INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Lineare und toroidale magnetohydrostatische Gleichgewichte

(Linear and toroidal magnetohydrostatic equilibria)

Jürgen Nührenberg

IPP 6/77 August 1969

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 6/77 J. Nührenberg Linear and toroidal magnetohydrostatic equilibria

August, 1969 (in German)

ABSTRACT

A class of linear and toroidal equilibria is investigated which is characterized as follows: β is of order one; the current density is determined so as to satisfy the secondary condition that the longitudinal current through each magnetic surface vanish; the only expansion parameter used in the approximate solution of the equilibrium problem is the quantity $\frac{\varrho_{max}}{R_o} = \varepsilon$, where ϱ_{max} is the largest radius of the discharge tube and R_o the radius of curvature of the magnetic axis, which is constant in lowest order; moreover, the periodicity length L and the torsion in lowest order $\frac{1}{T_o}$ of the magnetic axis obey the relations $\frac{2\pi\varrho_{max}}{L} \sim 1$, $\frac{\varrho_{max}}{T_o} \sim 1$ (i.e. $\frac{T_o}{R_o} \sim \varepsilon$). Under these conditions the equilibria are of the $\ell = 1$ stellarator type, configurations of the $\ell = 2, 3, \ldots$ types not being included.

The independent variables used in the problem are the surfaces of constant flux (the magnetic surfaces) as coordinate surfaces, on which the magnetic field lines and the current density lines serve as coordinate lines; therefore, the integral condition of vanishing longitudinal current through each magnetic surface can readily be taken into consideration. The quantities ϱ, φ, s of Mercier's coordinate system [1], which describe the equilibrium geometrically, are treated as dependent variables. This method is appropriate for investigating other integral secondary conditions or the choice of orders of magnitude in the expansion, too, insofar as the zeroth order, in which the pressure balance of the linear Θ-pinch is valid, is retained. This is because the equilibrium problem is then reduced to solving a finite system of ordinary differential equations in each order.

Preliminary investigations of stability show that this class of equilibria contains configurations which are stable according to the necessary condition of Mercier [1] and Greene & Johnson [2].

---

[1] Nucl. Fus. 4, 1964, 213

[2] Phys. Fluids 5, 1962, 510

Z u s a m m e n f a s s u n g

Es wird eine Klasse linearer und toroidaler Gleichgewichte untersucht, die folgendermaßen charakterisiert werden kann: β ist von der Größenordnung Eins; die Stromdichte wird so bestimmt, daß die integrale Nebenbedingung verschwindenden Längsstroms durch jede magnetische Fläche erfüllt ist; der einzige Entwicklungsparameter in der Näherungslösung des Gleichgewichtsproblems ist die Größe $\frac{\varrho_{max}}{R_0} = \varepsilon$ (1), worin ϱ_{max} der größte Radius des Entladungsgefäßes und R_0 der Krümmungsradius der magnetischen Achse in niedrigster Ordnung im Entwicklungsparameter ε ist; darüber hinaus erfüllen die Periodizitätslänge L und der Torsionsradius in niedrigster Ordnung T_0 der magnetischen Achse die Beziehungen: $\frac{2\pi\varrho_{max}}{L} \sim 1$; $\frac{\varrho_{max}}{T_0} \sim 1$ (2)(d.h. $\frac{T_0}{R_0} \sim \varepsilon$). Unter diesen Bedingungen sind die Gleichgewichte vom Typ des $\ell = 1$ Stellarators [15]; Konfigurationen vom Typ des $\ell = 2,3...$ Stellarators werden nicht betrachtet.

Als unabhängige Variable werden bei der Lösung des Problems die magnetischen Flächen als Koordinatenflächen, auf ihnen die Feld- und die Stromlinien als Koordinatenlinien benutzt, so daß sich die integrale Nebenbedingung verschwindenden Längsstroms angemessen berücksichtigen läßt. Die das Gleichgewicht geometrisch beschreibenden Größen ϱ, φ, s des Mercier'schen Koordinatensystems [7] werden als abhängige Variable behandelt. Das Verfahren ist geeignet auch zur Untersuchung anderer integraler Nebenbedingungen oder Wahl der Größenordnungen (2), sofern die nullte Näherung, in der die Druckbilanz des linearen Θ-Pinches gilt, beibehalten wird, da dies dazu führt, daß zur Lösung des Gleichgewichtsproblems in jeder Ordnung des Entwicklungsparameters ein endliches System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu lösen ist.

Mit der oben skizzierten Methode ist es möglich, im ganzen Plasmabereich gültige Aussagen über alle das Plasma beschreibenden

Größen zu gewinnen. Solche Größen sind z.B. die Rotationstransformation und ein die Stabilität des Gleichgewichtes beschreibendes Kriterium [7], [8], dessen Untersuchung ergibt, daß die beschriebene Klasse von Gleichgewichten solche enthält, die nach diesem Kriterium stabil sind.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung	1
II. Die Gleichgewichtsgleichungen in einem durch das Gleichgewicht gegebenen Koordinatensystem und der Zusammenhang mit der Geometrie der Konfiguration	3
III. Stabilitäts- und Diffusionseigenschaften	8
IV. Das Näherungsverfahren	10
A. Die allgemeine Entwicklung	10
B. Spezielle Lösungen bis zur zweiten Ordnung	19
a. Helikale Gleichgewichte	19
b. Toroidale Gleichgewichte	23
V. Numerische Rechnungen	27
Anhang 1	31
Anhang 2	35
Anhang 3	39
Anhang 4	40
Literatur	45

I. Einleitung

Es werden zweifach zusammenhängende magnetohydrostatische Gleichgewichte, also die Lösungen von

$$(I.1) \qquad \begin{aligned} (\underline{\nabla} \times \underline{B}) \times \underline{B} &= \nabla p \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned} \qquad *$$

in toroidaler Geometrie ohne Innenleiter untersucht, für die β in der Größenordnung von 1 liegt, so daß also weder eine klein-Entwicklung (s.z.B. [1]) noch ein Modell mit reinen Oberflächenströmen (s.z.B. [2]) als vereinfachende zusätzliche Annahmen in Frage kommen. Die einfachsten solcher toroidalen Gleichgewichte sind die rotationssymmetrischen (s.z.B. [3], [4]), die jedoch nicht betrachtet werden sollen. Denn die außer dem Druck noch freie zweite Funktion des Flusses durch die magnetischen Flächen (s.z.B. [5]) soll so gewählt werden, daß der Längsstrom durch jede magnetische Fläche verschwindet, und diese Bedingung ist für rotationssymmetrische Gleichgewichte nicht erfüllbar (s.z.B. [6], [7]). Für diese Wahl der zweiten freien Funktion sprechen mehrere Gründe. Einmal verschwindet in allen linearen Anordnungen, die als Vorstudie für toroidale Konfigurationen untersucht werden, z.B. den helikalen Gleichgewichten, der Gesamtlängsstrom; zum anderen läßt sich zeigen, daß diese Bedingung notwendig für die Existenz eines bei großer aber endlicher Leitfähigkeit bei zeitlich konstantem Magnetfeld langsam diffundierenden Gleichgewichts ist (s.z.B. [5]). Die Erfüllung dieser Nebenbedingung wird möglich durch die Benutzung von Koordinaten, die durch das Gleichgewicht definiert sind und die deshalb im weiteren auch für das Studium der allgemeinen Eigenschaften, z.B. Stabilitäts- und Diffusionsverhalten, geeignet sind.

---

*Hierin sind $\underline{B}$ und p dimensionslose Größen, die durch $\underline{B}^* = B_0 \underline{B}$, $p^* = p_0 p$ und $B_0^2 = \mu_0 p_0$ mit dem Magnetfeld $\underline{B}^*$ und dem Druck p^* zusammenhängen. Es sei $\beta = \frac{2\, p_{max}}{B_{Vak}^2}$, worin p_{max} den maximalen Wert des Plasmadruckes bezeichne und B_{Vak} ein für die Feldstärke im das Plasma umgebenden Vakuum charakteristischer Wert sei.

Im folgenden werden die magnetischen Flächen als Koordinatenflächen, die Feld- und die Stromlinien als Koordinatenlinien auf diesen Flächen benutzt.

Das Problem der Berechnung der Gleichgewichtsgrößen wird durch die sog. Schlankheitsnäherung (s.z.B. [13]) vereinfacht: das Plasma sei in einem schlauchartigen Gebiet des Radius ϱ_{max} um eine geschlossene Kurve enthalten, die seine magnetische Achse sei, wobei $\frac{\varrho_{max}}{R_0} = \varepsilon \ll 1$ gelten soll. Hierin ist ε der kleine Parameter, nach dem alle Gleichgewichtsgrößen entwickelt werden sollen und R_0 der Krümmungsradius der magnetischen Achse in nullter Ordnung in ε. Weiter seien T_0 ihr Torsionsradius nullter Ordnung und L ihre Periodizitätslänge, die noch folgenden Annahmen genügen mögen

$$\frac{2\pi\varrho_{max}}{L} \sim 1 \quad , \quad \frac{T_0}{R_0} \sim \varepsilon$$

Hiermit ist die Wahl eines Gleichgewichts verträglich, dessen Größen nullter Ordnung nur vom Fluß durch die magnetischen Flächen abhängen. Wird schließlich angenommen, daß $\frac{1}{R}$ und $\frac{1}{T}$ nach ε entwickelbar sind und in jeder Ordnung nur endlich viele Fourierkoeffizienten enthalten, so reduziert sich unter diesen Annahmen die Berechnung des Gleichgewichts auf die Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen für jede Ordnung in ε. Im wesentlichen werden die Abweichungen von der Lösung nullter Ordnung durch die Gleichungen bis zur zweiten Ordnung in ε beschrieben - z.B. sind die Rotationstransformation und der das Stabilitätsverhalten beschreibende Ausdruck von der Ordnung ε^2-, so daß es genügt, das Gleichgewicht bis zu dieser Ordnung zu berechnen.

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein förderndes Interesse. Den Herren Dr. W. Köppendörfer, Dr. D. Lortz, Dr. P. Merkel, Dr. H. Tasso, Dr. H. Wobig und H.P. Zehrfeld vom Institut für Plasmaphysik in Garching bei München danke ich für viele klärende Diskussionen.

II. Die Gleichgewichtsgleichungen in einem durch das Gleichgewicht gegebenen Koordinatensystem und der Zusammenhang mit der Geometrie der Konfiguration

Um die Divergenzfreiheit von Magnetfeld und Stromdichte zu sichern, werden folgende Ansätze gemacht

$$\text{(II.1)} \qquad \begin{aligned} \underline{B} &= \nabla\chi \times \nabla\psi \\ \underline{j} &= \nabla K \times \nabla\psi \end{aligned}$$

worin ψ der Längsfluß durch die magnetischen Flächen und χ bzw. K zwei mehrdeutige Funktionen seien, die längs der Feld- bzw. Stromlinien konstant sind. Für die Basisvektoren zu den kovarianten Vektorkomponenten seien noch die Bezeichnungen

$$\text{(II.2)} \qquad \underline{a}^1 = \nabla\psi \;, \quad \underline{a}^2 = \nabla\chi \;, \quad \underline{a}^3 = \nabla K$$

eingeführt. Es wird dann

$$\text{(II.3)} \qquad \begin{aligned} \underline{B} &= \underline{a}^2 \times \underline{a}^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}}\,\underline{a}_3 = -\frac{1}{\sqrt{g}}\,g_{i3}\,\underline{a}^i \\ \underline{j} &= \underline{a}^3 \times \underline{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\underline{a}_2 \end{aligned}$$

worin $\underline{a}_\nu$ die Basisvektoren zu den kontravarianten Vektorkomponenten sind und gilt

$$\text{(II.4)} \qquad \sqrt{g} = \underline{a}_1 \cdot (\underline{a}_2 \times \underline{a}_3) =: \Gamma \quad ; \quad g_{ik} = \underline{a}_i \cdot \underline{a}_k$$

Da der Druck Funktion des Längsflusses allein ist, folgt mit (I.1)

$$\text{(II.5)} \qquad \underline{j} \times \underline{B} = -\frac{1}{\Gamma}\,\underline{a}^1 = \frac{dp}{d\psi}\,\underline{a}^1 =: p'\,\underline{a}^1$$

und somit

$$\text{(II.6)} \qquad -\frac{1}{\Gamma} = p'$$

In diesem Koordinatensystem ist Γ also Funktion von ψ allein.

Außer dieser Gleichung ist zur Lösung des Gleichgewichtsproblems noch zu befriedigen

$$(\mathrm{II}.7) \qquad \underline{j} = \underline{\nabla} \times \underline{B}$$

Wegen (II.3) und (II.6) wird

$$(\mathrm{II}.8) \qquad \begin{aligned} \underline{\nabla} \times \underline{B} = & -\frac{1}{\Gamma}\Big[\frac{1}{\Gamma}\Big(\frac{\partial g_{33}}{\partial \chi} - \frac{\partial g_{23}}{\partial K}\Big)\underline{a}_1 + \Big(\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial g_{13}}{\partial K} - \frac{\partial}{\partial \psi}\Big(\frac{g_{33}}{\Gamma}\Big)\Big)\underline{a}_2 \\ & + \Big(\frac{\partial}{\partial \psi}\Big(\frac{g_{23}}{\Gamma}\Big) - \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial g_{13}}{\partial \chi}\Big)\underline{a}_3\Big] \end{aligned}$$

so daß sich aus (II.7) folgendes Gleichungssystem ergibt:

$$(\mathrm{II}.9\ a\text{-}c) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial g_{33}}{\partial \chi} - \frac{\partial g_{23}}{\partial K} &= 0 \\ p'\frac{\partial g_{13}}{\partial K} - \frac{\partial}{\partial \psi}(p' g_{33}) &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial \psi}(p' g_{23}) - p'\frac{\partial g_{13}}{\partial \chi} &= 0 \end{aligned}$$

Die vier Gleichungen (I.1) gehen also in den Koordinaten ψ, χ, K in die vier Gleichungen (II.6, 9) über, die damit (I.1) äquivalent sind. Hat man (II.9) gelöst, so kennt man g_{13}, g_{23}, g_{33}; zur Bestimmung der übrigen g_{ik} vergleiche man S. 7.

Der Zusammenhang mit der Geometrie des Gleichgewichts wird nun auf folgende Weise hergestellt. Die magnetische Achse des Gleichgewichts werde durch die in der Bogenlänge s periodischen Funktionen $\frac{1}{R(s)}$ und $\frac{1}{T(s)}$ gegeben. Mißt ρ den Abstand von dieser Seele in der zu ihr senkrechten Ebene und φ den von der Hauptnormalen aus gezählten Winkel, so daß für die Binormale $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist, so bilden ρ, φ, s ein rechtshändiges Koordinatensystem mit dem metrischen Tensor

$$(\mathrm{II}.10) \qquad \begin{aligned} &\tilde{g}_{11} = 1, \quad \tilde{g}_{22} = \rho^2, \quad \tilde{g}_{33} = \Big(1 - \frac{\rho}{R}\cos\varphi\Big)^2 + \frac{\rho^2}{T^2} \\ &\tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{13} = 0, \quad \tilde{g}_{23} = -\frac{\rho^2}{T}, \quad \sqrt{\tilde{g}} = \rho\Big(1 - \frac{\rho}{R}\cos\varphi\Big) \end{aligned}$$

Betrachtet man ρ , φ , s als Funktionen von ψ, χ, K, so ergibt sich (wenn die partiellen Ableitungen nach diesen Größen durch Indizes angegeben werden)

$$\Gamma = \rho\left(1-\frac{\rho}{R}\cos\varphi\right)\left[\rho_\psi(\varphi_\chi s_K-\varphi_K s_\chi)-\varphi_\psi(\rho_\chi s_K-\rho_K s_\chi)+s_\psi(\rho_\chi\varphi_K-\rho_K\varphi_\chi)\right]$$

$$\text{(II.11)}\quad g_{13} = \rho_\psi\rho_K+\rho^2\varphi_\psi\varphi_K+\left(\left(1-\frac{\rho}{R}\cos\varphi\right)^2+\frac{\rho^2}{T^2}\right)s_\psi s_K-\frac{\rho^2}{T}(\varphi_\psi s_K+s_\psi\varphi_K)$$

$$g_{23} = \rho_\chi\rho_K+\rho^2\varphi_\chi\varphi_K+\left(\left(1-\frac{\rho}{R}\cos\varphi\right)^2+\frac{\rho^2}{T^2}\right)s_\chi s_K-\frac{\rho^2}{T}(\varphi_\chi s_K+s_\chi\varphi_K)$$

$$g_{33} = \rho_K^2+\rho^2\varphi_K^2+\left(\left(1-\frac{\rho}{R}\cos\varphi\right)^2+\frac{\rho^2}{T^2}\right)s_K^2-\frac{2\rho^2}{T}\varphi_K s_K$$

Für φ und s werden nun folgende Ansätze gemacht

$$\text{(II.12)}\quad \begin{aligned} \varphi &= -2\pi\chi+2\pi\frac{\bar{\Psi}'}{I'}K+\tilde{\varphi}(\psi,\varphi,s) \\ s &= \frac{L}{I'}K+\tilde{s}(\psi,\varphi,s) \end{aligned} \quad *$$

worin $'$ die Ableitung der Funktionen $\bar{\psi}(\psi)$ und $I(\psi)$ nach ψ bedeutet und $\tilde{\varphi}$, $\tilde{s}$ doppeltperiodische Funktionen von φ und s mit der Periode 2π bzw. L , der Periodizitätslänge der magnetischen Achse, sind. Die Stromlinien $K=konst$ schließen sich also bei einem kleinen Umlauf um die magnetische Achse. Nach (II.1) ist das Flußelement zwischen je zwei infinitesimal benachbarten Flächen $\chi=konst$, $\chi+d\chi=konst$ und $\psi=konst$, $\psi+d\psi=konst$

$$\text{(II.13)}\qquad d\phi_B = d\chi\, d\psi$$

und analog für das Stromelement

$$\text{(II.14)}\qquad d\phi_j = dK\, d\psi$$

---

* Dies sind implizite Ansätze für φ und s , die deshalb praktisch sind, weil sie nach χ und K aufgelöst sind, so daß bei Kenntnis von $\tilde{\varphi}(\psi,\varphi,s)$ und $\tilde{s}(\psi,\varphi,s)$ Feld- und Stromlinien in Abhängigkeit von den geometrischen Koordinaten φ und s bekannt sind. Man könnte auch $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{s}$ in den Variablen (IV.17) schreiben, was zunächst näher liegen würde, da ja φ und s als Funktionen von ψ,χ,K betrachtet werden; dann sind die Ansätze (II.12) aber nicht nach χ und K aufgelöst.

Damit folgt für den Längsfluß und den Längsstrom zwischen zwei Flächen $\psi = konst$, $\psi + d\psi = konst$ durch Integration längs der geschlossenen Stromlinien

$$(\mathrm{II}.15) \qquad d\psi_{längs} = \int_{k=konst} d\psi\, dX = -\frac{1}{2\pi} d\psi \int_{k=konst} d\varphi = d\psi$$

$$dI_{längs} = \int_{k=konst} d\psi\, dK = 0$$

so daß also durch den Ansatz (II.12) die Eigenschaft verschwindenden Längsstroms gesichert wird. Weiter ergibt sich für den Querfluß und den Querstrom pro Periode zwischen zwei Flächen $\psi = konst$ und $\psi + d\psi = konst$, die durch Integration längs einer Linie $\varphi = konst$ über eine Periode definiert werden sollen

$$(\mathrm{II}.16) \qquad d\psi_{quer} = \int_{\varphi=konst} d\psi\, dX = d\psi \frac{\bar{\Psi}'}{I'} \int_{\varphi=konst} dK = d\psi \frac{\bar{\Psi}'}{L} \int ds = d\psi\, \bar{\psi}'$$

$$dI_{quer} = d\psi \int_{\varphi=konst} dK = d\psi\, I'$$

$\bar{\psi}'$ und I' sind also die Ableitungen des Querflusses bzw. -stromes nach dem Längsfluß. Die Seelennormale mache n Umläufe um die Seele beim Fortschreiten um eine Periode längs der Seele. Dann enthält $\bar{\psi}$ den n-fachen Längsfluß, so daß sich für den Zusammenhang zwischen Rotationstransformation pro Periode und Ableitung des Querflusses ergibt

$$(\mathrm{II}.17) \qquad \iota = 2\pi \frac{d\bar{\psi}}{d\psi} - 2\pi n$$

(In Kapitel IV wird stets $n = 1$ sein.)

