

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Über die Existenz toroidaler magneto-  
hydrostatischer Gleichgewichte ohne  
Rotationstransformation

(On the Existence of Toroidal Magneto-  
hydrostatic Equilibria without Rotational  
Transform)

Dietrich Lortz

IPP 6/75

Juni 1969

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP 6/75

Dietrich Lortz

On the Existence of Toroidal  
Magnetohydrostatic Equilibria  
without Rotational Transform  
June 1969 (in German)

ABSTRACT

The magnetohydrostatic boundary value problem is investigated for a toroidal boundary surface  $T$  which is symmetric with respect to a plane, but which need not be continuously symmetric. The existence of an equilibrium solution is proved for the boundary condition that the magnetic field  $\underline{B}$  be tangential at  $T$ . The pressure as a sufficiently smooth function of  $q = \oint |\underline{B}|^{-1} dl$  and the azimuthal magnetic flux can be chosen arbitrarily.

## Einführung

Ein magnetohydrostatisches Gleichgewicht wird durch die Gleichungen

$$(1a) \quad \underline{j} \times \underline{B} = \nabla p$$

$$(1b) \quad \underline{j} = \nabla \times \underline{B}$$

$$(1c) \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

beschrieben.  $p$  ist der hydrostatische Druck,  $\underline{B}$  das Magnetfeld und  $\underline{j}$  die Stromdichte.

Für die Anwendungen sind solche Lösungen der Gleichungen (1) interessant, deren Magnetfeldlinien nicht ins Unendliche laufen. Der einfachste Fall ist ein "toroidales" Magnetfeld, das auf einer dreifach zusammenhängenden toroidalen Fläche  $T$  tangential ist und im Inneren des von der Fläche  $T$  umschlossenen (zweifach zusammenhängenden) toroidalen Volumens  $V$  nirgends verschwindet oder unendlich wird. Eine Fläche, auf der  $\underline{B}$  nirgends tangential ist und die das zweifach zusammenhängende Volumen  $V$  so teilt, daß ein einfach zusammenhängendes Volumen entsteht, heißt Meridionalfläche  $M$ . I.a. wird eine Feldlinie, die in einem Punkt  $P_1$  von  $M$  beginnt, nach einem Umlauf die Fläche in einem anderen Punkt  $P_2$  treffen. Die Zuordnung aller solcher Punktepaare  $P_1 \rightarrow P_2$  wird als magnetische Abbildung bezeichnet, die Abweichung der entsprechenden Transformation von der Identität als Rotations-Transformation. Die Menge der Punkte von  $M$  ist beschränkt, und es existiert ein Fixpunkt der magnetischen Abbildung, d.h. mindestens eine Feldlinie schließt sich nach einem Umlauf. Eine solche besondere Feldlinie heißt magnetische Achse. Andere Feldlinien umschlingen i.a. eine magnetische Achse unendlich oft, wenn man sie unendlich weit verfolgt. Ist  $m$  die Zahl der Feldlinienumläufe um die magnetische Achse und  $n$  die Zahl der Torusumläufe, dann heißt der Grenzwert

$$l = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

der Winkel der Rotationstransformation.

Für eine Lösung der Gleichgewichtsgleichungen (1) müssen  $\underline{B}$  und  $\nabla p$  senkrecht zueinander sein.

$$(2) \quad \underline{B} \cdot \nabla p = 0$$

Dies bedeutet, der Druck muß in allen Punkten einer Feldlinie denselben Wert besitzen. Da für die Anwendungen toroidale ineinander geschachtelte Druckflächen erforderlich sind, müssen die Feldlinien auf solchen toroidalen Flächen, den sog. magnetischen Flächen, verlaufen. Das heißt, daß die magnetische Abbildung von  $M$  auf sich geschlossene Kurven als Invarianten besitzt. Diese Eigenschaft ist für ein beliebiges toroidales Magnetfeld ohne kontinuierliche Symmetrien i.a. nicht vorhanden, was eine der typischen Schwierigkeiten bei toroidalen Gleichgewichten ist.

### Spiegelsymmetrie

Die Problematik des toroidalen Zusammenhangs läßt sich dadurch umgehen, daß man Vektorfelder betrachtet, die zu einer Ebene spiegelsymmetrisch sind. Die Symmetrieebene teilt dabei das toroidale Gebiet  $V$  in zwei einfach zusammenhängende Teile mit den Schnittflächen  $M_1$  und  $M_2$ . Es sei  $\underline{x}$  der Ortsvektor und  $\underline{n}$  der Normaleneinheitsvektor der Symmetrieebene bei  $z = \underline{n} \cdot \underline{x} = 0$ . Dann soll die durch eine Gleichung der Form

$$f(z, \underline{n} \times \underline{x}) = 0$$

beschriebene toroidale Randfläche  $T$  die Symmetrieeigenschaften (das zweite Argument  $\underline{n} \times \underline{x}$  ist weggelassen)

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(-z) = + f(+z) \\ \underline{n} \cdot \nabla f(-z) = - \underline{n} \cdot \nabla f(+z) \\ \underline{n} \times \nabla f(-z) = + \underline{n} \times \nabla f(+z) \end{array} \right.$$

besitzen. Als entsprechende Spiegelsymmetrien<sup>e</sup> für die Gleichgewichtsfelder werden die Relationen

$$(4a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{n} \cdot \underline{B}(-z) = + \underline{n} \cdot \underline{B}(+z) \\ \underline{n} \times \underline{B}(-z) = - \underline{n} \times \underline{B}(+z) \end{array} \right.$$

$$(4b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{n} \cdot \underline{j}(-z) = - \underline{n} \cdot \underline{j}(+z) \\ \underline{n} \times \underline{j}(-z) = + \underline{n} \times \underline{j}(+z) \end{array} \right.$$

$$(4c) \quad p(-z) = + p(+z)$$

angesetzt, welche, wie sich zeigen wird, mit den Gleichungen (1) verträglich sind. Daraus ist zu ersehen, daß alle Magnetfeldlinien geschlossen sind und daß die magnetische Abbildung die Identität liefert mit  $\mathcal{L} \equiv 0$ .

Das Gleichgewichtsproblem läßt sich dadurch auf ein Randwertproblem in dem einfach zusammenhängenden Teil von  $V$  reduzieren, in dem  $z$  ein Vorzeichen hat. Bei  $z=0$  gelten dann die Randbedingungen

$$(5a) \quad \underline{n} \times \underline{B} = 0$$

$$(5b) \quad \underline{n} \cdot \underline{j} = 0$$

$$(5c) \quad \underline{n} \cdot \nabla p = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (5a) \\ (5b) \\ (5c) \end{array} \right\} \text{ für } z = 0$$

die allerdings wegen des Bestehens der Grundgleichungen (1) nicht alle unabhängig voneinander sind.

