

Numerische Berechnung der Anwachsraten
von MHD-Instabilitäten am Screw-Pinch

R. Wilhelm

IPP 1/100

August 1969

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K
G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Numerische Berechnung der Anwachsrate
von MHD-Instabilitäten am Screw-Pinch

R. Wilhelm

IPP 1/100

August 1969

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Abstract

To prove the possibility of dynamically stabilised high- β -torus the growthrates of MHD-instabilities for a screw-discharge in the region above the Kruskal-limit are calculated. Two cases are treated: In the first case the whole z-current flows through the plasma column. In the second case it is assumed, that the pitch ($\mu = B_\theta / r B_z$) is constant in the region between plasma column and wall. For these two cases the growthrates of the $m = 1$ - instability are compared for a given relative displacement $\delta = \Delta / r_s$ (r_s = radius of the coil) of the plasma column, defined by the ratio B_z / B_θ at the surface of the column. As further parameters the aspect ratio $A = R / r_s$ (R = major radius of the torus), the value of β and the compression ratio $\xi = r_s / r_p$ (r_p = radius of plasma column) are taken into account. For identical displacement δ it is found that the growthrates in the constant-pitch-modell are less than in the vacuum case by a factor up to an order of magnitude.

Als besonders einfache Konfiguration eines toroidalen Plasmagleichgewichts wurde die Überlagerung von Theta- und Z-Pinch-Entladung in mehreren theoretischen und experimentellen Arbeiten näher untersucht [1-6]. In diesem sogenannten Screw-Pinch ergibt sich die Gleichgewichtslage bekanntlich dadurch, dass mit der Drift der Plasmasäule in Richtung auf die Torusaussenwand das B_θ -Feld des Z-Stromes komprimiert wird. Damit kann die normale Torusdrift des rein toroidalen Theta-Pinches nach endlicher Driftstrecke Δ gerade komprimiert werden. Ist die Plasmasäule von Vakuum umgeben, so ergibt sich diese Driftstrecke Δ nach Shafranov [1] zu:

$$\Delta_{\text{VAC}} = \frac{r_s}{2A} \left\{ \ln \varepsilon + (\Delta + 1/2) \cdot (1 - 1/\varepsilon^2) \right\} \quad (1)$$

$$\text{mit } \Delta_{\text{VAC}} \ll r_s$$

Dabei bedeutet:

$$\Delta = \beta \cdot \frac{1 + \mu^2 \cdot r_p^2}{\mu^2 \cdot r_p^2} - 1 \quad (2)$$

während die Grösse μ :

$$\mu(r) = \frac{B_\theta(r)}{r \cdot B_z(r)} \quad (3)$$

den pitch, d.h. die Verschraubung der Feldlinien angibt.

Die weiteren hier verwendeten Grössen sind:

- r_s = Spulenradius
- r_p = Plasmaradius
- R = grosser Torusradius
- β = gaskin./magn. Druck
- A = Aspektverhältnis (R/r_s)
- ζ = Kompressionsverhältnis (r_s/r_p)

Die Screw-Pinch-Experimente von v.d.Laan, Bobeldijk et al. haben jedoch gezeigt, dass die Annahme eines Vakuumbereichs zwischen der direkten Plasmasäule und der Gefässwand nur schlecht erfüllt ist. Die Messungen dieser Autoren deuten vielmehr darauf hin, dass auch der Plasmaussenbereich eine endliche Ladungsträgerdichte mit guter Leitfähigkeit beibehält [3,4].

Aus einfachen theoretischen Überlegungen folgt, dass sich als Folge eines im Grenzfall unendlich leitfähigen Aussenplasmas ein räumlich konstanter pitch μ zwischen Plasmasäule und Gefässwand einstellen muss [2]. In guter Übereinstimmung mit den Experimenten erhält die Driftstrecke Δ in diesem Fall nach Bobeldijk die folgende Form [4]:

$$\Delta_{CP} = \frac{r_s}{2A} \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2}\right) \cdot \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} (\Lambda + 3/4) + 1/4 \right\} \quad (4)$$
$$+ \Lambda \cdot \frac{r_p^2 \cdot \mu^2}{A \cdot \epsilon} \left\{ 2\beta \mu \epsilon - (1 - 1/\epsilon^2) \right\}$$

mit $\Delta_{CP} \ll r_s$

Lässt man einmal die bei der Herleitung von Gl. (1) und (4) notwendige Bedingung $\Delta \ll r_s$ ausser Betracht, so ist auch aus physikalischen Gründen zu fordern, dass die Versetzung der Plasmasäule nicht zu grosse Werte annimmt. Da sich die vorausgesetzte scharfe Begrenzung der eigentlichen heissen Plasmasäule experimentell nicht verwirklichen lässt, sollte auf jeden Fall ein hinreichender Abstand der Plasmaoberfläche von der Gefässwand gewahrt bleiben.

Für die weitere Betrachtung wurde deshalb ein fester Wert für die relative Versetzung der Säule:

$$\delta = \frac{\Delta}{r_s} \quad (5)$$

vorgegeben.

Mit Vorgabe dieser Versetzung δ lässt sich nun sofort die notwendige Verschraubung der beiden Magnetfelder B_θ und B_z angeben. Um im folgenden zu dimensionslosen Grössen zu gelangen, wurde dazu nicht der pitch μ , sondern das Verhältnis der Felder an der Plasmaoberfläche:

$$\alpha = \frac{B_z(r_p)}{B_\theta(r_p)} \quad (6)$$

verwendet.

Im Fall des Vakuumfeldes im Aussenraum erhält man aus Gl. (1):

$$\alpha_{VAC}^2 = \frac{2A\delta - \ln \varepsilon}{\beta (1 - 1/\varepsilon^2)} + \frac{1}{2\beta} - 1 \quad (7)$$

mit $\beta > 0$

Bei konstantem pitch folgt aus Gl. (2) die analoge Beziehung:

$$\alpha_{CP}^2 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}} \quad (8)$$

mit den Abkürzungen:

$$a = \beta \cdot \frac{1 - 1/\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$$

$$b = a \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{4\beta}\right) - 2A\delta + [\ln \varepsilon^2 - (1 - 1/\varepsilon^2)] \cdot \frac{2\beta}{\varepsilon}$$

mit $\beta > 0$

$$c = -2 [\ln \varepsilon^2 - (1 - 1/\varepsilon^2)] \cdot \frac{1 - \beta}{\varepsilon}$$

In Abb. 1 ist das für eine experimentell noch sinnvolle Versetzung $\delta = 0.3$ benötigte Feldverhältnis α über dem Apsektverhältnis A aufgetragen. (Weitere Parameter: Kompressionsverhältnis $\varepsilon = 5$, $\beta = 0.3$ und 0.7).

Wie die Abbildung zeigt, steigt sowohl im Vakuum- wie im constant-pitch-Fall das Feldverhältnis α proportional \sqrt{A} an. Als wesentlicher Unterschied kann das B_θ -Feld jedoch bei

konstantem pitch wesentlich, nämlich etwa um den Faktor ϵ kleiner gehalten werden als bei Vakuumfeld im Aussenraum. An dieser Stelle sei bemerkt, dass sich dabei nur der in der Plasmasäule fliessende z-Strom entsprechend verringert. Im Vakuumfall ist dieser Strom I_{zi} gegeben durch:

$$[I_{zi}]_{VAC} = \frac{2\pi \cdot r_p}{\alpha_{VAC} \cdot \mu_0} \cdot B_z(r_s) \quad (9)$$

während man bei "constant pitch":

$$[I_{zi}]_{CP} = \frac{2\pi \cdot r_p}{\alpha_{CP} \mu_0} \cdot \frac{r_p^2 \alpha_{CP}^2 + r_g^2}{r_p^2 \alpha_{CP}^2 + r_p^2} \cdot B_z(r_s) \quad (10)$$

erhält (r_g = Gefässradius).

