

Stationäre stossfreie Stosswellen in einem
Ausgangsplasma mit hoher Ionentemperatur

Manfred Kornherr

IPP 1/97

Juli 1969

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K
G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Stationäre stossfreie Stosswellen in einem

Ausgangsplasma mit hoher Ionentemperatur

Manfred Kornherr

IPP 1/97

Juli 1969

The Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

(in German)

Abstract

Stationary collisionless shock waves propagating perpendicularly to an initial magnetic field are produced by the fast-rising magnetic field ($\dot{B} = 7 \times 10^{10}$ G/sec) of a theta pinch (coil diameter 16 cm, coil length 60 cm).

The initial plasma is produced by a fast theta pinch discharge (810 kHz). At filling pressures between 5 and 15 mtorr H_2 or D_2 the degree of ionization is about 50 percent. By choosing the filling pressure properly it is possible to trap a homogeneous magnetic field. The ions of this plasma have a temperature of some 10 eV. This value is much higher than the electron temperature and results in a local plasma β between 0.3 and 5.

In this initial plasma stationary collisionless shock waves are observed with Mach numbers between 1.5 and 5. The snow plough model is used to give conditions governing the steady state, Mach number, and velocity of the front which relate the external magnetic field and the parameters of the initial plasma.

Strong collisionless dissipation can be demonstrated by measuring the profiles of magnetic field, density and electron temperature of several shock waves. For the electrons this dissipation mechanism can be described by an effective collision frequency. This phenomenologically introduced frequency determines the width of the shock front at least for subcritical shock waves. It exceeds the classical electron-ion collision frequency by 1-2 orders of magnitude and is roughly equal to one-third of the ion plasma frequency.

The ion temperature can be estimated from the steady state conservation relations. The ions are heated in the two degrees

of freedom perpendicular to the magnetic field. For shock waves with Mach numbers below the critical one the ions seem to be heated merely adiabatically. In strong shock waves this heating is considerably exceeded, and for high Mach numbers it yields ion temperatures up to about 500 eV. Finally, formulas are derived to estimate the possible temperatures of electrons and ions behind the shock front.

to an initial magnetic field are produced by the fast-rising magnetic field ($B = 7 \times 10^{10}$ G/sec) of a theta pinch (coil diameter is cm, coil length 60 cm).

The initial plasma is produced by a fast theta pinch discharge (10 kV). At filling pressures between 5 and 15 torr H_0 or D , the degree of ionization is about 50 percent. By choosing the filling pressure properly it is possible to trap a homogeneous magnetic field. The ions of this plasma have a temperature of some 10 eV. This value is much higher than the electron temperature and results in a local plasma β between 0.3 and 0.5.

In this initial plasma stationary collisionless shock waves are observed with Mach numbers between 1.5 and 2.5. The shock wave model is used to give a quantitative description of the steady state. Mach number, and velocity of the front which relate the external magnetic field and the parameters of the initial plasma.

Strong collisionless dissipation can be demonstrated by measuring the profiles of magnetic field, density and electron temperature of several shock waves. For the electron-ion collision mechanism can be described by an effective collision frequency. This phenomenon is introduced frequency dependence the width of the shock front at least for subcritical shock waves. It exceeds the classical electron-ion collision frequency by 1-2 orders of magnitude and is roughly equal to one-third of the ion plasma frequency.

The ion temperature can be calculated from the steady state conservation relations. The ions are heated in the two degrees

Inhaltsverzeichnis

Seite

Zusammenfassung

I. Einleitung und Problemstellung	1
1. Stossfreie Stosswellen im Plasma	1
2. Die Beschränkung auf stationäre Stosswellen	2
3. Zielsetzung der Arbeit	4
II. Die Vorionisierung	6
1. Technische Daten	6
2. Das Ausgangsplasma	7
2.1 Charakteristische Grössen	7
2.2 Messung der Plasmaparameter	9
III. Erzeugung und Messung stationärer Stosswellen	24
1. Die Hauptentladung	24
2. Das Auftreten stationärer Stosswellen	24
2.1 Experimentelle Ergebnisse	24
2.2 Theoretische Abschätzungen	27
3. Weitere Messungen an stationären Stosswellen	32
IV. Stossfreie Plasmaheizung durch Stosswellen	37
1. Theoretische Grundlagen	37
1.1 Koordinatensystem und Anfangsbedingungen	37
1.2 Die erweiterten Rankine-Hugoniot Gleichungen	39
1.3 Das magnetohydrodynamische Gleichungssystem	46
1.4 Energiegleichung für Ionen und Elektronen	53
1.5 Die kritische Machzahl	57
2. Auswertung der Messergebnisse	60
2.1 Elektronenheizung in starken Stosswellen	60
2.2 Nachionisation und Freiheitsgrade	62
2.3 Abschätzung der Ionenaufheizung	65
2.4 Stosswellen mit unterkritischer Machzahl	67
3. Zusammenfassung und Planung	70
Literaturverzeichnis	73

Zusammenfassung

In einem Theta-Pinch (Durchmesser 16 cm, Länge 60 cm) werden durch ein rasch ansteigendes Magnetfeld ($\dot{B} = 7 \times 10^{10} \text{ G/sec}$) stationäre stossfreie Stosswellen senkrecht zu einem Magnetfeld erzeugt.

Als Vorionisierung dient ein schneller Theta-Pinch (810 kHz), der bei Fülldrucken von 5 - 15 Millitorr (H_2 , D_2) zu einer 50 %-igen Ionisierung führt. Durch richtige und sorgfältige Wahl des Fülldrucks kann ein homogenes Magnetfeld eingefangen werden. Die Ionentemperatur dieses Plasmas liegt bei einigen 10 eV, sie übertrifft die Elektronentemperatur beträchtlich und führt zu β -Werten von 0.3 - 5.

In diesem Ausgangsplasma konnten stationäre stossfreie Stosswellen mit Machzahlen zwischen 1.5 und 5 beobachtet werden. Mit Hilfe des Schneepflugmodells werden Bedingungen für Stationarität, erreichbare Machzahl und Frontgeschwindigkeit angegeben, die den äusseren Magnetfeldverlauf und die Parameter des Ausgangsplasmas miteinander verknüpfen.

Aus dem in verschiedenen Stosswellen gemessenen Verlauf von Magnetfeld, Dichte und Elektronentemperatur wird das Auftreten eines starken stossfreien Dissipationsmechanismus nachgewiesen, die für die Elektronen durch eine effektive Stossfrequenz beschrieben werden kann. Diese phänomenologisch eingeführte Grösse bestimmt zumindest in unterkritischen Stosswellen die Breite der Stossfront, sie übertrifft die Elektron-Ion-Stossfrequenz um 1-2 Grössenordnungen und ist etwa gleich ein Drittel der Ionenplasmafrequenz.

Aus den Erhaltungssätzen kann die Ionentemperatur abgeschätzt werden. Die Aufheizung der Ionen erfolgt in den beiden Freiheitsgraden senkrecht zum Magnetfeld. Während in unterkritischen Stosswellen lediglich die adiabatische Mindestaufheizung erfolgt, erfahren die Ionen in starken Stosswellen eine

sehr viel stärkere Aufheizung, die für grosse Machzahlen Werte bis zu 500 eV ergibt. Zur Abschätzung der erreichbaren Ionen- und Elektronentemperaturen im Plateau hinter der Stossfront werden Näherungsformeln angegeben.

Als Vorionisierung dient ein schneller Theta-Puls (810 kHz), der bei Feldstärken von 2 bis 12 Millitor (H₀, D₀) zu einer so hohen Ionisierung führt, dass die Ionen- und Elektronen-Wahl des Feldes kann ein homogenes Magnetfeld eingeleitet werden. Die Ionentemperatur dieses Plasmas liegt bei einigen 10 eV, die Elektronen- und Ionenentemperatur ist betragsmäßig und führt zu β -Werten von 0,1 bis 0,2.

In diesem Ausgangsplasma können stationäre stochastische Störungen mit Machzahlen zwischen 1,5 und 2 beobachtet werden. Mit Hilfe des Schmelzmodells werden Bedingungen für Stationarität, erreichbare Machzahl und Frontgeschwindigkeit angegeben, die den besten Magnetfeldverlauf und die Parameter des Ausgangsplasmas miteinander verknüpfen.

Aus dem in vorstehendem Abschnitt diskutierten Verlauf von Magnetfeld, Dichte und Ionentemperatur wird das Verhalten eines starken stochastischen Schmelzmodells abgeleitet. Wissen, die für die Elektronen durch eine effektive Stossfront beachtet werden können. Diese physikalischen Eigenschaften dieses Plasmas sind in universellen Formeln gegeben. Die Breite der Stossfront, die hier für die Elektronen-Ion-Stossfront um 1-2 Größenordnungen und ist etwa gleich ein Drittel der Ionengrößenordnung.

Aus den experimentellen Daten kann die Ionentemperatur abgeschätzt werden. Die Aufheizung der Ionen erfolgt in den beiden Richtungen durch das Magnetfeld. Während in unterkritischen Stößen lediglich die adiabatische Mindestaufheizung erfolgt, erfahren die Ionen in starken Stößen eine

I. Einleitung und Problemstellung

1. Stossfreie Stosswellen im Plasma

Unter dem Begriff "Turbulenzheizung" werden in der Plasma-physik Heizmechanismen zusammengefasst, die sich durch klassische Dissipationsvorgänge nicht erklären lassen. Ihre tiefere Ursache sind Feldfluktuationen, die zum Beispiel durch die Zweistrominstabilität angeregt werden können. Diese Instabilität tritt vereinfacht gesprochen dann auf, wenn die gerichtete Geschwindigkeit von Elektronen relativ zu den Ionen grösser wird als ihre thermische Geschwindigkeit (für $T_e \approx T_i$). Diese Bedingung kann man beispielsweise durch Einschuss von vorher beschleunigten Elektronen in ein Plasma erfüllen. Eine andere Möglichkeit ist die Erzeugung von Stosswellen in einem Magnetoplasma, da der auftretende Magnetfeldgradient in der Stossfront mit einer Stromdichte und damit einer gerichteten "Driftgeschwindigkeit" der Elektronen verknüpft ist. Diese Möglichkeit benutzt man bei einem Theta-Pinch Experiment in Garching, dessen Ziel der Nachweis, die Beschreibung und die physikalische Erklärung stossfreier Plasmaaufheizung ist.

Messungen an dieser "Turbulenzbatterie" haben ergeben, dass sich für verschiedenste Anfangsbedingungen Wellenfronten erzeugen lassen, die sich mit Frontgeschwindigkeiten v_F entsprechend Machzahlen $M > 1$ senkrecht zu einem axialem Magnetfeld B in das ungestörte Plasma hineinbewegen /1/.

Dieser Vorgang ist stets mit einer Entropiezunahme verbunden. In dichten Plasmen ($n \approx 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, T_e einige eV) erfolgt die Dissipation über Teilchenstösse; die Frontbreite der Stosswelle wird bestimmt durch die freie Weglänge L für diese "klassischen" Stösse.

Im oben angeführten Experiment betragen die Ausgangsdichten 10^{12} bis $5 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. Die beobachteten Frontbreiten sind wesentlich kleiner als L und lassen sich mit Teilchenstößen nicht erklären. Diese und ähnliche Untersuchungen /2 - 5/ zeigen, dass in verdünnten Plasmen eine stossfreie Dissipation erfolgen kann. Sie beruht auf der Wechselwirkung der Teilchen mit elektromagnetischen Wellen, die in der Stossfront angeregt werden können. Eine abgeschlossene Theorie gibt es dafür noch nicht.

2. Die Beschränkung auf stationäre Stosswellen

Die vorliegende Arbeit behandelt ein Teilgebiet der in /1/ beschriebenen Untersuchungen, nämlich den Bereich relativ hoher Dichten ($n \approx 3 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$), wo für bestimmte Anfangsbedingungen erstmals stationäre stossfreie Stosswellen beobachtet werden konnten (Abschnitt III). Diese Einschränkungen haben folgende 5 Gründe:

a) Für stationäre Stosswellen können die Rankine-Hugoniot Gleichungen angewendet werden (Abschnitt IV,1.2); diese Erhaltungssätze erlauben eine Verknüpfung der Plasmaparameter vor und hinter der Stossfront, ohne dass der Dissipationsmechanismus bekannt sein muss.

Die makroskopische Beschreibung der Vorgänge in der Stossfront mit einem magnetohydrodynamischen ("MHD") Zweiflüssigkeitsmodell, nämlich für Elektronen und Ionen vereinfacht sich wesentlich, da in einem sich mit der Frontgeschwindigkeit bewegenden Koordinatensystem die partiellen zeitlichen Ableitungen verschwinden (Abschnitt IV,1.3). Die numerische Integration des Gleichungssystems vereinfacht sich dabei erheblich.

- b) Der untersuchte Dichtebereich schliesst unmittelbar an den Bereich höherer Plasmadichten an, die in Theta-Pinch Experimenten genau untersucht wurden und gut bekannt sind (Fülldrucke ≥ 10 mTorr).
- c) Für die zu untersuchenden Dichten kann zur Erzeugung des Ausgangsplasmas ein Theta-Pinch verwendet werden (Abschnitt II), der physikalisch ziemlich gut verstanden ist und technisch keine grossen Schwierigkeiten mehr bereitet.
- d) Die verwendete Vorionisierungsbatterie erzeugt ein Ausgangsplasma mit einer hohen Iontemperatur von einigen 10 eV. Das Gasdruck p kann im Vergleich zum magnetischen Druck $p_m = \frac{B^2}{8\pi}$ nicht mehr vernachlässigt werden und letzteren sogar übertreffen. Für diese Bedingungen gibt es bisher leider keine Theorie; die vorliegenden Messungen selbst sind die bisher einzigen dieser Art. Sie geben für stationäre Stosswellen einen ersten Anhaltspunkt über die Aufheizung der Ionen (Abschnitt IV,2.3) und die Bedeutung der kritischen Machzahl M_{kr} (Abschnitt IV,1.5).
- e) Für die Interpretation der Vorgänge in der Stossfront ist die Kenntnis des Verlaufs von Dichte und Elektronentemperatur von grösster Wichtigkeit. Beide Grössen erhält man aus dem Streuspektrum von Laserlicht senkrecht zur Einfallsrichtung. Die Messung dieses Streulichts verlangt infolge seiner geringen Intensität und des ihm überlagerten Plasmalichts und Falschlichts einen erheblichen experimentellen Aufwand. Nachdem die Intensität des Streulichts proportional mit der Dichte zunimmt, sind für derartige Lasermessungen möglichst hohe Dichten erwünscht, die durch die Forderung der Stossfreiheit nach oben begrenzt sind.

Das Attribut "stossfrei" für eine Stosswelle bedeutet zunächst, dass ein Teilchen beim Durchlaufen der Stossfront keinen klassischen Stoss ausführt. Abschätzungen zeigen, dass in den

hier behandelten Fällen dies nicht ganz zutrifft. So sind Ionisierungsstösse zwischen Elektronen und Neutralteilchen nicht völlig auszuschliessen. In die verwendeten Gleichungen wird deshalb eine mögliche Nachionisation eingebaut.

Auch Elektron - Ion Stösse können nicht ausgeschlossen werden. Im Bereich niedriger Elektronentemperaturen ($T_e \leq 10 \text{ eV}$), der in der Stossfront allerdings rasch durchlaufen wird, ist die freie Weglänge zunächst noch kleiner als l/l_0 Frontbreite. Es wird jedoch gezeigt werden, dass ein zusätzlicher Dissipationsmechanismus vorhanden sein muss, der klassisch nicht erklärt werden kann (Abschnitte IV,2.1 und IV,2.4).

"Stossfrei" im Rahmen dieser Arbeit heisst also, dass zwar klassische Stösse auftreten dürfen, dass jedoch die Art der Dissipation und damit die Struktur der Stosswellen überwiegend auf stossfreien Prozessen beruht und letzteres eindeutig nachgewiesen werden kann.

3. Zielsetzung der Arbeit

Es werden gegenwärtig grosse Anstrengungen unternommen, um mit Hilfe einer kinetischen Theorie, beispielsweise über die Lösung der Vlasov-Gleichung das Phänomen der "Turbulenzheizung eines stossfreien Plasmas" theoretisch zu erfassen. Derartige Untersuchungen erfordern den Einsatz leistungsfähiger Rechenmaschinen, wie sie erst seit kurzer Zeit zur Verfügung stehen.

In der vorliegenden Arbeit soll durch experimentelle Untersuchungen der Versuch unternommen werden, über die turbulente Aufheizung eines Plasmas Aussagen zu gewinnen, die als Ansatzpunkt für theoretische Überlegungen dienen können und mit denen man numerische Ergebnisse vergleichen können. Es geht dabei zunächst nicht um die Klärung des eigentlichen physikalischen Vorgangs, sondern es wird eine phänomenologische Beschreibung des stossfreien Aufheizmechanismus angestrebt, also dessen formelmässige Erfassung mit Hilfe makroskopisch messbarer

Grössen. Die Erarbeitung eines funktionalen Zusammenhangs der verschiedenen makroskopischen Grössen eines Plasmas ist schon deshalb überaus wichtig, weil die Vielfalt der Parameter und ihrer Variationen die Überschaubarkeit der zahlreichen Messergebnisse und ihre Zuordnung zueinander sehr erschwert.

Als Diagnostikmittel standen für die vorliegende Arbeit vor allem magnetische Sonden und ein 90° -Laserstreuexperiment zur Verfügung. Die Streumessungen sind sehr zeitraubend und es wird deshalb versucht, mit Hilfe halbempirisch abgeleiteter Formeln bereits aus den einfach und schnell durchzuführenden Sondmessungen allein alle interessierenden Grössen abzuschätzen.

Die Messungen erfolgen an stationären Stosswellen; die Gründe dafür wurden bereits im vorhergehenden Abschnitt kurz besprochen. Nicht für alle Anfangsbedingungen konnten stationäre Stosswellen beobachtet werden, sodass die Frage untersucht werden soll, unter welchen Bedingungen Stationarität erwartet werden kann. Gleichzeitig mit dieser Untersuchung soll auch nach funktionalen Zusammenhängen gesucht werden zwischen den zu erwartenden Frontgeschwindigkeiten und Machzahlen einerseits und den geometrischen und technischen Daten des Experiments, sowie den Grössen des Ausgangsplasmas andererseits. Die Lösung dieser Fragen ist eine Voraussetzung für gezielte Experimente und erlaubt darüber hinaus Abschätzungen über die in einem Experiment realisierbaren stationären Stosswellen.

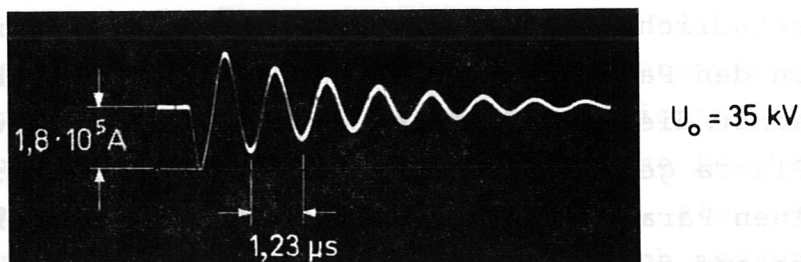
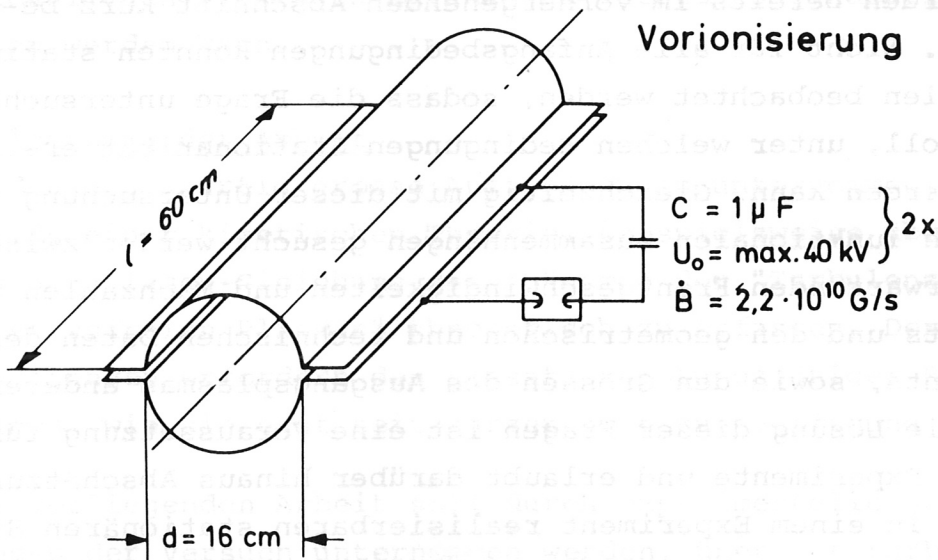
Selbstverständlich hängen alle die Stosswelle bestimmenden Grössen von den Parametern des Ausgangsplasmas ab. Deshalb wurde zunächst dieses durch eine eigene Vorionisierungsbatterie erzeugte Plasma genau untersucht, wobei nicht nur die Grösse der einzelnen Parameter selbst interessierte, sondern ebenfalls wieder Wert auf die Darlegung zumindest qualitativer Zusammenhänge gelegt wird.

II. Die Vorionisierung

Stationäre Stosswellen konnten bei Fülldrücken zwischen 5 und 15 Millitorr Wasserstoff und Deuterium beobachtet werden. Zur Erzeugung des Ausgangsplasmas diente dabei ein schneller Theta-Pinch.

1. Technische Daten

Die Entladung der Vorionisierungsbatterie erfolgt über dieselbe zweigeteilte Spule, über die auch die Hauptbatterie entladen wird. Aus Figur 1 können die interessierenden technischen Daten entnommen werden. Die Verwendung von Druckfunkenstrecken erlaubt eine bequeme Variation der Ladenspannung U_0 zwischen 20 und 40 kV.



Figur 1: oben: Schematische Darstellung von Spule und Vorionisierungsbatterie
unten: Stromverlauf (ohne Plasma).

2. Das Ausgangsplasma

Um Stosswellenexperimente auswerten, interpretieren und mit theoretischen Überlegungen vergleichen zu können, ist eine möglichst gute Kenntnis der Parameter des Ausgangsplasmas notwendig (eingefangenes Magnetfeld, Dichte, Elektronen- und Ionentemperatur).

Diese Größen dürfen sich über dem Plasmaradius nur wenig ändern, denn ein homogenes Plasma ist eine Voraussetzung für das Auftreten stationärer Stosswellen. In Wirklichkeit erreicht man infolge der Zylindergeometrie auch dann keine strenge Stationarität, doch zeigen die Messungen, dass sich über Wegstrecken bis zu 3 cm "quasi-stationäre" Verhältnisse ausbilden können.