Setzt man nun die Ansätze (II.12) in (II.11) ein, so ergeben (II.6) und (II.9) ein Gleichungssystem für die fünf Funktionen

$$(\mathrm{II}.18) \qquad \rho(\psi, \varphi, s),\ \tilde{\varphi}(\psi, \varphi, s),\ \tilde{s}(\psi, \varphi, s),\ \bar{\psi}',\ I'$$

Wie dieses System im einzelnen gelöst wird, soll im Augenblick nicht diskutiert werden, da in Kapitel IV ein Näherungsverfahren für die Lösung entwickelt wird, an dem sich die Bestimmung der

Funktionen (II.18) einfacher diskutieren läßt.

Mit $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{s}$ kennt man nach (II.12) φ, s als Funktionen von ψ, χ, K . Da die in (II.11) nicht vorkommenden Koeffizienten des metrischen Tensors ebenso wie die dort aufgeführten in ihrer funktionalen Gestalt in Abhängigkeit von ρ, φ, s und deren ersten Ableitungen bekannt sind, ist also mit bekannten Funktionen (II.18) der metrische Tensor vollständig bestimmbar.

III. Stabilitäts- und Diffusionseigenschaften

a) Von Mercier (s.z.B. [7]) und Greene & Johnson (s.z.B. [1] und [8]) wurde ein notwendiges Stabilitätskriterium für toroidale Gleichgewichte hergeleitet, das für die Stabilität bzgl. Störungen, die in der Umgebung einer geschlossenen Magnetfeldlinie lokalisiert sind, auch hinreichend ist. Aus diesem Kriterium erhält man für Gleichgewichte mit verschwindendem Längsstrom als notwendige Bedingung für Stabilität

$$(\mathrm{III}.1)\quad \left\{\frac{1}{2}\bar{\Psi}'' - \int \frac{\underline{j}\cdot\underline{B}}{|\nabla\psi|^3}\,dS\right\}^2 + \int \frac{B^2\,dS}{|\nabla\psi|^2}\left[p'V'' - \int \frac{j^2}{|\nabla\psi|^3}\,dS\right] > 0$$

worin die Oberflächenintegrale über eine Fläche $\psi = konst$ zu erstrecken sind und V das innerhalb dieser Fläche liegende Volumen ist. In der im folgenden Kapitel durchgeführten Näherungstheorie wird sich ergeben, daß die eckige Klammer einen Beitrag zweiter Ordnung, das Quadrat der geschweiften Klammer nur einen Beitrag vierter Ordnung im Entwicklungsparameter liefert. Für die betrachtete Klasse von Gleichgewichten ist also für die Stabilität notwendig

$$(\mathrm{III}.2)\qquad p'V'' - \int \frac{j^2}{|\nabla\psi|^3}\,dS > 0$$

Wegen

$$(\mathrm{III}.3)\qquad V' = \int \sqrt{g}\,d\chi\,dK = -\frac{1}{p'}\int d\chi\,dK = \frac{I'}{p'}$$

und (nach (II.3))

$$\int \frac{j^2}{|\nabla\psi|^3}\,dS = \int \frac{\sqrt{g}\,j^2}{|\nabla\psi|^2}\,d\chi\,dK = p'\int \frac{g_{22}}{g^{11}}\,d\chi\,dK$$

$$= -p'\int \frac{\sqrt{g}^2\,g_{22}\,d\chi\,dK}{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} = -\frac{1}{p'}\int \frac{d\chi\,dK}{g_{33} - \frac{g_{23}^2}{g_{22}}}$$

ergibt sich für (III.2)

$$p'\left(\frac{I'}{p'}\right)' + \frac{1}{p'}\int \frac{d\chi\,dK}{g_{33} - \frac{g_{23}^2}{g_{22}}} > 0$$

und mit $p'(\psi) < 0$

$$(\text{III}.4) \qquad -p'I'' + I'p'' - \int \frac{d\chi\, dK}{g_{33} - \frac{g_{23}^2}{g_{22}}} > 0$$

Wenn also das Gleichgewichtsproblem, wie in II beschrieben, so behandelt wird, daß sich als Lösung die Funktionen (II.18) ergeben, ist die Auswertung des Kriteriums (III.4) einfach, wenn die Näherungslösung zugrunde gelegt wird.

b) Für ein fast statisches, jedoch auf Grund großer aber endlicher Leitfähigkeit bei zeitlich konstantem Magnetfeld langsam diffundierendes Gleichgewicht gilt nach [5] * für die Diffusionsgeschwindigkeit $\underline{v}$, wenn die für die Existenz eines solchen Gleichgewichts notwendige Bedingung verschwindenden Längsstroms erfüllt ist und im Plasma eine durch die Gleichgewichtskonfiguration bestimmte Materiequelldichte angenommen wird,

$$(\text{III}.5) \qquad \underline{v} = \frac{1}{\underline{B}^2}\left(\nabla\phi - \frac{1}{\sigma}\underline{j}\right) \times \underline{B} + a\underline{B}$$

worin σ die Leitfähigkeit, a die durch den Betrag der Feldstärke dividierte, dem Feld parallele Geschwindigkeit und ϕ das Potential des elektrischen Feldes ist, das der Gleichung

$$(\text{III}.6) \qquad \underline{B}\cdot\nabla\phi = \frac{1}{\sigma}\underline{B}\cdot\underline{j}$$

genügt. Damit ergibt sich für den Materiestrom M aus einem durch die Fläche $\psi = konst$ begrenzten Volumen heraus, wenn n die Materiedichte ist und die Zustandsgleichung

$$(\text{III}.7) \qquad n = n(p)$$

angenommen wird (nach [5] und (II.3))

$$(\text{III}.8) \qquad M = n\int \underline{v}\cdot d^2\underline{f} = \frac{n}{\sigma}\int \frac{\underline{j}^2\, dS}{|\nabla p|} = \frac{n}{\sigma}\int g_{22}\, d\chi\, dK$$

Für die Auswertbarkeit von (III.8) gilt das unter a) Gesagte. Ein Vergleich mit einer in [9] angegebenen Diffusionsformel findet sich in Anhang 3.

---

* Hier wird von thermo-elektrischen Effekten abgesehen und eine isotrope Leitfähigkeit vorausgestzt. Die th.-el. Effekte können durch die Annahme räumlich konstanter Temperatur ausgeschlossen werden, die zumindest bei einigen Experimenten gerechtfertigt erscheint. Dann folgt aber, daß die Leitfähigkeit parallel zum Magnetfeld etwa um den Faktor 2 größer ist als senkrecht zum Magnetfeld. Die hieraus folgende Korrektur an (III.8) ist leicht bestimmbar und ohne große praktische Bedeutung.

IV. Das Näherungsverfahren

IV. A Die allgemeine Entwicklung

Zunächst soll das Vorgehen bei der Näherungslösung des Gleichgewichtsproblems noch einmal kurz zusammengefaßt werden: die Gleichungen (II. 6, 9) werden durch Einsetzen der Formeln (II. 11) (in die zuvor (II. 12) einzutragen ist) zu einem Gleichungssystem, das den Entwicklungsparameter

$$\frac{\rho_{max}}{R_0} = \varepsilon \tag{IV. 1}$$

an den Stellen $\frac{\rho}{R}$ explizit enthält: denn wenn man $\xi = \frac{\rho}{\rho_{max}}$ als dimensionslose Koordinate einführt, steht an diesen Stellen in niedrigster Näherung $\frac{\rho}{R} = \xi \frac{\rho_{max}}{R_0} = \varepsilon \xi$. Unter Annahme, daß alle Gleichgewichtsgrößen in noch näher anzugebender Weise nach ε entwickelbar sind, entsteht so aus (II. 6, 9) für jede Ordnung in ε ein zu dieser Ordnung gehöriges Gleichungssystem. Zur Lösung des Gleichgewichtsproblems sind also diese Gleichungssysteme sukzessiv zu lösen.

(IV. 1) ist die sog. Schlankheitsnäherung (s. I). Zur Abgrenzung gegenüber anderen Entwicklungsmethoden, die auch (IV. 1) genügen, werden nun weitere dimensionslose Größen eingeführt. Nach (I. 1) sind $\underline{B}$ und p dimensionslos, so daß die Annahme $\beta \sim 1$ zur Folge hat

$$|\underline{B}| \sim 1 \quad , \quad p \sim 1 \tag{IV. 2}$$

Um zu einem Näherungsverfahren zu kommen, für das in jeder Ordnung nur eine endliche Zahl von Gleichungen zu lösen ist, wird ferner in nullter Ordnung vorausgesetzt

$$\overset{0}{\rho} = \overset{0}{\rho}(\psi) \tag{IV. 3}$$

Bezeichnet weiter L die Periodizitätslänge der Seele, so genügt es, das Intervall $0 \leq s \leq L$ zu betrachten, so daß

$$\frac{s}{L} \sim 1 \tag{IV. 4}$$

Ist schließlich T_0 der Torsionsradius der Seele in niedrigster Ordnung, so bleiben bei festgehaltenen Annahmen (IV.1,2) noch die beiden Verhältnisse

$$\frac{\varrho_{max}}{T_0} \quad , \quad \frac{\varrho_{max}}{L}$$

festzulegen. Es soll im folgenden

$$\text{(IV.5)} \qquad \frac{2\pi\,\varrho_{max}}{L} \sim 1$$

betrachtet werden; in (IV.B) wird gezeigt, daß dann als Lösbarkeitsbedingung der ersten Ordnung des Entwicklungsverfahrens

$$\text{(IV.6)} \qquad \frac{\varrho_{max}}{T_0} \sim 1 \quad \left(\text{d.h. } \frac{T_0}{R_0} \sim \varepsilon\right)$$

folgt, womit alle dimensionslosen Parameter festgelegt sind. Das Verfahren ist natürlich auch geeignet, eine andere Größenordnungswahl als (IV.5) zu untersuchen, insbesondere die Fälle

$$\text{(IV.7)} \qquad \frac{2\pi\,\varrho_{max}}{L} \sim \varepsilon \quad , \quad \frac{2\pi\,\varrho_{max}}{L} \sim \frac{1}{\varepsilon}$$

dies soll jedoch ebenso wie das Studium anderer integraler Nebenbedingungen als derjenigen verschwindenden Längsstroms durch jede magnetische Fläche einer getrennten Untersuchung vorbehalten bleiben.

Die Wahl der Größenordnung (IV.5) legt den Typ der betrachteten toroidalen Anordnung in folgender Weise fest: in der Folge der Konfigurationen für $\varepsilon \to 0$ bleiben die Abmessungen eines Periodizitätssegmentes fest im Gegensatz zu der Skalierung (IV.7), für die der Grenzübergang in anderer Weise durchgeführt werden muß. An Hand einer Klassifizierung der Gleichgewichte nach der Gestalt ihrer Seele soll noch erläutert werden, in welchem Sinne (IV.6) eine notwendige Bedingung ist. Man kann die möglichen Seelen folgendermaßen beschreiben:

1. Ebene Seele

In diesem Falle kann man zeigen, daß die Gleichungen erster Ordnung mit einer Krümmung, die in niedrigster Ordnung konstant ist, nicht lösbar sind: der Beweis findet sich im Abschnitt über helikale Gleichgewichte. Ist die Krümmung in erster Ordnung variabel, so sind zwar die Gleichungen erster Ordnung, nicht jedoch die Gleichungen zweiter Ordnung lösbar, weil die Integrabilitätsbedingung für die Gleichung (II.9a) nicht erfüllt ist. Im Rahmen dieses Näherungsverfahrens lassen sich also keine Gleichgewichte mit verschwindendem Längsstrom und ebener Seele konstruieren.

2. Nicht-ebene Seele

a) Ist die Krümmung in niedrigster Ordnung konstant, so lassen sich die Gleichungen erster Ordnung nur mit einer in nullter Ordnung konstanten Torsion lösen; es ist also $\frac{T_0}{R_0} \sim \varepsilon$ (s.o.).

b) Ist die Krümmung in niedrigster Ordnung nicht konstant, so gibt es zwei Möglichkeiten:
entweder gibt es eine Torsion nullter Ordnung - dieser Fall ist komplizierter als 2a und braucht nicht behandelt zu werden, solange nicht festgestellt ist, daß nicht in 2a Gleichgewichte mit günstigen Eigenschaften enthalten sind,
oder die Torsion ist von höherer Ordnung - dann kann man wieder zeigen, daß die Integrabilitätsbedingung für die zweite Ordnung von (II.9a) nicht erfüllt ist.

Im folgenden werden also (IV.1-6) zugrunde gelegt. Für die Entwicklungen der Funktionen (II.18) werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\rho = \sum_{\nu \geq 0} \varepsilon^\nu \overset{\nu}{\rho} \quad , \quad \overset{0}{\rho} = \overset{0}{\rho}(\psi)$$

(IV.8)
$$\tilde{\varphi} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \overset{\nu}{\varphi} \quad , \quad \tilde{s} = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \overset{\nu}{s}$$

$$2\pi \frac{\Psi'}{I'} = 2\pi \frac{\Psi'_0}{I'_0}\left(1 + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \overset{\nu}{t}\right) , \quad \frac{1}{I'} = \frac{1}{I'_0}\left(1 + \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \overset{\nu}{\sigma}\right)$$

Damit erhält man

$$(\text{IV}.9) \qquad g_{ik} = \sum_{\nu \geq 0} \varepsilon^{\nu} \overset{\nu}{g}_{ik}$$

$$\Gamma = \sum_{\nu \geq 0} \varepsilon^{\nu} \overset{\nu}{\Gamma}$$

und aus (II.6) und (II.9) für die ν-te Ordnung folgendes Gleichungssystem

$\nu = 0$

$$(\text{IV}.10\,a\text{-}d) \qquad \begin{aligned} \overset{0}{\Gamma} &= -\frac{1}{p'} \\ \overset{0}{g}_{33X} - \overset{0}{g}_{23K} &= 0 \\ p'\,\overset{0}{g}_{13K} - (p'\overset{0}{g}_{33})_{\psi} &= 1 \\ (p'\overset{0}{g}_{23})_{\psi} - p'\overset{0}{g}_{13X} &= 0 \end{aligned}$$

$\nu > 0$

$$(\text{IV}.11\,a\text{-}d) \qquad \begin{aligned} \overset{\nu}{\Gamma} &= 0 \\ \overset{\nu}{g}_{33X} - \overset{\nu}{g}_{23K} &= 0 \\ p'\,\overset{\nu}{g}_{13K} - (p'\overset{\nu}{g}_{33})_{\psi} &= 0 \\ (p'\overset{\nu}{g}_{23})_{\psi} - p'\overset{\nu}{g}_{13X} &= 0 \end{aligned}$$

Für die nullte Ordnung ergibt sich also mit (II.11) und (II.12)

$(\text{IV}.10\,a)$: $\quad \overset{0}{\Gamma} = \overset{0}{\rho}\,\overset{0}{\rho}{}'\left(-2\pi \frac{L}{I_0'}\right) = -\frac{1}{p'}$

$(\text{IV}.10\,b)$: $\quad$ liefert keine Gleichung

$(\text{IV}.10\,c)$: $\quad -p'\frac{L^2}{I_0'^3} I_0'' - \left(p'\frac{L^2}{I_0'^2}\right)' = -\frac{1}{I_0'}\left(p'\frac{L^2}{I_0'}\right)' = 1$

$(\text{IV}.10\,d)$: $\quad \left(\frac{p'\overset{0}{\rho}{}^2}{I_0'}\left(2\pi\bar{\psi}_0' - \frac{L}{I_0}\right)\right)' = 0$

Setzt man (IV.10a) in (IV.10c) ein, so wird

$$\left(-\frac{1}{2\pi\overset{\circ}{\varrho}\overset{\circ}{\varrho}{}'}\right)' = 2\pi\overset{\circ}{\varrho}\overset{\circ}{\varrho}{}' p'$$

also mit (II.3)

$$\text{(IV.12)} \qquad p + \frac{\overset{\circ}{B}{}^2}{2} = \text{konst}$$

so daß in nullter Ordnung die Druckbilanz des linearen Theta-Pinches erfüllt ist. Die letzte Gleichung (IV.10d) ergibt wegen der Beschränktheit des Querflusses für $\psi \to 0$

$$\text{(IV.13)} \qquad 2\pi\bar{\psi}_0' = \frac{L}{T_0}$$

In niedrigster Näherung ist also

$$\text{(IV.14)} \qquad \begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi} &= -2\pi X + \frac{L}{T_0 I_0'} K \\ \overset{\circ}{s} &= \frac{L}{I_0'} K \end{aligned}$$

Mit (II.11) und (II.12) erhält man für $\nu > 0$ für die Entwicklungen (IV.9)

$$\text{(IV.15)} \qquad \begin{aligned} \Gamma &= -2\pi\frac{L}{I_0'}\left(\overset{\circ}{\varrho}\check{\varrho}\right)_\psi + 2\pi\left(\frac{L}{I_0'}\right)'\overset{\circ}{\varrho}{}'\check{\varrho}_K K + \overset{\circ}{\varrho}\overset{\circ}{\varrho}{}'\left(\check{\varphi}_X\frac{L}{I_0'} - 2\pi\check{s}_K - \frac{2\pi L\check{\sigma}}{I_0'} - \frac{L}{T_0 I_0'}\check{s}_X\right) + \text{Inh. Terme} \\ \check{g}_{13} &= \overset{\circ}{\varrho}{}'\check{\varrho}_K + \frac{L}{I_0'}\check{s}_\psi + \frac{L}{I_0'}\left(\frac{L}{I_0'}\check{\sigma}\right)_\psi K + \left(\frac{L}{I_0'}\right)'\left(\check{s}_K + \frac{L}{I_0'}\check{\sigma}\right)K + \text{Inh. Terme} \\ \check{g}_{23} &= -2\pi\overset{\circ}{\varrho}{}^2\left(\check{\varphi}_K + \frac{L}{T_0 I_0'}\check{\tau}\right) + \frac{L}{I_0'}\check{s}_X + \frac{2\pi\overset{\circ}{\varrho}{}^2}{T_0}\left(\check{s}_K + \frac{L}{I_0'}\check{\sigma}\right) + \text{Inh. Terme} \\ \check{g}_{33} &= 2\frac{L}{I_0'}\left(\check{s}_K + \frac{L}{I_0'}\check{\sigma}\right) + \text{Inh. Terme} \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich aus (IV.11a-c) nach einigen Umformungen das folgende Gleichungssystem (mit symbolischen Abkürzungen für die inhomogenen Terme)

$$-2\pi \frac{L}{I_0'}\left(\overset{\circ}{\rho}\check{\rho}\right)_\psi + 2\pi\left(\frac{L}{I_0'}\right)'\overset{\circ}{\rho}\check{\rho}_\kappa K + \overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{\rho}'\left(\frac{L}{I_0'}\check{\varphi}_\chi - \frac{2\pi L\check{\sigma}}{I_0'} - 2\pi\check{s}_\kappa - \frac{L}{T_0 I_0'}\check{s}_\chi\right) + I_a = 0$$

(IV.16 a-c)

$$\left[\frac{L}{I_0'}\check{s}_\chi - 2\pi\frac{\overset{\circ}{\rho}{}^2}{T_0}\check{s}_\kappa + 2\pi\overset{\circ}{\rho}{}^2\check{\varphi}_\kappa\right]_\kappa + I_b = 0$$

$$p'^2\overset{\circ}{\rho}{}'\check{\rho}_{\kappa\kappa} + p'^2\left(\frac{L}{I_0'}\right)'\check{s}_{\kappa\kappa}K - \left(p'^2\frac{L}{I_0'}\check{s}_\kappa\right)_\psi - \left(p'^2\frac{L^2}{I_0'^2}\check{\sigma}\right)_\psi + I_c = 0$$

