

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN

Über invariante Kurven ebener Abbildungen

(On Invariant Curves of Plane Mappings)

Karl Graf Finck v. Finckenstein
Karl-Ulrich v. Hagenow
Arnulf Schlüter

IPP 6/100

November 1971

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract:

This report deals with a special problem relating to the existence of magnetic surfaces near the axis of a toroidal magnetic field: Given a plane mapping T with a fixed point p ; what are the conditions under which T has invariant curves around p ? First the case where the curves concerned are ellipses or hyperbolae is discussed. Here all continuous mappings which keep such curves invariant can be characterized. A few more general investigations are then made and, finally, examples are studied.

Einleitung

Die Frage nach der Existenz magnetischer Flächen in einer Umgebung der Achse eines toroidalen Magnetfeldes ist von großem Interesse. Der vorliegende Bericht beschäftigt sich mit einem Teilproblem dieser Frage: Es sei eine ebene, hinreichend oft differenzierbare Abbildung T in der Umgebung $U(p)$ eines Fixpunktes p gegeben. Gesucht werden Bedingungen, unter denen T invariante geschlossene Kurven in $U(p)$ besitzt.

Im Jahre 1962 wurde von J. Moser die Existenz solcher invarianter Kurven in einem konzentrischen Kreisring nachgewiesen, falls die betreffende Abbildung ein flächentreuer sog. gestörter Kreistwist ist, und falls die Störungen gewissen Differenzierbarkeits- und Beschränktheitsvoraussetzungen genügen. Dieses Ergebnis wurde 1970 von H. Rüssmann verschärft, indem die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen der Störungsfunktionen abgeschwächt werden konnten. Offen blieb hierbei allerdings die Frage nach der (wenigstens lokalen) Existenz eines sog. vollständigen Satzes invarianter Kurven um p , d.h. die Frage, ob eine Umgebung $U(p)$ schlicht überdeckende Schar einfach geschlossener Kurven um p existiert, die unter der Abbildung T invariant bleibt. Offensichtlich ist es recht schwierig, für die Praxis brauchbare Kriterien für diese Eigenschaft zu finden.

Der erste Abschnitt dieses Berichtes behandelt den Fall, daß die betreffende ebene Abbildung linear ist. Im zweiten Abschnitt werden alle eindeutigen und stetigen ebenen Abbildungen charakterisiert, die einen vollständigen Satz von Kurven zweiter Ordnung invariant lassen. Ferner wird eine Eigenschaft dieser Abbildungen angegeben, die mit der Flächen-

treue äquivalent ist. Im letzten Abschnitt werden Beispiele untersucht. Insbesondere wird gezeigt, wie man bei einer Abbildung prüfen kann, ob der Moser'sche Satz anwendbar ist. Das Problem der Existenz eines vollständigen Satzes invarianter Kurven wird zwar nicht gelöst; jedoch durch eine "im Kleinen" geringe Modifikation der vorgelegten Abbildung kann man diese Eigenschaft erzwingen.

Frau Ute Berkl und Frau Vera Welge danken wir für die Herstellung der Plottprogramme.

1. Über lineare ebene Abbildungen und invariante Kurven zweiter Ordnung

Es sei y ein reeller Spaltenvektor mit den Komponenten x, y . Ferner seien die im folgenden auftretenden Matrizen quadratische, reelle, 2-reihige Matrizen. Mit M' (bzw. y') bezeichnen wir die zur Matrix M transponierte Matrix (bzw. den zu y transponierten Vektor).

Wir interessieren uns für nicht ausgeartete Kurven 2. Ordnung (Ellipsen und Hyperbeln) mit dem Mittelpunkt $\sigma = (0,0)$. Sie können dargestellt werden durch

$$\mathcal{L}(c) = \{ y : y' B y = c, c \in \mathbb{R} - \{0\} \},$$

wobei $B = \begin{pmatrix} b_{11} & d \\ d & b_{22} \end{pmatrix}$ symmetrisch und regulär sei.

Falls B positiv (negativ) definit ist, stellt $\mathcal{L}(c)$ eine Ellipse dar (c ist dann natürlich positiv (negativ)), für indefinites B handelt es sich um eine Hyperbel. Zu einer Kurve 2. Ordnung können wir den zugehörigen vollständigen Kurvensatz

$$\bigcup_{c \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(c)$$

bilden; dabei durchläuft der Parameter c im definiten Fall natürlich nur die reellen Zahlen eines Vorzeichens. Es ist klar, daß jede symmetrische, reguläre Matrix B eindeutig einen vollständigen Satz von Kurven 2. Ordnung definiert. Wir bezeichnen diesen mit $\mathcal{L}(B)$.

Gegeben sei eine lineare reguläre Abbildung der Ebene mit $\sigma = (0,0)$ als Fixpunkt. Sie wird beschrieben durch eine reguläre Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen die Abbildung ebenfalls mit A .

Def. 1: Man sagt, A läßt die Kurve $\mathcal{L}(c)$ invariant, wenn folgendes gilt:

Erfüllt y die Bedingung: $y' B y = c$, dann erfüllt y auch die

Bedingung: $y' A' B A y = c$.

Es gilt:

Satz 1: Gegeben seien eine lineare ebene eineindeutige Abbildung A und ein vollständiger Satz von Kurven zweiter Ordnung, $\bigcup_{c \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(c)$, definiert durch die symmetrische reguläre Matrix B . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es gibt ein $c \neq 0$, so daß A die Kurve $\mathcal{L}(c)$ invariant läßt.
 (ii) A läßt den vollständigen Kurvensatz $\mathcal{L}(B) = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(c)$ kurvenweise invariant.
 (iii) Es gilt: $A' B A = B$.

Beweis: leicht nachzurechnen.

Wir fragen nach Bedingungen für A , unter denen die Gleichung (iii) gilt. Für B können wir schreiben:

$$B = U' D U, \quad (1)$$

wobei U orthogonal und $D = \text{Diag}(\lambda, \mu)$ ist; $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ sind die Eigenwerte von B . Mit $M = U A U'$ folgt aus (iii):

$$D = M' D M. \quad (2)$$

Es ergibt sich:

$$\text{Det } M = \text{Det } A = \pm 1. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\pm D \cdot M = M' \cdot D,$$

oder, wenn wir $M = (m_{ik}), i, k = 1, 2$ setzen:

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= \pm m_{22} \\ m_{12} &= \mp \frac{\mu}{\lambda} \cdot m_{21} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Damit ergibt sich für A eine der folgenden Formen:

$$A = \begin{cases} U' \cdot \begin{pmatrix} a & -\frac{\mu}{\lambda} b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot U \\ U' \cdot \begin{pmatrix} a & \frac{\mu}{\lambda} b \\ b & -a \end{pmatrix} \cdot U \end{cases} \quad (5)$$

mit: $a^2 + \frac{\mu}{\lambda} b^2 = 1, a, b \in \mathbb{R}, U$ orthogonal

Hat A umgekehrt die Gestalt (5), ist natürlich auch (iii) erfüllt.

Damit folgt:

Satz 2: Die Matrix B von Satz 1 habe die Form $B = U' \cdot \text{Diag}(\lambda, \mu) \cdot U$.

Dann sind die Aussagen (i), (ii), (iii) von Satz 1 äquivalent damit,

daß A die Gestalt (5) hat.

Für die Eigenwerte ρ_1, ρ_2 von A ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= a + ib \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \\ \rho_2 &= a - ib \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \end{aligned} \right\} \text{ falls } \text{Det } A = 1$$

und:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= 1 \\ \rho_2 &= -1 \end{aligned} \right\} \text{ falls } \text{Det } A = -1 \quad (6)$$

Anmerkung 1: Hat A die Gestalt (5), dann ist A stets diagonalähnlich.