2.1 Charakteristische Größen des Ausgangsplasmas

Mit Kenntnis der Plasmaparameter können die folgenden wichtigen und charakteristischen Größen für Stosswellenexperimente berechnet werden:

- a) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_0 magnetoakustischer Wellen kleiner Amplitude senkrecht zum Magnetfeld

$$v_0 = \sqrt{v_S^2 + v_A^2} .$$

Die Machzahl M einer Stosswelle ist das Verhältnis ihrer Frontgeschwindigkeit v_F zu v_0 .

$$M = \frac{v_F}{v_0}$$

$$\text{Schallgeschwindigkeit } v_S = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

$$\text{Alfvengeschwindigkeit } v_A = \sqrt{\frac{B^2}{4\pi\rho}}$$

Massendichte des Plasmas $\rho = m_i n$
 m_i Ionenmasse
 n Teilchendichte des Plasmas
Adiabatexponent $\gamma = \frac{f + 2}{f}$
 f Zahl der Freiheitsgrade
Gasdruck $p = n k (T_e + T_i)$
 $k T_{e,i}$ Elektronen-, bzw. Iontentemperatur in eV.

b) Das Verhältnis von Gasdruck zum magnetischen Druck ("lokales Beta")

$$\beta = \frac{nk(T_e + T_i)}{B^2/8\pi}$$

Die Theorie von Sagdeev /6/ beschreibt Stosswellen mit kleiner Machzahl für den Grenzfall $\beta \ll 1$.

c) Die Summe P von Gasdruck und magnetischem Druck

$$P = p + p_m$$

Durch Variation der Ladespannung U_H der Hauptbatterie und damit des äusseren Magnetfeldkolbens ändert sich die Frontgeschwindigkeit und damit die Machzahl der Stosswelle, die in das vorgegebene Plasma hineinläuft. Der funktionale Zusammenhang dieser beiden Grössen mit U_H und dem Ausgangsplasma kann durch folgende halbempirische Formel dargestellt werden:

$$v_F = a \frac{U_H}{\sqrt{\rho}}$$

$$M = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{U_H}{\sqrt{P}}$$

Proportionalitätskonstante $a = (2.3 \pm 0.6) 10^{-2}$
 $[g^{1/2} cm^{-1/2} sec^{-1} Volt^{-1}]$

(Näheres im Abschnitt III. 2.2).

- d) Die kritische Machzahl M_{kr} .
Sie hat ebenso wie β für ein bestimmtes Ausgangsplasma einen festen Wert. Eine einfache Methode zur Berechnung von M_{kr} auch für β -Werte sehr verschieden von Null wird in Abschnitt IV.1.5 abgeleitet. Formal ergibt sich die kritische Machzahl als Grenze, oberhalb derer für die MHD-Gleichungen keine Lösung existiert.

Für grössere Machzahlen ist eine Erweiterung dieses Gleichungssystems notwendig; so müsste beispielsweise für die Ionen neben der adiabatischen Mindestaufheizung ein zusätzlicher Dissipationsmechanismus eingesetzt werden (Viskosität?). Nachdem bisher keine direkte Messung der Ionenaufheizung in der Stosswelle vorliegt⁺⁾ , wurde von einer Erweiterung der Gleichungen abgesehen.

2.2. Messung der Plasmaparameter

Alle Messergebnisse, über die im folgenden berichtet wird, beziehen sich auf Zeiten, in denen das Plasma nach der dynamischen Erzeugungsphase keine makroskopisch sichtbaren Bewegungen mehr ausführt.

a) Magnetfeld

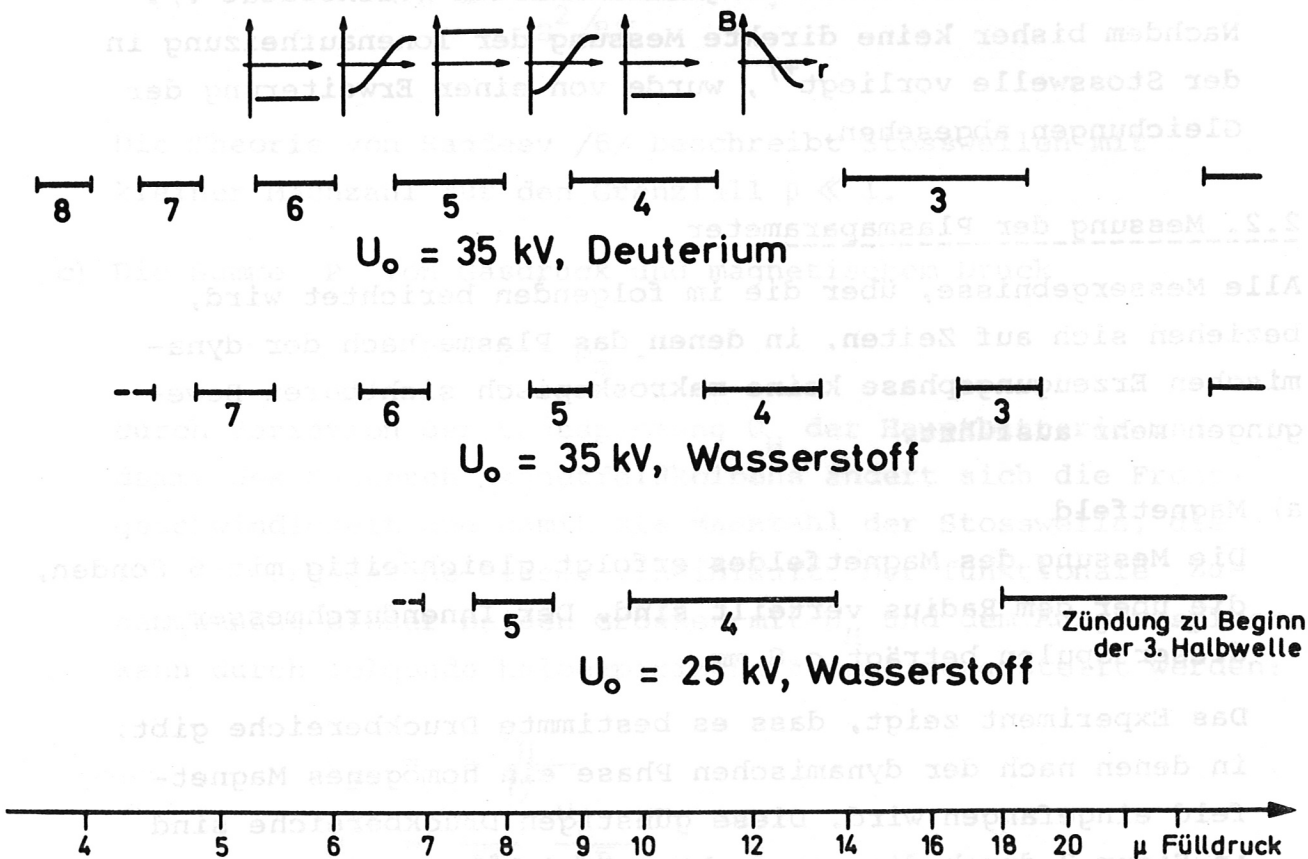
Die Messung des Magnetfeldes erfolgt gleichzeitig mit 6 Sonden, die über dem Radius verteilt sind. Der Innendurchmesser dieser Spulen beträgt 0.8 mm.

Das Experiment zeigt, dass es bestimmte Druckbereiche gibt, in denen nach der dynamischen Phase ein homogenes Magnetfeld eingefangen wird. Diese günstigen Druckbereiche sind in Figur 2 durch die waagrechten Striche angegeben und zwar für verschiedene Ladespannungen und Gasarten. In den einzel-

⁺⁾ Die Ionenaufheizung soll aus der Vorwärtsstreuung von Laserlicht bestimmt werden. Dieses Experiment wird gegenwärtig vorbereitet, doch müssen noch eine ganze Reihe technischer Probleme gelöst und theoretische Grundlagen erarbeitet werden.

nen Bereichen erfolgt die Zündung mit abnehmendem Druck jeweils um eine Halbwelle später (die Zahlen unter den Querstrichen geben die Halbwelle der Zündung an). Die Polarität des eingefangenen Feldes entspricht derjenigen unmittelbar nach der Zündung.

Ausserhalb dieser Bereiche wird ein sehr inhomogenes Feld eingefangen, das über dem Radius r aufgetragen sein Vorzeichen ändert. Der radiale Magnetfeldverlauf $B(r)$ wird schematisch in der obersten Reihe der Figur 2 dargestellt, wobei sich die



Figur 2:

Druckbereiche, in denen ein homogenes Magnetfeld eingefangen wird.

einzelnen Kurven auf die unmittelbar darunter liegenden Druckbereiche für den Fall $U_0 = 35$ kV, Deuterium beziehen. Erniedrigt man von einem günstigen Bereich ausgehend den Fülldruck, so ändert das Feld zuerst aussen sein Vorzeichen, weiter innen bleibt die Polarität zunächst erhalten. Ab Zündung 5. Halbwelle ist dieser Vorgang in allen drei hier aufgeführten Fällen gerade umgekehrt: das Magnetfeld ändert jetzt von innen her sein Vorzeichen. Figur 3 bringt je ein Beispiel für diese beiden Fälle.

Figur 4 zeigt die zeitliche Abnahme des mittleren eingefangenen Magnetfeldes \bar{B} ; die senkrechten Striche geben als Beispiel für den höchsten und niedrigsten Fülldruck die prozentuale Inhomogenität ΔB an.

$$\bar{B} = \frac{1}{\Delta R} \int_{R_4}^{R_1} B(r) dr$$

$$\Delta B = \frac{100}{\bar{B} \cdot \Delta R} \int_{R_4}^{R_1} |\bar{B} - B(r)| dr$$

$$\Delta R = R_1 - R_4$$

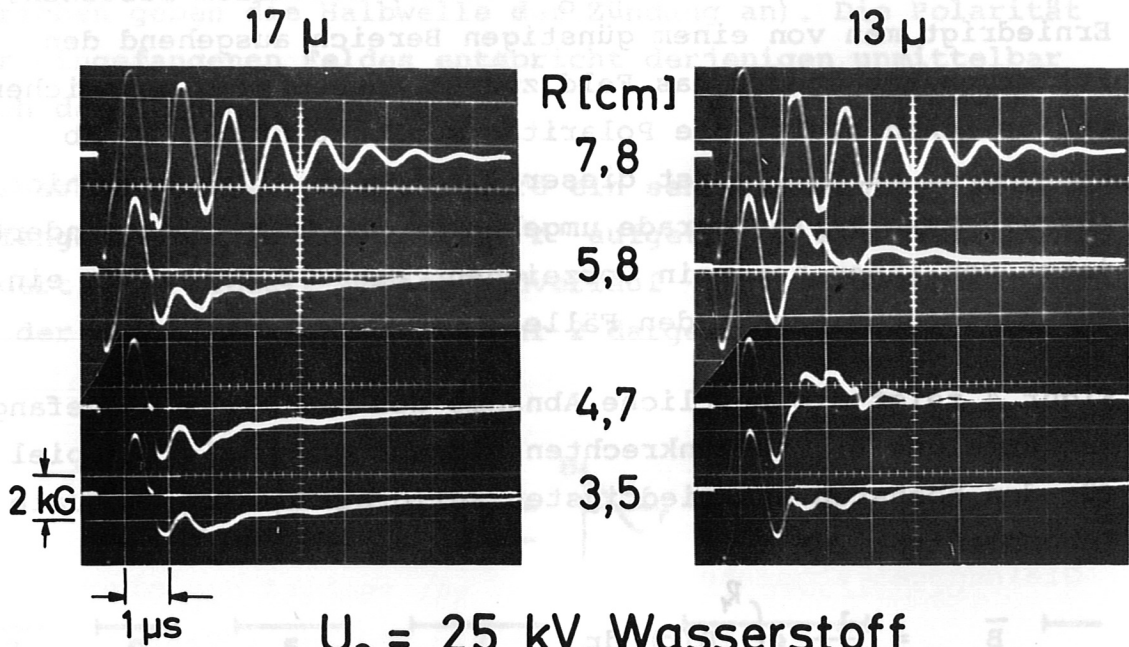
$$R_i \quad \text{Ort der } i\text{-ten Sonde: } R_1 = 5.8 \text{ cm}$$

$$R_4 = 2.3 \text{ cm.}$$

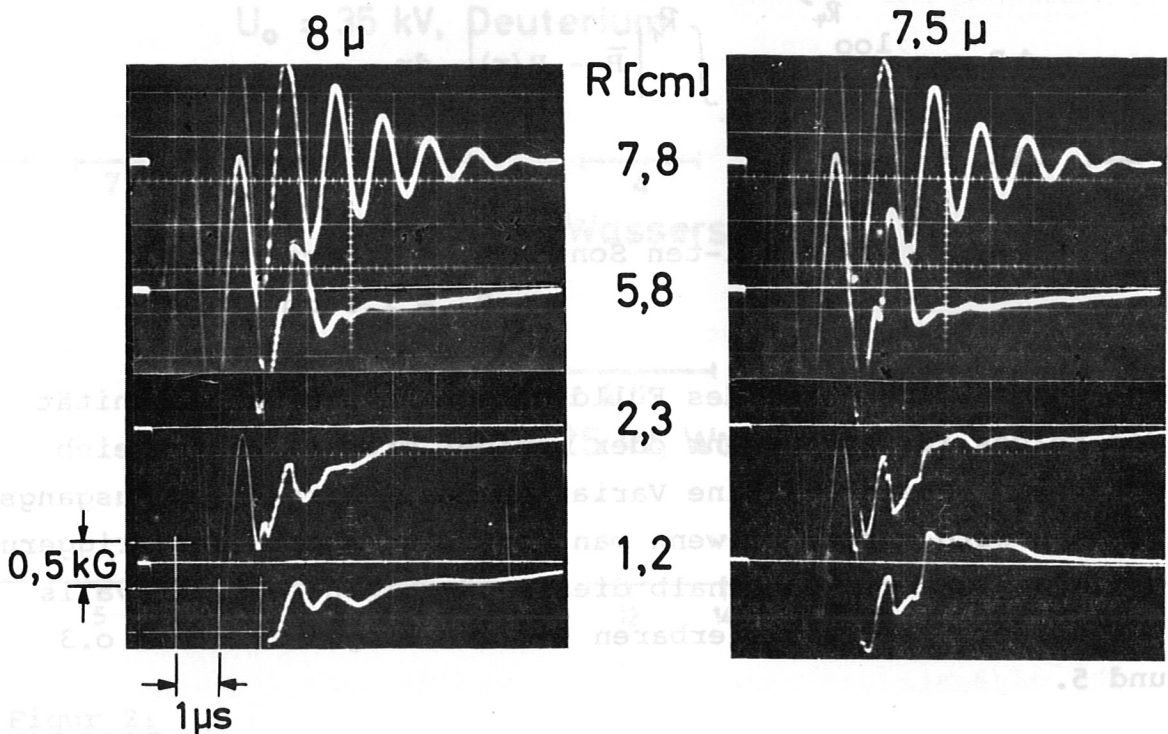
Bei sorgfältiger Wahl des Fülldrucks kann die Inhomogenität des Feldes für einen mehr oder weniger grossen Zeitbereich unter 10 % absinken. Eine Variation des β -Wertes des Ausgangsplasmas wird erreicht, wenn man den Zeitpunkt t_H der Triggerung des Hauptbatterie innerhalb dieses günstigen Zeitintervalls verschiebt. Die realisierbaren β -Werte liegen zwischen 0.3 und 5.

Im Turbulenzexperiment können grundsätzlich Stosswellen parallel und antiparallel zum eingefangenen Magnetfeld erzeugt werden

$U_0 = 35 \text{ kV}$, Deuterium

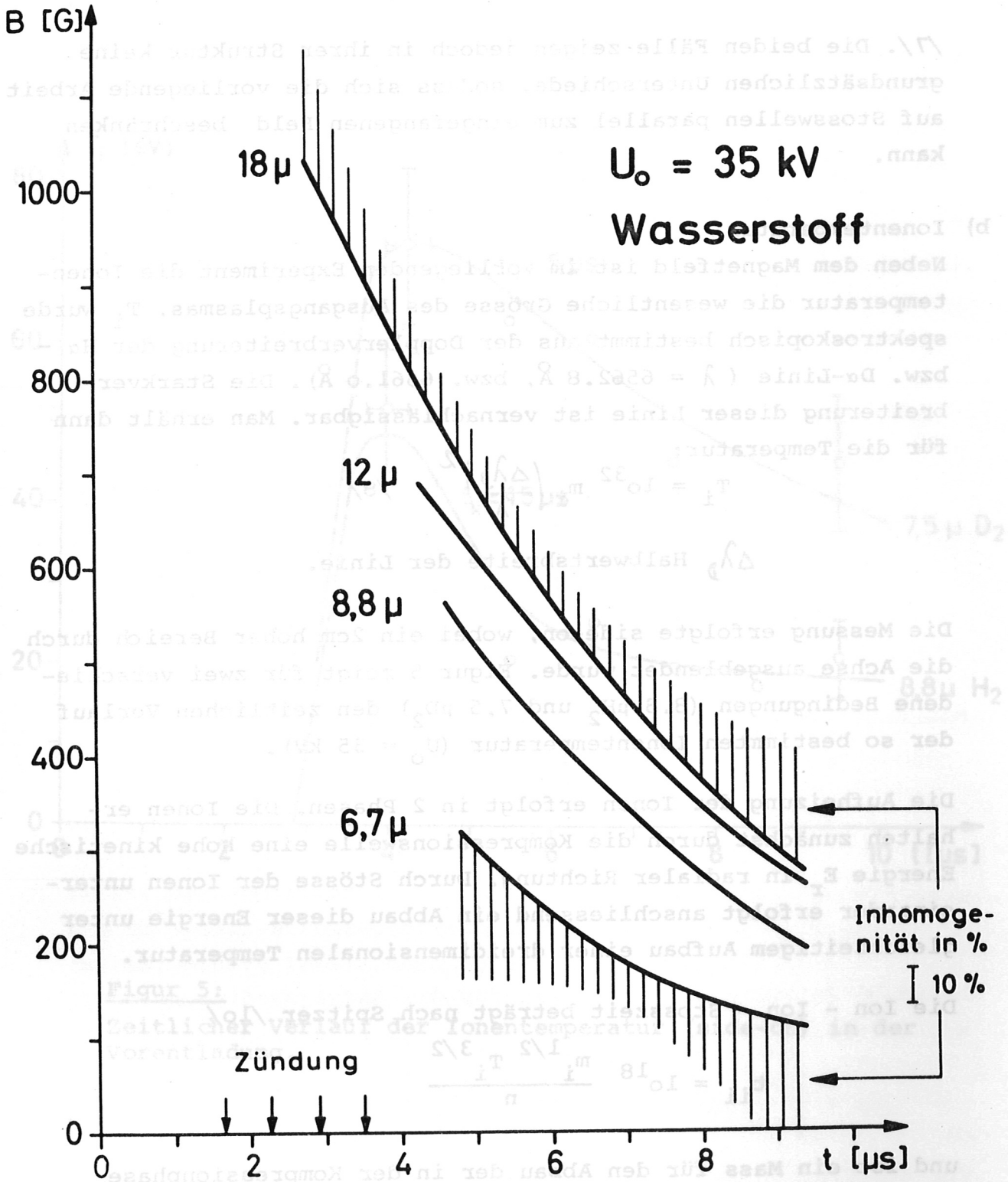


$U_0 = 25 \text{ kV}$, Wasserstoff



Figur 3:

Zeitlicher Verlauf des eingefangenen Magnetfeldes an verschiedenen Radien: Links - günstige Druckbereiche mit homogenen Feld
Rechts - das eingefangene Feld ist stark inhomogen.



Figur 4:

Zeitlicher Verlauf des eingefangenen Magnetfeldes und seiner Inhomogenität.

/7/. Die beiden Fälle zeigen jedoch in ihrer Struktur keine grundsätzlichen Unterschiede, sodass sich die vorliegende Arbeit auf Stosswellen parallel zum eingefangenen Feld beschränken kann.

b) Ionentemperatur

Neben dem Magnetfeld ist im vorliegenden Experiment die Ionentemperatur die wesentliche Grösse des Ausgangsplasmas. T_i wurde spektroskopisch bestimmt aus der Dopplerverbreiterung der $H\alpha$ - bzw. $D\alpha$ -Linie ($\lambda = 6562.8 \text{ \AA}$, bzw. 6561.0 \AA). Die Starkverbreiterung dieser Linie ist vernachlässigbar. Man erhält dann für die Temperatur:

$$T_i = 10^{32} m_i \left(\frac{\Delta\lambda_D}{\lambda} \right)^2 \quad /8/$$

$\Delta\lambda_D$ Halbwertsbreite der Linie.

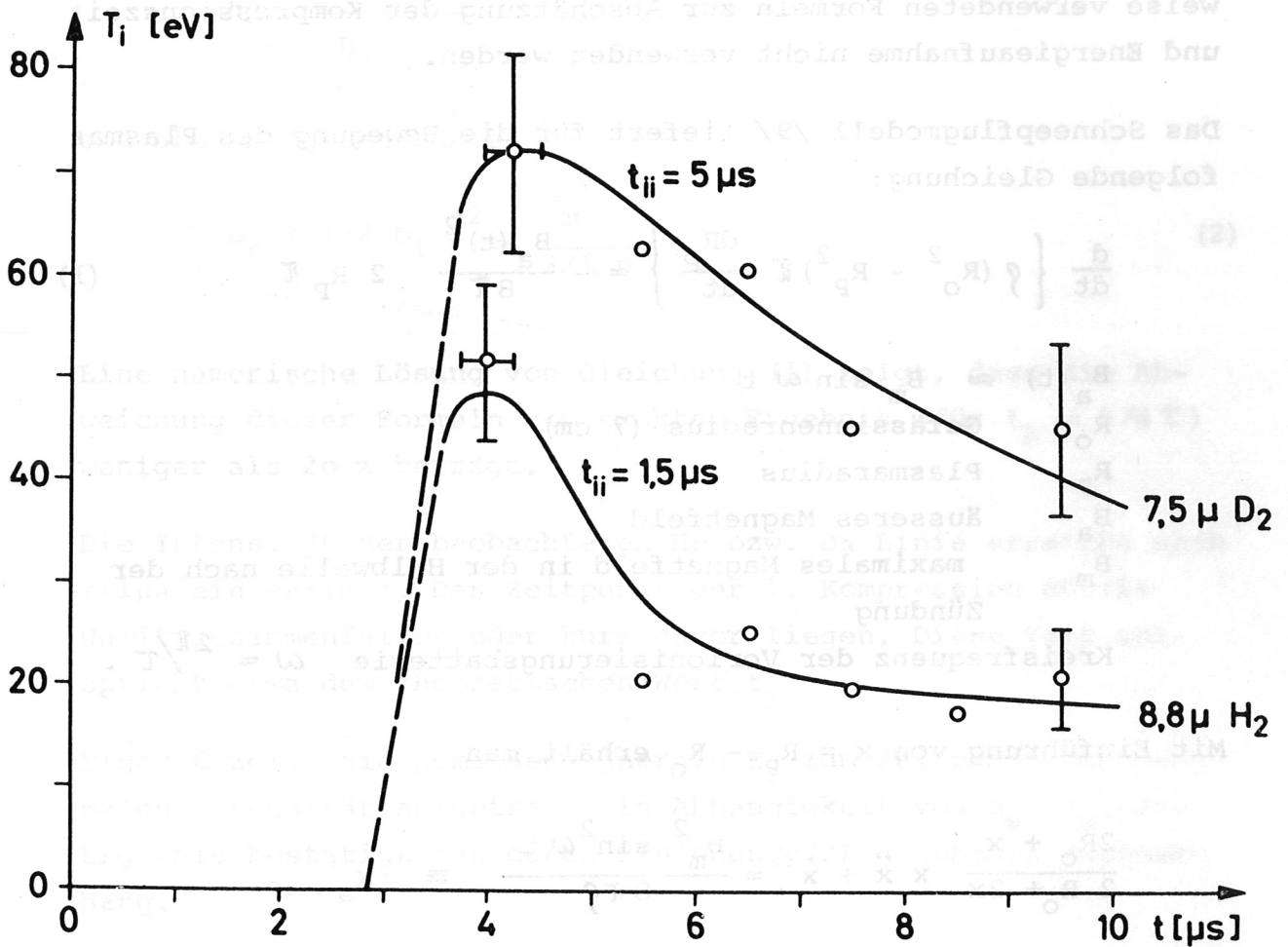
Die Messung erfolgte side-on, wobei ein 2cm hoher Bereich durch die Achse ausgeblendet wurde. Figur 5 zeigt für zwei verschiedene Bedingungen ($8.8 \mu\text{H}_2$ und $7.5 \mu\text{D}_2$) den zeitlichen Verlauf der so bestimmten Ionentemperatur ($U_0 = 35 \text{ kV}$).