Im Aussenraum fliesst nun im ersten Fall kein Strom, also:

$$[I_{zA}]_{VAC} = 0 \quad (11)$$

während im Fall des "constant pitch":

$$[I_{zA}]_{CP} = \frac{2\pi \cdot r_p \cdot \alpha_{CP}}{\mu_0} \left[\frac{r_p^2 \alpha_{CP}^2 + r_g^2}{r_p^2 \alpha_{CP}^2 + r_p^2} - 1 \right] \cdot B_z(r_s) \quad (12)$$

wird. Ein Zahlenbeispiel zeigt, dass dieser Aussenstrom erhebliche Werte annehmen kann. So ergibt sich bei

$$\begin{aligned} A &= 5 \\ \delta &= 0,3 \\ r_p &\approx 1,2 \text{ cm} \\ r_g &\approx 5 \text{ cm} \\ B_z(r_s) &\approx 30 \text{ kG} \\ \alpha_{cp} &\approx 10 \quad \text{und} \\ \alpha_{VAC} &\approx 2 \end{aligned}$$

Die verwendeten Daten beziehen sich auf das in Garching begonnene Screw-Pinch-Experiment.

$$\begin{aligned} \text{für:} \quad [I_{z_i}]_{VAC} &\approx 90 \text{ kA} \\ [I_{z_A}]_{VAC} &= 0 \\ \text{und} \quad [\bar{I}_{z_i}]_{CP} &\approx 16 \text{ kA} \\ [\bar{I}_{z_A}]_{CP} &\approx 300 \text{ kA} \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die von Kruskal [5] angegebene Grenze für Stabilität im Screw-Pinch:

$$\mu R < \frac{2-\beta}{2} \quad \text{für Stabilität} \quad (13)$$

so zeigt sich, dass der verhältnismässig geringe z-Strom I_{z_i} beim "constant pitch" der Kruskalbedingung schon ziemlich nahe kommt. Dies wird durch Vergleich mit den beiden oberen Kurven der Abb. 1 deutlich, die die auf die hier benutzten Grössen umgeschriebene Kruskalbedingung:

$$\alpha > \frac{2 \cdot A \cdot \epsilon}{2-\beta} \quad \text{(für Stabilität)} \quad (14)$$

angeben.

Geht man zu kleineren β -Werten über, so lässt sich die Kruskalgrenze im "constant-pitch"-Fall noch bei endlichem β durchaus unterschreiten. Dies ist aus Abb.2 zu entnehmen, in der das Feldverhältnis α für eine Versetzung $\delta = 0.3$ über β aufgetragen ist (weitere Parameter: $\xi = 5$, $A = 5$ und 20). Für das kleine Aspektverhältnis $A = 5$ wird die Kruskalgrenze bei einem $\beta \approx 0.1$ und "constant pitch" gerade erreicht.

Eine experimentelle Bestätigung liefern die Messungen von v.d. Laan, Bobeldijk und de Vries, die bei kleinem β , kleinem Aspektverhältnis und verhältnismässig grosser relativer Drift ein weitgehend stabiles Verhalten der Plasmasäule finden [3, 6].

Soll jedoch zur effektiven Plasmaaufheizung das β gross und die relative Versetzung δ klein gehalten werden, so muss mit MHD-Instabilitäten gerechnet werden. Ob und inwieweit sich diese Instabilitäten dynamisch stabilisieren lassen, hängt von ihren Anwachsraten ab, die im folgenden diskutiert werden sollen.

Ausgangspunkt ist die von Tayler für den Vakuumfall angegebene Dispersionsbeziehung:

$$L(\omega) = R_{VAC} \quad (15)$$

(ω = Anwachsrate der Instabilität)

die aus den MHD-Gleichungen und unter der Voraussetzung von reinen Oberflächenströmen I_z und I_θ in [2] abgeleitet wird. Auf die hier verwendeten dimensionslosen Grössen umgeschrieben, bedeutet dabei:

$$R_{VAC} = \frac{1}{1 + \alpha^2} \left[1 - \left(\frac{m}{k} + \alpha \right)^2 \cdot L_m \right] \quad (16)$$

mit

$$L_m = -\kappa \cdot \frac{-K'_m(\kappa \cdot \varepsilon) \cdot I_m(\kappa) + I'_m(\kappa \cdot \varepsilon) \cdot K_m(\kappa)}{-K'_m(\kappa \cdot \varepsilon) \cdot I'_m(\kappa) + I'_m(\kappa \cdot \varepsilon) \cdot K'_m(\kappa)} \quad (17)$$

$\left. \begin{matrix} I_m, I'_m \\ K_m, K'_m \end{matrix} \right\}$ = mod. Bessel und Hankel-Funktion bzw. deren Ableitungen nach dem Argument.

m = Index der Bessel-Funktion bzw. Mode der Instabilität

κ = auf den Plasmaradius normierte Wellenzahl
(= $k \cdot r_p$)

und:

$$L(\omega) = (1-\beta) \cdot \sqrt{\frac{(\kappa^2 + \Omega_A^2) \cdot (\kappa^2 + \Omega_A^2 + \Omega_S^2)}{\kappa^2 + \Omega_S^2}} \cdot \frac{I_m(y)}{I'_m(y)} \quad (18)$$

mit:

$$y = \sqrt{\frac{(\kappa^2 + \Omega_S^2) \cdot (\kappa^2 + \Omega_A^2)}{\kappa^2 + \Omega_S^2 + \Omega_A^2}} \quad (19)$$

wobei:

$$\Omega_S = \omega / (v_S / r_p)$$

(v_S = Schallgeschwindigkeit der Ionen)

$$\Omega_A = \omega / (v_A / r_p)$$

(v_A = Alfvén-Geschwindigkeit)

Im Fall von reinen Oberflächenströmen im Plasma, also

$\mathcal{L}_i \{ 0, 0, B_{zi} \}$ (\mathcal{L}_i = Feld im Plasma) lässt sich die Alfvégeschwindigkeit im Plasma in einfacher Weise durch die Schallgeschwindigkeit ausdrücken:

$$v_A^2 = \frac{2 \cdot (1-\beta)}{\gamma \cdot \beta} \cdot v_s^2 \quad \beta > 0 \quad (20)$$

$$\left(\gamma = \frac{2+f}{f} ; \quad f = \text{Zahl der Freiheitsgrade} \right)$$

so dass sich Gl. (18) und (19) umformen lassen zu:

$$L(\Omega) = \sqrt{\frac{((1-\beta) \cdot \kappa^2 + \frac{\gamma \cdot \beta}{2} \cdot \Omega^2) \cdot (\kappa^2 + \Omega^2) \cdot (1-\beta) + \frac{\gamma \cdot \beta}{2} \cdot \Omega^2}{\kappa^2 + \Omega^2}} \cdot \frac{I_m(y)}{I'_m(y)} \quad (21)$$

und

$$y = \sqrt{\frac{(\kappa^2 + \Omega^2) \cdot (\kappa^2 \cdot (1-\beta) + \frac{\gamma \cdot \beta}{2} \cdot \Omega^2)}{(\kappa^2 + \Omega^2) \cdot (1-\beta) + \frac{\gamma \cdot \beta}{2} \cdot \Omega^2}} \quad (22)$$

wobei Ω :

$$\Omega = \omega / (v_s / r_p) = \Omega_s \quad (23)$$

die dimensionslose Anwachsrate der Instabilitäten angibt.

Für den "constant-pitch"-Fall leitet Bobeldijk [4] eine entsprechende Dispersionsbeziehung:

$$L(\omega) = R_{CP} \quad (24)$$

her.

Wieder auf dimensionslose Größen umgeschrieben, erhält diese die Form:

$$R_{CP} = \left\{ \frac{\kappa^2 (\kappa \alpha + m)^2}{m^2 + \kappa^2} + \frac{2\alpha (\kappa \alpha + m) (\kappa - m \alpha)}{\alpha^2 + 1} \right. \\ \left. + m^2 + \kappa^2 + (\kappa \alpha + m)^2 \cdot \frac{N'}{N} \right\} / \quad (25)$$

$$\left\{ (m^2 + \kappa^2) \cdot (\alpha^2 + 1) \right\}$$

Die Größen N und N' folgen aus der in [4] angegebenen Differentialgleichung (dimensionslos umgeschrieben):

$$\frac{d^2 H}{d\varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dH}{d\varphi} + D(\varphi) \cdot H = 0 \quad (26)$$

mit:

$$D(\rho) = -\kappa^2 - \frac{m^2 + 1}{\rho^2} + \frac{m^2 \cdot (m^2 + 4\kappa^2 \rho^2)}{\rho^2 (m^2 + \kappa^2 \rho^2)^2} + \frac{\rho}{\alpha^2 (1 + \rho^2/\alpha^2)^2} + 4\kappa^2 \cdot \frac{m - \frac{\kappa}{\alpha} \cdot \rho^2}{(\alpha\kappa + m) \cdot (m^2 + \kappa^2 \rho^2) \cdot (1 + \rho^2/\alpha^2)} \quad (27)$$

$(\rho = r/r_p)$

Durch Integration der Differentialgleichung von r_p bis r_s , also $\rho = 1$ bis $\rho = \varepsilon$ mit zwei willkürlichen Anfangsbedingungen bekommt man zwei spezielle Lösungen $H_1(\rho = \varepsilon)$ und $H_2(\rho = \varepsilon)$. Damit ergibt sich N und N' zu:

$$N = H_1(1) - H_2(1) \cdot \frac{H_1(\varepsilon)}{H_2(\varepsilon)} \quad (28)$$

$$N' = \frac{d}{d\rho} |H_1(\rho)|_1 - \frac{d}{d\rho} |H_2(\rho)|_1 \cdot \frac{H_1(\varepsilon)}{H_2(\varepsilon)} \quad (29)$$

$L(\omega)$ erhält die bereits angegebene Form (Gl. (18) bzw. Gl. (21)).

