

1969  
Berechnung der Magnetisierung  
supraleitender Zylinder  
aus Supraleitern III. Art

B. Oswald

IPP 4/67

Mai 1969

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**  
**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

**INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**  
**GARCHING BEI MÜNCHEN**

Berechnung der Magnetisierung  
supraleitender Zylinder  
aus Supraleitern III. Art

B. Oswald

IPP 4/67

Mai 1969

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Mai 1969

Abstract

Es wird die Feldverteilung und die Magnetisierung langer zylindrischer Supraleiter III. Art berechnet.

Die gesamte Magnetisierungsschleife, beginnend beim völlig feldfreien Zustand, wird in 5 Magnetisierungsbereiche aufgeteilt und durch 5 diesen Bereichen zugeordnete Beziehungen dargestellt. Die theoretische Erfassung der Magnetisierung ermöglicht eine rasche Beurteilung beliebiger supraleitender Materialien im Hinblick auf ihre I-H-Charakteristik.

The field distribution and the magnetization of long cylindrical superconductors of the III. kind are computed. The entire magnetization loop, beginning at zerofield, is divided in five sections and analyzed by five corresponding equations. The theory allows an accurate evaluation of the I-H-characteristic of superconducting materials.

Bei den heute bekannten Supraleitern unterscheidet man zwei bzw. drei Arten. Der sogenannte weiche Supraleiter - durchwegs auch als Typ I-Supraleiter bezeichnet - weist eine Magnetisierungskennlinie auf, die einem nahezu diamagnetischen Körper entspricht. Ein äußeres Feld kann in einen weichen Supraleiter - abgesehen von einer sehr kleinen Eindringtiefe - erst dann eindringen, wenn das thermodynamische krit. Feld  $H_c$  überschritten wird, d.h. wenn der Supraleiter in den normalleitenden Zustand übergeht. Dieser Vorgang ist völlig reversibel, wie erstmals von Meißner und Ochsenfeld gezeigt wurde.

Die sogenannten harten Supraleiter, auch als Typ II-Supraleiter bezeichnet, behalten auch nach Überschreiten des kritischen Feldes  $H_{c1}$  ihre Supraleitfähigkeit bei. Nach Abrikosov dringt das Feld nach Überschreiten von  $H_{c1}$  plötzlich in Form von Flußfilamenten in den gesamten Supraleiterquerschnitt ein. Die Magnetisierung erreicht erst bei einem relativ hohen äußeren Feld  $H_{c2}$  den Wert 0. An dieser Stelle wird der Supraleiter gleichzeitig normalleitend.

Die Magnetisierung dieses Supraleitertyps in seiner idealen Form ist ebenfalls reversibel.

Die meisten der heute üblichen technischen Supraleiter wie NbTi, NbZr und Nb<sub>3</sub>Sn gehören ebenfalls dieser Gruppe an. Sie weisen wie diese Strom- und Flußfilamente auf. Im Unterschied zum idealen Typ II-Supraleiter dringt der Fluß jedoch nicht sprungartig in den gesamten Supraleiterquerschnitt ein, sondern füllt den Supraleiter von der Oberfläche her langsam in dem Maße, in dem das äußere Feld gesteigert wird. Der Bewegung der Flußfilamente stehen

Kräfte (pinning forces) entgegen, die schließlich dafür verantwortlich sind, daß die Magnetisierungskurve nicht reversibel verläuft.

Zur Unterscheidung vom idealen Typ II-Supraleiter wurde dieser Supraleiter deshalb von zahlreichen Autoren als Typ III-Supraleiter bezeichnet.

Dieser Supraleiter verhält sich nach einer Modellvorstellung, die erstmals von Bean entwickelt wurde, so, daß überall dort, wo das Feld in den Supraleiter eingedrungen ist, ein makroskopischer Abschirmstrom mit kritischer Stromdichte fließt. Die Abhängigkeit dieser kritischen Stromdichte von der örtlichen Feldstärke steht mit den oben bereits genannten "pinning forces" in Zusammenhang. Wir werden auf die von zahlreichen Autoren, wie beispielsweise Y.B. Kim und anderen, zu Grunde gelegte Formulierung dieser Abhängigkeit zurückkommen.

Auf der Basis dieses "critical state"-Modells wurde schon für eine Reihe von Fällen die Feldverteilung und die Magnetisierung supraleitender Körper vom Typ III berechnet.

Wir wollen im folgenden die Magnetisierung einfacher langer Zylinder untersuchen. Der Zweck dieser Arbeit ist es, Berechnungsgrundlagen zu schaffen und zusammenzustellen, mit deren Hilfe die rasche Beurteilung eines beliebigen Supraleiters möglich ist. Es wurde deshalb auch Wert auf die Ausarbeitung eines Rechenmaschinenprogramms gelegt, das die rasche Berechnung beliebiger Magnetisierungskurven zuläßt.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir zunächst die Magnetisierung eines Zylinders unter der vereinfachenden Annahme, daß die örtliche Stromdichte unabhängig von der transversalen Feldstärke sei.

Wir setzen in allen Fällen voraus, daß es sich bei den betrachteten Zylindern um völlig homogene, isotrope Körper handelt.

1. Magnetisierung für den Fall: j-Konst.

Die Magnetisierung ist folgendermaßen definiert:

$$(1) \quad M = \frac{1}{F} \int_F B \, df - B_A ; \quad \begin{array}{l} F = \text{Querschnitt} \\ B_A = \text{Induktion des} \\ \quad \text{äußeren Feldes} \end{array}$$

in Worten: die Magnetisierung eines in einer Richtung unendlich lang ausgedehnten Körpers ist gleich dem Integral über der Feldstärke des eingedrungenen Feldes, bezogen auf den Querschnitt abzüglich dem Wert der äußeren Induktion.

Für einen unendlich langen, homogenen Zylinder gilt:

$$(2) \quad M = \frac{z}{r_1^2} \int_0^{r_1} r B \, dr - B_A ; \quad \begin{array}{l} r_1 = \text{Radius des Zylinders} \\ B = \text{lokale Induktion} \end{array}$$

Es kann vorausgesetzt werden, daß das Supraleitermaterial völlig unmagnetisch ist, d.h.  $\mu = \mu_0$ . Dann gilt die Maxwell'sche Gleichung für stationäre Ströme

$$(3) \quad \text{rot } H_j = j \quad \text{und} \quad \text{rot } L = \mu_0 j$$

In einem unendlich lang ausgedehnten, homogenen, zylindrischen Supraleiter bilden sich unter dem Einfluß eines äußeren

Magnetfeldes, das parallel zur Zylinderachse gerichtet ist, Abschirmströme in  $\mathcal{L}$  Richtung:  $j_{\mathcal{L}}$ . Bei einer ausschließlich longitudinalen Magnetisierung tritt nur diese Stromkomponente auf. Wir bezeichnen sie der Einfachheit halber nur mit:  $j$ .

Die Maxwell'sche Gleichung reduziert sich auf:

$$(3a) \quad \frac{dB}{dr} = \mu_0 j$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt für den Fall der erstmaligen Magnetisierung die Induktion als Funktion des Radius

$$(3b) \quad B(r) = B_A - \mu_0 \int_r^{r_1} j dr$$

und zwar für den Bereich:  $r_1 \leq r \leq r_E$ , in den das Magnetfeld eingedrungen ist.

Für den Bereich  $r \leq r_E$  gilt  $B(r) = 0$

Die örtliche Magnetisierungsstromdichte ist eine Funktion der örtlichen transversalen Feldstärke. Wir werden im Laufe der Untersuchung darauf zurückkommen, wollen aber zunächst annehmen, die Stromdichte sei unabhängig von der Feldstärke:

$$(4) \quad \text{Näherung:} \quad j(B) = \text{konst.}$$

Unter dieser Voraussetzung läßt sich die Magnetisierung des Zylinders sofort berechnen. Die örtliche Induktion wird:

$$(5) \quad B(r) = B_A - (r_1 - r) j \mu_0$$

Damit folgt gemäß (2) für die Magnetisierung:

$$(6) \quad M = \frac{2}{r_1^2} \int_{r_E}^{r_1} [B_A - (r_1 - r) j \mu_0] r dr$$

Wir haben nur zwei Magnetisierungsbereiche zu unterscheiden:

### 1. Bereich der Magnetisierungskurve:

Das Magnetfeld dringt von außen her nur in einen Teil des Supraleiters ein. Der innere Teil des Supraleiters bleibt feldfrei. Der Radius, bis zu dem das Feld eingedrungen ist, ist mit  $r_E$

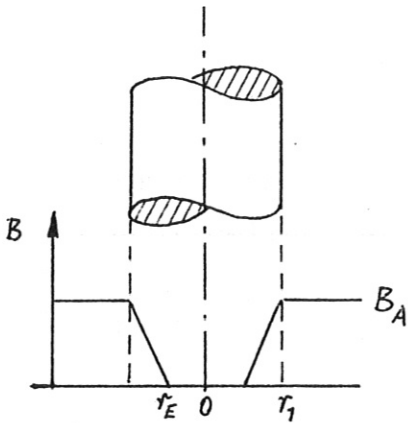


Fig. 1

bezeichnet. Somit wird der 1. Bereich definiert durch:

$$0 \leq r_E \leq r_1$$

$$B = 0; \text{ für } r \leq r_E$$

$$B \neq 0; \text{ für } r > r_E$$

## 2. Bereich

Wenn das äußere Magnetfeld weiter gesteigert wird, ist schließlich das gesamte Supraleitervolumen mit Feld ausgefüllt, dennoch fließen weiterhin Magnetisierungsströme im gesamten Querschnitt, die zur Mitte des zylindrischen Körpers zu für einen Abfall des Feldes sorgen.