### Ein Variationsprinzip ohne Nebenbedingungen

Sind alle Magnetfeldlinien innerhalb eines toroidalen Volumens  $V$  geschlossen, dann läßt sich die Gleichung (1c) allgemein in der Form

$$(6) \quad \underline{B} = \underline{\nabla} \Psi \times \underline{\nabla} \chi$$

integrieren. Eine Feldlinie wird also implizit durch die Gleichungen  $\Psi(\underline{x}) = \text{const}$ ,  $\chi(\underline{x}) = \text{const}$  beschrieben. Daraus folgt nach Gleichung (2), daß der Druck nur über  $\Psi$  und  $\chi$  vom Ort abhängen kann. Die Gleichungen (1a) und (1b) liefern dann

$$\underline{j} \times (\underline{\nabla} \Psi \times \underline{\nabla} \chi) = (\underline{j} \cdot \underline{\nabla} \chi) \underline{\nabla} \Psi - (\underline{j} \cdot \underline{\nabla} \Psi) \underline{\nabla} \chi = P_\Psi \underline{\nabla} \Psi + P_\chi \underline{\nabla} \chi$$

Diese Vektorgleichung ist erfüllt, wenn die beiden skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} \underline{j} \cdot \underline{\nabla} \chi &= P_\Psi \\ - \underline{j} \cdot \underline{\nabla} \Psi &= P_\chi \end{aligned}$$

gelten. Die linken Seiten lassen sich wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} \underline{j} \cdot \underline{\nabla} \chi &= \underline{\nabla} \cdot (\underline{B} \times \underline{\nabla} \chi) = \underline{\nabla} \cdot [(\underline{\nabla} \Psi \times \underline{\nabla} \chi) \times \underline{\nabla} \chi] \\ - \underline{j} \cdot \underline{\nabla} \Psi &= \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \Psi \times \underline{B}) = \underline{\nabla} \cdot [\underline{\nabla} \Psi \times (\underline{\nabla} \Psi \times \underline{\nabla} \chi)] \end{aligned}$$

In der Form

$$(7) \quad \begin{cases} \underline{\nabla} \cdot [(\underline{\nabla} \Psi \times \underline{\nabla} \chi) \times \underline{\nabla} \chi] - P_\Psi = 0 \\ \underline{\nabla} \cdot [\underline{\nabla} \Psi \times (\underline{\nabla} \Psi \times \underline{\nabla} \chi)] - P_\chi = 0 \end{cases}$$

sind diese Gleichungen für  $\psi$  und  $\chi$  die Euler-Lagrange-Gleichungen eines Variationsprinzips ohne Nebenbedingungen, falls die Funktion  $\rho(\psi, \chi)$  gegeben ist. Es wird behauptet, daß das Integral

$$I = \iiint_V \left[ \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} \chi)^2 - \rho(\psi, \chi) \right] d^3 \tau$$

für Lösungen der Gleichungen (7) einen stationären Wert besitzt, wenn die zu variierenden Funktionen  $\psi(\underline{x})$ ,  $\chi(\underline{x})$  an der Oberfläche  $\mathcal{T}$  des betrachteten toroidalen Volumens  $V$  festgehalten werden. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta (\underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} \chi)^2 &= \underline{\nabla} \cdot \left\{ -\delta \chi [\underline{\nabla} \psi \times (\underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} \chi)] - \delta \psi [(\underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} \chi) \times \underline{\nabla} \chi] \right\} + \\ &+ \delta \chi \underline{\nabla} \cdot [\underline{\nabla} \psi \times (\underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} \chi)] + \delta \psi \underline{\nabla} \cdot [(\underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} \chi) \times \underline{\nabla} \chi] \end{aligned}$$

$$\delta \rho = p_\psi \delta \psi + p_\chi \delta \chi$$

und damit

$$\begin{aligned} \delta I &= \iiint_V \delta \psi \left\{ \underline{\nabla} \cdot [(\underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} \chi) \times \underline{\nabla} \chi] - p_\psi \right\} d^3 \tau + \\ &+ \iiint_V \delta \chi \left\{ \underline{\nabla} \cdot [\underline{\nabla} \psi \times (\underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} \chi)] - p_\chi \right\} d^3 \tau - \\ &- \iiint_V \underline{\nabla} \cdot \left\{ \delta \psi [(\underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} \chi) \times \underline{\nabla} \chi] + \delta \chi [\underline{\nabla} \psi \times (\underline{\nabla} \psi \times \underline{\nabla} \chi)] \right\} d^3 \tau \end{aligned}$$

Da das dritte ein Volumenintegral über eine Divergenz ist, läßt es sich nach dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral über  $\mathcal{T}$  umformen. Dessen Integrand verschwindet, weil  $\delta \psi$ ,  $\delta \chi$  an der Oberfläche Null sind. Da andererseits die Variationen  $\delta \psi$ ,  $\delta \chi$  im Inneren von  $V$  beliebig sind, müssen die Ausdrücke in

den geschwungenen Klammern überall in  $V$  verschwinden. Das sind aber gerade die Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen (7) für  $\Psi$  und  $\chi$ .

### Die $\beta$ -Iteration

Es sei eine geschlossene toroidale Randfläche  $T$  gegeben, die durch eine analytische Funktion  $f(\underline{x})$  mit der Spiegelsymmetrie (3) beschrieben wird. Dadurch wird bis auf einen konstanten Faktor ein Vakuummagnetfeld, auch harmonisches Vektorfeld genannt,

$$\underline{B}^{(0)} = \nabla \phi \quad , \quad \Delta \phi = 0$$

bestimmt, das auf  $T$  tangential ist und in dem von  $T$  umschlossenen toroidalen Volumen  $V$  überall regulär analytisch ist. Den freien konstanten Faktor kann man z.B. durch Vorgabe des magnetischen Flusses

$$F = \iint_M \underline{B}^{(0)} \cdot \underline{df}$$

durch eine Meridionalfläche  $M$  festlegen. Während für den Nachweis der Existenz eines solchen Potentialfeldes potentialtheoretische Sätze erforderlich sind (siehe Martensen 1968), ist die Eindeutigkeit sehr elementar einzusehen. Die Differenz  $\phi^*$  zweier Lösungen der Laplace-Gleichung mit demselben Fluß  $F$  hat den Fluß Null und verschwindende Normalableitung auf  $T$ . Es gilt also

$$0 = \iiint_V \phi^* \Delta \phi^* d^3\tau = - \iiint_V (\nabla \phi^*)^2 d^3\tau + \iint_M (\phi_+ - \phi_-) \nabla \phi^* \cdot \underline{df}$$

wobei  $\phi_+$  bzw.  $\phi_-$  die Werte von  $\phi^*$  auf den beiden Seiten der Meridionalfläche  $M$  sind. Wie man mit Hilfe des Stokes'schen Satzes einsieht, hat der Potentialsprung  $\phi_+ - \phi_-$  in allen Punkten von  $M$  denselben Wert. Also kann man  $\phi_+ - \phi_-$  vor das Integral über



$M$  ziehen, welches demnach wegen der Flußfreiheit verschwindet. Also muß  $\nabla\phi^*$  überall in  $V$  Null sein. Man sieht hier, daß die Eindeutigkeit auch durch Vorgabe des Potentialsprungs erreicht werden kann.

Da die toroidale Randfläche die Symmetrierelationen (3) erfüllt, folgt aus der Eindeutigkeit des Feldes  $\underline{B}^{(0)}$ , daß  $\underline{B}^{(0)}$  die Symmetrieeigenschaften (4a) besitzt. Die Symmetrieebene teilt nämlich das toroidale Gebiet  $V$  in zwei einfach zusammenhängende Teile mit den beiden Meridionalebenen  $M_1$  und  $M_2$ . Hat nun  $\phi$  auf  $M_1$  den Wert Null, auf  $M_2$  einen von Null verschiedenen Wert und gilt auf  $T$  die Randbedingung  $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ , dann ist dies ein inhomogenes Potentialproblem mit gemischten Randbedingungen, für das eine eindeutige Lösung existiert. Die Spiegelung des entsprechenden harmonischen Vektorfeldes liefert dann ein in ganz  $V$  harmonisches Vektorfeld, das die Relationen (4a) erfüllt.