Für $\text{Det } A = -1$ (zweite Zeile von Formel (5)) ist A involutorisch:

$$A^2 = I.$$

Anmerkung 2: Für $\text{Det } A = 1$ unterscheiden wir zwei Fälle:

a) $\frac{\mu}{\lambda} > 0$, dann sind ρ_1, ρ_2 konjugiert komplex oder $A = \pm I$.

Mit $\cos \varphi = a$, $\sin \varphi = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \cdot b$ ergibt sich:

$$A = U' \cdot \text{Diag}(\sqrt{|\mu|}, \sqrt{|\lambda|}) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot [U' \cdot \text{Diag}(\sqrt{|\mu|}, \sqrt{|\lambda|})]^{-1}.$$

b) $\frac{\mu}{\lambda} < 0$, dann sind ρ_1, ρ_2 reell oder $A = \pm I$.

Mit $\cosh \varphi = a$, $\sinh \varphi = \sqrt{\left| \frac{\mu}{\lambda} \right|} \cdot b$ ergibt sich:

$$A = U' \cdot \text{Diag}(\sqrt{|\mu|}, \sqrt{|\lambda|}) \cdot \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \cdot [U' \cdot \text{Diag}(\sqrt{|\mu|}, \sqrt{|\lambda|})]^{-1}.$$

Diese Zerlegungen von A sind für manche Anwendungen nützlich. Wir fassen die Untersuchungen zusammen in

Satz 3: Es sei $\mathcal{L}(B)$ ein vollständiger Satz von Kurven 2. Ordnung

mit $B = U' \cdot \text{Diag}(\lambda, \mu) \cdot U$, U orthogonal. Die Gesamtheit

aller linearen Abbildungen A , die $\tilde{\mathcal{L}}(B)$ als invariante Kurvenschar besitzt, ist gegeben durch die Formel (5).

Wir gehen jetzt den umgekehrten Weg, indem wir fragen, unter welchen Bedingungen eine vorgelegte lineare Abbildung A einen Satz invarianter Kurven 2. Ordnung $\tilde{\mathcal{L}}(B)$ besitzt.

Es seien ρ_1, ρ_2 die Eigenwerte von A . Dann betrachten wir folgende Mengen 2-reihiger reeller Matrizen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \{ I, -I \} \\ \mathcal{M}_2 &= \{ A : \rho_1 \cdot \rho_2 = 1, \rho_1 \neq \rho_2 \} \\ \mathcal{M}_3 &= \{ A : \rho_1 = 1, \rho_2 = -1 \} \\ \mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3. \end{aligned}$$

Satz 4: Notwendig und hinreichend dafür, daß die lineare Abbildung A einen Satz invarianter Kurven 2. Ordnung, $\tilde{\mathcal{L}}(B)$, besitzt, ist die Bedingung: $A \in \mathcal{M}$.

Beweis: Nach dem Vorhergehenden ist Satz 4 bewiesen, wenn gezeigt wird, daß \mathcal{M} identisch ist mit den Matrizen A der Form (5), wobei U alle orthogonalen Matrizen durchläuft. Mit (6) folgt sofort:

$$\{ A : A \text{ hat die Form (5)} \} \subset \mathcal{M}.$$

Es ist noch die umgekehrte Richtung zu zeigen; wir beweisen, daß jede Matrix $A \in \mathcal{M}$ eine (nicht ausgeartete) Kurve 2. Ordnung invariant läßt. Mit (i) von Satz 1 und mit Satz 2 folgt dann das Gewünschte.

Für $A \in \mathcal{M}_1$ ist alles trivial.

Es sei $A \in \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$. A ist diagonalisierbar:

$$A = T^{-1} \Delta \cdot T \quad (7)$$

mit $\Delta = \text{Diag}(\rho_1, \rho_2)$.

Wir zeigen, daß die Gleichung

$$A' B A = B \quad (8)$$

eine symmetrische, reelle, reguläre Lösung B besitzt.

Mit:

$$C := (T^{-1})' \cdot B \cdot T^{-1} \quad (9)$$

folgt aus (7) und (8):

$$\Delta \cdot C \cdot \Delta = C$$

oder

$$\pm C \cdot \Delta = \Delta_{\text{ad}} \cdot C \quad (10)$$

Dabei gilt das positive Vorzeichen für $A \in \mathcal{M}_2$, das negative Vorzeichen für $A \in \mathcal{M}_3$. Für die symmetrische Matrix C setzen wir:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & d \\ d & c_2 \end{pmatrix}$$

und erhalten aus den Gleichungen (10):

1. $c_1 = c_2 = 0$, d beliebig, für $A \in \mathcal{M}_2$
2. $d = 0$, c_1, c_2 beliebig, für $A \in \mathcal{M}_3$. (11)

Wir untersuchen jetzt die zu A gehörige Eigenvektormatrix T^{-1} .

Durch Nachrechnen beweist man sofort:

Hilfssatz 1: Hat A die Gestalt: $A = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ a_{21} & \rho_2 \end{pmatrix}$,

dann ist die Matrix:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21}(\rho_1 - \rho_2)^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

eine Eigenvektormatrix zu A. T^{-1} und T sind reell.

Hilfssatz 2: Für $A = (a_{ik})$; $i, k = 1, 2$; $a_{12} \neq 0$, ist die Matrix

$$T^{-1} = a_{12}^{-1} \cdot (\rho_2 - \rho_1)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \rho_1 - a_{11} & \rho_2 - a_{11} \end{pmatrix}$$

eine Eigenvektormatrix zu A. T hat die Form:

$$T = \begin{pmatrix} \rho_2 - a_{11} & -a_{12} \\ -(\rho_1 - a_{11}) & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Für $A \in \mathcal{M}_3$ ist T reell.

Ist nun $A \in \mathcal{M}_3$, dann folgt wegen der Hilfssätze, daß die Matrix $B = T'CT$ eine symmetrische, reelle, reguläre Lösung von (8) ist, sofern κ_1 und κ_2 in (11) von Null verschieden und reell gewählt werden. Für $A \in \mathcal{M}_2$ folgt genau dasselbe, wenn A die Dreiecksgestalt von Hilfssatz 1 hat und $d \in \mathbb{R} - \{0\}$ gewählt wird. Hat A die Gestalt des Hilfssatzes 2, dann ergibt sich:

$$B = T'CT = d \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot (\beta_2 - a_{11}) \cdot (\beta_1 - a_{11}) & a_{12} \cdot (\beta_1 + \beta_2 - 2a_{11}) \\ a_{12} \cdot (\beta_1 + \beta_2 - 2a_{11}) & -2a_{12}^2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Man sieht, daß für $d \in \mathbb{R} - \{0\}$ wieder eine symmetrische, reelle und reguläre Lösung von (8) ist. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Wir wollen nun zu einer gegebenen Abbildung $A \in \mathcal{M}$ alle Kurven 2. Ordnung finden, die unter A invariant bleiben. Dazu bestimmen wir (bis auf einen reellen Faktor) alle regulären symmetrischen Matrizen $B = T'CT$, wobei T^{-1} alle Eigenvektormatrizen von A und C alle Matrizen durchläuft, so daß (11) erfüllt ist. Es kommen natürlich nur reelle B in Frage. Wir setzen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad a_{12} \neq 0, \quad A = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ a_{21} & \beta_2 \end{pmatrix} \quad a_{12} = 0, \\ \text{Det } A = \beta_1 \cdot \beta_2, \quad \text{Sp } A = \beta_1 + \beta_2.$$

Für die Eigenwerte von A gilt:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\text{Sp } A + \sqrt{(\text{Sp } A)^2 - 4 \text{Det } A} \right) \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\text{Sp } A - \sqrt{(\text{Sp } A)^2 - 4 \text{Det } A} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Es ergibt sich hieraus folgende Klassifizierung:

1. $A \in \mathcal{M}_1 \quad \not\propto \quad A = \pm I$

A läßt alle nichtausgearteten Kurven 2. Ordnung invariant.