Die Lösung von (IV.11α) ergibt sich, nachdem (IV.11 a-c) gelöst sind, folgendermaßen: (IV.11 b,c) liefern

$$\left(p'\check{g}_{23\kappa}\right)_\psi - \left(p'\check{g}_{33\chi}\right)_\psi = 0$$

$$p'\check{g}_{13\kappa\chi} - \left(p'\check{g}_{33\chi}\right)_\psi = 0$$

Somit folgt

$$\left[\left(p'\check{g}_{23}\right)_\psi - p'\check{g}_{13\chi}\right]_\kappa = 0$$

$$\left(p'\check{g}_{23}\right)_\psi - p'\check{g}_{13\chi} = f(\psi,\chi)$$

Aus (II.11) und (II.12) läßt sich leicht zeigen, daß in den Zerlegungen

$$\check{g}_{13} = {}_0\check{g}_{13} + {}_1\check{g}_{13}K$$

$$\check{g}_{23\psi} = {}_0\check{\gamma}_{23} + {}_1\check{\gamma}_{13}K$$

die vier mit den Indizes $_0$ und $_1$ gekennzeichneten Funktionen einwertige Ortsfunktionen sind. Also folgt

$$p'\cdot{}_1\check{\gamma}_{23} - p'\cdot{}_1\check{g}_{13\chi} = 0$$

$$p''\check{g}_{23} + p'\cdot{}_0\check{\gamma}_{23} - p'\cdot{}_0\check{g}_{13\chi} = f(\psi,\chi)$$

Da die linke Seite der letzten Gleichung einwertige Ortsfunktion ist, folgt

$$p''\check{g}_{23} + p'\cdot{}_0\check{\gamma}_{23} - p'\cdot{}_0\check{g}_{13\chi} = f(\psi)$$

Hierin ist $p''\check{g}_{23} + p'\cdot{}_0\check{\gamma}_{23}$ der einwertige Anteil von $\left(p'\check{g}_{23}\right)_\psi$, so daß (IV.11α) gelöst ist, wenn der nur ψ-abhängige Anteil von

$$\left(p'\check{g}_{23}\right)_\psi - p'\cdot{}_0\check{g}_{13\chi}$$

Null gesetzt wird. Sei dieser Anteil mit Ψ gekennzeichnet. Die Lösung von (IV.11d) ist also

$$\left(p' \check{g}_{23}\right)^{\Psi} - \int_0^{\Psi} \left({}_0\check{g}_{13X}\right)^{\Psi'} p'(\psi')\, d\psi' = \text{konst}$$

Setzt man hier noch die aus (IV.8) folgenden Entwicklungen ein, so wird

$$\text{(IV.16d)} \qquad 2\pi p' \overset{\circ}{\rho}{}^2 (\check{\sigma} - \check{\tau}) + I_d^{\Psi} = 0$$

Das Gleichungssystem (IV.16) für $\check{\rho}$, $\check{\varphi}$, $\check{s}$, $\check{\sigma}$, $\check{\tau}$ läßt sich noch umschreiben: wegen (II.12) können doppeltperiodische Funktionen in φ, s auch in den Variablen

$$-2\pi X + \frac{2\pi \bar{\Psi}'}{I'} K \quad \text{und} \quad \frac{L}{I'} K$$

mit der Periode 2π bzw. L als doppeltperiodische Funktionen geschrieben werden, z.B.

$$\text{(IV.17)} \qquad \check{\rho} = \check{\rho}\left(\psi, -2\pi X + 2\pi \frac{\bar{\Psi}'}{I'} K, \frac{L}{I'} K\right) =: \check{\rho}(1,2,3)$$

Es ist also für eine solche Funktion a

$$a_{\Psi} = a_{,1} + a_{,2} \left(\frac{2\pi \bar{\Psi}'}{I'}\right)' K + a_{,3} \left(\frac{L}{I'}\right)' K$$

Schreibt man in (IV.16) die Ableitungen nach ψ hiermit um, so wird

$$\text{(IV.18a-d)} \qquad \begin{aligned}
&-2\pi \frac{L}{I_0'} \left(\overset{\circ}{\rho} \check{\rho}\right)_{,1} + \overset{\circ}{\rho}\overset{\circ}{\rho}{}' \left(\frac{L}{I_0'} \check{\varphi}_X - \frac{2\pi L \check{\sigma}}{I_0'} - 2\pi \check{s}_K - \frac{L}{T_0 I_0'} \check{s}_X\right) + I_a = 0 \\
&\left[\frac{L}{I_0'} \check{s}_X - \frac{2\pi \overset{\circ}{\rho}{}^2}{T_0} \check{s}_K + 2\pi \overset{\circ}{\rho}{}^2 \check{\varphi}_K\right]_K + I_b = 0 \\
&\left[p'^2 \overset{\circ}{\rho}{}' \check{\rho}_K - I_0' \left(\frac{p'^2 L}{I_0'^2} \check{s}\right)_{,1}\right]_K - \left(p'^2 \frac{L^2}{I_0'^2} \check{\sigma}\right)_{,1} + I_c = 0 \\
&2\pi p' \overset{\circ}{\rho}{}^2 (\check{\sigma} - \check{\tau}) + I_d^{\Psi} = 0
\end{aligned}$$

Aus (IV.18c) geht hervor, daß mit der Zerlegung

$$I_c =: I_c^K + I_c^\psi$$

worin I_c^ψ den nur ψ-abhängigen Anteil von I_c bezeichne, gilt

$$\left[p'^2 \overset{0}{\varrho}{}' \overset{\vee}{\varrho}_K - I_0' \left(\frac{p'^2 L}{I_0'^2} \overset{\vee}{s}\right)_{,1}\right]_K + I_c^K = 0$$

(IV.19a,b)

$$-\left(p'^2 \frac{L^2}{I_0'^2} \overset{\vee}{\sigma}\right)_{,1} + I_c^\psi = 0$$

Hat man die gewöhnliche Differentialgleichung (IV.19b) für $\overset{\vee}{\sigma}$ gelöst, so folgt $\overset{\vee}{\tau}$ durch Quadratur, so daß für $\overset{\vee}{\varrho}$, $\overset{\vee}{\varphi}$, $\overset{\vee}{s}$ das partielle Differentialgleichungssystem (IV.18 a,b ; 19 a) zu lösen bleibt. Hieraus erkennt man als notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung: I_b und I_c^K müssen partielle Ableitungen nach K einwertiger Ortsfunktionen sein, d.h. ihre Integrale bzgl. K bei festem ψ und χ über eine Periode müssen verschwinden. Diese Bedingung ist auch hinreichend, denn ist sie erfüllt, so läßt sich in (IV.18 b , 19 a) eine Integration ausführen. $\overset{\vee}{\varrho}_K$ und $\overset{\vee}{\varphi}_K$ können also in die nach K differenzierte Gleichung (IV.18a) eingesetzt werden, was folgende lineare inhomogene partielle Differentialgleichung für $\overset{\vee}{s}$ ergibt:

(IV.20)
$$-2\pi \frac{L^2}{I_0'^2}\left(\frac{\overset{0}{\varrho}}{\overset{0}{\varrho}{}'} \frac{I_0'^2}{p'^2}\left(\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{\vee}{s}\right)_{,1}\right)_{,1} + \overset{0}{\varrho}\overset{0}{\varrho}{}'\left(-\left(\frac{L}{I_0'}\right)^2 \frac{1}{2\pi \overset{0}{\varrho}{}^2} \overset{\vee}{s}_{\chi\chi} - 2\pi \overset{\vee}{s}_{KK}\right) = Inh.$$

(hier sind die Variablensysteme ψ, χ, K und 1, 2,3 vermischt, um die Gleichung kurz zu schreiben: mit (IV.17) erkennt man, daß es sich um eine nicht-uniform elliptische Gleichung für $\overset{\vee}{s}$ in den Variablen 1, 2 , 3 handelt); hat man (IV.20) gelöst, so bestimmen sich $\overset{\vee}{\varrho}$ und $\overset{\vee}{\varphi}$ durch triviale Integration aus (IV.19a,18b). Die Lösung von (IV.20) wird durch folgende für das Näherungsverfahren charakteristische Tatsache erleichtert: die Annahme (IV.3) hat zur Folge, daß in jeder Ordnung die Lösungen so wählbar sind, daß sie nur eine endliche Anzahl von Fourierkomponenten bzgl. der Variablen 2 , 3 (bzw. φ, s) enthalten, da die Inhomogenitäten der ν-ten

diese Eigenschaft haben, sofern die Lösungen bis zur $(\nu-1)$-ten Ordnung diese Eigenschaft besitzen und für $\frac{1}{R(s)}$ und $\frac{1}{T(s)}$ Entwicklungen der Form

$$(\text{IV}.21)\qquad \begin{aligned} \frac{\rho_{max}}{R} &= \varepsilon^{\nu}\check{r}(s)\,; \quad \mathring{r}(s)=0\,, \quad \hat{r}(s)=1 \\ \frac{1}{T} &= \frac{1}{T_0}\varepsilon^{\nu}\check{t}(s)\,; \quad \mathring{t}(s)=1 \end{aligned}$$

angenommen werden, worin $\check{r}$ und $\check{t}$ endliche Fourierreihen in s sind. Also zerfällt (IV.20) in ein endliches System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung in ψ für die Fourierkomponenten von $\check{s}$. Anhand dieses Differentialgleichungssystems lassen sich unter Benutzung von (IV.19a) die möglichen Randbedingungen für die Funktionen $\check{\rho}$ diskutieren, die dadurch eingeschränkt sind, daß an der Stelle $\psi=0$ die Seele liegt. Wählt man die in dem Sinne einfachsten Randbedingungen aus, daß das Auftreten höherer Fourierkomponenten an höhere Ordnungen im Entwicklungsparameter gekoppelt ist, so ergibt sich für die Form des Randes an einer Stelle $\hat{\psi}>0$:

$$(\text{IV}.22)\qquad \rho(\hat{\psi}) = \mathring{\rho}(\hat{\psi}) + \varepsilon\cos\varphi\left(\tilde{\rho}(\hat{\psi}) + \sum_{\nu\geq 1}\varepsilon^{\nu}\check{f}\left(\frac{2\pi\nu s}{L}\right)\right)$$

Die oben aufgestellten Lösbarkeitsbedingungen werden im folgenden Abschnitt über spezielle Lösungen noch diskutiert.

B. Spezielle Lösungen bis zur zweiten Ordnung

a. Helikale Gleichgewichte

Für diese sind Krümmung und Torsion der Seele konstant (vgl. Anhang 1) und die Gleichgewichtsgrößen hängen in den Koordinaten ρ, φ, s (vgl. S. 4) nur von ρ und φ ab. Mit den für diesen Fall spezialisierten Ansätzen ($\overline{IV}.8$), die bis zur zweiten Ordnung lauten

$$\rho = \overset{0}{\rho}(\psi) + \varepsilon \overset{1}{\rho}(\psi)\cos\varphi + \varepsilon^2\left(\overset{2}{\rho}_0(\psi) + \overset{2}{\rho}_2(\psi)\cos 2\varphi\right)$$

$$(\overline{IV}.23) \qquad \varphi = -2\pi\chi + \frac{L}{T I_0'}\left(1+\varepsilon^2 \overset{2}{\tau}\right)K + \varepsilon \overset{1}{\varphi}(\psi)\sin\varphi + \varepsilon^2 \overset{2}{\varphi}(\psi)\sin 2\varphi$$

$$s = \frac{L}{I_0'}\left(1+\varepsilon^2 \overset{2}{\sigma}\right)K + \varepsilon \overset{1}{s}(\psi)\sin\varphi + \varepsilon^2 \overset{2}{s}(\psi)\sin 2\varphi$$

bekommt man zunächst als Gleichungssystem für die erste Ordnung

$$\frac{p'^2}{I_0'^2}\frac{\overset{0}{\rho}'\overset{1}{\rho}}{T^2} + \left(\frac{p'^2}{I_0'^2}\frac{\overset{1}{s}}{T}\right)' = \frac{p'^2}{I_0'^2}\frac{\overset{0}{\rho}'}{T} + \left(\frac{p'^2}{I_0'^2}\frac{\overset{0}{\rho}}{T}\right)'$$

$$(\overline{IV}.24\ a\text{-}c) \qquad \frac{\overset{0}{\rho}(\overset{0}{\rho}\overset{1}{\rho})'}{T^3} + \frac{\overset{0}{\rho}'}{T}\left(1+\frac{\overset{0}{\rho}^2}{T^2}\right)\frac{\overset{1}{s}}{T} = \frac{2\overset{0}{\rho}\overset{0}{\rho}'}{T^2} + \frac{\overset{0}{\rho}^3\overset{0}{\rho}'}{T^4}$$

$$\frac{\overset{0}{\rho}\overset{0}{\rho}'}{T^2}\overset{1}{\varphi} + \frac{(\overset{0}{\rho}\overset{1}{\rho})'}{T^2} = \frac{\overset{0}{\rho}^2\overset{0}{\rho}'}{T^3}$$

das unter den Annahmen ($\overline{IV}.1-6$) aus ($\overline{IV}.18$) folgt. Man sieht hier, daß die Voraussetzung $\frac{\rho_{max}}{T_0} \sim 1$ notwendig ist, denn wäre $\frac{\overset{0}{\rho}}{T}$ von kleinerer Größenordnung, so würde aus ($\overline{IV}.24\,b$) $\frac{\overset{1}{s}}{T} = \frac{2\overset{0}{\rho}}{T}$ und damit aus ($\overline{IV}.24\,a$) $\overset{0}{\beta}{}^2 = konst$ folgen, was (außer für eine klein-β Entwicklung) im Widerspruch zu ($\overline{IV}.12$) steht. Bei zugrunde gelegter Annahme ($\overline{IV}.5$) ist die Bedingung $\frac{T}{R} \sim \varepsilon$ eine Folge der Forderung verschwindenden Längsstroms, denn läßt man einen solchen zu, so existieren auch für $\frac{1}{T} = 0$ Lösungen (s.z.B. [3]).

Mit den dimensionslosen Koordinaten ξ und Θ (s. Anhang 1) wird also für ($\overline{IV}.24$)

$$\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\xi} + \left(\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{1}{\Theta}\right)' = \frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{0}{\xi}{}' + \left(\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{0}{\xi}\right)'$$

$$(\text{IV}.25)\qquad \overset{0}{\xi}(\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi})' + \overset{0}{\xi}{}'(1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta} = 2\overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}' + \overset{0}{\xi}{}^3\overset{0}{\xi}{}'$$

$$\overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi} + (\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi})' = \overset{0}{\xi}{}^2\overset{0}{\xi}{}'$$

Entwickelt man die Lösung von (IV.25) in einer Umgebung der Seele nach Potenzen von ψ , so erhält man für die niedrigsten Ordnungen mit

$$(\text{IV}.26)\qquad \psi \approx \psi_0\overset{0}{\xi}{}^2 + \psi_1\overset{0}{\xi}{}^4 \;;\quad \frac{Lp'}{I_0'} = \overset{0}{B} \approx \frac{1}{\pi\varrho^2_{max}}\left(\psi_0 + \frac{2\psi_1}{\psi_0}\psi\right)$$

folgende Ausdrücke

$$\overset{1}{\xi} \approx \left(-\frac{3}{8} + \frac{\psi_1}{\psi_0}\right)\frac{\psi}{\psi_0}$$

$$(\text{IV}.27)\qquad \overset{1}{\varphi} \approx \left(\frac{17}{8} - 3\frac{\psi_1}{\psi_0}\right)\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{1}{\Theta} \approx 2\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{8} - 3\frac{\psi_1}{\psi_0}\right)\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Als Gleichungssystem für die zweite Ordnung ergibt sich mit dem Ansatz (IV.23) und den daraus berechneten $\overset{2}{g}_{ik}$ (s. Anhang 2) (die Gleichungen werden in der Reihenfolge angegeben, in der sie gelöst werden)

$$\left(\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{2}{\sigma}\right)' = -\frac{p'}{2I_0'}\left(\frac{p'}{I_0'}(\overset{1}{\xi}{}^2 + f(\psi))\right)' + \frac{p'^2}{I_0'^2}(\overset{1}{\Theta} - 2\overset{0}{\xi})\overset{1}{\varphi}{}'$$

$$(\text{IV}.28\text{a-e})\qquad \begin{aligned}\overset{2}{\sigma} - \overset{2}{\tau} = {} & \frac{1}{\overset{0}{\xi}{}^2}\Big[\frac{\overset{1}{\xi}{}^2}{2} + \overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi} + \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2 - \frac{3}{2}\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}\overset{1}{\Theta} + \frac{1}{2}(1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2 - (1+\overset{0}{\xi})\overset{0}{\xi}\\ & + \frac{\overset{1}{\varphi}\overset{1}{\Theta}}{2} - \frac{1}{2}\frac{I_0'}{p'}\int_0^{\psi}\frac{p'}{I_0'}\left[\overset{1}{\varphi}{}'(\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi} + (1-\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}) + \overset{1}{\varphi}(-\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\xi} + \overset{1}{\Theta}{}')\right]d\psi'\Big]\end{aligned}$$

$$\overset{0}{\xi}(\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_0)' + \overset{2}{\sigma}\overset{0}{\xi}{}^2\overset{0}{\xi}{}' = \frac{1}{2}(\overset{1}{\xi}{}^2 + \overset{0}{\xi}{}^4)\overset{0}{\xi}{}' - \frac{\overset{0}{\xi}{}^2}{2}(\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}{}^2 + \overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi})$$

$$4\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\xi}_2 + 2\left(\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{2}{\Theta}\right)' = \frac{p'^2}{I_0'^2}g(\psi) + \frac{p'}{2I_0'}\left(\frac{p'}{I_0'}(\overset{1}{\xi}{}^2 - f(\psi))\right)'$$

$$\begin{aligned}\overset{0}{\xi}(\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_2)' + 2\overset{0}{\xi}{}'(1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{2}{\Theta} = {} & \overset{0}{\xi}{}'(\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta} - \overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\Theta} - \frac{1}{2}\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi} + \overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi} + \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2 - \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi} + \overset{1}{\xi} - \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}\\ & + \frac{1}{2}\overset{1}{\xi}{}^2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}{}^4) - \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}{}^2(\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}{}^2 + \overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi})\end{aligned}$$

$$2\overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\varphi} + \left(\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_2\right)' = \frac{1}{2}\frac{\overset{0}{\xi}{}'}{\overset{0}{\xi}}\left(\overset{1}{\xi}{}^2 + \overset{0}{\xi}{}^4\right) - \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}\left(\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}{}^2 + \overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}\right)$$

(IV.28 f)

$$f(\psi) = \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2 + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\theta}{}^2 - 4\overset{0}{\xi}\overset{1}{\theta} - 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}\overset{1}{\theta} + \overset{0}{\xi}{}^2 - 2\overset{1}{\xi} + 2\overset{1}{\theta}\overset{1}{\varphi}$$

$$g(\psi) = -\overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\xi} + \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}'\overset{1}{\varphi} + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\theta}{}'\overset{1}{\theta} - 2\overset{0}{\xi}\overset{1}{\theta}{}' - \overset{0}{\xi}{}^2(\overset{1}{\varphi}\overset{1}{\theta})'$$
$$- \overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi} + \overset{1}{\theta}\overset{1}{\varphi}{}' - (\overset{1}{\theta} - 2\overset{0}{\xi})\overset{1}{\varphi}{}'$$

Entwickelt man wieder die Lösung in einer Umgebung der Seele, so erhält man

$$\overset{2}{\sigma} \approx \frac{\overset{2}{\sigma}_h}{\psi_0^2}\left(1 - 4\frac{\psi_1}{\psi_0}\psi\right) + \left(-\frac{25}{8} + 7\frac{\psi_1}{\psi_0}\right)\frac{\psi}{\psi_0}$$

$$\overset{2}{\tau} \approx \frac{\overset{2}{\sigma}_h}{\psi_0^2}$$

$$\overset{2}{\xi}_0 \approx -\frac{\overset{2}{\sigma}_h}{2\psi_0^2}\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(IV.29)

$$\overset{2}{\xi}_2 \approx \overset{2}{\xi}_{2h}\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{2}{\theta} \approx \left(-\frac{1}{2} + 2\frac{\psi_1}{\psi_0} - \overset{2}{\xi}_{2h}\right)\frac{\psi}{\psi_0}$$

$$\overset{2}{\varphi} \approx -\overset{2}{\xi}_{2h}$$

Hierin sind $\overset{2}{\sigma}_h$ die freie Konstante der homogenen Lösung der ersten Gleichung und $\overset{2}{\xi}_{2h}$ die freie Konstante der homogenen Lösung der Gleichung für $\overset{2}{\xi}_2$, die beim Einsetzen von (IV.28e) in (IV.28 d) entsteht. Für die Rotationstransformation (pro Periode) folgt in der Umgebung der Seele (II.17), (IV.13), Anhang 1)

$$\iota = \pi\varepsilon^2\left(-1 + 2\left(\frac{\overset{2}{\tau}}{\overset{2}{\sigma}} - \frac{\overset{2}{\tau}}{\overset{2}{\sigma}}\right)\right) \approx -\pi\varepsilon^2 \qquad \text{(IV.30)}$$

Mercier stellt in [7] die Behauptung auf, für $\iota(0) = 0$ existierten keine analytischen Gleichgewichte. Diese Aussage läßt sich nach seiner Schlußweise auf alle rationalen Werte $\frac{\iota(0)}{2\pi}$ verallgemeinern. Da in dieser Arbeit keine Auszeichnung solcher Werte von $\frac{\iota(0)}{2\pi}$ zu erkennen ist, wird die Mercier'sche Arbeit im Anhang 4 diskutiert.