Für diesen Bereich gilt also

$$r_E = 0$$

$B > 0$  (im gesamten Bereich)

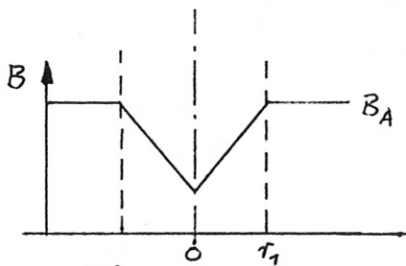


Fig. 2

Für den ersten Bereich ergibt sich somit nach (6) (wobei zwischen den Grenzen  $r_E$  und  $r_1$  zu integrieren ist):

$$(7) \quad M = \frac{2}{r_1^2} \int_{r_E}^{r_1} [B_A - (r_1 - r)j\mu_0] r dr - B_A ;$$

$$(8) \quad M = \frac{1}{r_1^2} \left[ B_A r_1^2 - j\mu_0 r_1^3 + \frac{2}{3} j r_1^3 \mu_0 - B_A r_E^2 + j r_1 r_E^2 \mu_0 - \frac{2}{3} j r_E^3 \mu_0 \right]$$

Unter der Voraussetzung (4) nämlich, daß die Stromdichte im Bereich des eingedrungenen Feldes konstant ist, läßt sich  $r_E$  wie folgt angeben:

$$(9) \quad r_E = r_1 - \frac{B_A}{\mu_0 j}$$



Setzt man den Ausdruck für  $r_E$  in (8) ein, dann erhält man schließlich für die Magnetisierung im ersten Bereich

$$(8a) \quad M = B_A \left[ \frac{B_A}{j r_1 \mu_0} - \frac{1}{3} \left( \frac{B_A}{j r_1 \mu_0} \right)^2 - 1 \right]$$

Im zweiten Bereich gilt (6), wobei zwischen den Grenzen  $r=0$  und  $r = r_1$  zu integrieren ist.

Die Integration gemäß (7) ergibt:

$$(10) \quad M = - \frac{1}{3} j r_1 \mu_0 ;$$

Die genannten Beziehungen, die unter der Voraussetzung  $j = \text{konst.}$  gewonnen wurden, können praktisch nur Verwendung finden, wenn die I-H Charakteristik durch eine Treppenkurve angenähert wird, so daß jeweils für kleine Abschnitte  $j = \text{konst.}$  als gültig angenommen werden kann.

Von Kim und anderen 2) wurde die I-H Charakteristik von Supraleitern III. Art in der Form

$$(11) \quad j (B + B_0) = \text{konst}$$

angegeben. Wir wollen im folgenden die Magnetisierung unter Berücksichtigung dieser Grenzcharakteristik berechnen.

2. Magnetisierung supraleitender Zylinder unter der Voraussetzung, daß B und j in der Form  $j(B+B_0) = \alpha^*$  zusammenhängen

Die Grenzcharakteristik in dieser Form gilt für einen großen Bereich unterhalb von  $H_c$ , (der kritischen Feldstärke bei  $j = 0$ .) Wir nehmen an, daß wir bei unseren Überlegungen im Gültigkeitsbereich dieser Beziehung bleiben. Das ist beispielsweise bei

Nb<sub>3</sub>Sn im Bereich zwischen 0 und 100 kG sicherlich der Fall.

Der Gradient der Induktion ergibt sich aus der Abschirmstromdichte

$$(12) \quad \frac{dB}{dr} = j\mu_0$$

Damit gilt für den Verlauf der Induktion über dem Radius die Differentialgleichung

$$(13) \quad \frac{dB}{dr} (B + B_0) = \alpha \quad \alpha = \mu_0 j^*$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt

$$(14) \quad B_{(r)} = -B_0 \pm \sqrt{2\alpha r + k}$$

Damit wird der Verlauf der Stromdichte über r:

$$(15) \quad \mu_0 j = \frac{dB}{dr} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha r + k}}$$

Wenn man nun die Magnetisierung gemäß der Feldstärkeverteilung (14) berechnet, dann gilt für den ersten Bereich:

$$(16) \quad M = \frac{2}{r_1^2} \int_{r_E}^{r_1} r(-B_0 + \sqrt{2\alpha r + k}) dr - B_A$$

$$M = \frac{2}{r_1^2} \left[ -\frac{r^2}{2} B_0 + \frac{1}{15\alpha^2} (3\alpha r - k)(2\alpha r + k)^{3/2} \right]_{r_E}^{r_1} - B_A$$

Die Integrationskonstante K wird durch die Randbedingung an der Zylinderoberfläche bestimmt. Dort gilt:

$$(17) \quad B_{(r_1)} = B_A = -B_0 \pm \sqrt{2\alpha r_1 + k}$$

Damit wird

$$(18) \quad k = (B_A + B_0)^2 - 2\alpha r_1$$

Die Induktionsverteilung über dem Radius wird somit (siehe (14))

$$(14a) \quad B(r) = -B_0 + \sqrt{2\alpha(r-r_1) + (B_A + B_0)^2} \quad \text{gültig für} \\ r_E \leq r \leq r_1$$

Die untere Integrationsgrenze  $r_E$  ist dadurch gekennzeichnet, daß an dieser Stelle die Induktion verschwindet.

$$(19) \quad -B_0 + \sqrt{2\alpha r_E + k} = 0$$

damit wird unter Verwendung von (18)

$$(20) \quad r_E = r_1 - \frac{(B_A + B_0)^2 - B_0^2}{2\alpha}$$

Die Magnetisierung berechnet sich schließlich wie folgt:

$$(21) \quad M_I = -B_A - B_0 \left[ 1 - \left( \frac{r_E}{r_1} \right)^2 \right] + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ (3\alpha r_1 - k)(B_A + B_0)^3 - (3\alpha r_E - k)B_0^3 \right]$$

Für den zweiten Bereich ergibt sich nach Integration von (16) in den Grenzen 0 und  $r_1$  ebenfalls unter Verwendung von (18) die Magnetisierung:

$$(22) \quad M_{II} = -B_A - B_0 + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ (3\alpha r_1 - k)(B_A + B_0)^3 + k^{5/2} \right]$$

Die beiden Bereiche grenzen aneinander an der Stelle  $r_E = 0$ , d.h. gemäß (20)

$$(23) \quad 2\alpha r_1 = (B_A + B_0)^2 - B_0^2; \quad B_{A \text{ I-II}} = -B_0 + \sqrt{2\alpha r_1 + B_0^2}$$

Es läßt sich leicht nachprüfen, daß an dieser Stelle die Werte für die Magnetisierung  $M_I$  und  $M_{II}$  gleich groß sind.

Die Magnetisierung an dieser Stelle ist

$$(24) \quad M_{I-II} = -B_A - B_0 + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ (3\alpha r_1 - B_0^2)(2\alpha r_1 + B_0^2)^{3/2} + B_0^5 \right]$$

Als Näherung für nicht allzu kleine Zylinderdurchmesser kann gelten:

$$(25) \quad M_{I-II} \approx -B_A - B_0 + 1,13 \sqrt{\alpha r_1}$$

$B_A$  ist an dieser Stelle näherungsweise (siehe (23))

$$(26) \quad B_{A_{I-II}} \approx \sqrt{2\alpha r_1} - B_0$$

Damit ist

$$(27) \quad M_{I-II} \approx -0,283 \sqrt{\alpha r_1}$$

(27) in (26) eingesetzt ergibt

$$(28) \quad B_{A_{I-II}} = -5M_{I-II} - B_0$$

Wenn man also in eine gemessene Magnetisierungskurve die Gerade  $B_A = -5M - B_0$  legt, dann erhält man mit  $M_{(r_E=0)}$  bzw.  $B_{A_{(r_E=0)}}$  eine einfache Bestimmungsgröße für  $\alpha$ .  
 $I-II$

### 3. Berechnung des rückläufigen Teils der Magnetisierungskurve

Wenn das äußere Feld nach Erreichung eines beliebigen maximalen Wertes  $B_{Am}$  kontinuierlich abgesenkt wird, bilden sich, beginnend an der Oberfläche des Zylinders, Abschirm-

ströme, die dieser Feldänderung entgegengerichtet sind.

Dieser Vorgang läßt sich mit folgendem Schema verdeutlichen:

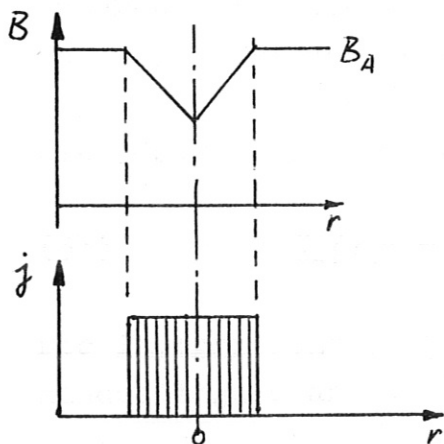


Fig. 3

Magnetisierung bei maximalem Feld  $B_{Am}$

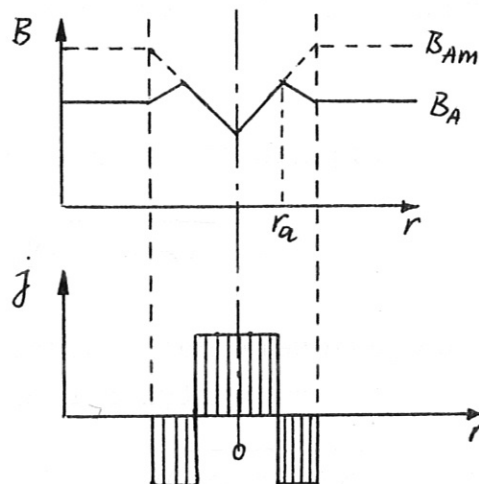


Fig. 4

Magnetisierung nach Absenkung von  $B_{Am}$  auf  $B_A$

Der auf Grund der äußeren Feldabsenkung entstehende Abschirmstrom ist dem ursprünglichen Magnetisierungsstrom entgegengerichtet. Er reicht bis zu einem Radius  $r_a$ , bei dem die Induktion der beiden Bereiche gleich groß ist.

