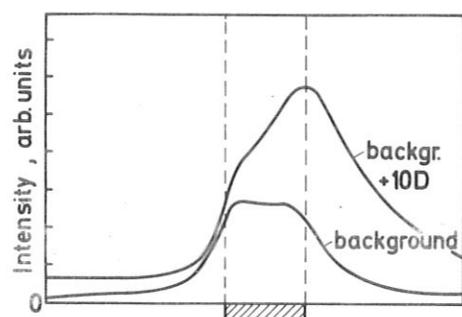
Nehmen wir für unseren Meßkanal eine Wandtemperatur von  $1500\text{ }^{\circ}\text{K}$  als realistisch an und berücksichtigen noch, daß die sehr viel heißeren Wände ( $T \approx 2500\text{ }^{\circ}\text{K}$ ) in der Nähe des Brennsystems ebenso wie der Plasmabrenner selbst in den Meßkanal einstrahlen (wenn auch unter einem kleineren Raumwinkel), so erscheint die Annahme einer effektiven Wandtemperatur von  $T_w = 2000\text{ }^{\circ}\text{K}$  für unser Experiment nicht unrealistisch. Damit ließe sich jedenfalls der experimentelle Befund von Bild 29 erklären. Zu einer endgültigen Aussage reicht unser experimentelles Material allerdings nicht aus. Eine systematische experimentelle Untersuchung des Einflusses der Wandstrahlung auf das Ionisationsgleichgewicht wäre wünschenswert.

## 6.2.2 Nachweis von Relaxationseffekten

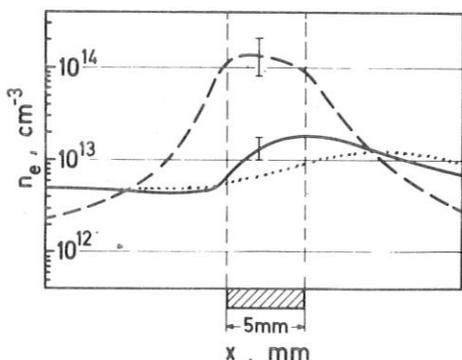
Wir wollen uns nun unserem Ziel, dem experimentellen Nachweis von Relaxationseffekten zuwenden. In einem ersten Experiment brennen wir über ein Elektrodenpaar des Meßkanals eine Entladung quer zur Strömungsrichtung und messen die Elektronentemperatur- und -dichteverteilung entlang der Anode in Strömungsrichtung. Bild 33a, b c zeigt ein typisches Ergebnis. Der Entladungsstrom beträgt 0,65 A, die gemittelte Strömungsgeschwindigkeit des Plasmas 85 m/sec. Die Strahlungsintensitätsverteilungen wurden in etwa 1 mm Abstand von der Anode aufgenommen. Das Plasma hat man sich von links nach rechts strömend zu denken. Die Position der Elektrode ist schraffiert angedeutet. Die mit 4P bezeichnete Kurve in Bild 33a zeigt die gemessene Intensitätsverteilung der Kaliumresonanzstrahlung. Auf der Kurve ist die Elektronentemperaturskala markiert, die sich aus der Eichung mit der Linienumkehrmethode ergibt. Die Intensitätsverteilung der  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  Linienstrahlung (in Bild 33a mit 10D bezeichnet) konnte nicht in einem Gang aufgenommen werden. Da die Linie im Spektrum auf einem kontinuierlichen Strahlungshintergrund sitzt (vgl. Bild 11c), mußte einmal die Intensitätsverteilung des "Hintergrundes" allein und dann die von Hintergrund plus Linie aufgenommen werden (Bild 33b). Die Intensitätsverteilung der Linienstrahlung ergibt sich aus der Differenz der beiden Signalkurven. Wie aus Bild 33a hervorgeht ist die relative Intensitätsverteilung der Kaliumresonanzstrahlung völlig verschieden von der der  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  Linienstrahlung (im folgenden kurz mit "10D-Strahlung" bezeichnet). Während erstere sofort ansteigt und ihr Maximum etwa an der strömungsaufwärts gelegenen Elektrodenkante erreicht, fällt die Intensität der 10D-Strahlung zunächst ab und erreicht in der Nähe der strömungsaufwärts gelegenen Elektrodenkante ein Minimum. Im Bereich der Elektrode steigt die Intensität der 10D-Strahlung dann bis zu einem Maximum in der Nähe der strömungsabwärts gelegenen Elektrodenkante an, während die Resonanzstrahlungsintensität in diesem Bereich schon wieder abfällt. Die Auswertung der beiden Kurven von Bild 33a ist in Bild 33c wiedergegeben. Die gestrichelte Kurve zeigt die Sahaelektronendichteverteilung, die aus der 4P-Kurve in Bild 33a folgen würde. Die tatsächliche Elektronendichteverteilung, die sich aus der quantitativen Auswertung der 10D-Kurve von Bild 33a in Verbindung mit der gemessenen Elektronentemperaturverteilung ergibt, ist durchgezogen eingezeichnet.



a) Intensitätsverteilung der Resonanzstrahlung (4P) und der  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  Strahlung (10D) gemessen entlang einer Elektrode



b) Meßkurven, aus denen die 10D Kurve in a) ermittelt wurde



c) Aus a) ermittelte Elektronendichteverteilung im Vergleich mit der Sahadichteverteilung (gestrichelt) und einer berechneten Verteilung (punktiert)

Bild 33

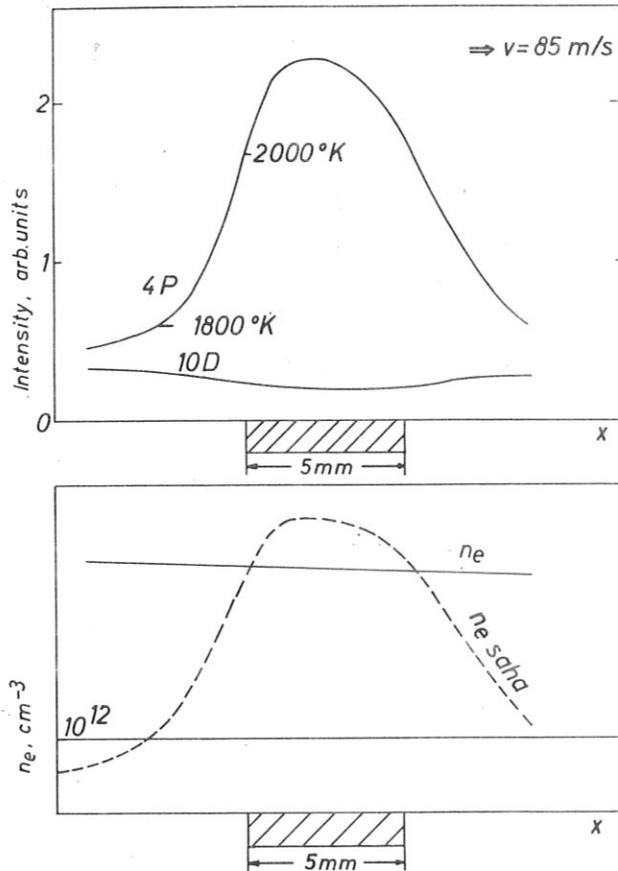
Zu Beginn (linker Bildrand) liegt die Elektronendichte noch über der entsprechenden Sahadichte. Dies ist mit der "Überschuß"elektronendichte zu erklären, mit der das Plasma in den Meßkanal gelangt (vgl. Abschnitt 6.2.1). Der anschließende Verlauf der Elektronendichte entspricht qualitativ dem, was wir aufgrund der bisherigen Rechnungen (vgl. Bilder 1; 24b) erwarten: Die Elektronendichte folgt verzögert auf die Temperaturerhöhung im Bereich der Entladung. Daraus ergibt sich ein in Strömungsrichtung verschobenes abgeflachtes Elektronendichteprofil.