Die vollständige Lösung der Gleichungen (IV.25) und (IV.28) ist nur numerisch möglich und wird in V durchgeführt. Da es aber ein Ziel der Untersuchung ist, gemäß III stabile Konfigurationen zu finden, ist es sinnvoll, zunächst zu untersuchen, ob die Lösung in einer Umgebung der Seele stabil ist, was schon mit den Entwicklungen (IV.27) und (IV.29) möglich ist. Die Entwicklung von (III.4) bis zur zweiten Ordnung in ε ergibt

$$-\frac{I_0'^3}{L^2}\left(1-\varepsilon^2\overset{2}{\sigma}\right)+p'I_0'\varepsilon^2\overset{2}{\sigma}{}'-\frac{1}{\overset{0}{g}_{33}}\Big[-I_0'\left(1-\varepsilon^2\overset{2}{\sigma}\right)-\varepsilon\int\frac{\overset{1}{g}_{33}}{\overset{0}{g}_{33}}\,dx\,dK$$

(IV.31)

$$+\varepsilon^2\int\left(\frac{\overset{1}{g}{}_{23}^{\,2}}{\overset{0}{g}_{22}\overset{0}{g}_{33}}-\frac{\overset{2}{g}_{33}}{\overset{0}{g}_{33}}+\frac{\overset{1}{g}{}_{33}^{\,2}}{\overset{0}{g}_{33}^{\,2}}\right)dx\,dK\Big]>0$$

und mit Anhang 2

$$-2\frac{p'}{\overset{0}{B}{}^2}\overset{2}{\sigma}+\overset{2}{\sigma}{}'-\frac{p'}{\overset{0}{B}{}^2}\Big[-(\overset{1}{\Theta}-\overset{0}{\xi})\overset{1}{\varphi}-\frac{1}{2\overset{0}{\xi}{}^2}\left(\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}+\overset{1}{\Theta}-\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\Theta}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\overset{1}{\xi}{}^2+f(\psi)\right)-2(\overset{1}{\Theta}-\overset{0}{\xi})^2\Big]>0$$

Wie man leicht sieht, hebt sich hier der homogene Anteil von $\overset{2}{\sigma}$ heraus, so daß sich als Stabilitätskriterium für helikale Gleichgewichte ergibt

$$-2\frac{p'}{\overset{0}{B}{}^2}\overset{2}{\sigma}_{inh}+\overset{2}{\sigma}{}'_{inh}+\frac{p'}{\overset{0}{B}{}^2}\Big[(\overset{1}{\Theta}-\overset{0}{\xi})\overset{1}{\varphi}+\frac{1}{2\overset{0}{\xi}{}^2}\left(\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}+\overset{1}{\Theta}-\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\Theta}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\overset{1}{\xi}{}^2+f(\psi)\right)+2(\overset{1}{\Theta}-\overset{0}{\xi})^2\Big]>0$$

(IV.32)

In der Umgebung der Seele folgt mit (IV.27) und (IV.29) (mit der sich aus (IV.12) und (IV.26) ergebenden Entwicklung $p=p_0-\frac{2\psi_1\psi}{\pi^2\rho_{max}^4}$)

(IV.33) $$\frac{\psi_1}{\psi_0}>\frac{25}{24}$$

so daß die durch (IV.23) beschriebenen helikalen Gleichgewichte also gemäß III stabil in einer Umgebung der Seele sind, sofern nur (IV.33) erfüllt ist.

Zum Schluß dieses Abschnitts soll noch darauf hingewiesen werden, daß die in IV A aufgestellten Lösbarkeitsbedingungen in jeder

Ordnung erfüllt sind: da für helikale Gleichgewichte ρ, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{s}$ Funktionen von ψ und φ allein sind, folgt aus der Definition der in IV.A eingeführten Größen I_b und I_c^K, daß diese ebensolche Funktionen sind, die zudem keinen von ψ allein abhängigen Anteil haben, so daß sie partielle Ableitungen einwertiger Ortsfunktionen nach φ und damit auch nach K sind.

b. Toroidale Gleichgewichte

Für diese werden Krümmung und Torsion gemäß Anhang 1 in der Form

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{R_0}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\beta}\sin m\vartheta + O(\varepsilon^2)\right)$$

(IV.34)

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\sin m\vartheta + \varepsilon^2\frac{T_0}{T_2} + O(\varepsilon^3)\right)$$

und die dimensionlosen Variablen ξ, φ, Θ in der Form

$$\xi = \overset{0}{\xi} + \varepsilon\overset{1}{\xi}\cos\varphi + \varepsilon^2\left(\overset{2}{\xi}_{00} + \overset{2}{\xi}_{20}\cos 2\varphi + \overset{2}{\xi}_{11}\cos\varphi\sin m\vartheta + \overset{2}{\xi}_{02}\cos 2m\vartheta\right)$$

(IV.35)

$$\varphi = -2\pi\chi + \frac{L}{T_0 I_0'}\left(1+\varepsilon^2\frac{2}{\tau}\right)K + \varepsilon\left(\overset{1}{\varphi}_{10}\sin\varphi + \overset{1}{\varphi}_{01}\cos m\vartheta\right) + \varepsilon^2\left(\overset{2}{\varphi}_{20}\sin 2\varphi + \overset{2}{\varphi}_{11}\sin\varphi\sin m\vartheta + \overset{2}{\varphi}_{02}\right)$$

$$\Theta = \frac{L}{T_0 I_0'}\left(1+\varepsilon^2\frac{2}{\sigma}\right)K + \varepsilon\overset{1}{\Theta}\sin\varphi + \varepsilon^2\left(\overset{2}{\Theta}_{20}\sin 2\varphi + \overset{2}{\Theta}_{11}\cos\varphi\cos m\vartheta + \overset{2}{\Theta}_{02}\sin 2m\vartheta\right)$$

angesetzt. Die sich damit ergebenden $\check{g}_{ik}$ sind im Anhang 2b aufgeführt. Wegen (IV.11b) muß $\overset{1}{g}_{23}$ Ableitung nach χ sein; also folgt

(IV.36)

$$\overset{1}{\varphi}_{01} = -\frac{1}{\alpha}$$

Dann sind aber die $\overset{1}{g}_{ik}$ die gleichen für das helikale und diese toroidalen Gleichgewichte, so daß die Gleichungen erster Ordnung (IV.25) auch hier gelten. Ferner muß (wieder wegen (IV.11b) $\overset{2}{g}_{33\chi}$ Ableitung nach K sein, was

$$2\frac{\overset{0}{\xi}}{\beta} - 2\overset{1}{\varphi}_{01}\overset{1}{\Theta} + \frac{2\overset{0}{\xi}{}^2}{\alpha}\overset{1}{\Theta} - \frac{2\overset{0}{\xi}{}^2}{\alpha}\overset{1}{\varphi}_{10} = \frac{2\overset{0}{\xi}}{\beta} + \frac{2}{\alpha}\left(\overset{1}{\Theta}(1+\overset{0}{\xi}{}^2) - \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}_{10}\right) = 2\overset{0}{\xi}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\alpha}\right) = 0$$

zur Folge hat. Durch geeignete Wahl der Größen δ und γ im Anhang 2b ist diese Lösbarkeitsbedingung erfüllbar. Man sieht also, daß die magnetische Achse nicht frei vorgebbar ist: vielmehr werden die einzelnen Ordnungen in den Entwicklungen für $\frac{1}{R}$ und $\frac{1}{T}$ durch die Lösbarkeitsbedingungen der Gleichgewichtsgleichungen entsprechender Ordnung zum Teil festgelegt. Dieses Ergebnis ist also ganz analog dem des Anhangs 4. Damit die in IV.A aufgestellten Lösbarkeitsbedingungen befriedigt sind, dürfen bestimmte Fourierkomponenten in den Inhomogenitäten I_b und I_c^k nicht auftreten. Wie man hier in erster und zweiter Ordnung explizit sieht, läßt sich das Verschwinden dieser Fourierkomponenten nicht einfach erreichen, sondern hängt sowohl von den Eigenschaften der Lösungsfunktionen als auch der Freiheit in der Wahl der Seele ab. Deshalb ist es bisher nicht gelungen, die Erfüllbarkeit der Lösbarkeitsbedingungen für jede Ordnung zu beweisen.

Für $\frac{1}{\beta} = -\frac{2}{\alpha}$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem in zweiter Ordnung, dessen erste sechs Gleichungen natürlich fast identisch sind mit den entsprechenden des helikalen Gleichgewichts

$$\left(\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{2}{\sigma}\right)' = -\frac{p'}{2I_0'}\left(\frac{p'}{I_0'}\left(\overset{1}{\xi}{}^2 + \frac{\overset{0}{\xi}{}^2}{\alpha^2} + f\right)\right)' + \frac{p'^2}{I_0'^2}\left(\overset{1}{\Theta} - 2\overset{0}{\xi}\right)\overset{1}{\varphi}{}_{10}'$$

$$\overset{2}{\sigma} - \overset{2}{\tau} + \left\langle\frac{T_0}{T_2}\right\rangle = \frac{1}{\overset{0}{\xi}{}^2}\Big[\frac{\overset{1}{\xi}{}^2}{2} + \overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi}{}_{10} + \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}_{10}^2 - \frac{3}{2}\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}_{10}\overset{1}{\Theta} + \frac{1}{2}(1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2 - (1+\overset{1}{\xi})\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta}$$
$$+ \frac{1}{2}\overset{1}{\varphi}_{10}\overset{1}{\Theta} - \frac{1}{2}\frac{I_0'}{p'}\int_0^{\psi}\frac{p'}{I_0'}\Big[\overset{1}{\varphi}{}_{10}'\left(\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}_{10} + (1-\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}\right) + \overset{1}{\varphi}_{10}\left(-\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\xi} + \overset{1}{\Theta}{}'\right)\Big]d\psi'\Big]$$

$$\overset{0}{\xi}\left(\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_{00}\right)' + \overset{2}{\sigma}\overset{0}{\xi}{}^2\overset{0}{\xi}{}' = \frac{1}{2}\left(\overset{1}{\xi}{}^2 + \overset{0}{\xi}{}^4\right)\overset{0}{\xi}{}' - \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}{}^2\left(\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}_{10}^2 + \overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}_{10}\right)$$

$$4\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\xi}_{20} + 2\left(\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{2}{\Theta}_{20}\right)' = \frac{p'^2}{I_0'^2}g(\psi) + \frac{p'}{2I_0'}\left(\frac{p'}{I_0'}\left(\overset{1}{\xi}{}^2 - f\right)\right)'$$

$$\overset{0}{\xi}\left(\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_{20}\right)' + 2\overset{0}{\xi}{}'(1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{2}{\Theta}_{20} = \overset{0}{\xi}{}'\Big(\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta} - \overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\Theta} - \frac{1}{2}\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}_{10} + \overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi}_{10} + \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}_{10}^2 - \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}_{10} + \overset{1}{\xi} - \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}{}^2$$
$$+ \frac{1}{2}\overset{1}{\xi}{}^2 + \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}{}^4\Big) - \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}{}^2\left(\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}_{10}^2 + \overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}_{10}\right)$$

$$2\overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\varphi}_{20} + \left(\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_{20}\right)' = \frac{1}{2}\frac{\overset{0}{\xi}{}'}{\overset{0}{\xi}}\left(\overset{1}{\xi}{}^2 + \overset{0}{\xi}{}^4\right) - \frac{1}{2}\overset{0}{\xi}\left(\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}_{10}^2 + \overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}_{10}\right)$$

(IV.37 a - f)

$$-2\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\xi}_{11} + \left(\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{2}{\Theta}_{11}\right)' = -\frac{p'^2}{\alpha I_0'^2}\left(-\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\xi} + \overset{0}{\xi}{}^2(\overset{1}{\Theta}{}' - \overset{1}{\varphi}{}'_{10})\right)$$

$$\overset{0}{\xi}(\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_{11})' - \overset{0}{\xi}{}'\left(\tfrac{1}{2} + 2\overset{0}{\xi}{}^2\right)\overset{2}{\Theta}_{11} = \frac{1}{\alpha}\overset{0}{\xi}{}'\overset{0}{\xi}{}^2\left(-\tfrac{1}{2}\overset{1}{\Theta} + 2\overset{0}{\xi}\right)$$

$$2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{2}{\varphi}_{11} + (1 + \overset{0}{\xi}{}^2)\overset{2}{\Theta}_{11} = -\frac{1}{\alpha}\overset{1}{\Theta}\overset{0}{\xi}{}^2$$

$$-\frac{p'^2}{I_0'^2}\overset{0}{\xi}{}'4\overset{2}{\xi}_{02} + \left(\frac{p'^2}{I_0'^2}2\overset{2}{\Theta}_{02}\right)' = -\frac{p'}{I_0'}\left(\frac{p'}{I_0'}\frac{\overset{0}{\xi}{}^2}{2\alpha^2}\right)'$$

(IV.37 g-l)

$$(\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_{02})' + 2\overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\Theta}_{02} = 0$$

$$\overset{2}{\varphi}_{02} = \int_0^{\vartheta}\left(\frac{T_0}{T_2}\right)_{\vartheta'} d\vartheta' + 2\overset{2}{\Theta}_{02}\cos 2m\vartheta$$

(Hierin ist $\left\langle \frac{T_0}{T_2} \right\rangle$ der Mittelwert von $\frac{T_0}{T_2}$).

Entwickelt man die Lösung in einer Umgebung der Seele, so erhält man

$$\overset{2}{\sigma} \approx \frac{\overset{2}{\sigma}_h}{\psi_0^2}\left(1 - 4\frac{\psi_1}{\psi_0}\psi\right) + \left(-\frac{25}{8} - \frac{1}{2\alpha^2} + 7\frac{\psi_1}{\psi_0}\right)\frac{\psi}{\psi_0}$$

$$\overset{2}{\tau} \approx \frac{\overset{2}{\sigma}_h}{\psi_0^2} + \left\langle \frac{T_0}{T_2} \right\rangle$$

$$\overset{2}{\xi}_{00} \approx -\frac{\overset{2}{\sigma}_h}{2\psi_0^2}\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{2}{\xi}_{20} \approx \overset{2}{\xi}_{20h}\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{2}{\Theta}_{20} \approx \left(-\tfrac{1}{2} + 2\frac{\psi_1}{\psi_0} - \overset{2}{\xi}_{20h}\right)\frac{\psi}{\psi_0}$$

(IV.38)

$$\overset{2}{\varphi}_{20} \approx -\overset{2}{\xi}_{20h}$$

$$\overset{2}{\xi}_{11} \approx \frac{1}{\alpha}\left(\frac{23}{64} - \frac{1}{8}\frac{\psi_1}{\psi_0}\right)\frac{\psi}{\psi_0}$$

$$\overset{2}{\Theta}_{11} \approx \frac{1}{\alpha}\left(\frac{5}{32} - \frac{3}{4}\frac{\psi_1}{\psi_0}\right)\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\overset{2}{\varphi}_{11} \approx \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{69}{64} + \frac{3}{8}\frac{\psi_1}{\psi_0}\right)\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{2}{\xi}_{02} \approx \overset{2}{\xi}_{02h}\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{2}{\Theta}_{02} \approx -\overset{2}{\xi}_{02h}$$

Wieder ist es ohne numerische Rechnung möglich, die Stabilität gemäß III in einer Umgebung der Seele zu entscheiden. Setzt man in (IV.31) ein, so folgt

$$-2\frac{p'}{\overset{\circ}{\beta}^2}\overset{2}{\sigma}_{inh} + \overset{2}{\sigma}{}'_{inh} + \frac{p'}{\overset{\circ}{\beta}^2}\left[(\hat{\theta}-\overset{\circ}{\xi})\overset{1}{\varphi}_{10} + \frac{1}{2\overset{\circ}{\xi}{}^2}\left(\overset{\circ}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}_{10} + \hat{\theta} - \overset{\circ}{\xi}{}^2\overset{1}{\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\overset{1}{\xi}{}^2 + \ell + \frac{\overset{\circ}{\xi}{}^2}{2\alpha^2}\right) + 2(\hat{\theta}-\overset{\circ}{\xi})^2\right] > 0$$

(IV.39)

Zum Vergleich mit dem Stabilitätsausdruck für das helikale Gleichgewicht wird dieser mit $St_{hel}(\psi)$ bezeichnet; für (IV.39) erhält man damit

$$St_{hel}(\psi) + \frac{1}{4\alpha^2}\overset{\circ}{\xi}{}'\overset{\circ}{\xi}\left(-3 + \frac{\overset{\circ}{\xi}\overset{\circ}{\xi}{}''}{\overset{\circ}{\xi}{}'^2}\right) > 0 \qquad \text{(IV.40)}$$

was für $\psi \to 0$ ergibt

$$\frac{\psi_1}{\psi_0} > \frac{25}{24} + \frac{1}{6\alpha^2} \qquad \text{(IV.41)}$$

also für α in der Größenordnung von Eins nur eine geringfügige Änderung der Stabilitätsbedingung in der Umgebung der Seele.

V. Numerische Rechnungen

Das Ziel dieses Abschnittes soll nur sein, an einem Beispiel zu zeigen, welcher Art etwa eine Lösung für den helikalen und den toroidalen Fall ist, die Modellcharakter besitzen könnte für ein vom Theta-Pinch ausgehendes helikales oder toroidales Experiment; ein Überblick über die Mannigfaltigkeit der Lösungen, die bestimmt wird durch die freie Wählbarkeit von β, des Druckprofils und zum Teil der Randbedingungen, soll hier nicht gegeben werden.

Im folgenden wird also eine Funktion $p(\psi)$ fest gewählt, nämlich

$$(V.1) \qquad p(\psi) = p_0 \exp\left(-\Delta\cdot\psi - \left(\frac{\psi}{\psi_R}\right)^{\lambda}\right)$$

mit $\lambda > 1$, worin Δ $p'(0)$ und ψ_R den Plasmarand charakterisieren. Damit die Abweichungen von der Lösung nullter Ordnung in den Abbildungen deutlich werden, wird für den verhältnismäßig großen Wert $\varepsilon = \frac{1}{5}$ * ein helikales und das zugehörige toroidale Gleichgewicht zu den Randbedingungen

$$(V.2) \qquad \xi(\hat{\psi}) = \overset{0}{\xi}(\hat{\psi}) + \varepsilon\,\overset{1}{\xi}(\hat{\psi})\cos\varphi$$

für das helikale und

$$(V.3) \qquad \xi(\hat{\psi}) = \overset{0}{\xi}(\hat{\psi}) + \varepsilon\left(\overset{1}{\xi}(\hat{\psi})\cos\varphi + \varepsilon\,\overset{2}{\xi}_{11}(\hat{\psi})\cos\varphi\,\sin m\vartheta\right)$$

für das toroidale Gleichgewicht (vgl. (IV.22)) beschrieben. Dazu dienen die nach S. 30 zu findenden Abbildungen, die hier allgemein erläutert werden sollen; Zahlenwerte sind in der Legende angegeben.