Zugehörige Matrizen B:

B beliebig, symmetrisch, reell, regulär.

2. $A \in \mathcal{M}_2 \quad \not\approx \quad \text{Det } A = 1, |S_p A| \neq 2$

a) $|S_p A| > 2 \quad \not\approx \quad \beta_1, \beta_2 \text{ reell}$

A läßt Hyperbeln invariant.

b) $|S_p A| < 2 \quad \not\approx \quad \beta_1, \beta_2 \text{ konjugiert komplex}$

A läßt Ellipsen invariant.

Zugehörige Matrizen B:

$$B = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2a_{21} & \beta_2 - \beta_1 \\ \beta_2 - \beta_1 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } a_{12} = 0 \\ \begin{pmatrix} 2a_{21} & a_{22} - a_{11} \\ a_{22} - a_{11} & -2a_{12} \end{pmatrix} & \text{für } a_{12} \neq 0 \end{cases} \quad (14)$$

3. $A \in \mathcal{M}_3 \quad \not\approx \quad \text{Det } A = -1, S_p A = 0$

A läßt sowohl Ellipsen als auch Hyperbeln invariant.

Zugehörige Matrizen B:

$$B = \begin{cases} \begin{pmatrix} t + a_{21}^2 & -2a_{21} \\ -2a_{21} & 4 \end{pmatrix} & \text{für } a_{12} = 0 \\ & t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ \begin{pmatrix} [1+a_{11}]^2 + t \cdot [1-a_{11}]^2 & a_{12} [1+a_{11} - t(1-a_{11})] \\ a_{12} [1+a_{11} - t(1-a_{11})] & a_{12}^2 [1+t] \end{pmatrix} & \text{für } a_{12} \neq 0 \\ & t \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \quad (15)$$

Anmerkung 3: Ist $\text{Det } B > 0$ (bzw. < 0), dann sind die invarianten Kurven Ellipsen (bzw. Hyperbeln).

Im Falle der Hyperbeln sind die Asymptotenrichtungen die Eigenrichtungen der Abbildung A .

Anmerkung 4: Für $A \in \mathcal{M}_2$ ergibt sich für das Quadrat des Halbachsenverhältnisses der invarianten Kurvenschar - wir nennen es q - folgende Formel:

$$q = \frac{a_{21} - a_{12} + \sqrt{[A] - 2}}{a_{21} - a_{12} - \sqrt{[A] - 2}}$$

mit: $[A] = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2$. Bis auf ein Reziprokes ist q gleich dem Verhältnis der Eigenwerte λ, μ von B .

Zum Schluß wollen wir noch zeigen, daß in einem gewissen Sinne "fast alle" linearen orientierungserhaltenden ebenen Abbildungen, die eine geschlossene Kurve um O invariant lassen, als invariante Kurven nur Ellipsen haben.

Def. 2.: \mathcal{L} heißt schlichte geschlossene Kurve um O , wenn \mathcal{L} topologisch äquivalent einer konzentrischen Kreislinie um O ist und jede von O ausgehende Halbgerade in genau einem Punkt schneidet.

Def. 3.: Es sei A eine 2×2 - Matrix mit $\text{Det } A = 1$ und $|\text{Sp } A| < 2$. Dann setzen wir:

$$r(A) := \frac{1}{2\pi} \cdot \arccos \left(\frac{\text{Sp } A}{2} \right),$$

wobei $0 \leq \arccos \left(\frac{\text{Sp } A}{2} \right) \leq \pi$ zu wählen ist. Es gilt also:

$$0 \leq r(A) \leq \frac{1}{2}.$$

$r(A)$ heißt die Rotationszahl der linearen Abbildung A .

Satz 5: Sei $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine eindeutige, orientierungserhaltende, lineare Abbildung, gegeben durch die Matrix A . Sei \mathcal{L} eine schlichte geschlossene Kurve um O , die unter T invariant bleibt. Weiter sei $r(A)$ irrational. Dann besitzt T einen vollständigen Satz invarianter Ellipsen, $\mathcal{L}(B)$, und es ist $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(B)$.

Beweis: Wegen $T(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ folgt sofort: $\text{Det } A = 1$ und $|\text{Sp } A| < 2$, denn anderenfalls wäre entweder $A = \pm I$,

also $\tau(A)$ rational, oder die Folge der Potenzen A^n , $n = 1, 2, \dots$, würde unbeschränkt wachsen, was im Widerspruch zu $T(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ stände. Aus den früheren Überlegungen folgt also, daß T einen vollständigen Satz invarianter Ellipsen $\mathcal{L}(B)$ besitzt.

Sei $\tilde{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}(B)$ diejenige Ellipse, deren Inneres den gleichen Flächeninhalt wie das Innere von \mathcal{L} hat. Dann existiert ein Punkt p mit:

$$p \in \tilde{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L} \quad . \quad (16)$$

Wegen der Irrationalität von $\tau(A)$ folgt durch eine leichte Überlegung wegen (16):

$$\overline{0 \pm b p} = \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n(p)} = \tilde{\mathcal{L}} \quad . \quad (17)$$

Wegen $p \in \mathcal{L}$ gilt andererseits:

$$\overline{0 \pm b p} \subset \overline{0 \pm b \mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \quad ,$$

also wegen (17): $\tilde{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$ d.h.:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \quad . \quad (18)$$

Damit ist alles bewiesen.

q.e.d.

II. Nichtlineare ebene Abbildungen

Sei $\tilde{\mathcal{L}}(B)$ ein vollständiger Satz von Kurven 2. Ordnung. Mit $U = U_B \subset \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir eine offene, einfach zusammenhängende Menge, die im Falle $\text{Det } B > 0$ eine Umgebung des Nullpunktes und im Falle $\text{Det } B < 0$ eine Umgebung der zu $\tilde{\mathcal{L}}(B)$ gehörigen Asymptoten sein soll. Ferner sei $\hat{U} = \hat{U}_B$ die Menge $U - \{0\}$ bzw. $U - \{\text{Asymptoten von } \tilde{\mathcal{L}}(B)\}$.

Im folgenden Satz werden alle ebenen topologischen Abbildungen charakterisiert, die invariante Kurven 2. Ordnung besitzen.

Satz 1: Sei $T : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in U eineindeutig und in beiden Richtungen stetig, gegeben durch $f(y) = (f(x, y), g(x, y))'$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) T hat in U einen vollständigen Satz invarianter Kurven 2. Ordnung $\tilde{\mathcal{L}}(B)$ mit $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ und $\text{Det } B = 1$ oder $\text{Det } B = -1$.

