Transmission und Reflexion von elektromagnetischen Wellen in inhomogenen Medien

Transmission and Reflection of electromagnetic Waves in inhomogeneous Media

P. Mulser

IPP 3/85 Februar 1969

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Transmission und Reflexion von elektromagnetischen Wellen in inhomogenen Medien

Transmission and Reflection of electromagnetic Waves in inhomogeneous Media

P. Mulser

IPP 3/85 Februar 1969

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 3/85 P. Mulser

Transmission and Reflection of electromagnetic Waves in inhomogeneous Media

February 1969 (in German)

Abstract

The stationary waves equation is split into an equivalent system of two linear first order differential equations which give as solutions the transmitted and reflected waves. When an inhomogeneous medium is embedded in a homogeneous medium, the equations derived are very simple and readily permit numerical computation of the transmitted and reflected intensities. In addition, some basic problems are discussed.

I. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit soll das Problem des Durchgangs und der Reflexion von elektromagnetischen Wellen in beliebig inhomogenen Medien endlicher Ausdehnung allgemeiner untersucht werden. Wir beschränken uns dabei auf den eindimensionalen Fall, d.h. alle in Frage kommenden Größen sollen nur von einer Ortskoordinate (x-Koordinate) abhängen:

Die Wellengleichung für das elektromagnetische Feld

$$\Delta \mathcal{E} - \text{grad div}\, \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (1)$$

reduziert sich dann für ebene transversale Wellen auf die stationäre Wellengleichung

$$\mathcal{E}'' + k^2 n^2 (x) \mathcal{E} = 0 , \quad (2)$$

falls die Zeitabhängigkeit von $\mathcal{E}$ durch den Faktor $e^{-i\omega t}$ gegeben ist und für die Stromdichte ein linearer Zusammenhang besteht: $\vec{j} = \sigma(x)\cdot \mathcal{E}$. In Gl. (2) bedeuten dabei: $\mathcal{E}''$ die zweite örtliche Ableitung von $\mathcal{E}$, $\vec{k}$ den Wellenvektor $(\frac{\vec{\omega}}{c})$ im Vakuum und $n(x)$ eine im allgemeinen komplexe Ortsfunktion, die wir als überall stetig voraussetzen wollen. Nur im Falle schwacher Ortsabhängigkeit und in einigen Spezialfällen kann $n(x)$ als Brechungsindex im Sinne der Optik gedeutet werden. Im folgenden soll jedoch der Bequemlichkeit halber $n(x)$ immer als Brechungsindex bezeichnet werden.

Wir können nun setzen

$$\mathcal{E}(x,T) = (0,1,0)\, E(x) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

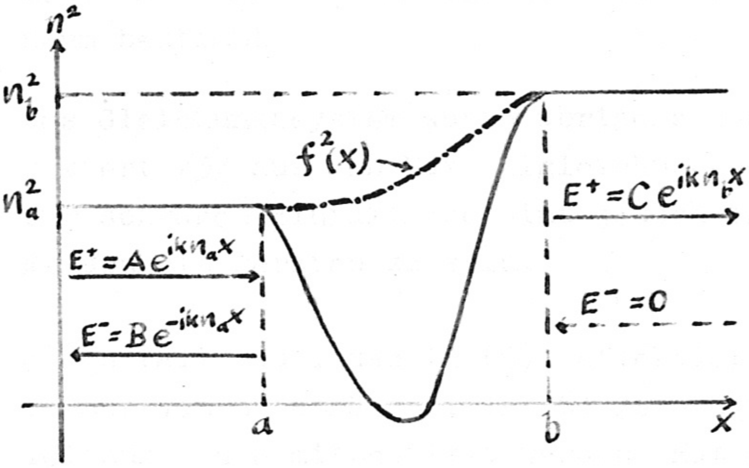
Somit gilt für das Magnetfeld

$$\mathcal{B}(x,t) = -\frac{i}{\omega} (0,0,1) \frac{\partial E}{\partial x} e^{-i\omega t} + \text{grad}\, \varphi(\boldsymbol{r}) \quad (4)$$

mit div grad $\varphi(W) = 0$, ansonsten $\varphi(\omega)$ beliebig. Hier werde jedoch $\varphi(W) \equiv 0$ gesetzt. Bei Beachtung von (3) kann die stationäre Wellengleichung (2) skalar geschrieben werden:

$$E'' + k^2 n^2 (x) E = 0 \tag{5}$$

Wenn nun das elektrische Feld E und seine örtliche Ableitung E' an irgendeiner Stelle x vorgegeben sind, dann ist E(x) auf der ganzen x-Achse eindeutig durch (5) bestimmt. In vielen wichtigen Problemen sind die Randbedingungen jedoch anders gestellt und zwar folgendermaßen (s. Abb. 1):