Wir wollen das Meßergebnis von Bild 33c nun mit dem Ergebnis vergleichen, das uns die quasistationäre Theorie liefert. Dazu betrachten wir das gemessene Elektronentemperaturprofil  $T_e(x)$  als vorgegeben und berechnen die zugehörige Elektronendichteverteilung  $n_e(x)$  nach Gleichung (2,24) für das nicht-stoßbestimmte Plasma, wobei wir eine effektive Wandtemperatur von  $2000 \text{ }^{\circ}\text{K}$  annehmen (vgl. Abschnitt 6.2.1). Als Anfangswert wählen wir den Meß-

wert der Elektronendichte am linken Rand von Bild 33c. Die Strömungsgeschwindigkeit unseres Plasmas in 1 mm Abstand von der Elektrodenwand beträgt bei einer gemittelten Geschwindigkeit von 85 m/sec noch etwa 50 m/sec (BURGER, 1969). Diesen Wert legen wir bei den Rechnungen zugrunde. Das Ergebnis der numerischen Integration ist in Bild 33c punktiert eingezeichnet. Aus dem Vergleich des experimentellen Elektronendichteprofiles mit dem berechneten Profil hätte man grob auf einen Faktor 3 zu schließen, um den die Elektronendichterelaxation schneller vor sich geht, als es die Berechnungen erwarten lassen.

Als nächstes zeigt Bild 34 das Ergebnis eines Experiments, bei dem - unter sonst gleichen Bedingungen wie in Bild 33 - die Entladungsstromstärke auf 300 mA reduziert wurde. In Bild 34a sind wieder die Intensitätsverteilungen der Kaliumresonanzstrahlung ( $K_{\alpha}$  4P), sowie der  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  Linienstrahlung (Kurve 10D) eingezeichnet. Die beiden Intensitätsverteilungen haben in diesem Fall eine gegensätzliche Charakteristik: das Profil der Resonanzstrahlung ist konvex, das der 10D-Strahlung konkav. Anders ausgedrückt: Im Licht der Resonanzstrahlung erscheint der Bereich, in dem die Entladung brennt, gegenüber dem übrigen Plasma hell, im Licht der 10D-Strahlung dagegen dunkel. Die quantitative Auswertung der beiden Meßkurven ist in Bild 34b gezeichnet. Die gestrichelte Kurve gibt wieder das Sahaelektronendichteprofil an, das man dem gemessenen Elektronentemperaturprofil zuordnen würde. Aus der Auswertung der 10D-Kurve in Bild 34a dagegen folgt (durchgezogene Kurve), daß die tatsächliche Elektronendichte im Plasma durch die stromschwache Entladung praktisch nicht beeinflusst wird: Sie bleibt auf dem Wert der Überschußelektronendichte eingefroren, mit der das Plasma in den Entladungsbereich gelangt.

Der Einfluß verschiedener Entladungsstromstärken (d.h. verschieden hoher Elektronentemperaturprofile, die wir dem Plasma aufprägen) auf die Elektronendichterelaxation geht aus Bild 35a bis f hervor. Das Ergebnis der Elektronentemperaturmessung ist jeweils durch die gestrichelt eingezeichnete Sahaelektronendichteverteilung wiedergegeben (an den Bildern 35c und f ist rechts eine Temperaturskala angebracht, die, ebenso wie die Dichteskala auf der linken Seite von Bild 35a, d, für alle Bilder gilt). Das Ergebnis der Elektronendichtemessung ist durchgezogen eingezeichnet. Man erkennt aus der Bildfolge, wie die Elektronendichte auf die Elektronentemperaturerhöhung zunächst gar nicht (Bild 35a, b), dann schwach (Bild 35c) und schließlich zunehmend stärker reagiert (Bild 35d, e, f). Selbst bei einer Entladungsstromstärke von



a) Gemessene Intensitätsverteilungen im Fall einer stromschwachen Entladung

b) Aus a) ermittelte Elektronendichteverteilung (durchgezogen) im Vergleich mit der Sahadichteverteilung (gestrichelt)

Bild 34

10 A (entsprechend einer mittleren Stromdichte von  $10 \text{ A/cm}^2$ ) "folgt" die Elektronendichte dem Anstieg der Elektronentemperatur noch deutlich verzögert. Für die Bilder 35e und f ist zum Vergleich wieder punktiert der Elektronendichteverlauf eingezeichnet, der sich aus der quasistationären Theorie ergibt, wenn man das gemessene Elektronentemperaturprofil und die gemessene Anfangselektronendichte als vorgegeben betrachtet. Wie man sieht, würde man auch in diesen Fällen aufgrund der Rechnungen eine noch langsamere Elektronendichtere Relaxation erwarten.

Eine anschauliche Vorstellung von Relaxationseffekten der Elektronendichte vermittelt das in Bild 36 wiedergegebene experimentelle Ergebnis. Hier wurden drei hintereinanderliegende Elektrodenpaare mit Strom beschickt. Die Entladungsstromstärken wurden so eingestellt, daß die Elektronentemperaturverteilungen vor den Elektroden etwa gleich waren. Dies geht aus Bild 36a hervor, wo die längs der Elektroden gemessene Intensitätsverteilung der Kaliumresonanzstrahlung gezeichnet ist. Aus der gemessenen Intensitätsverteilung der 10D-Strahlung (Bild 36b) sowie der Auswertung der beiden Meßkurven