---

* Damit insbesondere die Aussagen über die Rotationstransformation und die Stabilität quantitativ richtig sind, muß ε sicher kleiner gewählt werden.

In Abb. 1 sind zur Beschreibung der Lösung nullter Ordnung $p(\overset{0}{\xi})$, $\frac{\overset{0}{B}{}^2}{2}(\overset{0}{\xi})$ und $\psi(\overset{0}{\xi})$ dargestellt. Es handelt sich also um ein Gleichgewicht mit $\beta \approx \frac{3}{5}$, für das der Plasmaradius ungefähr $\frac{1}{6}\varrho_{max}$ ist.

Abb. 2 zeigt die Lösungsfunktionen des helikalen Gleichgewichts $\overset{0}{\xi}$, $\overset{1}{\xi}$, $\overset{2}{\xi}_0$, $\overset{2}{\xi}_2$. Für $\overset{2}{\xi}_0$ und $\overset{2}{\xi}_2$ wurde das halbhomogene Randwertproblem an der Stelle $\hat{\psi}$ ($\hat{\psi} \approx 3$, $\overset{0}{\xi}(\hat{\psi}) \approx 0.8$) gelöst, so daß (V.2) gilt.

In Abb. 3 finden sich mit den Funktionen der Abb. 2 berechnete äquidistante Schichtlinien $p = konst$, die beim Schnitt der magnetischen Flächen mit der Ebene senkrecht zur Seele entstehen. Die obere Figur zeigt den innersten Bereich, in dem der Druck nur wenig fällt, die untere Figur den Bereich, in dem der Druckabfall liegt; für die äußerste Linie gilt $p \approx 0$. Man kann zwei Effekte unterscheiden: die aufgrund des Verlaufes von $\overset{1}{\xi}$ in diesem Bereich nach außen zunehmende Verschiebung der Flächen bzgl. der Seele und die Verformung der Flächen durch den Einfluß der Funktion $\overset{2}{\xi}_2$, die im Bereich des Plasmarandes am größten ist.

Abb. 4 zeigt äquidistante Flußlinien im Vakuumfeldbereich, deren innerste ungefähr mit der äußersten der Abb. 3 zusammenfällt. In der Umgebung der Stelle $\hat{\psi}$, an der eine Metalloberfläche gedacht werden kann, sind die Schnitte mit den magnetischen Flächen in guter Näherung Kreise, die wegen des Verlaufes von $\overset{1}{\xi}$ auch fast konzentrisch zur Seele liegen.

In Abb. 5 sieht man den Verlauf der Rotationstransformation (IV.30) und des die Stabilität beschreibenden Ausdrucks (IV.32) im Vergleich zum Druckprofil. Die Rotationstransformation weicht also vom Vakuumwert hauptsächlich im Bereich des Druckabfalls ab und das Stabilitätskriterium zeigt, daß es möglich ist, die Plasmamasse im gemäß III stabilen Bereich einzuschließen.

In Abb. 6 sind die Lösungsfunktionen $\overset{0}{\xi}$, $\overset{1}{\xi}$, $\overset{2}{\xi}_{00}$, $\overset{2}{\xi}_{20}$, $\overset{2}{\xi}_{11}$, $\overset{2}{\xi}_{02}$ des toroidalen Gleichgewichts dargestellt. Für $\overset{2}{\xi}_{00}$, $\overset{2}{\xi}_{20}$, $\overset{2}{\xi}_{02}$ wurde das halbhomogene Randwertproblem an der gleichen Stelle wie für das helikale Gleichgewicht gelöst, so daß (V.3) gilt.

Die Abbildungen 7 - 10 entsprechen der Abb. 3 für das helikale Gleichgewicht. Dem Verlauf der toroidalen Lösungskurven entsprechend sind die Abweichungen in der Form der magnetischen Flächen vom helikalen Gleichgewicht klein. Der Haupteffekt besteht in der ungleichmäßigen Rotation der Schnittkurven der Ebene senkrecht zur Seele mit den magnetischen Flächen beim Fortschreiten längs ϑ : die Steigung der Seele ist auf der Innenseite des Torus kleiner als auf der Außenseite. Dies ist eine Folge der auf S.24 gefundenen Lösbarkeitsbedingung.

Die Abbildungen 11 - 14 entsprechen der Abb. 4. Auch hier sind die Schnittlinien mit den magnetischen Flächen in der Umgebung von $\hat{\psi}$ in guter Näherung Kreise, die aber unter dem Einfluß von $\overset{2}{\xi}_{11}$, nicht mehr ganz konzentrisch liegen, sondern im Mittel etwas zur Hauptachse des Torus hin verschoben sind; für $m\vartheta = 0 , \pi$ verschwindet dieser Effekt, für $m\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ist er am größten.

Abb. 15 zeigt, daß die Rotationstransformation (bis auf eine additive Konstante) gleich derjenigen des helikalen Gleichgewichts ist und daß das Stabilitätskriterium (IV.40) für das toroidale Gleichgewicht qualitativ gleich dem für das helikale Gleichgewicht ist.

Abbildungen

Für die numerischen Rechnungen wurde gesetzt

$$p = 0.6 \exp\left(-2.2\,\psi - \left(\frac{\psi}{0.08}\right)^4\right) \quad ; \quad p + \frac{\overset{\circ}{B}{}^2}{2} = 1$$

$$\varrho_{max} = 1 \quad ; \quad \varepsilon = 0.2$$

Es ist dann $\psi_0 = 2.8$; $\psi_1 = 6.545$.

Abb. 1: $p(\overset{\circ}{\xi})$, $\frac{\overset{\circ}{B}{}^2}{2}(\overset{\circ}{\xi})$, $\frac{1}{3}\psi(\overset{\circ}{\xi})$

Abb. 2: $\overset{\circ}{\xi}(\psi)$, $\overset{1}{\xi}(\psi)$, $\overset{2}{\xi}_0(\psi)$, $\overset{2}{\xi}_2(\psi)$

$\hat{\psi} \approx 3.1$; $\overset{2}{\xi}_{0h} = -5.84549$; $\overset{2}{\xi}_{2h} = 4.30085$

Abb. 3: Ob. Figur: Schnittlinien von Flächen $p = konst$ mit $\Delta p = 0.024 \left(= \frac{p_0}{25}\right)$ mit einer Ebene senkrecht zur Seele. Das eingezeichnete Achsenkreuz zeigt die Lage des Mittelpunkts des Zylinders, auf dem die Seele läuft und den Maßstab: $(0, x_{max}) = (0, 0.1)$ Das kleine Kreuz gibt die Lage der Seele an.
Unt. Figur: Wie ob. Figur, nur $\Delta p = 0.12$ $\left(= \frac{p_0}{5} \right)$. Die äußerste Linie der ob. Figur fällt zusammen mit der innersten der unteren Fig.

Abb. 4: Schnittlinien von Flächen $\psi = konst$ mit $\Delta\psi = 0.75$ mit einer Ebene senkrecht zur Seele. Sonst wie Abb. 3.

Abb. 5: $p(\overset{\circ}{\xi})$, $\frac{1}{5} St_{hel}(\overset{\circ}{\xi})$, $\frac{L}{2\pi} = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(-1 + 2\left(\frac{2}{c} - \frac{2}{\sigma}\right)\right)$

Abb. 6: $\overset{\circ}{\xi}$, $\overset{1}{\xi}$, $\overset{2}{\xi}_{00}$, $\overset{2}{\xi}_{20}$, $\overset{2}{\xi}_{11}$, $\overset{2}{\xi}_{02}$ als Funktionen von ψ für $\alpha = -\frac{1}{2}$ (s. (IV.37 g-l)).
$\hat{\psi} \approx 3.1$; $\overset{2}{\xi}_{00h} = 6.67355$; $\overset{2}{\xi}_{20h} = 4.30085$; $\overset{2}{\xi}_{02h} = 1.08618$

Abb. 7 - 10: Wie die untere Figur der Abb. 3 für die Winkel $m\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Abb. 11-14 : Wie Abb. 4 für die Winkel $m\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

Abb. 15: $p(\overset{\circ}{\xi})$, $\frac{1}{5}\left[St_{hel}(\overset{\circ}{\xi}) + \frac{1}{4\alpha^2}\overset{\circ}{\xi}{}'\overset{\circ}{\xi}\left(-3 + \frac{\overset{\circ}{\xi}\overset{\circ}{\xi}{}''}{\overset{\circ}{\xi}_{12}}\right)\right]$, $\frac{L}{2\pi} - \left\langle \frac{T_0}{T_2} \right\rangle$ (vgl. (IV.37b)).

Anhang 1

Es werden zwei Klassen von Kurven angegeben, für die die Annahme (IV.21) zutrifft.

a. Schraubenlinien

Bezeichnet man den Radius des Zylinders, auf dem die Schraubenlinie läuft, mit r und die Ganghöhe mit l , so folgt mit der Bezeichnung $\frac{2\pi}{k} = l$ für Krümmungsradius und Torsion (für Linksschrauben):

$$\frac{1}{R} = \frac{rk^2}{1+r^2k^2} \tag{A1.1}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{1+r^2k^2}$$

also

$$\frac{T}{R} = rk =: \varepsilon$$

Aus der Forderung $\frac{\varrho_{max}}{R} = \varepsilon$ ergibt sich demnach $\varrho_{max} \approx \frac{r}{\varepsilon}$ und mit den durch $\varrho = \xi \varrho_{max}$ und $\Theta = \frac{s}{T}$ eingeführten dimensionslosen Variablen ξ und Θ $\frac{\varrho}{T} = \xi$. Für die Länge L der Seele pro Periode folgt

$$L = \frac{2\pi}{k}\sqrt{1+\varepsilon^2} \tag{A1.2}$$

und somit (vgl. (II.17))

$$\frac{L}{T} - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} - 1\right) \approx -\pi\varepsilon^2 \tag{A1.3}$$

b. Toroidal geschlossene Kurven

Betrachtet man die auf Kreistoren liegenden geschlossenen Kurven

$$\underline{x} = \left((\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta)\cos\vartheta,\ (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta)\sin\vartheta,\ \bar{r}_1 \cos m\vartheta \right) \tag{A1.4}$$

und wird die Ableitung nach ϑ mit einem Punkt bezeichnet, so ergeben sich für die in den Formeln

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}})^2}{(\dot{\underline{x}}^2)^3}$$

$$\frac{1}{T} = - \frac{[\dot{\underline{x}}\,\ddot{\underline{x}}\,\dddot{\underline{x}}]}{(\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}})^2}$$

benötigten Ausdrücke

$$\dot{\underline{x}}^2 = m^2 \bar{r}_1^2 + (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta)^2$$

$$\begin{aligned}
(\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}})^2 = {} & m^6 \bar{r}_1^4 + 4m^4 \bar{r}_1^4 \cos^2 m\vartheta + m^4 \bar{r}_1^2 (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta)^2 \\
& - 2m^4 \bar{r}_1^3 (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta) \sin m\vartheta + m^2 \bar{r}_1^2 (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta)^2 \sin^2 m\vartheta \\
& - 2m^2 \bar{r}_1 (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta)^3 \sin m\vartheta + 4m^2 \bar{r}_1^2 \cos^2 m\vartheta (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta)^2 \\
& + (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta)^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\dot{\underline{x}}\,\ddot{\underline{x}}\,\dddot{\underline{x}}] = {} & - m^5 \bar{r}_1^2 (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta) - 3m^5 \bar{r}_1^3 \sin m\vartheta - 3m^3 \bar{r}_1^2 (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta) \cos 2m\vartheta \\
& - 6m^3 \bar{r}_1^3 \sin m\vartheta \cos^2 m\vartheta + m^3 \bar{r}_1^2 (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta) + m^3 \bar{r}_1 (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta)^2 \sin m\vartheta \\
& - m \bar{r}_1 (\bar{r}_0 - \bar{r}_1 \sin m\vartheta)^2 \sin m\vartheta
\end{aligned}$$

Hieraus sieht man, daß die einzige Wahl der Größenordnungen, die gleichzeitig die Konstanz des Vorzeichens des Spatprodukts und $\frac{T}{R} \sim \varepsilon$ gewährleistet, in

$$\text{(A1.5)} \qquad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad r_0 \sim m, \quad r_1 \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$$

besteht. Statt der demnach zu betrachtenden Kurven

$$\underline{x} = r_0 \left[\left(m - \frac{1}{\sqrt{m}} \gamma \sin m\vartheta\right) \cos\vartheta, \left(m - \frac{1}{\sqrt{m}} \gamma \sin m\vartheta\right) \sin\vartheta, \frac{1}{\sqrt{m}} \gamma \cos m\vartheta \right]$$

wird die etwas allgemeinere Klasse

$$\underline{x} = r_0 \left[\left(m - \frac{1}{\sqrt{m}} \gamma \sin f(m\vartheta)\right) \cos\vartheta,\ \left(m - \frac{1}{\sqrt{m}} \gamma \sin f(m\vartheta)\right) \sin\vartheta,\ \frac{1}{\sqrt{m}} \gamma \cos f(m\vartheta) \right]$$

(A1.6)

$$\text{mit} \qquad f(m\vartheta) = m\vartheta + m^{-\frac{\nu}{2}} f_\nu(m\vartheta)$$

gewählt, damit die höheren Ordnungen von Krümmung und Torsion mittels der Funktionen $f_\nu(m\vartheta)$ noch beeinflußbar sind. Bei der Berechnung der zweiten Ordnung des Gleichgewichts tritt nämlich eine Lösbarkeitsbedingung auf, die nur durch geeignete Wahl der Seele erfüllbar ist. Weiter zeigt sich, daß diese zweite Ordnung im wesentlichen berechenbar ist, wenn von der obigen Entwicklung für f nur

$$f(m\vartheta) \approx m\vartheta + \frac{1}{\sqrt{m}} f_1$$

mitgenommen wird, wobei die Lösbarkeitsbedingung mit

$$f_1 = \delta \cos m\vartheta$$

erfüllbar ist. Für diese Wahl von f ergeben sich folgende nach $\frac{1}{\sqrt{m}}$ entwickelten Ausdrücke

$$\dot{\underline{x}}^2 = r_0^2 m^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{m} + O(m^{-\frac{3}{2}})\right)$$

$$(\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}})^2 = r_0^4 m^5 \gamma^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\left(4\delta + \frac{2}{\gamma}\right) \sin m\vartheta + O(m^{-1})\right)$$

$$[\dot{\underline{x}}\,\ddot{\underline{x}}\,\dddot{\underline{x}}] = -r_0^3 m^5 \gamma^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\left(6\delta + \frac{1}{\gamma}\right) \sin m\vartheta + O(m^{-1})\right)$$

so daß folgt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0} \frac{\gamma}{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\left(2\delta + \frac{1}{\gamma}\right) \sin m\vartheta + O(m^{-1})\right)$$

(A1.7)

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}}\left(-2\delta + \frac{1}{\gamma}\right) \sin m\vartheta + \frac{1}{m} \frac{T_0}{T_2} + O(m^{-\frac{3}{2}})\right)$$

In niedrigster Ordnung gilt $\left(\frac{\rho_{max}}{R_0} = \varepsilon,\ \rho = \xi \rho_{max}\right)$

$$\frac{T_0}{R_0} = \gamma \varepsilon, \quad \rho_{max} = r_0, \quad \frac{\rho}{T_0} = \xi$$

Für die Bogenlänge erhält man

$$s = r_0 m \vartheta \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{m}} + O(m^{-\frac{3}{2}}) \right)$$

so daß

$$L = 2\pi r_0 m \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{m}} + O(m^{-\frac{3}{2}}) \right)$$

und

$$\frac{s}{T} =: \Theta = m \vartheta \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{m}} + O(m^{-\frac{3}{2}}) \right)$$

Weiter folgt noch

$$\frac{L}{T_0} - 2\pi m = \pi \gamma^2 + O(m^{-\frac{1}{2}})$$

Anhang 2

a. $\check{g}_{ik}$ für helikale Gleichgewichte

Für die Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen, die Untersuchung der Stabilität und der Diffusion genügt es, $\check{\Gamma}$, $\check{g}_{13}$, $\check{g}_{23}$, $\check{g}_{33}$ und $\check{g}_{22}$ zu berechnen. Es ergibt sich mit den Ansätzen (IV.23), wenn die dimensionslosen Variablen aus Anhang 1 eingeführt werden:

$$\frac{\overset{0}{\Gamma}}{T^3} = \overset{0}{\varphi}_X \overset{0}{\varphi}_K \overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}'$$

$$\frac{\overset{1}{\Gamma}}{T^3} = \overset{0}{\varphi}_X \overset{0}{\varphi}_K \cos\varphi \left[(\overset{1}{\xi}\overset{0}{\xi})' + \overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}'(\overset{1}{\varphi} - \overset{0}{\xi}) \right]$$

$$\frac{\overset{2}{\Gamma}}{T^3} = \overset{0}{\varphi}_X \overset{0}{\varphi}_K \Big[(\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_0)' + (\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_2)' \cos 2\varphi + \left(2\overset{2}{\varphi}\cos 2\varphi + \overset{2}{\sigma}\right)\overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}'$$
$$+ \left(\overset{0}{\xi}(\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}{}^2 + \overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}) - \frac{\overset{0}{\xi}{}'}{\overset{0}{\xi}}(\overset{1}{\xi}{}^2 + \overset{0}{\xi}{}^4) \right)\cos^2\varphi \Big]$$

$$\frac{\overset{0}{g}_{13}}{T^2} = \overset{0}{\varphi}_\psi \overset{0}{\varphi}_K$$

$$\frac{\overset{1}{g}_{13}}{T^2} = \overset{0}{\varphi}_K \sin\varphi \left(-\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\xi} + \overset{1}{\Theta}{}' \right) + \overset{0}{\varphi}_\psi \overset{0}{\varphi}_K \cos\varphi \, 2(\overset{1}{\Theta} - \overset{0}{\xi})$$

$$\frac{\overset{2}{g}_{13}}{T^2} = \overset{0}{\varphi}_K \sin 2\varphi \Big(-2\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\xi}_2 + \overset{2}{\Theta}{}' + \frac{1}{2}\big(-\overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\xi} + \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}'\overset{1}{\varphi} + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}'\overset{1}{\Theta}$$
$$- \overset{0}{\xi}{}^2(\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi})' - \overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi} + \overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}\big) - \overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta}{}' \Big)$$
$$+ \overset{0}{\varphi}_\psi \overset{0}{\varphi}_K \Big(-\frac{I_0'^3}{I_0''}\left(\frac{\overset{2}{\sigma}}{I_0'^2}\right)' + \overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi} + \frac{1}{2}\big(\overset{1}{\xi}{}^2 + \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2 + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2$$
$$+ \overset{0}{\xi}{}^2 - 2\overset{1}{\xi} - 4\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta} - 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}\overset{1}{\Theta}\big)\Big)$$
$$+ \overset{0}{\varphi}_\psi \overset{0}{\varphi}_K \cos 2\varphi \Big(4\overset{2}{\Theta} + \overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi} - \frac{1}{2}\big(\overset{1}{\xi}{}^2 - \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2 - (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2$$
$$- \overset{0}{\xi}{}^2 + 2\overset{1}{\xi} + 4\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta} + 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}\overset{1}{\Theta}\big)\Big)$$

$$\frac{\overset{0}{g}_{23}}{T^2} = 0$$

$$\frac{\overset{1}{g}_{23}}{T^2} = \overset{0}{\varphi}_X \overset{0}{\varphi}_K \cos\varphi \left(\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi} + \overset{1}{\Theta} - \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\Theta} \right)$$