Vorgegeben ist eine bei $x = a$ in den inhomogenen Bereich einfallende Welle $E^+ = Ae^{ikn_a x}$, gesucht ist die reflektierte Welle $E = Be^{ikn_a x}$ für $x \leq a$ und die bei b aus der inhomogen Schicht austretende Welle $E^+ = Ce^{ikn_b x}$.

Abb. 1

Falls dieses Problem nur numerisch lösbar ist (was meistens der Fall ist, nur in wenigen speziellen Fällen sind analytische Lösungen von (5) bekannt), kann Gl. (5) nicht mehr in dieser Form integriert werden, da $E(x) = E^+(x) + E^-(x)$ und $E'(x)$ an keinem Punkt bekannt sind.

Zur Lösung dieses Problems hat M. Tutter in /1/ und /2/ folgenden Weg eingeschlagen: Der (stetige) Verlauf des Brechungsindexes im inhomogenen Bereich wird durch eine Treppenfunktion angenähert, so daß für das elektrische Feld in der i-ten Schicht gesetzt werden kann:

$$E_i = E_{1,i} e^{ikn_i x} + E_{2,i} e^{-ikn_i x}$$

Aus der Stetigkeitsforderung für E_i und B_i (d.h. nach (4) für E_i') an den Grenzflächen und durch Übergang zum Limes ergibt sich das Gleichungssystem (falls $n'(x)$ existiert):

$$\begin{aligned} E_1' &= ikn(x)\, E_1 - n'(x)/2n(x) \cdot (E_1 - E_2) \\ E_2' &= -ikn(x)\, E_2 + n'(x)/2n(x) \cdot (E_1 - E_2) \end{aligned} \qquad (6)$$

In der numerischen Rechnung geht man nun so vor, daß man mit $E_2(b) = 0$ und $E_1(b) = 1$ bei b beginnt, bis zum Punkt a das System löst und dann E_1 und E_2 auf die vorgegebene einfallende Welle $E^+ = Ae^{ikn_a x}$ normiert. Damit ist $E = E_1 + E_2$ im ganzen Raum bestimmt.

Das Gleichungssystem wurde übrigens zum ersten Mal von P.H. van Cittert /3/ aus den Maxwellgleichungen abgeleitet, und zwar auch für schrägen Einfall, scheint jedoch in der Zwischenzeit in Vergessenheit geraten zu sein.

a) Es fällt auf, daß in (5) reflektierte und transmittierte Welle nur von n^2 abhängen, in (6) jedoch auch noch durch die Ableitung von n mitbestimmt werden. Hat z.B. der Brechungsindex einen Knick, so ist (5) immer noch anwendbar, nicht jedoch das System (6). Dieses ist also mit Gl. (5) nicht gleichwertig.

b) Es erhebt sich die Frage, ob System (6) das einzig mögliche ist,oder gibt es auch weitere, auch solche, die (5) vollständig äquivalent sind?

c) Auch bei stetig differenzierbaren n-Profilen kann (6) eine reflektierte Welle liefern im Widerspruch zu Behauptungen in /5/.

Diese Punkte sollen nun näher untersucht werden.

II. Aufspaltung der Wellengleichung

A. Ein Hilfsatz

$E(x)$ sei eine Lösung der Wellengleichung (5). Wir zerlegen $E(x)$ in eine Summe von zwei Anteilen:

$$E(x) = E^{+}(x) + E^{-}(x)$$

und zwar so, daß E^{+} im homogenen Bereich eine rein vorwärtslaufende und E^{-} eine rein rücklaufende (reflektierte) Welle darstellt. Wir können dann den folgenden Satz formulieren:

Bei Vorgabe der einfallenden Welle E^{+} liefert jedes System S:

$$E^{+'} = f^{+}(n, n', \ldots, E^{+}, E^{-})$$
$$E^{-'} = f^{-}(n, n', \ldots, E^{+}, E^{-})$$

die richtige reflektierte und die richtige transmittierte Welle, wenn die Summe $E = E^{+} + E^{-}$ der Wellengleichung (5) genügt.