Die Aufheizung der Ionen erfolgt in 2 Phasen. Die Ionen erhalten zunächst durch die Kompressionswelle eine hohe kinetische Energie E_r in radialer Richtung. Durch Stösse der Ionen untereinander erfolgt anschliessend ein Abbau dieser Energie unter gleichzeitigem Aufbau einer dreidimensionalen Temperatur.

Die Ion - Ion - Stosszeit beträgt nach Spitzer /10/

$$t_{ii} = 10^{18} \frac{m_i^{1/2} T_i^{3/2}}{n}$$

und ist ein Mass für den Abbau der in der Kompressionphase aufgenommenen Ionenenergie und damit der Thermalisierung. Die Grösse dieser Stosszeit bestimmt den Abfall des Temperaturverlaufes.



Figur 5:

Zeitlicher Verlauf der Ionentemperatur (side-on) in der Vorentladung.

Nachdem die Kompressionszeit t_K wesentlich grösser ist als die Viertelwelle $\tau/4$ des Theta-Pinches, können die üblicherweise verwendeten Formeln zur Abschätzung der Kompressionszeit und Energieaufnahme nicht verwendet werden.

Das Schneepflugmodell /9/ liefert für die Bewegung des Plasmas folgende Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \varrho (R_o^2 - R_p^2) \pi \frac{dR_p}{dt} \right\} = - \frac{B_a(t)^2}{8\pi} 2 R_p \pi \quad (1)$$

$$B_a(t) \approx B_m \sin \omega t$$

R_o Gefässinnenradius (7 cm)

R_p Plasmaradius

B_a äusseres Magnetfeld

B_m maximales Magnetfeld in der Halbwelle nach der Zündung

Kreisfrequenz der Vorionisierungsbatterie $\omega = 2\pi/\tau$.

Mit Einführung von $x = R_p - R_o$ erhält man

$$\frac{2R_o + x}{2R_o + 2x} x \ddot{x} + \dot{x}^2 = \frac{B_m^2 \sin^2 \omega t}{8\pi \varrho} \equiv K_a$$

oder näherungsweise

$$x \ddot{x} + \dot{x}^2 = K_a$$

Diese Differentialgleichung hat für die Anfangsbedingungen $x(0) \approx 0$, $\dot{x}(0) = 0$ die Lösung

$$x = \sqrt{\frac{B_m^2}{16\pi \varrho} \left(t^2 - \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2} \right)}$$

Für $t \gg \tau/2\pi$ gilt

$$x \approx t \frac{B_m}{4\sqrt{\pi \varrho}}$$

Als Kompressionszeit erhält man damit

$$t_K \approx \frac{4 R_0 \sqrt{\pi \rho}}{B_m}$$

und als Energieaufnahme

$$E_r = 1/2 m_i \dot{x}^2 \approx \frac{B_m^2}{32 \pi n} \quad (2)$$

Eine numerische Lösung von Gleichung (1) zeigt, dass die Abweichung dieser Formeln vom exakten Ergebnis (für $t_K \approx 3/4 \tau$) weniger als 20 % beträgt.

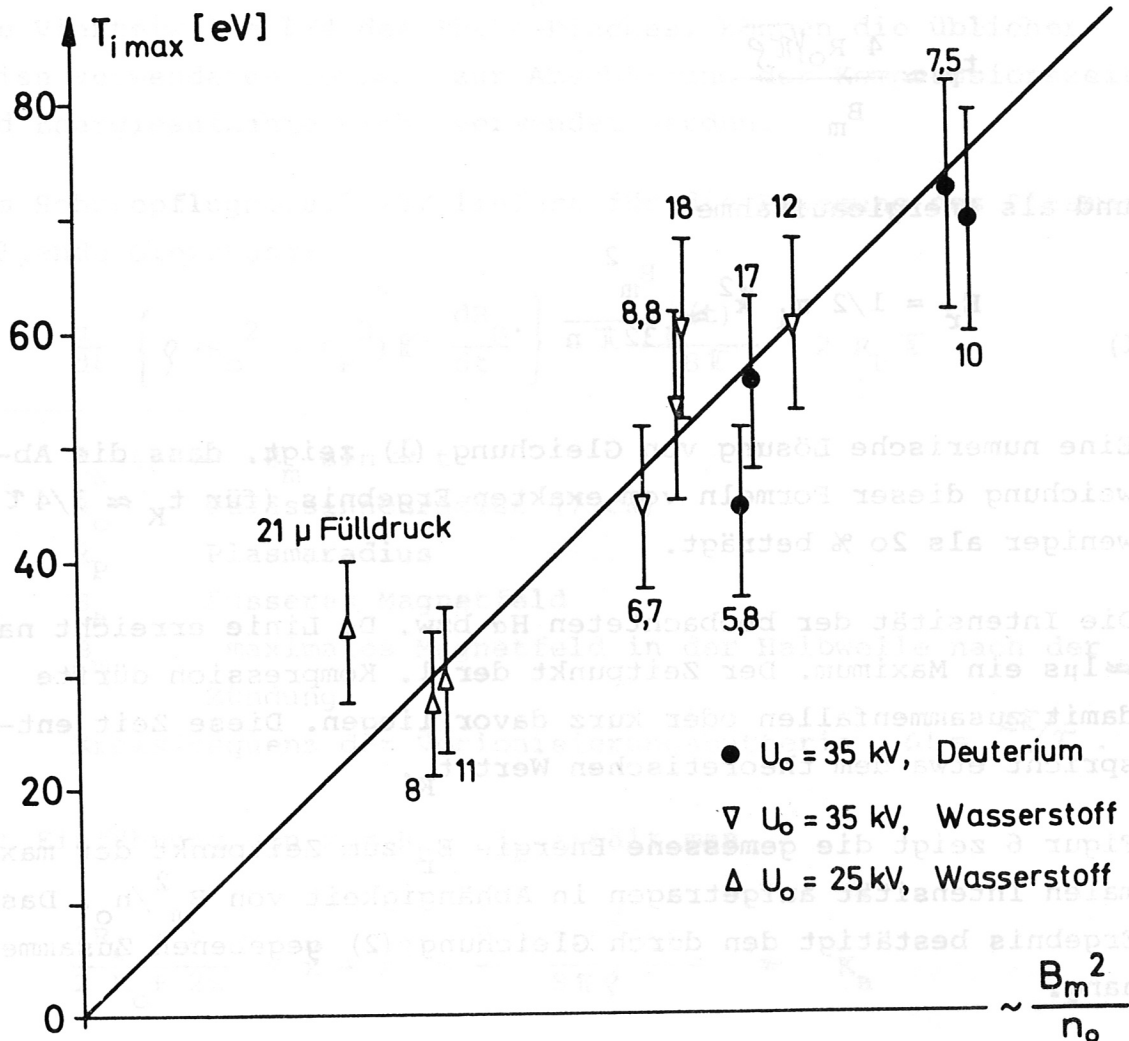
Die Intensität der beobachteten $H\alpha$ bzw. $D\alpha$ Linie erreicht nach $\approx 1 \mu s$ ein Maximum. Der Zeitpunkt der 1. Kompression dürfte damit zusammenfallen oder kurz davor liegen. Diese Zeit entspricht etwa dem theoretischen Wert t_K .

Figur 6 zeigt die gemessene Energie E_r zum Zeitpunkt der maximalen Intensität aufgetragen in Abhängigkeit von B_m^2/n_0 . Das Ergebnis bestätigt den durch Gleichung (2) gegebenen Zusammenhang.

c) Elektronentemperatur

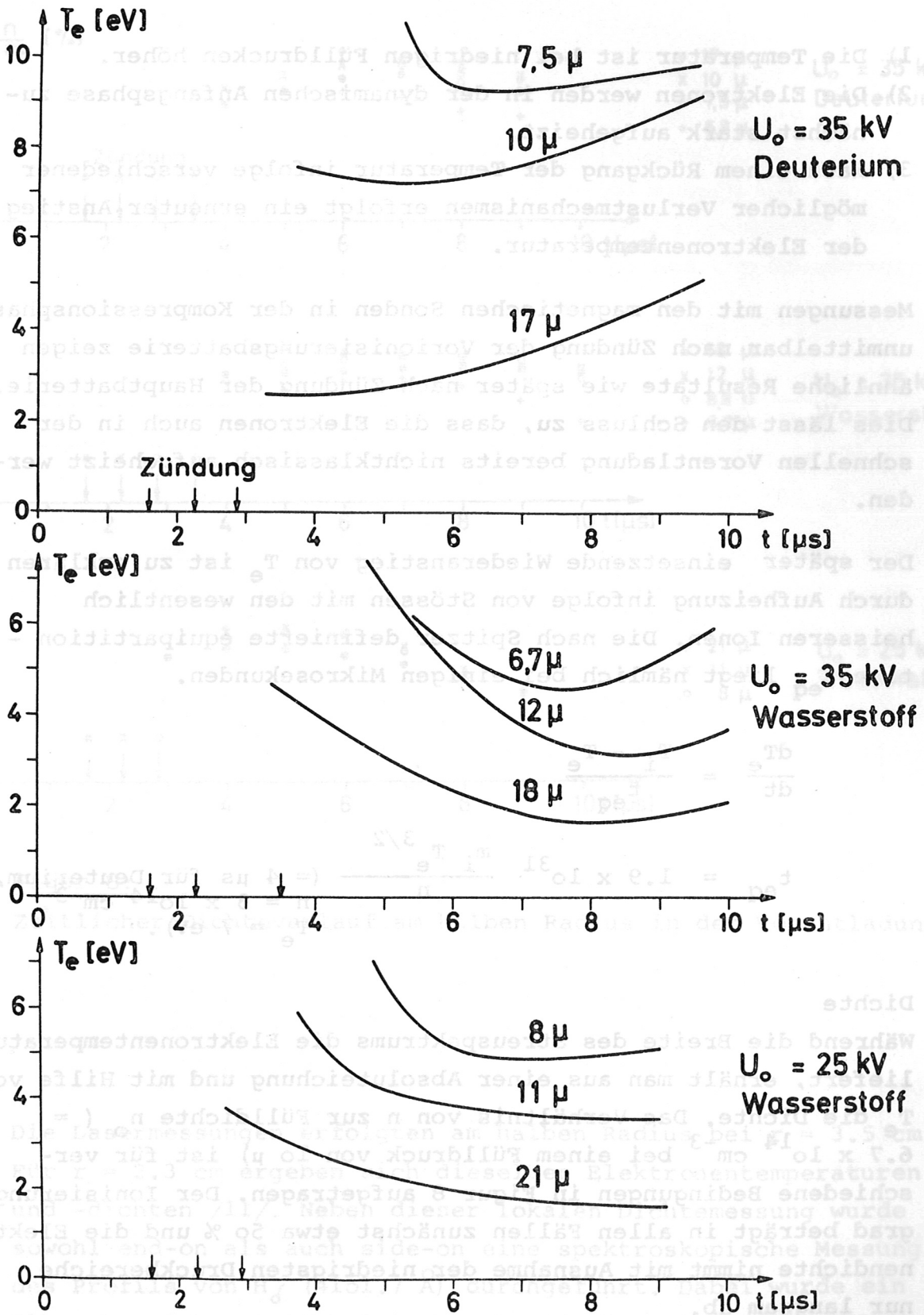
Ein 90° -Laser-Streuexperiment ermöglicht eine gleichzeitige zeitaufgelöste lokale Messung von Temperatur und Dichte der Elektronen. Eine ausführliche Beschreibung dieser Messmethode und des Versuchsausbaues findet sich in /11/.

Figur 7 zeigt den zeitlichen Verlauf der Elektronentemperatur bei verschiedenen Parametern: Ladespannung 25 und 35 kV, Wasserstoff und Deuterium und verschiedene Fülldrucke. Es sind folgende drei Gesetzmässigkeiten zu erkennen:



Figur 6:

Die Ionentemperatur₂ zum Zeitpunkt der 1. Kompression in
 Abhängigkeit von $\frac{B_m^2}{n_0}$ (n_0 Fülldruck).



Figur 7:

Zeitlicher Verlauf der Elektronentemperatur (am halben Radius) in der Vorentladung.

- 1) Die Temperatur ist bei niedrigen Fülldrucken höher.
- 2) Die Elektronen werden in der dynamischen Anfangsphase zunächst stark aufgeheizt.
- 3) Nach einem Rückgang der Temperatur infolge verschiedener möglicher Verlustmechanismen erfolgt ein erneuter Anstieg der Elektronentemperatur.

Messungen mit den magnetischen Sonden in der Kompressionsphase unmittelbar nach Zündung der Vorionisierungsbatterie zeigen ähnliche Resultate wie später nach Zündung der Hauptbatterie. Dies lässt den Schluss zu, dass die Elektronen auch in der schnellen Vorentladung bereits nichtklassisch aufgeheizt werden.

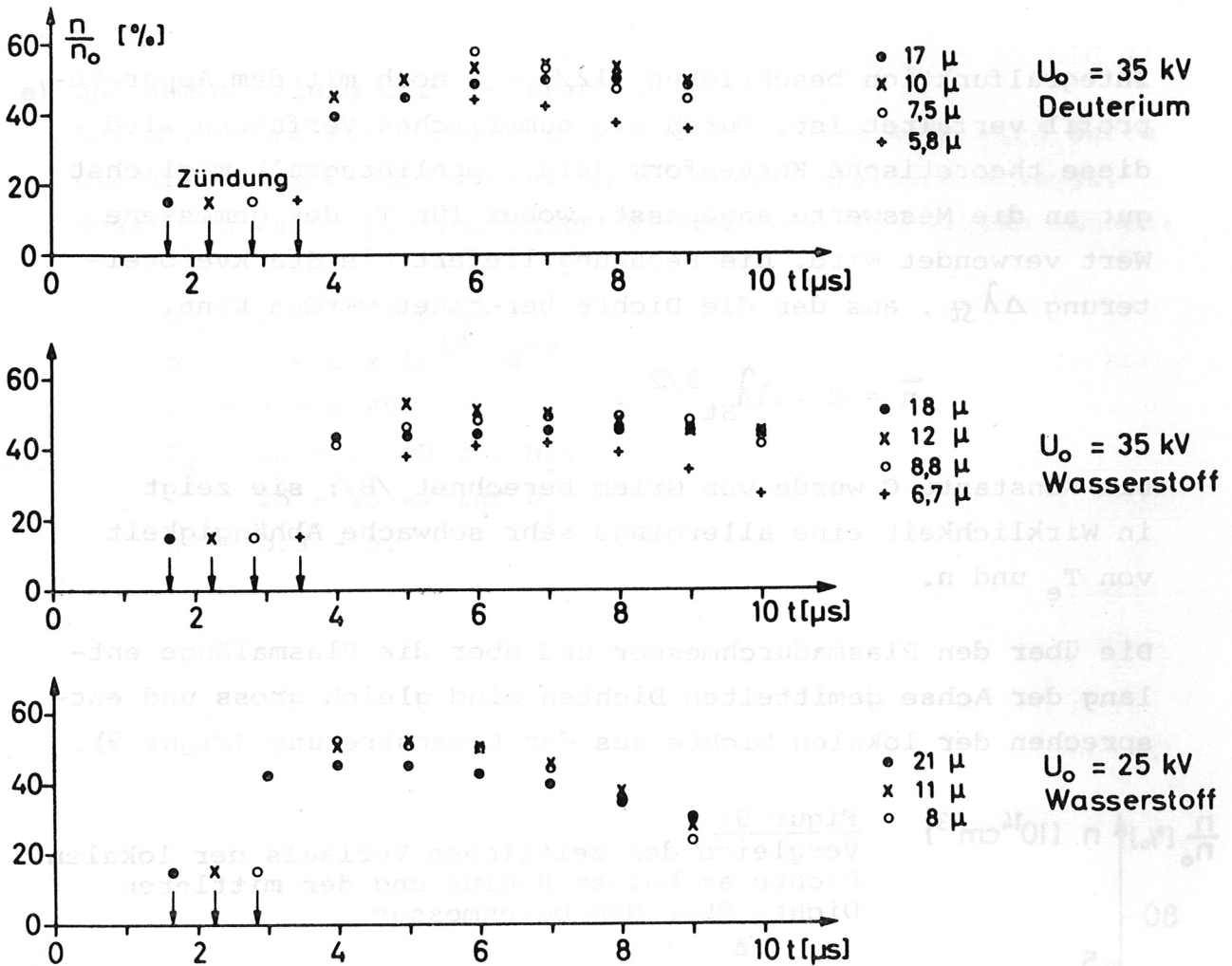
Der später einsetzende Wiederanstieg von T_e ist zu erklären durch Aufheizung infolge von Stößen mit den wesentlich heisseren Ionen. Die nach Spitzer definierte equipartition - time t_{eq} liegt nämlich bei einigen Mikrosekunden.

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{T_i - T_e}{t_{eq}}$$

$$t_{eq} = 1.9 \times 10^{31} \frac{m_i T_e^{3/2}}{n} \quad \left(= 4 \mu s \text{ für Deuterium, } \right. \\ \left. n = 3 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}, \right. \\ \left. T_e = 7 \text{ eV} \right).$$

d) Dichte

Während die Breite des Streuspektrums die Elektronentemperatur liefert, erhält man aus einer Absoluteichung und mit Hilfe von T_e die Dichte. Das Verhältnis von n zur Fülldichte n_0 ($= 6.7 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ bei einem Fülldruck von 10μ) ist für verschiedene Bedingungen in Figur 8 aufgetragen. Der Ionisierungsgrad beträgt in allen Fällen zunächst etwa 50 % und die Elektrodendichte nimmt mit Ausnahme der niedrigsten Druckbereiche nur langsam ab.



Figur 8:

Zeitlicher Dichteverlauf am halben Radius in der Vorentladung.

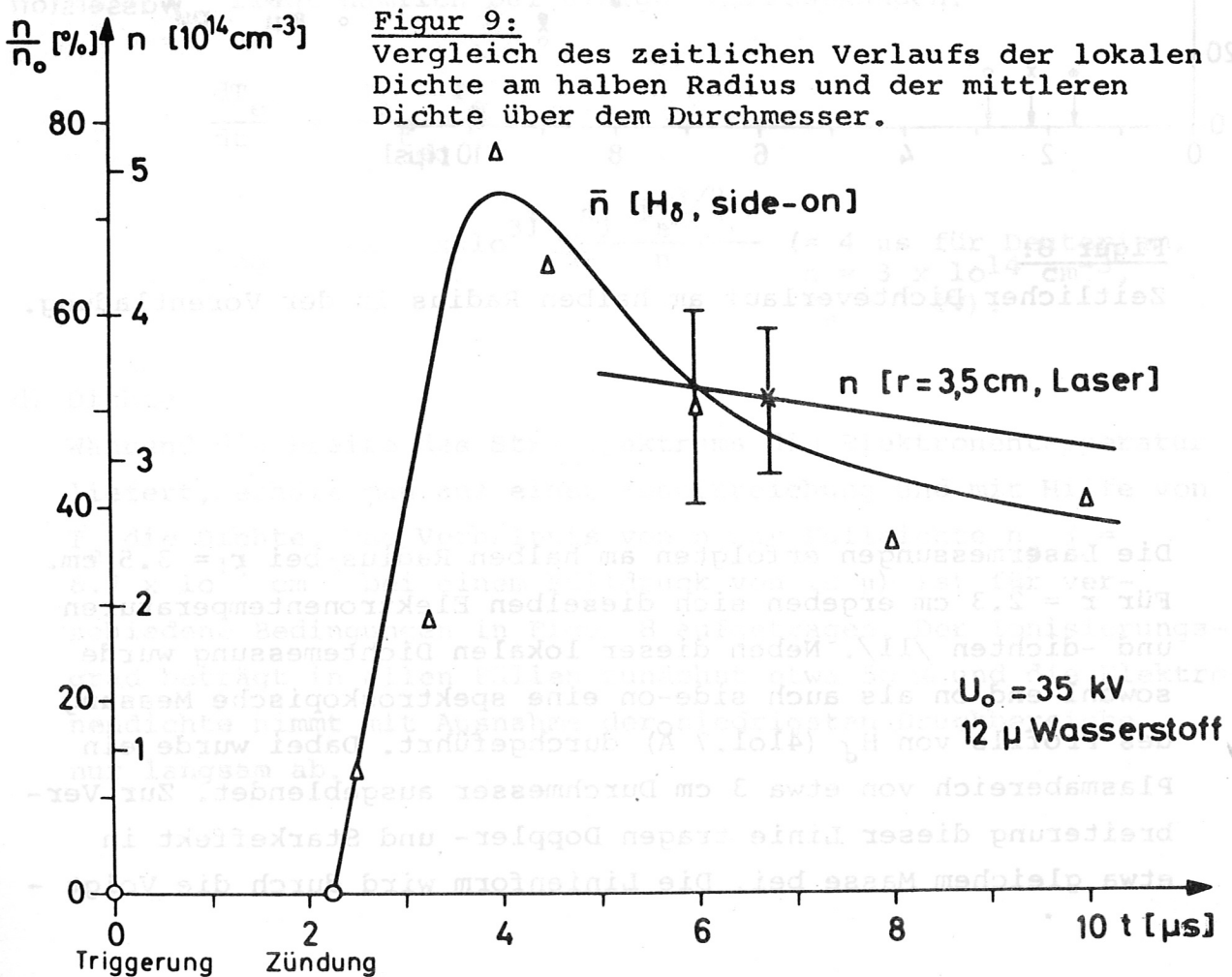
Die Lasermessungen erfolgten am halben Radius bei $r = 3.5$ cm. Für $r = 2.3$ cm ergeben sich dieselben Elektronentemperaturen und -dichten $/11/$. Neben dieser lokalen Dichtemessung wurde sowohl end-on als auch side-on eine spektroskopische Messung des Profils von H_{γ} (4101.7 \AA) durchgeführt. Dabei wurde ein Plasmabereich von etwa 3 cm Durchmesser ausgeblendet. Zur Verbreiterung dieser Linie tragen Doppler- und Starkeffekt in etwa gleichem Masse bei. Die Linienform wird durch die Voigt -

Integralfunktion beschrieben /12/, die noch mit dem Apparateprofil verfaltet ist. Durch ein numerisches Verfahren wird diese theoretische Kurvenform (ein Doppelintegral) möglichst gut an die Messwerte angepasst, wobei für T_i der gemessene Wert verwendet wird. Die Rechnung liefert die Starkverbreiterung $\Delta\lambda_{st}$, aus der die Dichte berechnet werden kann.

$$\bar{n} = c \cdot \Delta\lambda_{st}^{3/2}$$

Die Konstante C wurde von Griem berechnet /8/; sie zeigt in Wirklichkeit eine allerdings sehr schwache Abhängigkeit von T_e und n.

Die über den Plasmadurchmesser und über die Plasmalänge entlang der Achse gemittelten Dichten sind gleich gross und entsprechen der lokalen Dichte aus der Laserstreuung (Figur 9).



e) Zusammenstellung der Messergebnisse

Zur Erzeugung stationärer stossfreier Stosswellen wird durch die Theta-Pinch-Vorionisierung ein Ausgangsplasma erzeugt, dessen Parameter in folgenden Grenzen variiert werden können:

$$B = 200 - 1200 \text{ G}$$

$$n = 2 - 6 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

$$T_e = 3 - 8 \text{ eV}$$

$$T_i = 20 - 30 \text{ eV für H}_2,$$

$$25 - 50 \text{ eV für D}_2$$

$$\beta = 0.3 - 5.$$

III. Erzeugung und Messung stationärer Stosswellen

1. Die Hauptentladung

Durch den ansteigenden Strom der Hauptentladung entsteht im Inneren der Spule ein starkes Magnetfeld, das infolge der guten Leitfähigkeit des Ausgangsplasmas in letzteres nicht eindringen kann und das Plasma komprimiert. Geschieht dies schnell genug, so kommt es zur Bildung von Wellenfronten mit Machzahlen > 1 .