Wir gehen bei der Berechnung der Induktionsverteilung wiederum von den Gleichungen (11) und (12) aus. Allerdings wird in Gleichung (12) entsprechend der umgekehrten Stromrichtung  $j$  mit negativem Vorzeichen eingesetzt.

$$(29) \quad \frac{dB_A}{dr} = -j\mu_0 \quad \text{für den Bereich } r_1 \geq r \geq r_a$$

Für den Verlauf der Induktion über dem Radius  $r$  im äußeren Zylinderbereich gilt ähnlich der Beziehung (13)

$$(30) \quad \frac{dB_a}{dr} (B_a + B_0) = -\alpha$$

Wir bezeichnen mit  $B_a$  die vom Radius abhängige Induktion im äußeren Teil des Zylinders, die durch Absenkung des äußeren Feldes entsteht, und mit  $B_i$  die Induktion im inneren Teil, die von der Magnetisierung mit dem äußeren Feld  $B_{Am}$  übriggeblieben ist.

Die Lösung der Differentialgleichung (30) ergibt:

$$(31) \quad B_a(r) = -B_0 + \sqrt{k_1 - 2\alpha r}$$

Die Integrationskonstante  $k_1$  ergibt sich wiederum aus der Randbedingung an der Oberfläche des Zylinders

$$(32) \quad B_a(r_1) = B_A = -B_0 + \sqrt{k_1 - 2\alpha r_1}$$

$$(32a) \quad k_1 = (B_A + B_0)^2 + 2\alpha r_1$$

Damit wird die Induktionsverteilung im äußeren Teil des Zylinders:

$$(33) \quad B_a(r) = -B_0 + \sqrt{2\alpha(r_1 - r) + (B_A + B_0)^2}$$

Die innere Induktionsverteilung entspricht noch dem ursprünglichen Verlauf, der sich aus (14) und (18) ergibt.

$$(34) \quad B_i(r) = -B_0 + \sqrt{(B_{Am} + B_0)^2 - 2\alpha(r_1 - r)}$$

Die beiden Bereiche grenzen aneinander an der Stelle:  $r_a$ , an der die Induktionswerte beider Bereiche gleich groß sind.

$$(35) \quad B_a(r_a) = B_i(r_a) \quad \text{das ergibt mit (33) und (34)} \\ \text{für den Radius } r_a:$$

$$2\alpha(r_1 - r_a) + (B_A + B_0)^2 = (B_{Am} + B_0)^2 - 2\alpha(r_1 - r_a)$$

hieraus folgt:

$$(36) \quad r_a = r_1 - \frac{(B_{Am} + B_0)^2 - (B_A + B_0)^2}{4\alpha}$$

Zur Berechnung der Magnetisierung muß also über beiden Abschnitten getrennt integriert werden, wobei sich der äußere Bereich zwischen den Grenzen  $r_1$  und  $r_a$  und der innere Bereich zwischen den Grenzen  $r_a$  und  $r_{Em}$  erstreckt.  $r_{Em}$  ist - wie oben bereits angegeben - der Radius, bis zu dem das Feld bei der ursprünglichen Magnetisierung mit der äußeren Induktion  $B_{Am}$  eingedrungen war. Wenn  $B_{Am}$  groß genug war, dann erstreckt sich das ursprüngliche Feld über den gesamten Querschnitt. Für diesen Fall würde also gelten:

$$r_{Em} = 0$$

Die Magnetisierung im rückläufigen Teil der Magnetisierungskurve wird also:

$$(37) \quad M_{III} = \frac{2}{r_1^2} \left[ \int_{r_a}^{r_1} B_a \cdot r \, dr + \int_{r_{Em}}^{r_a} B_i \cdot r \, dr \right] - B_A$$

$$(38) \quad M_{III} = -B_A + \frac{2}{r_1^2} \left[ -\frac{B_0^2}{2} r - \frac{(3\alpha r + k_1)(k_1 - 2\alpha r)^{3/2}}{15\alpha^2} \right]_{r_{Em}}^{r_1} + \frac{2}{r_1^2} \left[ -\frac{B_0^2}{2} r + \frac{(3\alpha r - k_m)(2\alpha r + k_m)^{3/2}}{15\alpha^2} \right]_{r_{Em}}^{r_a}$$

Betrachten wir im folgenden der Einfachheit halber die Magnetisierung eines Zylinders im rückläufigen Teil der Magnetisierungskurve, beginnend bei einer maximalen äußeren Induktion von  $B_{Am}$ , die für die Magnetisierung des gesamten Zylinderquerschnitts ausgereicht hat. D.h. wir gehen von der Annahme aus, daß  $r_{Em} = 0$  ist. Das ist im übrigen bei der Messung von Magnetisierungskurven durchwegs der Fall.

Dann wird:

$$(39) \quad M_{III} = -B_A - B_0 + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ k_m^{5/2} + (3\alpha r_a - k_m)(2\alpha r_a + k_m)^{3/2} + (3\alpha r_a + k_1)(k_1 - 2\alpha r_a)^{3/2} - (3\alpha r_1 + k_1)(k_1 - 2\alpha r_1)^{3/2} \right],$$

$$(40) \quad k_m = (B_{Am} + B_0)^2 - 2\alpha r_1; \quad k_1 = (B_A + B_0)^2 + 2\alpha r_1; \\ r_a = r_1 - \frac{(B_{Am} + B_0)^2 - (B_A + B_0)^2}{4\alpha}$$

Die obige Berechnung der rückläufigen Magnetisierungskurve gilt für den Bereich  $0 \leq B_A \leq B_{Am}$ , wenn gleichzeitig  $r_a > 0$  bleibt. Wenn bereits innerhalb dieser Grenzen  $r_a = 0$  wird, gilt  $M_{III}$  nach Gleichung (39) nur bis zu dieser Grenze. Es würde sich dann der Bereich IVb anschließen, der nach (57) zu berechnen wäre.

Wenn nun die äußere Feldstärke nach dem Nulldurchgang in umgekehrter Richtung wieder ansteigt, gilt für den äußeren Teil des Zylinders wiederum das positive Vorzeichen für die Stromdichte gemäß (12). Der Magnetisierungsfluß setzt sich nunmehr aus 3 Anteilen zusammen, 1. einem äußeren Feldanteil, der in gleicher Richtung verläuft wie das äußere Feld; 2. einem mittleren Feldanteil, der dem äußeren Feld entgegengerichtet ist nach innen zu ansteigend; 3. einem inneren Feldanteil, der ebenfalls dem äußeren Feld entgegengerichtet ist, und zwar nach außen zu ansteigend.

Dieser Teil der Magnetisierung ist durch folgende Induktions- und Stromdichteverteilung charakterisiert:

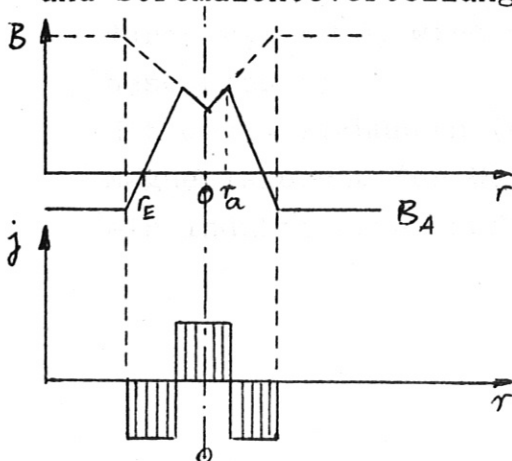


Fig. 5

Im äußeren Teil des Supraleiters gilt wiederum die Feldverteilung, wie sie durch die Gleichungen (14) und (18) beschrieben wird. Das Feld verläuft allerdings umgekehrt als bei der ursprünglichen Magnetisierung. Der Radius, bis zu dem das Feld auf den Wert 0 abgefallen ist, ist identisch mit  $r_E$ , dem Radius, der durch die Gleichung (2) definiert wurde.



Der Feldverlauf im Abschnitt  $r_1 \geq r \geq r_E$  ist:

$$(41) \quad B_{a1} = B_0 - \sqrt{(-B_A + B_0)^2 - 2\alpha(r_1 - r)}$$

Die Vorzeichen sind entsprechend der Stromrichtung so gewählt, daß im Gültigkeitsbereich dieser Beziehung  $B_A$  nur negative Werte annimmt. Entsprechend ist  $B_{a1}$  immer kleiner als 0.

Der Induktionsverlauf im 2. Abschnitt, der definiert ist durch  $r_E \geq r \geq r_a$  kann wiederum aus der Differentialgleichung (30) bestimmt werden.

Die Lösung dieser Gleichung lautet ähnlich (31)

$$(42) \quad B_{a2} = -B_0 + \sqrt{K_2 - 2\alpha r}$$

Wir bestimmen diesmal aber die Integrationskonstante  $K_2$  nach der Randbedingung:

$$(43) \quad B_{a2} = 0 \quad \text{für den Radius} \quad r = r_E$$

damit wird:

$$(44) \quad K_2 = B_0^2 + 2 \alpha r_E$$

Damit wird der Induktionsverlauf im 2. Abschnitt:

$$(45) \quad B_{a2} = -B_0 + \sqrt{2\alpha(r_E - r) + B_0^2}$$

Der Induktionsverlauf im 3. Abschnitt, der definiert ist durch  $r_a \geq r \geq 0$ , wird nach wie vor durch die Beziehung (34) beschrieben:

Mit den Gleichungen (41), (45) und (34) kann somit die Magnetisierung für Werte von  $B_A$  berechnet werden, für die ein Induktionsverlauf gemäß Fig. 5 anzunehmen ist.