Beweis

1) In den homogenen Bereichen $x \leqslant a$ und $x \gg b$ haben alle Lösungen von (5) die Gestalt $E = Ae^{ikn_a x} + Be^{-ikn_a x}$ bzw. $E = Ce^{ikn_b x} + De^{-ikn_b x}$; durch die Randbedingungen für Gl. (5) sind A,B,C,D eindeutig bestimmt.

2) Bei Vorgabe von $E^{+} = Ae^{ikn_a x}$ in $x \leqslant a$ und $E^{-} \equiv 0$ in $x \gg b$ liefert das System S die reflektierte Welle $E^{-} = Be^{-ikn_a x}$ für $x \leqslant a$ und die auslaufende Welle $E^{+} = Ce^{ikn_b x}$ für $x \gg b$. Betrachten wir nun ein zweites System $\hat{S}$

$$\hat{E}^{+'} = \hat{f}^{+}(n, n', \ldots, \hat{E}^{+}, \hat{E}^{-})$$
$$\hat{E}^{-'} = \hat{f}^{-}(n, n', \ldots, \hat{E}^{+}, \hat{E}^{-})$$

mit den im Satz geforderten Eigenschaften ($\hat{E} = \hat{E}^{+} + \hat{E}^{-}$) und setzen wiederum $\hat{E}^+ = Ae^{ikn_a x}$ für $x \leqslant a$ und $\hat{E}^- \equiv 0$ für $x \geqslant b$, dann sind die reflektierte und die transmittierte Welle durch $\hat{E}^- = \hat{B}e^{-ikn_a x}$ und $\hat{E}^+ = \hat{C}e^{ikn_b x}$ gegeben. $\hat{C}$ und C sind verschieden von Null, da sonst wegen der Eindeutigkeit der Lösungen von (5) E und $\hat{E}$ identisch Null sein müßten.

3) Falls $\hat{B} = B$, gilt $\hat{E} = E$ im Bereich $x \leqslant a$ und somit überall, also auch $\hat{C} = C$. Wenn jedoch $\hat{B} \neq B$, so gilt auch $\hat{C} \neq C$.

4) Es muß gelten $\hat{C} = C$, denn Multiplikation von $\hat{E} = \hat{E}^+ + \hat{E}^-$ mit $\alpha = C/\hat{C}$ ergibt wiederum eine Lösung von (5), die für $x \geqslant b$ und somit überall mit E übereinstimmt, also $\alpha\hat{E} = \alpha\hat{E}^+ + \alpha\hat{E}^- = E = E^+ + E^-$; dabei ist $\alpha\hat{E}^+$ für $x \leqslant a$ eine einlaufende Welle und somit gilt wegen 1) $\alpha\hat{E}^+ = E^+ = Ae^{ikn_a x} = \hat{E}^+$ für $x \leqslant a$, also $\alpha = 1$, womit der Satz bewiesen ist.

Nach dem bisher Gesagten ist es leicht zu entscheiden, ob E richtig in E^+ und E^- aufgespalten ist. E^+ und E^- stellen nämlich in den homogenen Bereichen genau dann reine vorwärts- bzw. rückwärtslaufende Wellen dar, wenn sich die Gleichung für E^+ dort auf die Form

$$E^{+\prime} = iknE^+ \tag{7}$$

reduziert.

Das System (6) hat die im Satz geforderten Eigenschaften, denn in den homogenen Bereichen verschwindet n' und außerdem genügt $E = E_1 + E_2$ Gl. (5):

$$E'' = (E_1 + E_2)'' = (E_1' + E_2')' = ik(n(E_1 - E_2))' = -k^2n^2(E_1 + E_2) = - k^2n^2E$$

und liefert somit bei Vorgabe der einlaufenden Welle die richtige reflektierte und transmittierte Welle. Es ist jedoch, wie wir gleich sehen werden, nicht das einzig mögliche System.

