

Berechnung der Gasparameter in MHD-  
Generatoren

H. Zinko

IPP 3/97

Juni 1969

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**  
**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

## Berechnung der Gasparameter in MHD- Generatoren

H. Zinko

IPP 3/97

Juni 1969

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

The variation of the gas parameter in ideal MHD generators with infinite electrode segmentation can be described by simple analytic relations if the current density, load factor, and magnetic field are kept constant. The magnetoplasmadynamic equations derived under these conditions for three types of ducts (constant area, constant velocity, and constant Mach number) are applied by means of numerical computation to alkali rare gas mixtures with non-equilibrium conductivity. In this way the gas parameters such as pressure, temperature, density and velocity and electrical data such as current density, power density, and electrical conductivity can be plotted as functions of the duct length. The properties and efficiency of the various types of ducts are discussed and compared.

As an example of application, the efficiency and magnetic field strength are calculated as functions of the load factor and Mach number for a MHD generator with a thermal power of 100 megawatt. In addition, various gas mixtures such as Ar-K, Ne-Cs, and He-Cs as well as pure argon are compared with one another in respect of their conductivity and power densities.

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Liste der verwendeten Symbole	
<u>I. Einleitung</u> .....	1
<u>II. Die analytische Lösung für MHD-Kanäle</u> .....	1
II.1 Kanal konstanter Querschnittsfläche .....	3
II.2 Kanal konstanter Geschwindigkeit .....	4
II.3 Kanallänge konstanter Machzahl .....	5
<u>III. Die numerische Berechnung der Gasparameter entlang des MHD-Generator-</u> <u>Kanals</u> .....	6
<u>IV. Diskussion der Ergebnisse</u> .....	9
IV.1 Das Verhalten der Gasparameter entlang des MHD-Generator-Kanals .....	9
IV.2 Die Kanallänge .....	12
IV.3 Der Wirkungsgrad .....	13
a) Konstante Machzahl .....	14
b) Konstante Geschwindigkeit .....	15
c) Konstanter Querschnitt .....	15
<u>V. 100-Megawatt-Thermisch-MHD-Generator</u> .....	16
<u>VI. Vergleich verschiedener Gasmischungen</u> .....	18
<u>VII. Zusammenfassung</u> .....	20
Literaturverzeichnis .....	22

## Liste der verwendeten Symbole

a	Kanalhöhe
$\vec{B}$	Magnetfeldvektor
B	Absoluter Wert des Magnetfeldes
c	Schallgeschwindigkeit
$c_s$	Saatkonzentration
D	Massenfluß
$\vec{E}$	Vektor des elektrischen Feldes
E	Absoluter Wert des elektrischen Feldes
F	Querschnittsfläche des Kanals
h	Enthalpie pro Masseneinheit
H	Totale Enthalpie pro Masseneinheit
$\vec{J}$	Stromdichtevektor
j	Absoluter Wert der Stromdichte
k	Boltzmannkonstante
K	Lastfaktor
L	Elektrische Leistung
m	Masse des Atoms
$m_e$	Masse des Elektrons
M	Machzahl
n	Teilchendichte; Polytropenexponent
$n_e$	Elektronendichte
N	Leistungsdichte
P	Druck
Q	Wirkungsquerschnitt für Elektronenstoß
T	Temperatur
$T_e$	Elektronentemperatur
U	Kinetische Energie
$\vec{v}$	Vektor der Strömungsgeschwindigkeit des Gases
v	Absoluter Wert der Strömungsgeschwindigkeit
V	Volumen
x	Ortskoordinate
X	Kanallänge
Y	Allgemeine Größe
$\alpha$	Exponent
$\beta$	Energieübertragungsfaktor
$\gamma$	Wirkungsgrad
$\kappa$	Adiabatexponent
$\mu$	Auf die Flächeneinheit bezogener Massenfluß
$\nu$	Stoßfrequenz der Elektronen
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Elektrische Leitfähigkeit
$\psi$	Allgemeine Größe

## Indices

e	Elektronen
E	Ende
i	Schrittzahl
j	Atom- oder Ionsorte
x, y, z	Richtung des Koordinatensystems
stag	Stagnation
o	Anfang
l	Beliebige Stelle

I. Einleitung

Für die Auslegung und Optimierung von MHD-Generatoranlagen ist es notwendig, die Änderung der Gasparameter wie Druck, Temperatur, Machzahl und Gasgeschwindigkeit sowie der elektrischen Daten wie Leitfähigkeit, Strom- und Leistungsdichte als Funktion der Kanallänge zu kennen, um durch entsprechende Dimensionierung des Kanals und Wahl der geeigneten Anfangsbedingungen die erforderlichen Anschlußwerte für den Betrieb einer integrierten Kraftwerksanlage mit vorgeschaltetem Reaktor und nachgeschalteter Gasturbine zu finden. Aus diesem Grunde werden in der vorliegenden Arbeit Alkali-Edelgas MHD-Generatoren mit drei verschiedenen Kanalkonfigurationen untersucht, nämlich Kanäle konstanten Querschnitts, konstanter Machzahl und konstanter Geschwindigkeit. Betrachtet man die Stromdichte, den Lastfaktor und die magnetische Induktion als konstant, so lassen sich für diese drei Kanaltypen einfache Beziehungen ableiten, mit deren Hilfe der Wirkungsgrad von MHD Generatoren berechnet werden kann /1/. Eine Darstellung der Gasparameter in Abhängigkeit von der Kanallänge ist aber nicht so einfach möglich, da diese eine Funktion der Leistungsdichte sind, letztere jedoch für die hier betrachteten Alkali-Edelgasmischungen wiederum von der elektrischen Leitfähigkeit als Funktion von Druck und Temperatur abhängt. Wendet man jedoch das analytische Gleichungssystem auf differentielle Schrittgrößen an, so läßt sich durch successive Iteration für jeden Punkt des Kanals eine Lösung finden. Durch numerische Summation über die gesamte Kanallänge kann somit ein geschlossenes Bild über die Änderung der Gasparameter in MHD-Kanälen gewonnen werden. Das Rechenverfahren ist auch auf Gemische reiner Edelgase mit Nichtgleichgewichtszionisation anwendbar; Verlustmechanismen wie Wärme- und Strahlungsverluste, Relaxations-, Segmentierungs- und Randeffekte, wie auch die Verminderung der elektrischen Leitfähigkeit durch Instabilitäten sind in dieser ersten Stufe der Rechnung nicht berücksichtigt.

II. Die analytische Lösung für MHD-Kanäle

Wie bereits von mehreren Autoren untersucht (siehe z.B. /1/), findet man die analytischen Lösungen für die verschiedenen Kanalkonfigurationen ausgehend von den Hauptgleichungen der Gasdynamik (alle Gleichungen werden im MKSA System geschrieben). Es werden nur stationäre Verhältnisse betrachtet:

Kontinuitätsgleichung:

$$\text{div}(\rho \bar{v}) = 0 \tag{1}$$

oder daraus

$$\rho v_x F = \text{const.} \tag{1'}$$

Impulsgleichung:

$$\rho(\bar{v} \text{ grad}) \bar{v} = -\text{grad } P + \bar{j} \times \bar{B} \tag{2}$$

Energiegleichung: (Für ideale einatomige Gase und der Voraussetzung, daß  $\kappa = \text{const}$ , ferner unter Vernachlässigung von Wärmeleitung, Reibung, Abstrahlung und Konvektion).

$$\frac{\rho}{\kappa - 1} \frac{k}{m} (\bar{v} \text{ grad}) T = -P \text{ div } \bar{v} + \frac{j^2}{\sigma} \tag{3}$$

Gasgleichung:

$$P = \rho \frac{k}{m} T \tag{4}$$

Die Machzahl wird definiert durch:

$$M = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{\kappa \frac{k}{m} T}} \tag{5}$$

Hinzu kommen die Gleichungen der Elektrodynamik:

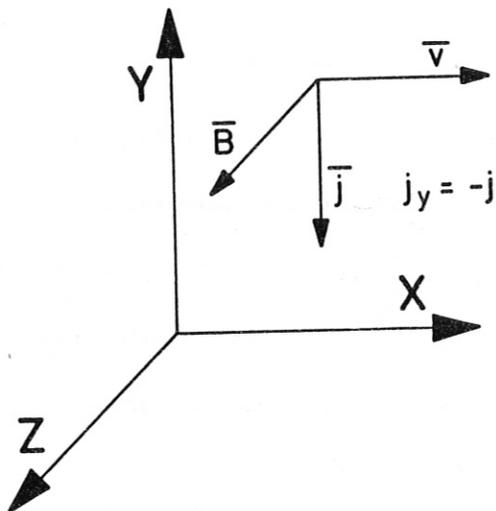
$$\text{div } \bar{j} = 0 \tag{6}$$

$$\text{rot } \bar{E} = 0 \tag{7}$$

Das Ohm'sche Gesetz lautet für den betrachteten Fall:

$$\vec{j} = (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{1}{n_e e} (\vec{j} \times \vec{B}) \quad (8)$$

Folgendes Koordinatensystem sei den Berechnungen zugrunde gelegt, in welchem die Hauptströmungsrichtung des Gases in die x-Richtung erfolgt:



Der lokale Wirkungsgrad von MHD-Generatoren wird definiert durch das Verhältnis von abgegebener elektrischer Leistung und pro Sekunde aufzuwendender Arbeit zur Überwindung der Lorentzkraft:

$$\eta_i = \frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{\vec{v} (\vec{j} \times \vec{B})} = \frac{E_y}{v_x B_z} \quad (9)$$

und ist für die hier interessierenden Faraday-Generatoren gleich dem Lastfaktor K.

$$K \equiv \frac{E_y \cdot a}{v_x B_z \cdot a} \quad (9')$$

Mit Hilfe von (8) erhält man schließlich die Beziehung:

$$-\frac{j_y}{\sigma v_x B_z} = \frac{j}{\sigma v B} = 1 - K \quad (10)$$

welche an jedem Punkt des Kanals j und  $\sigma$  verknüpft.

Abb. 1 Koordinatensystem

Um den Lösungsvorgang einfach zu gestalten, werden folgende Zusatzbedingungen eingeführt:

- 1.) Keine Änderung der Gasparameter in Richtung des Magnetfeldes (z-Richtung)

$$\frac{d\psi}{dz} = 0 \quad (11)$$

wobei mit  $\psi$  die verschiedenen, das Arbeitsmedium beschreibenden Größen wie  $\vec{v}$ , P, T,  $\rho$  usw. gemeint sind.

- 2.) Ebenso soll gelten:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dT}{dy} = \frac{d\rho}{dy} = 0 \quad (12)$$

Geschwindigkeits-, Dichte- und Temperaturprofile werden nicht berücksichtigt.

- 3.) Die Gasgeschwindigkeit in x-Richtung sei groß gegenüber den in divergierenden Kanälen auftretenden  $v_y$ -Komponenten

$$|v_x| \gg |v_y| \quad (13)$$

- 4.) Die Stromdichte und das Magnetfeld seien im betrachteten Kanalabschnitt konstant.

$$j = \text{const.} \quad B = \text{const.} \quad (14)$$

Während  $B = \text{const.}$  annähernd realisierbar ist, sind die anderen Bedingungen bei Leistungsentnahme wegen der Änderung des Druckes und der Gastemperatur längs des Kanals und der im Nichtgleichgewichtsfall geltenden Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Stromdichte gleichzeitig nie streng erfüllbar. Aus diesem Grunde müssen die Längenschritte, für welche die Bedingungen (14) mit guter Näherung gelten sollen, sehr klein gehalten werden.

Zu diesen Bedingungen (11-14) kommen je nach Kanalkonfiguration noch weitere Zusatzbedingungen

hinzu, welche zu den von einander unterschiedlichen analytischen Lösungen der betreffenden Kanaltypen führen.