Dieser Geltungsbereich wird definiert durch die Grenzen

$$(46) \quad r_1 \geq r_E \geq 0 \quad \text{und gleichzeitig} \quad r_E \geq r_b \geq 0$$

Die Magnetisierung gemäß Fig. 5, innerhalb der genannten Grenzen, wird also:

$$(47) \quad M_{IVa} = -B_A + \frac{2}{r_1^2} \int_0^{r_b} B_i r dr + \frac{2}{r_1^2} \int_{r_b}^{r_E} B_{a2} r dr + \frac{2}{r_1^2} \int_{r_E}^{r_1} B_{a1} r dr ;$$

$$(48) \quad M_{IVa} = -B_A - B_0 \left[ 2 \left( \frac{r_E}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ (3\alpha r_b - k_m)(2\alpha r_b + k_m)^{3/2} + k_m^{5/2} - (k_2 + k) B_0^3 + (3\alpha r_b + k_2)(k_2 - 2\alpha r_b)^{3/2} - (3\alpha r_1 - k)(k + 2\alpha r_1)^{3/2} \right] ;$$

Hierbei ist:

$$(49) \quad k_m = (B_{Am} + B_0)^2 - 2\alpha r_1$$

$$(50) \quad k_2 = B_0^2 + 2\alpha r_E$$

$$(51) \quad k = (-B_A + B_0)^2 - 2\alpha r_1$$

$$(52) \quad r_E = r_1 - \frac{(-B_A + B_0)^2 - B_0^2}{2\alpha}$$

$$(53) \quad r_b = r_1 - \frac{(-B_A + B_0)^2 + (B_{Am} + B_0)^2 - 2B_0^2}{4\alpha}$$

Es wurde auch hier wiederum vorausgesetzt, daß  $B_A$  nur negative Werte erhält.

Sobald  $r_a$  den Wert 0 erreicht, bleiben für die weitere Berechnung der Magnetisierungskennlinie lediglich 2 Abschnitte übrig, die durch die Gleichungen (41) und (45) beschrieben werden. Die Magnetisierung in diesem Teil wird also:

$$(54) \quad M_{IV} = -B_A - B_0 \left[ 2 \left( \frac{r_E}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ 2B_0^5 + k_2^{5/2} - (3\alpha r_1 - k)(-B_A + B_0)^3 \right] ;$$

Hierfür gelten die gleichen Konstanten wie oben. Wir haben auch hier angenommen, daß der Bereich V im rückläufigen Teil der Magnetisierungskurve liegt, in dem  $B_A$  nur negative Werte annimmt.

Diese Beziehung gilt im Bereich  $r_E \geq 0$ . Wenn  $r_E$  den Wert 0 erreicht, geht die Magnetisierungskurve wieder in die ursprüngliche Kurve über, und zwar an der Stelle, die durch die Gleichung (22) beschrieben wird.

Bei der Berechnung der Magnetisierung im 3. und 4. Bereich wurde bis jetzt angenommen, daß  $r_a$  bzw.  $r_b$  erst dann den Wert 0 erreicht, wenn die äußere Feldstärke bereits in umgekehrter Richtung wieder ansteigt, d.h. gemäß der hier gewählten Vorzeichenregel für  $B_A < 0$ .

Es ist jedoch leicht einzusehen, daß der Zustand, der durch  $r_a = 0$  gekennzeichnet wird, bei anderen Werten von  $\alpha$  bzw.  $B_{am}$  auch schon früher erreicht werden kann, nämlich für Werte  $B_A > 0$ . Man braucht beispielsweise nur dafür zu sorgen, daß  $B_{Am}$  der Maximalwert der ursprünglichen Magnetisierung genügend groß vorgegeben wird. Bei Materialien mit kleinem  $\alpha$  sind schon relativ niedrige Werte von  $B_{am}$  zur Erreichung dieser Voraussetzung ausreichend.

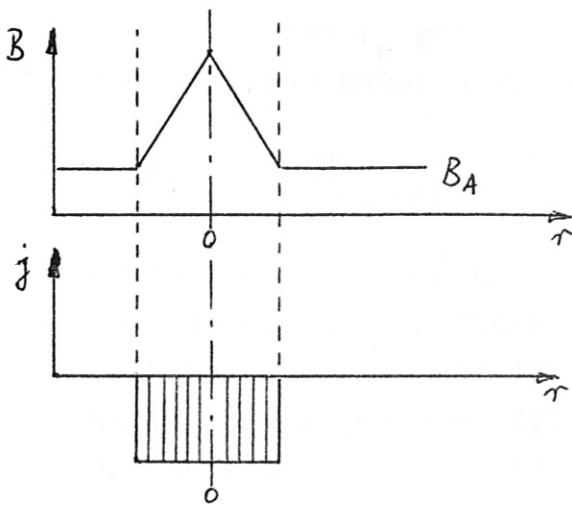


Fig. 6

Wir haben also im rückläufigen Teil der Magnetisierungskennlinie alternativ noch mit einem weiteren Bereich zu rechnen, der als IVb Bereich gekennzeichnet sei. Für diesen Bereich gilt eine Feldverteilung, die schematisch in Fig. 6 dargestellt ist:

Für diesen Bereich gelten folgende Grenzen:

$$r_a = 0; \quad B_A \geq 0;$$

Für die Induktionsverteilung gilt (33)

$$(55) \quad B(r) = -B_0 + \sqrt{2\alpha(r_1 - r) + (B_A + B_0)^2}$$

Die Magnetisierung ergibt sich aus

$$(56) \quad M_{IVb} = \frac{2}{r_1^2} \int_0^{r_1} B(r) dr$$

$$(57) \quad M_{IVb} = -B_A - B_0 - \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ (3\alpha r_1 + k_1)(k_1 - 2\alpha r_1)^{3/2} - k_1^{5/2} \right];$$

Hierbei ist:  $K_1 = (B_A + B_0)^2 + 2\alpha r_1$

Der für  $M_{IV}$  gültige Bereich endet bei  $B_A = 0$ . Hier schließt sich der 5. Bereich an, in dem die Magnetisierung nach Gleichung (54) zu berechnen ist.

Die obere Grenze (zum 3. Bereich) ist durch die Bedingung  $r_a = 0$  definiert.

Gemäß der für  $r_a$  gültigen Beziehung (siehe (38)) gilt für den Wert der äußeren Induktion an dieser Stelle:

$$(58) \quad B_{A(r_a=0)} = -B_0 + \sqrt{(B_{Am} + B_0)^2 - 4\alpha r_1}$$

Es darf hier noch einmal in Erinnerung gebracht werden, daß die obige Berechnung nur für den Fall gilt, daß das Feld bei der ursprünglich ansteigenden Magnetisierungskurve in den gesamten Zylinder eingedrungen war, was bei der Aufnahme von Magnetisierungskurven normalerweise der Fall ist. Wenn die äußere Feldstärke schon vor Erreichen dieses Punktes wieder abgesenkt wird, muß für die Integration eine weitere untere Grenze beachtet werden.

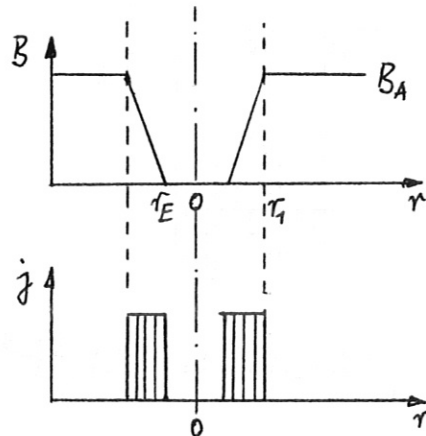
Im folgenden werden die einzelnen Abschnitte der Magnetisierungskurve mit den dazugehörigen Bestimmungsgleichungen noch einmal zusammenfassend dargestellt:

1. Bereich:  $r_1 \geq r \geq r_E$  ;  $r_E \geq 0$  ansteigendes äußeres Feld

$$B(r) = -B_0 + \sqrt{(B_A + B_0)^2 - 2\alpha(r_1 - r)}$$

$$k = (B_A + B_0)^2 - 2\alpha r_1 ;$$

$$r_E = r_1 - \frac{(B_A + B_0)^2 - B_0^2}{2\alpha}$$

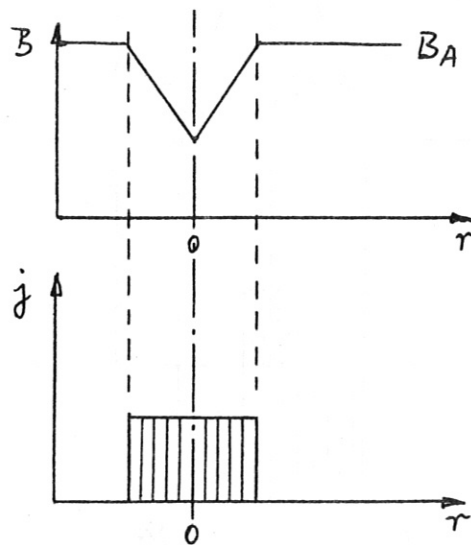


$$M_I = -B_A - B_0 \left[ 1 - \left( \frac{r_E}{r_1} \right)^2 \right] + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ (3\alpha r_1 - k)(B_A + B_0)^3 - (3\alpha r_E - k)B_0^3 \right] ;$$