B. Systeme zur Berechnung von reflektierter und transmittierter Welle

Zur Auffindung solcher weiterer Systeme mit den im Satz geforderten Eigenschaften bemerken wir, daß die Funktionen

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} e^{ik \int^x f dx} \quad \text{und} \quad v(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} e^{-ik \int^x f dx}$$

zwei linear unabhängige Lösungen von (5) darstellen, wenn der Brechungsindex die Gestalt hat

$$n^2(x) = \hat{n}^2 = f^2 + \frac{1}{2k^2} \left\{ \frac{f''}{f} - \frac{3}{2} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right\}, (f(x) \neq 0) \quad (8)$$

An $f(x)$ stellen wir die einzige Forderung, daß es in den homogenen Bereichen gleich n_a bzw. n_b sein soll (in der inhomogenen Schicht kann $f(x)$ beliebig sein; siehe Abb. 1). Profile mit nach (8) gebildeten Brechungsindizes sind reflexionsfrei ($E^-(x) = 0$ für $x \leqslant a$; a und b können hierbei auch $-\infty$ bzw. $+\infty$ sein. Siehe z.B. /4/, Seite 121).

Wir schreiben (5) in der Form einer inhomogenen Gleichung:

$$E'' + k^2\hat{n}^2 E = k^2 (\hat{n}^2 - n^2) E$$

Dann ist (siehe Anhang):

$$K(\varepsilon, x) = \frac{u(\varepsilon)v(x) - u(x)v(\varepsilon)}{u(\varepsilon)v'(\varepsilon) - u'(\varepsilon)v(\varepsilon)} = \frac{1}{2ik} (u(x)v(\varepsilon) -$$

$$u(\varepsilon)\, v(x))$$

$$\tilde{E}_1(x) = \tilde{A}u(x) + \frac{ik}{2} \cdot \int_a^x (n^2 - \hat{n}^2)\tilde{E}_1 \cdot (u(x)v(\varepsilon) - u(\varepsilon)v(x))d\varepsilon$$

$$\tilde{E}_2(x) = \tilde{B}v(x) + \frac{ik}{2} \cdot \int_a^x (n^2 - \hat{n}^2)\, \tilde{E}_2 \cdot (u(x)v(\varepsilon) - u(\varepsilon)v(x))d\varepsilon$$

$\widetilde{E}_1$ und $\widetilde{E}_2$ erfüllen einzeln die Wellengleichung, also auch die Summe, die zugleich die allgemeine Lösung darstellt:

$$E = \widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2 = u(x)\left\{\widetilde{A} + \frac{ik}{2}\cdot\int_a^x (\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2)\,(n^2 - \hat{n}^2)\, v(\varepsilon)\, d\varepsilon\right\}$$

$$+ v(x)\left\{\widetilde{B} - \frac{ik}{2}\cdot\int_a^x (\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2)(n^2 - \hat{n}^2)\, u(\varepsilon)\, d\varepsilon\right\}$$

Für $x \leq a$ reduziert sich der erste Summand auf $Ae^{ikn_a x}$ und der zweite auf $Be^{-ikn_a x}$, d.h. auf eine einfallende und eine reflektierte Welle ($A = \widetilde{A}/\sqrt{n_a}$, $B = \widetilde{B}/\sqrt{n_a}$); dasselbe gilt mit anderen Amplituden C und D für $x \geq b$, da wegen unserer Forderung an $f(x)$ in diesen Bereichen $\hat{n}^2 = n^2$ wird, und wir sind berechtigt, diese Ausdrücke mit E^+ und E^- zu identifizieren:

$$E^+(x) = u(x)\left\{\widetilde{A} + \frac{ik}{2}\cdot\int_a^x (E^+(\varepsilon) + E^-(\varepsilon))(n^2(\varepsilon) - \hat{n}^2(\varepsilon))\, v(\varepsilon)\, d\varepsilon\right\}$$

$$E^-(x) = v(x)\left\{\widetilde{B} - \frac{ik}{2}\cdot\int_a^x (E^+(\varepsilon) + E^-(\varepsilon))(n^2(\varepsilon) - \hat{n}^2(\varepsilon))\, u(\varepsilon) d\varepsilon\right\} \qquad (9)$$

Differenzieren der Summe $E^+ + E^-$ und der Differenz $E^+ - E^-$ führt zu den Ausdrücken

$$(E^+ + E^-)' = -\frac{f'}{2f}(E^+ + E^-) + ikf\,(E^+ - E^-)$$

$$(E^+ - E^-)' = -\frac{f'}{2f}(E^+ - E^-) + ikf\,(E^+ + E^-) + \frac{ik}{f}(n^2 - \hat{n}^2)\cdot(E^+ + E^-) \qquad (10)$$