Haupt- und Vorionisierungsbatterie sind völlig gleich aufgebaut; die Kapazität ersterer beträgt $10 \mu\text{F}$, der Energieinhalt bei maximaler Ladespannung ($U_H = 40 \text{ kV}$) ist demnach 8 kJ und als Entladungsfrequenz wurden 450 kHz gemessen. Bei einer Vakuumentladung erreicht der äussere Magnetfeldkolben nach $0.5 \mu\text{s}$ seinen Maximalwert von 12 kG . Eine detaillierte Beschreibung der Kondensatorbatterie findet sich in /13/.

2. Das Auftreten stationärer Stosswellen

Unter bestimmten Bedingungen ist es möglich, Stosswellen zu erzeugen, die eine klare Trennung zwischen Front und Kolben aufweisen; zwischen Front und Kolben beobachtet man ein Plateau. Wie im Abschnitt III.3 noch genauer ausgeführt wird, liegt in diesen Fällen eine quasistationäre Struktur vor, wir sprechen von einer "stationären stossfreien Stosswelle".

2.1 Experimentelle Ergebnisse

Das wichtigste und einfachste Diagnostikmittel zur Bestimmung von Geschwindigkeit, Breite und Struktur der Stosswelle sind die 6 über den Radius verteilten magnetischen Sonden. Im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten werden wir dann von "Stationarität" sprechen, wenn für mehrere Sonden das Verhältnis des Magnetfeldes vor und hinter der Front gleich gross ist und das Feld selbst im Plateau konstant bleibt.

Die systematischen Untersuchungen über das Auftreten stationärer Stosswellen im Turbulenzexperiment können in den folgenden 6 Punkten zusammengefasst werden. Zur Illustration bringt Figur 10 vier Beispiele für den zeitlichen Magnetfeldverlauf an verschiedenen Radien.

- a) Stationäre Verhältnisse können meist am Ort der Sonden 2 und 3 beobachtet werden, in manchen Fällen auch bereits bei Sonde 1 oder im Gebiet bis zur Sonde 4. Zunächst erfolgt über eine Laufstrecke von 1 - 3 cm der Aufbau und das Ablösen der Stossfront vom Kolben. Im anschließenden Bereich läuft die Front mit etwa konstanter Geschwindigkeit. Der Einfluss der Zylindergeometrie führt schliesslich infolge der Erhaltung von Masse und magnetischem Fluss zu einem Anwachsen der Amplitude der Kompressionswelle, der Magnetfeldsprung wird grösser und kann auf Sonde 5 nicht mehr beobachtet werden.
- b) Die räumliche Frontbreite D ist bei Deuterium grösser als bei Wasserstoff. Im Rahmen der Messgenauigkeit ist D unabhängig von der Frontgeschwindigkeit und man findet empirisch

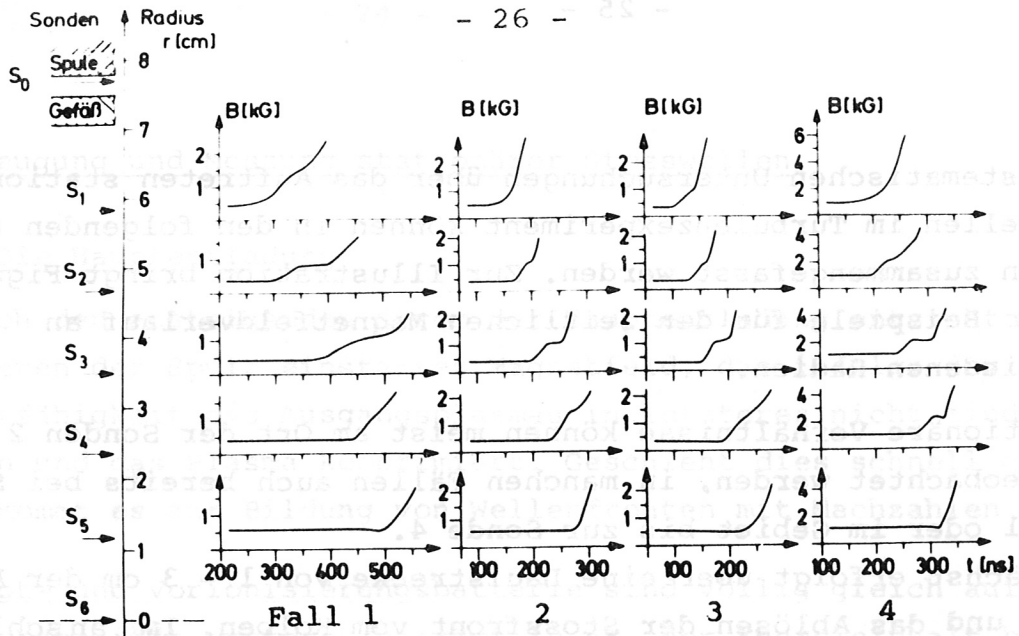
$$D \approx \frac{1}{2} \frac{c}{\Omega_{po}} \quad (3)$$

c Lichtgeschwindigkeit
 Ω_{po} Ionenplasmafrequenz im Ausgangsplasma

$$\Omega_{po} = \sqrt{\frac{4 \pi n e^2}{m_i}}$$

e Elementarentladung.

- c) Die Trennung von Front und Kolben ist gering, wächst aber zeitlich an. Das Plateau wird selten breiter als die Frontbreite selbst; dies schränkt die Beobachtbarkeit stationärer Stosswellen erheblich ein.



Vorionisierung

Gas	Deuterium	Wasserstoff	Meßfehler (± %)	
n_0 (μ)	7.5	8	17	
U_0 (kV)	35	25	40	
t_H (μ s)	7	6	4	
B (G)	420	300	1200	15
T_i (eV)	50	20	25	25
T_e (eV)	9	5	4	20
n (10^{14}cm^{-3})	2.6	2.3	5.0	20
β	3.5	2.6	0.4	
M_{kr}	1.2	1.2	2.0	

Hauptentladung

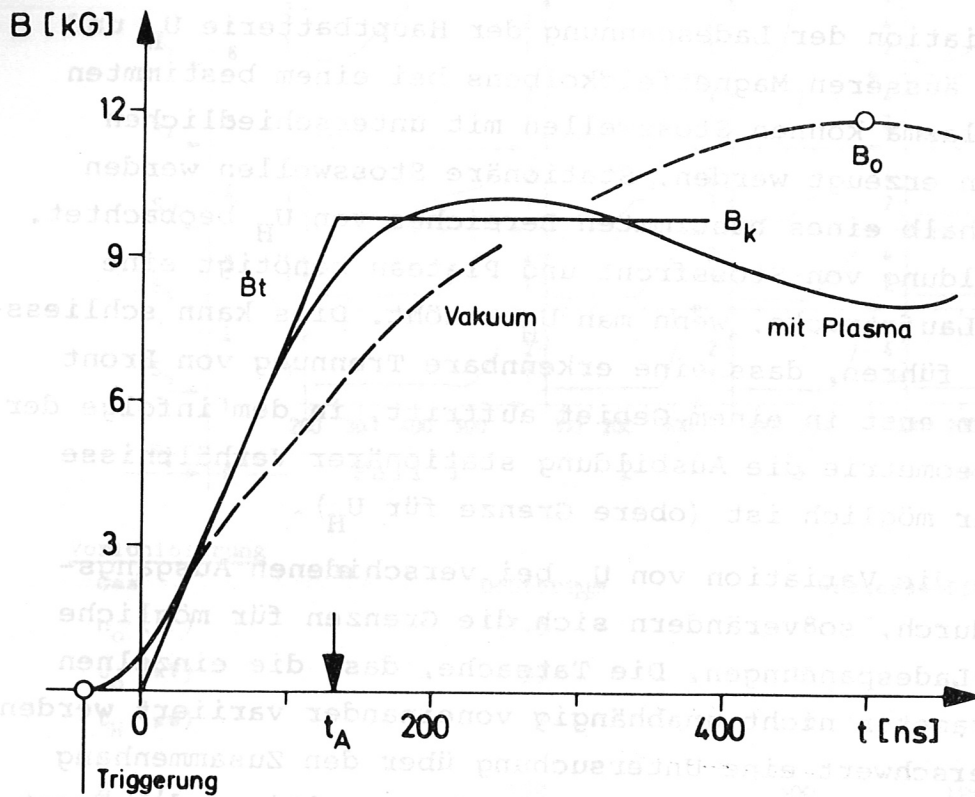
U_H (kV)	23	40	35	35	
v_F (10^7cm/s)	1.7	3.4	4.0	2.4	25
D (cm)	1.0	1.1	0.8	0.7	30
s_B	2.3	2.8	2.9	2.0	20
M	2.0	4.0	4.9	1.7	
ϵ_2 (%)	22	26	25	14	
T_{e2} (eV)	29	32	26	22	
T_{12} (eV)	115	509	339	} 46	
T_{12ad} (eV)	92	107	45		

Figur 10: oben: Zeitlicher Magnetfeldverlauf in stossfreien Stosswellen an verschiedenen Radien
 unten: Zusammenstellung von Meßdaten und daraus berechneter Gröößen für die in Fig.10 dargestellten Sondenmessungen. Die bisher nicht erklärten Symbole werden im Abschnitt IV eingeführt (Tabelle 1).

- d) Durch Variation der Ladespannung der Hauptbatterie U_H und damit des äusseren Magnetfeldkolbens bei einem bestimmten Ausgangsplasma können Stosswellen mit unterschiedlichen Machzahlen erzeugt werden. Stationäre Stosswellen werden nur innerhalb eines bestimmten Bereiches von U_H beobachtet. Die Ausbildung von Stossfront und Plateau benötigt eine grössere Laufstrecke, wenn man U_H erhöht. Dies kann schliesslich dazu führen, dass eine erkennbare Trennung von Front und Kolben erst in einem Gebiet auftritt, in dem infolge der Zylindergeometrie die Ausbildung stationärer Verhältnisse nicht mehr möglich ist (obere Grenze für U_H).
- e) Führt man die Variation von U_H bei verschiedenen Ausgangsplasmen durch, so verändern sich die Grenzen für mögliche günstige Ladespannungen. Die Tatsache, dass die einzelnen Plasmamparameter nicht unabhängig voneinander variiert werden können, erschwert eine Untersuchung über den Zusammenhang der einzelnen Parameter und U_H mit der resultierenden Frontgeschwindigkeit und Machzahl; die Ungenauigkeit der Messungen erlaubte darüber hinaus keine Aufstellung einer empirischen Formel. Gesichert ist jedoch folgender qualitativer Zusammenhang: Für eine konstante Ladespannung U_H steigt die Frontgeschwindigkeit mit abnehmender Massendichte $\rho = m_i n$.
- f) Die beobachteten Machzahlen liegen zwischen 1.5 und 5. M und v_F sind proportional zu U_H . Stationäre Stosswellen mit Machzahlen unter 1.5 sind sehr schlecht zu beobachten, da der Magnetfeldsprung etwa gleich M ist (untere Grenze für U_H).

2.2 Theoretische Abschätzungen

Die im vorausgehenden Abschnitt aufgeführten experimentellen Ergebnisse sollen durch die nachstehenden stark vereinfachenden Überlegungen formelmässig zusammengefasst werden; eine Erklärung der Frontbreite D ist in diesem Rahmen nicht möglich (s. Abschnitt IV.1.3).



Figur 11:

Zeitlicher Verlauf des äusseren Magnetfeldes der Hauptentladung (Sonde S_0).

Figur 11 zeigt den typischen zeitlichen Verlauf des äusseren Magnetfeldes bei einer Entladung mit Plasma. Der Anstieg ist steiler als bei einer Vakuumentladung, da das Plasma im Gefäss die Induktivität des Entladungskreises herabsetzt (diese Induktivität ist infolge der zeitlichen Änderung des Plasmaradius keine Konstante). Das Feld kann angenähert werden durch einen linearen Anstieg ($\dot{B} = \text{const}$), der 40 ns nach Triggerung der Hauptbatterie einsetzt und eine Dauer von $t_A = 130$ ns aufweist. Anschliessend bleibt das Magnetfeld innerhalb der interessierenden Zeiten etwa konstant auf dem Wert B_k , wobei gilt

$$B_k \approx 0.8 B_0$$

B_0 maximales Magnetfeld der Vakuumentladung.

Die durch diesen magnetischen Kolben erzeugte Kompressionswelle kann näherungsweise durch das Schneepflugmodell /9/ beschrieben werden. Effekte der Zylindergeometrie werden vernachlässigt, da die Rechnungen nicht bis zum Gleichgewichtsradius durchgeführt werden. Die dem Plasma durch die Stosswelle zugeführte Energie geht in kinetische und thermische Energie über - für starke Stosswellen sind beide Anteile gleich gross /14/. Damit erhält man als Ausgangsgleichung (ähnlich wie im Abschnitt II.2.2b) für die sich in x-Richtung ausbreitende Stosswelle

$$\frac{d}{dt} \left\{ (\rho x) \dot{x} \right\} = \frac{1}{2} \frac{B(t)^2}{8\pi} \tag{4}$$

oder
$$x \ddot{x} + \dot{x}^2 = \frac{B(t)^2}{16\pi\rho} \tag{5}$$

ρ Dichte vor der Stosswelle (räumlich konstant)
 $B(t)$ äusseres Magnetfeld .

Die linke Seite der Gleichung (4) müsste eigentlich heissen

$$\frac{d}{dt} \left\{ (\rho x_F) \dot{x}_S \right\} \text{ mit } x_F \text{ Koordinate der Front,}$$

x_S Koordinate des Schwerpunktes
der beschleunigten Schicht.

Gleichung (5) kann mit Hilfe der Umformung

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x^2)$$

in allgemeiner Form integriert werden.

Für den Bereich des ansteigenden Magnetfeldes gilt

$$B(t) = B_0 t$$

und man erhält für die Anfangsbedingungen $x(0) \approx 0$, $\dot{x}(0) = 0$
die Lösung

$$x = t^2 \frac{\dot{B}}{\sqrt{96 \pi \rho}} \quad (6)$$

und $\dot{x} = t \frac{\dot{B}}{\sqrt{24 \pi \rho}} \quad (7)$

Im anschließenden Bereich gilt $B(t) = B_k$ mit den Anfangsbedingungen

$$x(t_A) = \frac{B_k t_A}{\sqrt{96 \pi \rho}} \quad \text{und} \quad \dot{x}(t_A) = \frac{B_k}{\sqrt{24 \pi \rho}} \quad (8) \text{ und } (9)$$

und die Lösung lautet

$$x = \sqrt{\frac{B_k^2}{\pi \rho} \left(\frac{t^2}{16} - \frac{t t_A}{12} + \frac{t_A^2}{32} \right)} \approx \left(\frac{t}{4} - \frac{t_A}{6} \right) \frac{B_k}{\sqrt{\pi \rho}} \quad (10)$$

$(t > t_A !)$

$$\dot{x} = \frac{B_k}{\pi \rho} \frac{\left(\frac{t}{8} - \frac{t_A}{12} \right)}{2x} \approx \frac{B_k}{\sqrt{16 \pi \rho}} \quad (11)$$

Die Geschwindigkeit wächst also innerhalb des Zeitintervalls t_A linear an und bleibt dann konstant.

Mit Hilfe der technischen Daten der Hauptentladung erhält man

$$B_0 = \frac{4 \pi J}{10^1} = \frac{4 \pi}{10^1} U_H \omega C = 0.29 U_H$$

und damit die erreichbare Endgeschwindigkeit (über Gleichung (9))

$$v_F \text{ [cm/s]} = 2.8 \times 10^{-2} \frac{U_H \text{ [V]}}{\sqrt{\rho \text{ [g/cm}^3\text{]}}} \quad (12)$$

und die zu ihrem Aufbau benötigte Wegstrecke (über Gleichung (8))

$$x_A \text{ [cm]} = 1.8 \times 10^{-9} \frac{U_H \text{ [V]}}{\sqrt{\rho \text{ [g/cm}^3\text{]}}} . \quad (13)$$

Die nach Gleichung (12) berechneten Geschwindigkeiten liegen etwas über den gemessenen Werten, man findet experimentell

$$v_F = (2.3 \pm 0.6) 10^{-2} \frac{U_H}{\sqrt{\rho}} \quad (14)$$

und damit $M = (1.6 \pm 0.4) 10^{-2} \frac{U_H \text{ [V]}}{\sqrt{P \text{ [dyn/cm}^2\text{]}}} , \quad (15)$

sowie $x_A = (1.5 \pm 0.4) 10^{-9} \frac{U_H}{\sqrt{\rho}} . \quad (16)$

Die im vorhergehenden Abschnitt zusammengefassten experimentellen Ergebnisse über das Auftreten stationärer Stosswellen, ihrer Machzahl und Entstehung bestätigen die in den Gleichungen (14) - (16) angegebenen funktionalen Zusammenhänge.

Aus diesen Gleichungen lässt sich auch sofort der Bereich für die Ladespannung U_H angeben, innerhalb dessen man stationäre Stosswellen erwarten kann:

Die Machzahl 1.5 liefert über Gleichung (15) die untere Grenze der Ladespannung

$$U_H \text{ min} \approx 100 \sqrt{P} .$$

Die obere Grenze für die Beschleunigungsstrecke x_A ergibt sich experimentell zu etwa 3 cm. Damit erhält man über Gleichung (16) für die obere Grenze der Ladespannung

$$U_H \text{ max} \approx 2 \times 10^9 \sqrt{\rho}$$

und über Gleichung (14) eine obere Schranke für die Geschwindigkeit

$$v_F \text{ max} \approx 5 \times 10^7 \text{ cm/sec.}$$

Die Breite des sich ausbildenden Plateaus kann ebenfalls abgeschätzt werden. Nach Abschnitt IV.1.2 gilt

$$\frac{v_F}{v_F - v_K} = s_B$$

v_K Kolbengeschwindigkeit.

Der Magnetfeldsprung s_B kann für Machzahlen zwischen 1 und 4 etwa gleich M gesetzt werden. Die Geschwindigkeitsdifferenz Δv zwischen Front und Kolben ist demnach

$$\Delta v \approx v_0 \quad (\text{Definition in Abschnitt II.2.1a})$$

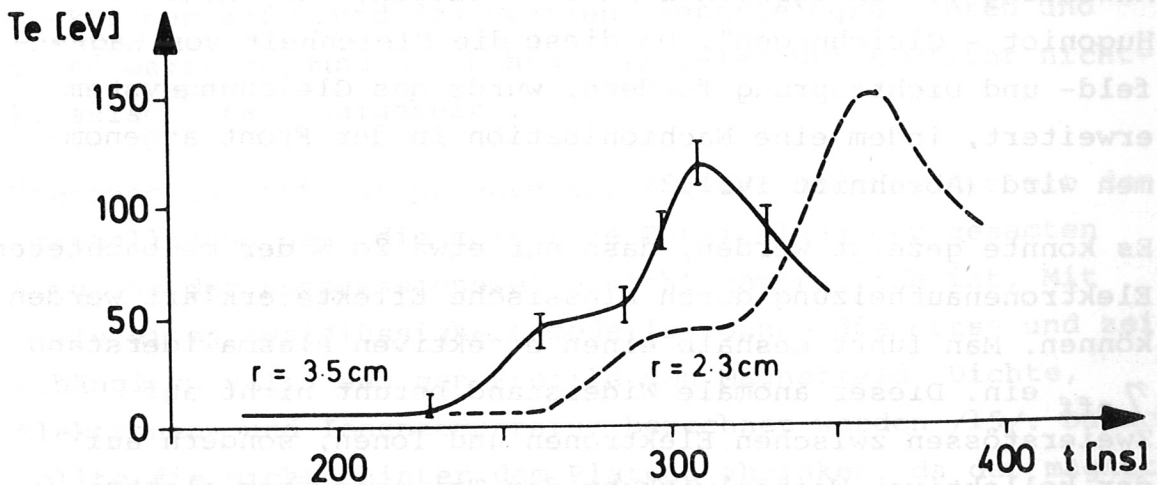
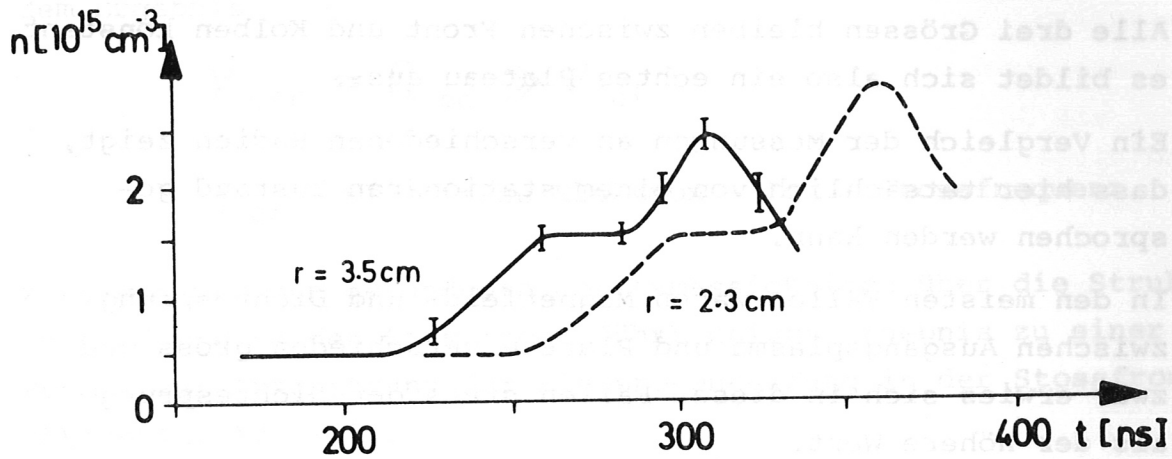
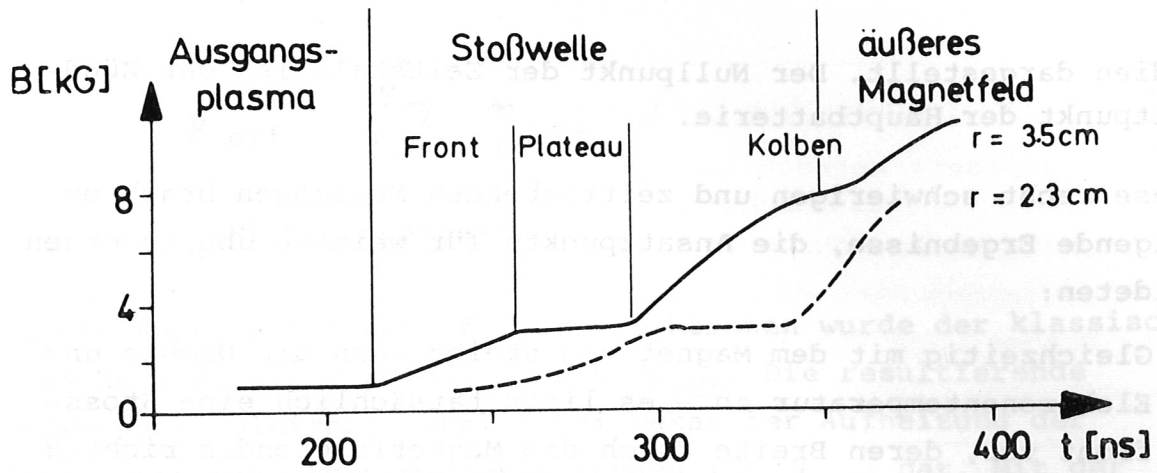
und die räumliche Trennung Δx zwischen Frontmitte und Kolben

$$\Delta x \approx v_0 t. \quad (17)$$

An das Ausgangsplasma ist dabei die Forderung zu stellen, dass dieser Wert bereits für $t = t_A$ vergleichbar mit der Frontbreite wird. (Für den Fall 2 der Tabelle 1 errechnet sich beispielsweise die Aufbaustrecke zu $x_A = 2.4$ cm und die räumliche Trennung zwischen Frontmitte und Kolben an dieser Stelle zu $\Delta x = 1.1$ cm, wobei die Frontbreite selbst ebenfalls 1.1 cm beträgt.)