Zusätzlich wird nun vorausgesetzt, daß  $\underline{B}^{(0)}$  nirgends in  $V$  verschwindet. (Es kann sein, daß diese Voraussetzung überflüssig ist, weil sie womöglich immer erfüllt ist.) Es sei

$$A = \max |\underline{B}^{(0)}|$$

$$a = \max \frac{1}{|\underline{B}^{(0)}|}$$

Hierbei ist das Maximum in Bezug auf alle Punkte  $\underline{x}$  in  $V$  zu nehmen.

Die hier betrachteten harmonischen Vektorfelder haben endliche Feldlinienlänge  $l^{(0)}$ , denn es ist das Integral über eine geschlossene Feldlinie

$$l^{(0)} = \oint dl = \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{d\phi}{|\underline{B}^{(0)}|} \leq a \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi = a(\phi_+ - \phi_-)$$

Die längste Feldlinie habe die Länge

$$L = \max l^{(0)}$$

Die Grundgleichungen (1) liefern eine notwendige Bedingung an die Flächen konstanten Druckes. Die Divergenzfreiheit der Stromdichte  $\underline{j}$  und die Tatsache, daß  $\underline{j}$  senkrecht zu  $\nabla p$  ist, läßt sich durch den Ansatz

$$(8) \quad \underline{j} = \nabla \tau \times \nabla p,$$

berücksichtigen. Die Vektorgleichung (1a) ergibt damit die beiden skalaren Gleichungen

$$(9) \quad \underline{B} \cdot \nabla p = 0$$

$$(10) \quad \underline{B} \cdot \nabla \tau = 1$$

Es muß also die Funktion  $\tau(\underline{x})$  bei einem Torusumlauf zunehmen, allerdings so, daß gemäß dem Ansatz (8) die Stromdichte nach einem Umlauf (d.h. am selben Punkt  $\underline{x}$ ) denselben Wert hat. Wird die Gleichung (10) über eine geschlossene Feldlinie integriert, dann ergibt sich für die Zunahme  $q$  der Funktion  $\tau$

$$(11) \quad q = \oint \frac{dl}{|\underline{B}|}$$

Damit  $\underline{j}$  einwertig ist (d.h. nach einem Umlauf denselben Wert hat) muß die Komponente von  $\nabla \tau$ , die senkrecht zu  $\nabla p$  ist, ebenfalls einwertig sein. Diese Forderung führt auf die bekannte Bedingung (Kadomtsev 1960)

$$(12) \quad \nabla q \times \nabla p = 0,$$

die auch hinreichend für die Einwertigkeit des Stromes ist.

Nach diesen Vorbereitungen kann das folgende Randwertproblem formuliert werden: Gegeben sei eine hinreichend glatte positive Funktion  $h(u)$  und eine analytische toroidale Fläche  $T$ , die den Symmetrierelationen (3) genügt und auf der das Magnetfeld tangential ist. Ferner sei der magnetische Fluß  $F$  durch eine Meridionalfläche gegeben. Die Behauptung ist dann, daß die Gleichgewichtsgleichungen (1) unter diesen Bedingungen eine Lösung besitzen, falls die durch

$$(13) \quad p(\underline{x}) = \beta A^2 h\left(\frac{A}{L} q(\underline{x})\right)$$

definierte positive Zahl  $\beta$  nicht zu groß ist.

Für den Beweis wird die sog.  $\beta$ -Iteration

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{B}^{(m)} &\Rightarrow q^{(m)} = \oint \frac{dl}{|\underline{B}^{(m)}|} \Rightarrow p^{(m)} = \beta A^2 h\left(\frac{A}{L} q^{(m)}\right) \\ (14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{B}^{(m)} \cdot \nabla \tau^{(m)} = 1 \\ \tau^{(m)} = 0 \text{ auf } M_i \end{array} \right\} &\Rightarrow \tau^{(m)} \\ \tau^{(m)}, p^{(m)} &\Rightarrow \underline{j}^{(m+1)} = \nabla \tau^{(m)} \times \nabla p^{(m)} \\ (15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{B}^{(m+1)} = \underline{j}^{(m+1)} \\ \nabla \cdot \underline{B}^{(m+1)} = 0 \\ \underline{n} \cdot \underline{B}^{(m+1)} = 0 \text{ auf } T, \quad \iint_M \underline{B}^{(m+1)} \cdot d\underline{f} = F \end{array} \right. \end{aligned}$$

benutzt mit dem durch  $T$  und  $F$  gegebenen harmonischen Vektorfeld  $\underline{B}^{(0)}$  als Iterationsanfang.

Um die Klarheit der Notation zu erhöhen, wird im folgenden teilweise die Indexschreibweise mit Summenkonvention benutzt (Selbst-

verständlich gilt keine Summenkonvention für die Iterationsnummer  $m$ ).

Zur Bestimmung des skalaren Feldes  $q^{(m)}$  wird die Feldliniengleichung

$$(16) \quad \frac{d x_i^{(m)}}{d \tau^{(m)}} = B_i^{(m)}(\underline{x}^{(m)})$$

herangezogen. Deren Lösungen hängen von  $\tau^{(m)}$  und den Anfangswerten  $\underline{\dot{x}}$  ab.

$$(17) \quad x_i^{(m)} = x_i^{(m)}(\tau^{(m)}, \underline{\dot{x}})$$

mit

$$(18) \quad x_i^{(m)}(0, \underline{\dot{x}}) = \dot{x}_i$$

Durch Differentiation der Feldliniengleichung (16) nach den Anfangswerten  $\underline{\dot{x}}$  gewinnt man die sog. Variationsgleichung

$$(19) \quad \frac{d}{d \tau^{(m)}} \xi_{i\kappa}^{(m)} = \frac{\partial B_i^{(m)}}{\partial x_e} \xi_{e\kappa}^{(m)}, \quad \xi_{i\kappa}^{(m)} = \frac{\partial x_i^{(m)}}{\partial \dot{x}_\kappa}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(20) \quad \xi_{i\kappa}^{(m)}(0) = \delta_{i\kappa}$$

Die Tatsache, daß die Lösungen von (16) die Periode  $q^{(m)}(\underline{\dot{x}})$  haben, wird durch

$$(21) \quad x_i^{(m)}(q^{(m)}(\underline{\dot{x}}), \underline{\dot{x}}) - \dot{x}_i = 0$$

ausgedrückt. Differentiation von (21) nach  $\dot{X}_\kappa$  führt auf die Gleichung

$$(22) \quad \xi_{i\kappa}^{(m)}(q^{(m)}) + B_i^{(m)} \frac{\partial q^{(m)}}{\partial \dot{X}_\kappa} - \delta_{i\kappa} = 0$$

aus welcher die Ableitungen von  $q^{(m)}$  berechnet werden können.

$$(23) \quad \frac{\partial q^{(m)}}{\partial \dot{X}_\kappa} = - \frac{B_i^{(m)}}{|B^{(m)}|^2} \left[ \xi_{i\kappa}^{(m)}(q^{(m)}) - \delta_{i\kappa} \right]$$

Den Gleichungen (16) und (19) ist das partielle Differentialgleichungssystem

$$(24) \quad B_e^{(m)} \frac{\partial}{\partial X_e} \xi_{i\kappa}^{(m)} - \frac{\partial B_i^{(m)}}{\partial X_e} \xi_{e\kappa}^{(m)} = 0$$

äquivalent, das gerade (16) und (19) als Charakteristikkgleichungen hat. Dies ist ein lineares symmetrisches hyperbolisches System erster Ordnung (Courant-Hilbert II, 652 ff). Interpretiert man die Bedingungen (20) als Anfangswerte auf einer Meridionalfläche  $M$ , dann hat man zusammen mit dem Differentialgleichungssystem (24) ein richtig gestelltes Cauchy'sches Anfangswertproblem, aus dem im Prinzip die Werte von  $\xi_{i\kappa}^{(m)}$  nach einem Torusumlauf auf derselben Meridionalfläche bestimmt werden können. Die sich daraus ergebende Zunahme von  $\xi_{i\kappa}^{(m)}$  ist dann in dem Ausdruck (23) in der eckigen Klammer einzusetzen.