II.1 Kanal konstanter Querschnittsfläche

Die Zusatzbedingungen lauten hier:

$$F = \text{const.} \quad v_y = 0 \quad \frac{j}{\sigma} = \text{const.} \quad (15)$$

Die Gleichungen (1) - (3) erhalten dann folgende Form:

Kontinuitätsgleichung:  $\rho v_x = \text{const.} = \frac{D}{F} = \mu$  (16)

wenn D den Massendurchsatz in kg/sec und  $\mu$  den spezifischen Massenfluß in  $\text{kg}/(\text{sec} \cdot \text{m}^2)$  bedeuten;

Impulsgleichung:  $\mu \frac{dv_x}{dx} = - \frac{dP}{dx} + j \gamma B_z = - \frac{dP}{dx} - j \cdot B$  (17)

(unter der Annahme, daß nur Ströme in Y-Richtung fließen,  $j_y = -j$ , vgl. Abb. 1).

Diese Gleichung ist sofort integrierbar und liefert

$$j B (x - x_0) = \mu (v_0 - v) + P_0 - P \quad (18)$$

Gleichung (3) läßt sich mit Hilfe von (4) und (16) umformen, so daß man die Energiegleichung in folgender Form schreiben kann:

Energiegleichung:  $\frac{x}{x-1} P \frac{dv_x}{dx} + \frac{1}{x-1} v_x \frac{dP}{dx} = \frac{j^2}{\sigma}$  (19)

Wählt man in (18) als Anfangsbedingung  $x_0 = 0$  und setzt man (17) und (18) in (19) ein, kann man P eliminieren und erhält eine Differentialgleichung für  $v_x(x)$ :

$$\frac{j^2}{\sigma} = \left\{ \frac{x}{x-1} (\mu v_0 + P_0 - j B x) - \frac{x+1}{x-1} \mu v_x \right\} \frac{dv_x}{dx} - \frac{1}{x-1} v_x \cdot j B \quad (20)$$

Diese Gleichung ist unter der Berücksichtigung der Bedingungen (14) und (15) integrierbar, so daß man folgende Lösung für P ( $v_x$ ) erhält:

$$\left\{ P + \frac{x-1}{x} \frac{j}{\sigma} \frac{\mu}{B} \right\} \left\{ v_x + (x-1) \frac{j}{\sigma B} \right\}^x = \text{const.} \quad (21)$$

Gleichung (21) ist eine modifizierte Adiabatangleichung für Kanäle konstanten Querschnitts. Die Gleichungen (15), (16), (21), (18) bilden zusammen mit (4) ein geschlossenes Gleichungssystem, welches erlaubt, alle Parameter - bei gegebenen Anfangsbedingungen - als Funktion von x darzustellen.

Setzt man in (18) Gleichung (21) ein, bildet  $\frac{dx}{dv_x}$  und setzt die Ableitung gleich Null, findet man eine maximale Kanallänge  $x_{\text{max}}$  für  $v_x = c$  ( $c = \text{Schallgeschwindigkeit}$ ), ( $M = 1$ ). Für größere Kanallängen existieren keine Lösungen, da negative Drucke physikalisch nicht sinnvoll sind. Anschaulich zeigt sich dieses Verhalten, wenn man die Gleichungen (1)-(4) als System von Differentialgleichungen betrachtet und nach  $\frac{dv_x}{dx}$  löst. Man erhält:

$$\frac{dv_x}{dx} = \frac{M^2}{\mu(1-M^2)} \left( j B + \frac{j^2}{\sigma v_x} (x-1) \right) \quad (22)$$

Im Unterschallbereich ( $M < 1$ ) ergibt sich eine Zunahme der Gasgeschwindigkeit, bis es bei  $M = 1$  zu einem Unstetigkeitsverhalten ( $\frac{dv_x}{dx} = \infty$ ) kommt. Die Gradienten von P und T sind im Unterschallbereich negativ, das Gas wird auf Kosten der Enthalpie beschleunigt. Für  $M > 1$  ist der Gradient der Geschwindigkeit negativ, die Gasgeschwindigkeit nimmt bis zur Machzahl 1 ab. Lineare Unterschallkanäle werden somit durch das Erreichen der kritischen Machzahl in ihrer Länge begrenzt. Und zwar

wird der Kanal umso kürzer sein, je höher  $v_{x0}$  und  $M_0$  liegen, je größer  $j$  und  $B$  sind und je kleiner der Anfangsdruck  $P_0$  am Kanaleingang ist. In linearen Überschallkanälen sind diese Verhältnisse gerade umgekehrt.

### II.2 Kanal konstanter Geschwindigkeit

Hier bleibt zwar definitionsgemäß einer der Gasparameter -  $v_x$  - konstant, dafür treten in den Gleichungen jedoch  $v_y$ -Komponenten und ihre ersten Ableitungen auf. Mit den Zusatzbedingungen

$$1 - K = \frac{j}{\sigma v B} = \text{const. und } v_x = \text{const.} \quad (23)$$

erhält man folgendes Gleichungssystem aus (1) - (3) (in achsennahen Bereichen):

Kontinuitätsgleichung:  $\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) = 0$

oder

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_y \partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

und mit (23) unter der Voraussetzung, daß  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  von gleicher Größenordnung wie  $\frac{\partial \rho}{\partial y}$  ist und  $v_x \gg v_y$  bleibt

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (24)$$

übrig.

Die x-Komponente der Impulsgleichung ergibt:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = [\vec{j} \times \vec{B}]_x = -jB \quad (25)$$

und aus der Energiegleichung folgt:

$$\rho v_x \frac{1}{\kappa - 1} \frac{k}{m} \frac{\partial T}{\partial x} = -P \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{j^2}{\sigma} \quad (26)$$

Gleichung (25) ist sofort zu integrieren mit der Lösung:

$$P_0 - P = jBx \quad (x_0 = 0) \quad (27)$$

Gleichung (24) in (26) eingesetzt führt nach Multiplikation mit  $F$  und einigen Umformungen zu der Form:

$$D \frac{k}{m} \left( \frac{1}{\kappa - 1} \right) \frac{dT}{dx} = -(P_0 - jBx) v_x \frac{dF}{dx} + F \cdot \frac{j^2}{\sigma} \quad (26')$$

Setzt man in diese Gleichung (26') aus Gleichung (4) für  $T$  folgenden Ausdruck ein:

$$T = \frac{P}{\rho} \frac{m}{k} = \frac{m v F}{k D} (P_0 - jBx) \quad (28)$$

so erhält man eine Differentialgleichung für  $F(x)$ :

$$\frac{dF}{F} = \frac{\frac{1}{\kappa - 1} v \cdot jB + \frac{j^2}{\sigma}}{\frac{k}{\kappa - 1} (P_0 - jBx) v} dx \quad (29)$$

Integration dieser Gleichung liefert unter Berücksichtigung von (23)

$$\frac{F}{F_0} = \left\{ 1 - \frac{jBx}{P_0} \right\}^{-\left[ \frac{1}{\kappa} (1 + (\kappa - 1)(1 - K)) \right]} \quad (29')$$

und mit Hilfe von (28) läßt sich  $T$  berechnen:

$$\frac{T}{T_0} = \left\{ 1 - \frac{jBx}{P_0} \right\}^{\frac{\kappa - 1}{\kappa} K} = \left\{ \frac{P}{P_0} \right\}^{\frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot K} \quad (30)$$

Mit (30), (29') und (27) haben wir wiederum die Lösungen für die Gasparameter in konstanten Geschwindigkeitskanälen erhalten.

Da in dieser Kanalform keine Beschleunigung des Gases stattfindet, geht die Änderung der Gasenthalpie abgesehen von Verlusten zur Gänze in elektrische Nutzleistung über. Die Kanallänge ist direkt proportional der Druckdifferenz im Kanal, die maximale Länge wird durch den Druck  $P = 0$  bestimmt. Der Kanal wird umso kürzer, je kleiner der Anfangsdruck und je größer  $B$ ,  $j$  und  $v$  sind. Wie später noch behandelt werden wird, ist die praktische Längenbegrenzung durch die technische Forderung nicht zu hoher Querschnittsdivergenzen bedingt, für welche auch der hier angeführte Lösungsansatz der Gleichung (24) nicht mehr genügt.

### II.3 Kanallänge konstanter Machzahl:

Ausgehend von den Gleichungen (1) - (4) erhält man unter den Zusatzbedingungen

$$1 - k = \frac{j}{\sigma v B} = \text{const.} \quad \text{und} \quad M \equiv \frac{v}{\sqrt{\kappa \frac{k}{m} T}} = \text{const.} \quad (32)$$

folgendes Gleichungssystem (in achsennahen Bereichen):

Kontinuitätsgleichung:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

( $v_y \frac{\partial \rho}{\partial y}$  sei klein gegen  $v_x \frac{\partial \rho}{\partial x}$ )

x-Komponente der Impulsgleichung:

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial x} - j B \quad (34)$$

Energiegleichung:

$$\frac{1}{\kappa - 1} \frac{k}{m} \rho v_x \frac{\partial T}{\partial x} = - P \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{j^2}{\sigma} \quad (35)$$

Setzt man nun (33) in (35) ein, so erhält man:

$$\rho v_x \frac{1}{\kappa - 1} \frac{k}{m} \frac{dT}{dx} - P \frac{v_x}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = \frac{j^2}{\sigma} \quad (35')$$

Diese Gleichung liefert zusammen mit Gleichung (34) nach einigen Umformungen zwei Differentialgleichungen für  $P(x)$  und  $T(x)$ :

$$\left( \frac{1}{2} \kappa M^2 \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} + 1 \right) \frac{dP}{dx} = - j B \quad (36)$$

$$\left( \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{P}{\sqrt{T}} \frac{dT}{dP} - \sqrt{T} \right) \frac{dP}{dx} = \frac{j^2}{\sigma M \sqrt{\kappa \frac{k}{m}}} \quad (37)$$

Eliminiert man daraus  $\frac{dP}{dx}$  erhält man eine Differentialgleichung für  $P(T)$ :

$$\frac{\left( \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{d(\log T)}{d(\log P)} - 1 \right) \sqrt{T}}{\frac{1}{2} \kappa M^2 \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} + 1} = - \frac{j}{\sigma B M \sqrt{\kappa \frac{k}{m}}} \quad (38)$$

Mittels Gleichung (5) und (10) läßt sich die rechte Seite von (38) umformen:

$$- \frac{j}{\sigma B M \sqrt{\kappa \frac{k}{m}}} = - (1 - k) \sqrt{T}$$

Somit ist die Integration von (38) leicht durchführbar und man erhält:

$$\frac{P}{P_0} = \left\{ \frac{T}{T_0} \right\}^\alpha = \left\{ \frac{T}{T_0} \right\}^{\frac{n}{n-1}} \quad (39)$$

mit dem Polytropenexponenten  $n = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$

wobei 
$$\frac{n}{n-1} \equiv \alpha = \frac{1}{K} \cdot \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}-1} \left[ 1 + \frac{1}{2} (1-K) (\mathcal{K}-1) M^2 \right]$$
 (40)

Gleichung (39) in (36) eingesetzt und integriert liefert:

$$\frac{T}{T_0} = \left\{ 1 - \frac{j B x}{P_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \mathcal{K} \frac{M^2}{\alpha} \right)} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$
 (41)

oder

$$\frac{P}{P_0} = 1 - \frac{j B x}{P_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \mathcal{K} \frac{M^2}{\alpha} \right)}$$
 (42)

während man mit Hilfe der Beziehung (1') findet:

$$\frac{F}{F_0} = \left\{ 1 - \frac{j B x}{P_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \mathcal{K} \frac{M^2}{\alpha} \right)} \right\}^{\frac{1-2\alpha}{2\alpha}}$$
 (43)

Im Kanal konstanter Machzahl wird das Gas entsprechend der Wurzel der Temperaturdifferenz abgebremst; die abgegebene elektrische Nutzleistung geht auf Kosten der Bremsleistung und Enthalpieabnahme des Gases. Die qualitative Abhängigkeit der Kanallänge von den Anfangsbedingungen ist die gleiche wie bei den  $v_x = \text{const.}$ -Kanälen. Aus (39) und (40) wird auch ersichtlich, daß im Leerlauf (K = 1) der Polytropenexponent n in den Adiabatenexponenten übergeht, während für den Kurzschlußfall (K = 0) keine Temperaturänderung stattfindet, d.h. die zu erwartende Temperaturabnahme des Gases infolge der Entspannung wird durch die Ohm'sche Aufheizung gerade kompensiert.