3. Weitere Messungen an stationären Stosswellen

Neben den magnetischen Sonden wurde zur weiteren Diagnostik von K.H.Steuer ein Laserstreuexperiment aufgebaut. Mit dessen Hilfe gelang die zeitaufgelöste Messung der lokalen Dichte und Elektronentemperatur vor und in der Stossfront, im Plateau und im Kolben. Eine genaue Beschreibung dieses Experimentes mit ausführlichen Resultaten findet sich in /7/ und /11/. Figur 12 bringt ein Beispiel: Zusammen mit dem Magnetfeld wird der Verlauf von Dichte und Elektronentemperatur an zwei verschiedenen



Figur 12:

Zeitlicher Verlauf von Magnetfeld, Dichte und Elektronentemperatur in einer stoßfreien Stoßwelle (nach /11/).

Radien dargestellt. Der Nullpunkt der Zeitskala ist der Zündzeitpunkt der Hauptbatterie.

Diese recht schwierigen und zeitraubenden Messungen brachten folgende Ergebnisse, die Ansatzpunkte für weitere Überlegungen bildeten:

a) Gleichzeitig mit dem Magnetfeld steigt auch die Dichte und Elektronentemperatur an - es liegt tatsächlich eine Stossfront vor, deren Breite durch die Magnetfeldsonden richtig wiedergegeben wird. Die Anstiege in der Front sind glatte Kurven ohne Extrema.

Alle drei Grössen bleiben zwischen Front und Kolben konstant - es bildet sich also ein echtes Plateau aus.

b) Ein Vergleich der Messungen an verschiedenen Radien zeigt, dass hier tatsächlich von einem stationären Zustand gesprochen werden kann.

c) In den meisten Fällen waren Magnetfeld- und Dichtesprung zwischen Ausgangsplasma und Plateau verschieden gross und zwar erwies sich in diesen Fällen stets der Dichtesprung als der höhere Wert.

Stationarität und Auftreten eines Plateaus ermöglichen die Anwendung von integralen Erhaltungssätzen, den "Rankine - Hugoniot - Gleichungen". Da diese die Gleichheit von Magnetfeld- und Dichtesprung fordern, wurde das Gleichungssystem erweitert, indem eine Nachionisation in der Front angenommen wird (Abschnitt IV.1.2).

d) Es konnte gezeigt werden, dass nur etwa 20 % der beobachteten Elektronenaufheizung durch klassische Effekte erklärt werden können. Man führt deshalb einen effektiven Plasmawiderstand η_{eff} ein. Dieser anomale Widerstand beruht nicht auf Zweierstössen zwischen Elektronen und Ionen, sondern auf der kollektiven Wechselwirkung der Teilchen über elektromagnetische Mikrofelder. Diese Wechselwirkung wird charakterisiert durch eine effektive Stossfrequenz ν_{eff} , wobei gilt

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{ne^2}{m_e c^2} \eta_{\text{eff}}$$

m_e Elektronenmasse.

In der Energiegleichung für die Elektronen wurde der klassische ohmsche Widerstand ersetzt durch η_{eff} . Die resultierende Differentialgleichung stellt bei bekannter Aufheizung der Elektronen eine Bestimmungsgleichung für ν_{eff} dar. Mit der Annahme $\nu_{\text{eff}} = \text{const}$ führte eine numerische Auswertung zu dem Ergebnis

$$\nu_{\text{eff}} \approx \Omega_{\text{po}} \gg \nu_{\text{ei}}$$

ν_{ei} klassische Elektron - Ion - Stossfrequenz.

Zusammen mit den gefundenen Gesetzmässigkeiten über die Struktur und Breite der Stossfront führt obiges Ergebnis zu einer Formel zur Abschätzung der Elektronenheizung in der Stossfront (Abschnitt IV. 2.1).

e) Hinter dem Plateau folgt das Gebiet des Kolbens. Hier werden die Elektronen auf Grund des starken Magnetfeldgradienten und ihrer damit verbundenen hohen azimuthalen Drift weiter nicht-klassisch stark aufgeheizt.

Überraschend ist der erneute Anstieg der Dichte, der mit den Vorstellungen über die zeitliche Entwicklung der gesamten Struktur der Kompressionswelle nicht verträglich ist. Mit Hilfe eines Zweiflüssigkeitsmodells können die orts- und zeitabhängigen vollständigen Profile von Magnetfeld, Dichte, Elektronen- und Ionentemperatur berechnet werden /15/. Danach sollte die Dichte hinter dem Plateau absinken, da der magnetische Kolben das gesamte Plasma vor sich her schiebt. Der erneute Dichteanstieg dürfte wahrscheinlich durch Nachionisation zu erklären sein, deren Auftreten bereits in der Stossfront im

nächsten Abschnitt nachgewiesen wird (der Ionisierungsgrad im Ausgangsplasma beträgt nur knapp 50 %).

Die weiteren Ausführungen befassen sich genauer mit den Vorgängen in der Stossfront und den Plasmagrößen im Plateau. Der Kolben wird dabei nicht eigens betrachtet, da in streng stationären Stosswellen Druckgleichgewicht zwischen Plateau und Kolben herrschen muss.

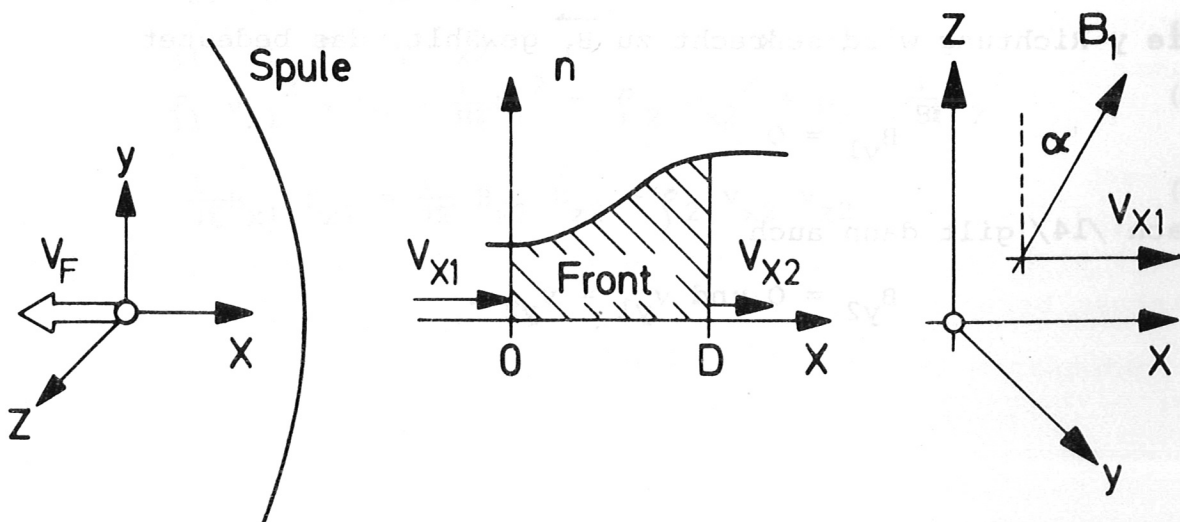
IV. Stossfreie Plasmaheizung durch Stosswellen

Es wird im folgenden gezeigt, dass in der Stossfront eine Energiedissipation auftritt, die klassisch nicht erklärt werden kann. Angestrebt wird eine makroskopische oder phänomenologische Beschreibung, wobei sich herausstellt, dass Frontbreite und Elektronenheizung durch eine und dieselbe "effektive Stossfrequenz" beschrieben werden können, deren Grösse bestimmt wird. Es wird allgemein angenommen, dass diese Stossfrequenz einer Streuung der Elektronen an Plasmawellen zuzuschreiben ist, wobei es bisher keine einheitliche Theorie gibt, die die Anregung und Art dieser in der Stossfront angenommenen instabilen Plasmawellen umfassend beschreibt. Vor allem kommt die Zweistrominstabilität und die Ionenschallinstabilität als Ursache in Frage /6/.

Eine indirekte Bestimmung der Ionenaufheizung führt zu der Annahme, dass die Ionen unterhalb einer gewissen Machzahl lediglich adiabatisch geheizt werden, während für starke Stosswellen eine zusätzliche Dissipation nachgewiesen werden kann. Oberhalb der sogenannten kritischen Machzahl tritt in der Front ein "Überkippen der Ionenflüssigkeit" ein, was zu einer zusätzlichen Thermalisierung führen sollte /6/.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Koordinatensystem und Anfangsbedingungen



Zur mathematischen Beschreibung der Zusammenhänge der Plasma-größen vor und hinter der Front und der Vorgänge in der Front selbst wählen wir ein kartesisches Koordinatensystem, das sich mit der Frontgeschwindigkeit v_F in das Plasma hineinbewegt. Die x-Richtung sei parallel zu \vec{v}_F , weise aber nach aussen. Das Plasma strömt in dieser Beschreibung mit der Geschwindigkeit v_{x1} in die Front ein und verlässt sie mit der Geschwindigkeit v_{x2} . Es gilt also

$$v_{x1} = \left| \vec{v}_F \right| = -v_F$$

$$-v_K = v_{x1} - v_{x2}$$

Der Index "1" soll im folgenden stets die entsprechende Grösse vor der Front, der Index "2" diejenige hinter der Front bezeichnen. In der Front selbst sind die Grössen abhängig von x, doch wird dies nicht explizit angeschrieben - z.B. $B_z \equiv B_z(x)$. Die Indices "x,y,z" bezeichnen die entsprechenden Komponenten eines Vektors, die Indices "i,e" sagen, ob die Grösse sich auf die Ionen oder Elektronen bezieht. Vor und hinter der Front gilt

$$Zn_{i1,2} = n_{e1,2}$$

Z - Ladungszahl (für Wasserstoff und Deuterium $Z = 1$)

$$v_{ix1,2} = v_{ex1,2}$$

Die y-Richtung wird senkrecht zu \vec{B}_1 gewählt, das bedeutet

$$B_{y1} = 0$$

Nach /14/ gilt dann auch

$$B_{y2} = 0 \text{ und } v_{y1} = v_{y2}$$

Weitere Anfangsbedingungen sind noch

$$v_{y1} = 0 \quad \text{und} \quad v_{z1} = 0.$$

Die folgenden Überlegungen werden in allgemeiner Form für Stosswellen angeschrieben, deren Frontgeschwindigkeit mit dem vorgegebenen Feld \vec{B}_1 einen beliebigen Winkel einschliesst. Experimentell wurden für diese Arbeit nur "senkrechte Stosswellen" untersucht, bei denen beide Richtungen aufeinander senkrecht stehen ($\alpha = 0$). Für $\alpha \neq 0$ spricht man von "schiefen Stosswellen".

1.2 Die erweiterten Rankine - Hugoniot Gleichungen

Für stationäre magnetohydrodynamische ebene Stosswellen unendlicher Ausdehnung können integrale Erhaltungssätze abgeleitet werden, die in Abhängigkeit von der Machzahl oder Frontgeschwindigkeit die Plasmagrößen vor und hinter der Front miteinander verknüpfen /16/. Der Dissipationsvorgang in der Front geht dabei nicht ein und muss demnach nicht bekannt sein. Es kann gezeigt werden, dass dieses Gleichungssystem bis herab zu sehr geringer Leitfähigkeit streng gültig bleibt /17/. Diese "verallgemeinerten Rankine - Hugoniot Gleichungen" können auf unsere Stosswellen angewendet werden und lauten folgendermassen (vgl. auch /14/):

$$B_{x1} = B_{x2} \quad (18)$$

$$B_{z1} v_{x1} = B_{z2} v_{x2} - B_{x2} v_{z2} \quad (19)$$

$$\rho_1 v_{x1} = \rho_2 v_{x2} \quad (20)$$

$$\rho_1 v_{x1}^2 + p_1 + \frac{1}{8\pi} B_1^2 = \rho_2 v_{x2}^2 + p_2 + \frac{1}{8\pi} B_2^2 \quad (21)$$

$$\frac{1}{4\pi} B_{x1} B_{z1} = \frac{1}{4\pi} B_{x2} B_{z2} - \rho_2 v_{x2} v_{z2} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 i_1 + \frac{1}{4\pi} B_1^2\right) v_{x1} - \frac{1}{4\pi} B_{x1}^2 v_{x1} = \\ & = \left(\frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + \rho_2 i_2 + \frac{1}{4\pi} B_2^2\right) v_{x2} - \frac{1}{4\pi} (B_{x2} v_{x2} + B_{z2} v_{z2}) B_{x2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Dabei gilt

$$B_{x1} = B_1 \sin \alpha$$

$$B_{z1} = B_1 \cos \alpha$$

$$\text{spezifische Enthalpie } i = e^* + \frac{p}{\rho}$$

e^* spezifische innere Energie

p Gasdruck.

Die Gleichungen (18) und (19) folgen aus den Maxwellgleichungen, Gleichung (20) beinhaltet die Massenerhaltung, die Gleichungen (21) und (22) drücken die Erhaltung des Impulses und Gleichung (23) die Energieerhaltung aus.

Behandelt man das Plasma als ideales Gas, so kann man setzen

$$e^* = \frac{f}{2} \frac{p}{\rho}$$

$$p = n k (T_i + T_e) .$$

Damit ergeben die Gleichungen (18) bis (23) ein System von 5 Gleichungen, in denen neben den bekannten Plasmametern vor der Front und der Geschwindigkeit v_{x1} noch 6 Unbekannte auftreten (B_{z2} , v_{x2} , v_{z2} , ρ_2 , T_{i2} , T_{e2}). Sind die Freiheitsgrade für die Ionen und Elektronen gleich gross, dann treten Ionen- und Elektronentemperatur nur in Form ihrer gemeinsamen Summe auf:

$$T_2 = T_{i2} + T_{e2} .$$

Das Gleichungssystem kann jetzt aufgelöst werden, allerdings lässt sich nur die Temperatursumme hinter der Front, also im Plateau berechnen.

Für senkrechte Stosswellen sind Magnetfeldsprung s_B und Dichtesprung s_n gleich gross

$$s_B = s_n \equiv s, \quad (24)$$

für $M \rightarrow 1$ gilt $s \rightarrow 1$

$$T_2/T_1 \rightarrow 1$$

und für $M \gg 1$ erhält man /14/

$$s = f + 1$$

$$T_2 = T_1 M^2 \frac{f + 2}{(f+1)^2} \quad (25)$$

$$\frac{\frac{1}{2} \rho_2 v_K^2}{\frac{f}{2} p_2} = 1.$$

Der Magnetfeld- und Dichtesprung steigt mit wachsender Machzahl an, kann aber höchstens den Wert $(f + 1)$ erreichen, während der Temperatursprung quadratisch mit der Machzahl anwächst. Die kinetische Energie des von der einlaufenden Stosswelle erfassten Plasmas $(\frac{1}{2} \rho_2 v_K^2)$ und dessen thermische Energie $(\frac{f}{2} n_2 k T_2)$ werden schliesslich für starke Stosswellen gleich gross (vgl. Abschnitt III.2.2).

Wie bereits ausgeführt wurde, ergaben die Lasermessungen einen höheren Dichtesprung als erwartet und die Messergebnisse stehen in Widerspruch zu Gleichung (24). Abschätzungen mit Hilfe des Wirkungsquerschnittes für Stossionisation durch Elektronen /18/ zeigen, dass eine Nachionisation in der Front nicht ausgeschlossen werden kann. Dieser Ionisationsquerschnitt ist im interessierenden Bereich $(3 \text{ eV} \lesssim T_e \lesssim 60 \text{ eV})$ sehr stark temperaturabhängig, aber leider nicht so genau bekannt, dass anhand der gemessenen Profile von Elektronentemperatur und Dichte eine Berechnung der Nachionisation erfolgen könnte, zumal auch die Neutralgasdichte nur abgeschätzt werden kann. Der zusätzliche Dichteanstieg sollte jedoch nicht beträcht-

lich sein und unter 50 % liegen. (Für einen Dichteanstieg von 3×10^{14} auf 10^{15} cm^{-3} und einen Anstieg der Elektronentemperatur von 3 eV auf 50 eV in einer Zeit von 50 ns kann eine Nachionisation von $1 - 4 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ abgeschätzt werden, was zu einer Erhöhung des Dichtesprunges von 3 auf 4 führt).

Auf Grund dieser Überlegungen wurden die Rankine-Hugoniot-Gleichungen erweitert, indem in der Front eine Nachionisation zugelassen wird. Gleichzeitig wurde auch eine Dissoziation eingebaut. Dies ist zwar für die vorliegende Arbeit belanglos, doch wurde für das Turbulenzexperiment auch eine Strahlungsvorionisierung entwickelt /19,20/, die ein Ausgangsplasma mit einem grossen Anteil an Molekülionen erzeugt (im Gegensatz zur Theta-Pinch Vorionisierung, die praktisch nur Atomionen liefert). Die mittlere Ionenmasse vor der Front (m_1) kann mit einem Teilchenanalysator /21/ bestimmt werden.

$$m_1 = \frac{\sum_j n_{1j} m_{1j}}{\sum_j n_{1j}}$$

Bisher wurden in diesem Ausgangsplasma ($n_1 \lesssim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$) nur instationäre Stosswellen beobachtet /1/.

Wie bereits gezeigt wurde, beträgt die Elektronentemperatur im Plateau einige 10 eV, was die Annahme einer vollständigen Dissoziation hinter der Front rechtfertigt. Die Ionenmasse hinter der Front (m_2) ergibt sich also als Masse des H^+ , bzw. D^+ Atomions.

Die gesamte Elektronendichte im Plateau (n_2) setzt sich aus 3 Anteilen zusammen: Die bereits im Ausgangsplasma enthaltenen und von der Stosswelle erfassten und komprimierten freien Elektronen (n_{2E}) und die neu durch Ionisation bzw. Dissoziation hinzugekommenen Elektronen (n_{2I} , n_{2D})

$$n_2 = n_{2E} + n_{2I} + n_{2D} \cdot$$

Wegen der Teilchenerhaltung gilt

$$n_{2E} = \frac{n_1 v_{x1}}{v_{x2}} .$$

Zur Beschreibung der Nachionisation führen wir den Parameter " ξ_2 " ein, der als Verhältnis der Dichteerhöhung durch Ionisation zur Gesamtdichte im Plateau definiert wird

$$n_{2I} = \xi_2 n_2 .$$

Über die als bekannt vorausgesetzte mittlere Ionenmasse vor der Front und die Ionenmasse im Plateau erhalten wir schliesslich über die Bedingung der Massenerhaltung

$$\text{a) für } m_1 = m_2 : n_2^{(a)} = \frac{n_1 v_{x1}}{v_{x2}}$$

$$\text{b) für } m_1 \neq m_2 : n_2^{(b)} = \frac{m_1 n_1 v_{x1}}{m_2 v_{x2}}$$

$$\text{und damit } n_{2D} = n_2^{(a)} - n_2^{(b)} = \frac{n_1 v_{x1}}{v_{x2}} \left(\frac{m_1}{m_2} - 1 \right) .$$

Die zusätzlichen freien Elektronen waren natürlich auch schon vor der Front vorhanden, wenn auch in gebundenem Zustand.

Der Enthalpieterm in Gleichung (23) heisst somit jetzt

$$\int_1 i_1 = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) p_1 - \frac{v_{x2}}{v_{x1}} (n_{2I} E_I + n_{2D} E_D)$$

$$\int_2 i_2 = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) p_2 \text{ (bleibt gleich)}$$

$E_{I,D}$ Energieaufwand zur Erzeugung eines freien Elektrons durch Ionisation bzw. Dissoziation.

Für Wasserstoff und Deuterium gilt unter der Annahme einer vollständigen Dissoziation in der Front

$$E_I = E_{\text{ionis}} + \frac{1}{2} E_{\text{diss}}$$

$$E_D = E_{\text{ionis}} + E_{\text{diss}}$$

$$\text{Ionisationsenergie } E_{\text{ionis}} = 13.6 \text{ eV}$$

$$\text{Dissoziationsenergie } E_{\text{diss}} = 4.5 \text{ eV.}$$

Bezüglich der Dissoziation sind damit die Erhaltungssätze vollständig ergänzt.

Es kann angenommen werden, dass das Neutralgas von der Stoss-
welle nicht mitgenommen wird und folglich keinen Beitrag zu
Impuls- und Energiesatz liefert, da es die Stossfront mit der
Geschwindigkeit v_{x1} wieder verlässt. Erfolgt jedoch in der
Front eine Ionisation neutraler Moleküle, so muss deren Masse,
Impuls und kinetische Energie auf beiden Seiten der Bilanzglei-
chungen dazugenommen werden. Während dies für das Ausströmen
durch die Definition von n_2 bereits geschehen ist, müssen die
linken Seiten der Gleichungen für Masse-, Impuls- und Energie-
erhaltung wie folgt ergänzt werden:

$$\begin{aligned} \text{Gleichung (20)} & \quad + m_M n_{1I} v_{x1} \\ \text{Gleichung (22)} & \quad + m_M n_{1I} v_{x1}^2 \\ \text{Gleichung (23)} & \quad + \frac{1}{2} m_M n_{1I} v_{x1}^3. \end{aligned}$$

m_M Molekülmasse

Wegen der Massenerhaltung muss gelten

$$m_M n_{1I} v_{x1} = m_2 n_{2I} v_{x2}.$$

Das erweiterte Gleichungssystem enthält jetzt eine Unbekannte
mehr als früher, nämlich die Grösse ξ_2 . Will man diese Nach-
ionisation berechnen, so wird zur Auflösung neben der Frontge-
schwindigkeit eine weitere die Stosswelle beschreibende Grösse
benötigt.