Für die räumliche Bestimmung der Funktion  $q^{(m)}$  können direkt die Gleichungen (14) dienen, die ebenfalls ein richtig gestelltes Cauchy'sches Anfangswertproblem darstellen.

Die vorausgesetzte hinreichende Glattheit der Funktion  $h(u)$  wird nun so spezifiziert, daß ihre zweiten Ableitungen beschränkt und H(ölder)-stetig sind.

$$(25) \quad |h''| \leq H, \quad |h'| \leq H,$$

$$|h''(u) - h''(v)| \leq H |u - v|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

Die Eigenschaft, daß eine skalare, Vektor- oder Tensorfunktion des Ortsvektors  $\underline{x}$   $H$ -stetige Ableitungen  $k$ -ter Ordnung zum Exponenten  $\alpha$  besitzt, wird durch  $C^{\alpha+k}$  bezeichnet. Als entsprechende Banachraumnorm wird z.B. für ein skalares Feld  $q \in C^{\alpha+2}$  die folgende benutzt

$$\|q\|_{\alpha+2} = \max_{\underline{x}} |q| + L \max_{\underline{x}} |q'| + L^2 \max_{\underline{x}} \|q''\| + L^{\alpha+2} \max_{\underline{x}, \underline{x}'} \frac{\|q(\underline{x}) - q(\underline{x}')\|}{|\underline{x} - \underline{x}'|^\alpha}$$

Dabei ist

$$q = (q_i) = \left( \frac{\partial q}{\partial x_i} \right), \quad \underline{q} = (q_{i\kappa}) = \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_\kappa} \right),$$

und

$$\|\underline{q}\| = \left( q_{i\kappa} q_{i\kappa} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist die Erhard-Schmidt-sche Matrixnorm der Matrix  $\underline{q}$ . Diese Matrixnorm ist bekanntlich passend zum Euklidischen Betrag eines Vektors. Entsprechend wird z.B. die Norm eines zweimal  $H$ -stetig differenzierbaren Vektorfeldes  $\underline{B} \in C^{\alpha+2}$

$$\|\underline{B}\|_{\alpha+2} = \max_{\underline{x}} |\underline{B}| + L \max_{\underline{x}} \|\underline{B}'\| + L^2 \max_{\underline{x}} \|\underline{B}''\| + L^{\alpha+2} \max_{\underline{x}, \underline{x}'} \frac{\|\underline{B}(\underline{x}) - \underline{B}(\underline{x}')\|}{|\underline{x} - \underline{x}'|^\alpha}$$

mit

$$\underline{\underline{B}} = \left( \frac{\partial B_i}{\partial x_k} \right), \quad \underline{\underline{B}} = \left( \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_k \partial x_e} \right), \quad \|\underline{\underline{B}}\| = \left( \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_k \partial x_e} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_k \partial x_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Wie sich leicht verifizieren läßt, gilt für diese Normen

$$(26) \quad \|h \underline{\tau} \times q\|_{\alpha+1} \leq \|h\|_{\alpha+1} \|\underline{\tau}\|_{\alpha+1} \|q\|_{\alpha+1}, \quad h, \underline{\tau}, q \in C^{\alpha+1}$$

und

$$(27) \quad \|h \underline{\tau} \times q\|_{\alpha} \leq \|h\|_{\alpha} \|\underline{\tau}\|_{\alpha} \|q\|_{\alpha}, \quad h, \underline{\tau}, q \in C^{\alpha}$$

Unter der Voraussetzung von (25) wird durch vollständige Induktion für die Iterationsfelder  $\underline{B}^{(m)}$  die Gültigkeit der Schranken

$$(28a) \quad \|\underline{B}^{(m)}\|_{\alpha+2} < K_0$$

$$(28b) \quad \ell^{(m)} < \varepsilon L$$

$$(28c) \quad \left( \underline{B}^{(m)} \cdot \underline{B}^{(0)} \right)^{-1} < 4a^2$$

und der Symmetrierelationen (4a) gezeigt. Diese sind so eingerichtet, daß sie jedenfalls für das analytische Anfangsfeld  $\underline{B}^{(0)}$  gelten. Dazu ist lediglich die Konstante  $K_0$  groß genug zu wählen. Nach dem Schluß von  $m$  auf  $m+1$  wird vorausgesetzt, daß die Bedingungen (28) und die Symmetrierelationen (4a) für die Nummer  $m$  gelten, und gezeigt, daß sie dann auch für  $m+1$  erfüllt sind.

Da  $\underline{B}^{(m)}$  voraussetzungsgemäß die Spiegelsymmetrie (4a) hat, sind mit dem Anfangswertproblem (14) für  $\tau^{(m)}$  die Symmetrieeigenschaften

$$(29) \quad \tau^{(m)}(-z) = -\tau^{(m)}(+z)$$

und

$$\underline{n} \cdot \nabla \tau^{(m)}(-z) = + \underline{n} \cdot \nabla \tau^{(m)}(+z)$$

$$\underline{n} \times \nabla \tau^{(m)}(-z) = - \underline{n} \times \nabla \tau^{(m)}(+z)$$

verträglich, wobei  $\underline{n}$  wieder normal zur Ebene der Spiegelsymmetrie gerichtet ist. Da außerdem gilt

$$q^{(m)}(-z) = + q^{(m)}(+z)$$

$$\underline{n} \cdot \nabla q^{(m)}(-z) = - \underline{n} \cdot \nabla q^{(m)}(+z)$$

$$\underline{n} \times \nabla q^{(m)}(-z) = + \underline{n} \times \nabla q^{(m)}(+z) \quad ,$$

folgen für  $\underline{f}^{(m+1)}(z)$  die Spiegelungseigenschaften (4b). Es genügt daher, die Berechnung der skalaren Ortsfunktionen  $q^{(m)}$  und  $\tau^{(m)}$  auf den zwischen  $M_1$  und  $M_2$  liegenden, einfach zusammenhängenden Teil  $V_1$  von  $V$  zu beschränken. Mit der Anfangsbedingung  $\tau^{(m)} = 0$  auf  $M_1$  und der Spiegelsymmetrie (29) erleidet  $\tau^{(m)}$  und damit  $\nabla \tau^{(m)}$  dann auf  $M_2$  einen Sprung, der aber gerade so ist, daß  $\nabla \tau^{(m)} \times \nabla q^{(m)}$  und damit  $\underline{f}^{(m+1)}$  stetig ist.