Die beiden Dispersionsgleichungen Gl. (15) und Gl. (24) wurden auf der Rechenmaschine numerisch ausgewertet und die Anwachsrates Ω für verschiedene Parameter bestimmt. Bei vorgegebener Versetzung $\delta = 0.3$ wurde dabei das Aspektverhältnis A von 3 bis 100, das Kompressionsverhältnis ε von 3 bis 5 sowie β von 0.1 bis 1 variiert. Für die azimutale Mode m wurden die Fälle $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ untersucht und für die longitudinale Richtung nur die Wellenlängen λ betrachtet, die die Periodizitätsbedingung am Torus erfüllen, also:

$$\left. \begin{array}{l} n = \frac{2\pi \cdot R}{\lambda} \\ \text{bzw} \\ n = \kappa \cdot \varepsilon \cdot A \end{array} \right\} n = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Die so normierte Wellenzahl n wurde von 1 (= eine Wellenlänge auf dem Tröusumfang) bis 20 variiert.

In Abb. 3 sind die Anwachsraten der $m = 1$ - Mode für einen Torus mit einem Aspektverhältnis $A = 10$ und β als Parameter über n aufgetragen. Die Kurvenschar mit den höheren Anwachsraten gibt den Vakuumfall, die mit dem geringeren den Fall des "constant-pitch" wieder. Aus der Abbildung ist zu erkennen, dass sich der instabile Bereich bei hohem β über viele Wellenzahlen bis über $n = 20$ erstreckt. Dabei durchlaufen die Kurven ein verhältnismässig flaches Maximum, d.h. ein grosser Teil der instabilen Wellenzahlen besitzt nahezu die gleiche Anwachsraten. In diesem Maximum nun liegen die Anwachsraten selbst bei hohen β -Werten im Vakuumfall noch um den Faktor 2-3 und bei "constant-pitch" um nahezu eine Grössenordnung unter dem als erste, grobe Näherung zu erwartenden Wert v_s / r_p .

Um die Abhängigkeit der Anwachsraten vom Aspektverhältnis zu erhalten, ist in Abb. 4 das Ω der instabilsten Wellenzahl (jeweils das Kurvenmaximum in Abb. 3) für zwei β -Werte (0.3 und 0.7) über A aufgetragen. Es fällt auf, dass die Anwachsraten Ω sowohl für den Vakuum- wie für den "constant-pitch"-Fall etwa proportional $1 / \sqrt{A}$ abnimmt.

Bei den in Abb. 3 und Abb. 4 aufgetragenen Anwachsraten war jeweils ein Kompressionsverhältnis $\varepsilon = 5$ angenommen worden. Eine derart starke Kompression muss bei guter Stosswellenaufheizung des Plasmas vorausgesetzt werden. Aber auch ein von $\varepsilon = 5$ ab-

weichendes Kompressionsverhältnis führt in etwa zu den selben Anwachsrate. Dies wird am Beispiel $\xi = 3$ in Abb. 5 gezeigt (die übrigen Parameter sind die gleichen wie in Abb. 4). Der Abbildung ist zu entnehmen, dass die dimensionslosen Anwachsrate Ω mit dem Übergang auf das kleinere Kompressionsverhältnis nur geringfügig zunehmen. Die dimensionsbehaftete Frequenz ω

$$\omega = \Omega \cdot v_s / r_p = \Omega \cdot \xi \cdot v_s / r_s \quad (31)$$

liegt (bei festgehaltenem v_s und r_s) wiederum nur wenig unter den Werten mit $\xi = 5$.

Als nächstes soll kurz auf den Einfluss der vorgegebenen relativen Versetzung eingegangen werden. Gemäss Gl. (7) und Gl. (8) wird der Wert von α nur durch das Produkt $A \cdot \delta$ bestimmt. Damit lassen sich sowohl α wie auch Ω sofort für ein anderes δ umrechnen. (Eine Versetzung von nur 0.15 statt 0.3 liefert also den bei halben A abzulesenden α -Wert sowie die entsprechende Anwachsrate Ω). Die Abhängigkeit der Anwachsrate von β als weiteren Parameter ist aus Abb. 6 zu ersehen. In dieser Abbildung sind die Anwachsrate für zwei Aspektverhältnisse $A = 5$ und 20 für den Vakuum- und "constant-pitch"-Fall über β aufgetragen (weitere Parameter: $\xi = 5$, $\delta = 0.3$, $m = 1$).

Der Vergleich der beiden Kurvenpaare "Vakuum" und "constant pitch" zeigt wieder den deutlichen Vorteil des kräftefreien Aussenplasmas. Bei gleicher relativer Versetzung δ werden die Anwachsrate gegenüber dem Vakuumfall bei $\beta = 1$ um etwa den Faktor 5 und bei $\beta = 0.1$ um mehr als eine Grössenordnung vermindert. Würde man

das Aussenplasma beseitigen, so müsste man wegen $\Omega \sim 1/\sqrt{A}$ das Aspektverhältnis um rund zwei bis drei Grössenordnungen erhöhen, um wieder zu gleichen Anwachsraten zu gelangen.

Aus Abb. 7 ist zu entnehmen, mit welchen instabilen Wellenlängen unter Voraussetzung des "constant pitch" in einem toroidalen Screw-Pinch zu rechnen ist. Dazu sind in dieser Abbildung die Anwachsraten Ω der ersten sechs Wellenzahlen ($n = 1$ bis 6) über dem Aspektverhältnis für zwei β -Werte (0.3 und 0.7) aufgetragen. Entsprechend dieser Darstellung sind bei einem Aspektverhältnis $A = 5$ (Screw-Pinch-Experiment in Garching) Instabilitäten bei $n = 2$ bis 4 zu erwarten. Bei einem grossen Torusradius $R = 30$ cm liegen die instabilen Wellenlängen also im Bereich von 90 bis 45 cm. Die dargestellten Kurven zeigen weiterhin, dass bei kleinem β (0.3) und kleinem Aspektverhältnis A Bereiche mit relativ geringer Instabilität auftreten sollten. Dieser Effekt ergibt sich daraus, dass die instabilste Wellenlänge bei einem bestimmten A (in der Abbildung beispielsweise bei $A \approx 10$ und $\beta = 0.3$) von n nach $n + 1$ (2 nach 3) übergeht. Betrachtet man nun den Bereich kleiner, noch stabiler β -Werte, so sollte dementsprechend das β_{krit} , also der β -Wert der gerade noch stabil ist, in einem solchen Übergangsbereich besonders hoch liegen. De Vries gibt in seiner Arbeit [6] Zahlenwerte für das erhöhte β_{krit} an und beobachtet auch experimentell ein entsprechendes Verhalten des Screw-Pinch-Plasmas.

Bislang wurde in dieser Arbeit bei den MHD-Instabilitäten nur die $m = 1$ Mode berücksichtigt. Die entsprechenden Resultate für $m = 0$ und $m = 2$ zeigen, dass diese beiden Moden wesentlich ungefährlicher sind als $m = 1$. Abgesehen von einigen Fällen bei $\beta = 1$ erhält man für $m = 0$ weitgehend Stabilität, während die Anwachsraten für $m > 1$ unter denen von $m = 1$ liegen. Für

$m = 2$ ist dies aus Abb. 8 zu entnehmen, wo die dimensionslose Anwachsrate Ω für die Parameter von Abb. 4 ($\xi = 5$, $\delta = 0.3$ sowie $\beta = 0.3$ und 0.7) über dem Aspektverhältnis A aufgetragen ist.

Abschliessend soll das in Garching begonnene Screw-Pinch-Experiment anhand der durchgeführten numerischen Rechnungen näher diskutiert werden. In diesem toroidalen Screw-Pinch mit $R = 30$ cm und $r_s = 6$ cm wird bei Sposspannungen von 40 kV bzw. 160 kV in $1,9 \mu s$ ein B_z -Feld von $32 kG$ bzw. ein I_z -Strom von 300 kA erreicht. Nach einfachen Abschätzungen sowie unter Berücksichtigung früherer experimenteller Resultate sind dabei Iontemperaturen von 100 eV bei hohen ($\sim 100 \mu D_2$) und 1 keV bei geringen ($\sim 10 \mu D_2$) Ausdichten zu erwarten. Für diese beiden Temperaturen sind in Abbildung 9 die aus der Rechnung folgenden Anwachsrate ν_c (in kHz) für den "constant-pitch"-Fall über β aufgetragen. Wie die dargestellten Kurven zeigen, sollten die Anwachsrate bei mittleren β -Werten im Bereich von 200 - 600 kHz liegen.