Man geht dabei zunächst von der Annahme aus, dass für die Ionen
und Elektronen die Zahl der Freiheitsgrade, in denen die Auf-

heizung erfolgt, gleich gross ist. Für die hier behandelten Dichten, Temperaturen und Aufheizzeiten ist dies jedoch nach klassischen Vorstellungen nicht der Fall. Diese Möglichkeit führt nunmehr zu den "erweiterten Rankine-Hugoniot-Gleichungen":

$$v_{x1} B_1 \cos \alpha = v_{x2} B_{z2} - v_{z2} B_1 \sin \alpha \quad (26)$$

$$m_1 n_1 v_{x1} + m_2 \xi_2 n_2 v_{x2} = m_2 n_2 v_{x2} \quad (27)$$

$$m_1 n_1 v_{x1}^2 + m_2 \xi_2 n_2 v_{x1} v_{x2} + n_1 k (T_{i1} + T_{e1}) + \frac{1}{8\pi} B_1^2 \cos^2 \alpha = m_2 n_2 v_{x2}^2 + n_2 k (T_{i2} + T_{e2}) + \frac{1}{8\pi} B_{z2}^2 \quad (28)$$

$$\frac{1}{4\pi} B_1 \sin \alpha B_1 \cos \alpha = \frac{1}{4\pi} B_1 \sin \alpha B_{z2} - m_2 n_2 v_{x2} v_{z2} \quad (29)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} m_1 n_1 v_{x1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \xi_2 n_2 v_{x1} v_{x2} + n_1 k \left[\left(\frac{f_i}{2} + 1 \right) T_{i1} + \left(\frac{f_e}{2} + 1 \right) T_{e1} \right] - \frac{v_{x2}}{v_{x1}} \xi_2 n_2 E_I - n_1 \left(\frac{m_1}{m_2} - 1 \right) E_D + \frac{1}{4\pi} \cdot B_1^2 \cos^2 \alpha \right\} v_{x1} = \left\{ \frac{1}{2} m_2 n_2 (v_{x2}^2 + v_{z2}^2) + n_2 k \cdot \left[\left(\frac{f_i}{2} + 1 \right) T_{i2} + \left(\frac{f_e}{2} + 1 \right) T_{e2} \right] + \frac{1}{4\pi} B_{z2}^2 \right\} v_{x2} - \frac{1}{4\pi} v_{z2} B_1 \sin \alpha B_{z2} \quad (30)$$

$$\frac{1}{4\pi} v_{z2} B_1 \sin \alpha B_{z2} \quad .$$

Die Ionen- und Elektronentemperatur hinter der Front kommen jetzt nicht mehr nur in Form ihrer gemeinsamen Summe vor, sondern beide Grössen müssen als 2 Unbekannte behandelt werden. Damit benötigt man zur Auflösung des Gleichungssystems neben den Anfangsparametern insgesamt 3 der Stosswelle zugeordnete Messgrössen. Selbstverständlich können an deren Stelle zusätzliche Annahmen oder Gleichungen treten.

1.3 Das magnetohydrodynamische Gleichungssystem

Die im vorhergehenden Abschnitt behandelten Erhaltungssätze gelten unabhängig vom Aufheizmechanismus und erlauben nur Aussagen über die integrale Heizung des Plasmas beim Durchqueren der gesamten Frontbreite. Die Struktur dieser Front wird bestimmt durch die Art der Dissipation und man kann aus der gemessenen Frontbreite Rückschlüsse ziehen auf den Dissipationsvorgang.

Wir wollen dazu das Plasma als ein System von zwei Flüssigkeiten betrachten (Ionen und Elektronen) und deren Bewegung unter dem Einfluss elektromagnetischer Felder und diese Felder selbst berechnen. Nachdem wir es mit stationären Stosswellen zu tun haben, verschwinden im gewählten mitbewegten Koordinatensystem die partiellen zeitlichen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0.$$

Das magnetohydrodynamische Gleichungssystem lautet damit folgendermassen (vgl. auch /14/):

$$\operatorname{div} (\rho_e \vec{v}_e) = 0 \quad (31)$$

$$\operatorname{div} (\rho_i \vec{v}_i) = 0 \quad (32)$$

$$m_e n_e (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e = -e n_e \vec{E} - \frac{e n_e}{c} \vec{v}_e \times \vec{B} - \nu_{ei} m_e n_e \cdot (\vec{v}_e - \vec{v}_i) - \operatorname{grad} p_e \quad (33)$$

$$m_i n_i (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i = e n_i \vec{E} + \frac{e n_i}{c} \vec{v}_i \times \vec{B} + \nu_{ei} m_e n_e \cdot (\vec{v}_e - \vec{v}_i) - \operatorname{grad} p_i \quad (34)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (35)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e (n_i - n_e) \quad (36)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi e}{c} (n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e) \quad (37)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (38)$$

Die Gleichungen (31) und (32) beinhalten die Massenerhaltung, die Gleichungen (33) und (34) stellen die Bewegungsgleichungen für Elektronen bzw. Ionen dar und die Maxwell-Gleichungen ergeben die Gleichungen (35) - (38).

Die Grösse " ν_{ei} " ist die klassische Elektron-Ion-Stossfrequenz und gibt an, wie oft ein Elektron pro sec durch Kleinwinkelstösse an den Ionen um insgesamt 90° aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird. Nach Spitzer gilt $\nu_{ei} \approx 10^6$

$$\nu_{ei} = 4.3 \times 10^{-6} \frac{n \ln \Lambda}{T_e [\text{eV}]^{3/2}} \quad (39)$$

Coulomblogarithmus $\ln \Lambda (\approx 10)$.

Zwischen Stossfrequenz der Elektronen ν und spezifischem Widerstand η besteht ganz allgemein der Zusammenhang

$$\eta = \frac{\nu m_e}{n e^2} \quad (40)$$

Die Parameter des vorionisierten Plasmas bilden die Anfangsbedingungen und es gilt insbesondere

$$\vec{B}_1 = \{ B_1 \sin \alpha, 0, B_1 \cos \alpha \}$$

$$n_{i1} = n_{e1} = n_1$$

$$\vec{v}_{i1} = \vec{v}_{e1} = \{ v_{x1}, 0, 0 \}$$

Es werden "cgs Einheiten" verwendet, wobei u.a. gilt

B in Gauss

1 Volt = $1/300$ cgs-E.

$e = 4.8 \times 10^{-10}$ cgs -E.

Die geometrische Anordnung des Experiments erlaubt die Annahmen

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0.$$

Infolge der Zylindergeometrie sollte keine Abhängigkeit vom azimutalen Winkel θ (d.h. von y) auftreten und bei Vernachlässigung von Endeffekten, also in der Näherung einer langen Spule verschwindet die partielle Ableitung nach z . Es bleibt nur noch die Abhängigkeit von x , der Ausbreitungsrichtung der Stosswelle.

Damit vereinfacht sich unser Gleichungssystem ganz erheblich und man erhält insbesondere

$$\begin{aligned} B_x(x) &= \text{const} = B_1 \sin \alpha \\ E_y(x) &= \text{const} = 1/c v_{x1} B_1 \cos \alpha \\ E_z(x) &= 0 \end{aligned}$$

oder anders ausgedrückt

$$\begin{aligned} \vec{B}(x) &= \{ B_1 \sin \alpha, B_y(x), B_z(x) \} \\ \vec{E}(x) &= \{ E_x(x), 1/c v_{x1} B_1 \cos \alpha, 0 \} \quad \text{mit } E_{x1} = 0. \end{aligned}$$

Durch numerische Integration dieses Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen kann gezeigt werden, dass für den in Frage kommenden Dichtebereich gilt

$$\frac{n_e - n_i}{(n_e + n_i)/2} \ll 1.$$

Man spricht dabei von "Quasineutralität" und wir können in guter Näherung setzen

$$\begin{aligned} n_e &= n_i \equiv n \\ v_{ex} &= v_{ix} \equiv v_x. \end{aligned}$$

Durch Addition der x-Komponenten der Gleichungen (33) und (34) kann schliesslich noch E_x eliminiert werden und wir erhalten somit folgendes Gleichungssystem:

$$n v_x = n_1 v_{x1} \quad (41)$$

$$m_i n v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{e n}{c} \left[B_z (v_{iy} - v_{ey}) - B_y (v_{iz} - v_{ez}) \right] - \frac{d}{dx} (p_i + p_e) \quad (42)$$

$$m_e v_x \frac{dv_{ey}}{dx} = \frac{e}{c} (v_x B_z - v_{ez} B_1 \sin \alpha - v_{x1} B_1 \cos \alpha) - \gamma_{ei} m_e (v_{ey} - v_{iy}) \quad (43)$$

$$m_i v_x \frac{dv_{iy}}{dx} = \frac{e}{c} (-v_x B_z + v_{iz} B_1 \sin \alpha + v_{x1} B_1 \cos \alpha) + \gamma_{ei} m_e (v_{ey} - v_{iy}) \quad (44)$$

$$m_e v_x \frac{dv_{ez}}{dx} = \frac{e}{c} (v_{ey} B_1 \sin \alpha - v_x B_y) - \gamma_{ei} m_e (v_{ez} - v_{iz}) \quad (45)$$

$$m_i v_x \frac{dv_{iz}}{dx} = \frac{e}{c} (-v_{iy} B_1 \sin \alpha + v_x B_y) + \gamma_{ei} m_e (v_{ez} - v_{iz}) \quad (46)$$

$$\frac{dB_y}{dx} = \frac{4 \pi n e}{c} (v_{iz} - v_{ez}) \quad (47)$$

$$\frac{dB_z}{dx} = \frac{4 \pi n e}{c} (v_{ey} - v_{iy}) \quad (48)$$

Für senkrechte Stosswellen, also $\alpha = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen nochmals erheblich. Aus den Gleichungen (45), (46), (47) folgt

$$v_{ez} = v_{iz} = B_y = 0.$$

Ein Vergleich der Gleichungen (43) und (44) liefert

$$-v_{iy} = \frac{m_e}{m_i} v_{ey}.$$

Das magnetohydrodynamische Gleichungssystem für senkrechte Stosswellen lautet also unter Vernachlässigung von v_{iy}

$$n v_x = n_1 v_{x1} \quad (49)$$

$$m_i n v_x \frac{dv_x}{dx} = - \frac{e n}{c} B_z v_{ey} - \frac{d}{dx} (p_i + p_e) \quad (50)$$

$$m_e v_x \frac{dv_{ey}}{dx} = \frac{e}{c} (v_x B_z - v_{x1} B_1) - \nu_{ei} m_e v_{ey} \quad (51)$$

$$\frac{dB_z}{dx} = \frac{4\pi e}{c} n v_{ey} \quad (52)$$

Es soll auch für dieses Gleichungssystem eine Ergänzung durch Nachionisation und Dissoziation diskutiert werden.

Die mittlere von x abhängige Ionenmasse werde mit "m" bezeichnet, die Grösse " \mathcal{E}^* " sei hier definiert als das Verhältnis der Dichtezunahme durch Ionisation zur Dichte, die aus der Massenerhaltung folgt

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^*(x) = \frac{n_I}{n_{ME}}$$

$$m_1 n_1 v_{x1} = m n_{ME} v_x \quad .$$

An die Stelle der Gleichung (49) tritt jetzt

$$n = \frac{m_1}{m} (1 + \mathcal{E}^*) \frac{n_1 v_{x1}}{v_x} \quad (53)$$

Wie bereits ausgeführt wurde, kann \mathcal{E}^* nur recht ungenau berechnet werden. Innerhalb der Front wird deshalb ein linearer Anstieg auf den aus den Erhaltungssätzen berechneten Wert $\mathcal{E}_2^* = \mathcal{E}_2 / (1 - \mathcal{E}_2)$ angesetzt. Der sich aus den MHD Gleichungen ergebende Wert des Magnetfeldsprunges stimmt dann mit dem gemessenen Sprung überein. Auch bezüglich der Dissoziation ist keine Berechnung für den Übergang von m_1 auf m_2 möglich und es bietet sich ein analoges Vorgehen wie bei der Nachionisation an.

Gleichung (50) enthält die Ionen- und Elektronentemperatur (in der Grösse p) und deren Ableitungen. Zur Lösung des Gleichungssystems (50) - (53) ist also die Kenntnis des Verlaufs beider Temperaturen notwendig. Eine Annahme über diesen Verlauf auf den mit den Erhaltungssätzen berechenbaren Endwert hat hier wenig Sinn, da dieses Vorgehen kaum Rückschlüsse auf die Art der Dissipation zulässt. Wir benötigen also für beide Plasmakomponenten eine Energiegleichung, womit sich der nächste Abschnitt befassen soll.

Für kleine Machzahlen ($M \lesssim 1.5$) und $\beta \ll 1$ kann der Druckgradient in Gleichung (50) vernachlässigt werden. Unter der Bedingung

$$\beta = \frac{8\pi n_1 k T_1}{B_1^2} \ll 1 \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{8\pi n_2 k T_2}{B_2^2} \ll 1$$

ist also eine Integration möglich. Die Grösse " ν_{ei} " ersetzen wir durch eine "effektive Stossfrequenz ν_{eff} " und wollen deren Einfluss an einem gedachten Beispiel für senkrechte Stosswellen untersuchen.

Die Grössen des Ausgangsplasmas (Wasserstoff) seien

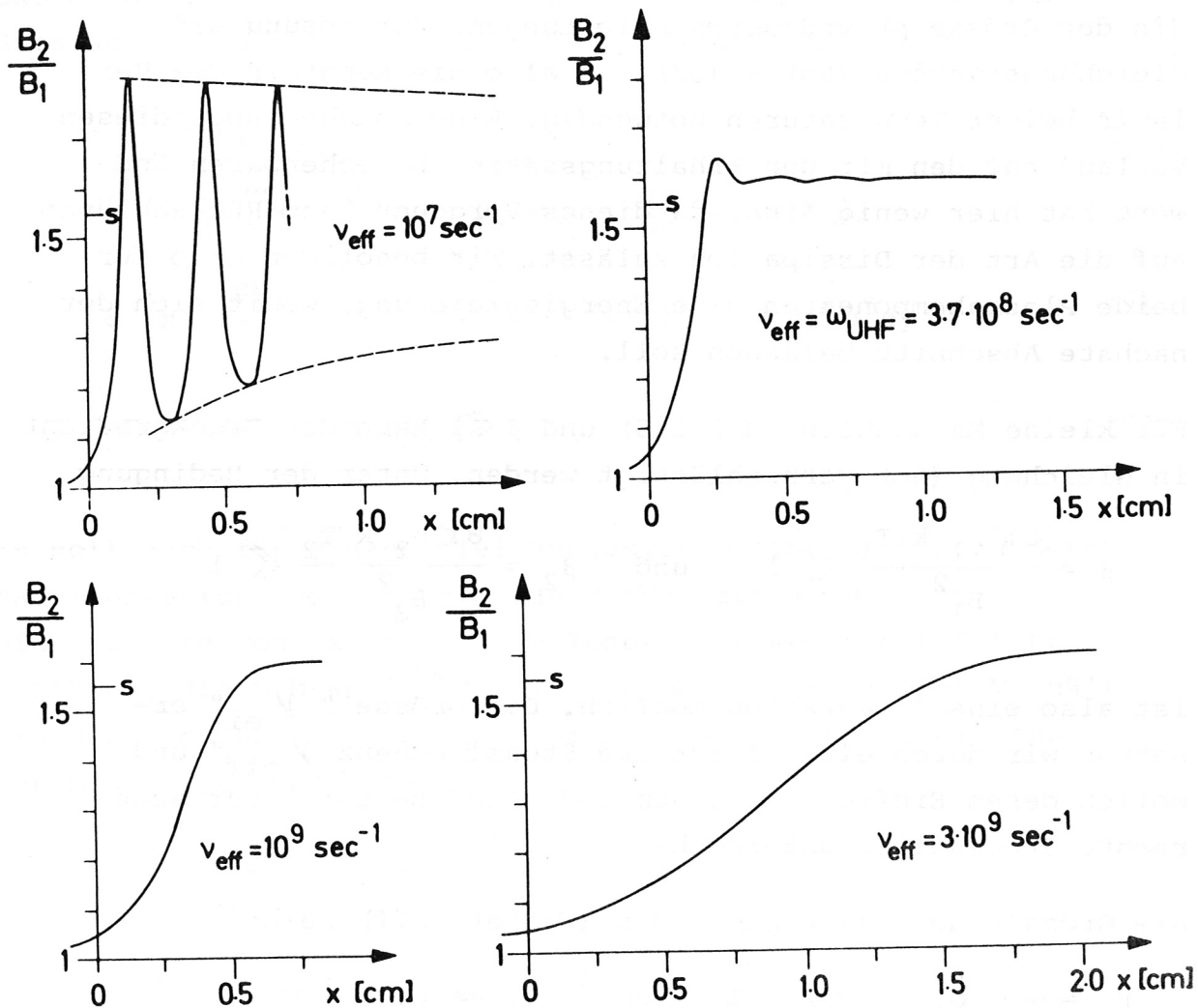
$$B_1 = 900 \text{ G}, \quad n_1 = 2 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}, \quad T_1 \approx 0,$$

die Frontgeschwindigkeit betrage $v_F = 2 \times 10^7 \text{ cm/sec}$ ($M = 1.5$). Die Erhaltungssätze liefern (für $\xi_2 = 0$, $m_1 = m_2$, $f_i = f_e = 3$)
 $s = 1.55$, $T_2 = 4.5 \text{ eV}$ und damit $\beta_2 = 0.03$.

Figur 13 zeigt die berechnete Struktur des Magnetfeldes für verschiedene Werte von ν_{eff} , wobei letztere Grösse als Konstante in der ganzen Front angenommen wurde.

Man erhält zwei voneinander sehr verschiedene Lösungstypen für die Struktur des Magnetfeldes:

Für kleine Werte von ν_{eff} zeigt das Feld nach dem ersten Anstieg



Figur 13:

Berechnete Magnetfeldstrukturen in einer Stosswelle mit der Machzahl 1.5 unter Vernachlässigung des gaskinetischen Drucks.

einen um den Endwert oszillierenden Verlauf. Die Breite des ersten Anstieges ändert sich bei Erhöhung der Stossfrequenz zunächst nur wenig, dafür werden aber die Oszillationen mit wachsender Frequenz stärker gedämpft.

Bei hohen Werten von V_{eff} treten keine derartigen Oszillationen mehr auf, das Magnetfeld wird eine monoton auf den Endwert ansteigende Funktion. Die Breite der Front wächst proportional mit der Stossfrequenz.

Die Grenzfrequenz, die beide Bereiche voneinander trennt, wird gegeben durch die untere Hybridfrequenz

$$\omega_{\text{UHF}} = \frac{e B_1}{c \sqrt{m_i m_e}}$$

(Nähere Ausführungen dazu findet man in /6/).

Die Struktur der Stosswelle, charakterisiert durch die Struktur des Magnetfeldes, hängt also von der Grösse von V_{eff} ab. Umgekehrt kann damit aus der Struktur einer gemessenen Front - für grosse Werte von V_{eff} im wesentlichen aus deren Breite - auf die Grösse von V_{eff} geschlossen werden. Diese so ermittelte effektive Stossfrequenz ist aber die Folge eines sie bestimmenden Dissipationsmechanismus, auf dessen Vorhandensein also zwingend geschlossen werden kann. Die effektive Stossfrequenz muss ähnlich wie beispielsweise die Leitfähigkeit eines Metalls verstanden werden als phänomenologische Grösse, die erst anhand einer mikroskopischen Theorie Aufschluss über den eigentlichen physikalischen Vorgang, der zur Dissipation führt, geben kann.

1.4 Energiegleichung für Ionen und Elektronen

Um das MHD-Gleichungssystem für beliebige β -Werte lösen zu können, benötigt man für die Ionen und Elektronen eine Energiegleichung. Beide Plasmakomponenten müssen mindestens adiabatisch aufgeheizt werden und für diese Kompressionsheizung gilt

nach dem 1. Hauptsatz

$$\begin{aligned} \frac{f}{2} N k dT &= - p dV \\ &= - n k T dV = - \frac{N}{V} k T dV. \end{aligned} \quad (54)$$

N Gesamtteilchenzahl

V Gesamtvolumen.

Die Änderung der Dichte erfolgt nicht nur infolge der Kompression, es soll vielmehr auch Nachionisation und Dissoziation zugelassen werden. Sieht man von Relaxationseffekten ab, so werden die neu hinzukommenden kalten Teilchen dN sofort auf die momentane Temperatur T erwärmt, das bedeutet einen Energieverlust für die bereits vorhandenen Teilchen und die rechte Seite der Gleichung (54) ergibt sich zu

$$- \frac{N}{V} k T dV - k T dN. \quad (55)$$

Damit resultiert aus Gleichung (54) folgende Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{f}{2} n k dT &= k T (dn_E - dn_I - dn_D) \\ &= - k T \left(\frac{n}{v_x} dv_x + dn_I + dn_D \right), \end{aligned} \quad (56)$$

wobei nachstehende Beziehungen verwendet wurden

$$N = n V, \quad \frac{dV}{V} = - \frac{dB}{B} = - \frac{dn_E}{n}, \quad dn_E = - \frac{n}{v_x} dv_x.$$

a) Ionen

Wie im Abschnitt IV.1.5 gezeigt wird, existiert für die MHD-Gleichungen nur für Machzahlen unter einer bestimmten Grenze eine Lösung. Der im Abschnitt IV.2.3 dargestellte experimentelle Befund führt zu dem Schluss, dass die Ionen in derartigen "unterkritischen Stosswellen" lediglich adiabatisch aufge-

heizt werden und zwar entsprechend der Gleichung

$$\frac{T_{i2}}{T_{i1}} = \left[\frac{B_2}{B_1} (1 - \xi_2) \right]^{2/f_i} = \left[\frac{n_2}{n_1} (1 - \xi_2)^2 \right]^{2/f_i} \quad (57)$$

Diese Gleichung (57) gewinnt man durch Integration des Gleichungssystems (54/55) über die gesamte Frontbreite und unter Verwendung von

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{n_2 (1 - \xi_2)}{n_1}$$

Gleichung (56) ist also bereits die gesuchte Energiegleichung für die Ionen

$$\frac{dT_i}{dx} = - \frac{2}{f_i} T_i \left[\frac{1}{v_x} \frac{dv_x}{dx} + \frac{1}{n} \left(\frac{dn_I}{dx} + \frac{dn_D}{dx} \right) \right] \quad (58)$$

b) Elektronen

Stosswellen sind ihrem Wesen nach mit einer Entropiezunahme verbunden. Die Aufheizung des Plasmas muss also stärker sein als der Wert, der sich aus der Summe einer adiabatischen Aufheizung sowohl der Elektronen als auch der Ionen ergibt. Unter Hinweis auf die Ausführungen in Punkt a) heisst das aber, dass für die Elektronen neben der Kompressionsheizung ein zusätzlicher irreversibler Dissipationsmechanismus vorhanden sein muss.

Der in der Stosswelle auftretende Magnetfeldgradient ist mit einem Strom verknüpft, der infolge der grösseren Beweglichkeit der Elektronen von diesen getragen wird und in azimuthaler Richtung (im gewählten kartesischen Koordinatensystem in y-Richtung) fliesst. Zur in Gleichung (54) beschriebenen Kompressionsheizung tritt damit eine Joulsche Heizung und wir erhalten folgende Energiegleichung für die Elektronen

$$\frac{f_e}{2} n k \frac{dT_e}{dx} v_x = - n k T_e \frac{dv_x}{dx} + a \eta_{kl} j^2$$

η_{kl} ergibt sich aus Gleichung (40) mit $\nu = \nu_{ei}$ aus Gleichung (39)

$$\text{Stromdichte } j = \frac{c}{4\pi} \frac{dB_z}{dx}$$

die Grösse "a" stellt einen Korrekturfaktor dar, da sich der spezifische Widerstand für einen Strom senkrecht zu einem starken Magnetfeld beträchtlich erhöht - s./lo/.