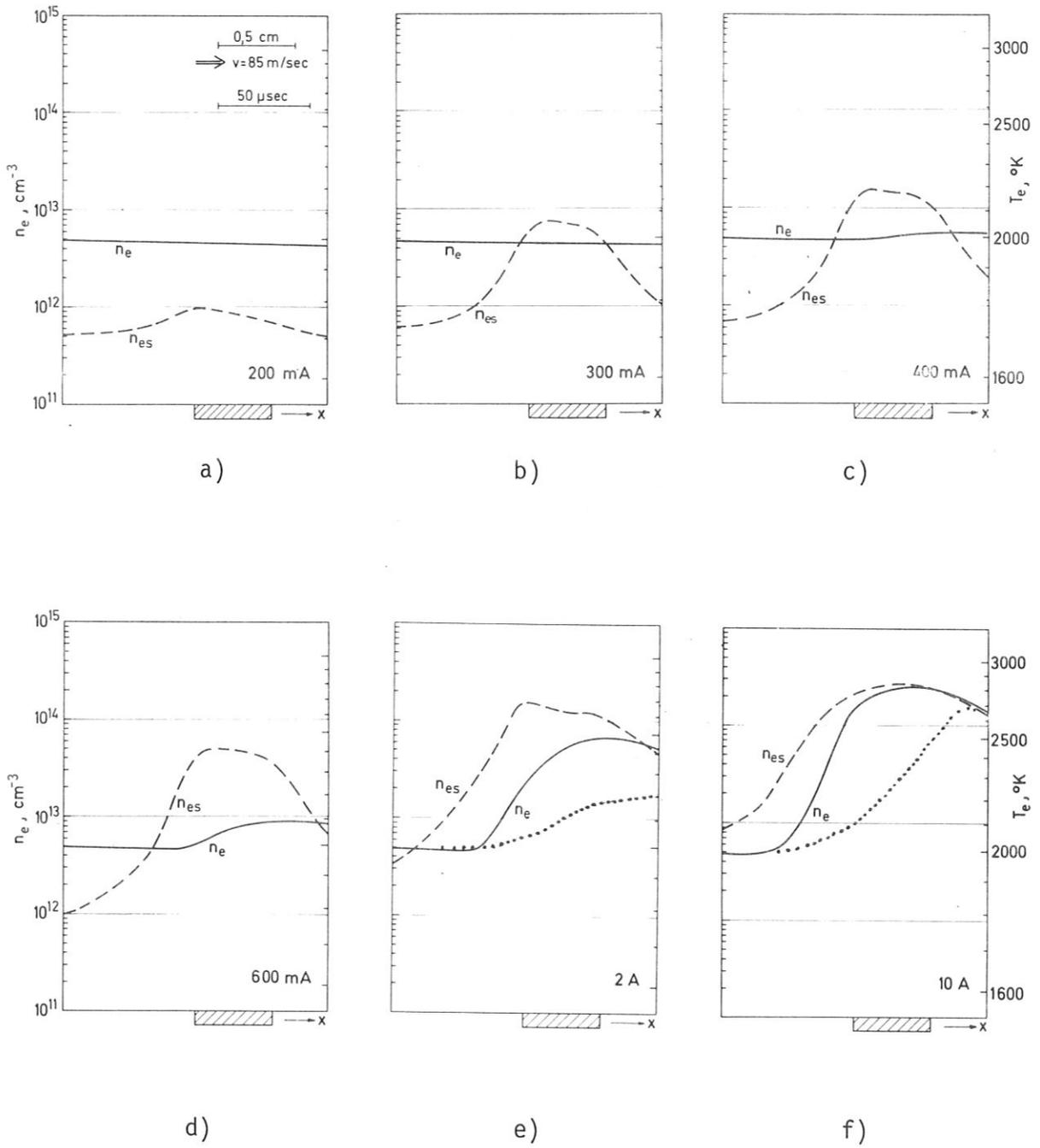


Bild 35 Gemessene Elektronendichterelaxation bei verschiedenen Stromstärken der Entladung

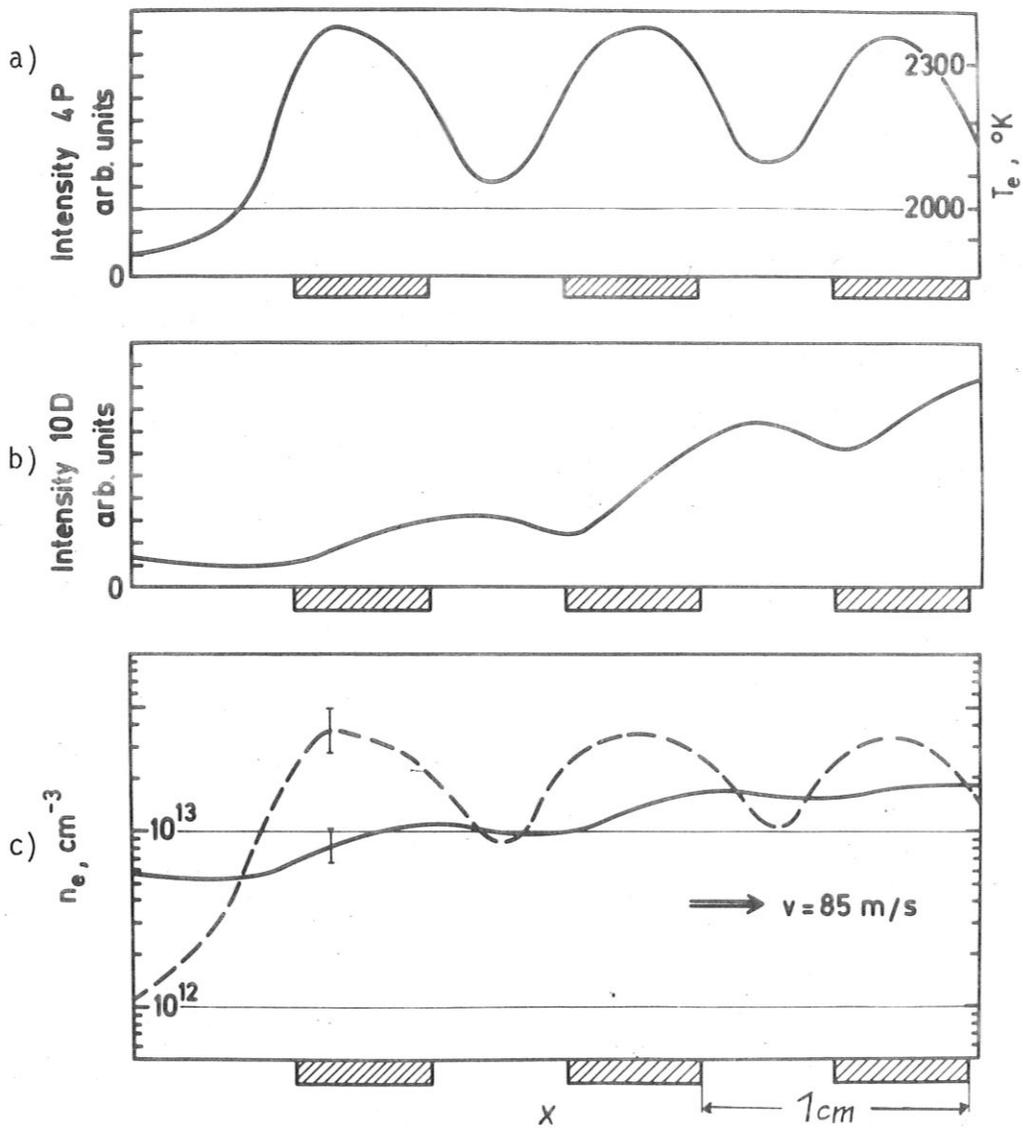


Bild 36

- a) Gemessene Intensitätsverteilung der Resonanzstrahlung entlang dreier Elektroden
- b) Gemessene Intensitätsverteilung der  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  Strahlung
- c) Aus a), b) ermittelte Elektronendichteverteilung (durchgezogen) im Vergleich mit der Sahadichteverteilung (gestrichelt)

(Bild 36c) erkennt man deutlich, wie sich die Elektronendichte allmählich aufschaukelt, wenn das Plasma ein periodisches Elektronentemperaturprofil durchströmt, wie es etwa in der Nähe der segmentierten Elektrodenwand eines MHD-Generators zu erwarten ist.