Nachdem nun für die drei hier angeführten Kanaltypen unter den angeführten Bedingungen j und  $\mathcal{K} = \text{const.}$  im Kanal konstanten Querschnitts, j und K = const. in den Kanälen konstanter Machzahl und konstanter Geschwindigkeit, die analytischen Beziehungen für die Gasparameter P, T, ρ, M und v sowie für die Kanalfläche F aufgestellt wurden, muß versucht werden, diese Beziehungen realistischen Betriebsbedingungen in Alkali-Edelgas-MHD-Generatoren anzupassen. Dabei soll zunächst nur ein ideal-segmentierter, verlustfreier MHD-Generator betrachtet werden, dessen elektrische Leitfähigkeit durch die mit der Nichtgleichgewichtsionisation verbundenen Elektronentemperaturerhöhung, welche selbst wieder eine Funktion der lokalen Druck-, Temperatur- und Stromdichteverhältnisse im Kanal ist, bestimmt wird.

### III. Die numerische Berechnung der Gasparameter entlang des MHD-Generator-Kanals

Ziel des Verfahrens ist es, die im vorhergehenden Abschnitt erhaltenen analytischen Lösungen für die verschiedenen Generatortypen den sich ändernden Gasbedingungen bei Leistungsentnahme anzupassen. Das heißt, j kann über längere Kanalabschnitte nicht mehr als konstant bezeichnet werden. Für eine erste Näherung genügt es aber, die Konstant-Bedingungen auf differentielle Längenschritte im Kanal anzuwenden und mit Hilfe der analytischen Gleichungen die Änderung des Druckes, der Temperatur und der Geschwindigkeit des Gases zu berechnen, um auf diese Weise neue Anfangsbedingungen für den nächsten Schritt zu erhalten. Aus diesen Anfangsbedingungen läßt sich wieder ein neuer Wert von j und  $\mathcal{K}$  berechnen usw. Durch Summierung über die einzelnen Schritte erhält man schließlich ein geschlossenes Bild für die charakteristischen elektrischen und thermodynamischen Daten des betreffenden Kanals.

Im allgemeinen spielt sich beim Betrieb von MHD-Generatoren folgender Prozeß ab: Dem Generator wird pro Volumeneinheit die elektrische Leistung  $N = j \cdot E$  auf Kosten der Summe der kinetischen Energie und der Enthalpie des Gases entzogen, wobei je nach Anfangsbedingung und Typ sowohl Beschleunigung

wie auch Abbremsung, Enthalpiezunahme wie auch Enthalpieabnahme des Gases, verbunden mit Druck- und Temperaturänderungen, auftreten können. Betrachten wir nun einen Alkali-Edelgas-Generator eines bestimmten Gasgemisches mit konstantem angelegten Magnetfeld  $B$  und mit einem konstanten Lastfaktor  $K$ . Da die elektrische Leitfähigkeit eine Funktion des Druckes und der Temperatur und außerdem im Falle der Nichtgleichgewichtszionisation eine Funktion der elektrischen Stromdichte ist, werden sich  $j$  und  $\sigma$  entlang des Kanales ändern.

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= f\{P(x), T(x), j(x)\} \\ j(x) &= f\{\sigma(x), v(x), K, B\} \end{aligned} \quad (44)$$

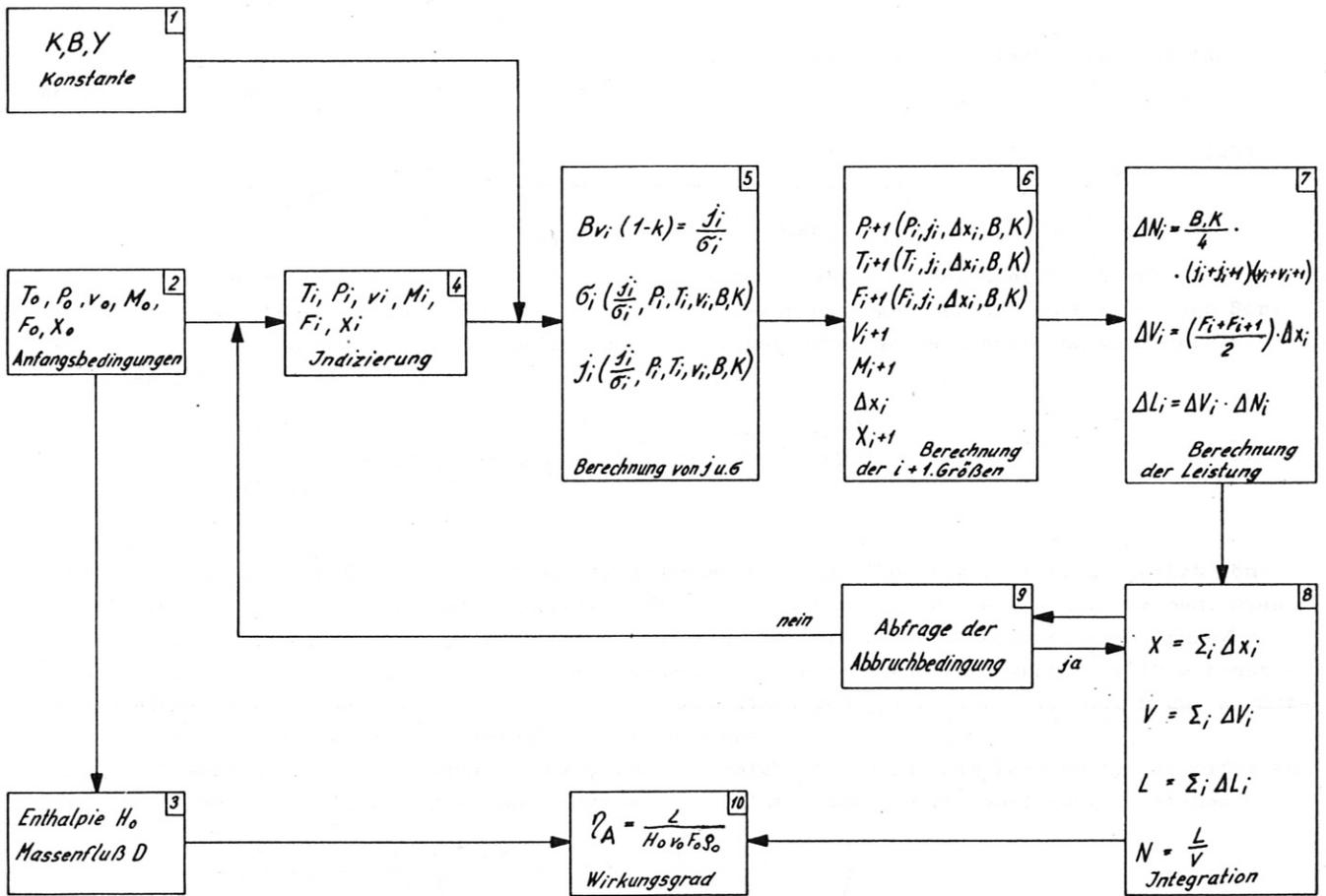


Abb. 2 Funktionsschema des Rechenprogrammes

Bekanntlich lassen sich aber  $j$  und  $\sigma$  als Funktion der Elektronentemperatur, des Druckes und der Gastemperatur berechnen, wenn die Stoßquerschnitte der Elektronen gegen die Trägergas- und die Saatatome bekannt sind. Es bietet sich nun folgender Lösungsweg für die Gasparameter  $P$ ,  $T$  und  $v_x$  und für  $j$  und  $\sigma$  als Funktion der Kanallänge  $x$  an, welcher in Abb. 2 für die drei beschriebenen Kanaltypen nach dem zeitlichen Ablauf des numerischen Rechenverfahrens schematisch vereinfacht dargestellt ist. Und zwar werden in dieser Abbildung die verschiedenen Funktionseinheiten des Programmes durch Blöcke versinnbildlicht.

In Block 1 sind die Systemkonstanten zusammengefaßt: Der Lastfaktor  $K$ , die magnetische Induktion  $B$  und jene Größe  $Y$ , welche die Type des Kanals festlegt ( $F$ ,  $v$  oder  $M$ ). In Block 2 kommen die für den Generatorbeginn ( $x = 0$ ) geltenden Anfangsbedingungen  $T_0$ ,  $P_0$ ,  $v_0$ ,  $F_0$  und  $M_0$  hinzu. Mittels der Anfangsbedingungen kann bereits in Block 3 der Massenfluß und die pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche strömende totale Enthalpie berechnet werden.

$$D = \frac{P_0 v_0 F_0}{\frac{k}{m} T_0} \quad (45)$$

$$v_0 F_0 H_0 = (h_0 + U_0) v_0 F_0 = P_0 v_0 F_0 \left( \frac{je}{je-1} + \frac{k}{2} M_0^2 \right) \quad (46)$$

Die Anfangsbedingungen werden dann in Block 4 indiziert, hier beginnt die Iteration des numerischen Verfahrens. Im Block 5 erfolgt die Berechnung der zu den eingegebenen Gasparametern gehörenden  $j$  und  $\bar{v}$ -Werte. Und zwar erhält man zunächst die Größe

$$B v_i (1-k) = \frac{j_i}{\bar{v}_i} (T_e) \quad (47)$$

Damit ist die Elektronentemperatur bekannt und daraus kann wiederum die elektrische Leitfähigkeit als Funktion von  $T_e$  berechnet werden:

$$\bar{v}(T_e) = \frac{n_e(T_e) \cdot e^2}{m_e \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{k T_e}{m_e} \sum_j n_j(T_e) \cdot Q_{ej}(T_e)} \quad (48)$$

wobei  $n_e$  in dieser Gleichung durch die Sahadichte bestimmt wird;  $n_j$  bedeutet die Dichte der Atom- oder Ionensorte und  $Q_{ej}$  den Stoßquerschnitt des Elektrons gegenüber der entsprechenden Sorte. Weiters wird nun aus der Energiebilanz der Elektronen unter Vernachlässigung von Energieverlusten  $j(T_e)$  mit Hilfe der Formel

$$\frac{j^2}{\bar{v}(T_e)} = 3 \sum_j n_e Q_{ej} \int_j \frac{m_e}{m_j} k (T_e - T_j) \quad (49)$$

berechnet.

Somit ist  $j_1(T_e)$  und  $\bar{v}_1(T_e)$  für die jeweiligen Gasbedingungen eindeutig festgelegt. Jetzt können die im vorhergehenden Abschnitt hergeleiteten analytischen Lösungen angewendet werden. Dies geschieht in Block 6. Es wurde je nach Art des Kanals eine kleine Variation der Kanallänge  $\Delta x$  ( $M = \text{const.}$  und  $v = \text{const.}$ -Kanal) oder eine kleine Variation der Geschwindigkeit  $\Delta v$  ( $F = \text{const.}$ -Kanal) eingeführt, so daß nun mit Hilfe der Anfangsbedingungen  $j_1, \bar{v}_1, P_1, T_1, v_1, B$  und  $K$  sämtliche Größen mit dem Index  $1 + 1$  berechnet werden können.

In Block 7 werden alle diese Werte vorübergehend gespeichert, um für die Berechnung des differentiellen Volumens, der differentiellen Leistung bzw. Leistungsdichte zur Verfügung zu stehen.