Bisher wurden nur Stösse der Elektronen an Ionen betrachtet. Wie bereits erwähnt wurde, wird in der Stossfront eine Anregung elektromagnetischer Feldfluktuationen oder Plasmawellen angenommen, an denen die Elektronen ebenfalls gestreut werden; die dazugehörige "Stoss"- Frequenz sei " ν_{eff} ". Dieser Vorgang wirkt sich als Erhöhung des spezifischen Widerstandes aus; er stellt einen möglichen Dissipationsmechanismus dar und führt zu einer zusätzlichen Aufheizung. Wir ersetzen die Grösse ν in Gleichung (40) durch die Summe $\nu_{ei} + \nu_{eff}$ und erhalten für den spezifischen Widerstand

$$\eta = \frac{m_e}{n e^2} (a \nu_{ei} + \nu_{eff}) .$$

Ziehen wir schliesslich noch die Möglichkeit von Nachionisation und Dissoziation in Betracht, so finden wir für die gesuchte Energiegleichung der Elektronen

$$\begin{aligned} \frac{f_e}{2} n k \frac{dT_e}{dx} v_x = & - n k T_e \frac{dv_x}{dx} + \frac{m_e}{n e^2} (a \nu_{ei} + \nu_{eff}) j^2 \\ & - v_x \left[\frac{dn_I}{dx} (E_I + kT_e) + \frac{dn_D}{dx} (E_D + kT_e) \right] . \end{aligned} \quad (59)$$

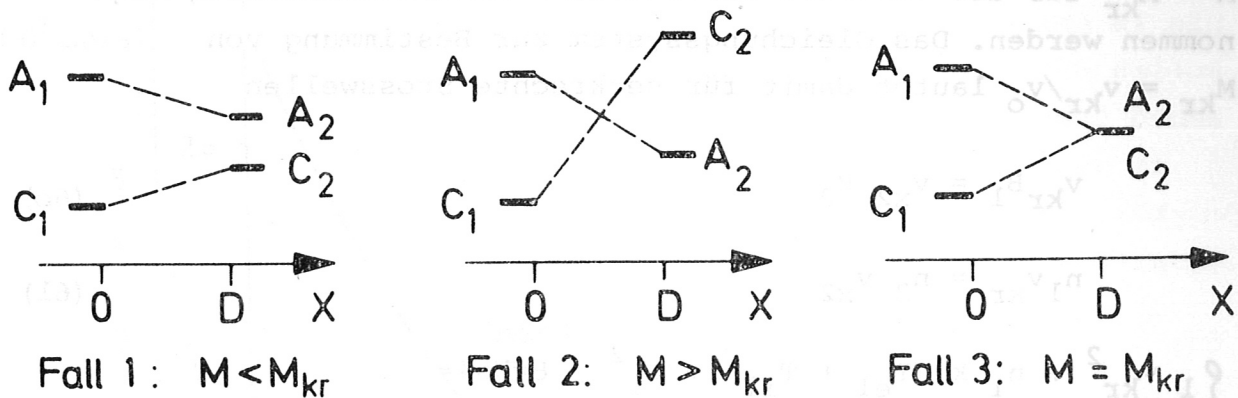
Weitere Beiträge zu dieser Energiegleichung, nämlich viskose Effekte und Aufheizung durch die heisseren Ionen können vernachlässigt werden.

1.5 Die kritische Machzahl

Mit Hilfe der Gleichungen (58) und (59) kann die Gleichung (42) nach $\frac{dv}{dx}$ aufgelöst werden, was für das verwendete numerische Lösungsverfahren notwendig ist

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\text{Zähler}}{-m_i v_x + \frac{k}{v_x} (\gamma_i T_i + \gamma_e T_e)} \equiv \frac{\text{Zähler}}{-A + C}$$

Hier interessiert nur der Nenner der rechten Seite. Im Gebiet vor der Front gilt stets $A_1 > C_1$. Bei einer genügend hohen Stossfrequenz wird A eine monoton fallende und C eine monoton steigende Funktion; diese Bedingung war bei den untersuchten Stosswellen stets erfüllt. Aus den Rankine-Hugoniot Gleichungen kann der Wert dieser beiden Grössen hinter der Front berechnet werden (A_2, C_2) und zwar in Abhängigkeit von der Machzahl.



Für genügend kleine Machzahlen gilt $A_2 > C_2$ (Fall 1). Die beiden Verbindungslinien schneiden sich nicht und das MHD-Gleichungssystem kann numerisch gelöst werden.

Geht man jedoch zu grossen Machzahlen, so wächst C_2 quadratisch mit M an und wir erhalten den Fall 2 mit $C_2 > A_2$. Die beiden Verbindungslinien schneiden sich jetzt; das bedeutet

aber, der Nenner von dv_x/dx wird an dieser Stelle Null, die Ableitung von v_x und damit der Dichtegradient werden unendlich gross, während die Grössen v_x und n selbst endlich bleiben. Das stationäre MHD-Gleichungssystem hat für diese "überkritischen Machzahlen" keine Lösung mehr.

Der Grenzfall liegt gerade dann vor, wenn die beiden Terme hinter der Front gleich gross werden (Fall 3), die dazugehörige Machzahl nennen wir "kritische Machzahl M_{kr} ". Die Grössen hinter der Front werden aber durch die Rankine-Hugoniot Gleichungen beschrieben. Wenn wir also zu diesen Erhaltungssätzen noch die soeben abgeleitete Bedingung $A_2 = C_2$ hinzunehmen, erhalten wir ein vollständiges Gleichungssystem, das uns gestattet, für jedes Ausgangsplasma die kritische Machzahl zu berechnen (von einer Nachionisation oder Dissoziation soll dabei abgesehen werden). Wie bereits erwähnt wurde, kann für $M = M_{kr}$ für die Ionen die adiabatische Mindestaufheizung angenommen werden. Das Gleichungssystem zur Bestimmung von $M_{kr} = v_{kr}/v_0$ lautet damit für senkrechte Stosswellen

$$v_{kr} B_1 = v_{x2} B_2 \quad (60)$$

$$n_1 v_{kr} = n_2 v_{x2} \quad (61)$$

$$\rho_1 v_{kr}^2 + n_1 k (T_{e1} + T_{i1}) + B_1^2 / 8\pi = \rho_2 v_{x2}^2 + n_2 k (T_{e2} + T_{i2}) + B_2^2 / 8\pi \quad (62)$$

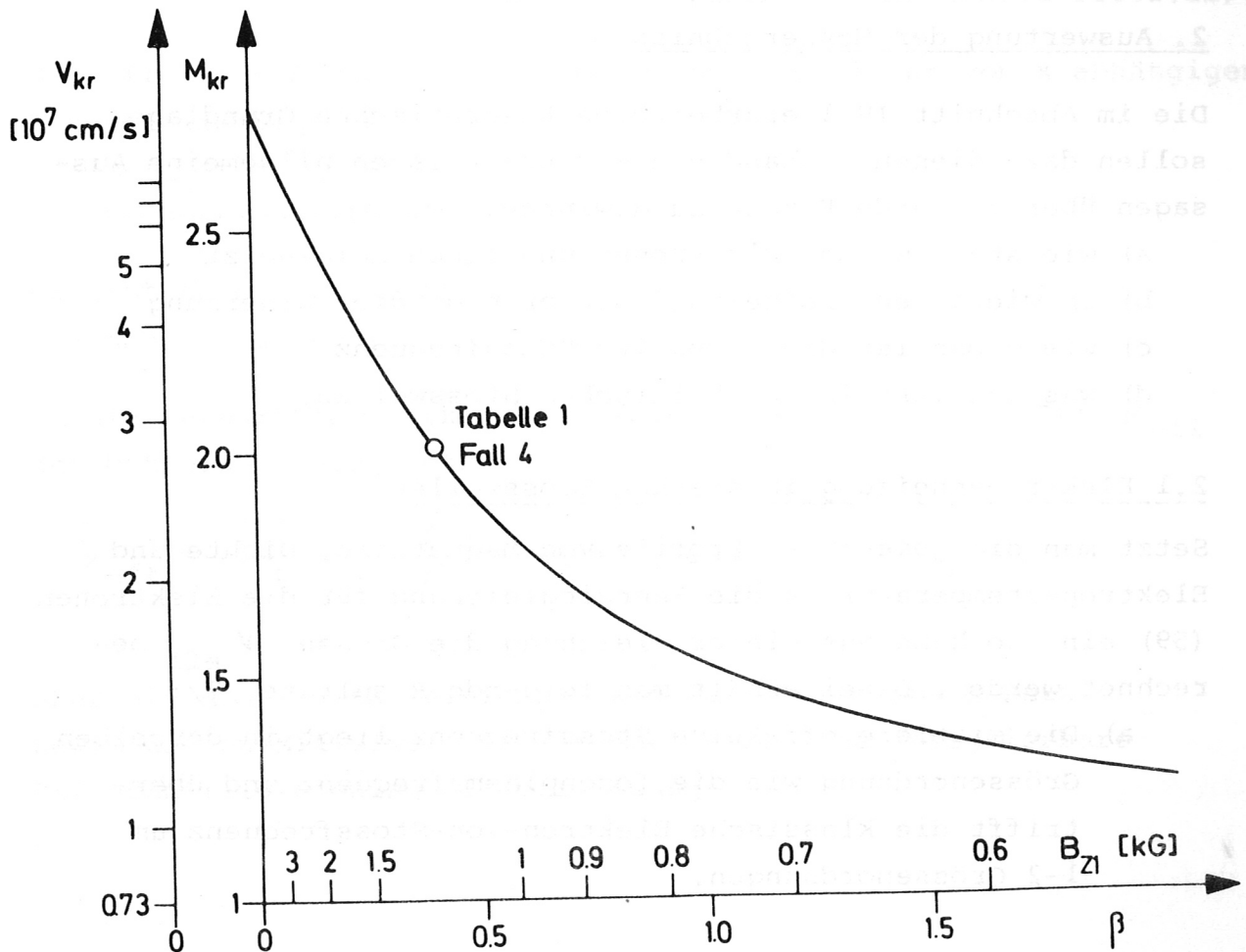
$$\left[\frac{1}{2} \rho_1 v_{kr}^2 + n_1 k (\alpha_e T_{e1} + \alpha_i T_{i1}) + B_1^2 / 4\pi \right] v_{kr} = \left[\frac{1}{2} \rho_2 v_{x2}^2 + n_2 k (\alpha_e T_{e2} + \alpha_i T_{i2}) + B_2^2 / 4\pi \right] v_{x2} \quad (63)$$

$$(\alpha \equiv \frac{f}{2} + 1)$$

$$\frac{T_{i2}}{T_{i1}} = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{2/f_i} \quad (\text{vgl. Abschnitt IV.1.4a}) \quad (64)$$

$$\gamma_e k T_{e2} + \gamma_i k T_{i2} = m_i v_{x2}^2 \quad (65)$$

Die kritische Machzahl ist damit eine Funktion allein der Parameter des Ausgangsplasmas; sie hängt im wesentlichen von β ab, was in Figur 14 veranschaulicht werden soll. Die Anfangsbedingungen für n_1 , T_{e1} , T_{i1} entsprechen den Werten des Beispiels 4 der Tabelle 1; die Variation von β erfolgt durch eine angenommene Veränderung des eingefangenen Magnetfeldes. Die kritische Machzahl ist für $\beta = 0$ etwa 2.8 und nähert sich mit wachsendem β asymptotisch dem Wert 1.



Figur 14:

Die kritische Machzahl in Abhängigkeit von β .

Eine Berücksichtigung von Nachionisation und Dissoziation würde zu einer Erniedrigung der kritischen Machzahl führen.

Die kritische Machzahl wurde zunächst rein formal eingeführt. Nachdem die MHD-Gleichungen für $M > M_{kr}$ keine Lösung mehr haben, andererseits aber auch für überkritische Machzahlen stationäre Stosswellen beobachtet wurden, kann daraus gefolgert werden, dass die Vorgänge in der Front für diese starken Stosswellen durch das Flüssigkeitsmodell nicht mehr richtig wiedergegeben werden. Wie noch gezeigt wird, werden in diesen Stosswellen die Ionen stark aufgeheizt. Eine mögliche theoretische Behandlung von überkritischen Stosswellen ist die Beschreibung der Elektronen als Flüssigkeit wie bisher, während die Ionen durch ihre Verteilungsfunktion beschrieben werden sollen /22/.

2. Auswertung der Messergebnisse

Die im Abschnitt IV.1 erarbeiteten theoretischen Grundlagen sollen dazu dienen, anhand von Messergebnissen allgemeine Aussagen über folgende Fragen zu gewinnen:

- a) wie stark werden Elektronen und Ionen aufgeheizt
- b) in wievielen Freiheitsgraden erfolgt die Aufheizung
- c) wie gross ist die effektive Stossfrequenz
- d) was passiert in überkritischen Stosswellen.

2.1 Elektronenheizung in starken Stosswellen

Setzt man die gemessenen Profile von Magnetfeld, Dichte und Elektronentemperatur in die Energiegleichung für die Elektronen (59) ein, so kann aus dieser Gleichung die Grösse ν_{eff} berechnet werden. Dabei erhält man folgende Resultate /7/:

- a) Die mittlere effektive Stossfrequenz liegt in derselben Grössenordnung wie die Ionenplasmafrequenz und übertrifft die klassische Elektron-Ion-Stossfrequenz um 1-2 Grössenordnungen.

- b) Durch den klassischen Widerstand allein lassen sich nur etwa 20 % der tatsächlich gemessenen Elektronenaufheizung erklären. Die Existenz eines zusätzlichen Dissipationsmechanismus ist damit klar erwiesen.

Aus Gleichung (59) soll nun eine Formel zur Abschätzung der Elektronentemperatur abgeleitet werden. Dabei werden Nachionisation, Dissoziation und klassische Aufheizung vernachlässigt und folgende Näherungen gemacht:

Magnetfeld und Dichte steigen innerhalb der Stossfront linear an

$$n = n_1 + \frac{n_1 (s - 1)}{D} x$$

$$\text{Frontbreite } D = \frac{1}{2} \frac{c}{\Omega_{pl}} \quad (\text{dies ist ein experimentelles Ergebnis, vgl. Abschnitt III.2.1b}).$$

Die effektive Stossfrequenz wird proportional zur von x abhängigen Ionenplasmafrequenz angenommen

$$v_{\text{eff}} = a \Omega_p$$

Proportionalitätsfaktor $a \approx 1$.

Es gibt theoretische Abschätzungen /23/, die eine derartige Annahme als sinnvoll erscheinen lassen.

Um die Integration wirklich ausführen zu können, wird für v_{eff} der Mittelwert eingesetzt

$$\overline{v_{\text{eff}}} = a \overline{\Omega_p} = \frac{a}{D} \int_0^D \Omega_p dx = \frac{2}{3} a \Omega_{pl} \frac{s^{3/2} - 1}{s - 1}.$$

Über die Kontinuitätsgleichung und das Amperesche Gesetz sowie diesen Mittelwert erhält man jetzt eine integrierbare Differentialgleichung mit der Lösung

$$T_{e2} = a \frac{m_e c}{3\pi k} (s^{3/2} - 1) (s^{2/3} - 1) \frac{B_1^2}{\rho_1 v_F} + T_{e1} s^{2/3}.$$

Für überkritische Machzahlen bestimmt sich der Proportionalitätsfaktor experimentell zu 0.35 ± 0.10 , während er für kleine Machzahlen niedriger zu sein scheint (vgl. auch Abschnitt IV.2.4).

Für starke Stosswellen erhalten wir also für die Elektronentemperatur im Plateau die halbempirische Formel

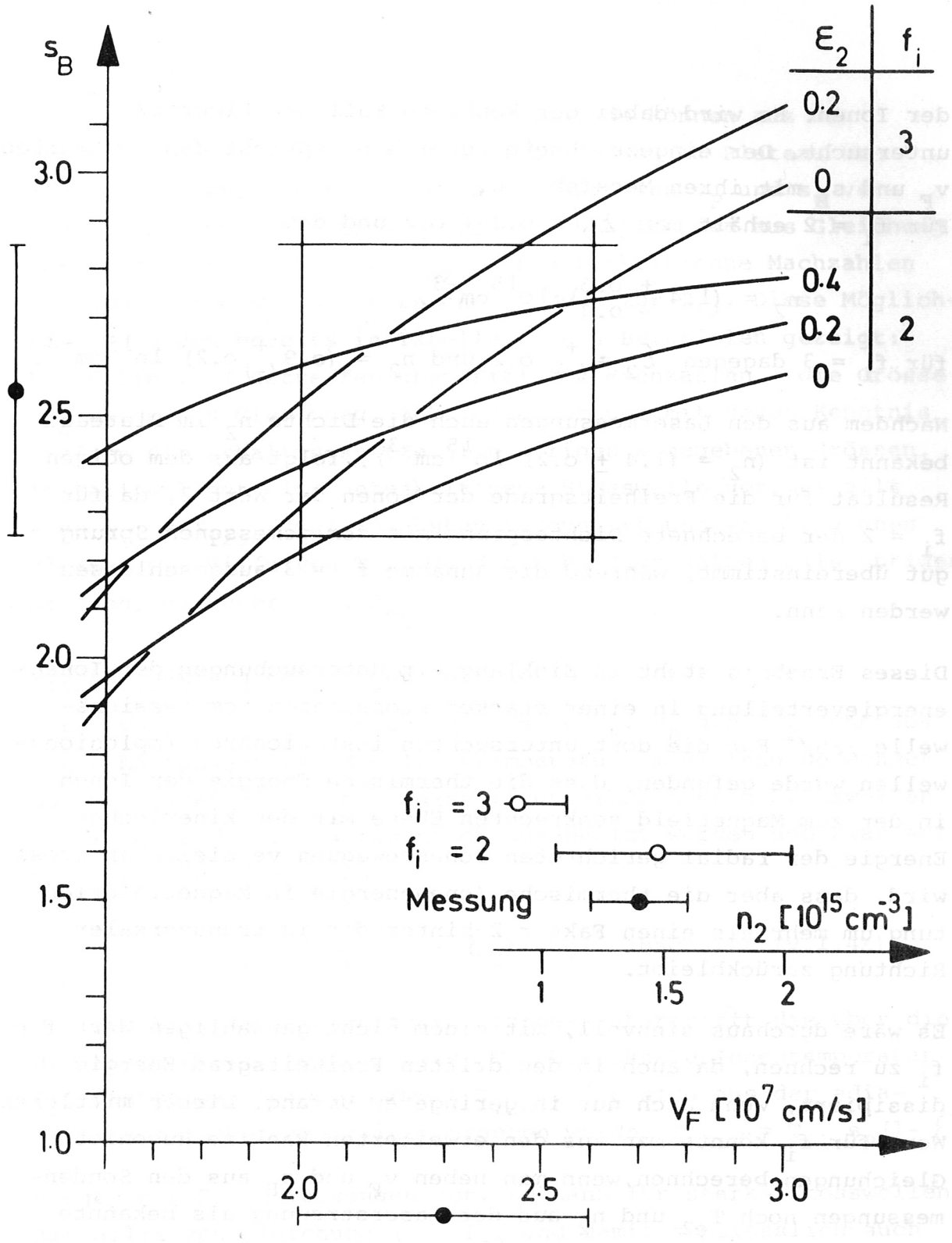
$$T_{e2} = T_{e1} s^{2/3} + (6.5 \pm 2) 10^{-7} (s^{3/2} - 1) (s^{2/3} - 1) \frac{B_1^2}{\rho_1 v_F}. \quad (66)$$

Für kleine Machzahlen liefert diese Gleichung bis um einen Faktor 2 zu hohe Werte für die Elektronentemperatur im Plateau.

2.2 Nachionisation und Freiheitsgrade

Zur Lösung der erweiterten Rankine-Hugoniot Gleichungen benötigt man drei der Stosswelle zugeordnete Messgrößen. Aus den Sondmessungen erhält man die Frontgeschwindigkeit v_F und den Magnetfeldsprung s_B , damit also die Größen v_{x1} und B_2 . Benutzt man jetzt noch die gemessene Elektronentemperatur T_{e2} im Plateau, so können die Größen n_2 , ξ_2 , T_{i2} , v_K berechnet werden, wobei die Freiheitsgrade $f_{i,e}$ für die Ionen und Elektronen noch offene Parameter darstellen, die im folgenden bestimmt werden sollen. Die Aufheizung der Elektronen erfolgt sicher in 3 Freiheitsgraden, da die Stosszeiten der Elektronen untereinander höchstens einige nsec betragen; wir setzen als $f_e = 3$.

In Figur 15 wird der Zusammenhang zwischen Frontgeschwindigkeit v_F und Magnetfeldsprung s_B dargestellt; Parameter sind die Grösse ξ_2 und die noch unbekannte Zahl der Freiheitsgrade f_i



Figur 15:
 Der Zusammenhang zwischen Frontgeschwindigkeit v_F und Magnetfeldsprung s_B für verschiedene Werte von ϵ_2 und f_i .

der Ionen. Es wird dabei der konkrete Fall der Figur 12 untersucht. Der eingezeichnete Bereich entspricht den Messwerten v_F und s_B mit ihren Messfehlern.

Für $f_i = 2$ erhält man $\xi_2 = 0.3 \pm 0.2$ und damit

$$n_2 = (1.4 \begin{matrix} + 0.6 \\ - 0.4 \end{matrix}) 10^{15} \text{ cm}^{-3},$$

für $f_i = 3$ dagegen $\xi_2 = \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} 0.2$ und $n_2 = (0.9 \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} 0.2) 10^{15} \text{ cm}^{-3}$.

Nachdem aus den Lasermessungen auch die Dichte n_2 im Plateau bekannt ist ($n_2 = (1.4 \pm 0.2) 10^{15} \text{ cm}^{-3}$), folgt aus dem obigen Resultat für die Freiheitsgrade der Ionen der Wert 2, da für $f_i = 2$ der berechnete Dichtesprung mit dem gemessenen Sprung gut übereinstimmt, während die Annahme $f_i = 3$ ausgeschlossen werden kann.

Dieses Ergebnis steht in Einklang mit Untersuchungen der Ionenenergieverteilung in einer starken stossfreien Kompressionswelle /25/. Für die dort untersuchten instationären Implosionswellen wurde gefunden, dass die thermische Energie der Ionen in der zum Magnetfeld senkrechten Ebene mit der kinetischen Energie der radial gerichteten Ionenbewegung vergleichbar gross wird, dass aber die thermische Ionenenergie in Magnetfeldrichtung um mehr als einen Faktor 2 hinter der in transversaler Richtung zurückbleibt.

Es wäre durchaus sinnvoll, mit einem nicht ganzzahligen Wert für f_i zu rechnen, da auch in den dritten Freiheitsgrad Energie dissipiert, wenn auch nur in geringerem Umfang. Diesen mittleren Wert für f_i könnte man aus den erweiterten Rankine-Hugoniot Gleichungen berechnen, wenn man neben v_F und s_B aus den Sondenmessungen noch T_{e2} und n_2 aus der Laserstreuung als bekannte Grössen verwendet. Dieses Verfahren würde jedoch eine wesentlich höhere Messgenauigkeit erfordern als sie momentan möglich ist. Es werden deshalb alle folgenden Rechnungen mit $f_e = 3$ und $f_i = 2$ durchgeführt.

Mit Kenntnis der wirksamen Freiheitsgrade können aus den Sondenmessungen allein bereits alle Grössen im Plateau berechnet werden. Neben den gemessenen Grössen v_F und s_B verwendet man dazu für überkritische Machzahlen den aus Gleichung (66) berechneten Wert für T_{e2} , für unterkritische Machzahlen den aus Gleichung (57) berechneten Wert für T_{i2} . Diese Möglichkeiten wurden bereits in Tabelle 1 an 4 Beispielen gezeigt: Die Fälle 1- 3 betreffen überkritische Machzahlen - die Grösse T_{e2} wurde aus Gleichung (66) berechnet und mit deren Kenntnis liefern die Erhaltungssätze alle übrigen angegebenen Grössen. Im Fall 4 liegt eine unterkritische Stosswelle vor, es gilt also $T_{i2} = T_{i2ad}$ (vgl. nächsten Abschnitt) und wir berechnen diesmal mit Hilfe von T_{i2} aus den Erhaltungssätzen alle übrigen Grössen, darunter auch T_{e2} .