Im vorliegenden Experiment ist nun vorgesehen, auftretende Instabilitäten durch hochfrequente Modulation des B_z -Feldes dynamisch zu stabilisieren. Der zur Zeit mögliche Bereich der Stabilisierung von 1 bis 3 MHz ist in Abb. 9 schraffiert eingetragen. Aus Gründen des technischen Aufwandes sind dabei an der oberen Frequenzgrenze nur verhältnismässig kleine Amplituden der Modulation möglich, nämlich $\Delta B / B \sim 5\%$. Die in Abb. 9 gleichfalls eingetragenen Frequenzen ν_0 der Kompressionsschwingungen fallen nun zumindest für die kleinere Temperatur (100 eV) in den oberen, zur Zeit technisch möglichen Stabilisierungsbereich. Damit kann der Versuch unternommen werden, die Kompressionsschwingungen anzuregen bzw. zu entdämpfen, um auf diese Weise auch bei kleinem $\Delta B / B$ zu einigermaßen grossen Schwingungsamplituden $\Delta r / r$ der Plasmasäule zu gelangen. Geht

man von experimentell vorliegenden Werten für die Dämpfungs-konstante der Kompressionsschwingung aus, so sollte in der Resonanz eine Amplitudenüberhöhung um den Faktor $5 - 10$ eintreten.

Der untere Stabilisierungsbereich um 1 MHz liegt dagegen bereits so weit ausserhalb der Resonanzkurven der Plasmakompressions-schwingungen, so dass keine Anregung zu erwarten ist. Dafür werden in diesem Fall mit $\Delta\beta/\beta \sim 15-20\%$ hohe Modulations-grade erreicht. Da auch dieser Frequenzbereich noch deutlich über den Anwachsrate ν_i des "constant-pitch"-Falles liegt, scheint auch hier eine Stabilisierung des Plasmas möglich.

Um die Anwachsrate der Instabilitäten und ihre Stabilisierung experimentell zu untersuchen, ist lediglich eine genügend hohe elektrische Leitfähigkeit des Plasmas zu fordern. Dazu genügen im Prinzip Elektronentemperaturen von etwa 100 eV, wie sie im vorliegenden Experiment wegen $T_e = T_i = 100$ eV bei einigen 10^{16} cm^{-3} Dichte leicht erreichbar sein sollten. Als wesentlicher Vorteil ergeben sich dabei kleine Anwachsrate der Instabilitäten, die wiederum das technische Problem der Stabilisierung wesentlich vereinfachen. Geht man nun durch Reduzierung der Dichte in den Bereich höherer Temperaturen (wie etwa 1 keV) über, so liegt auch hier im "constant-pitch"-Fall der technisch mögliche Stabilisierungsbereich von 1-3 MHz noch deutlich über den Anwachsrate ν_i der Instabilitäten. Zugleich aber wird mit dem keV-Plasma ein anderer Zustandsbereich erreicht. Dies zeigt Abb. 10 in der die freien Weglängen λ_{ii} für Ion-Ion-Stösse den Wellenlängen der instabilsten MHD-Moden gegenübergestellt sind. Während bei 100 eV die Weglängen λ_{ii} noch weit unter dem eingetragenen Plasmadurchmesser liegen (ξ ist zu 5 angenommen), werden bei der höheren Temperatur λ_{ii} -Werte erreicht die praktisch mit den Wellenlängen der

MHD-Instabilitäten zusammenfallen. In diesem Fall ist das Plasma also weit eher als stossfrei anzusehen, und damit sind die Voraussetzungen für die MHD-Rechnungen eigentlich verletzt. Wenn auch etwas spekulativ ist hier ein Rückgang der Makroinstabilitäten zu erwarten und eine verbesserte Plasmainstabilität nicht auszuschliessen.

Zu den Abbildungen 9 und 10 ist noch nachzutragen, dass bei einem β von etwa 0.2 (sowie $\xi = 5$ und $\delta = 0.3$) ein Übergang von $n = 1$ auf $n = 2$ als instabilste Wellenzahl eintritt (Abb. 10). Wie bereits ausgeführt, ist bei diesem Übergang ein Rückgang der Instabilität zu erwarten. Wie im Kurvenverlauf von V_c' angedeutet (Abb. 9), sollte das Plasma im "constant-pitch"-Fall bei den angegebenen Parametern ($\beta=0.2!$) sogar vollständig stabil bleiben.

Literatur

- 1 Shafranov V.D., Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions II, 197, Pergamon Press, London (1959)
- 2 Tayler R.J., Proc.Phys.Soc. (1957) B 70, 1049
- 3 Bobeldijk C., R.J.J.van Heijningen, P.C.T.v.d.Laan, L.Th.M. Ornstein, W.Schuurman, R.F. de Vries, Proc.Third Conf. on Plasma Physics and Contr. Nuclear Fusion Research, Novosibirsk
- 4 Bobeldijk C., Rijnhuizen Report 68 - 45 (1968)
- 5 Kruskal M.D., J.L. Tuck, Proc. Roy. Soc., A 245, 222 (1958)
- 6 De Vries R.F., Rijnhuizen Report 69-52 (1969)