Aus dem Cauchy'schen Anfangswertproblem (14) folgt, daß die Lösung  $\tau^{(m)}$  in  $V_1$  dieselben Glattheitseigenschaften hat, wie die Koeffizienten der Differentialgleichung. Da  $\underline{B}^{(m)} \in C^{\alpha+1}$ , ist



also auch  $\tau^{(m)} \in C^{\alpha+2}$ ,  $\nabla \tau^{(m)} \in C^{\alpha+1}$  und mit (28a) gilt die Abschätzung (siehe Anhang),

$$(30) \quad \|\nabla \tau^{(m)}\|_{\alpha+1} < K_1 \quad \text{in } V_1$$

Die Koeffizienten von (24) sind  $\in C^{\alpha+1}$ . Daher ist  $\xi^{(m)} \in C^{\alpha+1}$  mit der Abschätzung

$$\|\xi^{(m)}\|_{\alpha+1} < K_2 \quad \text{in } V_1$$

und nach (23)

$$(31) \quad \|\nabla q^{(m)}\|_{\alpha+1} < K_3$$

Weil ferner  $h(u)$  gemäß der Voraussetzung (25) beschränkte und H-stetige zweite Ableitungen hat, ist  $h'(AL^{-1}q^{(m)}(x)) \in C^{\alpha+1}$ . Die  $(\alpha+1)$ -Norm des Stromes kann also wegen (13) und (26) durch eine Konstante abgeschätzt werden, die proportional zu  $\beta$  ist und unabhängig von  $m$ .

$$(32) \quad \|\underline{j}^{(m+1)}\|_{\alpha+1} < \beta K_4$$

Das inhomogene Potentialproblem (15) wird folgendermaßen zerlegt

$$(33) \quad \underline{B}^{(m+1)} = \underline{B}^{(0)} + \hat{\underline{B}}^{(m+1)}$$

Dann erfüllt  $\hat{\underline{B}}^{(m+1)}$  ebenfalls die Gleichungen (15), allerdings mit  $F=0$ . Der verschwindende Fluß ermöglicht für  $\hat{\underline{B}}^{(m+1)}$  die Einführung eines Vektorpotentials  $\underline{A}$ , das bei einem Torusumlauf nicht zunimmt, sondern die Randbedingung

$$\underline{A} \in \mathcal{C}^{\alpha+3} \quad \text{für} \quad \underline{j}^{(m+1)} \in \mathcal{C}^{\alpha+1}$$

$$(38) \quad \left\| \underline{\hat{B}}^{(m+1)} \right\|_{\alpha+2} \leq K_5 \left\| \underline{j}^{(m+1)} \right\|_{\alpha+1}$$

mit einer Konstanten  $K_5$ , die nur vom Gebiet und von  $\alpha$  abhängt. Aus (38) ist ersichtlich, daß  $\underline{\hat{B}}^{(m+1)} \in \mathcal{C}^{\alpha+2}$  ist und proportional zu  $\beta$ . Demnach lassen sich die Bedingungen (28) auch für  $\underline{B}^{(m+1)}$  dadurch erfüllen, daß  $\beta$  klein genug gewählt wird, womit der Induktionsbeweis für die Schranken (28) abgeschlossen ist.

Wird die Lösung des Potentialproblems (34), (36), (37) auf  $V_1$  beschränkt mit der zusätzlichen Randbedingung

$$(39) \quad \begin{cases} \underline{n} \cdot \underline{A} = 0 \\ \underline{n} \cdot \nabla (\underline{n} \times \underline{A}) = 0 \end{cases} \quad \text{auf } M_1, M_2$$

dann ist  $\underline{A}$  eindeutig in  $V_1$  bestimmt, und die Spiegelung gemäß den Symmetrierelationen (4b) des Stromes liefert ein in ganz  $V$  definiertes Feld  $\underline{A} \in \mathcal{C}^{\alpha+3}$ . Damit ist wegen der Eindeutigkeit des Problems (34), (36), (37) für  $\underline{A}$  die Gültigkeit der Symmetrierelationen (4b) gezeigt. Durch Rotationsbildung folgen daraus die Symmetrieeigenschaften (4a) für  $\underline{\hat{B}}^{(m+1)}$  und damit für  $\underline{B}^{(m+1)}$ .

Für den Konvergenzbeweis der  $\beta$ -Iteration läßt sich die Tatsache ausnutzen, daß die Differenz zweier aufeinanderfolgender Iterationsfelder  $\underline{B}^{(m)}$  und  $\underline{B}^{(m+1)}$  ebenfalls verschwindenden Fluß  $F$  besitzt. Analog zu (38) gilt

$$(40) \quad \left\| \underline{B}^{(m+1)} - \underline{B}^{(m)} \right\|_{\alpha+1} \leq K_6 \left\| \underline{j}^{(m+1)} - \underline{j}^{(m)} \right\|_{\alpha} =$$

$$= \beta K_7 \left\| h'(q^{(m)}) (\underline{\tau}^{(m)} \times \underline{q}^{(m)}) - h'(q^{(m-1)}) (\underline{\tau}^{(m-1)} \times \underline{q}^{(m-1)}) \right\|_{\alpha} =$$

$$= \beta K_7 \left\| [h'(q^{(m)}) - h'(q^{(m-1)})] (\underline{\tau}^{(m)} \times \underline{q}^{(m)}) + h'(q^{(m-1)}) [(\underline{\tau}^{(m)} - \underline{\tau}^{(m-1)}) \times \underline{q}^{(m)} + \underline{\tau}^{(m-1)} \times (\underline{q}^{(m)} - \underline{q}^{(m-1)})] \right\|_{\alpha}$$

$$\leq \beta K_7 \left( H \|q^{(m)} - q^{(m-1)}\|_{\alpha} K_1 K_3 + H_1 K_3 \| \underline{c}^{(m)} - \underline{c}^{(m-1)} \|_{\alpha} + H_1 K_1 \|q^{(m)} - q^{(m-1)}\|_{\alpha} \right)$$

$$K_7 = K_6 A^3 L^{-1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Schließlich sind noch die Normen  $\|q^{(m)} - q^{(m-1)}\|_{\alpha}$ ,  $\| \underline{q}^{(m)} - \underline{q}^{(m-1)} \|_{\alpha}$  und  $\| \underline{c}^{(m)} - \underline{c}^{(m-1)} \|_{\alpha}$  durch  $\| \underline{B}^{(m)} - \underline{B}^{(m-1)} \|_{\alpha}$  abzuschätzen. Das geschieht mit Hilfe der Gleichungen, aus denen  $q^{(m)}$ ,  $\underline{q}^{(m)}$  und  $\underline{c}^{(m)}$  berechnet werden und wird im Anhang durchgeführt.

$$(41) \quad \begin{cases} \| \underline{c}^{(m)} - \underline{c}^{(m-1)} \|_{\alpha} \leq K_8 \| \underline{B}^{(m)} - \underline{B}^{(m-1)} \|_{\alpha+1} & \text{in } V_1 \\ \| q^{(m)} - q^{(m-1)} \|_{\alpha} \leq K_9 \| \underline{B}^{(m)} - \underline{B}^{(m-1)} \|_{\alpha+1} \\ \| \underline{q}^{(m)} - \underline{q}^{(m-1)} \|_{\alpha} \leq K_{10} \| \underline{B}^{(m)} - \underline{B}^{(m-1)} \|_{\alpha+1} \end{cases}$$

Die Ungleichungen (41) bringen für die Lösungen der entsprechenden Cauchy'schen Anfangswertprobleme die stetige Abhängigkeit von den Koeffizienten der Differentialgleichung zum Ausdruck.