$$\frac{\overset{2}{g}_{23}}{T^2} = \overset{0}{\varphi}_X \overset{0}{\varphi}_K \Big[\overset{0}{\xi}{}^2\left(\overset{2}{\tau} - \overset{2}{\sigma} + 2\overset{2}{\varphi}\cos 2\varphi\right) + 2\overset{2}{\Theta}(1 - \overset{0}{\xi}{}^2)\cos 2\varphi + \overset{1}{\xi}{}^2$$
$$+ \left(2\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi} + 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2 - 3\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}\overset{1}{\Theta} + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2 - 2\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\Theta} - 2\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta} - \overset{1}{\xi}{}^2 + \overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}\right)\cos^2\varphi \Big]$$

$$\frac{\overset{0}{g}_{33}}{T^2} = \overset{0}{\varphi}_K{}^2$$

$$\frac{\overset{1}{g}_{33}}{T^2} = 2\,\overset{0}{\varphi}_K{}^2\,(\overset{1}{\Theta} - \overset{0}{\xi})\cos\varphi$$

$$\frac{\overset{2}{g}_{33}}{T^2} = \overset{0}{\varphi}_K{}^2\Big[2\overset{2}{\sigma} + 4\overset{2}{\Theta}\cos 2\varphi + \overset{1}{\xi}{}^2 + (\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2 + 2\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi} - 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi} - 2\overset{1}{\xi} + \overset{0}{\xi}{}^2 + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2 - \overset{1}{\xi}{}^2 - 4\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta})\cos^2\varphi\Big]$$

$$\frac{\overset{0}{g}_{22}}{T^2} = \overset{0}{\varphi}_X{}^2\,\overset{0}{\xi}{}^2$$

$$\frac{\overset{1}{g}_{22}}{T^2} = 2\overset{0}{\varphi}_X{}^2\cos\varphi\,(\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi} + \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi} - \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\Theta})$$

$$\frac{\overset{2}{g}_{22}}{T^2} = \overset{0}{\varphi}_X{}^2\Big[2\overset{0}{\xi}(\overset{2}{\xi}_0 + \overset{2}{\xi}_2\cos 2\varphi) + 4\overset{2}{\varphi}\overset{0}{\xi}{}^2\cos 2\varphi + \overset{1}{\xi}{}^2 + (\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2 + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2 + 4\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi} - 4\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\Theta} - 4\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}\overset{1}{\Theta} + 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2)\cos^2\varphi\Big]$$

b. $\check{g}_{iK}$ für toroidales Gleichgewicht

In den dimensionslosen Variablen aus Anhang 1 ergibt sich mit den Ansätzen (IV.35)

$$\frac{\overset{0}{\Gamma}}{T_0^3} = \overset{0}{\varphi}_X\overset{0}{\varphi}_K\,\overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}'$$

$$\frac{\overset{1}{\Gamma}}{T_0^3} = \overset{0}{\varphi}_X\overset{0}{\varphi}_K\cos\varphi\,\big[(\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi})' + \overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}'(\overset{1}{\varphi}_{10} - \overset{0}{\xi})\big]$$

$$\frac{\overset{2}{\Gamma}}{T_0^3} = \overset{0}{\varphi}_X\overset{0}{\varphi}_K\Big[(\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_{00})' + (\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_{20})'\cos 2\varphi + (\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_{11})'\sin m\vartheta\cos\varphi + (\overset{0}{\xi}\overset{2}{\xi}_{02})'\cos 2m\vartheta + ((\overset{2}{\varphi}_{11} - \overset{2}{\Theta}_{11})\sin m\vartheta\cos\varphi + 2\overset{2}{\Theta}_{02}\cos 2m\vartheta + 2\overset{2}{\varphi}_{20}\cos 2\varphi + \overset{2}{\sigma})\overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}' + (\overset{0}{\xi}(\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}{}^2_{10} + \overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}_{10}) - \frac{\overset{0}{\xi}{}'}{\overset{0}{\xi}}(\overset{1}{\xi}{}^2 + \overset{0}{\xi}{}^4))\cos^2\varphi + \Big(-\overset{0}{\xi}\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}_{01}\overset{1}{\Theta} + \frac{\overset{0}{\xi}{}^2\overset{0}{\xi}{}'}{\beta}\Big)\sin m\vartheta\cos\varphi$$

$$\frac{\overset{0}{g}_{13}}{T_0^2} = \overset{0}{\varphi}_\psi\overset{0}{\varphi}_K$$

$$\frac{\overset{1}{g}_{13}}{T_0^2} = \overset{0}{\varphi}_K\sin\varphi\,(-\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\xi} + \overset{1}{\Theta}{}') + \overset{0}{\varphi}_\psi\overset{0}{\varphi}_K\cos\varphi\,(\overset{1}{\Theta} - \overset{0}{\xi})$$

$$\frac{\overset{2}{g}_{13}}{T_0^2} = \overset{0}{\varphi}_K\sin 2\varphi\Big(-2\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\xi}_{20} + \overset{2}{\Theta}{}'_{20} + \frac{1}{2}\big(-\overset{1}{\xi}{}'\overset{1}{\xi} + \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}'_{10}\overset{1}{\varphi}_{10} + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}'\overset{1}{\Theta} - \overset{0}{\xi}{}^2(\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}_{10})' - \overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi}_{10} + \overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}{}'_{10}\big) - \overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta}{}'\Big)$$
$$+ \overset{0}{\varphi}_\psi\overset{0}{\varphi}_K\Big(-\frac{I_0'^3}{I_0''}\Big(\frac{\overset{2}{\sigma}}{I_0'^2}\Big)' + \overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}_{10} + \frac{1}{2}\big(\overset{1}{\xi}{}^2 + \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2_{10} + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2 + \overset{0}{\xi}{}^2 - 2\overset{1}{\xi} - 4\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta} - 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}_{10}\overset{1}{\Theta} + \frac{\overset{0}{\xi}{}^2}{\alpha^2}\big)\Big)$$

$$+ \overset{0}{\varphi}_\psi \overset{0}{\varphi}_\kappa \cos 2\varphi \Big(4\overset{2}{\Theta}_{20} + \overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}_{10} - \tfrac{1}{2}\big(\overset{1}{\xi}{}^2 - \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2_{10} - (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2 - \overset{0}{\xi}{}^2 + 2\overset{1}{\xi}$$
$$+ 4\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta} + 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}_{10}\overset{1}{\Theta}\big)\Big)$$

$$+ \overset{0}{\varphi}_\kappa \sin\varphi \sin m\vartheta \Big(-\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\xi}_{11} + \overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi}_{01} + \frac{\overset{0}{\xi}{}^2}{\alpha}\big(\overset{1}{\Theta}{}' - \overset{1}{\varphi}{}'_{10}\big)\Big)$$

$$+ \overset{0}{\varphi}_\kappa \cos\varphi \cos m\vartheta \Big(\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\xi}_{11} + \overset{2}{\Theta}{}'_{11}\Big)$$

$$+ \overset{0}{\varphi}_\psi \overset{0}{\varphi}_\kappa \cos\varphi \sin m\vartheta \Big(-2\overset{2}{\Theta}_{11} - 2\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}_{01} + 2\frac{\overset{0}{\xi}{}^2}{\alpha}\big(\overset{1}{\Theta} - \overset{1}{\varphi}_{10}\big) + \frac{2\overset{0}{\xi}}{\beta}\Big)$$

$$- \overset{0}{\varphi}_\psi \overset{0}{\varphi}_\kappa \sin\varphi \cos m\vartheta \; 2\overset{2}{\Theta}_{11} - \overset{0}{\varphi}_\psi \overset{0}{\varphi}_\kappa \cos 2m\vartheta \frac{\overset{0}{\xi}{}^2}{2\alpha^2}$$

$$- \overset{0}{\varphi}_\kappa \sin 2m\vartheta \Big(2\overset{0}{\xi}{}'\overset{2}{\xi}_{02} - \overset{2}{\Theta}{}'_{02}\Big) + \overset{0}{\varphi}_\psi \overset{0}{\varphi}_\kappa \cos 2m\vartheta \; 4\overset{2}{\Theta}_{02}$$

$$\frac{\overset{0}{q}_{23}}{T_0^2} = 0$$

$$\frac{\overset{1}{q}_{23}}{T_0^2} = \overset{0}{\varphi}_\chi \overset{0}{\varphi}_\kappa \cos\varphi \Big(\overset{0}{\xi}{}'\overset{1}{\varphi}_{10} + \overset{1}{\Theta} - \overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\Theta}\Big) - \Big(\overset{1}{\varphi}_{01} + \frac{1}{\alpha}\Big)\overset{0}{\xi}{}^2 \overset{0}{\varphi}_\chi \overset{0}{\varphi}_\kappa \sin m\vartheta$$

$$\frac{\overset{2}{q}_{23}}{T_0^2} = \overset{0}{\varphi}_\chi \overset{0}{\varphi}_\kappa \Big[\overset{0}{\xi}{}^2\Big(\overset{2}{\tau} - \overset{2}{\sigma} + 2\overset{2}{\varphi}_{20}\cos 2\varphi + \overset{2}{\varphi}_{11}(\sin\varphi\cos m\vartheta - \cos\varphi\sin m\vartheta) + \overset{2}{\varphi}_{02,\vartheta}\Big)$$
$$+ 2\overset{2}{\Theta}_{20}(1-\overset{0}{\xi}{}^2)\cos 2\varphi - \overset{2}{\Theta}_{11}(1-\overset{0}{\xi}{}^2)\sin\varphi\cos m\vartheta$$
$$+ \overset{0}{\xi}{}^2\overset{2}{\Theta}_{11}\cos\varphi\sin m\vartheta - 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{2}{\Theta}_{02}\cos 2m\vartheta + \overset{1}{\xi}{}^2$$
$$+ \Big(2\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi}_{10} + 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2_{10} - 3\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}_{10}\overset{1}{\Theta} + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2 - 2\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\Theta} - 2\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta} - \overset{1}{\xi}{}^2 + \overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}_{10}\Big)\cos^2\varphi$$
$$+ \Big(-\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}_{01}\overset{1}{\varphi}_{10} - 2\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\varphi}_{01} + \overset{0}{\xi}{}^2\frac{2}{\alpha}\overset{1}{\Theta} - \overset{1}{\varphi}_{01}\overset{1}{\Theta}\overset{0}{\xi}{}^2 - \frac{\overset{0}{\xi}{}^2}{\alpha}\big(\overset{1}{\varphi}_{10} + 2\overset{1}{\Theta}\big) - 2\frac{\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\overset{1}{\xi}}{\alpha}\Big)\cos\varphi\sin m\vartheta$$
$$- \overset{0}{\xi}{}^2\frac{T_0}{T_2}\Big]$$

$$\frac{\overset{0}{q}_{33}}{T_0^2} = \overset{0}{\varphi}{}^2_\kappa$$

$$\frac{\overset{1}{q}_{33}}{T_0^2} = 2\overset{0}{\varphi}{}^2_\kappa\big(\overset{1}{\Theta} - \overset{0}{\xi}\big)\cos\varphi$$

$$\frac{\overset{2}{q}_{33}}{T_0^2} = \overset{0}{\varphi}{}^2_\kappa \Big[2\overset{2}{\sigma} + 4\overset{2}{\Theta}_{20}\cos 2\varphi - 2\overset{2}{\Theta}_{11}(\sin\varphi\cos m\vartheta + \cos\varphi\sin m\vartheta)$$
$$+ 4\overset{2}{\Theta}_{02}\cos 2m\vartheta + \overset{1}{\xi}{}^2 + \Big(\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\varphi}{}^2_{10} + 2\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}_{10} - 2\overset{0}{\xi}{}^2\overset{1}{\Theta}\overset{1}{\varphi}_{10}$$
$$- 2\overset{1}{\xi} + \overset{0}{\xi}{}^2 + (1+\overset{0}{\xi}{}^2)\overset{1}{\Theta}{}^2 - \overset{1}{\xi}{}^2 - 4\overset{0}{\xi}\overset{1}{\Theta}\Big)\cos^2\varphi$$
$$+ \Big(2\frac{\overset{0}{\xi}}{\beta} - 2\overset{1}{\varphi}_{01}\overset{1}{\Theta} + \frac{2\overset{0}{\xi}{}^2}{\alpha}\overset{1}{\Theta} - \frac{2\overset{0}{\xi}{}^2}{\alpha}\overset{1}{\varphi}_{10}\Big)\cos\varphi\sin m\vartheta + \frac{\overset{0}{\xi}{}^2}{\alpha^2}\sin^2 m\vartheta\Big]$$

$$\frac{\overset{0}{g}_{22}}{T_0^2} = \overset{0}{\varphi}{}_X^2 \, \overset{0}{\xi}{}^2$$

$$\frac{\overset{1}{g}_{22}}{T_0^2} = \overset{0}{\varphi}{}_X^2 \left[\cos\varphi \left(2 \overset{0}{\xi} \overset{1}{\xi} + 2 \overset{0}{\xi}{}^2 \overset{1}{\varphi}_{10} - 2 \overset{0}{\xi}{}^2 \overset{1}{\Theta} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\overset{2}{g}_{22}}{T_0^2} = \overset{0}{\varphi}{}_X^2 \Big[& 2 \overset{0}{\xi}{}^2 \left(2 \overset{2}{\varphi}_{20} \cos 2\varphi + \overset{2}{\varphi}_{11} \cos\varphi \sin m\vartheta \right) \\ & + 2 \overset{0}{\xi} \left(\overset{2}{\xi}_{00} + \overset{2}{\xi}_{20} \cos 2\varphi + \overset{2}{\xi}_{11} \cos\varphi \sin m\vartheta + \overset{2}{\xi}_{02} \cos 2m\vartheta \right) \\ & + \overset{1}{\xi}{}^2 + \left(\left(1 + \overset{0}{\xi}{}^2 \right) \overset{1}{\Theta}{}^2 + 3 \overset{0}{\xi}{}^2 \overset{1}{\varphi}{}_{10}^2 + 4 \overset{0}{\xi} \overset{1}{\xi} \overset{1}{\varphi}_{10} - 4 \overset{1}{\Theta} \left(\overset{0}{\xi}{}^2 \overset{1}{\varphi}_{10} + \overset{0}{\xi} \overset{1}{\xi} \right) \right) \cos^2\varphi \\ & - \frac{2}{\alpha} \overset{0}{\xi} \overset{1}{\Theta} \cos\varphi \sin m\vartheta \Big] \end{aligned}$$

Anhang 3

Zur Diffusionsformel (III.8)

In Verallgemeinerung von [9] wird in [10] folgende Formel für den Materiestrom angegeben

$$M = -\frac{n}{\sigma} p' \Big[\int g_{22}\, d\chi\, d\sigma - \mu_0 I \Big(\frac{J^2}{I^2}\bar{q}^2 - \frac{1}{2}\overline{q q_{\chi\chi}} - \frac{1}{\iota}\overline{(q-\bar{q})[g_{23,\chi}]}$$

$$+ \frac{1}{\iota}\big(\mu_0 J \bar{q}^2 - \overline{q[g_{23}]}\big) + \frac{\mu_0 I}{\iota^2}\big(\bar{q}^2 - \overline{q^2}\big)\Big]$$

die eine Entwicklung des Ausdrucks für kleine ι darstellt und also ein Divergieren des Materiestromes für $\iota \to 0$ möglich erscheinen läßt. Für die in dieser Arbeit betrachteten Gleichgewichte ist dies jedoch sicher nicht der Fall wegen der Entwickelbarkeit von (III.8). Obige Formel läßt sich folgendermaßen in (III.8) umformen: für ihre Herleitung werden die Koordinaten ψ, χ, σ mit $\frac{\partial \underline{r}}{\partial \sigma} = \underline{B}$ benutzt und es ist

$$q = \int d\sigma = \int \frac{d\ell}{B}$$

worin das Integral längs einer Feldlinie erstreckt wird bis diese die Linie $\sigma = 0$, die eine beliebige geschlossene Kurve ohne großen Umlauf auf der betrachteten Fläche $\psi = konst$ sein darf, wieder schneidet. Im Falle verschwindenden Längsstroms kann eine Stromlinie als Linie $\sigma = 0$ genommen werden; dann ist nach [11] q Flächenfunktion. Nach S. 3 folgt dies direkt aus $\frac{d\ell}{B} = -\frac{dK}{p'}$, also ist $q = \frac{I'}{p'} = V'$. Damit reduziert sich obige Diffusionsformel auf ($\bar{g}_{23} = \int g_{23}\, d\chi = \mu_0 J$) (J ist der Längsstrom)

$$M = \frac{n}{\sigma} \int g_{22}\, d\chi\, dK$$

also (III.8).

Anhang 4

In [7] werden für eine beliebige durch $\frac{1}{R(s)}$ und $\frac{1}{T(s)}$ gegebene magnetische Achse um diese Achse analytische Gleichgewichte berechnet und es wird der Schluß gezogen, daß solche Gleichgewichte für auf der Seele verschwindende Rotationstransformation nicht existieren. Der dazu führende Gedankengang soll hier verallgemeinert, der Schluß selbst aber in Frage gestellt werden. Hierbei wird nur zur Vereinfachung der Schreibweise eine ebene Seele vorausgesetzt.
Aus der Gleichgewichtsgleichung folgt

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = p' \frac{\underline{B} \times \nabla \psi}{\underline{B}^2} + h \underline{B}$$

mit einem Skalar h, für den sich aus dem Verschwinden der Divergenz der Stromdichte ergibt

$$\underline{B} \cdot \nabla h = -p' (\underline{B} \times \nabla \psi) \cdot \nabla \frac{1}{B^2}$$

Zusammen mit

$$\underline{B} \cdot \nabla \psi = 0$$

reduziert sich damit die Lösung des Gleichgewichtsproblems auf die Lösung zweier "magnetischer Differentialgleichungen" (s.z.B. [14]) (natürlich muß noch $\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$ befriedigt werden). Wählt man das übliche toroidale Koordinatensystem ρ, φ, s und setzt für die Feldkomponenten und den Längsfluß an

$$B_\rho = a_\nu \rho^\nu, \quad \nu \geq 1 \quad ; \quad B_\varphi = b_\nu \rho^\nu, \quad \nu \geq 1$$

$$B_s = c_\nu \rho^\nu, \quad \nu \geq 0 \quad ; \quad \psi = \psi_\nu \rho^\nu, \quad \nu \geq 2$$

so erhält man für die Stromdichte auf der Seele

$$2 b_1 - \frac{\partial a_1}{\partial \varphi} = j_0(s)$$

aus $\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$

$$2a_1 + \frac{\partial b_1}{\partial \varphi} = -\frac{d c_0(s)}{ds}$$

und aus $\underline{B} \cdot \nabla \psi = 0$ in niedrigster Ordnung

$$c_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial s} + b_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + a_1 \psi_2 = 0 \leftrightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} - \varphi_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} + \beta_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} = 0$$

mit

$$\varphi_2 = \frac{\psi_2}{c_0} \qquad \beta_1 = \frac{b_1}{c_0}$$

Um den Vergleich mit [7] zu erleichtern, wird die Lösung in der dort angegebenen Form geschrieben

$$a_1 = -\frac{c_0'}{2} + c_0 \bar{k} \sinh\eta \sin 2u - c_0 \frac{\eta'}{2} \cos 2u$$

$$b_1 = \frac{j_0}{2} + c_0 \bar{k} \sinh\eta \cos 2u - c_0 \frac{\eta'}{2} \sin 2u$$

$$\bar{k} = \frac{1}{2\cosh\eta}\left(\frac{j_0}{c_0} + \alpha'\right), \quad \frac{j_0}{c_0} = \frac{\lambda}{2} = \text{konst}, \quad u = \varphi + \frac{\alpha}{2}$$

$$\varphi_2 = \cosh\eta + \sinh\eta \cos 2u$$

mit zwei willkürlichen periodischen Funktionen $\alpha(s)$ und $\eta(s)$.
Für die Rotationstransformation auf der Seele folgt mit

$$\frac{b_1}{\varphi_2} = \frac{\beta_1}{\varphi_2} = \bar{k} - \frac{\partial}{\partial s} \arctan\left(e^{-\eta} \tan u\right)$$

$$\frac{\iota_0}{2\pi} = \oint \frac{b_1}{\varphi_2} ds = \oint \bar{k}\, ds$$

Wird nun die gesuchte Funktion in einer magnetischen Differentialgleichung mit α bezeichnet und gesetzt

$$\alpha = \alpha_\nu c_0^{\frac{\nu+1}{2}} \rho^\nu$$

so ergibt sich für die m-te Ordnung

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial s} - \frac{m}{2} \alpha_m \frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \alpha_m}{\partial \varphi} \beta_1 = \text{Inhomog.}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung findet man mit

$$\alpha_m = \varphi_2^{\frac{m}{2}} \cdot f$$

was für f ergibt

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

deren allgemeine Lösung durch

$$f = f\left(\int_0^s \bar{k}(s')ds' - \arctan\left(e^{-\eta} \tan u\right)\right) =: f(w)$$

gegeben ist. f muß man nun so wählen, daß in ihr die gleichen Fourierkoeffizienten bzgl. φ auftreten wie in der Inhomogenität. Wegen

$$\cos \arctan\left(e^{-\eta} \tan u\right) = \frac{e^{\frac{\eta}{2}} \cos u}{\varphi_2^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin \arctan\left(e^{-\eta} \tan u\right) = \frac{e^{-\frac{\eta}{2}} \sin u}{\varphi_2^{\frac{1}{2}}}$$

kann man überlegen, daß dies mit ($\rho \leq m$)

$$f_{s\rho} = \sin \rho w \quad ; \quad f_{c\rho} = \cos \rho w$$

erreicht wird, denn man bekommt ($\rho = m, m-2, \dots$)

$$\alpha_{s\rho m} = \varphi_2^{\frac{m-\rho}{2}} \sum_\nu (-)^\nu \binom{\rho}{2\nu+1} \cos^{\rho-1-2\nu}(w) \sin^{2\nu+1}(w)\, e^{(\rho_2-(2\nu+1))\eta}$$

$$\alpha_{c\rho m} = \varphi_2^{\frac{m-\rho}{2}} \sum_\nu (-)^\nu \binom{\rho}{2\nu} \cos^{\rho-2\nu}(w) \sin^{2\nu}(w)\, e^{(\rho_2-2\nu))\eta}$$

für den Spezialfall $\eta = 0$ also z.B.