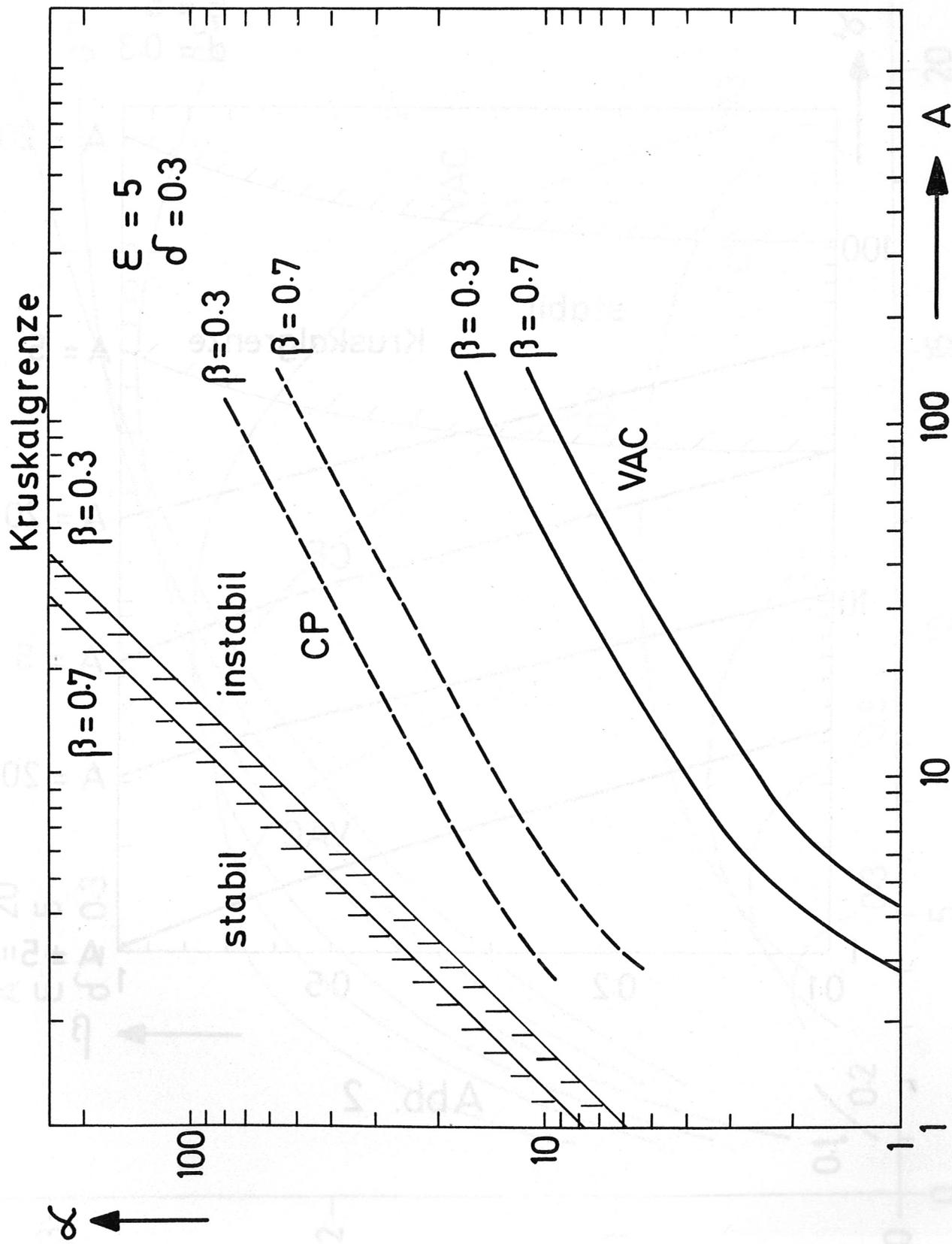


Abb. 1

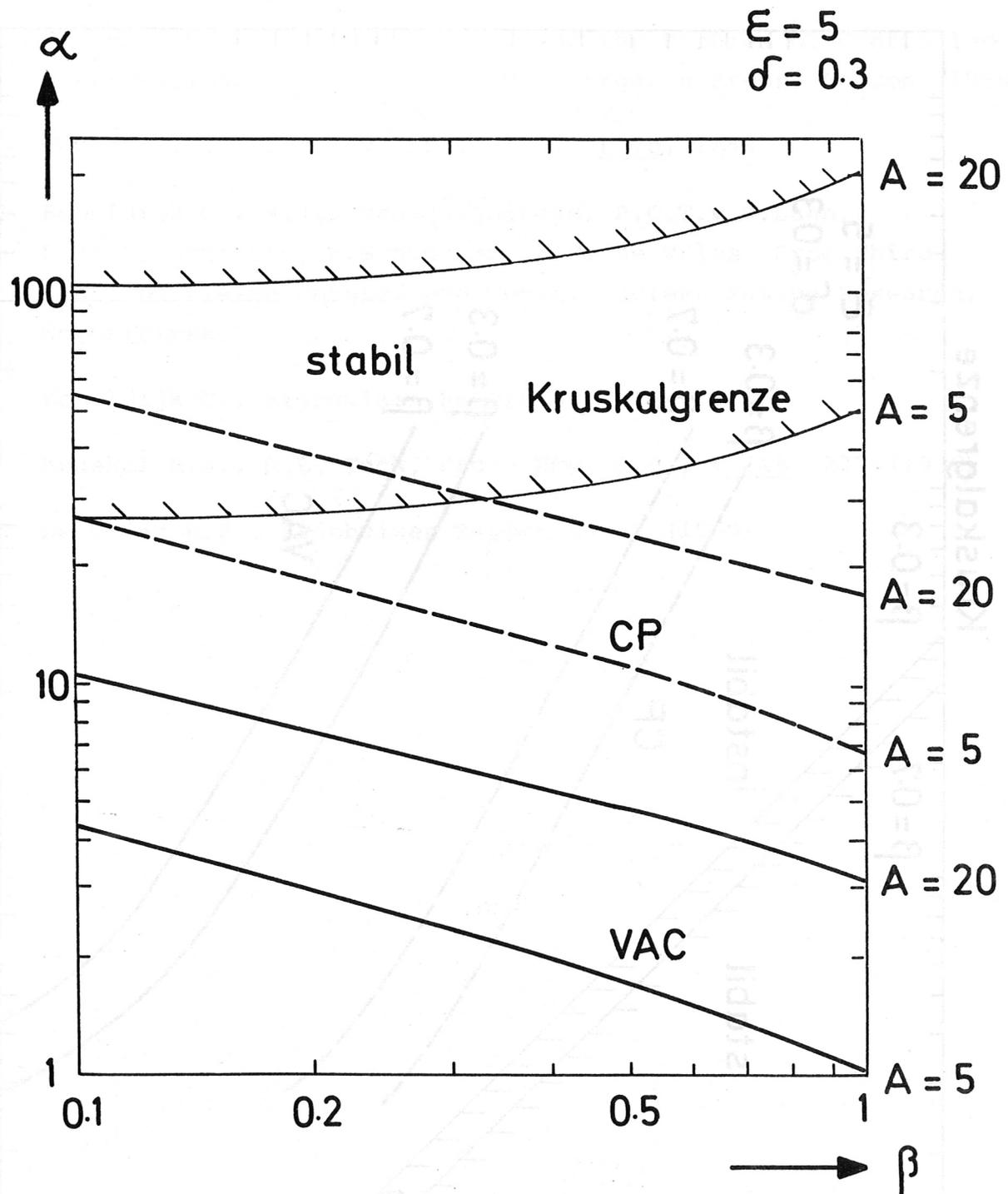


Abb. 2

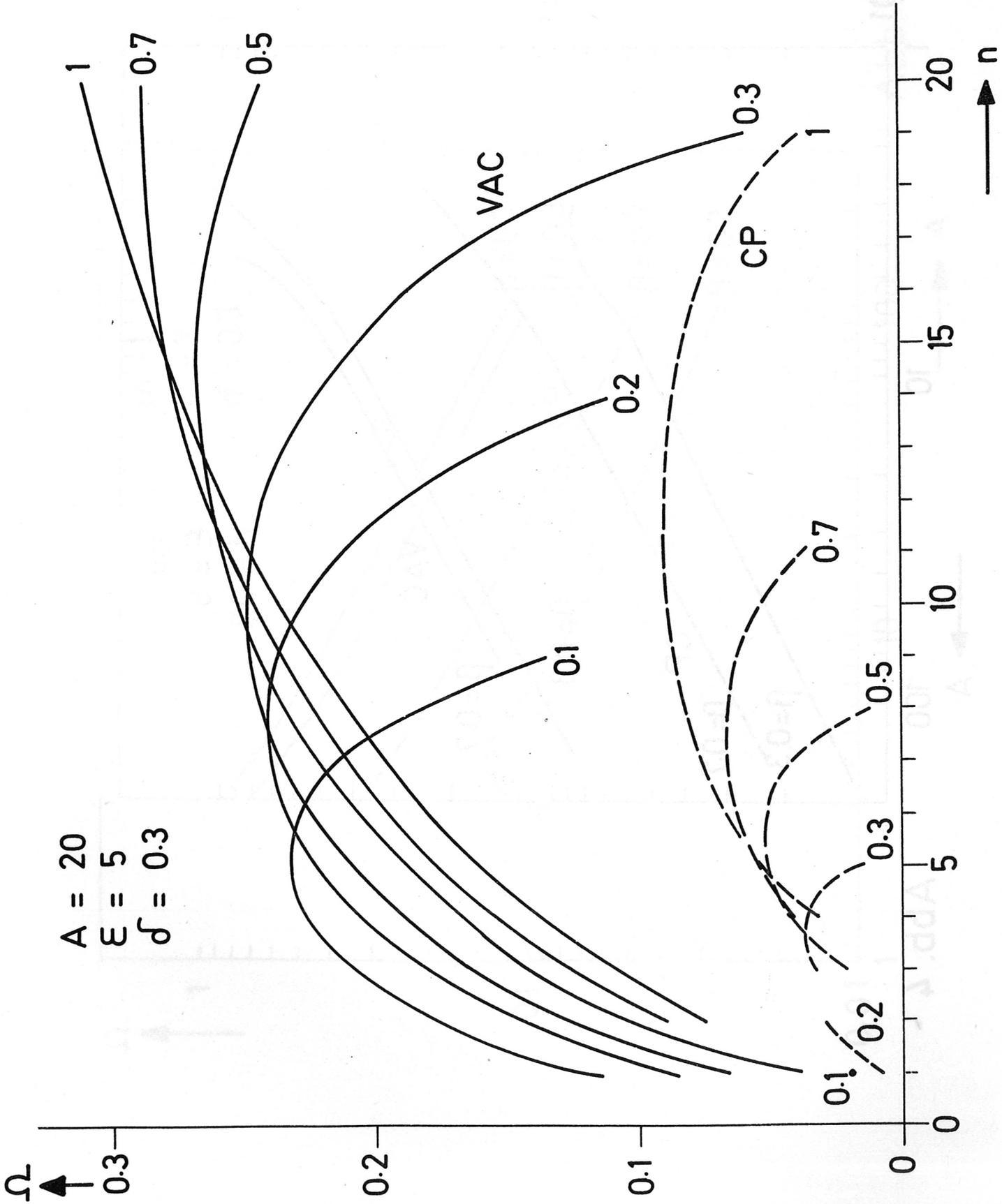