(40) und (41) ergeben

$$(42) \quad \| \underline{B}^{(m+1)} - \underline{B}^{(m)} \|_{\alpha+1} \leq \beta K \| \underline{B}^{(m)} - \underline{B}^{(m-1)} \|_{\alpha+1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$K = K_6 A^3 L^{-1} ( H K_{10} K_1 K_3 + H_1 K_3 K_8 + H_1 K_1 K_9 )$$

Da aus (42) folgt

$$\| \underline{B}^{(m+1)} - \underline{B}^{(m)} \|_{\alpha+1} \leq (\beta K)^m \| \underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(0)} \|_{\alpha+1}$$

sieht man, daß die Folge der  $(\alpha+1)$ -Normen sich durch eine geometrische Folge majorisieren läßt, wenn  $\beta$  nicht zu groß gewählt wird. Damit ist gezeigt, daß unter der Voraussetzung (25) für die Funktion  $\mathcal{h}(u)$  die  $\beta$ -Iteration gleichmäßig gegen ein Vektorfeld  $\underline{B} \in C^{\alpha+1}$  konvergiert.

### Zusammenfassung

Es wurde die Existenz von Lösungen der Gleichungen des magneto-hydrostatischen Gleichgewichts unter folgenden Bedingungen untersucht. Das Magnetfeld  $\underline{B}$  ist auf einer dreifach zusammenhängenden analytischen toroidalen Fläche  $T$  tangential, die zu einer Meridionalebene spiegelsymmetrisch liegt. Der Druck als hinreichend glatte Funktion von  $q = \oint |\underline{B}|^{-1} d\ell$  und der azimutale magnetische Fluß  $F$  sind vorgegeben. Es zeigte sich, daß ein Gleichgewicht existiert, falls der Druckgradient nicht zu groß ist. Diese Gleichgewichtskonfiguration liegt symmetrisch zur Ebene der Spiegelsymmetrie und besitzt nur geschlossene Magnetfeldlinien. Für diesen Fall läßt sich ein Variationsproblem ohne Nebenbedingungen formulieren. Die aus physikalischen Gründen außerdem erwünschte Forderung, daß die Flächen  $q = \text{const}$  dreifachen toroidalen Zusammenhang haben, ist erfüllbar, indem die Fläche  $T$  so gewählt wird, daß das durch  $T$  und  $F$  bestimmte Vakuummagnetfeld diese Eigenschaft hat.

### Literatur

- Martensen, E. 1968 Potentialtheorie, Teubner, Stuttgart  
 Kadomtsev, B.B., 1960 Plasma Physics and the problem of controlled thermonuclear reactions, Vol. IV, Pergamon Press  
 Courant, R. und Hilbert, D., 1962 Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Interscience Publishers, New York.

## Anhang

I Vorausgesetzt wird

$$(A 1) \quad \|\underline{B}\|_{\alpha+2} < C_1$$

$$(A 2) \quad (\underline{B} \cdot \underline{B}^{(0)})^{-1} < 4 a^2$$

wobei  $\underline{B}^{(0)} = \nabla \phi$  das auf  $\mathbb{T}$  tangential toroidale Vakuummagnetfeld ist. Dann wird behauptet, daß aus

$$(A 3) \quad B_e \frac{\partial \tau}{\partial x_e} = 1 \quad \text{in } V_1, \quad \tau = 0 \quad \text{auf } M_1,$$

die Schranke

$$(A 4) \quad \|\tau\|_{\alpha+2} < C_2 \quad \text{in } V_1$$

folgt.

Ist  $\phi_+ - \phi_-$  die Zunahme von  $\phi$  bei einem Torusumlauf, dann gilt mit (A 2) in  $V_1$

$$|\tau| \leq \frac{1}{2} q, \quad q = \oint \frac{dl}{|\underline{B}|} = \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\underline{B} \cdot \underline{B}^{(0)}} < 4 a^2 (\phi_+ - \phi_-)$$

Sei

$$(A 5) \quad C_3 = \max_{x \in V_1} |\tau|$$

$$(A 6) \quad C_4 = \max |\underline{B}|$$

$$(A 7) \quad C_5 = \max \|\underline{B}\|$$

$$(A 8) \quad C_6 = \max \|\underline{B}\|$$

$$(A 9) \quad \|\underline{B}(\underline{x}) - \underline{B}(\underline{x}')\| \leq C_7 |\underline{x} - \underline{x}'|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

Mit (A 2):

$$|\underline{B}|^{-1} |\underline{B}^{(0)}|^{-1} \leq (\underline{B} \cdot \underline{B}^{(0)})^{-1} < 4 a^2$$

$$(A 10) \quad C_8 = \max \frac{1}{|\underline{B}|}$$

Differentiation von (A 3) nach  $x_i$  ergibt

$$(A 11) \quad B_e \frac{\partial}{\partial x_e} \tau_i + B_{ei} \tau_e = 0$$

$$\underline{B} = (B_{ei}) = \left( \frac{\partial B_e}{\partial x_i} \right), \quad \underline{\tau} = (\tau_i) = \left( \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right)$$

mit der Anfangsbedingung

$$(A 12) \quad \underline{\tau} = \frac{\underline{\tau}}{|\underline{B}|} \quad \text{auf } M_1$$

Dabei ist  $\underline{n}$  der Normaleneinheitsvektor auf  $M_1$ .

Multiplikation von (A 11) mit  $\tau_i$ :

$$\frac{1}{2} B_e \frac{\partial}{\partial x_e} |\underline{\tau}|^2 + B_{ei} \tau_e \tau_i = 0$$

$$\frac{1}{2} B_e \frac{\partial}{\partial x_e} |\underline{\tau}|^2 \leq \|B\| |\underline{\tau}|^2$$

$$(A 13) \quad \frac{d}{d\tau} |\underline{\tau}| \leq C_5 |\underline{\tau}|$$

Wegen (A 10) und (A 12):

$$(A 14) \quad |\underline{\tau}(0)| \leq C_8$$

Integration von (A 13) mit (A 14):

$$|\underline{\tau}| \leq C_8 e^{C_5 \tau} \leq C_8 e^{C_5 C_3}$$

Sei

$$(A 15) \quad C_9 = \max_{x \in V_1} |\underline{\tau}|$$

Nochmalige Differentiation von (A 11) nach  $x_k$ :

$$(A 16) \quad B_e \frac{\partial}{\partial x_e} \tau_{ik} + B_{ek} \tau_{ei} + B_{ei} \tau_{ek} + B_{ik} \tau_e = 0 \quad | \cdot \frac{\tau_{ik}}{\|\underline{\tau}\|}$$

$$(A 17) \quad B_e \frac{\partial}{\partial x_e} \|\underline{\tau}\| \leq 2 \|B\| \|\underline{\tau}\| + \|B\| |\underline{\tau}| \leq 2 C_5 \|\underline{\tau}\| + C_3 C_6$$

Aus (A 12) durch Differentiation auf  $M_1$ :

$$\varepsilon_{ijk} n_j \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_e = \varepsilon_{ijk} n_j \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{n_e}{|B|} = -n_e \varepsilon_{ijk} n_j \frac{B_m B_{mk}}{|B|^3}$$

Aus (A 11) auf  $M_1$ :

$$n_e \frac{\partial}{\partial x_e} \tau_i = - \frac{B_{ei} \tau_e}{|B|^2}$$

Mit (A 6), (A 7), (A 10), (A 15):

$$(A 18) \quad \|\underline{\tau}\| \leq C_{10} \text{ auf } M_1$$

(A 17) ist äquivalent zu

$$(A 19) \quad \frac{d}{d\tau} \|\underline{\tau}\| \leq 2 C_5 \|\underline{\tau}\| + C_3 C_6$$