$$\alpha_{s\rho m} = \sin \rho w \quad ; \quad \alpha_{c\rho m} = \cos \rho w$$

Damit hat man die benötigte Zahl linear unabhängiger Lösungen für das homogene System, das durch Fourierzerlegung bzgl. φ

aus der Gleichung für die m-te Ordnung entsteht. Die allgemeine Bedingung für die Existenz einer periodischen Lösung des zugehörigen inhomogenen Systems ist: Die Determinante der Differenz der Lösungsvektoren für $s = 0$ und $s = L$ darf nicht verschwinden. Durch eine etwas mühsame Überlegung, die hier nicht durchgeführt werden soll, stellt man fest, daß

$$\oint \bar{k}\, ds = \frac{\iota_0}{2\pi} \neq \left\{ \nu \frac{2\pi}{m} \; ; \; \nu = 0, \dots, m \right\}$$

für die m-te Ordnung gelten muß. Dieses ist die Verallgemeinerung des Mercier'schen Ergebnisses: für Vakuumfelder wird es in etwas weniger allgemeiner Form auch in [13] gefunden. Zu diesem Ergebnis sollen noch zwei Bemerkungen gemacht werden:

1. Wenn die analytische Lösung für ein rationales $\frac{\iota_0}{2\pi}$ nicht existiert, wird die Reihe für ψ nicht konvergieren, sobald ein reelles, nicht-rationales $\frac{\iota_0}{2\pi}$ "zu nahe" an obigem rationalen liegt (in Analogie [12], Appendix A), so daß rationalem $\frac{\iota_0}{2\pi}$ nur bedingt eine Sonderstellung zukommt.
2. Eine analytische Lösung für rationales $\frac{\iota_0}{2\pi}$ existiert nur dann nicht, wenn diejenigen inhomogenen Lösungen, bei denen die allgemeine Existenzbedingung für eine periodische Lösung nicht erfüllt ist, nicht periodisch sind. Nun hat man aber bei der Konstruktion der Lösung die Funktionen $\frac{1}{R(s)}$, $c_0(s)$, $d(s)$, $\eta(s)$ willkürlich vorgegeben (statt mathematisch korrekter ein Randwertproblem zu formulieren); es bleibt also zu untersuchen, ob man nicht einen (unendlichen) Satz von Bedingungen für diese Funktionen bekommt, der die Periodizität der inhomogenen Lösungen sicherstellt. Z.B. bekommt man aus den beiden oben angegebenen magnetischen Differentialgleichungen in dem einfachen Fall der M§S-Konfiguration [2] mit Volumenströmen ($\eta = d = j_{s0} = \iota_0 = 0$) als einzige Bedingung bei einer Rechnung bis zur zweiten Ordnung in ρ für h und bis zur dritten Ordnung in ρ für ψ

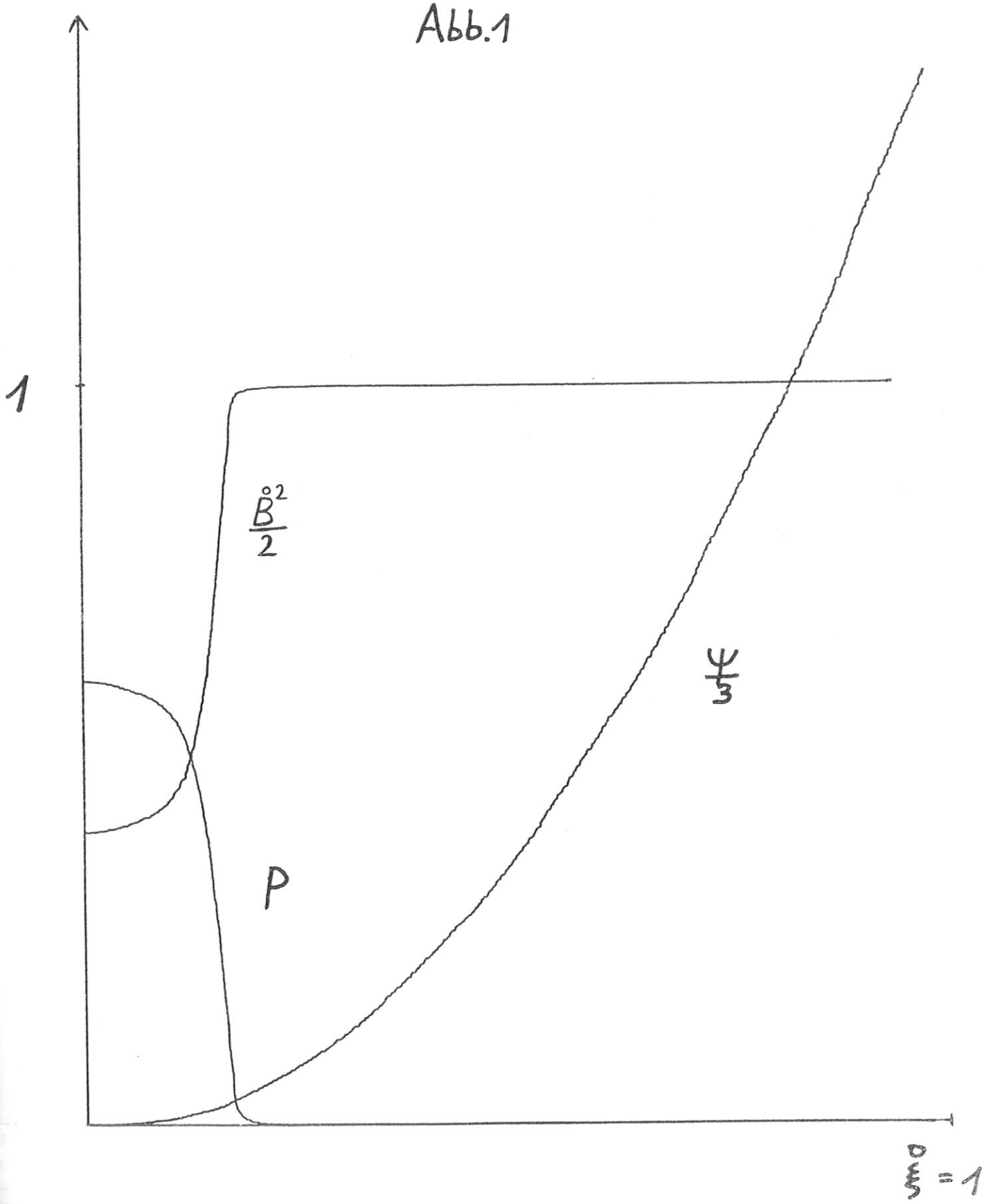
$$p'(0) \oint \frac{1}{R c_0^{\frac{3}{2}}}\, ds = 0$$

die (für $p'(0) \neq 0$) natürlich erfüllbar ist, sobald nur $\frac{1}{R(s)}$ keine Funktion festen Vorzeichens ist. Es besteht die Vermutung, daß auch in höherer Ordnung in ϱ keine weitere Lösbarkeitsbedingung obiger Form (die also nur $c_0(s)$ und $\frac{1}{R(s)}$ enthalten würde) auftaucht, sofern in jeder Ordnung geeignet über die jeweils freien Konstanten verfügt wird.

Literatur

1	K.A. Brueckner (Editor)	:	Adv. in Theor. Phys., 1965, 195 J.M. Greene, J.L. Johnson Hydromagnetic Equilibrium and Stability
2	F. Meyer, H.U. Schmidt	:	Zeitschr. f. Nat.-f., 13a, 1958, 1005
3	E.W. Laing, S.J. Roberts, R.T.P. Whipple	:	J. of Nucl. En. Part C Vol. 1, 1960, 49
4	S. Yoshikawa	:	Phys. Fluids 11, 1968, 893
5	M.D. Kruskal, R.M. Kulsrud	:	Phys. Fluids 1, 1958, 265
6	L. Biermann, A. Schlüter	:	Zeitschr. f. Nat.-f., 12a, 1957, 805
7	C. Mercier	:	Nucl. Fus. 4, 1964, 213
8	J.L. Johnson, J.M. Greene	:	Plasma Physics Vol. 9, No. 5, 1967, 611
9	D. Pfirsch, A. Schlüter	:	Report MPI/PA/7/62, 1962
10	H.P. Zehrfeld	:	nicht veröffentlicht
11	S. Hamada	:	Nucl. Fus. 2, 1962, 27
12	H. Grad	:	Phys. Fluids 10, No. 1, 1967, 137
13	G. Knorr, E. Rebhan	:	Report Univ. of Iowa 68-25
14	W.A. Newcomb	:	Phys. Fluids 2, 1959, 362
15	L. Spitzer	:	Phys. Fluids 1, 1958, 257