2. Bereich :  $r_1 \geq r \geq 0$  ansteigendes äußeres Feld

$$B(r) = -B_0 + \sqrt{(B_A + B_0)^2 - 2\alpha(r_1 - r)}$$

k wie im 1. Abschnitt



$$M_{II} = -B_A - B_0 + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ (3\alpha r_1 - k)(B_A + B_0)^3 + k^{5/2} \right] ;$$

3. Bereich:  $B_{Am} \geq B_A \geq 0$  Das äußere Feld fällt monoton ab

Feldverlauf im Abschnitt

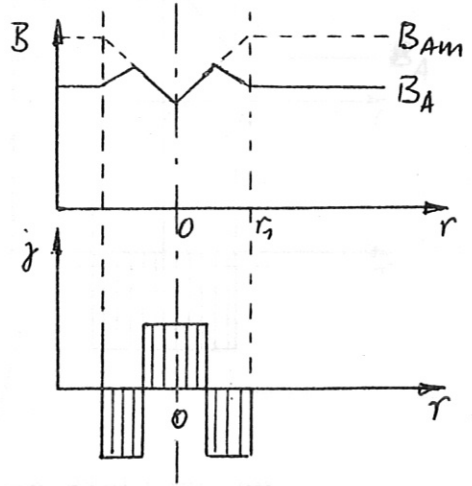
$$r_1 \geq r \geq r_a$$

$$B_a = -B_0 + \sqrt{(B_A + B_0)^2 + 2\alpha(r_1 - r)}$$

Feldverlauf im Abschnitt

$$r_a \geq r \geq 0$$

$$B_i = -B_0 + \sqrt{(B_{Am} + B_0)^2 - 2\alpha(r_1 - r)}$$



$$M_{III} = -B_A - B_0 + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ k_m^{5/2} + 10\alpha r_a \left( \frac{k_1 + k_m}{2} \right)^{3/2} - (3\alpha r_1 + k_1)(B_A + B_0)^3 \right];$$

4a. Bereich:  $0 < B_A$  Das äußere Feld steigt monoton in entgegengesetzter Richtung an

Feldverlauf im äußeren Abschnitt

$$r_1 \geq r \geq r_E$$

$$B_{a1} = +B_0 - \sqrt{(-B_A + B_0)^2 - 2\alpha(r_1 - r)}$$

Feldverlauf im mittleren Abschnitt

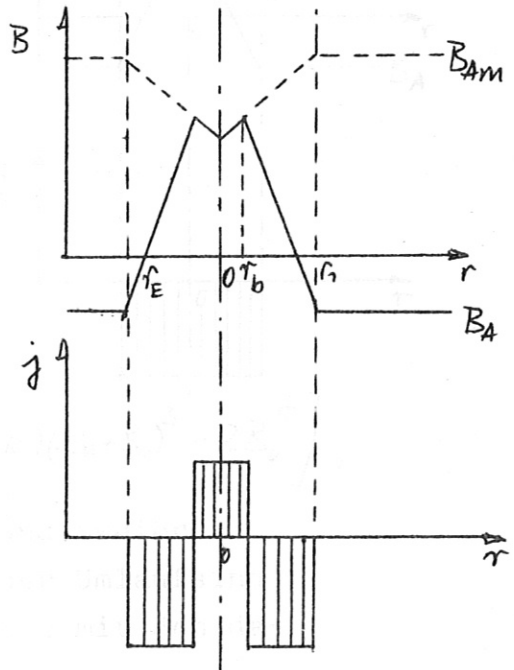
$$r_E \geq r \geq r_b$$

$$B_{a2} = -B_0 + \sqrt{2\alpha(r_E - r) + B_0^2}$$

Feldverlauf im inneren Abschnitt

$$r_b \geq r \geq 0$$

$$B_i = -B_0 + \sqrt{(B_{Am} + B_0)^2 - 2\alpha(r_1 - r)}$$



$$M_{IVa} = -B_A - B_0 \left( 2 \left( \frac{r_E}{r_1} \right)^2 - 1 \right) + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ k_m^{5/2} + 10\alpha r_b \left( \frac{k_2 + k_m}{2} \right)^{3/2} - (3\alpha r_1 - k) (-B_A + B_0)^3 - 2B_0^5 \right];$$

$$k_m = (B_{Am} + B_0)^2 - 2\alpha r_1;$$

$$k_2 = B_0^2 + 2\alpha r_E;$$

$$k = (-B_A + B_0)^2 - 2\alpha r_1;$$

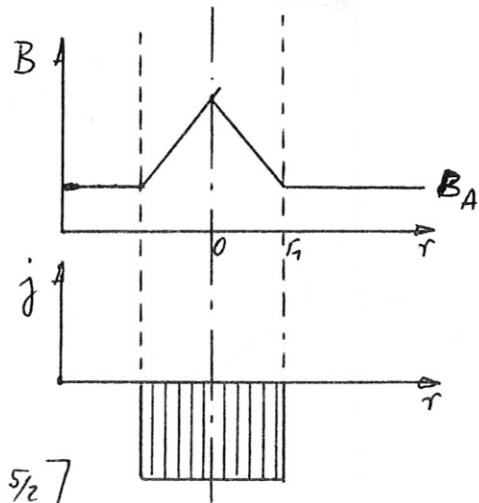
$$r_E = r_1 - \frac{(-B_A + B_0)^2 - B_0^2}{2\alpha};$$

$$r_b = r_1 - \frac{(-B_A + B_0)^2 + (B_{Am} + B_0)^2 - 2B_0^2}{4\alpha};$$

4b. Bereich

Feldverlauf

$$B(r) = -B_0 + \sqrt{2\alpha(r_1 - r) + (B_A + B_0)^2}$$



$$M_{\underline{IV}b} = -B_A - B_0 - \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ (3\alpha r_1 + k_1)(k_1 - 2\alpha r_1)^{3/2} - k_1^{5/2} \right];$$

5. Bereich:  $B_A$  steigt in entgegengesetzter Richtung an

Feldverlauf im äußeren Abschnitt

$$r_1 \geq r \geq r_E$$

$$B_{a1} = +B_0 - \sqrt{(-B_A + B_0)^2 - 2\alpha(r_1 - r)}$$

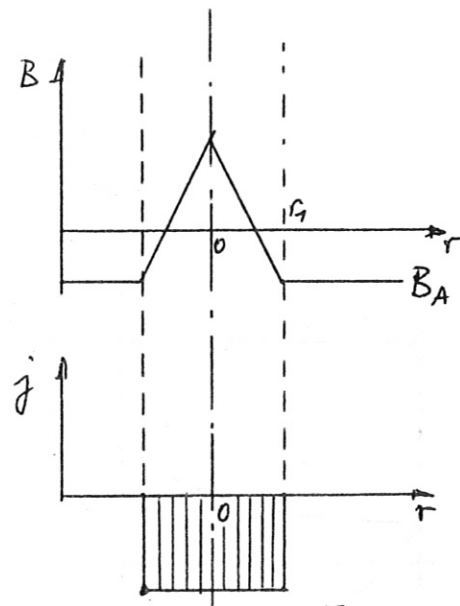
Feldverlauf im inneren Abschnitt

$$r_E \geq r \geq 0$$

$$B_{a2} = -B_0 + \sqrt{2\alpha(r_E - r) + B_0^2}$$

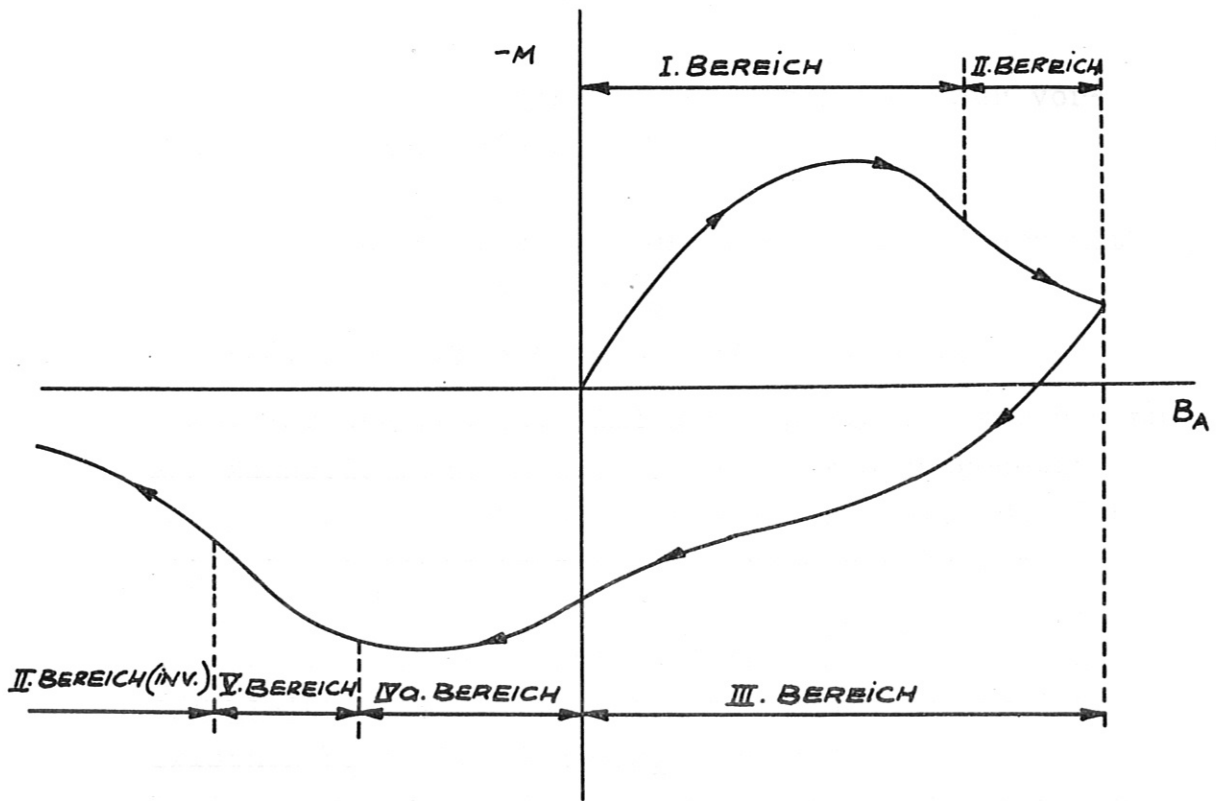
mit  $K = B_0^2 + 2\alpha r_E$

(sonst wie unter 4)