Abb. 3

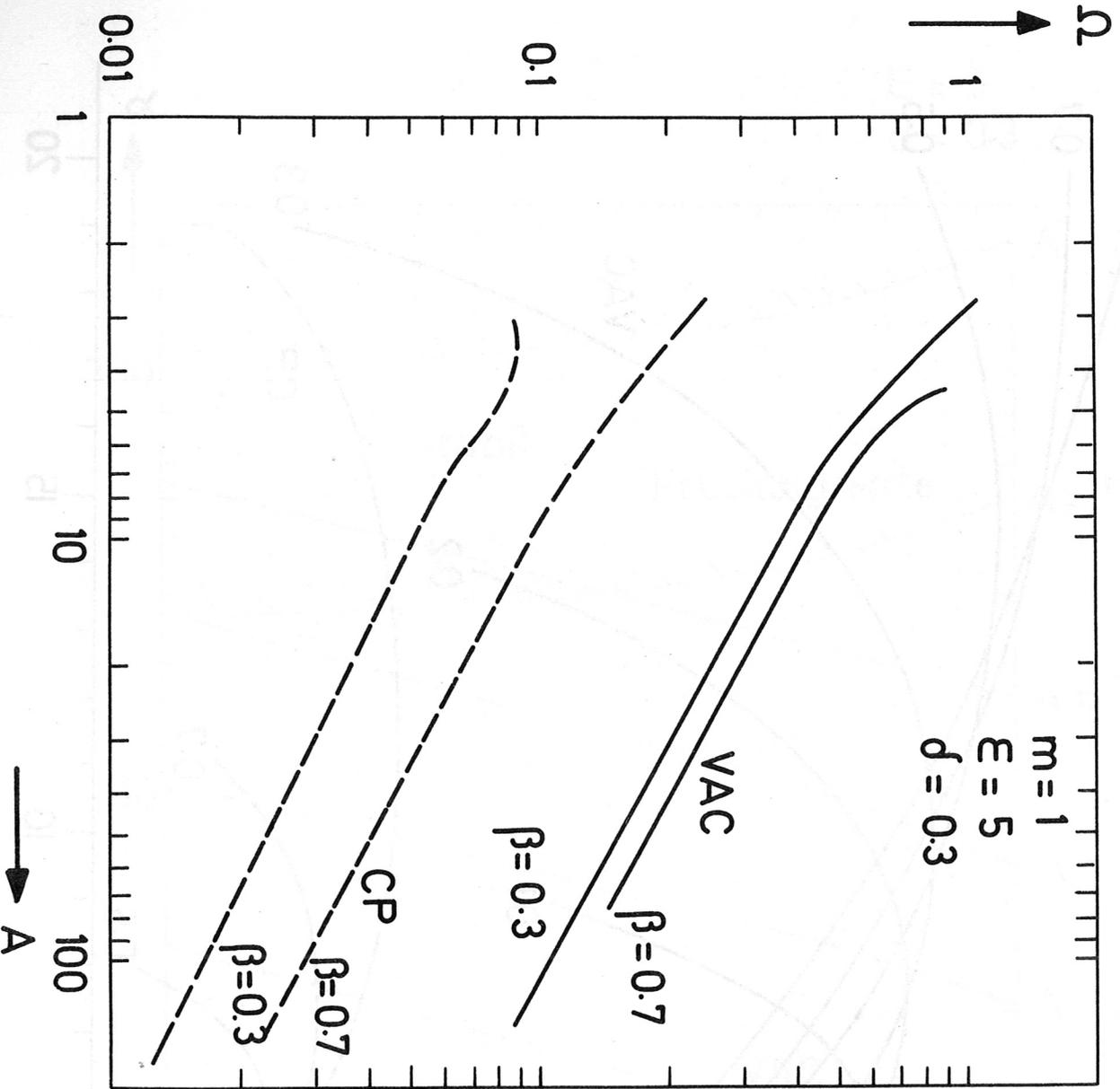


Abb. 4

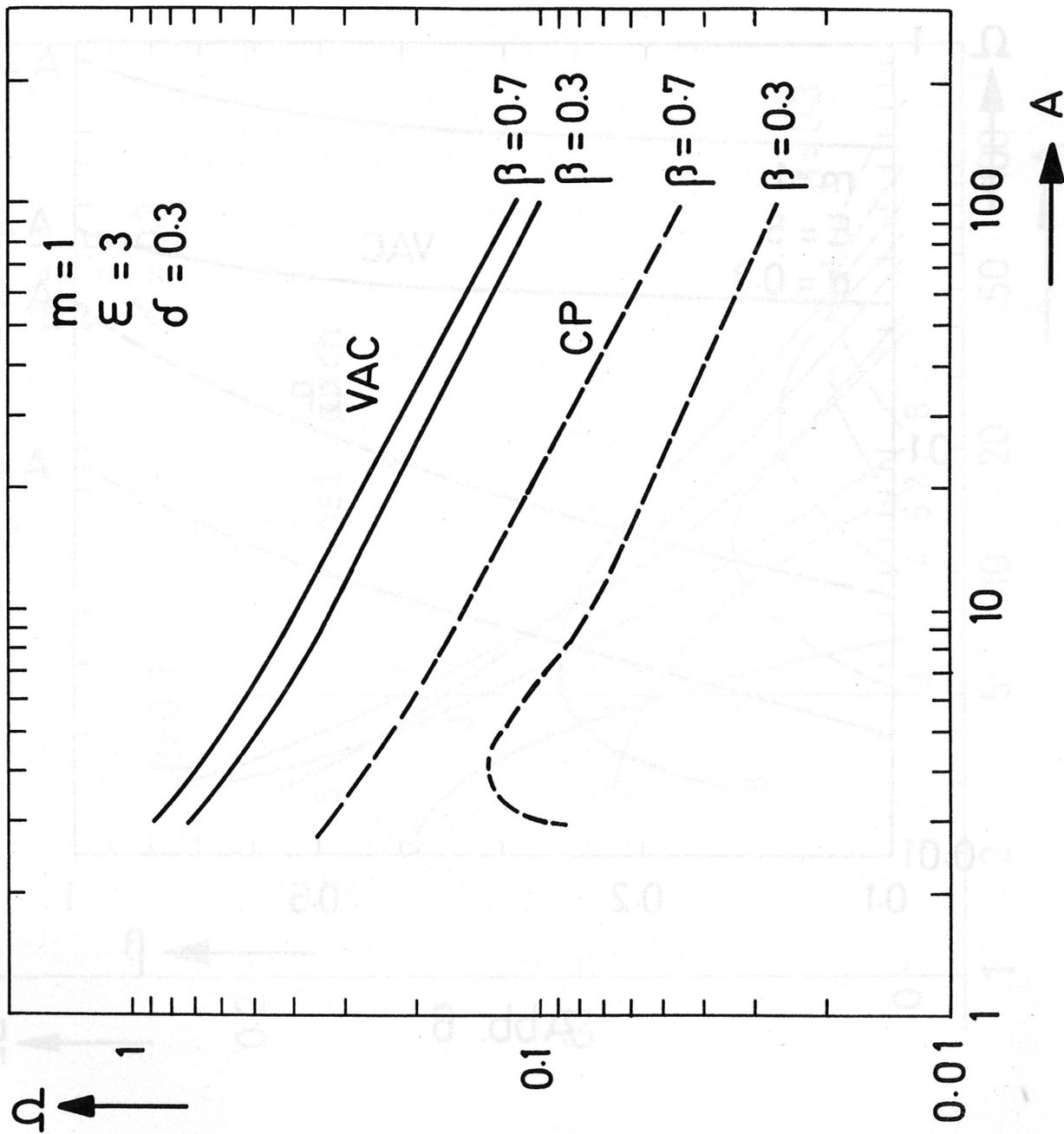


Abb. 5

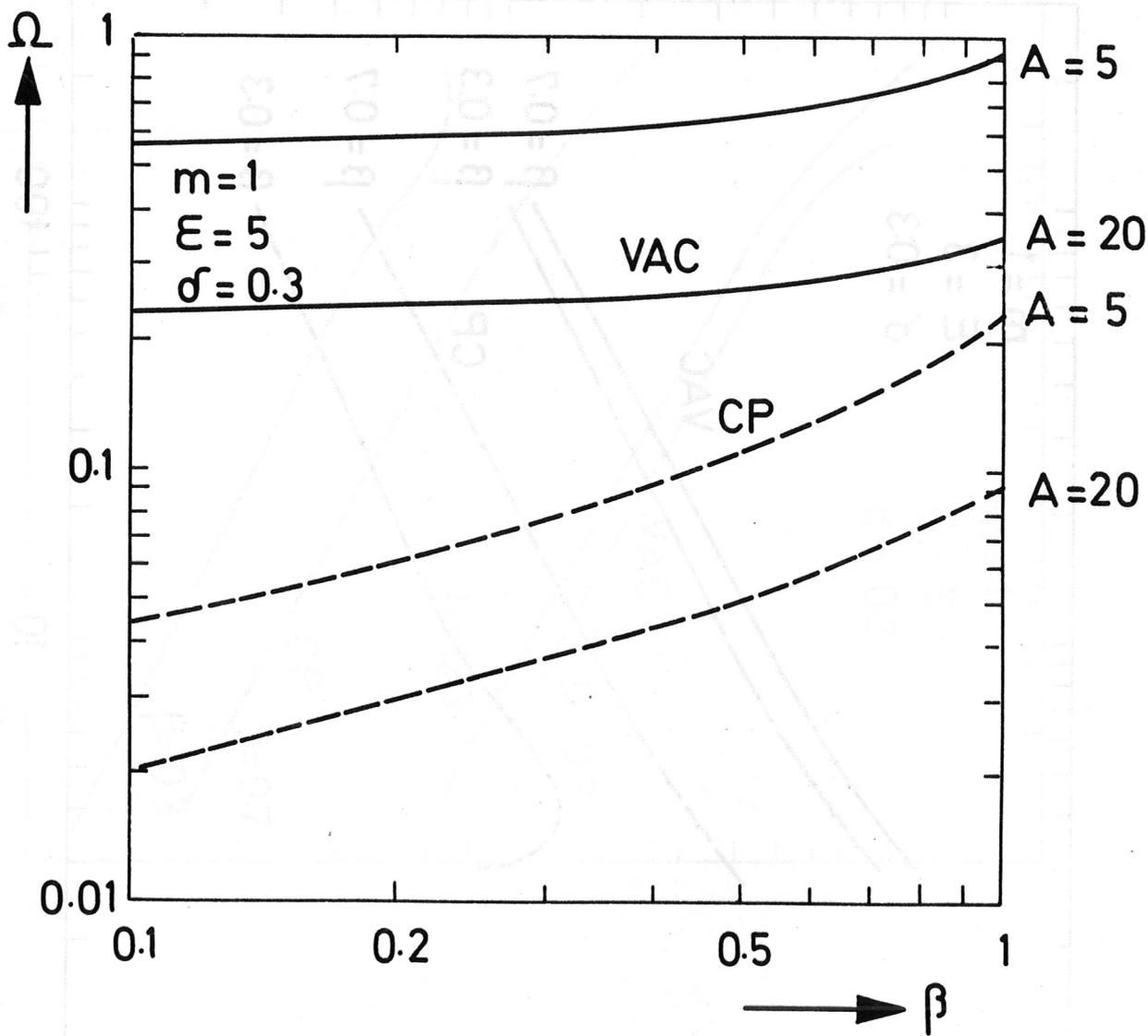