Nochmaliges Ableiten der Summe führt auf die Wellengl. (5). Aus (10) ergibt sich das gesuchte System:

$$E^{+'} = (ikf - \frac{f'}{2f}) E^+ + \frac{ik}{2f} (n^2 - \hat{n}^2) (E^+ + E^-)$$

$$E^{-'} = - (ikf + \frac{f'}{2f}) E^- - \frac{ik}{2f} (n^2 - \hat{n}^2) (E^+ + E^-) \tag{11}$$

III. Folgerungen

1. Die Substitution

$$E_1 = \frac{1}{2n} (n + f + \frac{if'}{2kf}) E^+ + \frac{1}{2n} (n - f + \frac{if'}{2kf}) E^-$$

$$E_2 = \frac{1}{2n} (n - f - \frac{if'}{2kf}) E^+ + \frac{1}{2n} (n + f - \frac{if'}{2kf}) E^-$$

führt (11) in (6) über, wie eine einfache Rechnung zeigt. Somit ist erwiesen, daß das System (6) eine unmittelbare Folgerung der Wellengleichung ist. Ferner ersieht man aus den Transformationsformeln, daß in den homogenen Bereichen E_1 und E_2 in E^+ und E^- übergehen, wie es ja nach unserem Satz sein muß. Außerdem läßt sich zeigen, daß es immer ein solches f gibt, daß sich E_1 und E^+ bzw. E_2 und E^- im gesamten Intervall um einen beliebig kleinen Betrag unterscheiden.

2. Wenn der Brechungsindex reell ist, hat (6) die angenehme Eigenschaft, daß der über eine Periode gemittelte Poyntingvektor des Gesamtfeldes gleich der Summe der Poyntingvektoren von E_1 und E_2 ist. Mit (4) gilt nämlich für den zeitgemittelten Poyntingvektor

$$S \sim \overline{Re(\mathcal{E}) \times Re(\mathcal{L})} = \frac{1}{4}\frac{1}{T}\int_0^T (Ee^{-i\omega t} + E^*e^{i\omega t})(Be^{-i\omega t} + B^*e^{i\omega t})dt =$$

$$\frac{1}{4}(E^*B + EB^*) \sim E^*E' - EE^{*\prime}$$

Für $E = E_1 + E_2$ ergibt dies durch Einsetzen der Beziehungen (6)

$$S_E \sim (E_1^* + E_2^*)(ikn(E_1 - E_2)) - (E_1 + E_2)(-ikn(E_1^* - E_2^*)) =$$

$$2ikn(E_1E_1^* - E_2E_2^*)$$

und

$$S_{E_1} + S_{E_2} \sim (E_1^*E_1' - E_1E_1^{*\prime}) + (E_2^*E_2' - E_2E_2^{*\prime}) =$$

$$2ikn\,E_1E_1^* + \frac{n'}{2n}(E_1^*E_2 - E_1E_2^*) - \left(2iknE_2E_2^* + \frac{n'}{2n}(E_1^*E_2 - E_1E_2^*)\right) =$$

$$2ikn(E_1E_1^* - E_2E_2^*) = S_E\,.$$

3. Für die Gültigkeit von (11) wird nur die Stetigkeit von $n^2(x)$ gefordert. Wird nämlich in (11) für $f(x)$ eine von $n(x)$ unabhängige Funktion gewählt (z.B. $f = n_a + (n_b - n_a)\sin^2\left[\frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}\right]$ für $a \leqslant x \leqslant b$ und $f = n_a$ bzw. $f = n_b$ außerhalb), so erscheinen reflektierte und durchtretende Welle in (11) nur von $n^2(x)$ abhängig, nicht jedoch von $n'(x)$, was physikalisch zu erwarten ist, da auch in (5) nur n^2 auftritt. Deshalb und wegen unseres Hilfsatzes ist das System (11) der Wellengleichung vollständig äquivalent.

Nimmt man jedoch zu $f(x)$ die m-te Ableitung von $n(x)$ hinzu, also

$$f_1(x) = f(x) + n^{(m)},$$

dann wird der Eindruck erweckt, daß reflektierte und transmittierte Welle sogar von der (m+1)-ten und (m+2)-ten Ableitung von $n(x)$ abhingen. Man findet denn auch in der Literatur Formeln für die Größe der Reflexion an Stellen, wo der Brechungsindex einen Knick aufweist, d.h. $n'(x)$ unstetig verläuft (s. z.B. /6/, S.191 ff). Solche Formeln sind jedoch mit Vorsicht anzuwenden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Der Brechungsindex sei durch (8) gegeben, wobei für $f(x)$ speziell gesetzt wird:

$$f(x) = cx^2 e^{-|x|} + 1$$

mit $c = \text{const.}$ $n^2(x)$ kann gebildet werden, da erste und zweite Ableitung von f überall existieren:

$$f'(x) = cxe^{-|x|} (2 \mp x) \quad \text{und} \quad f''(x) = ce^{-|x|}(2 \mp 4x + x^2)$$

Dabei ist das obere Vorzeichen für $x \geqslant 0$, das untere für $x \leqslant 0$ zu wählen.