(ii) Es gilt in U :

$$f(y) = A(y) \cdot y,$$

wobei die Matrix $A(y)$ stetig in \hat{U} ist und folgende Gestalt hat:

$$A(y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos \varphi(x, y) + \beta \cdot \sin \varphi(x, y) & \gamma \cdot \sin \varphi(x, y) \\ -\alpha \cdot \sin \varphi(x, y) & \cos \varphi(x, y) - \beta \cdot \sin \varphi(x, y) \end{pmatrix} & \text{für } \text{Det } B = 1 \\ \begin{pmatrix} \cosh \varphi(x, y) + \beta \cdot \sinh \varphi(x, y) & \gamma \cdot \sinh \varphi(x, y) \\ -\alpha \cdot \sinh \varphi(x, y) & \cosh \varphi(x, y) - \beta \cdot \sinh \varphi(x, y) \end{pmatrix} & \text{für } \text{Det } B = -1 \end{cases}$$

Anmerkung 1.: $A(y)$ ist in 0 selbst bzw. auf den Asymptoten von $\tilde{\mathcal{L}}(B)$ unter Umständen nicht mehr definiert.

Anmerkung 2.: Der Satz bleibt richtig, wenn man das Wort "stetig" durch "m-mal differenzierbar" oder "analytisch" ersetzt.

Beweis: Es werde (i) angenommen. Dann folgt in U :

$$y' B y = f'(y) B f(y) \quad . \quad (1)$$

Wir definieren:

$$\rho(x, y) = \frac{y' B f(y)}{y' B y} \quad ; \quad \sigma(x, y) = \frac{y' P f(y)}{y' B y} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen (1) folgt:

$$\begin{aligned} \rho^2(x, y) + \sigma^2(x, y) &= 1 & \text{falls } \text{Det } B &= 1 \\ \text{und} \quad \rho^2(x, y) - \sigma^2(x, y) &= 1 & \text{falls } \text{Det } B &= -1, \end{aligned}$$

Folglich können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \begin{cases} \cos \varphi(x, y) & \text{für } \text{Det } B = 1 \\ \cosh \varphi(x, y) & \text{für } \text{Det } B = -1 \end{cases} \\ \sigma(x, y) &= \begin{cases} \sin \varphi(x, y) & \text{für } \text{Det } B = 1 \\ \sinh \varphi(x, y) & \text{für } \text{Det } B = -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

für geeignete Funktionen $\varphi(x, y)$.

Bilden wir jetzt die Matrix $A(y)$ mit Hilfe der Formeln (2), dann folgt durch Ausrechnen unmittelbar (ii). Die Stetigkeit (bzw. Differenzierbarkeit oder Analytizität) von $A(y)$ in \hat{U} folgt ebenfalls sofort. - Umgekehrt werde (ii) angenommen. Eine leichte Rechnung ergibt:

$$A'(y) \cdot B \cdot A(y) = B \quad \text{für } y \in \hat{U} \quad . \quad (3)$$

Also ist wegen der Überlegungen von Abschnitt I die Bedingung (i) erfüllt. q.e.d.

Satz 2: Sei $T: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(y) = A(y) \cdot y$, wobei $A(y)$ die Gestalt von Satz 1 hat. Die in $A(y)$ vorkommende Funktion $\varphi(y)$ sei in U einmal stetig differenzierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) T ist flächentreu in U .
- (ii) Die invarianten Kurven von T sind die Niveaulinien der Funktion $\varphi(y)$ in U .

Beweis: Sei $T_0(y)$ die Funktionalmatrix von T . Ausrechnen ergibt:

$$\text{Det } T_0(y) = 1 + y' \hat{B} \cdot \nabla \varphi(y), \quad \text{mit } \hat{B} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \gamma & -\beta \end{pmatrix}.$$

Äquivalent mit der Flächentreue von T in U ist ja die Beziehung

$\text{Det } T_0(y) \equiv 1$ in U , d.h. $\varphi(y)$ ist Lösung der Differentialgleichung:

$$y' \hat{B} \cdot \nabla \varphi(y) = 0 \quad (4)$$

Man prüft sofort nach, daß $y' \hat{B}$ die Schar der Tangentialvektoren an $\tilde{\mathcal{L}}(\beta)$ ist. Die Vektoren $\nabla \varphi(y)$ stehen also senkrecht auf den Kurven von $\tilde{\mathcal{L}}(\beta)$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

q.e.d.

Anmerkung 3: Man nennt T in diesem Falle einen (elliptischen bzw. hyperbolischen) Twist.

Satz 3: Sei $T: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in U eineindeutig und analytisch, gegeben durch die Vektorfunktion $f(y) = (f(x,y), g(x,y))'$. Falls T in U einen vollständigen Satz von Kurven 2. Ordnung $\tilde{\mathcal{L}}(\beta)$ invariant läßt, dann läßt auch schon der lineare Anteil von T - nämlich die durch die Funktionalmatrix T_0 im Punkte $y=0$ gegebene lineare Abbildung - $\tilde{\mathcal{L}}(\beta)$ invariant.

Beweis: Wir machen Potenzreihenvergleich: Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung $V = V(0) \subset U$, in der gilt:

$$f(y) = T_0 \cdot y + q(y), \quad (5)$$

wobei die Komponenten von $q(y)$ in V konvergente Potenzreihen in x, y von höherer als erster Ordnung sind. Weiter gilt nach Voraussetzung:

$$y' B y = f'(y) B f(y). \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$y' B y = y' (T_0' B T_0) y + y' T_0' B q(y) + q'(y) B T_0 y + q'(y) B q(y).$$

Die drei letzten Terme auf der rechten Seite dieser Gleichung bilden zusammen eine Potenzreihe in x, y von höherer als zweiter Ordnung, die identisch verschwinden muß, da links nur quadratische Glieder stehen. Damit folgt:

$$y' B y = y' \cdot (T_0' B T_0) \cdot y \quad (7)$$

d.h., T_0 läßt $\tilde{\mathcal{L}}(B)$ in V invariant, und damit in ganz \mathbb{R}^2 .

q.e.d.

Wir interessieren uns für die Frage, wann eine ebene Abbildung mit dem Fixpunkt 0 in einer Umgebung $U(0)$ invariante Kurven besitzt.

Dazu definieren wir:

(8)

Def. 1.: $S: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei eine topologische Abbildung

mit 0 als Fixpunkt. $\tilde{\mathcal{L}}(B)$ sei ein vollständiger Satz von Kurven

2. Ordnung. Dann heißt $\gamma := S(\tilde{\mathcal{L}}(B))$ ein stetiger Kurvensatz mit dem Ursprung 0 .

Ist S in beiden Richtungen m -mal stetig

differenzierbar (bzw. in beiden Richtungen analytisch), dann heißt γ

ein m -mal stetig differenzierbarer (bzw. ein analytischer) Kurvensatz

mit dem Ursprung 0 .

Def. 2.: Man sagt, die Abbildung $T : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt einen stetigen (m -mal stetig differenzierbaren, analytischen) Satz invarianter Kurven mit O als Ursprung, wenn T faktorisiert werden kann in der Form: $T = S^{-1} \tilde{T} S$, wobei $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $S(O) = O$ topologisch (in beiden Richtungen m -mal stetig differenzierbar, in beiden Richtungen analytisch) ist und die Abbildung \tilde{T} in einer Umgebung $\tilde{U} = \tilde{U}(O) \subset S(U)$ die in Satz 1 angegebenen Eigenschaften hat.