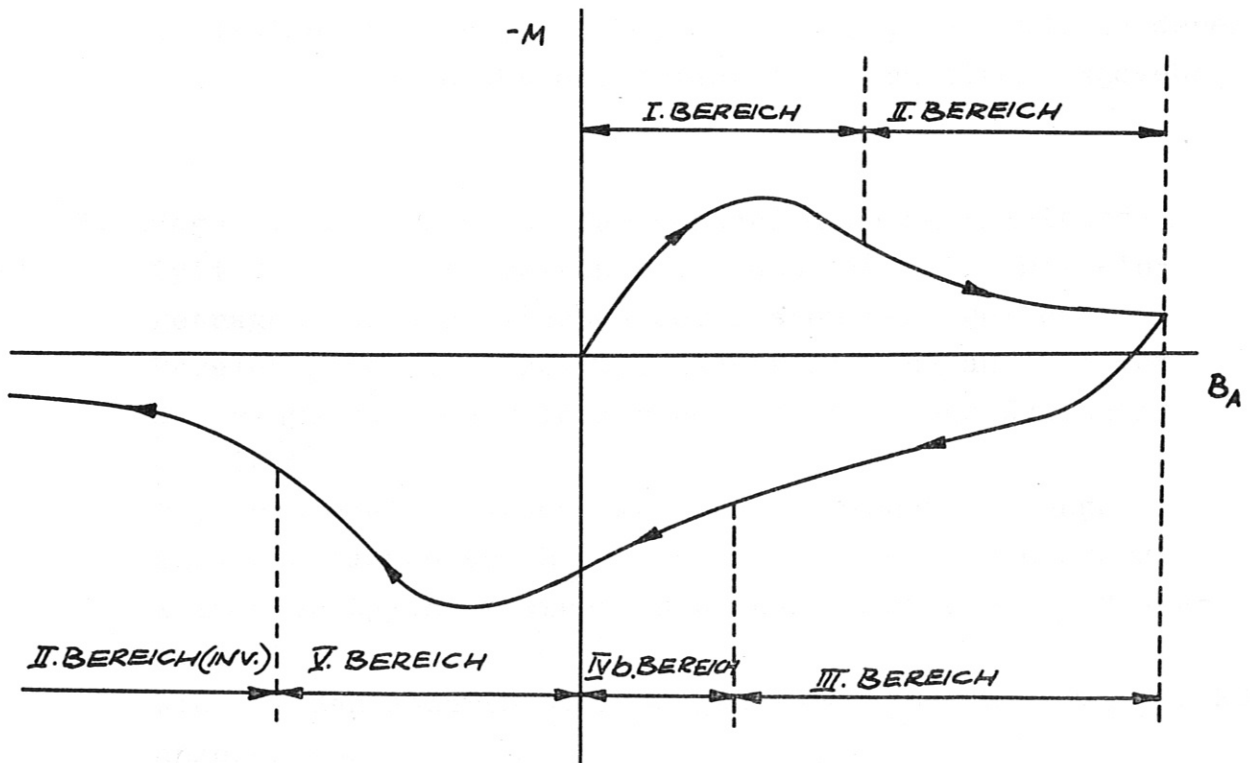


$$M_{\underline{V}} = -B_A - B_0 \left[ 2 \left( \frac{r_E}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{2}{15(\alpha r_1)^2} \left[ k_2^{5/2} - (3\alpha r_1 - k_2)(-B_A + B_0)^3 - 2B_0^5 \right];$$

Zusammenfassend seien noch einmal an Hand zweier schematisierter Magnetisierungskurven der Umlaufsinn und die einzelnen Magnetisierungsbereiche mit den dazugehörigen Grenzen dargestellt.



Magnetisierungsschleife mit IVa Bereich



Magnetisierungsschleife mit IVb Bereich



Folgende Abbildungen mögen zur Verdeutlichung der vorstehenden Ergebnisse dienen:

1. Magnetisierung eines zylindrischen Supraleiters mit  $r_1 = 2,5 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 4000 \frac{\text{kG}^2}{\text{cm}}$   $B_0 = 2 \text{ kG}$   
im Bereich zwischen  $B_A = 0$  und  $B_A = 80 \text{ kG}$ .

Dabei ist angenommen, daß der Supraleiter vor Beginn der Magnetisierung keinem äußeren Feld ausgesetzt war. Der erste Bereich endet und der zweite Bereich beginnt bei einer äußeren Induktion von 42,7 kG.

2. Magnetisierung eines zylindrischen Supraleiters mit den gleichen Daten wie unter 1. jedoch im Bereich zwischen  $B_A = +50 \text{ kG}$  und  $B_A = -50 \text{ kG}$ .  
Es ist angenommen, daß der Supraleiter zunächst von  $B_A = 0$  auf  $B_A = +50 \text{ kG}$  magnetisiert wurde und dann monoton bis zu einer gleich großen negativen Induktion ummagnetisiert wurde. Dabei durchläuft die äußere Induktion die Werte +25 kG, 0 -25 kG, -40 kG, zu denen der jeweilige Induktionsverlauf im Supraleiter angegeben ist.

3. Magnetisierungskurven für verschiedene supraleitende Zylinder mit  $\alpha r_1$  zwischen 100 und 1500 kG<sup>2</sup>. Die eingetragene Grenze zwischen dem ersten und zweiten Bereich gibt die jeweilige Magnetisierung an, bei der das eingedrungene Feld gerade die Achse des Zylinders erreicht.

Die in diesem Diagramm angegebenen Magnetisierungskurven beginnen bei  $B_A = 0$  und  $M = 0$ , d.h. die supraleitenden Zylinder waren zuvor keinem äußeren Feld ausgesetzt.

Wie bei den anderen Abbildungen wurde auch hier  $B_0 = 2 \text{ kG}$  angenommen.

4. Komplette Magnetisierungsschleife für einen Zylinder mit den Daten:  $B_0 = 2 \text{ kG}$ ,  $\alpha r_1 = 1000 \text{ kG}^2$ , in folgendem Umlaufsinn:

$$\begin{array}{ccccccc} B_A = 0 & \longrightarrow & B_A = +50 \text{ kG} & \longrightarrow & B_A = 0 & \longrightarrow & B_A = -50 \text{ kG} \\ & & & & \longrightarrow & & \\ & & \longrightarrow & & B_A = + 50 \text{ kG} & & \end{array}$$

5. Abschirmung magnetischer Felder mit Hilfe zylindrischer, ringförmiger Supraleiter.  
Das Ende des ersten Magnetisierungsbereiches gibt gleichzeitig an bei welcher äußeren Feldstärke der Innenraum eines Hohlzylinders gerade noch feldfrei bleibt. Die Wandstärke eines solchen Zylinders entspricht dem Radius eines äquivalenten Vollzylinders.  
Für zwei Werte von  $\alpha$  ist die Abhängigkeit der maximal abschirmbaren Induktion von der Wandstärke angegeben. Derselbe Zusammenhang gilt selbstverständlich auch für den umgekehrten Fall, nämlich, daß das Feld im Innenraum die angegebenen Werte annimmt während der Außenraum feldfrei ist.

Das FORTRAN IV Programm zur Berechnung der Magnetisierung in sämtlichen Bereichen wurde von Frl. C. Schmidt geschrieben.

Literatur:

1. W. Meissner, R. Ochsenfeld  
Naturwissenschaft 21, 787,(1933)
2. A.A. Abrikosov;J. exp. theor. Phys. 44, 1675, (1963)
3. C.P. Bean; Phys. Rev. Lett. 8, 250, (1962)
4. C.P. Bean, M.V. Doyle, A.G. Pineus;  
Phys. Rev. Lett. 9, 93, (1962)
5. Y.B. Kim, C.F. Hempstead, A.R. Strnad;  
Phys. Rev. 129, 528, (1963)
6. P.W. Anderson. Phys. Rev. Lett. 9, 309, (1962)
7. Y.B. Kim, C.F. Hempstead, A.R. Strnad;  
Phys. Rev. 131, 2486, (1963)
8. J. Lowell, Cryogenics, 5 185, (1965)

Ein ausführliches Literaturverzeichnis über die Literatur vor 1965 findet sich unter 8.