Wir haben bislang lediglich Relaxationseffekte der Elektronendichte experimentell untersucht. Dabei haben wir die Ergebnisse der quasistationären Theorie der Relaxation nur soweit ausgenutzt, als sie uns die Rechtfertigung für die beiden Meßmethoden lieferte und uns die Berechnung der Elektronendichterelaxation erlaubte. Die quasistationäre Theorie liefert uns aber, wie wir wissen, Information über die Besetzungsdichten aller angeregten Niveaus. Wir wollen deshalb zum Abschluß noch Aussagen der Theorie über die Besetzungsdichten verschiedener angeregter Niveaus in der Relaxationsphase mit dem Experiment vergleichen. Bei Kalium läßt sich das experimentell ohne Schwierigkeiten durchführen, da die Linien der beiden Nebenserien (mit Ausnahme der Übergänge 4P - 3D, 5D) sowie die Resonanzlinien 4S - 4P, 5P im Sichtbaren liegen.

Wir prägen unserem strömenden Plasma durch eine Entladung quer zur Strömungsrichtung wieder ein Elektronentemperaturprofil auf, wobei die experimentellen Bedingungen annähernd denen von Bild 33 entsprechen. Statt jedoch nur wie bisher die Intensitätsverteilung der 4P-Resonanzstrahlung und der 10D-Linienstrahlung entlang der Elektrode zu bestimmen, messen wir der Reihe nach die Intensitätsverteilungen aller gut sichtbaren Linien des Spektrums. Das Ergebnis ist in Bild 37a mit verschiedenen Stricharten aufgetragen.

Die Intensitätsverteilungen sind auf den Anfangswert 1 normiert. Sie sind mit den entsprechenden oberen Energieniveaus gekennzeichnet, deren Besetzungsdichteverteilung sie jeweils repräsentieren. Das im Kaliumtermeschema am tiefsten liegende Energieniveau der Reihe ist das 4P-Resonanzniveau. Die höchsten, kontinuumsnähesten Energieniveaus der Reihe sind die 12S, 10D Niveaus.

Vergleicht man nun die Charakteristiken der verschiedenen Verteilungen mit den Verteilungen der 4P-Resonanzstrahlung und der 10D-Strahlung, so stellt man folgendes fest: Je näher die Energieniveaus, welche die Verteilungen kennzeichnen, dem 4P bzw. 10D Zustand benachbart sind, desto mehr ähneln die entsprechenden Verteilungen der 4P bzw. 10D-Verteilung. So hat das Profil der 5P-Verteilung noch große Ähnlichkeit mit der 4P-Verteilung. Aber schon die 6S, 4D Verteilung unterscheidet sich von der 4P-Verteilung dadurch, daß sie

am linken Bildrand nicht sofort ansteigt, sondern zunächst horizontal verläuft. Ab der 7S, 5D Verteilung stellt man am linken Bildrand statt eines Anstiegs zunächst ein Abfallen fest. Die 9S, 7D Verteilung schließlich besitzt schon große Ähnlichkeit mit der 12S, 10D-Verteilung.

Werten wir die 4P- und die 10D-Verteilung in der gewohnten Weise aus, so erhalten wir eine Elektronentemperatur- und -dichteverteilung, die es uns ermöglicht, jedem Energieniveau eine Sahabesetzungsdichteverteilung sowie eine Boltzmannbesetzungsdichteverteilung bezüglich des Grundzustandes zuzuordnen. In den Bildern 37b, c, d sind diese Verteilungen für die Niveaus  $6S_{1/2}$ ,  $8S_{1/2}$ ,  $9S_{1/2}$  gestrichelt eingezeichnet (mit S bzw. B gekennzeichnet). Gleichzeitig sind in die Bilder (mit "exp." markiert) die tatsächlich gemessenen Besetzungsdichteverteilungen eingezeichnet, die sich aus der quantitativen Auswertung von Bild 37a ergeben. Wie man sieht, ist das gemessene Besetzungsdichteprofil um so mehr "boltzmannsch" je tiefer das jeweilige Energieniveau im Termschema liegt und um so mehr "sahasch" je höher es liegt. Die experimentelle Besetzungsdichteverteilung des Niveaus 4P wäre in einer solchen Darstellung natürlich per definitionem exakt boltzmannsch, ebenso wie die 10P-Verteilung per definitionem exakt sahasch wäre.

Erinnern wir uns, daß aus der quasistationären Theorie für das rein stoßbestimmte Plasma die Ungleichung (2,58) abgeleitet werden konnte, die besagt, daß in der Relaxationsphase die Besetzungsdichten der angeregten Niveaus immer zwischen einer Boltzmannbesetzung bezüglich des Grundzustandes und einer Sahabesetzung liegen, so können wir das Ergebnis der Bilder 37b, c, d grob als experimentelle Bestätigung dieses Satzes ansehen.

Wir können den ganzen betrachteten Relaxationsvorgang aber auch quasistationär durchrechnen, wobei wir lediglich die gemessene Elektronentemperaturverteilung und die gemessene Anfangselektronendichte zugrunde legen. Das Ergebnis der Rechnung (nicht-stoßbestimmter Fall, effektive Wandtemperatur  $2000^{\circ}\text{K}$ ) für verschiedene Besetzungsdichten ist in Bild 38a bis f in analoger Darstellung wie in Bild 37 gezeichnet, wobei die Sahabesetzungsdichteverteilungen auf die errechnete Elektronendichteverteilung bezogen sind. Ein Vergleich der Bilder 37 und 38 zeigt eine gute qualitative Übereinstimmung zwischen dem experimentellen Befund und dem Ergebnis der quasistationären Theorie.