Es gilt nun:

Satz 4: Sei $T : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in U eineindeutig analytisch. Notwendig dafür, daß T einen analytischen Kurvensatz mit dem Ursprung O in einer Umgebung $V = V(O) \subset U$ invariant läßt, ist die Bedingung, daß der lineare Anteil von T einen vollständigen Satz von Kurven 2. Ordnung $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{B})$ invariant läßt.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine analytische Abbildung S , so daß $S^{-1} T S$ einen vollständigen Satz invarianter Kurven 2. Ordnung $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{B})$ besitzt. Da S und T den Nullpunkt als Fixpunkt haben, ist O auch Fixpunkt von $S^{-1} T S$. Seien T_o, S_o die Funktionalmatrizen von T, S im Nullpunkt. Dann ist die Funktionalmatrix von $S^{-1} T S$ im Punkte O gegeben durch $A = S_o^{-1} T_o S_o$. Nach Satz 3 läßt auch A schon $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{B})$ invariant, d.h. es gilt:

$$A' \tilde{B} A = \tilde{B} \quad (8)$$

Wir bilden jetzt die symmetrische Matrix

$$B := (S_o^{-1})' \tilde{B} \cdot S_o^{-1}$$

und schließen sofort aus (8):

$$T_o' B T_o = B \quad (9)$$

d.h., $\tilde{\mathcal{L}}(B)$ bleibt unter der linearen Abbildung T_o invariant. q.e.d.

Anmerkung 4: Die Bedingung dieses Satzes ist jedoch nicht hinreichend, wie wir im nächsten Abschnitt an einem Beispiel sehen werden.

III. Anwendungen und Beispiele

Wir wollen die in den beiden vorigen Abschnitten ausgeführten Überlegungen an einigen Beispielen anwenden.

1.) Gegeben sei die ebene Abbildung:

$$S: \begin{cases} \xi = x + 2y - b \cdot \sin(x+y) \\ \eta = y - b \cdot \sin(x+y) \end{cases}, \quad 0 < b < 1. \quad (1)$$

Man zeigt leicht, daß S flächentreu und eineindeutig analytisch in einer Umgebung $U = U(0)$ des Fixpunktes $0 \in \mathbb{R}^2$ ist (Man kann sogar $U = \mathbb{R}^2$ wählen). Wir nennen den linearen Anteil von S A . Die Abbildung A hat die Form:

$$A: \begin{cases} \xi = (1-b) \cdot x + (2-b) \cdot y \\ \eta = -b \cdot x + (1-b) \cdot y \end{cases}. \quad (2)$$

Aus Abschnitt I folgt, daß A einen vollständigen Satz invarianter Ellipsen $\mathcal{L}(B)$ besitzt, die auf Hauptachsen liegen. Wir nennen $0 \in \mathbb{R}^2$ in diesem Falle einen elliptischen (oder auch stabilen)

Fixpunkt der Abbildung S .

Setzen wir:

$$\mu = \sqrt{\frac{2-b}{b}}; \quad \lambda = \mu^{-1}, \quad (3)$$

dann werden die Ellipsen durch die symmetrische Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (4)$$

gegeben.

Die Abbildung S läßt sich als gestörten elliptischen Twist darstellen (vgl. Satz 2 von Abschnitt II):

Wir setzen

$$\varphi(x, y) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \arccos(1-b), \quad (5)$$

$$0 < \arccos(1-b) < \frac{\pi}{2}.$$

$\varphi(x, y)$ hat $\mathcal{L}(\beta)$ als Niveaulinien. Wir schreiben nun die Abbildung (1) in der Form:

$$S: \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi(x, y) & \lambda \sin \varphi(x, y) \\ -\lambda \sin \varphi(x, y) & \cos \varphi(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1(x, y) \\ S_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

wobei für die $S_i(x, y)$ gilt:

$$S_i(x, y) = \alpha_i(x, y) \cdot x^2 + \beta_i(x, y) \cdot y^2, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$$\alpha_i(x, y), \beta_i(x, y) \text{ analytisch um } \mathcal{O} \text{ und } \alpha_i(0, 0) = \beta_i(0, 0) = 0.$$

Ferner geht die obige Matrix von (6) für $(x, y) \rightarrow \mathcal{O}$ in die Funktionalmatrix von S über.

Aus der Darstellung (6) von S können wir nun schließen, daß S in einer Umgebung $U = U(\mathcal{O})$ invariante analytische Kurven besitzt: Dies folgt aus einem Ergebnis von J. Moser, das später noch von H. Rüssmann verschärft wurde (vgl. [1] und [2]). Die Autoren zeigen nämlich, daß ein gestörter Kreistwist mit streng monoton wachsender Rotationszahl (in unserem Beispiel $\frac{1}{2\pi} \cdot \varphi(x, y)$) invariante Kurven um den Fixpunkt \mathcal{O} besitzt, falls die Störfunktionen (in unserem Beispiel $S_1(x, y), S_2(x, y)$), sowie die Rotationszahl gewissen Differenzierbarkeits- und Beschränktheitsvoraussetzungen genügen und die Flächentreue des Kreistwistes bei der Störung nicht verlorengeht. Ist die Abbildung überdies analytisch, so sind auch die invarianten Kurven analytisch. Erweitert man dieses Ergebnis noch auf elliptische Twistabbildungen (was durch eine affine Transformation trivialeweise möglich ist), dann läßt sich leicht zeigen, daß unsere Abbildung S alle diese Voraussetzungen erfüllt.

Offen bleibt hierbei allerdings die Frage, ob S einen stetigen (oder gar analytischen) Satz invarianter Kurven mit \mathcal{O} als Ursprung besitzt (vgl. Def. 2. von Abschnitt II.). Es scheint in der Tat ein recht schwieriges Problem zu sein, brauchbare Kriterien zu finden, mit denen man in konkreten Fällen diese Frage entscheiden kann.

Vorläufig helfen wir uns so, daß wir durch eine "im Kleinen" geringe Abänderung der Abbildung S das Gewünschte erreichen. Bilden wir nämlich die Abbildung:

$$T := S^{-1} A S \quad , \quad (8)$$

dann besitzt T einen analytischen Satz invarianter Kurven um 0 , nämlich diejenige Kurvenschar, die durch S auf $\mathcal{L}(B)$ abgebildet wird.

Durch Ausrechnen ergibt sich:

$$T : \begin{cases} \xi = x + 2y - b \cdot \sin(x+y) + b \cdot f(x,y) \\ \eta = y - b \cdot \sin(x+y) - b \cdot f(x,y) \end{cases} \quad 0 < b < 1 \quad (9)$$

mit: $f(x,y) = x + 3y - 2b \sin(x+y) - \sin[x + 3y - 2b \sin(x+y)]$.

T geht also aus S durch eine Störung hervor, die in (x, y) von höherer als 2. Ordnung ist. -

Wir wollen noch einige Eigenschaften von T in Abhängigkeit des Parameters b ($0 < b < 1$) untersuchen. Wegen Anmerkung 2 von Abschnitt I ist A , und damit auch T , ähnlich einer Drehung D :

$$T = \tilde{S}^{-1} D \tilde{S} \quad (10)$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \arccos(1-b), \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Wir setzen jetzt für einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$:

$$\text{orb}_D P := \bigcup_{m=0}^{\infty} D^m(P) \quad (11)$$

und unterscheiden zwei Fälle für φ bzw. b :

a) $\frac{1}{2\pi} \cdot \varphi$ rational.

Dann folgt für jeden Punkt $P \in \mathbb{R}^2$, daß P ein periodischer Punkt von D (und auch von T) ist, d.h. es existiert ein k mit $D^k(P) = P$. Die Menge dieser φ liegt dicht auf dem Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$, hat aber dort das Maß Null.

b) $\frac{1}{2\pi} \cdot \varphi$ irrational.

Es folgt durch eine leichte Rechnung für jedes $P \in \mathbb{R}^2$:

$$\overline{0 + b_D P} = \tilde{\alpha}(P),$$

wobei $\tilde{\alpha}(P)$ die konzentrische Kreislinie ist, auf der P liegt.

Es liegt also $0 + b_D P$ dicht auf $\tilde{\alpha}(P)$. Die Menge aller dieser φ hat auf $(0, \frac{\pi}{2})$ das Maß 1.