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_i &= \frac{F_i + F_{i+1}}{2} \Delta x \\ \Delta N_i &= \frac{j_i + j_{i+1}}{2} \cdot \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \cdot B \cdot K \end{aligned} \right\} \Delta L_i = \Delta N_i \cdot \Delta V_i \quad (50)$$

In Block 8 werden diese Werte aufsummiert:

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_i \Delta x_i \\ V &= \sum_i \Delta V_i \\ L &= \sum_i \Delta L_i \\ N &= \frac{L}{V} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Der Block 9 dient der Abfrage, ob gewisse Abbruchsbedingungen erfüllt sind. Im negativen Falle, wenn z.B. eine bestimmte Endtemperatur oder ein bestimmter Enddruck noch nicht erreicht ist, kommen die berechneten Werte für  $P, T, v, x, M$  und  $F$  zu Block 4 zurück, werden neu indiziert und somit als neue Anfangsbedingungen für den sich wiederholenden Rechenablauf betrachtet.

Schließlich wird in Block 10 noch der Wirkungsgrad ermittelt:

$$\eta_A = \frac{L}{H_0 \rho_0 v_0 F_0} \quad (52)$$

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt derart, daß sämtliche interessierende Größen wie P, T, v, F, V, y, L, N, j,  $\zeta$  als Funktion von x ausgedrückt werden. Ebenfalls werden die Gesamtlänge X bis zur Abbruchbedingung sowie L, N, V, H und  $\eta$  ausgeschrieben. Die Schrittgrößen selbst können je nach Grad der erwünschten Genauigkeit (und in Hinblick auf sinnvolle Rechenzeiten) gewählt werden.

Dieses Rechenprogramm ist auf beliebige Edelgas- und Edelgas-Alkali-Mischungen anwendbar. Außerdem kann es noch realistischeren Kanalbedingungen angepaßt werden. Der Einfluß von Segmentierungseffekten kann ebenso berücksichtigt werden wie die Verminderung der elektrischen Leitfähigkeit durch Instabilitäten.

Schließlich kann statt der hier gewählten Bedingungen K = const. und B = const. auch jede beliebige andere Vorschrift für den Lastfaktor und für das Magnetfeld eingelesen werden. Dadurch wird es möglich sein, MHD Generator-Kanäle für reelle Anlagen zu konzipieren und hinsichtlich der Anschlußbedingungen bei integrierten Kraftwerkssystemen, welche aus Reaktor, MHD-Generator, Gasturbine und Wärmetauscher bestehen, zu optimieren.

#### IV. Diskussion der Ergebnisse

Mit dem in den vorhergehenden Kapiteln geschilderten Verfahren ist es möglich, alle interessierenden Kanalparameter sowie Leistung und Wirkungsgrad für die verschiedensten Anfangsbedingungen zu rechnen und außerdem verschiedene Gasgemische untereinander zu vergleichen.

Da, wie bereits erwähnt, Verlustmechanismen hier vorerst nicht berücksichtigt wurden, stellen die Ergebnisse eine obere Grenze für die erreichbaren Werte der Leistungsdichte, des Wirkungsgrades usw. dar. Energieverluste werden zur Folge haben, daß zum Erzielen gleicher Leistungsdichte wie im idealen Fall höhere Magnetfelder angelegt werden müssen und daß die praktisch erreichbaren Wirkungsgrade unter den hier für ideale Verhältnisse berechneten liegen.

##### IV.1 Das Verhalten der Gasparameter entlang des MHD-Generator-Kanals

Als Beispiel der numerisch berechneten Werte für die Gasparameter P, T, v, M sowie für die Änderung von F, j,  $\zeta$  und N entlang des Kanals wurden in den Abbildungen 3 und 4 die Ergebnisse für jeden der drei hier behandelten Kanaltypen in Form von relativen Größen zusammengestellt. Dabei wurden folgende Anfangsbedingungen gewählt: T = 1800 °K, P = 10 at, v<sub>0</sub> = 250 und 1260 m/sec, M<sub>0</sub> = 0,32 und 1,6. Die Rechnungen wurden für ein Argongas mit 0,1 % Kaliumzusatz durchgeführt; die Wirkungsquerschnitte für Elektron-Argon-Stöße wurden nach Berechnungen von Devoto gewählt /2/, diejenigen für die Elektron-Kaliumstöße nach Kruger-Vigas /3/. Die Stärke des Magnetfeldes wurde so gewählt, daß die Kanallänge bis zur Abbruchbedingung bei P<sub>e</sub> = P<sub>0</sub> etwa 2 m beträgt, der Lastfaktor war in allen Fällen 0,5.

Da das prinzipielle Verhalten der Gasparameter für die einzelnen Kanaltypen bereits bei der analytischen Ableitung der den Kanal beschreibenden Gleichungen diskutiert wurde, seien hier nur die durch die Änderung von j und  $\zeta$  entlang des Kanals auftretenden Eigenschaften besprochen. Man sieht aus den Abb. 3 und 4 daß die Fälle M = const. und V = const. durch die bei gleichen Anfangsbedingungen und gleichen Druckverhältnissen wesentlich kürzere Kanallänge auffällt. Allen drei Kanaltypen ist jedoch mit einer weiter unten besprochenen Ausnahme der mit zunehmendem x immer stärker werdende Anstieg von j,  $\zeta$  und N gemeinsam. Die wachsende elektrische Leistungsdichte hat jedoch eine immer größer werdende Abnahme der totalen Enthalpie zur Folge. Im M = const.-Kanal führt dies für alle Werte von M zu einer gegen Kanalende immer rascher erfolgenden Druck-, Temperatur- und Geschwindigkeitsabnahme, während zur Erfüllung der Kontinuitätsgleichung sich die Querschnittsfläche immer mehr erweitern muß. Ähnlich beim v = const.-Kanal, nur daß hier wegen konstanter Gasgeschwindigkeit und Temperaturabnahme eine Zunahme der Machzahl auftritt.

Etwas anders ist das Verhalten beim  $F = \text{const.}$ -Kanal. Für  $M = 1$  gibt es wegen (22) keine eindeutige Lösung, im Falle  $M < 1$  findet eine Beschleunigung des Gases statt, während  $P$  und  $T$  rascher als bei den oben erwähnten Kanaltypen abnehmen. Wie aus den Abb. 3 und 4 zu ersehen, treten in diesem Falle ( $M = 1$ ) unendliche Gradienten für die Gasparameter auf, es kommt lokal zu hohen Strom- und Leistungsdichten.

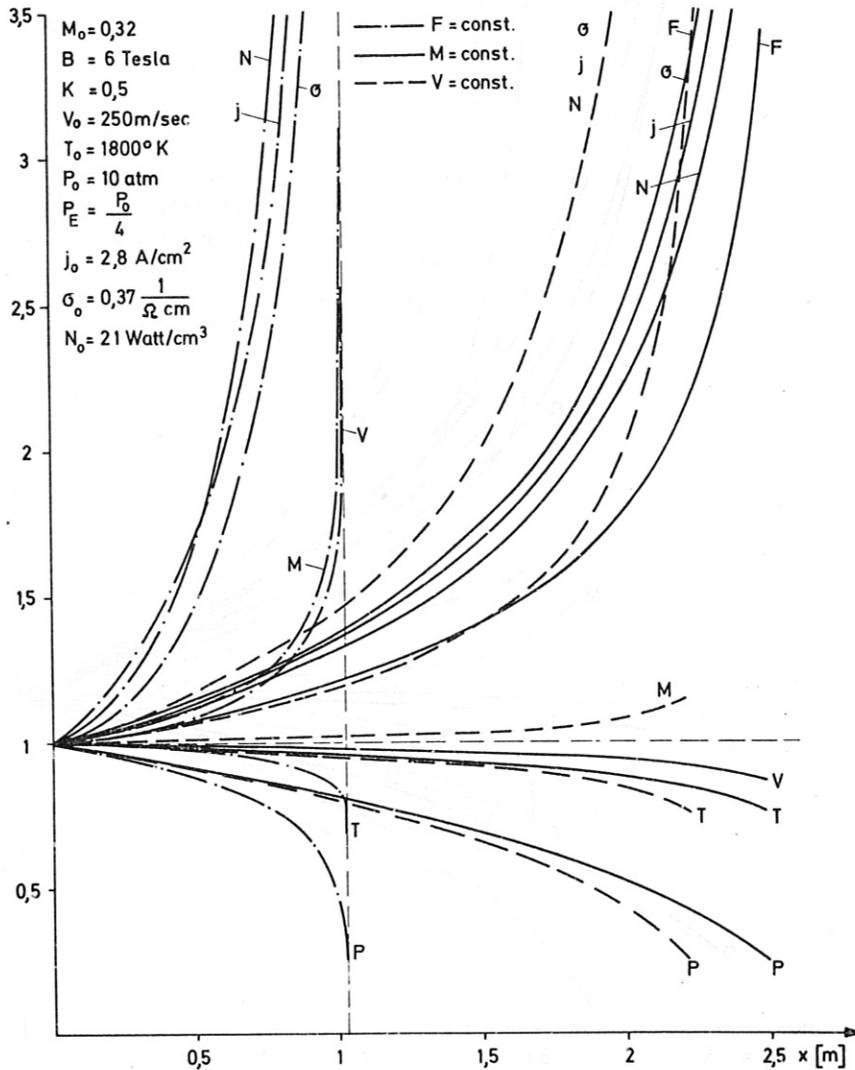


Abb. 3 Generatorparameter als Funktion von der Kanallänge.  $M = 0,32$ . Die eingezeichneten Größen sind mit den Anfangswerten normiert.

Umgekehrt verhält es sich beim Überschallkanal konstanten Querschnitts. Hier geht die elektrische Leistung alleine auf Kosten der Abnahme der kinetischen Energie des Gases, während Druck und Temperatur zunehmen, wobei wiederum mit Erreichen von  $M = 1$  unendliche Gradienten auftreten. Jenseits der  $M = 1$ -Grenzen existieren keine physikalisch sinnvollen Lösungen für die Gasparameter. Wie im Kapitel IV.3 noch näher ausgeführt wird, eignet sich der  $F = \text{const.}$ -Kanal im wesentlichen nur für den Betrieb bei kleinen oder sehr großen Machzahlen, da für das Erreichen hoher Wirkungsgrade das Gas eine möglichst hohe Druckdifferenz oder Geschwindigkeitsdifferenz durchströmen sollte. Von den anderen beiden Kanaltypen ist bei großen Machzahlen der  $M = \text{const.}$ -Generator dem  $v = \text{const.}$ -Generator wegen des günstigeren Wirkungsgrades vorzuziehen (siehe Kapitel IV.3, vgl. auch (30) und (40). Beim  $v = \text{const.}$ -Kanal ergibt sich jedoch infolge der konstanten Geschwindigkeit und  $K = \text{konstant}$  eine konstante Feldstärke entlang des Generators, während diese für den  $M = \text{const.}$ -Generator abnimmt. Damit ist aber auch beim ersteren eine höhere lokale Leistungsdichte verbunden.