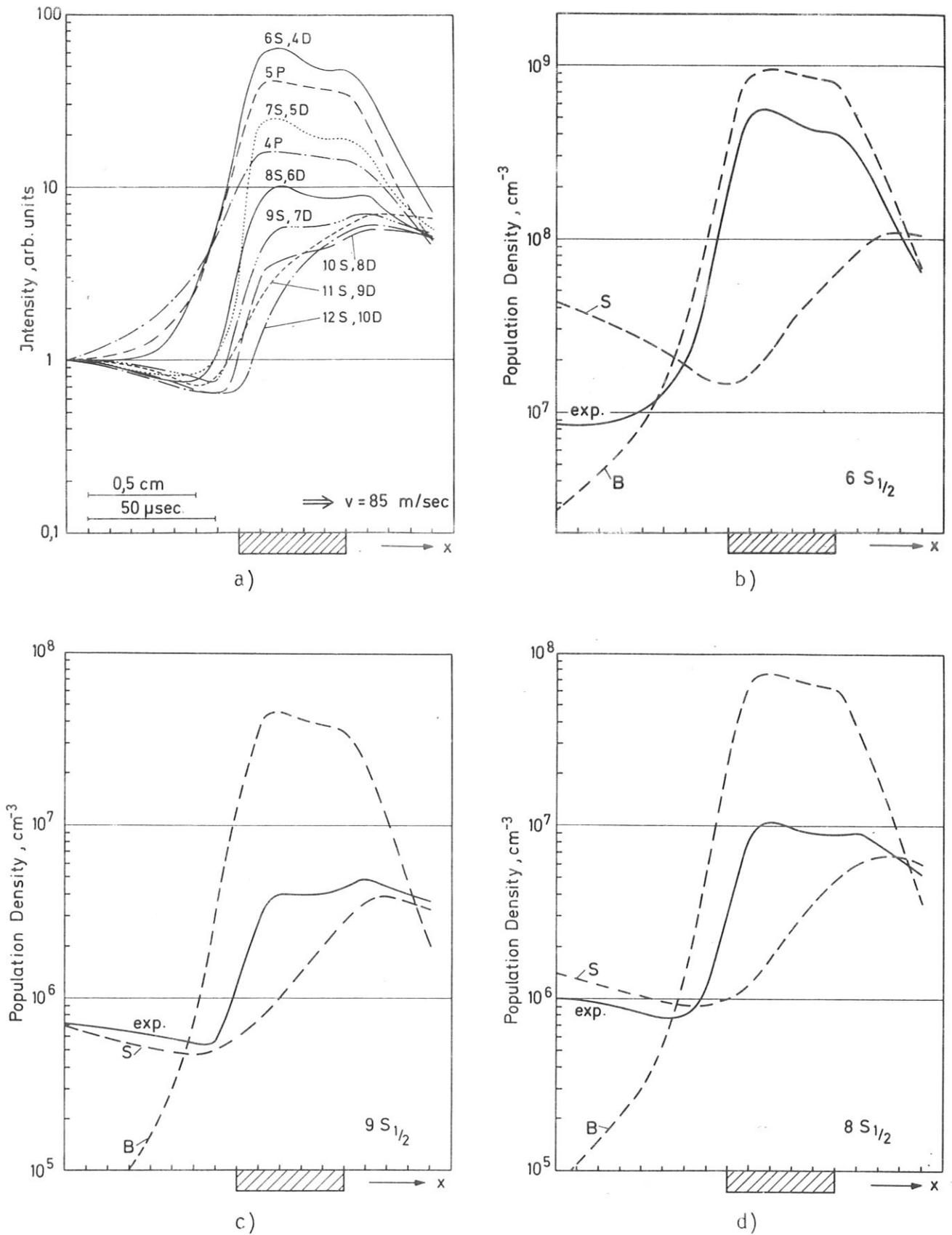
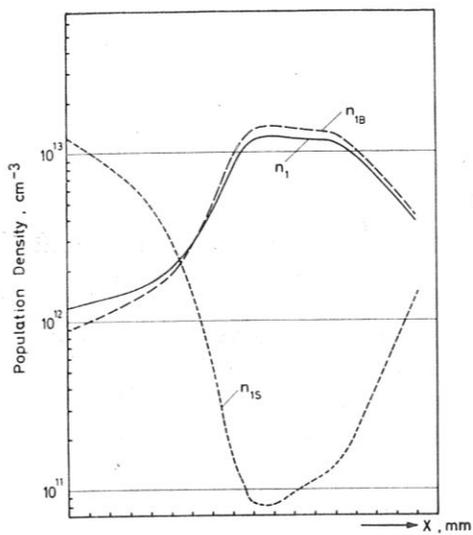
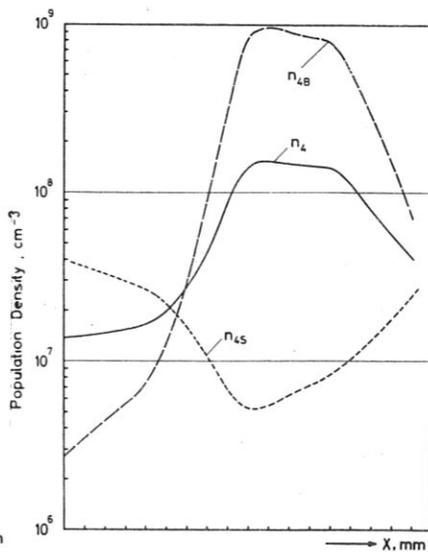


Bild 37

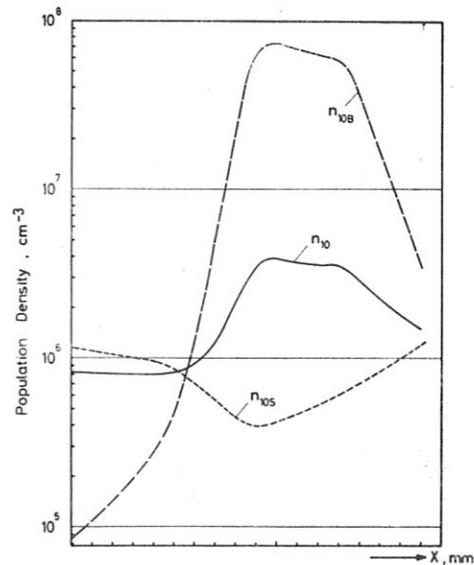
- a) Gemessene relative Intensitätsverteilungen für verschiedene Linien des Kaliumspektrums
- b,c,d) Aus a) ermittelte Besetzungsdichteverteilungen (exp.) im Vergleich mit den entsprechenden Boltzmann (B) und Sahabesetzungsdichten (S).



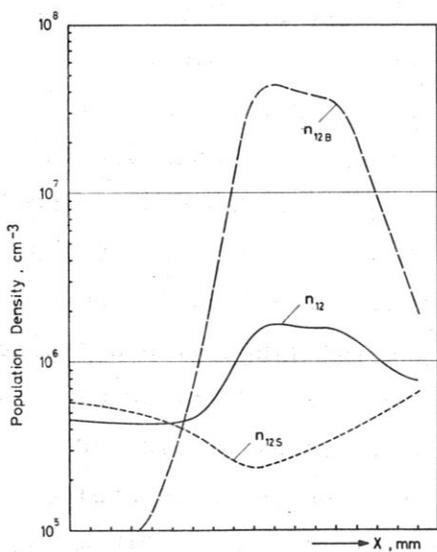
a)