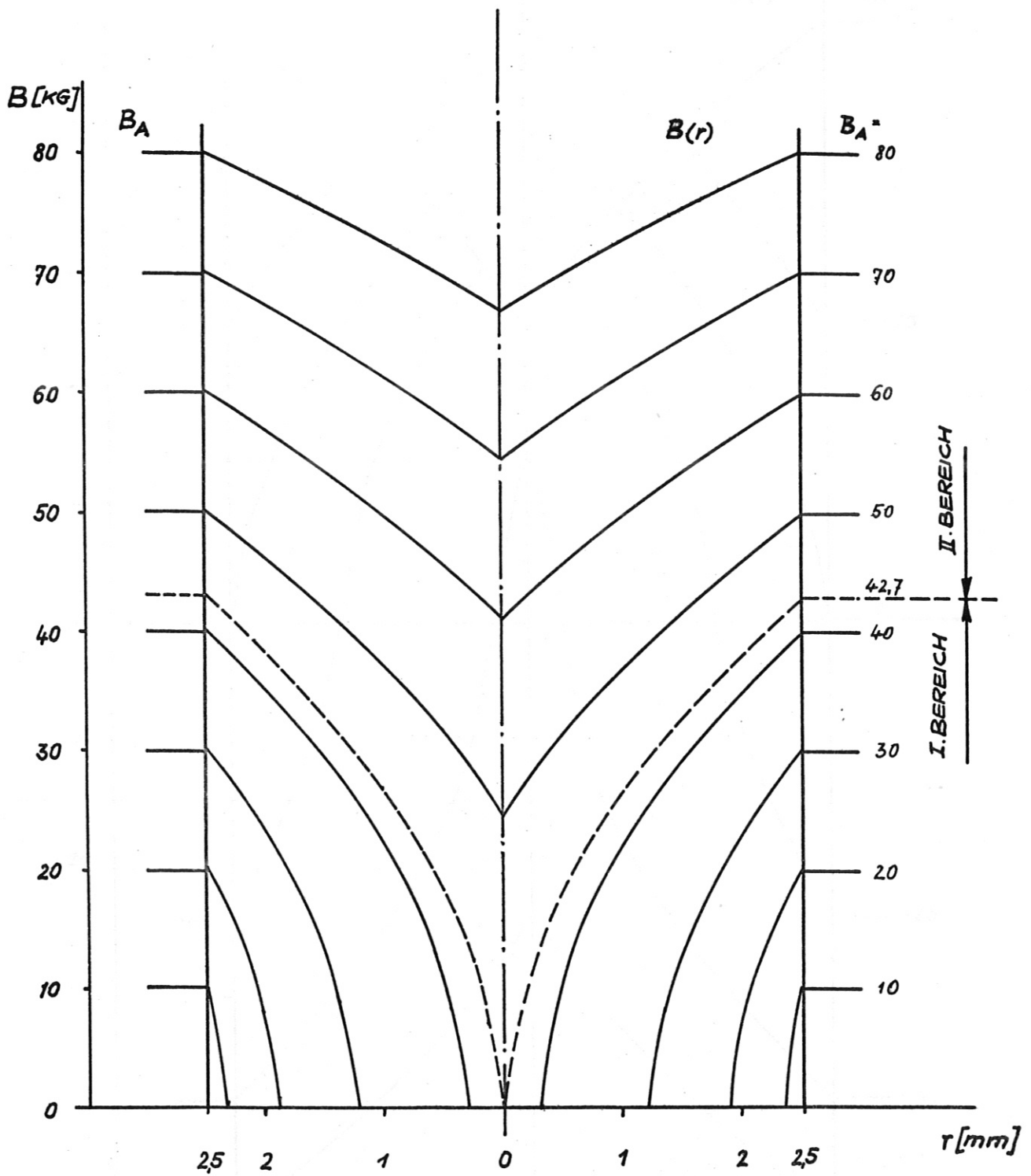


Abb. 1: Magnetisierung eines zylindrischen Supraleiters mit  $\alpha r_1 = 1000 \text{ (kG)}^2$  zwischen  $B_A = 0$  und  $B_A = 80 \text{ kG}$

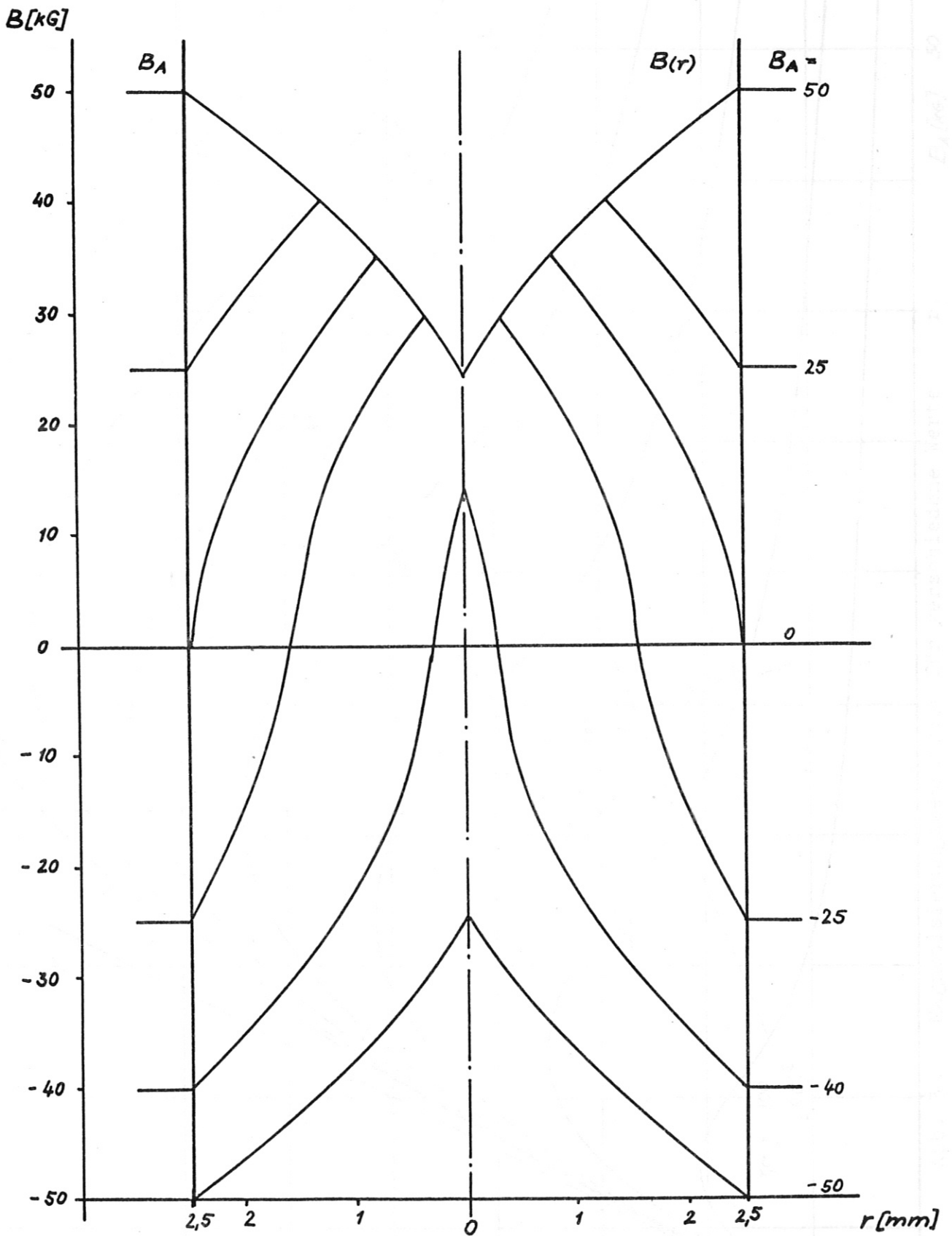


Abb. 2: Magnetisierung eines zylindrischen Supraleiters mit  $\alpha r_1 = 1000 \text{ (kG)}^2$  zwischen  $B_{Am} = 50 \text{ kG}$  und  $B_A = -50 \text{ kG}$