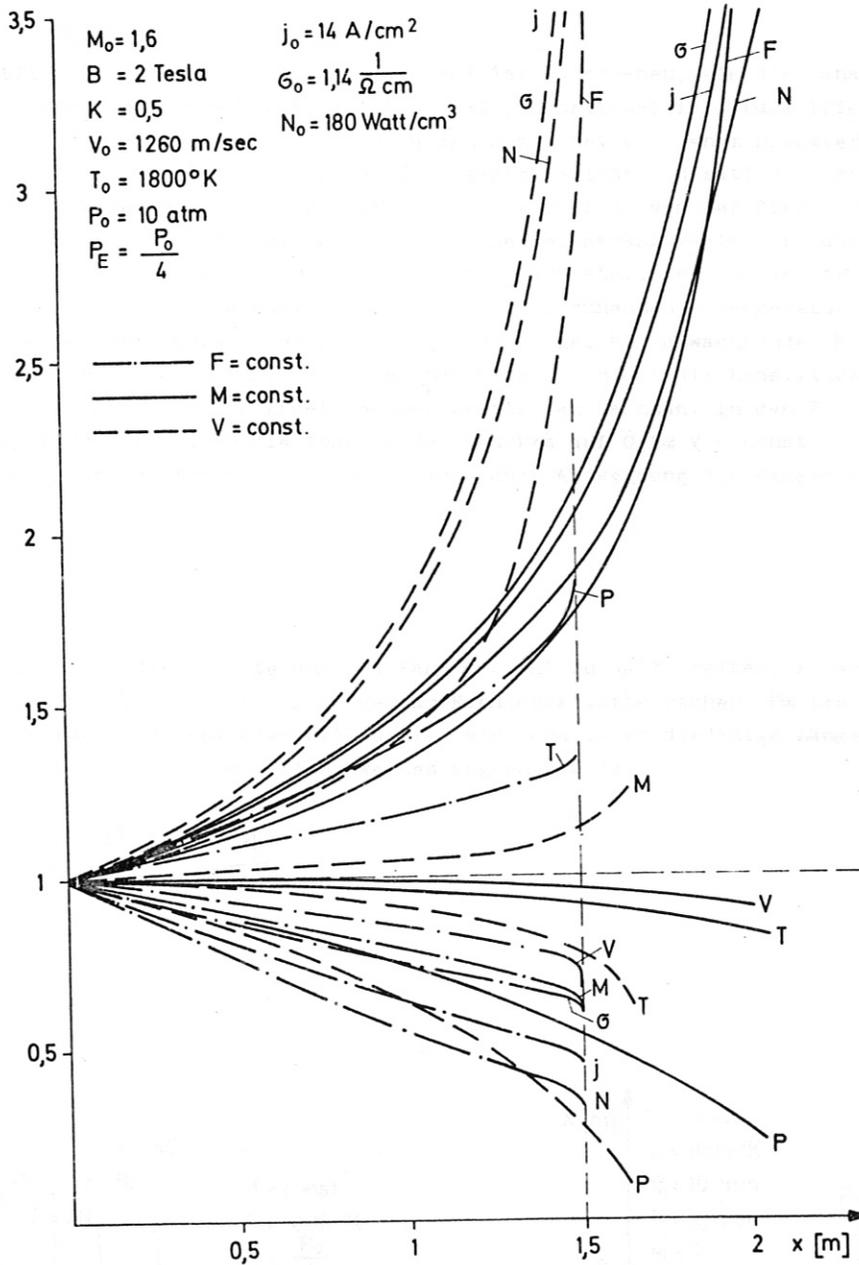


Abb. 4 Generatorparameter als Funktion von der Kanallänge.  $M = 1,6$ . Die eingezeichneten Größen sind mit den Anfangswerten normiert.

Andererseits tritt im  $v = \text{const.}$ -Generator eine raschere Druckabnahme als in Kanälen konstanter Machzahl auf, so daß die gesamte Leistungsabgabe bei gleicher Druckdifferenz beim  $M = \text{const.}$ -Kanal am größten ist. Für kleine Machzahlen sind die abgegebenen Leistungen annähernd gleich.

Wie aus den Abbildungen 3 und 4 ersichtlich, nehmen  $j$ ,  $G$  und die lokale Leistungsdichte im letzten Abschnitt des Kanals erheblich zu. Gleichzeitig ist jedoch auch damit eine Zunahme der Querschnittsfläche verbunden, so daß zum Vermeiden zu großer Kanalöffnungswinkel ein möglichst kleines Verhältnis von der Höhe zur Länge des Kanals gewählt werden muß.

### IV.2 Die Kanallänge

Aus den analytischen Gleichungen (18), (27), (42) ist zu ersehen, wie die Kanallängenkoordinate  $x$  von den übrigen Parametern abhängt.  $x$  ist direkt proportional zur Druckdifferenz und umgekehrt proportional zu  $j$  und  $B$ . Für  $\bar{v} = \text{const.}$  würde man somit bei gegebenem Druckverhältnis  $x \sim 1/B^2$  erwarten, da  $j = \bar{v} \cdot B(1-k)$ . Im Falle der Nichtgleichgewichtszionisation hängt aber die elektrische Leitfähigkeit außer vom Druck und der Gastemperatur auch von der Stromdichte ab, so daß man insgesamt größere Exponenten als 2 für die Magnetfeldabhängigkeit der Kanallänge erhält. Weiters wird die Kanallänge auch durch alle anderen Parameter, welche die Stromdichte beeinflussen, bestimmt. So haben größere Gasgeschwindigkeit oder zunehmende Temperatur bei sonst gleichen Verhältnissen eine Verminderung der Kanallänge zur Folge. Mit anwachsendem Magnetfeld und abnehmendem Lastfaktor steigt die Stromdichte ebenfalls und nimmt die Kanallänge ab. Die maximale Kanallänge ist bedingt durch das Erreichen der kritischen Machzahl in den  $F = \text{const.}$ -Kanälen (vgl. Gleichung (22)) bzw. durch die Abnahme des Druckes auf 0 im  $V = \text{const.}$  und  $M = \text{const.}$ -Kanal. Letztere Bedingung ist gleichbedeutend mit unendlicher Aufweitung der Kanalquerschnittsfläche:

$$\frac{dF}{dx} = \infty \quad (53)$$

In der Praxis wird man die Erweiterung des Kanals nicht zu weit treiben, außerdem müssen noch vernünftige Druck und Temperaturbedingungen am Kanalende vorherrschen. Um bessere Vergleichsmöglichkeiten zu besitzen, sei hier willkürlich als Kanallänge diejenige Länge eingeführt, bei welcher der Gasdruck auf  $1/4$  des Anfangswertes abgesunken ist:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{4} \quad (54)$$

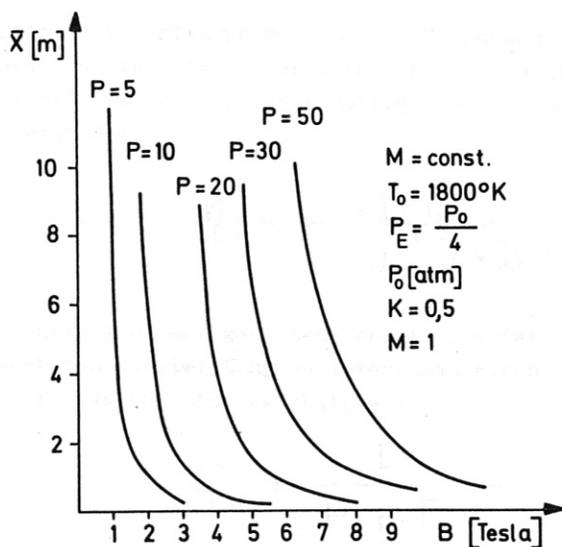


Abb. 5 Kanallänge als Funktion des angelegten Magnetfeldes

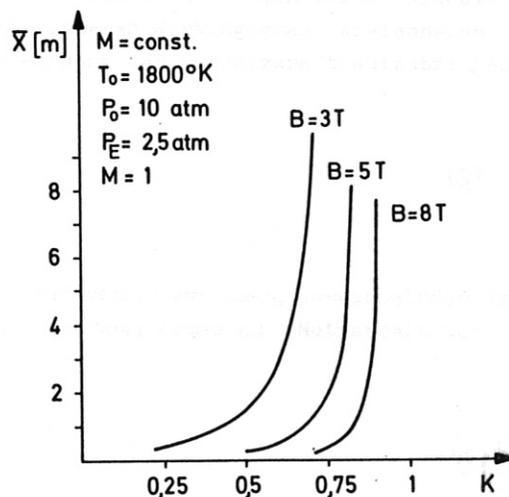


Abb. 6 Kanallänge als Funktion des Lastfaktors

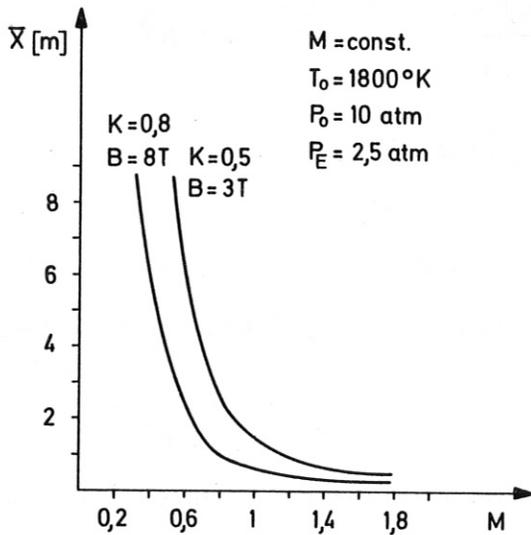


Abb. 7 Kanallänge als Funktion der Machzahl

In den Abb. 5, 6 und 7 ist als Beispiel für den  $M = \text{const.}$ -Kanal die durch (54) definierte Kanallänge in Abhängigkeit von  $M$ ,  $K$  und  $B$  aufgetragen. Die nicht variierten Parameter betragen:  $P_0 = 10 \text{ atm}$ ,  $T_0 = 1800^\circ\text{K}$ ,  $M = 1$ ,  $v_0 = 787 \text{ m/sec}$ ,  $K = 0,5$ ; Argon-Kalium-Gemisch, Saatzusatz: 0,1 %. Die Tendenzen für die Beeinflussung der Kanallänge sind bei den anderen Kanälen (mit Ausnahme des  $F = \text{const.}$  Falles bei Überschallbetrieb) ähnlich.

#### IV.3 Der Wirkungsgrad

Bei energieumwandelnden Maschinen spielt die Frage nach dem Wirkungsgrad eine bedeutende Rolle zur Beurteilung der ökonomischen Anwendung derartiger Anlagen. Aus diesem Grunde existieren auch eine Reihe von verschiedenen definierten Wirkungsgraden (siehe Referenz /1/), je nachdem, von welchem Gesichtspunkt

aus man die betreffende Maschine betrachtet und für welchen Zweck sie Verwendung finden soll. Da der MHD-Generator als Kombination einer Strömungsmaschine (entsprechend z.B. einer Gasturbine) und eines elektrischen Generators betrachtet werden kann, sind betreffs des Wirkungsgrades sowohl elektrische wie auch thermodynamische Definitionen sinnvoll.