$n^2(x)$ (und folglich auch $n(x)$) hat bei $x = 0$ eine Spitze (Abb. 2), denn rechts- und linksseitige Ableitung von $f''(x)$ an dieser Stelle sind nicht gleich:

$$f'''_{+0}(0) = 2c\lim_{x \downarrow 0}((-x + x^2/2 \mp \ldots)/x - 2e^{-|x|} + xe^{-|x|}/2) = -6c$$

$$f'''_{-0}(0) = 2c\lim_{x \uparrow 0}((x + x^2/2 + \ldots)/x + 2e^{-|x|} + xe^{-|x|}/2) = +6c$$

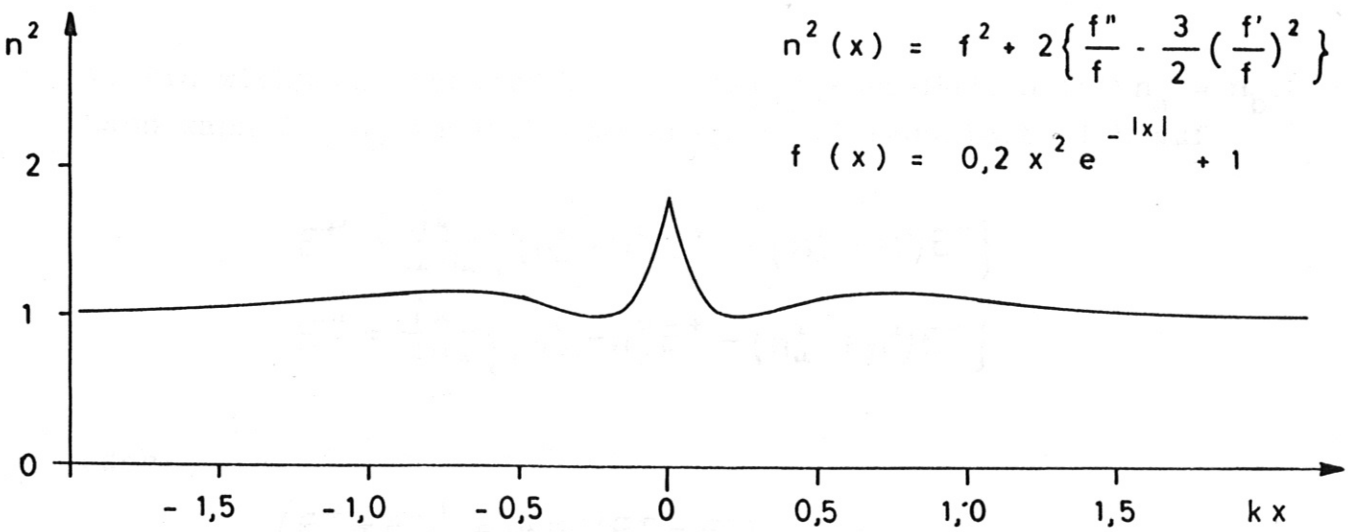
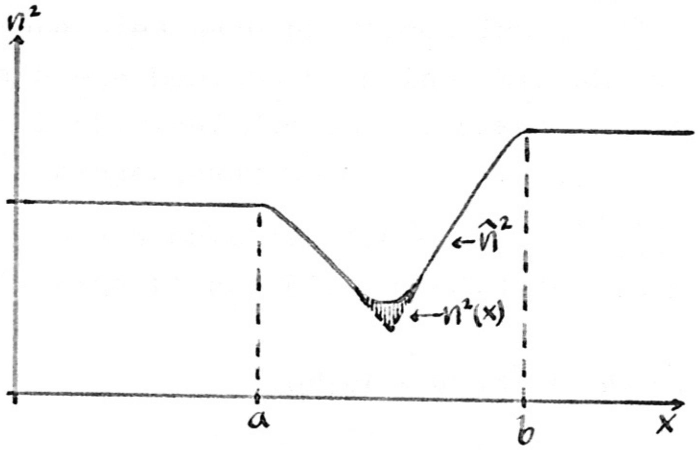


Abb. 2

An allen anderen Stellen ist n(x) regulär und geht für x $\pm\infty$ monoton in n(x) = 1 über. Wir wissen aber, daß für dieses Profil die reflektierte Welle E^- $(-\infty)$ exakt Null ist (siehe Seite 6).