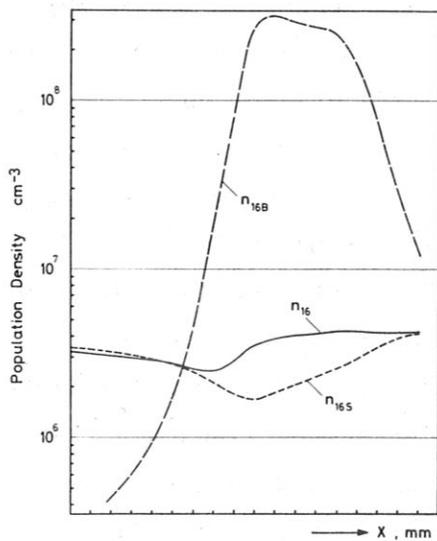
b)



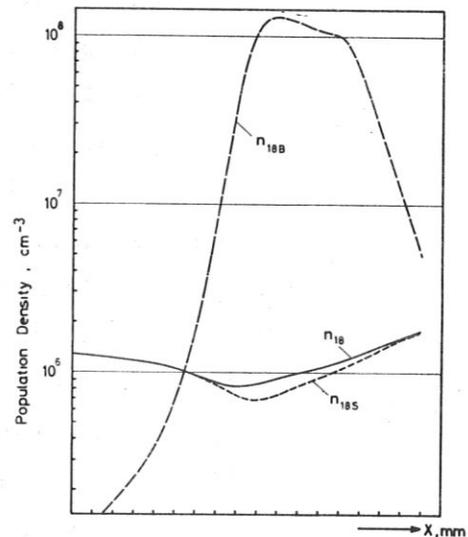
c)



d)



e)



f)

Bild 38 a) - f)

Quasistationär berechnete Besetzungsdichteverteilungen für verschiedene Niveaus bei Vorgabe der Elektronentemperaturverteilung von Bild 37

### 6.2.3 Fehlerbetrachtung

Bei unseren Elektronentemperatur- und Elektronendichtemessungen haben wir zwei Klassen von Fehlern zu unterscheiden: Einmal die Fehler, die mit der praktischen Durchführung der spektroskopischen Methoden verbunden sind, zum anderen die Fehler, die durch die Unsicherheit in der Interpretation der spektroskopischen Ergebnisse bedingt sind. Beschäftigen wir uns zunächst mit der ersten Klasse:

Die Genauigkeit, mit der die Besetzungstemperatur  $T_{10}$  des Kaliumresonanzdoublets mit der Linienumkehrmethode bestimmt werden kann, hängt davon ab, wie genau der verwendete Vergleichsstrahler geeicht ist und wie genau sich der Umkehrpunkt feststellen läßt. Die verwendete Wolframbandlampe wurde mit einem Pyrometer geeicht. Die von der Herstellerfirma genannten Eichdaten lagen gut auf der Eichkurve. Die Strahlungsverluste in Linsen und Fenster der Apparatur wurden berücksichtigt. Die Unsicherheit in der Temperaturmessung, die durch den Vergleichsstrahler bedingt ist, dürfte mit  $\pm 20$  °K realistisch angenommen sein. Ein größerer Fehler in der Temperaturmessung wird dadurch hervorgerufen, daß sich wegen der Inhomogenität des Plasmas in der Beobachtungsrichtung der Umkehrpunkt nicht genau feststellen läßt (vgl. Bild 9c in Abschnitt 4.1). Die hierdurch bedingte Unsicherheit in der Temperaturmessung beträgt etwa  $\pm 50$  °K. Der Meßfehler für den Absolutwert der Besetzungstemperatur liegt also bei etwa  $\pm 70$  °K. Hinzuzufügen ist, daß Relativaussagen über die Temperatur bei den Messungen der Temperaturverteilung sehr viel genauer sind, da die Verteilungen nicht durch Anwendung der Linienumkehrmethode an jeder Stelle, sondern durch Aufnahme der Strahlungsintensitätsverteilungen in einem Zug aufgenommen werden.

Bei der Absolutmessung der Besetzungsdichte, auf der die Elektronendichtebestimmung beruht, wird der Fehler durch die Eichgenauigkeit des Strahlungsnormalis und die Genauigkeit der entsprechenden Strahlungsübergangswahrscheinlichkeit bestimmt. Der mögliche Fehler der Übergangswahrscheinlichkeit für den Übergang  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  beträgt nach WIESE, SMITH und GLENNON (1966)  $\pm 50$  Prozent. Nehmen wir die Eichgenauigkeit der Wolframbandlampe wieder zu  $\pm 20$  °K an, so beträgt der dadurch bedingte Fehler in der Bestimmung der Besetzungsdichte etwa  $\pm 15$  Prozent. Den Größtfehler bei der spektroskopischen Besetzungsdichtebestimmung können wir also mit  $\pm 65$  Prozent ansetzen.

Bei der Bestimmung der Elektronendichte aus der gemessenen Besetzungsdichte mittels der Sahabeziehung (2,3) setzt sich der Gesamtfehler wie folgt zusammen:

$$\frac{\delta n_e}{n_e} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta n_d}{n_d}}_{\approx \pm 30\%} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{\chi_d}{kT_e} \right) \cdot \frac{\delta T_e}{T_e}}_{\approx \pm 3\%} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\chi_d}{kT_e} \cdot \frac{\delta \chi_d}{\chi_d}}_{\text{maximal } \approx +25\%}$$

Die Terme geben der Reihe nach an, welche Auswirkung die Fehler in der Besetzungsdichte, der Elektronentemperatur und der Bindungsenergie des Niveaus auf die ermittelte Elektronendichte haben. Der Fehler in der Bindungsenergie rührt daher, daß über die Erniedrigung der Ionisierungsenergie im Plasma keine sehr sicheren Aussagen gemacht werden können. Bei unseren Auswertungen haben wir die Erniedrigung der Ionisierungsenergie vernachlässigt und die Bindungsenergie des Niveaus  $10D_{5/2}$  zu  $4,34 \text{ eV} - 4,20 \text{ eV} = 0,14 \text{ eV}$  angenommen. Nach der INGLIS-TELLER-Formel hätte man bei unseren Plasmabedingungen mit einer Erniedrigung der Ionisierungsenergie zwischen  $0,02 \text{ eV}$  (bei  $n_e = 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ ) und  $0,07 \text{ eV}$  (bei  $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ) zu rechnen. Da  $\chi_d/kT_e \approx 1$  ist, wären die von uns ausgewerteten Elektronendichten aufgrund dieses Effektes ungünstigstenfalls um 25 Prozent zu niedrig. Der Fehler in der Elektronentemperaturmessung bleibt wegen  $\chi_d/kT_e \approx 1$  praktisch ohne Auswirkung auf die ermittelte Elektronendichte. Dies ist ein großer Vorzug der Methode. Der Gesamtfehler der ermittelten Elektronendichte läßt sich somit - unter der Voraussetzung, daß die Sahabeziehung (2,3) exakt erfüllt ist - mit etwa +50 Prozent und -30 Prozent angeben.

Auch für die Elektronendichtemessung läßt sich wieder feststellen, daß die Relativaussagen bei den Messungen der Elektronendichteverteilung sehr viel genauer sind, weil die Verteilungen durch Aufnahme der Strahlungsintensitätsverteilung in einem Zug gewonnen werden.