So läßt sich ähnlich wie bei der Dynamomaschine ein Lastfaktor  $K$  wie folgt definieren:

$$K = \frac{U_{kl}}{v \cdot B \cdot a} \quad (9')$$

Verhältnis von Klemmenspannung zur Urspannung des Generators. Für ideal segmentierte Faraday-Generatoren ist dieses Verhältnis aber auch gleich dem als inneren Wirkungsgrad bezeichneten Quotienten aus elektrischer Nutzleistung und der zur Überwindung der Lorentzkraft aufzubringenden Leistung:

$$\eta_i = - \frac{\overline{j \cdot E}}{\overline{j (\vec{v} \times \vec{B})}} = K \quad (9)$$

Zur Beurteilung des gesamten Energiebedarfes im Vergleich zur von einem energieumwandelnden System abgegebenen Nutzleistung definiert man einen sogenannten Ausbeutewirkungsgrad (Nutzarbeit normiert mit der lokalen Anfangsenthalpie):

$$\eta_A = \frac{L}{H_0 \rho_0 F_0 v_0} \quad (52)$$

Dieser Wirkungsgrad dient sowohl zur Beschreibung von geschlossenen thermodynamischen Prozessen wie es der integrierte Kreislauf einer Kraftwerksanlage bestehend aus Reaktor, Düse, MHD-Generator, Diffusor, Gasturbine, Wärmetauscher und Kompressor darstellt, wie auch zur Beschreibung der Effektivität einzelner Komponenten dieses Systems, z.B. hier des MHD-Generators, für welchen sich folgende Beziehung ergibt:

$$\eta_A = \frac{\int \vec{j} \cdot \vec{E} dV}{\frac{5}{2} P_0 v_0 F_0 + \frac{1}{2} \rho_0 v_0^3 F_0} \quad (55)$$

$$\eta_A = \frac{\int p \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} v^2 + h \right) dx}{\rho_0 v_0 F_0 \left( \frac{1}{2} v_0^2 + h_0 \right)} = \frac{\Delta \left( \frac{1}{2} v^2 + h \right)}{\frac{1}{2} v_0^2 + h_0}$$

$$\eta_A = \frac{T_{0stag} - T_{1stag}}{T_{0stag}} \tag{56}$$

mit  $T_{0stag} = T \left[ 1 + \frac{1}{2} (\kappa - 1) M^2 \right]$  (57)

Somit erhält man für den Kanal konstanter Machzahl, wenn  $T_0$  und  $T_1$  den Anfangs- bzw. Endwert der Temperatur bedeuten:

$$\eta_{A, M=const.} = \frac{T_0 - T_1}{T_0} = 1 - \left\{ \frac{P_1}{P_0} \right\}^{\frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{\kappa}{\left[ 1 + \frac{1}{2} (1-\kappa) (\kappa-1) M^2 \right]}} \tag{58}$$

und für den Kanal konstanter Geschwindigkeit:

$$\eta_{A, v=const.} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} (\kappa-1) M_0^2} \cdot \frac{T_0 - T_1}{T_0} = \frac{1 - \left\{ \frac{P_1}{P_0} \right\}^{\frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \kappa}}{1 + \frac{1}{2} (\kappa-1) M_0^2} \tag{59}$$

Für den Fall  $F = const.$  ergibt sich:

$$\eta_{A, F=const.} = 1 - \frac{T_1 \left( M_1^2 \frac{\kappa-1}{2} + 1 \right)}{T_0 \left( M_0^2 \frac{\kappa-1}{2} + 1 \right)} = 1 - \frac{P_1^2 M_1^2 \left( M_1^2 \frac{\kappa-1}{2} + 1 \right)}{P_0^2 M_0^2 \left( M_0^2 \frac{\kappa-1}{2} + 1 \right)} \tag{60}$$

In den Abb. 8, 10 und 11 ist der Wirkungsgrad als Funktion der Anfangsmachzahl des Lastfaktors für die verschiedenen Generatortypen für ein gegebenes Druckverhältnis  $P_E/P_0 = 1/4$  dargestellt.

a) Konstante Machzahl

$\eta_A$  nimmt mit größer werdender Machzahl ab und geht für  $M \rightarrow \infty$  gegen 0. Mit zunehmendem Lastfaktor  $K$  wächst  $\eta_A$  und nimmt für  $K = 1$  für alle  $M$  den Wert  $\eta_A = 1 - \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$  an.

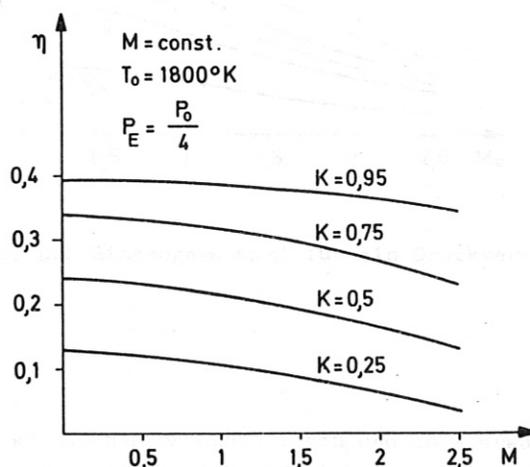
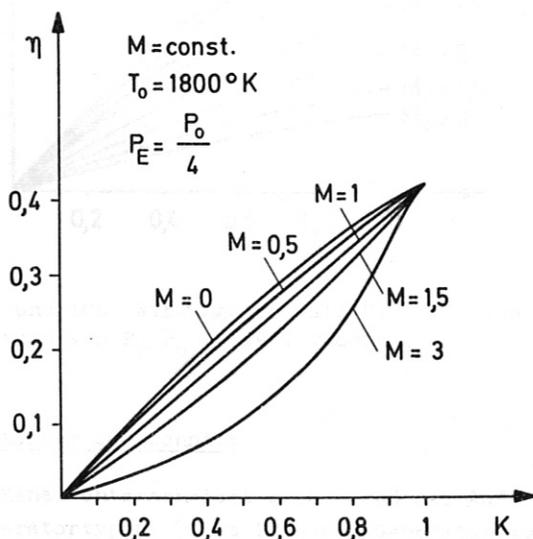


Abb. 8a und 8b Wirkungsgrad als Funktion von Lastfaktor und Eingangsmachzahl für ein Druckverhältnis von  $P_E/P_0 = 1/4$ ;  $M = const.$

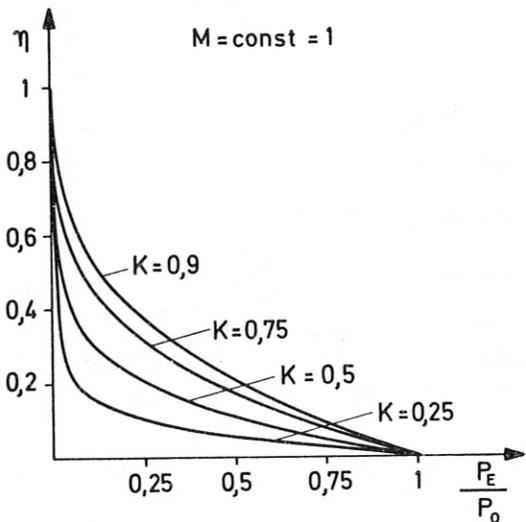


Abb. 9 Wirkungsgrad in Abhängigkeit des Verhältnisses von Eingangs- zu Enddruck für einen  $M = \text{const.}$ -Kanal

Weiters zeigt die Abb. 9 den Verlauf des Wirkungsgrades bei  $M = 1$  in der Abhängigkeit vom Verhältnis des Enddruckes zum Anfangsdruck für verschiedene Werte von  $K$ , wobei wegen der Vernachlässigung von Energieverlusten  $\eta_A$  für große Druckdifferenzen gegen 1 strebt.

b) Konstante Geschwindigkeit (siehe Abb. 10a und 10b)

In diesem Fall erreicht  $\eta_A$  nur für  $M_0 = 0$  denselben Wert wie beim  $M = \text{const.}$ -Generator, während für alle endlichen Machzahlwerte der Wirkungsgrad niedriger als bei gleichem Druckverhältnis im  $M = \text{const.}$ -Generator ist. Der Unterschied ist jedoch bei kleinen Machzahlen nicht sehr groß und die Tendenzen für die  $K$ - und  $M$ -Abhängigkeit des Wirkungsgrades sind in beiden Kanälen ähnlich.

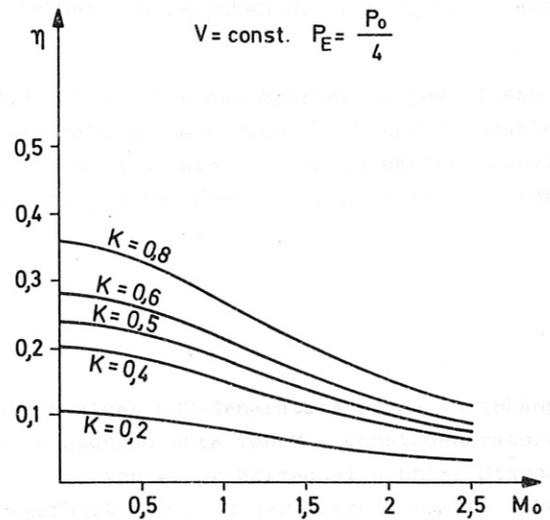
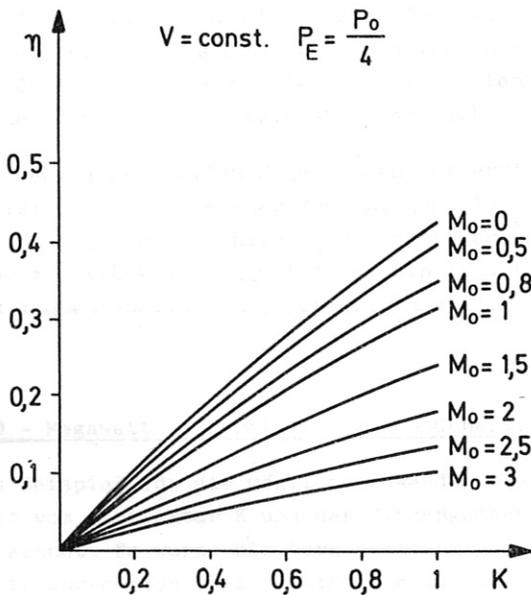


Abb. 10a und 10b Wirkungsgrad als Funktion von Lastfaktor und Eingangsmachzahl für ein Druckverhältnis von  $P_E/P_0 = 1/4$  ;  $v = \text{const.}$

c) Konstanter Querschnitt

Dieser Kanal unterscheidet sich durch das Auftreten der kritischen Machzahl 1 von den oben erwähnten Generatortypen. Da es in einem Generator konstanten Querschnitts nicht möglich ist, ausgehend von  $M_0 < 1 M_{kr}$  zu übersteigen bzw. ausgehend von  $M_0 > 1 M_{kr}$  zu unterschreiten, ist durch den Anfangsdruck  $P_0$  und den zu  $M = 1$  gehörenden Enddruck das maximale Druckverhältnis festgelegt, d.h. für den Unterschallbereich: je kleiner die Anfangsmachzahl, desto größer ist das erzielbare Druckverhältnis und somit auch der Wirkungsgrad. Gibt man sich ein bestimmtes Druckverhältnis vor, so ist dieses nur unter einer bestimmten Anfangsmachzahl erreichbar (im Fall  $M < 1 = M_{omax} \approx 0.32$ ), während darüberhinaus der Wirkungsgrad durch die kritische Machzahl und den dazugehörigen "kritischen" Druck bestimmt wird. Abb. 11a und 11b zeigen für diesen Kanal den Zusammenhang zwischen  $\eta_A$ ,

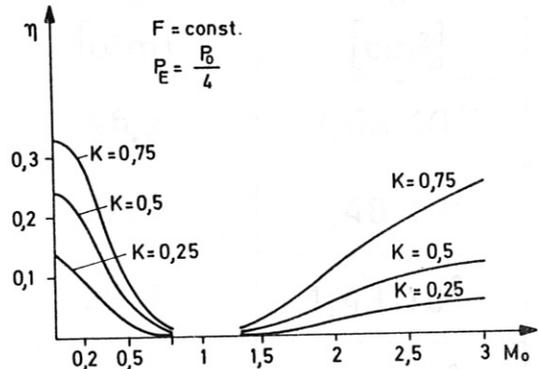
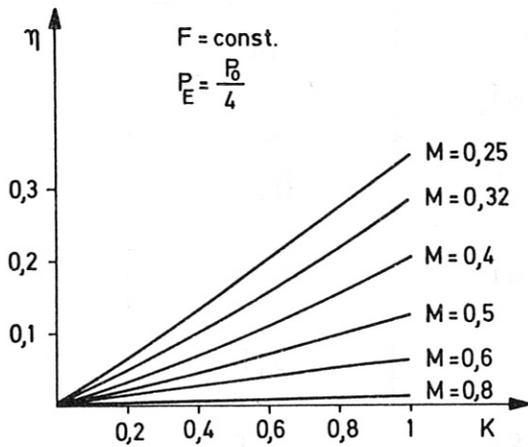


Abb. 11a und 11b Wirkungsgrad als Funktion von Lastfaktor und Eingangsmachzahl für ein Druckverhältnis von  $P_E/P_0 = 1/4$  bzw.  $M_E = 1$ .  $F = \text{const.}$

$M_0$  und  $K$ . Im Unterschallfall sind die Tendenzen ähnlich wie für die beiden anderen beschriebenen Kanaltypen, die erreichbaren Wirkungsgrade sind allerdings wesentlich niedriger, nehmen ab  $M_0 = 0,5$  stark ab und sind ab  $M_0 = 0,8$  praktisch Null. Im Überschallfall nimmt  $\eta_H$  hingegen mit steigendem  $M_0$  wieder zu und übertrifft ab  $M_0 \approx 3$  sogar die in den divergierenden Kanälen erreichten Werte. In diesem Falle  $M_0 > 1$  nimmt die Enthalpie des Gases zu, so daß dieser Energieaufwand wie auch die abgeführte elektrische Nutzarbeit auf Kosten der bei hohen Machzahlen allerdings recht beträchtlichen Änderung der kinetischen Energie des Gases geht. Wie aus der Abb. 11 ersichtlich, ist im Bereich zwischen  $0,7 < M_0 < 1,3$  praktisch keine nennenswerte Nutzleistung erzielbar.