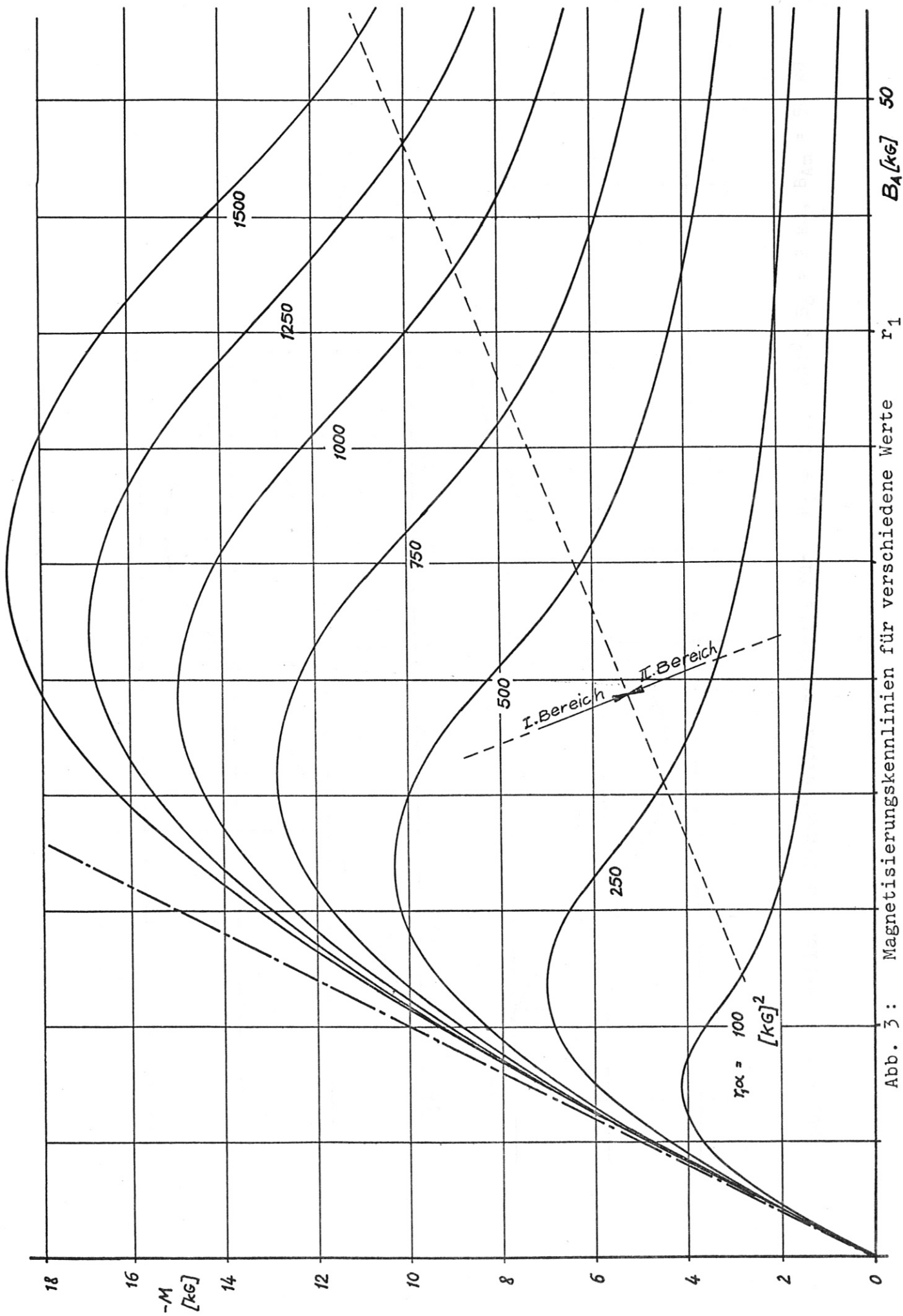


Abb. 3: Magnetisierungskennlinien für verschiedene Werte  $r_1$   $B_A$  [kg] 50

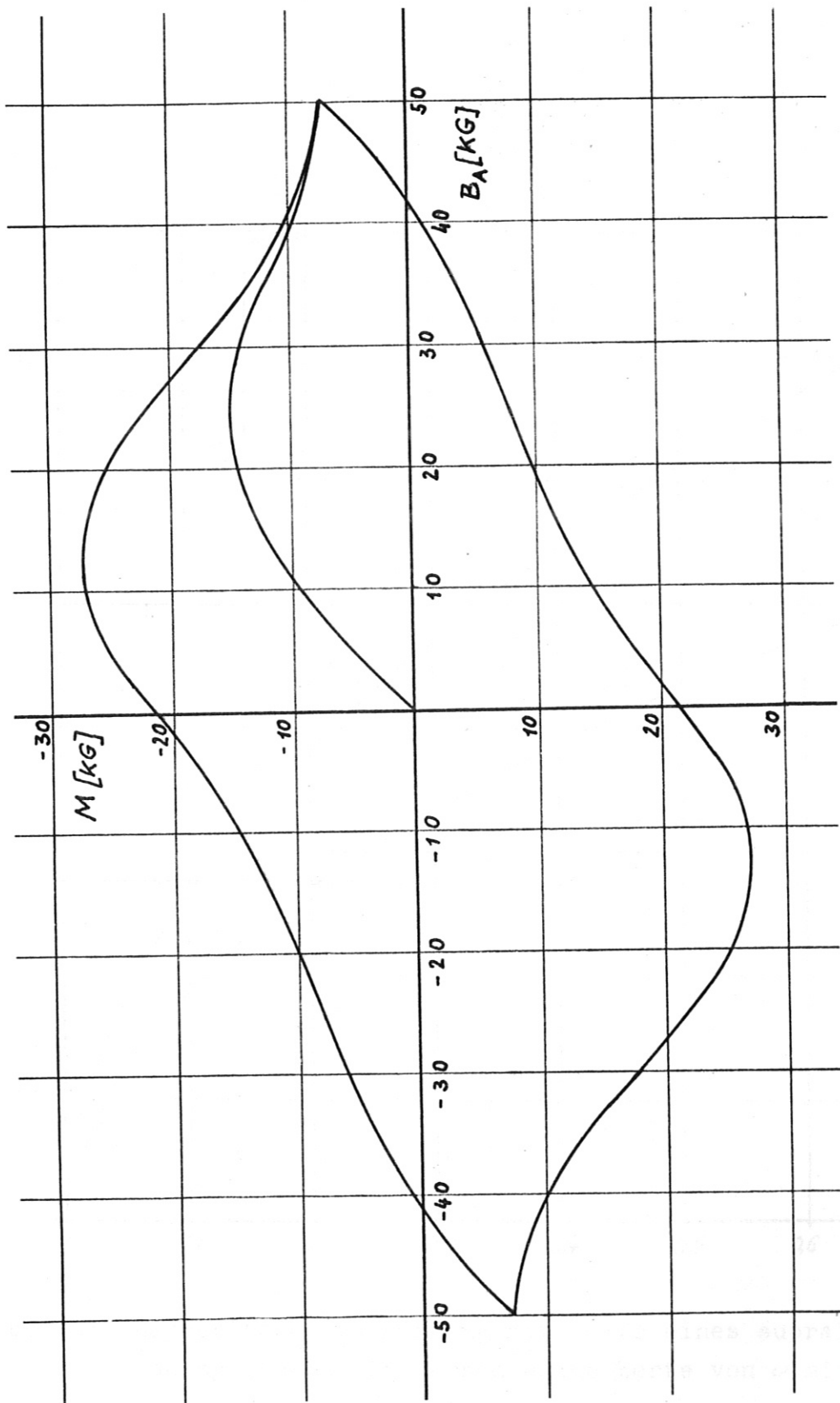


Abb. 4: Geschlossene Magnetisierungsschleife für  $r_1 = 1000 \text{ (kg)}^2$ ,  $B_0 = 2 \text{ kg}$ ,  $B_{Am} = 50 \text{ kg}$

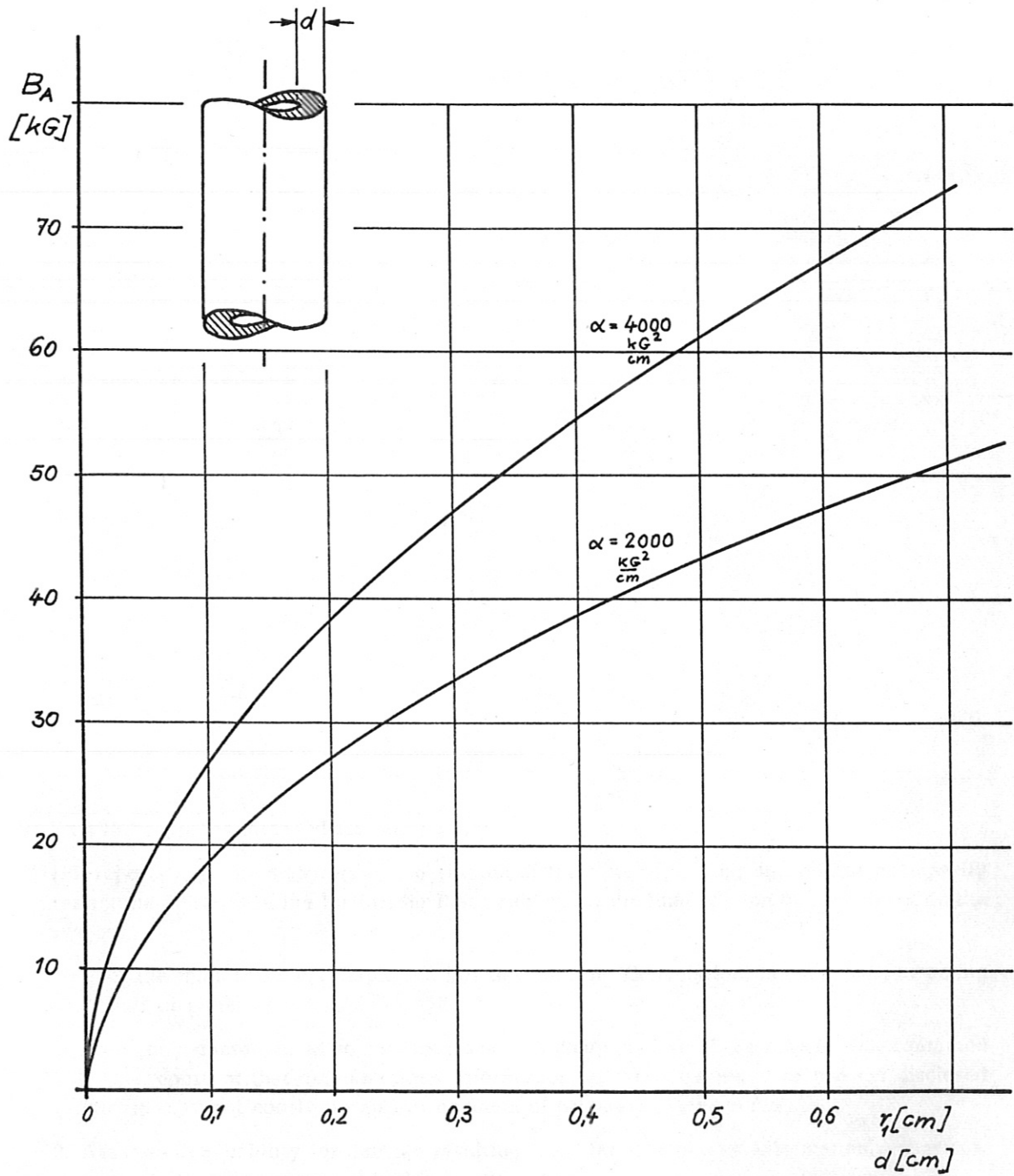


Abb. 5: Magnetische Abschirmung mit Hilfe eines supraleitenden Hohlzylinders für verschiedene Werte von  $\alpha$  mit  $B_0 = 2$  kG