Integration von (A 19) mit (A 18):

$$\|\underline{\tau}\| \leq \frac{C_3 C_6}{2 C_5} (e^{2 C_5 C_3} - 1) + C_{10}$$

Also existiert

$$(A 20) \quad C_{11} = \max_{x \in V_1} \|\underline{\tau}\|$$

Man betrachte die Funktion

$$(A 21) \quad \underline{x} = \underline{x}(\tau, \underline{\overset{\circ}{x}})$$

der zu  $\underline{B}$  gehörigen Feldlinie mit  $\underline{\overset{\circ}{x}}$  auf  $M_1$ . Dann gilt die Variationsgleichung

$$(A 22) \quad B_e \frac{\partial}{\partial x_e} \xi_{ik} - B_{ie} \xi_{ek}, \quad \xi_{ik} = \delta_{ik} \text{ auf } M_1, \quad \xi_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial \overset{\circ}{x}_k}$$

Ebenso wie für die Gleichung (A 11) läßt sich für (A 22) die Existenz von

$$(A 23) \quad C_{12} = \max_{\underline{x} \in V_1} \|\underline{\xi}\|$$

zeigen. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist für zwei Punkte  $\underline{\overset{\circ}{x}}, \underline{\overset{\circ}{x}}'$  auf  $M_1$  mit (A 23)

$$(A 24) \quad |\underline{x}(\tau, \underline{\overset{\circ}{x}}) - \underline{x}(\tau, \underline{\overset{\circ}{x}}')| \leq C_{12} |\underline{\overset{\circ}{x}} - \underline{\overset{\circ}{x}}'|$$

Werden in (A 16) die Ortskoordinaten gemäß (A 21) ersetzt und die für denselben Wert  $\tau$  zu  $\underline{\overset{\circ}{x}}'$  gehörigen Funktionen mit einem Strich gekennzeichnet, dann ergeben sich für feste  $\underline{\overset{\circ}{x}}, \underline{\overset{\circ}{x}}'$  die Gleichungen

$$(A 25) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tau_{ik} + B_{ek} \tau_{ei} + B_{ei} \tau_{ek} + B_{ikl} \tau_l &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \tau'_{ik} + B'_{ek} \tau'_{ei} + B'_{ei} \tau'_{ek} + B'_{ikl} \tau'_l &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} (\tau_{ik} - \tau'_{ik}) + (B_{ek} - B'_{ek}) \tau_{ei} + B'_{ek} (\tau_{ei} - \tau'_{ei}) + (B_{ei} - B'_{ei}) \tau_{ek} + \\ &+ B_{ei} (\tau_{ek} - \tau'_{ek}) + (B_{ikl} - B'_{ikl}) \tau'_l = 0 \end{aligned}$$

Wegen (A 8), (A 20) und (A 24) gelten die Hölderbedingungen

$$\begin{aligned} \|\underline{B} - \underline{B}'\| &\leq C_{13} |\underline{\overset{\circ}{x}} - \underline{\overset{\circ}{x}}'|^\alpha \\ |\underline{\tau} - \underline{\tau}'| &\leq C_{14} |\underline{\overset{\circ}{x}} - \underline{\overset{\circ}{x}}'|^\alpha \end{aligned}$$

Daher folgt aus (A 25) die Abschätzung

$$(A 26) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \|\underline{\tau} - \underline{\tau}'\| &\leq 2 \|\underline{B}\| \|\underline{\tau} - \underline{\tau}'\| + 2 \|\underline{B} - \underline{B}'\| \|\underline{\tau}\| + \\ &+ \|\underline{B} - \underline{B}'\| |\underline{\tau}| + \|\underline{B}'\| |\underline{\tau} - \underline{\tau}'| \leq 2 C_5 \|\underline{\tau} - \underline{\tau}'\| + C_{15} |\underline{\overset{\circ}{x}} - \underline{\overset{\circ}{x}}'|^\alpha \\ C_{15} &= 2 C_{11} C_{13} + C_5 C_7 C_{12}^4 + C_6 C_{14} \end{aligned}$$

Da die Anfangsbedingungen für  $\underline{\tau}$  sogar stetig differenzierbar sind, erfüllen sie auch eine Hölderbedingung

$$(A 27) \quad \|\underline{\tau} - \underline{\tau}'\| \leq c_{16} |\underline{x} - \underline{x}'|^\alpha \text{ auf } M_1$$

Durch Integration folgt aus (A 26) und (A 27)

$$(A 28) \quad \|\underline{\tau} - \underline{\tau}'\| \leq \left[ \frac{c_{15}}{2c_5} (e^{2c_5 c_3} - 1) + c_{16} \right] |\underline{x} - \underline{x}'|^\alpha$$

Bekanntlich folgt aus (A 22) zusammen mit der Divergenzfreiheit von  $\underline{B}$

$$\det \left| \underline{\underline{\epsilon}} \right| = 1$$

und daher existiert

$$(A 29) \quad c_{17} = \max_{\underline{x} \in V_1} \|\underline{\underline{\epsilon}}^{-1}\|$$

Betrachtet man die Umkehrung

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\dot{x}}(\tau, \underline{x})$$

der Funktion  $\underline{x}(\tau, \underline{\dot{x}})$  bei festem  $\tau$ , dann sieht man, daß nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit (A 29) gilt

$$|\underline{\dot{x}} - \underline{\dot{x}}'| \leq c_{17} |x - x'|$$

Das liefert mit (A 28) eine Abschätzung

$$(A 30) \quad \|\underline{\tau}(\underline{x}) - \underline{\tau}(\underline{x}')\| \leq c_{18} |\underline{x} - \underline{x}'|^\alpha$$

In (A 30) gehören  $\underline{x}$  und  $\underline{x}'$  zum selben Wert  $\tau$ . Andererseits ist  $\underline{\tau}$  nach (A 16) als Funktion von  $\tau$  sogar stetig differenzierbar. Daher gilt (A 30) auch für beliebige  $\underline{x}, \underline{x}' \in V_1$ ,

(A 5), (A 15), (A 20) und (A 30) liefern die Behauptung (A 4).

Der Beweis dafür, daß aus (A 22) die Schranke

$$(A 31) \quad \|\underline{\underline{\epsilon}}\|_{\alpha+1} < c_{19}$$

folgt, verläuft völlig analog und wird weggelassen.

II. Es seien  $\underline{B}^m$  und  $\underline{B}^{m-1}$  Magnetfelder, für die die Voraussetzungen und Folgerungen von I gelten sollen. Dann wird behauptet, daß es eine Abschätzung

$$(A 32) \quad \|\tau^m - \tau^{m-1}\|_{\alpha+1} \leq c_{20} \|\underline{B}^m - \underline{B}^{m-1}\|_{\alpha+1}$$

gibt.