Falls aber an einem Knick Reflexion auftritt, so geschieht das nicht an der Knickstelle selbst, sondern in einer ganzen Umgebung. Dieser Sachverhalt sei anhand von Abb. 3 erläutert. $n^2(x)$ sei ein durch (8) gegebenes reflexionsfreies, $n^2(x)$ ein leicht abgeändertes Profil. Die reflektierte Welle E^- ist bei x = a durch das Integral (9) mit $\widetilde{B} = 0$ gegeben, also

$$E^-(a) = \frac{e^{-ik\int_b^a f\,dx}}{\sqrt{f(a)}} \cdot \int_b^a [E^+(x) + E^-(x)]\left(n^2(x) - \hat{n}^2(x)\right) \frac{e^{ik\int_b^x f(\xi)\,d\xi}}{\sqrt{f(x)}}\, dx\,.$$



Nur im Bereich des schraffierten Gebietes ist $n^2-\hat{n}^2$ von Null verschieden, dieses ganze Gebiet um die Knickstelle jedoch trägt zur Reflexion bei.

Abb. 3

4. Ein wichtiger Sonderfall von inhomogenen Medien ist $n_a = n_b$. Dann kann $f = n_a$ gewählt werden und (11) reduziert sich auf

$$E^{+\prime} = \frac{ik}{2n_a}\left\{(n_a^2 + n^2)E^+ - (n_a^2 - n^2)E^-\right\}$$

$$E^{-\prime} = \frac{ik}{2n_a}\left\{(n_a^2 - n^2)E^+ - (n_a^2 + n^2)E^-\right\}$$

oder

$$(E^+ + E^-)' = ikn_a(E^+ - E^-)$$

$$(E^+ - E^-)' = ik\frac{n^2}{n_a}(E^+ + E^-) \qquad (12)$$

(12) stellt ein System dar, das eine besonders einfache numerische Behandlung von Reflexionen an eindimensionalen Inhomogenitäten bei senkrechtem Einfall ermöglicht. Im Gegensatz zu (6) kommt hier $n'(x)$ nicht mehr vor und es kann auch nicht die Schwierigkeit auftreten, daß ein Nenner Null wird.

5. Die numerische Lösung von (12) zeigt, daß bei entsprechender Wahl des (stetigen) Brechungsindexprofils der Reflexionsgrad bis in die Nähe von 1 ansteigen kann. Ferner weiß man aus exakten Berechnungen des Reflexionsgrades an Epsteinprofilen, daß stetige Profile durchaus reflektieren können (/7/; /4/, S. 120-124; /8/, S. 172ff). Dies steht im Widerspruch zu /5/, S. 516: "Transmitted waves cannot suffer losses of energy by reflection as they traverse nonabsorbing, inhomogeneous media in which the optical properties have no discontinuities".
Da diese Behauptung meines Wissens unwidersprochen geblieben ist, soll hier auf die in der Beweisführung verborgenen Einschränkungen hingewiesen werden.
Durch die Substitution $\psi(x) = \frac{E'(x)}{E(x)}$ führt Osterberg Gl. (5) in die Riccatische Differentialgleichung

$$\psi'(x) + \psi^2(x) = -k^2 n^2(x) \qquad \text{(I)}$$

über. Nehmen wir nun $n(x)$ reell an und zerlegen (x) in Real- und Imaginärteil, also (x) = $k\,(u + iv)$, dann muß gelten

$$n^2 = v^2 - u^2 - \frac{u'}{k} \qquad \text{(II)}$$

und

$$2uv + \frac{v'}{k} = 0\,, \qquad \text{(III)}$$

wenn ψ Lösung von (I) sein soll. Gilt nun in dem betrachteten Intervall $v(x) \neq 0$, dann kann (III) geschrieben werden

$$u = -\frac{v'}{2kv} \quad \text{und} \quad u' = -\frac{1}{2k}\left\{\frac{v''}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2\right\}$$