Aus den dargestellten Ergebnissen ist ersichtlich, daß bei den für den Betrieb in geschlossenen Kreisläufen vorgesehenen MHD-Anlagen mit ihren, aus Temperaturgründen nicht zu hohen Machzahlen, nur divergierende Kanäle in Betracht kommen. Dabei ist  $K$  so groß wie möglich zu wählen, wobei aber zu berücksichtigen ist, wie in IV,2 bereits erwähnt, daß für  $K \rightarrow 1$  sehr hohe Magnetfelder und große Kanallängen erforderlich sind.

V.100 - Megawatt - Thermisch - MHD - Generator

Als Beispiel für die mögliche Anwendung der Berechnungen eines MHD-Generators wurde in Abhängigkeit vom Lastfaktor  $K$  und der Eingangsmachzahl  $M$  die Leistungsdichte von  $M = \text{const.}$ -Generatoren berechnet. Es wurde die Voraussetzung gemacht, daß dem Gas von einer Wärmequelle unter Stagnationsbedingungen eine totale Enthalpie von 100 Megawatt zugeführt wird; in der Folge wird das Arbeitsmittel durch eine Düse auf die Eingangsbedingungen des MHD-Generators gebracht, wobei adiabatische Entspannung angenommen wird. Der statische Druck und die statische Temperatur am Eingang des Generators hängen von den Stagnationsbedingungen und der Eingangsmachzahl ab:

$$P_0 = \frac{P_{\text{stagn.}}}{\left(1 + \frac{M_0^2}{2} (\gamma - 1)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}} \quad T_0 = \frac{T_{\text{stagn.}}}{\left(1 + \frac{M_0^2}{2} (\gamma - 1)\right)} \quad (61)$$

Folgende Anfangsbedingungen wurden gewählt:

$P_{\text{stagn.}} = 60 \text{ atm}$ ,  $T_{\text{stagn.}} = 2000 \text{ }^\circ\text{K}$ . Der Stagnationsenddruck des Kanals beträgt 15 atm. Die Werte der Eingangsparameter sind der Tabelle 1 zu entnehmen.

M	$T_0$ [°K]	$P_0$ [atm]	$F_0$ [cm <sup>2</sup> ]
0,6	1785	45,2	$1,68 \cdot 10^2$
0,8	1648	37,0	$1,48 \cdot 10^2$
1,0	1503	29,7	$1,43 \cdot 10^2$
1,2	1389	24,1	$1,39 \cdot 10^2$
1,4	1209	17,1	$1,57 \cdot 10^2$
1,6	1079	12,8	$1,72 \cdot 10^2$
1,8	961	9,61	$1,93 \cdot 10^2$

Tabelle 1 Eingangsparmeter für einen MHD-Generator bei adiabatischer Entspannung eines Argon-Kaliumgemisches für folgende Stagnationsbedingungen:  $T_{stag} = 2000^\circ K$ ,  $P_{stag} = 60 \text{ atm}$ , thermische Leistung 100 MW.

Da die Wirkungsgrade als Funktion von M und K bereits bekannt sind (vgl. Abb. 8a und 8b), bleibt nur noch die Frage zu klären, welche Magnetfelder jeweils nötig sind, um unter den verschiedenen Bedingungen vernünftige Leistungsdichten zu erzielen. (Verlustmechanismen und Relaxationseffekte sind wie immer hier vernachlässigt). Und zwar wurden die für einen zwei Meter langen Kanal konstanter Machzahl erforderlichen Magnetfeldstärken in Abhängigkeit der Machzahl berechnet. Die Ergebnisse sind in der Abb. 12 zusammengestellt.

Als Parameter ist der Lastfaktor zwischen 0,5 und 0,85 aufgetragen. Die strichlierten Linien sind Kurven gleichen Wirkungsgrades. Ebenfalls wurde als vorläufige Grenze für die praktisch anwendbaren Magnetfeldstärken bei  $B = 8$  Tesla eine Markierungslinie gezogen. Oberhalb von  $K = 0,85$  steigt das für ein gewünschtes Druckverhältnis erforderliche Magnetfeld sehr stark an (infolge des hohen Lastfaktors wird nur geringe Stromdichte erreicht), so daß  $K = 0,85$  als obere Grenze für den Lastfaktor betrachtet werden kann.

Um möglichst hohen Wirkungsgrad zu erreichen, ist also mit möglichst großem Lastfaktor zu operieren. Das bedingt aber andererseits eine hohe  $v \times B$ -EMK, so daß große Eingangsmachzahlen und hohe Magnetfeldstärken erforderlich sind. Große Eingangsmachzahlen sind jedoch mit starker Gasabkühlung verbunden, so daß für den praktischen MHD-Betrieb unter den gegebenen Verhältnissen  $M_0 \approx 2$  als Maximum angesehen werden kann (vgl. Tabelle 1). Zieht man alle diese Erwägungen in Betracht, so erhält man für die Machzahl 1,8 und dem Lastfaktor 0,8 bei einem Magnetfeld von 8 Tesla einen Wirkungsgrad von 31 % für einen zwei Meter langen divergierenden MHD-Kanal mit einem Argon-Kalium-Gemisch. Dieser relativ große Wirkungsgrad ist unter den gegebenen Bedingungen als der ideale Ausbeute-Wirkungsgrad des MHD-Generators anzusehen. Da Relaxationseffekte, der bei hohen Magnetfeldern eventuell große Einfluß der Instabilitäten, Kathoden und Segmentierungseffekte, sowie thermische Verluste und Reibung nicht berücksichtigt sind, kann dieser Wirkungsgrad im praktischen Betrieb eine beträchtliche Reduzierung erfahren. Um in diesem Falle dennoch hohe Leistungsdichten zu erreichen, werden weitaus höhere Magnetfelder als die aus der Abb. 12 ersichtlichen erforderlich sein.

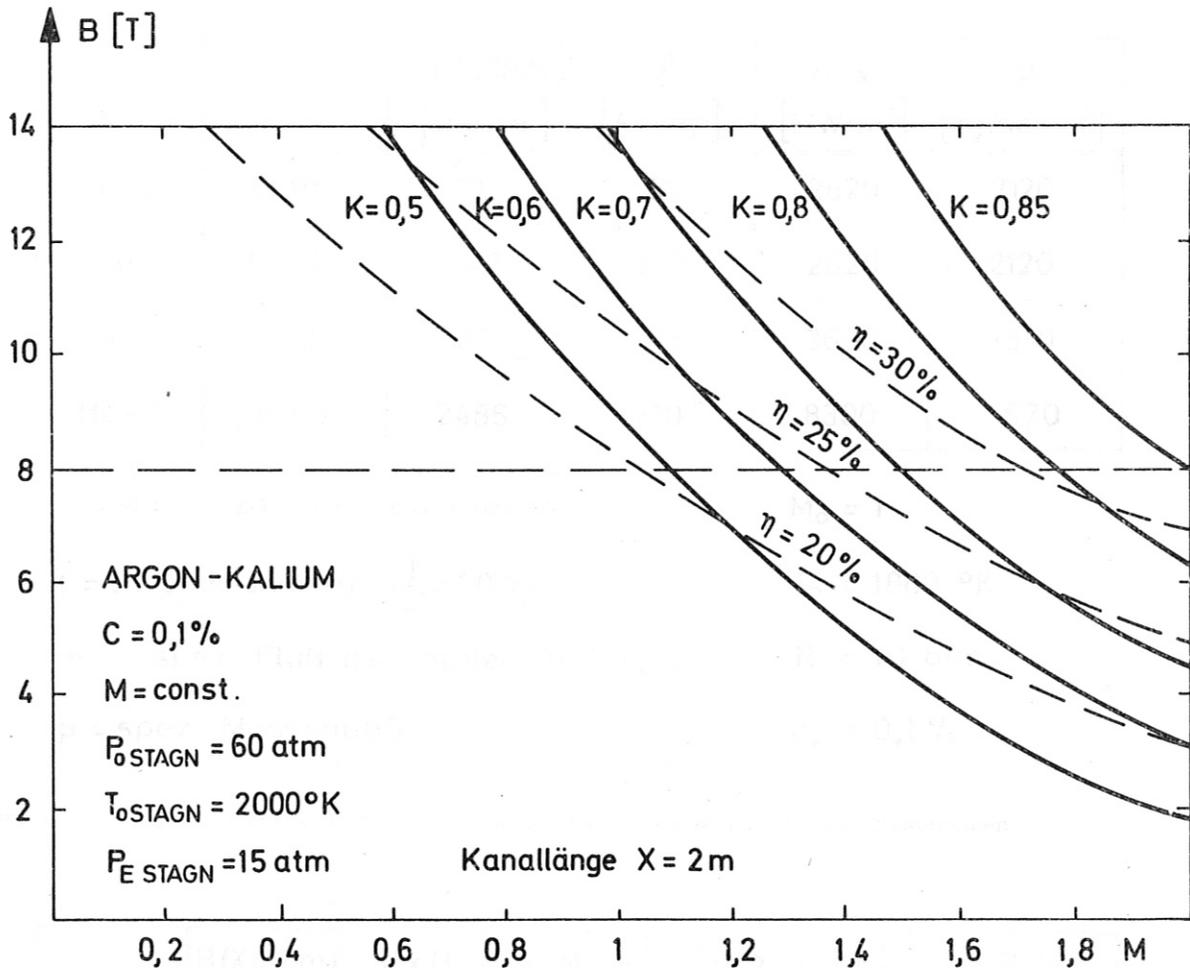


Abb. 12 Zusammenhang zwischen erforderlichem Magnetfeld, Machzahl und Lastfaktor für einen 2 m langen  $M = \text{const.}$  MHD-Generator mit 100 MW thermischer Leistung bei einem Druckverhältnis von  $P_E/P_0 = 1/4$ . Der resultierende Wirkungsgrad ist strichliert eingezeichnet.

### VI. Vergleich verschiedener Gasmischungen

Da die vorstehend gezeigten Berechnungen für alle Edelgas-Alkalimischungen, wie auch für Mischungen von Edelgasen untereinander anzuwenden sind, können auch Optimierungen in Hinsicht auf die geeignetste Gasmischung durchgeführt werden. Zwar ist die Frage nach der Leitfähigkeit verschiedener Gemische getrennt von den Berechnungen der Änderung der Gasparameter in MHD-Generatoren bereits vielfach behandelt worden, doch können nun auch Aussagen über die zum Erzielen bestimmter Leistungsdichten benötigten Magnetfeldstärken gemacht werden. Außerdem ist nicht nur die elektrische Leitfähigkeit, sondern da  $N \sim \sqrt{v} \cdot B^2$ , auch die beim Vergleich derselben Machzahlen unterschiedliche Gasgeschwindigkeit von Bedeutung, welche für die Edelgase Argon, Neon und Helium den umgekehrten Trend wie die Leitfähigkeit aufweist, so daß die Zunahme von  $\sqrt{v}$  mit steigender Massenzahl teilweise durch die umgekehrt zur Wurzel des Atomgewichtes abnehmende Geschwindigkeit (bei gleichbleibender Temperatur und Machzahl) aufgehoben wird.