Wir haben uns bisher mit den Fehlern beschäftigt, die den beiden spektroskopischen Meßmethoden anhaften, auch wenn die betreffenden Energieniveaus exakt boltzmann- bzw. sahabesetzt sind. Schwieriger ist es, über die Fehler etwas auszusagen, die durch die Abweichungen der Besetzungsdichten von den jeweiligen Boltzmann- bzw. Sahawerten bedingt sind. Könnten wir uns zuverlässig auf die quantitativen Ergebnisse unserer numerischen Rechnungen verlassen, so hätten wir bei unseren Messungen aufgrund solcher Abweichungen noch mit einem zusätzlichen Fehler von etwa  $\pm 50 \text{ }^\circ\text{K}$  bei der Temperaturmessung

und  $\pm 10\%$  bei der Dichtemessung zu rechnen. Jedoch können wir - hauptsächlich wegen der Unsicherheit bei den verwendeten Stoßquerschnitten - nicht ausschließen, daß die Fehlergrenzen tatsächlich vielleicht ungünstiger sind. Aussagen hierüber wären nur möglich, wenn entweder zuverlässige Stoßquerschnitte zur Verfügung stünden oder die Elektronendichte- und -temperaturmessungen mit Ergebnissen genauerer, unabhängiger Meßmethoden verglichen werden könnten.

#### 6.2.4 Grenzen der experimentellen Durchführbarkeit der beiden Meßmethoden

Bei der verwendeten experimentellen Anordnung läßt sich die Linienumkehrmethode ohne Schwierigkeiten für Besetzungstemperaturen bis herab zu  $T_{10} \approx 1500$  °K durchführen. Eine obere Grenze ist prinzipiell erst bei Vollionisierung des Kaliums erreicht. Zu beachten ist, daß die Wolframbandlampe nur bis zu  $T_s \approx 2600$  °K als Vergleichsstrahler verwendbar ist. Linienumkehr wie in Bild 9 läßt sich mit der Wolframbandlampe also nur für Temperaturen bis zu  $T_{10} \approx 2500$  °K sichtbar machen. Höhere Besetzungstemperaturen können jedoch auch mit der Wolframbandlampe als Vergleichsstrahler ermittelt werden und zwar entweder gemäß Gleichung (4,9) (solange die Besetzungsdichten  $n_0$  des Kaliumgrundzustandes nahezu gleich ist der Gesamteilchendichte des Kaliums) oder gemäß Gleichung (4,4), aus der man ableiten kann, daß sich der Umkehrpunkt im Prinzip aus zwei beliebigen Kurven einer Kurvenschar wie in Bild 9 ermitteln läßt.

Die Bestimmung der Besetzungsdichte des  $10D_{5/2}$  Kaliumniveaus aus der Absolutintensität der Strahlung des  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  Übergangs war bei dem verwendeten Empfängersystem ab Elektronendichten  $\gtrsim 5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  möglich.

## 7. Zusammenfassung

Die Zielsetzung der Arbeit, durch die gleichzeitige spektroskopische Bestimmung von Elektronendichte und Elektronentemperatur den Nachweis von Relaxationseffekten in einem strömenden Argon-Kalium-Plasma zu erbringen, berührt die grundsätzliche Problematik der Spektroskopie in relaxierenden Plasmen. Diese besteht darin, daß einerseits ein relaxierendes Plasma per definitionem nicht im Gleichgewicht ist, daß andererseits aber aus den spektroskopisch ermittelten Besetzungsdichten oder Besetzungsdichteverhältnissen nur dann auf Elektronentemperatur oder -dichte geschlossen werden kann, wenn bestimmte Gleichgewichtsrelationen erfüllt sind (Boltzmannbeziehung, Sahabeziehung). Aufgabe des theoretischen Teils der Arbeit ist es deshalb zu zeigen, daß die Besetzungsdichten gewisser Energieniveaus auch in der Relaxationsphase des Plasmas noch hinreichend gut solche Gleichgewichtsrelationen erfüllen. Daß dies grundsätzlich möglich ist, wird an einem stoßbestimmten Modellplasma aus 3-Niveaumatomen plausibel gemacht und schließlich allgemein auf der Grundlage der quasistationären Theorie von BATES, KINGSTON und McWHIRTER nachgewiesen. Die Voraussetzungen für die Gültigkeit dieser Theorie werden hergeleitet, losgelöst von dem anschaulichen Bild des "nahezu instantan sich einstellenden Quasigleichgewichts der Besetzungsdichten der angeregten Niveaus", das i.a. zu ihrer Begründung angeführt wird. Es wird ferner die Möglichkeit skizziert, die quasistationäre Lösung in den Fällen, in denen sie eine schlechte Näherung des Relaxationsproblems darstellt, als Ausgangspunkt für ein Iterationsverfahren zu benutzen.

Die quasistationäre Theorie wird an einem 18-Niveau Modell des Kaliumatoms unter Verwendung der GRYZINSKI'schen Stoßquerschnitte numerisch durchgeführt. Sie liefert Information sowohl über die Besetzungsdichten, als auch über die Kinetik des Relaxationsvorgangs (Rekombinations- und Ionisationskoeffizienten) sowie das Ionisationsgleichgewicht.

Für die Spektroskopie ergeben die Besetzungsdichteberechnungen, daß innerhalb von relativ breiten Elektronentemperatur- und Elektronendichtebereichen

- (a) das Kaliumresonanzniveau bezüglich des Grundzustandes angenähert eine Boltzmannbesetzung bei der Elektronentemperatur aufweist
- (b) die kontinuumsnahen Niveaus angenähert sahabesetzt sind, unabhängig davon, ob das Plasma sich in einer Rekombinations- oder Ionisationsphase befindet

oder im Gleichgewicht ist. Physikalisch kann dies im Fall (a) mit einer starken Elektronenstoß"kopplung" des Resonanzniveaus an den Grundzustand, im Fall (b) mit einer starken Kopplung der kontinuumsnahen Niveaus an die freien Elektronen erklärt werden. Unter "kontinuumsnah" hat man in diesem Zusammenhang etwa die Niveaus ab den  $12S$ ,  $10D$  Niveaus zu verstehen. Die Energieniveaus zwischen dem Resonanzniveau und diesen Niveaus sind zur Spektroskopie ungeeignet. Ihre Besetzungen weichen in der Relaxationsphase zum Teil erheblich von den entsprechenden Gleichgewichtsrelationen ab. Dies wird an einem Beispiel demonstriert, bei dem ein definiertes Relaxationsproblem quasistationär durchgerechnet wird. An dem Beispiel wird ferner die Gültigkeitsgrenze der quasistationären Näherung gezeigt.

Im Experiment wird die Elektronentemperatur durch Linienumkehr des Kaliumresonanzdubletts, die Elektronendichte durch Absolutmessung der Intensität des optisch dünnen  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  Übergangs ermittelt.