Die Substitution von u und u' in (II) liefert

$$n^2 = v^2 + \frac{1}{2k^2}\left\{\frac{v''}{v} - \frac{3}{2}\left(\frac{v'}{v}\right)^2\right\},$$

aber dies ist unsere Beziehung (8) für reflexionsfreie Profile. Dadurch also, daß zwei wesentliche Einschränkungen gemacht werden, nämlich

1. daß $\psi = \frac{E'}{E}$ überall gebildet werden kann, und
2. daß $v(x) \neq 0$ in dem betrachteten Intervall gelten soll,

werden zwangsläufig nur solche Profile behandelt, die reflexionsfrei sind (s. /5/, S. 516, 518, 520).

In der vorliegenden Arbeit wurde nur von elektromagnetischen Wellen gesprochen. Gl. (5) ist allgemeiner, auch Schallwellen genügen derselben Gleichung und die Potentialstreuung von stationären Teilchenstrahlen wird durch (5) beschrieben, wenn man $n^2 = 1 - \frac{V(x)}{\varepsilon}$ setzt, wobei ε die Gesamtenergie in der Schrödingergleichung darstellt. Auch in diesen Fällen können somit reflektierte und transmittierte Intensität (Tunneleffekt) nach einer unserer Formel berechnet werden.

Für Diskussion und wertvolle Hinweise bin ich den Herren M. Tutter (IPP) und F. Gandini (MPI) zu Dank verpflichtet.

Anhang

Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y'' + f(x)y = g(x)$ [1)]

Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$y'' + f(x)y = g(x) \qquad \mathrm{I}$$

mit f(x) und g(x) stetig. Die entsprechende homogene Gleichung

$$y'' + f(x)y = 0$$

hat zwei linear unabhängige Lösungen $y_1 = u(x)$ und $y_2 = v(x)$. Es sei nun eine Funktion $K(\varepsilon, x)$ folgendermaßen definiert:

$$K(\varepsilon, x) = \frac{u(\varepsilon)v(x) - u(x)v(\varepsilon)}{u(\varepsilon)v'(\varepsilon) - u'(\varepsilon)v(\varepsilon)}$$

Der Nenner stellt die Wronski-Determinante dar und ist deshalb überall von Null verschieden. $K(\varepsilon, x)$ hat die folgenden Eigenschaften:

$$K(x,x) = 0$$

$$\left.\frac{\partial K(\varepsilon, x)}{\partial x}\right|_{\varepsilon = x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 K(\varepsilon, x)}{\partial x^2} + f(x)\, K(\varepsilon, x) = 0$$

Zwei linear unabhängige Lösungen von I sind dann durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$U(x) = u(x) + \int_{x_0}^{x} K(\varepsilon, x) g(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad \mathrm{II}$$

---

1) siehe z.B. /9/, S. 203ff

$$V(x) = v(x) + \int_{x_0}^{x} K(\varepsilon, x) g(\varepsilon) d\varepsilon \qquad \text{III}$$

Durch zweimaliges Differenzieren von U(x) und V(x) unter Ausnutzung der angegebenen Eigenschaften von $K(\varepsilon, x)$ bestätigt man, daß die Funktionen II und III der Gl. I genügen.

Literatur

/1/ K. Hain, M. Tutter: "Durchgang von Mikrowellen durch ebene Plasmaschichten", z. Naturf. 17a Heft 1 (1962), S. 59

/2/ K. Hain, M. Tutter: "Durchgang von Mikrowellen durch eine inhomogene Plasmaschicht", Laborbericht MPI München 1961

/3/ P.H. van Cittert: "On the Propagation of Light in Inhomogeneous Media", Physica 6 (1939), S. 840

/4/ W. Kofink; Ann. Phys. 1 (1947), S. 119

/5/ H. Osterberg; Propagation of Plane Electromagnetic Waves in Inhomogeneous Media", J. Opt. Soc. Am. 48 (1958), S. 513

/6/ V.L. Ginzburg: "The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas", Pergamon Press, Oxford 1964

/7/ P.S. Epstein: Proc. Nat. Acad. Sci. USA 16 (1930), S. 627

/8/ L.M. Brekhovskikh: "Waves in Layered Media", Acad. Press New York, London 1960

/9/ W.W. Stepanow: "Lehrbuch der Differentialgleichungen", Deutscher Verlag Wiss. Berlin 1956