Die Funktion $\varphi(b) = \arccos(1-b)$ mit $0 < \varphi(b) < \frac{\pi}{2}$ ist auf dem Intervall $0 < b < 1$ umkehrbar analytisch. Wegen Gleichung (10) haben wir also als Ergebnis:

Satz 1: Die Abbildung $T = T(b)$, gegeben durch die Gleichungen (9) hat die Eigenschaft, daß für "fast alle" b mit $0 < b < 1$ die Menge der Punkte $0 + b_{T(b)} P = \bigcup_{m=0}^{\infty} T^m(P)$ dicht auf der unter T invarianten Kurve durch den Punkt P liegt. Der topologische Abschluß von $0 + b_{T(b)} P$ ist also identisch mit der invarianten Kurve durch P .

Anmerkung 1: Ein entsprechendes Ergebnis kann man natürlich für alle von einem Parameter b abhängigen Abbildungen herleiten, die sich in der Form (10) darstellen lassen. Ferner ermöglicht dieses Ergebnis eine Veranschaulichung der invarianten Kurven von T auf numerischem Wege, indem man T wiederholt auf einen Punkt P anwendet und die entstehenden Punkte plotten läßt. -

2.) Analog, wie Beispiel 1.) läßt sich auch folgendes Beispiel behandeln:

$$S : \begin{cases} \xi = y + b \cdot \sin(x+y) \\ \eta = -x + b \cdot \sin(x+y) \end{cases} \quad 0 < b < 1 \quad (12)$$

Für die Abbildung T (vgl. Formel (9)) ergibt sich jetzt:

$$T : \begin{cases} \xi = y + b \cdot \sin(x+y) + b \cdot f(x,y) \\ \eta = -x + b \cdot \sin(x+y) - b \cdot f(x,y) \end{cases} \quad 0 < b < 1 \quad (13)$$

mit: $f(x,y) = x - y - 2b \sin(x+y) - \sin[x - y - 2b \sin(x+y)]$.

3.) Gegeben sei die ebene Abbildung:

$$S : \begin{cases} \xi = y + x^2 \\ \eta = -x \end{cases} \quad (14)$$

Wir können S als gestörten Kreistwist schreiben:

$$S : \begin{cases} \xi = \cos \varphi(x,y) \cdot x + \sin \varphi(x,y) \cdot y + s_1(x,y) \\ \eta = -\sin \varphi(x,y) \cdot x + \cos \varphi(x,y) \cdot y + s_2(x,y) \end{cases} \quad (15)$$

mit: $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{\pi}{2}$.

Wieder sind die Voraussetzungen des Moser'schen Satzes erfüllt: Es folgt, daß S analytische invariante Kurven in einer Umgebung des Nullpunktes besitzt. Wir können hier jedoch zeigen, daß S keinen analytischen Satz invarianter Kurven um 0 besitzt.

Zum Beweise nehmen wir das Gegenteil an. Dann müßte es eine um 0 analytische Funktion $H(x,y)$ geben mit

$$\begin{aligned} H(0,0) &= 0 \\ H(x,y) &= H(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (16)$$

Ferner können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der erste von Null verschiedene Koeffizient in der Potenzreihenentwicklung von $H(x,y)$ um den Nullpunkt den Wert 1 hat. Setzen wir jetzt:

$$H(x,y) = \sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} h_{\nu\mu} x^{\nu} y^{\mu} \quad (17)$$

dann ergibt ein Potenzreihenvergleich mit Hilfe von (14) und (16) folgende Beziehungen:

$$1. \quad h_{00} = 0$$

$$2. \quad h_{10} = h_{01} = 0$$

$$3. \quad h_{20} = h_{02} = 1 \quad ; \quad h_{11} = 0$$

$$4. \quad h_{30} = h_{03} = 0 \quad ; \quad h_{12} = -1 \quad ; \quad h_{21} = 1$$

sowie

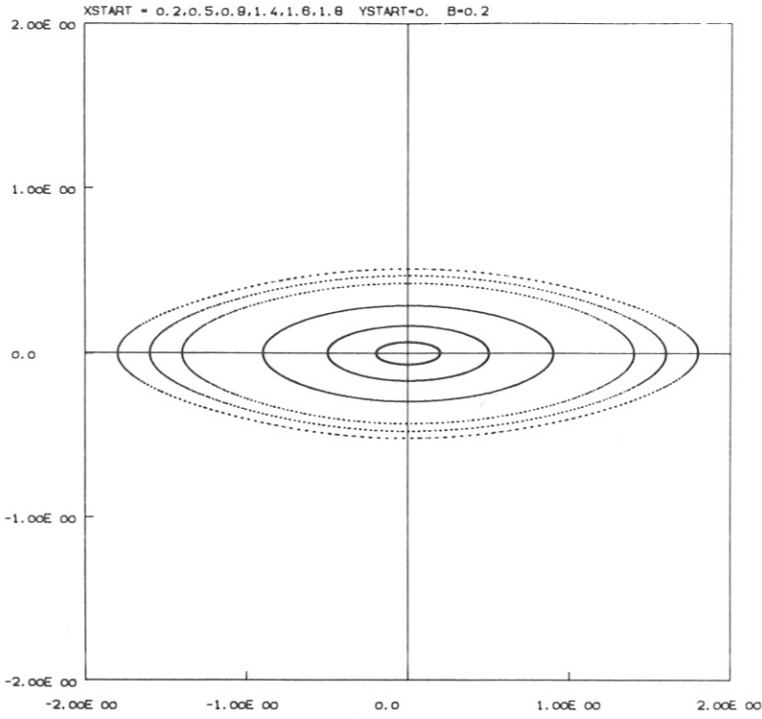
$$\left. \begin{aligned} h_{13} + h_{31} &= -2 \\ h_{13} + h_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Dieses Gleichungssystem ist aber unlösbar, folglich kann eine Potenzreihendarstellung der Form (17) für $H(x,y)$ nicht existieren. - q.e.d.

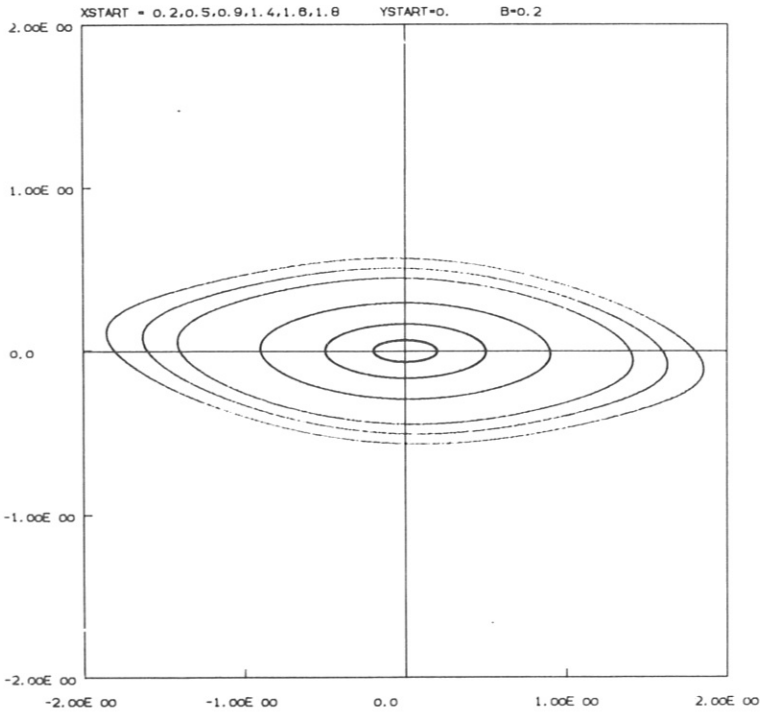
Literatur.