Abb. 6

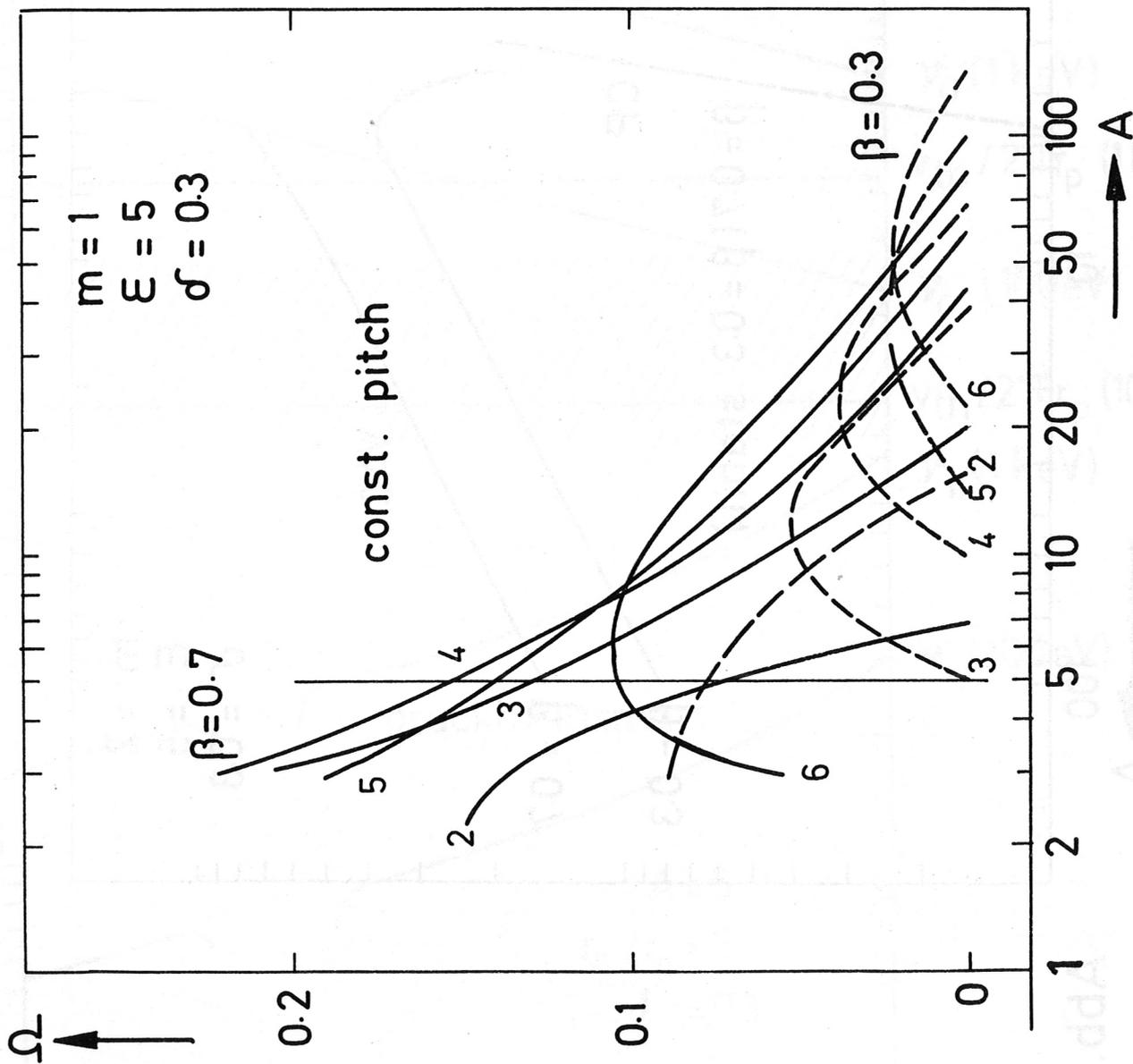


Abb. 7

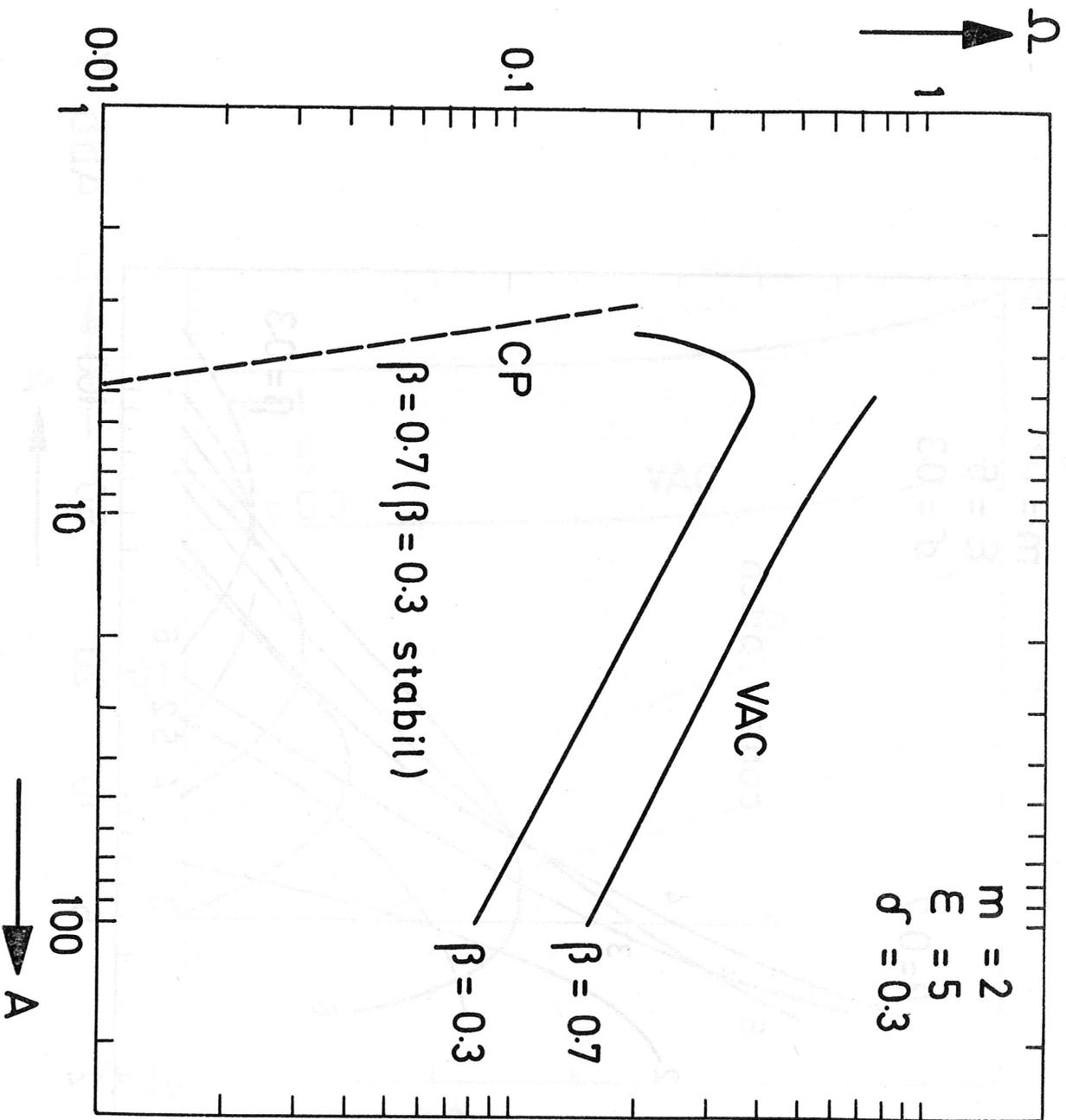


Abb. 8

$\dot{\gamma}$ (Hz)