Es wurden neben reinem Argon drei Mischungen untersucht, welchen für die Anwendung besondere Bedeutung zukommt: Ar - K, Ne - Cs, und He-Cs. Das Mischungsverhältnis beträgt jeweils 0,1 %,  $T_0 = 1800^\circ\text{K}$ ,  $P_0 = 10 \text{ atm}$ ,  $M_0 = 1$ ,  $K = 0,5$ , der Enddruck  $P_e$  wurde mit 2,5 atm festgelegt, so daß der Wirkungsgrad 21,7% beträgt. Verschiedene Daten der Mischungen wie Atomgewicht, Schallgeschwindigkeit, der spezifische Enthalpiefluß und der Massenfluß sind der Tabelle 2 zu entnehmen.

	A	c (T=1800) [m/sec]	j' [A/cm <sup>2</sup> ]	H·v [MW/m <sup>2</sup> ]	μ [kg/sec m <sup>2</sup> ]
Ar - K	39,944	787	50	2620	2120
Ar	39,944	787	10 <sup>-2</sup>	2620	2120
Ne - Cs	20,183	1107	45	3690	1510
He - Cs	4,003	2486	~10 <sup>-3</sup>	8300	670

A = Massenzahl des Edelgases

M<sub>0</sub> = 1

j' = Stromstärke für  $\frac{j'}{\sigma} = 20 \text{ V/cm}$

T<sub>0</sub> = 1800 °K

H·v = spez. Fluß der totalen Enthalpie

P<sub>0</sub> = 10 atm

μ = spez. Massenfluß

c<sub>K</sub> = 0,1 %

Tabelle 2 Vergleich verschiedener Eigenschaften von Edelgas-Alkali-Mischungen

	B(X=2m) [Tesla]	c x B [V/m]	N [MW/m <sup>3</sup> ]	<σ> [1/Ω cm]	F' <sub>0</sub> [cm <sup>2</sup> ]	B·V [Teslaliter]
Ar - K	2,3	1810	195	2,22	38,1	24
Ar	9,5	7476	195	0,15	38,1	103
Ne - Cs	2,6	2878	270	1,21	27,1	20
He - Cs	8	19,888	590	0,06	12	27

N = Leistungsdichte

F'<sub>0</sub> = Kanalfläche für Enthalpiefluß von 100 MW

T<sub>0</sub> = 1800 °K

M = const = 1

P<sub>0</sub> = 10 atm

c<sub>K</sub> = 0,1%

P<sub>E</sub> = 2,5 atm

Kanallänge: 2 m

Tabelle 3 Vergleich verschiedener Alkali-Edelgasmischungen für einen M = const. = 1 -MHD-Generator mit 100 Megawatt thermischer Leistung. <σ> ist der über den gesamten Kanal gemittelte Wert der elektrischen Leitfähigkeit. (K = 0,5, η<sub>A</sub> = 21,7 %).

Weiters ist daraus als Maß für die Leitfähigkeit jene Stromstärke zu ersehen, welche man bei einer Feldstärke von  $J/\sigma = 20 \text{ V/cm}$  erhält. Zum besseren Vergleich der verschiedenen Gasgemische wurde ferner noch dasjenige Magnetfeld berechnet, welches notwendig ist, um die obenstehend vorgegebenen Bedingungen in einen 2 m langen Kanal zu erfüllen. Die Ergebnisse gehen aus Tabelle 3 hervor. In der zweiten Spalte steht die für den bei Schallgeschwindigkeit betriebenen MHD-Generator aufzuwendende Magnetfeldstärke, in der dritten Spalte ist die für  $M = 1$  resultierende  $v \times B$ -EMK eingetragen. Es folgen die mittlere Leistungsdichte und die über den gesamten Kanal gemittelte elektrische Leitfähigkeit. Die sechste Spalte gibt Auskunft über die Größe der Querschnittsfläche am Kanalbeginn, wenn man einen Fluß der totalen Enthalpie von 100 MW zugrunde legt. In der letzten Spalte steht schließlich das Produkt aus Kanalvolumen und Magnetfeld ausgedrückt in Teslaliter.

Man erkennt, daß die Medien mit der besten Leitfähigkeit nicht unmittelbar die vorteilhaftesten sein müssen. Ein Vergleich zwischen dem schwereren Argon-Kalium und den leichteren Ne-Cs- und He-CS-Gemischen macht deutlich, daß infolge der bei den letzteren höheren Schallgeschwindigkeiten durchaus erträgliche Magnetfeldstärken bei kleinerer Querschnittsfläche auftreten können, so daß das als Maß für den Preis des Magneten anzusehende Produkt aus  $B$  und  $V$  bei allen drei Gemischen annähernd gleich ist. Ne-Cs erweist sich unter dieser Betrachtungsweise als am günstigsten. Da im praktischen Betrieb, wie bereits erwähnt, wegen der Einwirkung von Verlustmechanismen die anzuwendenden Magnetfelder beträchtlich höher sein können, ist es möglich, daß man in absehbarer Zukunft für He-Cs auch bei dem hier relativ niedrig angenommenen Druckbereich keine ausreichenden Magnetfeldstärken erreichen wird.

Am schlechtesten schneidet unter diesen Verhältnissen reines Argon ab, welches infolge seiner relativ geringen Enthalpieflußdichte (niedrige Schallgeschwindigkeit) und schlechter elektrischer Leitfähigkeit ein um den Faktor 4-5 größeres Teslavolumen erfordert. Mischungen reiner Edelgase wie z.B. Argon-Krypton bieten die Möglichkeit, die Leitfähigkeit zu verbessern und somit das Teslavolumen zu verkleinern.

Die Gemische Argon-Kalium (und natürlich auch Argon-Cäsium) und Neon-Cäsium scheinen die günstigsten Alkali-Edelgasmischungen für die Anwendung in großen MHD-Kraftwerken zu sein. Offen bleibt zunächst noch die Frage über die Einwirkung der Verlustmechanismen, insbesondere der Einfluß der Ionisationsinstabilitäten auf die effektive Leitfähigkeit.

Es wird Ziel einer nächsten Arbeit sein, diese zu berücksichtigen, um die Auslegung von MHD-Generatoren mit Hilfe der dargelegten Methode den experimentellen Gegebenheiten besser anzupassen. Die Tendenzen des gasdynamischen Verhaltens sowie der Einfluß der Kanalgeometrie auf die Betriebsweise von MHD-Generatoren lassen sich jedoch bereits aus diesem idealisierten MHD-Generatormodell erkennen.

## VII. Zusammenfassung

Die Änderungen der Gasparameter von MHD-Generatoren lassen sich für die verschiedenen Typen (konstanter Querschnitt, konstante Geschwindigkeit, konstante Machzahl) in einfacher analytischer Form darstellen, wenn man die Stromdichte, den Lastfaktor und das Magnetfeld als Konstante betrachtet. Die für diese Bedingungen abgeleiteten magnetogasdynamischen Gleichungen wurden auf differentielle Längenschnitte angewendet und mit Hilfe eines numerischen Rechenverfahrens über die Kanallänge integriert. Dabei wurde eine homogene, eindimensionale Plasmaströmung in einem unendlich segmentierten Faraday-MHD-Generator angenommen. Verlustmechanismen wie Wärmeverluste, Relaxations-, Grenzschicht- und Segmentierungseffekte sowie der Einfluß von Instabilitäten wurden nicht berücksichtigt.

Die Rechnungen wurden auf Alkali-Edelgasgemische angewendet unter Berücksichtigung der Möglichkeit starker Elektronentemperaturerhöhung und somit einer starken Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von der Stromdichte. Man findet eine beträchtliche Zunahme der Leistungsdichte entlang

des Kanals, und zwar kann diese je nach Anfangsbedingungen für eine Druckabnahme auf ein Viertel des Anfangsdruckes den Faktor 10 und mehr betragen.

Die Auskopplung elektrischer Energie geht auf Kosten der Summe aus Enthalpie und kinetischer Energie des Gases. Dies führt in den divergierenden Kanälen ( $M = \text{const.}$  und  $v = \text{const.}$ ) sowie im unterschallbetriebenem  $F = \text{const.}$ -Generator zur Druck- und Temperaturabnahme. Die kinetische Energie des Gases nimmt im  $M = \text{const.}$  Kanal ab, während sie im Kanal konstanter Querschnittsfläche für  $M < 1$  bis zum Erreichen der Schallgeschwindigkeit zunimmt.

Bei einem gegebenen Druckverhältnis zwischen Eingang und Ausgang des Generators ändert sich die Kanallänge nicht wie für  $\zeta = \text{const.}$  erwartet, proportional zu  $B^2$ , sondern wegen des starken Einflusses der Nichtgleichgewichtsionisation mit einem Exponenten zwischen 3 und 4.

Um die Effektivität verschiedener Generatoren miteinander zu vergleichen, wurde als Wirkungsgrad das Verhältnis zwischen elektrischer Nutzleistung und der am Kanaleingang vorhandenen totalen Enthalpie eingeführt. Für gegebenes Druckverhältnis zeigen die  $M = \text{const.}$ -Kanäle das günstigste Ergebnis, wenn auch der Unterschied zu den  $v = \text{const.}$ -Generatoren bei kleinen Machzahlen nicht sehr bedeutend ist. Kanäle konstanten Querschnitts sind hingegen für den ökonomischen Betrieb von MHD-Generatoren weniger gut geeignet.

Als Beispiel wurde die Berechnung eines Argon-Kalium-MHD-Generators mit einem Eingangsdruck von  $P_{\text{stag}} = 60 \text{ atm}$  und einem Druckverhältnis von 4 : 1, sowie einer Anfangstemperatur von  $T_{\text{stag}} = 2000 \text{ }^\circ\text{K}$  für  $M = \text{const.}$ -Kanäle durchgeführt. Je nach Lastfaktor und Eingangsmachzahl ergeben sich für eine maximale Magnetfeldstärke von 8 Tesla Wirkungsgrade zwischen 25 und 30 %.

Vergleicht man die Alkali-Edelgasgemische Ar-K und Ne-Cs mit He-Cs und reinem Argongas, so ergibt sich, daß zum Erzielen gleicher Leistungsdichten - gleicher Lastfaktor und gleiche Machzahl vorausgesetzt - in den letzteren etwa 4 mal so hohe Magnetfelder anzuwenden sind als in Ar-K und Ne-Cs-Gemischen. Da Neon als Reaktorkühlmittel dem Argon vorzuziehen ist, verdient dieses Gas trotz des hohen Preises einer eingehenden Prüfung hinsichtlich seiner Verwendung in geschlossenen Kraftwerksanlagen.

Im Zusammenhang mit diesem Bericht danke ich Frl. I. Hanne und Fr. M. Walter für die Programmierarbeiten sowie Herrn Dr. M. Salvat für viele hilfreiche Diskussionen.

Literaturverzeichnis

- /1/ G.W. SUTTON, A. SHERMAN, Engineering Magnetohydrodynamics, McGraw-Hill Book Company, 1965
- /2/ R.S. DEVOTO, Phys. of Fluids, Vol. 10, Nb 2, Feb. 1967, 354 ff. und privat communication
- /3/ C.H. KRUGER, J.R. VIEGAS, "The Influence of the Ramsauer Effect on Nonequilibrium Electron Temperatures", Proc., Vth Conference in Engineering Problems in Magnetohydrodynamics, Boston, Mass. 1964.