- [1] J. Moser: On Invariant Curves of Area-Preserving Mappings
of an Annulus
Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys.
Kl. II.a, Nr. 1 (1962), 1-20
- [2] H. Rüssmann: Über invariante Kurven differenzierbarer Abbil-
dungen eines Kreisringes
Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys.
Kl. II., Nr. 5 (1970), 67-105
- [3] V.I. Arnold: Über Abbildungen eines Kreises auf sich
Am. Math. Soc. Translat., Ser. 2, 46, 213-284
- [4] J.M. Greene: Two-Dimensional Measure-Preserving Mappings
Journal of Math. Physics, Vol. 9, Nr. 5 (1968),
760-768
- [5] S. Smale: Differentiable dynamical systems
Bull. of Am. Math. Soc., Vol. 73 (1967),
747-817

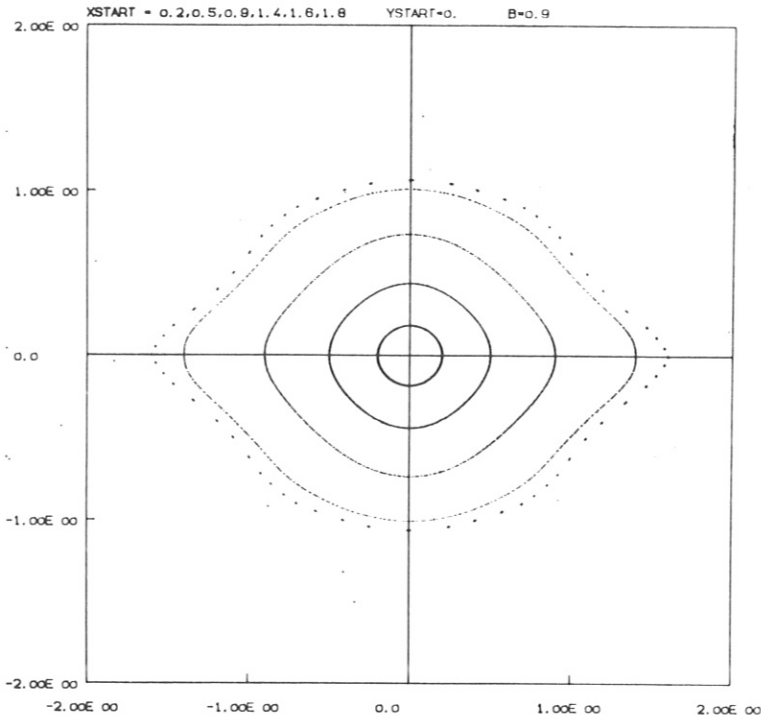
I.



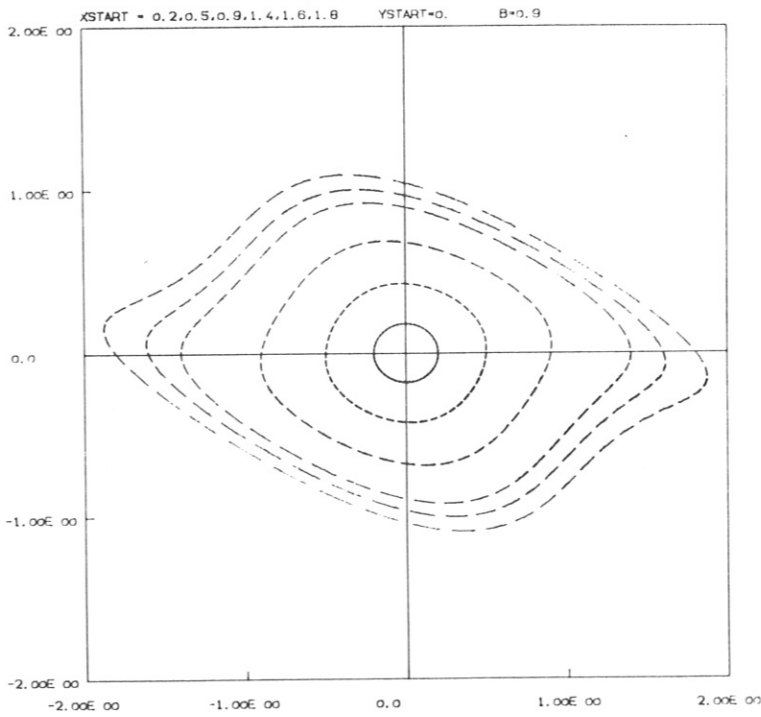
Invariante Kurven der Abbildung S in Beispiel 1.), Seite 15