2.3 Abschätzung der Ionenaufheizung

Unter Verwendung der gemessenen Werte v_F , s_B und T_{e2} kann aus den Erhaltungssätzen die Ionentemperatur im Plateau berechnet werden. Dabei findet man, dass in unterkritischen Stosswellen die Ionen lediglich adiabatisch aufgeheizt werden und zwar entsprechend der Gleichung

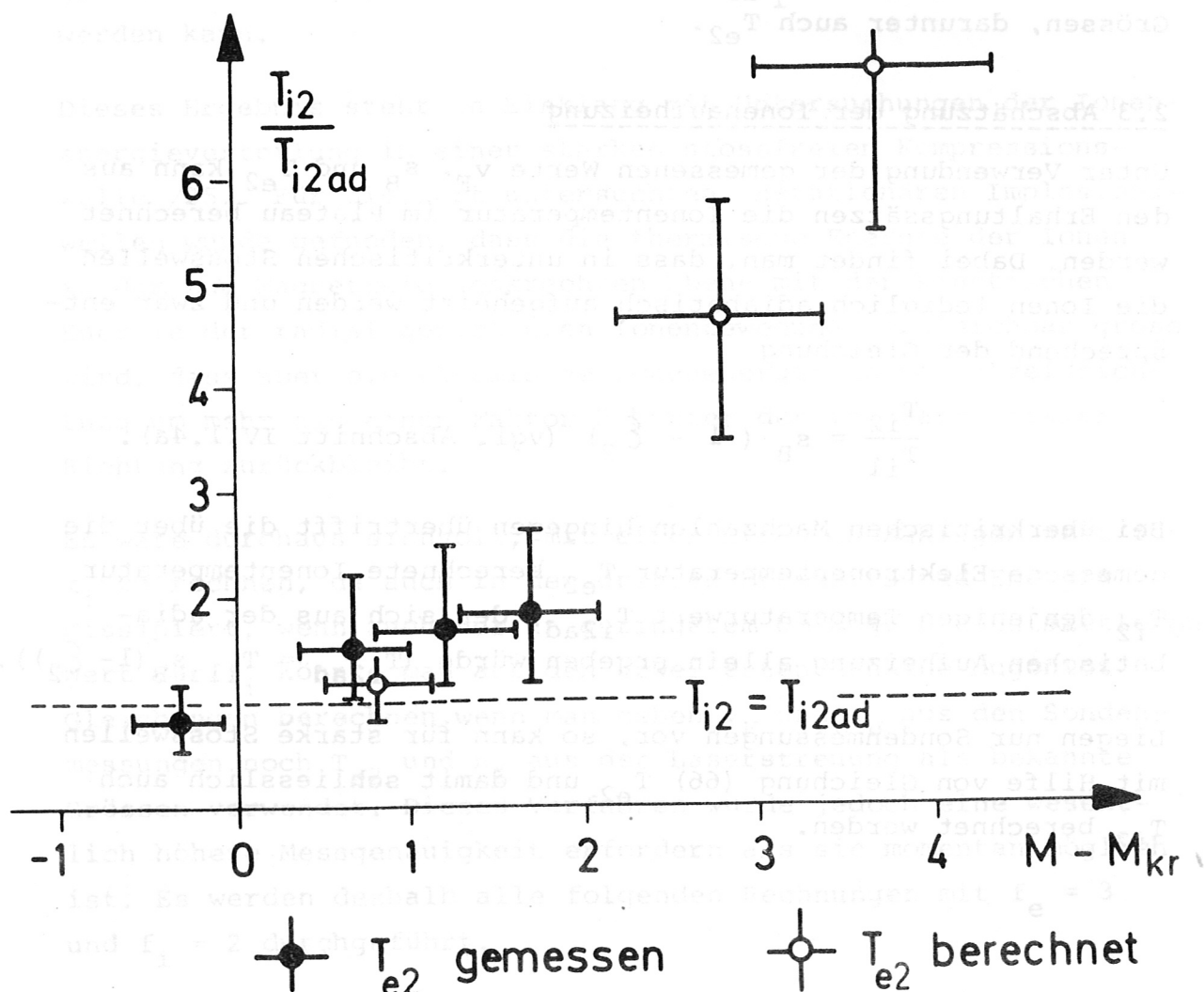
$$\frac{T_{i2}}{T_{i1}} = s_B (1 - \xi_2) \quad (\text{vgl. Abschnitt IV.1.4a}).$$

Bei überkritischen Machzahlen hingegen übertrifft die über die gemessene Elektronentemperatur T_{e2} berechnete Ionentemperatur T_{i2} denjenigen Temperaturwert T_{i2ad} , der sich aus der adiabatischen Aufheizung allein ergeben würde ($T_{i2ad} = T_{i1} s_B (1 - \xi_2)$).

Liegen nur Sondenmessungen vor, so kann für starke Stosswellen mit Hilfe von Gleichung (66) T_{e2} und damit schliesslich auch T_{i2} berechnet werden.

In Figur 16 ist das Ergebnis obiger Untersuchungen zusammengefasst. Um die in ihrer absoluten Grösse sehr verschiedenen Werte von T_{i2} und der Machzahl M besser vergleichen zu können, wurde das Verhältnis T_{i2}/T_{i2ad} in Abhängigkeit von $(M-M_{kr})$ aufgetragen; die mit Punkten dargestellten Werte wurden über gemessene Werte von T_{e2} berechnet, während die Kreise das Ergebnis der Auswertung der Fälle 1-3 der Tabelle 1 darstellen, wobei wie bereits erwähnt T_{e2} berechnet wurde.

Diese Abschätzung der Ionenaufheizung ist zwar mit grossen Fehlern behaftet, doch kann zumindest qualitativ eine sehr starke Aufheizung der Ionen in überkritischen Stosswellen vorhergesagt werden.



Figur 16:

Die berechnete Ionentemperatur T_{i2} in Abhängigkeit von der Machzahl M .

Nach Gleichung (66) sollten die Elektronen auch in starken Stosswellen nicht sehr hoch aufgeheizt werden. Der Magnetfeldsprung strebt nämlich einem endlichen Wert zu (vgl. Abschnitt IV.1.2) und die Durchlaufzeit der Elektronen durch die Stossfront nimmt mit wachsender Machzahl sogar ab (v_F steht im Nenner der Gleichung (66)). Die Elektronenheizung tritt also bei starken Stosswellen immer mehr in den Hintergrund, wegen unserer Anfangsbedingung $T_{i1} \gg T_{e1}$ gilt damit Gleichung (25) näherungsweise für die Ionentemperatur und wir erhalten zur Abschätzung der Ionenaufheizung in starken Stosswellen die Näherungsformel

$$T_{i2} = \frac{4}{9} M^2 T_{i1}. \quad (67)$$

2.4 Stosswellen mit unterkritischer Machzahl

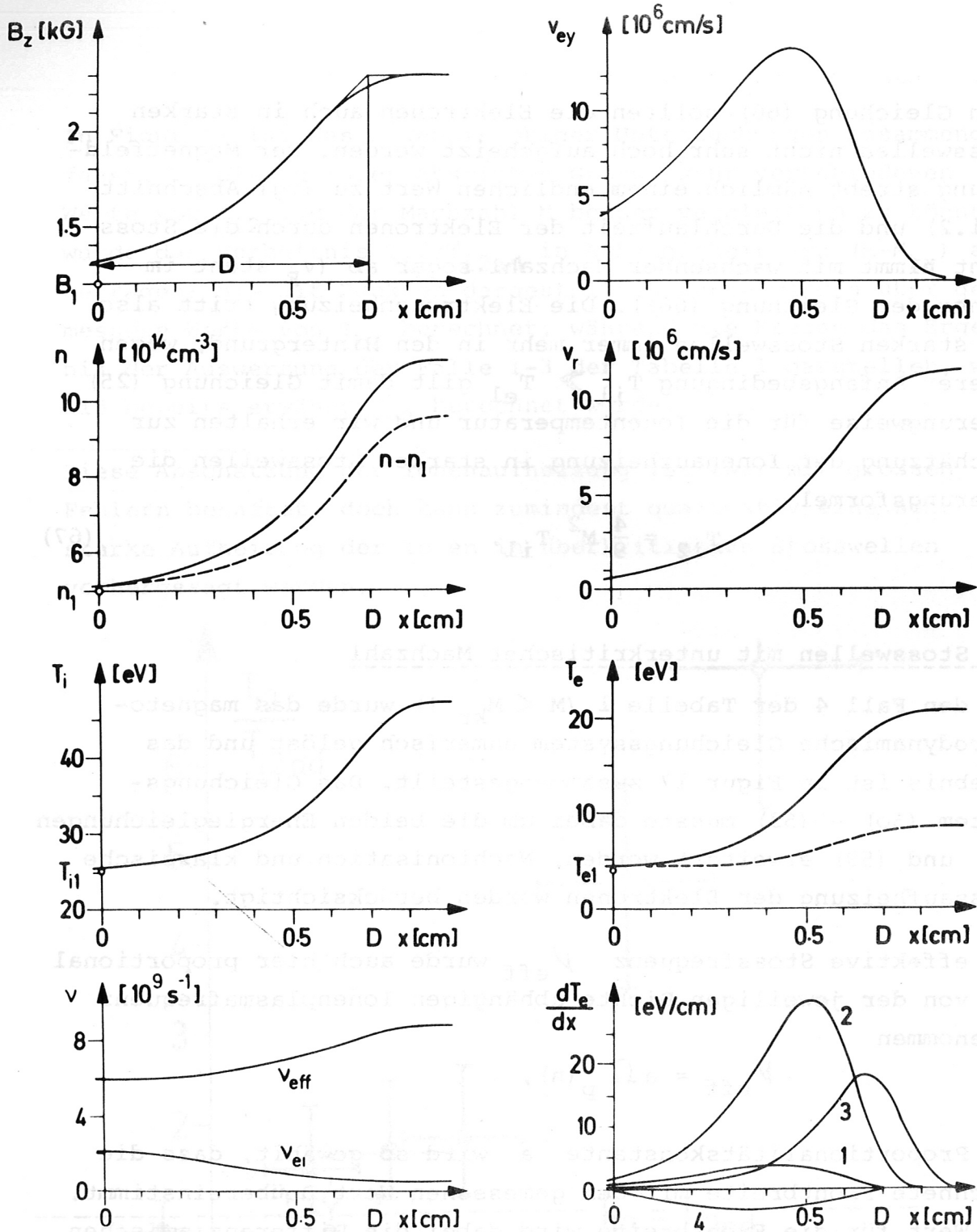
Für den Fall 4 der Tabelle 1 ($M < M_{kr}$!) wurde das magneto-hydrodynamische Gleichungssystem numerisch gelöst und das Ergebnis ist in Figur 17 zusammengestellt. Das Gleichungssystem (50) - (53) musste dabei um die beiden Energiegleichungen (58) und (59) erweitert werden. Nachionisation und klassische Stossaufheizung der Elektronen wurden berücksichtigt.

Die effektive Stossfrequenz ν_{eff} wurde auch hier proportional zur von der jeweiligen Dichte abhängigen Ionenplasmafrequenz angenommen

$$\nu_{eff} = a \Omega_p(n),$$

die Proportionalitätskonstante a wird so gewählt, dass die berechnete Frontbreite mit dem gemessenen Wert D übereinstimmt. Als Wert für die Frontbreite wird dabei die Differenz zwischen den nachstehend definierten Koordinaten x_A und x_E genommen:

x_A : Für den Wert $x = x_A = 0$ soll das berechnete Magnetfeld um 10 % seines ursprünglichen Wertes angestiegen sein ($B_z(0) = 1.1 B_1$).



Figur 17:
 Vollständige Lösung der MHD- und Energiegleichungen für eine unterkritische Stosswelle in einem Wasserstoffplasma ($B_{z1} = 1200$ G, $n_1 = 5 \times 10^{14}$ cm $^{-3}$, $T_{i1} = 25$ eV, $T_{e1} = 4$ eV, $\xi_2 = 0.14$, $v_F = 2.4 \times 10^7$ cm/s).

x_E : Legt man an den wieder flacher werdenden Teil des Magnetfeldverlaufs nach dem Wendepunkt eine Tangente, so soll diese die Gerade $B_z = B_2$ bei dem Wert $x = x_E = D$ schneiden.

Mit dieser Definition erhält man die geforderte Übereinstimmung zwischen berechneter und gemessener Frontbreite für den Wert $a = 0.20$. Für starke Stosswellen wurde diese Konstante zu 0.35 ± 0.10 bestimmt (Abschnitt IV.2.1) und es wurde bereits dort daraufhingewiesen, dass die Gleichung (66) mit diesem Wert von a für kleine Machzahlen bis um einen Faktor 2 zu hohe Werte von T_{e2} liefert. Dieser Befund ist mit dem Ergebnis obiger Rechnung gut vereinbar und führt zu der Annahme, dass der Proportionalitätsfaktor a in Wirklichkeit keine Konstante ist, sondern von der Machzahl abhängt (oder von β) und zumindest für überkritische Stosswellen grösser ist als für unterkritische Stosswellen. Beim Übergang zu überkritischen Stosswellen erhöht sich demnach der turbulente Zustand des Plasmas.

In Figur 17 wird in der obersten Reihe links der Verlauf des Magnetfeldes und rechts die Driftgeschwindigkeit der Elektronen dargestellt. Die zweite Reihe zeigt links den Dichteanstieg und daneben die Geschwindigkeit des Plasmas im Laborsystem, also in r -Richtung. In der nächsten Reihe sind der Verlauf der Ionen- und Elektronentemperatur aufgezeichnet. Die letzte Reihe bringt links zunächst eine Gegenüberstellung von klassischer und effektiver Stossfrequenz für den berechneten Dichte- und Elektronentemperaturverlauf. Rechts unten wird schliesslich gezeigt, wie gross die einzelnen Anteile sind, aus denen sich die gesamte Änderung der Elektronentemperatur zusammensetzt

$$\frac{dT_e}{dx} = \sum_i \left(\frac{dT_e}{dx} \right)_i$$

- i = 1 : Klassische Stossaufheizung
- i = 2 : Turbulente Aufheizung
- i = 3 : Kompressionsheizung
- i = 4 : Verlust infolge Nachionisation.

Man sieht, dass die klassische Aufheizung nur wenig wirksam ist, da infolge der rasch ansteigenden Temperatur die klassische Stossfrequenz und damit der Ohmsche Widerstand stark abnehmen ($\nu_{ei} \sim T_e^{-3/2}$). Auch der Verlust durch Nachionisation ist nicht gross, sodass sich die Vernachlässigung dieser beiden Grössen bei der Ableitung von Gleichung (66) als gerechtfertigt erweist.

Schliesslich wurde noch untersucht, welche Elektronentemperatur sich ergäbe, wenn man unter Zugrundelegung des tatsächlich berechneten Verlaufs von Magnetfeld und Dichte (1. und 2. Reihe links) für die Elektronen nur klassische Stossdissipation und Kompressionheizung annimmt. Das Ergebnis dieser Rechnung ist als gestrichelte Kurve bei der Elektronentemperatur mit eingezeichnet. An Stelle des tatsächlichen Temperatursprungs von 5.5, der bereits aus den Erhaltungssätzen bekannt war, erhält man lediglich einen Anstieg um einen Faktor 2.1. Damit ist auch für diesen Fall die Existenz eines zusätzlichen stossfreien Dissipationsmechanismus klar erwiesen.

3. Zusammenfassung und Planung

Während die Ionen in unterkritischen Stosswellen lediglich adiabatisch aufgeheizt werden, konnte für überkritische Machzahlen eine zusätzliche sehr starke Ionenheizung nachgewiesen werden. Diese Aufheizung erfolgt in den beiden Freiheitsgraden senkrecht zum Magnetfeld. An einer Theorie zur Behandlung von überkritischen Stosswellen wird gegenwärtig gearbeitet, z.B. /22/.

Im Hinblick auf das Fernziel der kontrollierten Kernfusion sind gerade Experimente von grösstem Interesse, die zu einer starken Ionenaufheizung führen. Nachdem die erreichbare Endtemperatur mit dem Quadrat der Machzahl anwächst, wäre der Übergang zu noch höheren Machzahlen sehr wünschenswert. Der Aufbau der Stosswelle benötigt dann aber eine grössere Wegstrecke. Nachdem infolge der dann höheren Frontgeschwindigkeiten eine zeitaufgelöste Messung innerhalb der Front als sehr schwierig erscheint, ist an ein grösseres Experiment die Forderung zu stellen, dass sich bei den angestrebten Machzahlen stationäre Stosswellen ausbilden können, wobei die räumliche Trennung zwischen Front und Kolben grösser sein sollte als in den hier behandelten Fällen. Diese beiden Forderungen nach einer grösseren Aufbaustrecke und einer grösseren Laufstrecke für die Stosswelle können nur in einem Experiment mit wesentlich grösserem Gefässdurchmesser als bisher erfüllt werden.

Auch bezüglich der Elektronenheizung sollten Messungen bei höheren Machzahlen angestrebt werden. Das Vorhandensein eines zusätzlichen starken stossfreien Dissipationsmechanismus konnte für die Elektronen klar nachgewiesen werden. Die Stärke dieser "Turbulenzheizung" wird durch eine effektive Stossfrequenz charakterisiert, deren Grösse 20 - 40 % der Ionenplasmafrequenz beträgt. Der Proportionalitätsfaktor scheint mit wachsender Machzahl zuzunehmen. Um diese Vermutung überprüfen zu können, muss an einem grösseren Experiment ebenfalls ein 90° -Laser-Streuexperiment durchgeführt werden. Dieser konkrete Fall zeigt klar die Notwendigkeit der Ausbildung eines genügend breiten Plateaus, da zeitaufgelöste Messungen in der Front nicht mehr möglich sein werden.

Um den eigentlichen physikalischen Vorgang zu ergründen, der zu der nachgewiesenen stossfreien Dissipation führt, soll im

Rahmen einer kinetischen Theorie versucht werden, die formal eingeführte effektive Stossfrequenz zu berechnen /24/ oder anders ausgedrückt, eine Theorie des turbulenten Plasmas zu entwickeln.

Parallel damit befinden sich zwei Experimente in Vorbereitung, die ebenfalls Aufschluss geben sollen über den turbulenten Zustand des Plasmas in der Stossfront, wobei man vom Vorhandensein überthermisch angeregter Feldfluktuationen ausgeht:

Im Rahmen einer quantenmechanischen Störungsrechnung kann gezeigt werden, dass derartige Mikrofelder in der Nähe von verbotenen Linien zur Aussendung von "Satelliten-Linien" führen /26/, deren Intensität ein Mass für die mittlere Energie dieser elektrischen Felder darstellt. Der Frequenzabstand der Satelliten von der verbotenen Linie gibt direkt die Frequenz der angeregten Plasmawelle an. Besonders gut sollten diese Satelliten in der Nähe bestimmter Heliumlinien zu beobachten sein, sodass man bei diesem Experiment mit einer Mischung von Deuterium und Helium als Füllgas arbeiten wird.

In einem zweiten Experiment sollen Amplitude und Frequenzspektrum der in der Stossfront angeregten Plasmawellen gemessen werden und zwar mittels Streuung von Laserlicht in Vorwärtsrichtung. Diese Streuung erfolgt im Gegensatz zur 90° -Streuung an Elektronendichtewellen, die durch kollektive Effekte angeregt wurden. Die elektrostatische Wechselwirkung der Ionen mit den Elektronen führt dabei zu den "thermisch angeregten Feldfluktuationen", wobei man aus der Kenntnis des Spektrums dieser Fluktuationen die Ionentemperatur direkt ablesen könnte. Die beobachtete nichtklassische Energiedissipation weist jedoch auch auf das Vorhandensein "nicht-thermisch angeregter Feldfluktuationen" hin, die das durch die Ionentemperatur bestimmte Streuspektrum ganz beträchtlich verändern können. Die theoretischen Voraussetzungen zur Auswertung eines in Vorwärtsrichtung aufgenommenen Streuspektrums eines turbulenten Plasmas müssen aus der allgemeinen Streutheorie /27/ noch entwickelt werden.

Literaturverzeichnis

- 1 R.Chodura, M.Keilhacker, M.Kornherr, H.Niedermeier
Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research,
Vol.1,p.81, Vienna: IAEA, 1969
- 2 R.Kh.Kurtmullaev, Y.U.E.Nesterikin, V.I.Pilsky, R.Z.Sagdeev,
Proc.Conf.on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion
Research, Vol.II,p.367, IAEA Vienna, 1966
- 3 M.V.Babykin, P.P.Gavrin, E.K.Zavoysky, L.I.Rudakov,
V.A.Skoryupin, Proc.Conf.on Plasma Physics and Controlled
Nuclear Fusion Research, Vol.II,p.851, IAEA Vienna, 1966
- 4 J.W.M.Paul, M.J.Parkinson, J.Sheffield, L.S.Holmes
Nature 208 (1965) 133 and Nature 216 (1967) 363
- 5 E.Hintz, Proc.3rd Controlled Fusion Conference, Novosibirsk,
1968
- 6 R.Z.Sagdeev, "Cooperative Phenomena and Shock Waves in Colli-
sionless Plasmas", Review of Plasma Physics 4, Consultants
Bureau, New York, 1966
- 7 M.Keilhacker, M.Kornherr, K.H,Steuer, Z.f.Physik 223,
385, 1969
- 8 H.R.Griem, "Plasma Spectroscopy", McGraw-Hill Book Company,
1964
- 9 H.Kefer, Report Jül-2-PP, Institut für Plasmaphysik der
KFA Jülich, 1960
- 10 L.Spitzer jr., "Physics of Fully Ionized Gases", 2nd Ed.,
Interscience Publishe rs, New York, 1965
- 11 K.H.Steuer, Report IPP 1/94, Institut für Plasmaphysik,
Garching, 1969
- 12 G.Traving, "Über die Theorie der Druckverbreiterung von
Spektrallinien", Verlag G.Braun, Karlsruhe, 1960
- 13 G.Herppich, A.Knobloch, G.Müller, Report IPP 4/50
Institut für Plasmaphysik, Garching, 1968
- 14 E.Fünfer, G.Lehner, "Plasmaphysik", Ergebnisse der exakten
Naturwissenschaften XXXIV, Springer Verlag, Berlin, 1962
- 15 R.Chodura, Phys.Fluids, 11 (1968) 400
- 16 R.Lüst, Z.Naturforschung, 8a, 277-284 (1953) und Z.Natur-
forschung 10a, 125-135 (1955)
- 17 G.Vlases, Phys.Fluids, 7 (1964) 1358
- 18 W.Lotz, Report IPP 1/62, Institut für Plasmaphysik, Garching,
1967
- 19 G.Hofmann, J.Quant.Spectrosc.Radiat.Transfer, 8,729,1968
- 20 M.Keilhacker, F.Pecorella, G.Vlases, Phys.Fluids (wird
veröffentlicht)

- 21 H.Niedermeyer, Report IPP 1/66, Institut für Plasmaphysik, Garching, 1967
- 22 R.Chodura, Institut für Plasmaphysik, Garching, in Vorbereitung
- 23 R.Z.Sagdeev, Proc.Symp.in Appl.Math., Vol.8 (1967) 281
- 24 R.Chodura, Institut für Plasmaphysik, Garching, in Vorbereitung
- 25 U.Schumacher, Report IPP 1/93, Institut für Plasmaphysik, Garching, 1968
- 26 M.Baranger, B.Mozer, Phys.Rev. 123 (1961) 25
- 27 O.Theimer, Report IPP 1/48, Institut für Plasmaphysik, Garching, 1966

Herrn Professor Dr. E. Fünfer bin ich zu grossem Dank verpflichtet, dass ich diese Arbeit in seiner Abteilung des Instituts für Plasmaphysik durchführen konnte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Keilhacker für die sehr interessante Aufgabenstellung, sein reges Interesse am Fortgang der Untersuchungen und die wertvolle Betreuung der Arbeit.

Den Herren Dr. Chodura, Dr. Keilhacker, H. Niedermeyer und K.H. Steuer danke ich für die gute Zusammenarbeit und für zahlreiche anregende und klärende Diskussionen.