Es werden zunächst Messungen unter angenähert homogenen Plasmabedingungen durchgeführt, bei denen man keine Relaxationseffekte, d.h. Ionisationsgleichgewicht erwarten sollte. Dabei zeigt sich, daß die Meßkurve  $n_e(T_e)$  erheblich über der Ionisationsgleichgewichtskurve liegt, die sich aus den durchgeführten Berechnungen ergibt. Dieses Resultat stützt die Ergebnisse von Autoren, die der Wandstrahlung eine wichtige Rolle bei der Einstellung des Ionisationsgleichgewichts beimessen. Es konnte ferner bestätigt werden, daß die Elektronendichte im Plasma bei geringen Stromstärken sogar über der Sahaelektronendichte liegt, ein Effekt, der schon früh aufgrund von Leitfähigkeitsmessungen gefordert wurde und darauf zurückzuführen ist, daß der verwendete Plasmabrenner eine Vorionisation bewirkt.

Zur Untersuchung von Relaxationseffekten werden dem Plasma durch Entladungen quer zur Strömungsrichtung Elektronentemperaturprofile aufgeprägt. Diese Temperaturprofile und die sich einstellenden Elektronendichteprofile werden durch gleichzeitige Messung der Intensitätsverteilungen von Kaliumresonanzstrahlung und  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  Linienstrahlung in Strömungsrichtung bestimmt. Ein Vergleich der gemessenen Elektronentemperaturverteilung mit den gemessenen Elektronendichteverteilungen beweist den maßgeblichen Einfluß der relativ langsamen Elektronendichterelaxation auf die sich einstellende Verteilung. Die gemessenen Elektronendichteverteilungen werden mit Verteilungen verglichen, die sich aus der quasistationären Theorie für die gemessenen Temperaturverteilungen berechnen. Die Übereinstimmung ist qualitativ gut. Quantitativ ergeben die Rechnungen eine langsamere Elektronen-

dichterelaxation als die Messungen.

Zum Abschluß der Arbeit wird über ein Experiment berichtet, bei dem die Strahlungsintensitätsverteilungen einer Anzahl von Linien des Kaliumspektrums gemessen und mit den Intensitätsverteilungen der Resonanzstrahlung und der  $4P_{3/2} - 10D_{5/2}$  Strahlung verglichen werden. Dabei zeigen sich deutliche Unterschiede in der Charakteristik der verschiedenen Verteilungen, die mit der quasistationären Theorie qualitativ gut erklärt werden können.

Ich danke allen, die in irgend einer Weise zu dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders danke ich Herrn Prof. Dr. R. Wienecke für die Anregung des Themas und sein förderndes Interesse. Herrn Dr. C. Mahn danke ich für die Einführung in den Problemkreis. Die Experimente wurden in der MHD-Gruppe des Max-Planck-Instituts für Plasmaphysik, Garching, durchgeführt. Den Herren Dr. M. Salvat und Dr. G. Brederlow bin ich in diesem Zusammenhang zu Dank verpflichtet. Besonderer Dank gilt ferner Herrn H. Gorenflo, der die numerischen Rechnungen programmierte, Herrn A. Herrle, der das Experiment betreute und den Damen D. Hamann, M. Klett und R. Pollner, die für die fristgerechte Fertigstellung von Zeichnungen und Manuskript sorgten.

LITERATURVERZEICHNIS

- BARTELS, H. Z. Phys. 127, 243 (1950)
- BATES, D.R.  
KINGSTON, A.E. und  
McWHIRTER R.W.P. Proc. Roy. Soc. A 267, 297, A 270,  
155 (1962)
- BERTOLINI, E.  
TOSCHI, R. und  
McNAB, J.R. Proc. Symp. MHD Electrical Power  
Generation, Salzburg, 1966
- BORN, M. Z. Phys. 37, 863 (1926)
- BURGER, J. Rep. Nr. IPP 3/104  
Institut für Plasmaphysik,  
Garching bei München
- BYRON, S.  
BORTZ, P. I. und  
RUSSELL, G. Proc. 4<sup>th</sup> Symp. on Engin. Aspects of  
Magnetohydrodynamics (University of  
California Press, Berkeley, Cal., 1963)
- COOL, T.A. und  
ZUKOSKI, E.E. Phys. Fluids 9, 780 (1966)
- DE VOS, J.C. Physica XX, 690 (1954)
- DODEL, G. Rep. Nr. IPP 3/63 (1967), Institut für  
Plasmaphysik, Garching bei München.  
Plasma Physics, Vol. 12, 265 (1970)  
Plasma Physics, Vol. 12, 273 (1970)
- DRAWIN, H.W. Rep. Nr. EUR-CEA-FC-383 (1966),  
Association-Euratom-C.E.A.,  
Fontenay-aux-Roses
- EICHERT, K.,  
KAEPPELER, H.J. und  
MAYSER, B. Rep. Nr. 3-7, Institut für Hochtemperatur-  
forschung der T.H. Stuttgart (1965)
- FISCHER, F.W. AIAA J. 6, 894 (1968)
- FRÖHLICH, G. Dissertation, Universität Stuttgart (1968)

- GRYZINSKI, M. Phys. Rev. 115, 374 (1959)
- KERREBROCK, J.L. Eng. Aspects of Magnetohydrodynamics  
(Columbia Univ. Press, New York, 1962)  
327-346
- KERREBROCK, J.L. und  
HOFFMAN, M.A. AIAA J. 2, 1080 (1964)
- LENGYEL, L.L. Energy Conversion 9, 13 (1969)
- MAHN, C. private Mitteilung (1968)
- McGREGOR, D.D.  
MITCHNER, M.  
SHAW, J.F. AIAA J. 8,908 (1970)
- McWHIRTER, R.W.P.  
HEARN, A.G. Proc. Phys. Soc. 82, 641 (1963)
- NORCROSS, D.W. und  
STONE, P.M. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 6,  
277 (1966)
- RIEDMÜLLER, W. Rep. IPP 3/31 (1965) Institut für  
Plasmaphysik, Garching bei München
- RIEDMÜLLER, W.,  
BREderLOW, G.,  
SALVAT, M. Z. Naturforschung 23a, 731 (1968)
- SCHWENN, R.  
BREderLOW, G. und  
SALVAT, M. Plasma Physics 10, 1077 (1968)
- SEATON, M.J. Atomic and Molecular Processes,  
Ed. D.R. BATES, Academic Press,  
New York, 1962
- STÄHLE, M.  
BURKHARDT, H. Proc. Symp. MHD Electrical Power Generation  
Salzburg (1966)
- SUTTON, G.W.  
SHERMAN, A. "Engineering Magnetohydrodynamics"  
McGraw-Hill Inc., 1965
- THOMSON, J.J. Phil. Mag. 23, 419 (1912)

WIESE, W.L.,  
SMITH, M.W. und  
GLENNON, B.M.

Atomic Transition Probabilities I,  
NSRDS-NBS4, National Bureau of Standards,  
Washington (1966)

ZUKOSKI, E.E.  
COOL, T.A. und  
GIBSON, E.G.

AIAA J. 2, 1410 (1964)

ZUKOSKI, E.E. und  
COOL, T.A.

AIAA J. 3, 370 (1965)