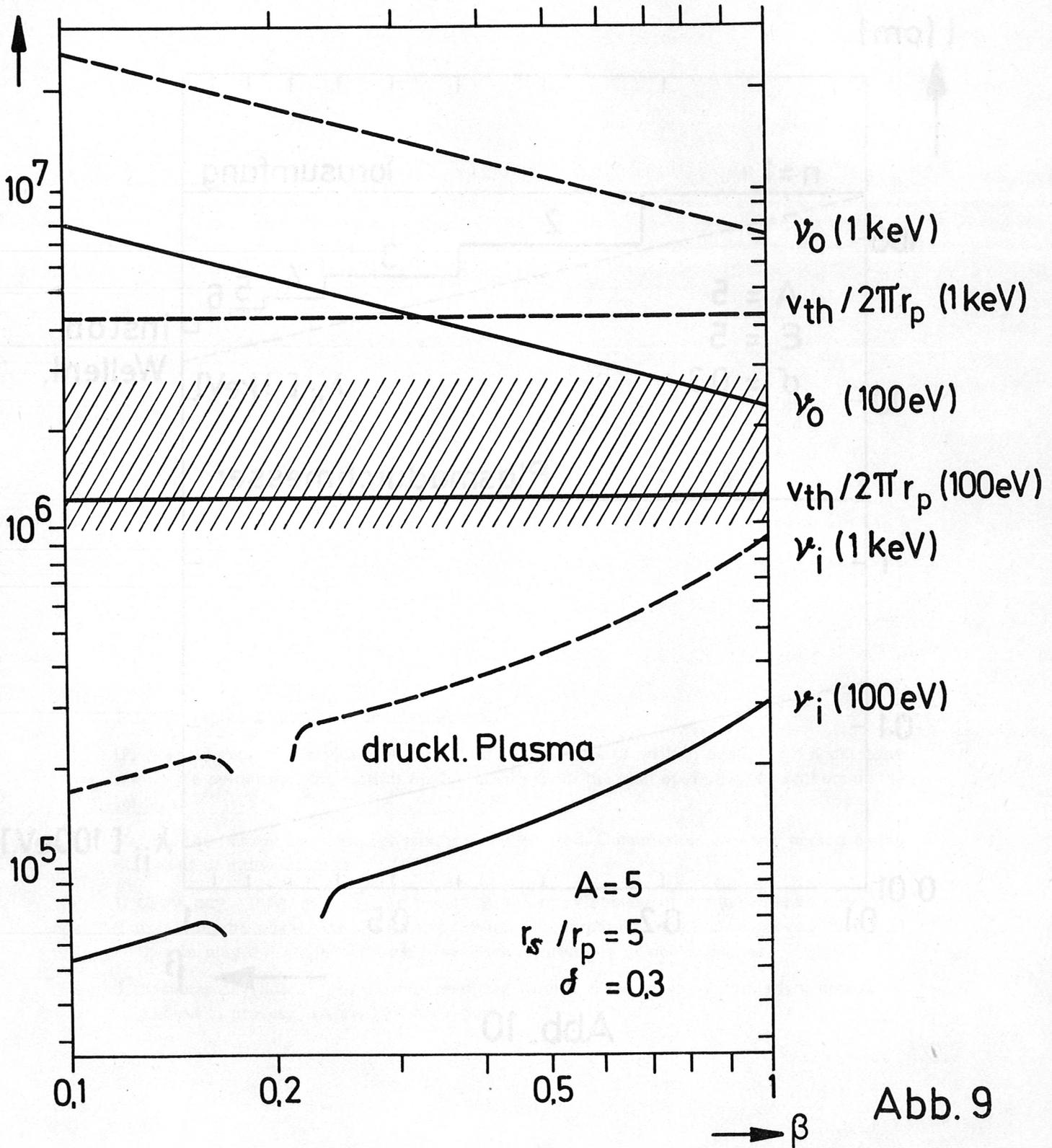


Abb. 9

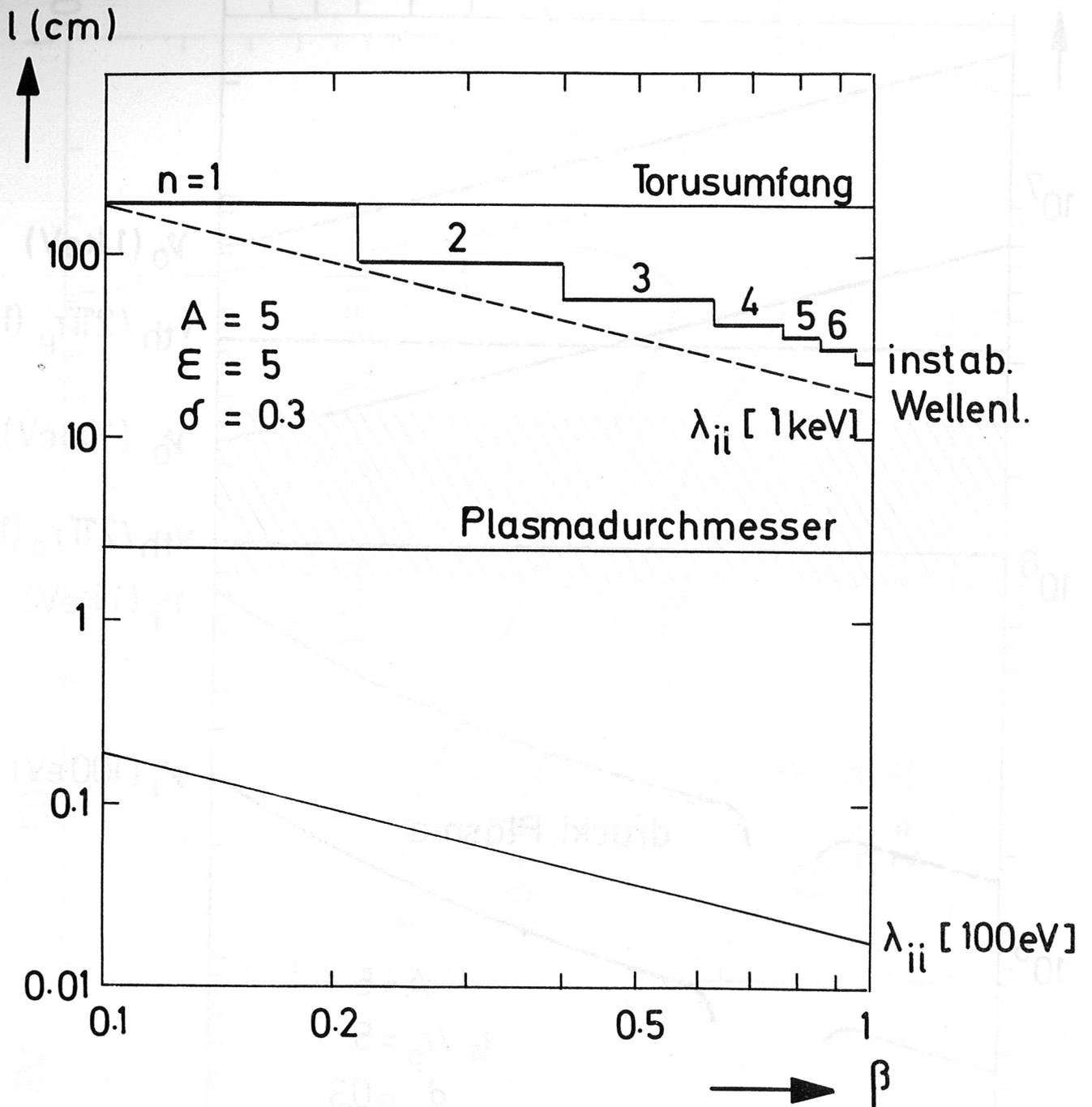


Abb. 10