Abb.1



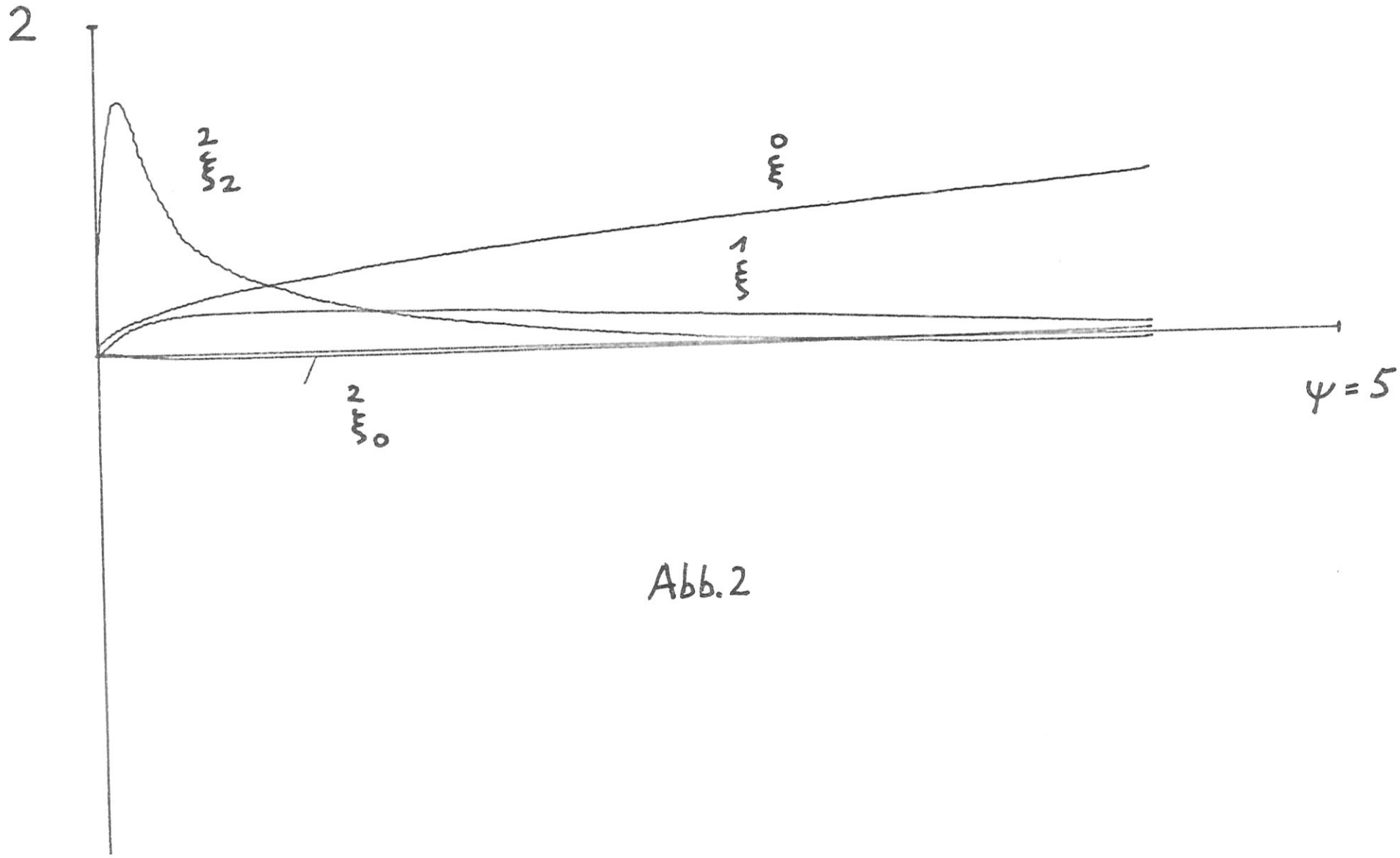


Abb. 2

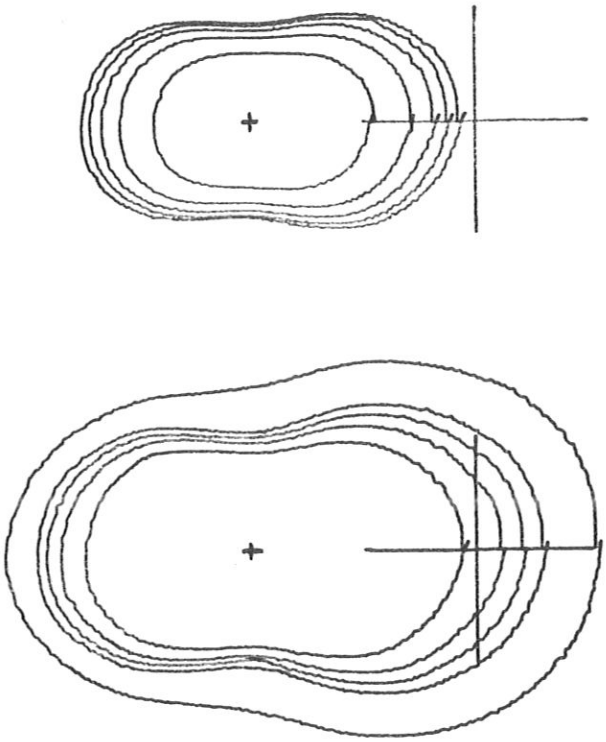


Abb.3

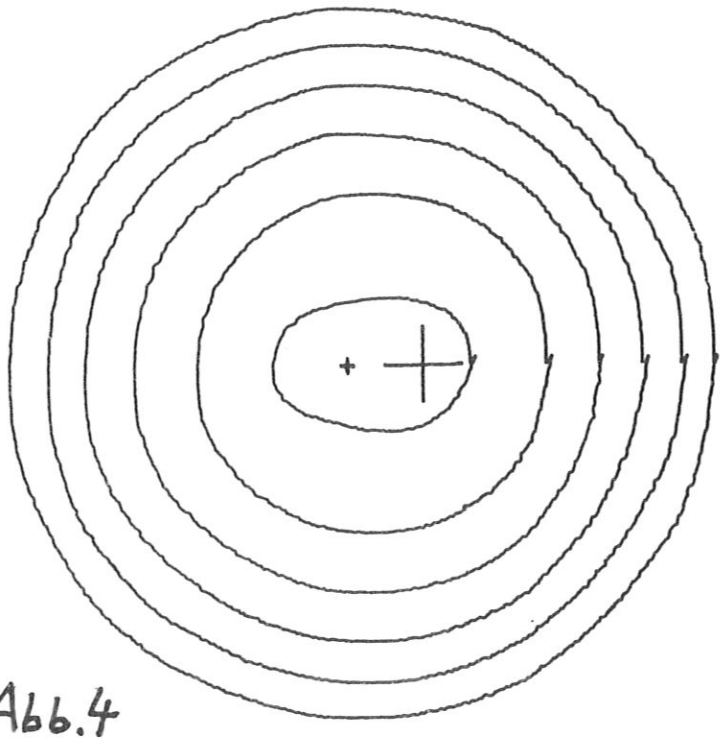


Abb.4

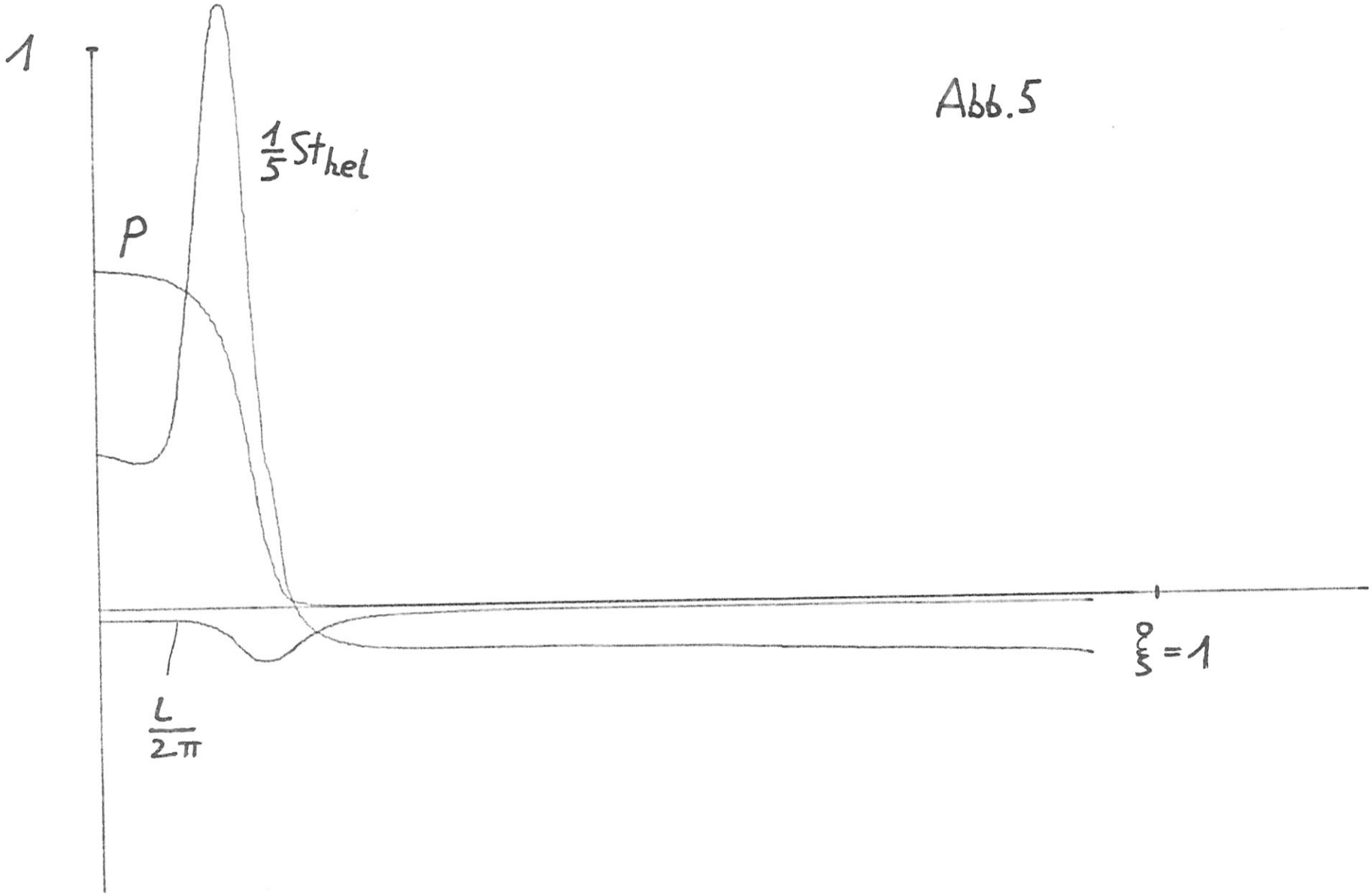


Abb. 5

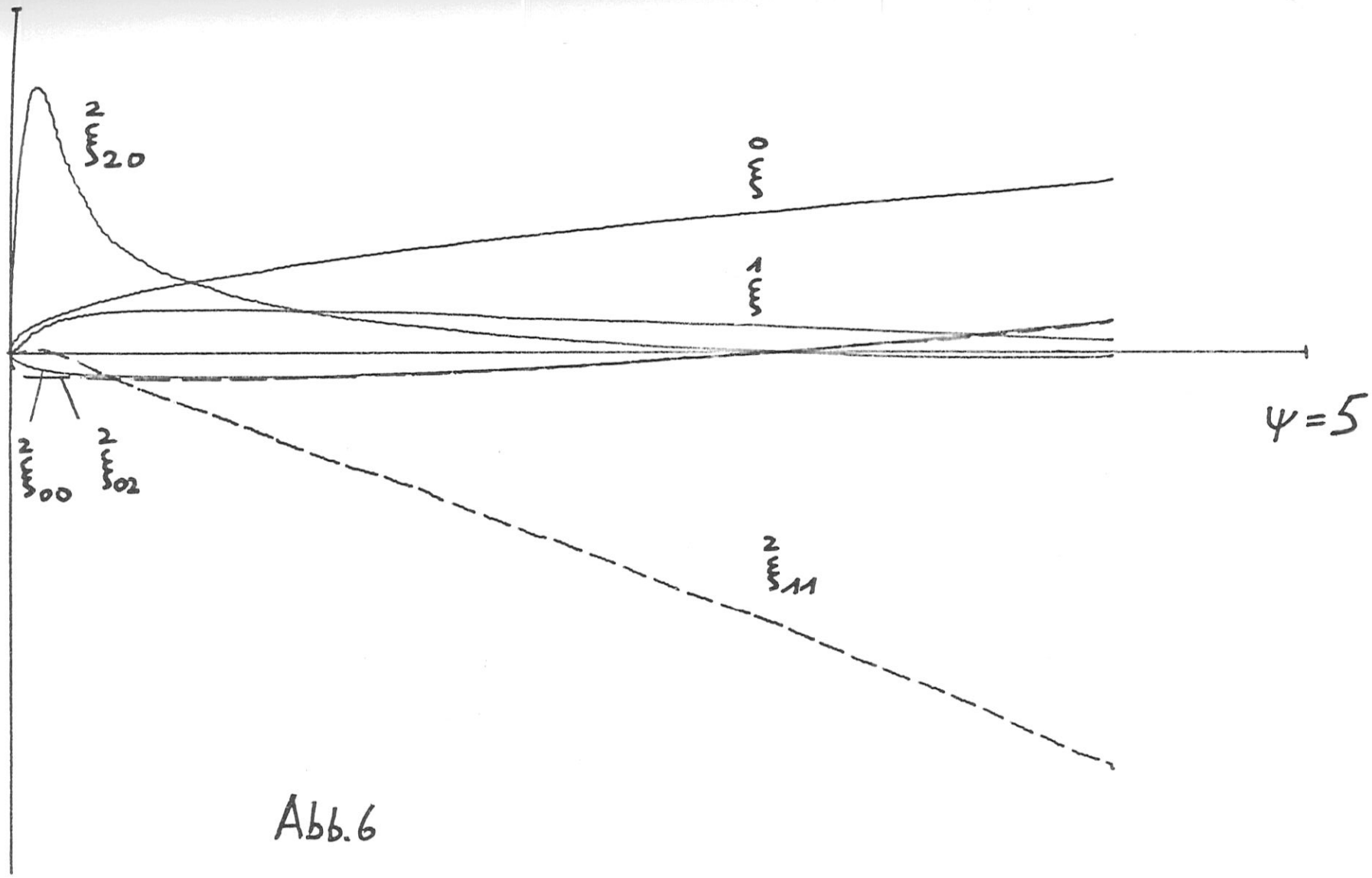

$\overset{2}{\xi}_{20}$
$\overset{0}{\xi}$
$\overset{1}{\xi}$
$\psi = 5$
$\overset{2}{\xi}_{00}$
$\overset{2}{\xi}_{02}$
$\overset{2}{\xi}_{11}$

Abb. 6

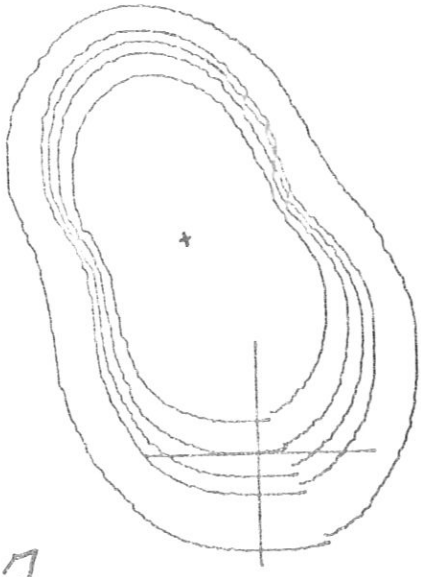


Abb. 7

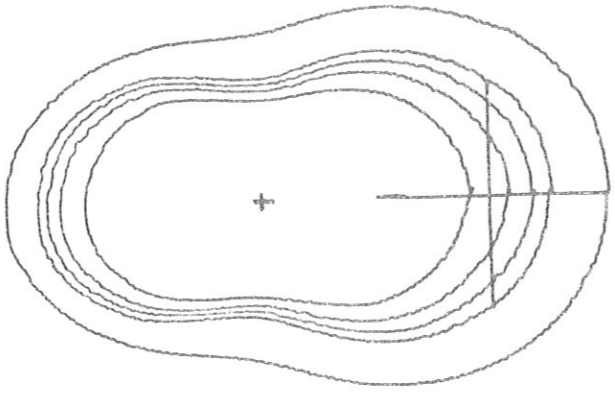
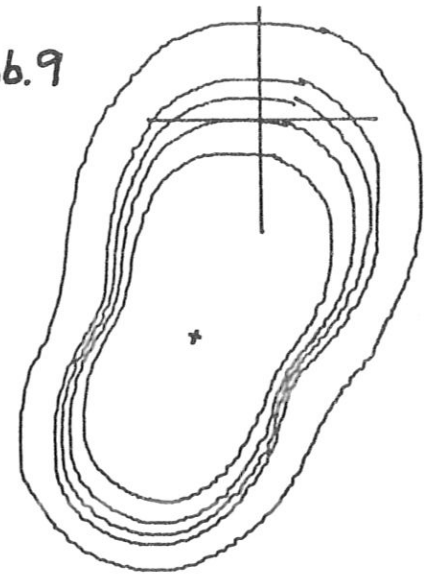


Abb. 8

Abb. 9



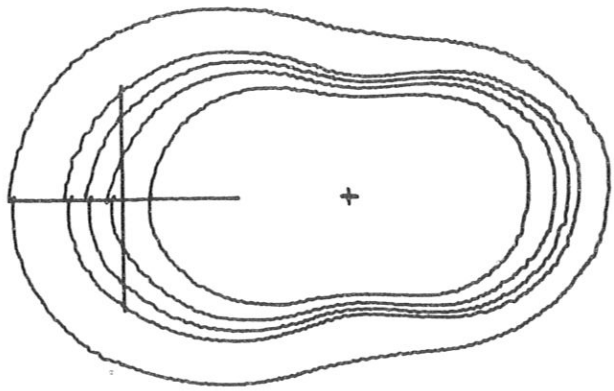


Abb. 10

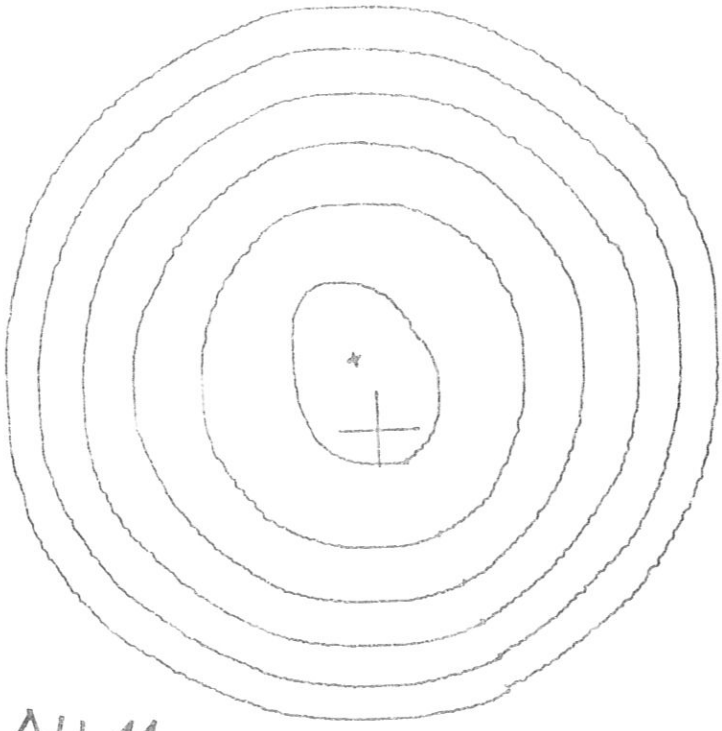


Abb. 11

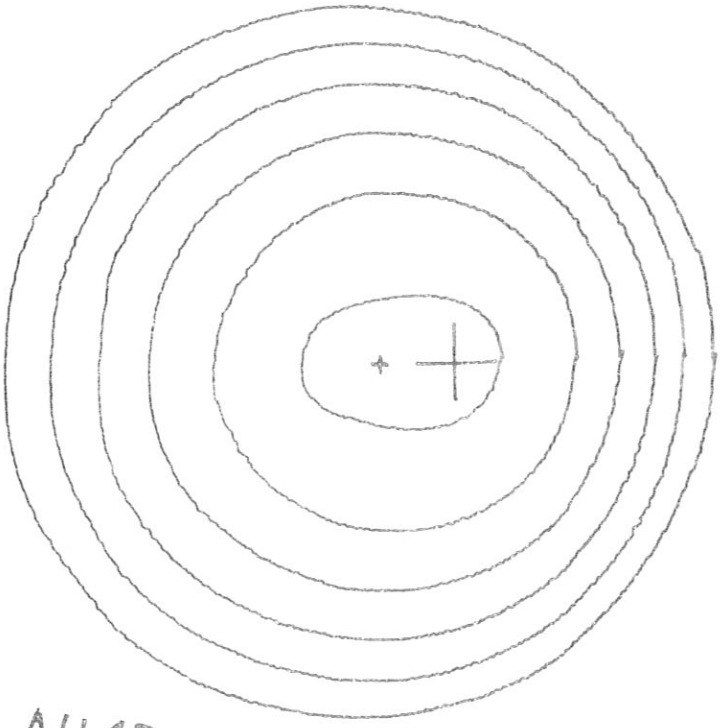


Abb. 12

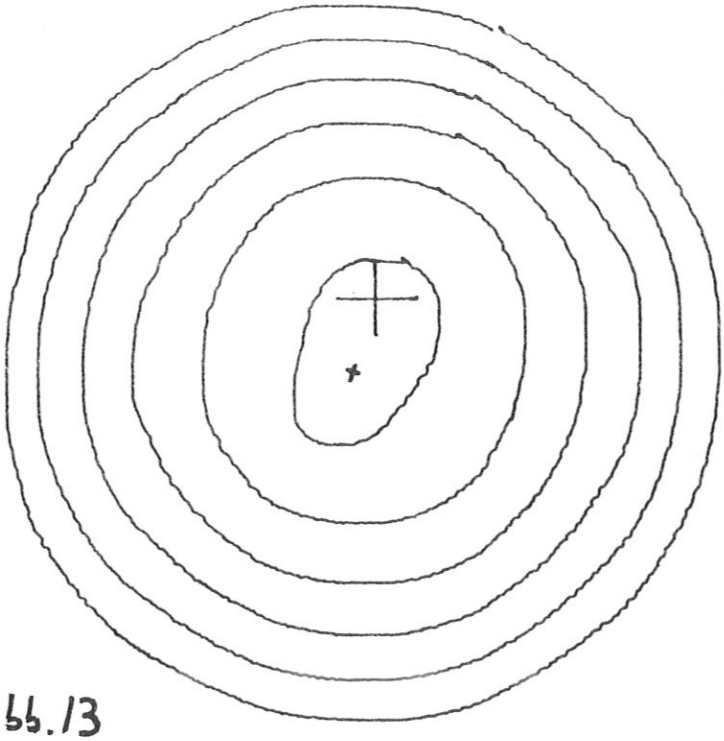


Abb. 13

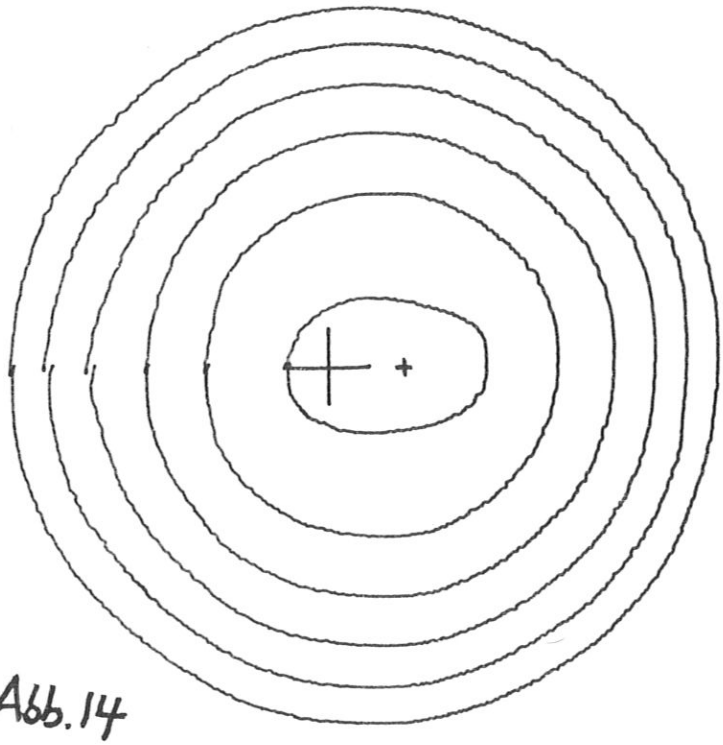


Abb. 14

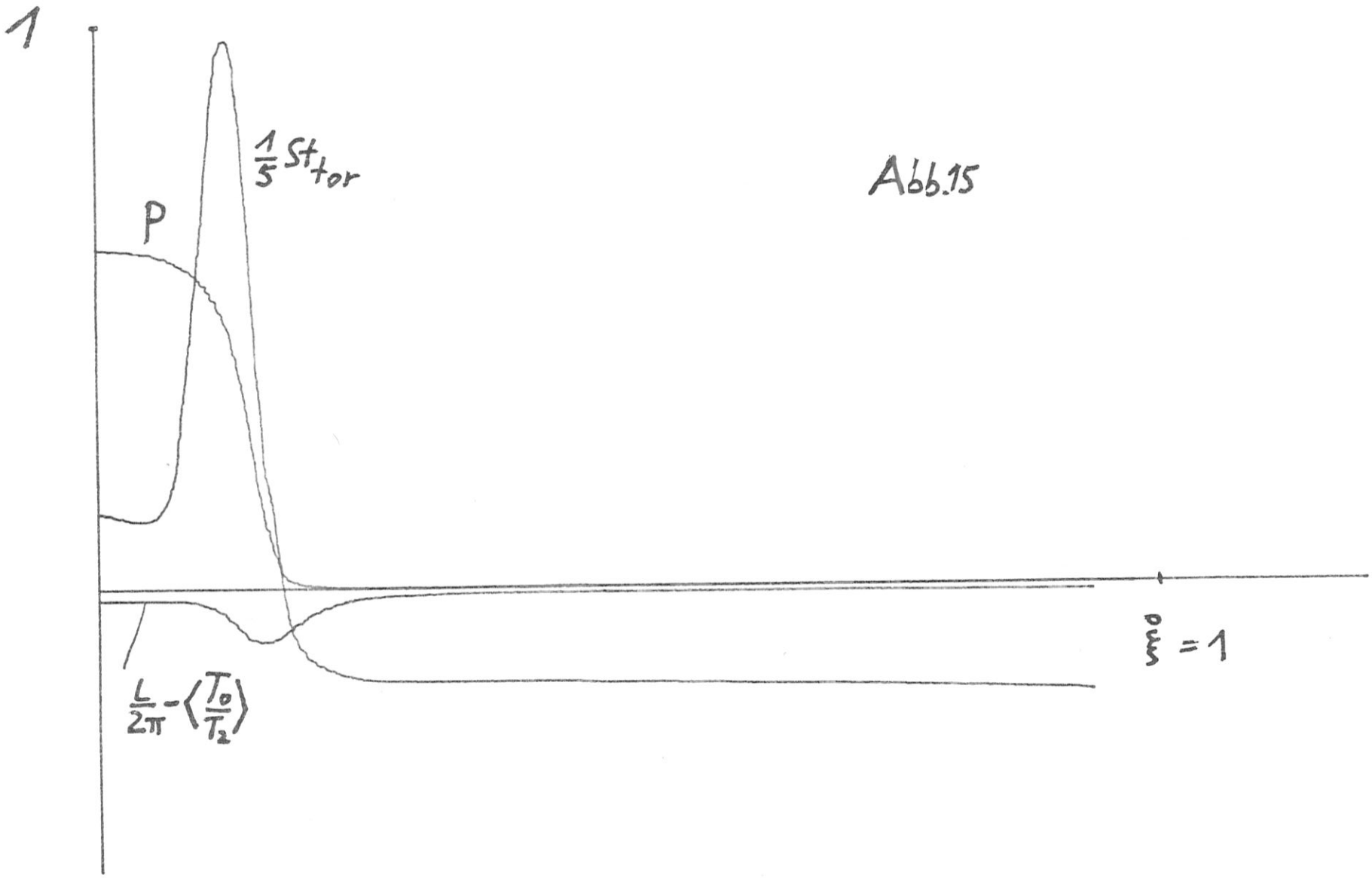

1
$\frac{1}{5} St_{tor}$
P
$\frac{L}{2\pi} - \left\langle \frac{T_0}{T_2} \right\rangle$
$\xi = 1$

Abb.15

This IPP report is intended for internal use.

IPP reports express the views of the authors at the time of writing and do not necessarily reflect the opinions of the Institut für Plasmaphysik or the final opinion of the authors on the subject.

Neither the Institut für Plasmaphysik, nor the Euratom Commission, nor any person acting on behalf of either of these:

1. Gives any guarantee as to the accuracy and completeness of the information contained in this report, or that the use of any information, apparatus, method or process disclosed therein may not constitute an infringement of privately owned rights; or

2. Assumes any liability for damage resulting from the use of any information, apparatus, method or process disclosed in this report.