Invariante Kurven der Abbildung T in Beispiel 1.), Seite 17

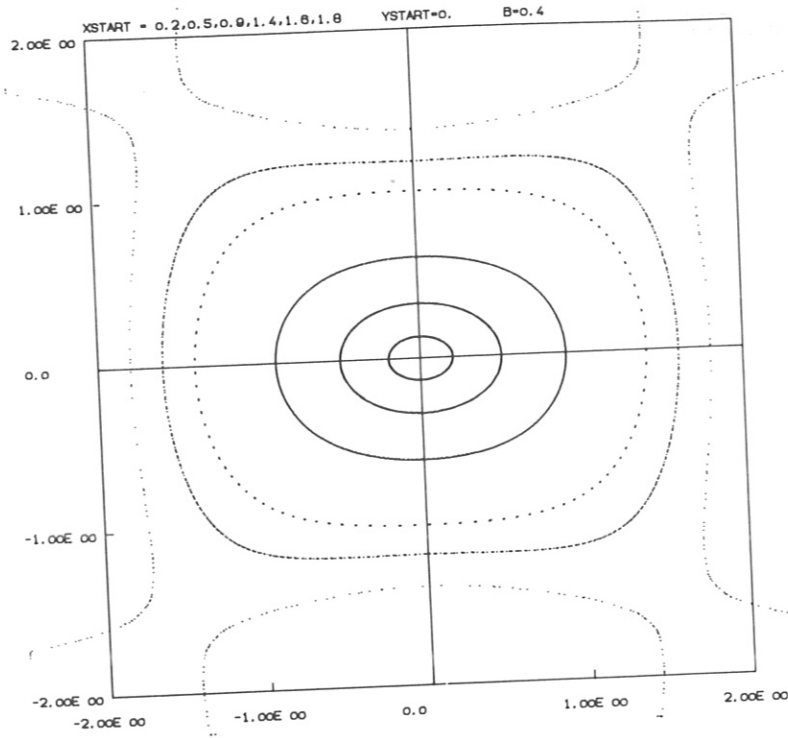


Invariante Kurven der Abbildung S in Beispiel 1), Seite 15

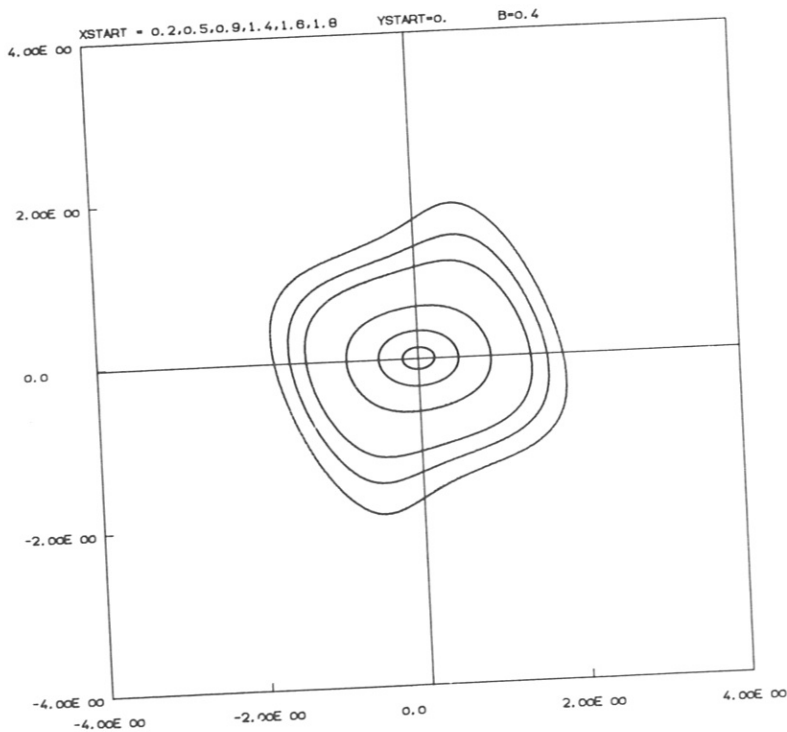


Invariante Kurven der Abbildung T in Beispiel 1), Seite 17

III.

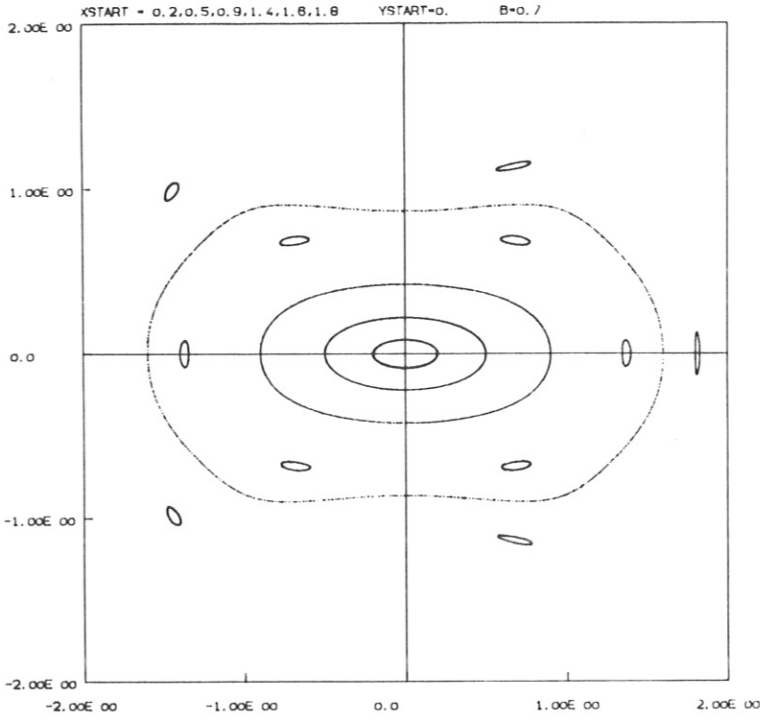


Invariante Kurven der Abbildung S in Beispiel 2.), Seite 18

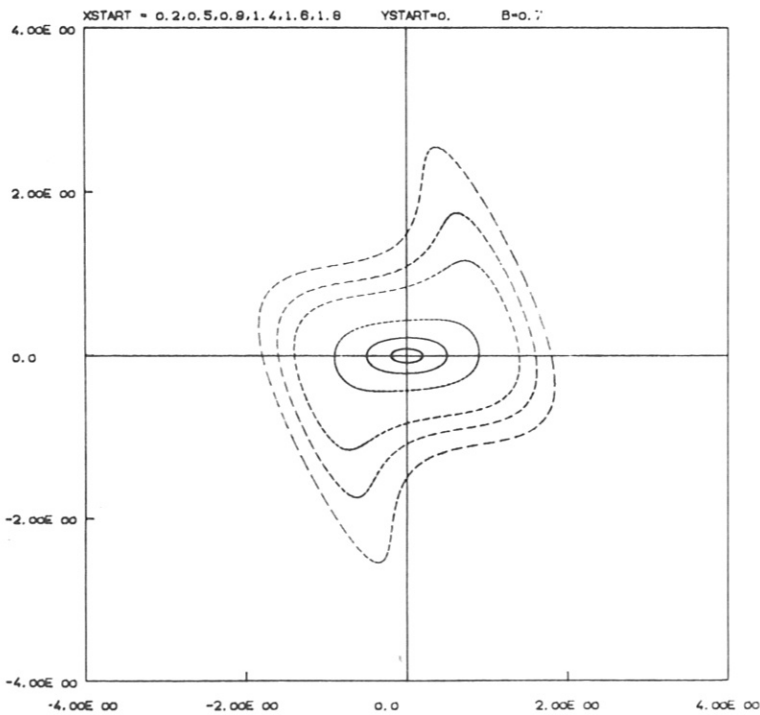


Invariante Kurven der Abbildung T in Beispiel 2.), Seite 19

IV.

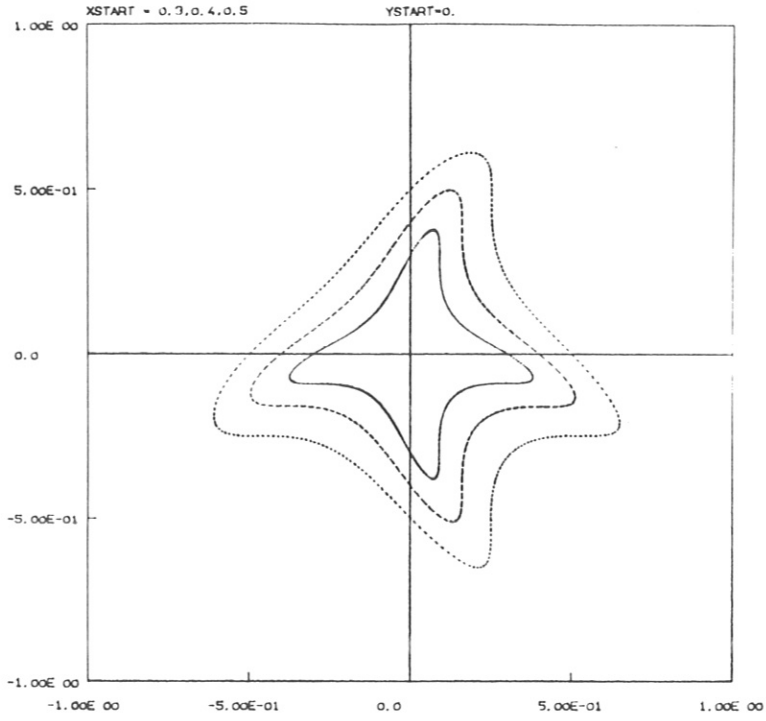


Invariante Kurven der Abbildung S in Beispiel 2.), Seite 18



Invariante Kurven der Abbildung T in Beispiel 2.), Seite 19

\bar{V} .



Invariante Kurven der Abbildung S in Beispiel 3.), Seite 19

This IPP report is intended for internal use.

IPP reports express the views of the authors at the time of writing and do not necessarily reflect the opinions of the Max-Planck-Institut für Plasmaphysik or the final opinion of the authors on the subject.

Neither the Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, nor the Euratom Commission, nor any person acting on behalf of either of these:

1. Gives any guarantee as to the accuracy and completeness of the information contained in this report, or that the use of any information, apparatus, method or process disclosed therein may not constitute an infringement of privately owned rights; or
2. Assumes any liability for damage resulting from the use of any information, apparatus, method or process disclosed in this report.