Sei

$$\eta = \tau^m - \tau^{m-1}, \quad \underline{b} = \underline{B}^m - \underline{B}^{m-1}.$$



Aus

$$\begin{aligned} \underline{B}_e^m \frac{\partial}{\partial x_e} \tau^m &= 1, \quad \tau^m = 0 \quad \text{auf } M, \\ \underline{B}_e^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_e} \tau^{m-1} &= 1, \quad \tau^{m-1} = 0 \quad \text{auf } M, \end{aligned}$$

folgt

$$(A 33) \quad \underline{B}_e^m \frac{\partial}{\partial x_e} \eta + \underline{b}_e \frac{\partial}{\partial x_e} \tau^{m-1} = 0, \quad \eta = 0 \quad \text{auf } M,$$

Das Anfangswertproblem (A 33) führt auf die Abschätzung

$$\frac{d}{d\tau^m} |\eta| \leq |\underline{b}_e| |\tau^{m-1}| \leq C_9 \max |\underline{b}_e|, \quad |\eta^{(0)}| = 0,$$

was durch Integration

$$(A 34) \quad |\eta| \leq C_9 C_3 \max |\underline{b}_e| \quad \text{in } V,$$

ergibt.

Differentiation von (A 33) nach  $x_i$ :

$$(A 35) \quad \underline{B}_e^m \frac{\partial}{\partial x_e} \eta_i + \underline{B}_{ei}^m \eta_e + \underline{b}_{ei} \tau_e^{m-1} + \underline{b}_e \tau_{ei}^{m-1} = 0$$

$$(A 36) \quad \eta_i = \frac{n_i}{|\underline{B}^m|} - \frac{n_i}{|\underline{B}^{m-1}|} = n_i |\underline{B}^{m-1}|^{-1} |\underline{B}^m|^{-1} (|\underline{B}^{m-1}| - |\underline{B}^m|) \quad \text{auf } M,$$

Wegen

$$||\underline{B}^m| - |\underline{B}^{m-1}|| \leq |\underline{B}^m - \underline{B}^{m-1}| = |\underline{b}_e|$$

und (A 10) liefert (A 36) für die Anfangsbedingung die Abschätzung.

$$(A 37) \quad |\eta| \leq C_8^2 \max |\underline{b}_e| \quad \text{auf } M,$$

Multiplikation von (A 35) mit  $\eta_i / |\eta|$ :

$$\begin{aligned} (A 38) \quad \frac{d}{d\tau^m} |\eta| &\leq |\eta| \|\underline{B}^m\| + \|\underline{b}_e\| |\tau^{m-1}| + |\underline{b}_e| \|\tau^{m-1}\| \leq \\ &\leq C_5 |\eta| + C_9 \max \|\underline{b}_e\| + C_{11} \max |\underline{b}_e| \end{aligned}$$

Integration von (A 38) mit (A 37):

$$\begin{aligned} (A 39) \quad |\eta| &\leq \frac{1}{C_5} (C_9 \max \|\underline{b}_e\| + C_{11} \max |\underline{b}_e|) (e^{C_5 C_3} - 1) + C_8^2 \max |\underline{b}_e| \leq \\ &\leq C_{21} \max |\underline{b}_e| + C_{22} \max \|\underline{b}_e\| \end{aligned}$$

in  $V$ .

Um die Hölderkonstante von  $\eta$  durch  $\underline{b}_e$  abzuschätzen, wird (A 35),

(A 36) zu zwei Anfangswerten  $\underline{x}^0, \underline{x}'^0$  auf  $M$ , betrachtet und die

zu  $\underline{\dot{x}}$  gehörigen Funktionen mit einem Strich gekennzeichnet.

$$\frac{d}{d\tau^m} \eta_i + B_{ei}^m \eta_e + b_{ei} \tau_e^{m-1} + b_e \tau_{ei}^{m-1} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau^m} \eta_i' + B_{ei}'^m \eta_e' + b_{ei}' \tau_e'^{m-1} + b_e' \tau_{ei}'^{m-1} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau^m} (\eta_i - \eta_i') + (B_{ei}^m - B_{ei}'^m) \eta_e + B_{ei}'^m (\eta_e - \eta_e') + (b_{ei} - b_{ei}') \tau_e^{m-1} + b_{ei}' (\tau_e^{m-1} - \tau_e'^{m-1}) + (b_e - b_e') \tau_{ei}^{m-1} + b_e' (\tau_{ei}^{m-1} - \tau_{ei}'^{m-1}) = 0$$

$$\begin{aligned} (A 40) \quad \frac{d}{d\tau^m} |\underline{\eta} - \underline{\eta}'| &\leq \| \underline{B}^m - \underline{B}'^m \| |\underline{\eta}| + \| \underline{B}'^m \| |\underline{\eta} - \underline{\eta}'| + \| \underline{b} - \underline{b}' \| |\underline{\tau}^{m-1}| + \\ &+ \| \underline{b}' \| |\underline{\tau}^{m-1} - \underline{\tau}'^{m-1}| + \| \underline{b} - \underline{b}' \| \| \underline{\tau}^{m-1} \| + \| \underline{b}' \| \| \underline{\tau}^{m-1} - \underline{\tau}'^{m-1} \| \leq \\ &\leq C_5 |\underline{\eta} - \underline{\eta}'| + |\underline{\dot{x}} - \underline{\dot{x}}'|^\alpha [ C_{13} (C_{21} \max |\underline{b}| + C_{22} \max \| \underline{b} \| ) + \\ &+ C_9 C_{12}^\alpha \max \frac{\| \underline{b} - \underline{b}' \|}{|\underline{x} - \underline{x}'|^\alpha} + C_{14} \max \| \underline{b} \| + \\ &+ C_{11} C_{23} \max \| \underline{b} \| + C_{18} C_{12}^\alpha \max |\underline{b}| \end{aligned}$$

Außer früheren Abschätzungen wurde hier

$$|\underline{b} - \underline{b}'| \leq C_{23} |\underline{\dot{x}} - \underline{\dot{x}}'|^\alpha \max \| \underline{b} \|$$

benutzt. Für die Anfangsbedingung nach (A 36) bekommt man

$$\begin{aligned} (A 41) \quad |\underline{\eta}(0) - \underline{\eta}'(0)| &= \left| \frac{\underline{n} \cdot \underline{B}^m - \underline{n} \cdot \underline{B}^{m-1}}{|\underline{B}^m| |\underline{B}^{m-1}|} - \frac{\underline{n} \cdot \underline{B}'^m - \underline{n} \cdot \underline{B}'^{m-1}}{|\underline{B}'^m| |\underline{B}'^{m-1}|} \right| \leq \\ &\leq \frac{|\underline{n} \cdot (\underline{B}^m - \underline{B}^{m-1} - \underline{B}'^m + \underline{B}'^{m-1})|}{|\underline{B}^m| |\underline{B}^{m-1}|} + \underline{n} \cdot (\underline{B}'^m - \underline{B}'^{m-1}) \left| \frac{1}{|\underline{B}^m| |\underline{B}^{m-1}|} - \frac{1}{|\underline{B}'^m| |\underline{B}'^{m-1}|} \right| \\ &\leq C_8^2 C_{23} |\underline{\dot{x}} - \underline{\dot{x}}'|^\alpha \max \| \underline{b} \| + C_8^3 C_{24} |\underline{\dot{x}} - \underline{\dot{x}}'|^\alpha \max |\underline{b}|, \end{aligned}$$

This IPP report is intended for internal use.

IPP reports express the views of the authors at the time of writing and do not necessarily reflect the opinions of the Institut für Plasmaphysik or the final opinion of the authors on the subject.

Neither the Institut für Plasmaphysik, nor the Euratom Commission, nor any person acting on behalf of either of these:

1. Gives any guarantee as to the accuracy and completeness of the information contained in this report, or that the use of any information, apparatus, method or process disclosed therein may not constitute an infringement of privately owned rights; or
2. Assumes any liability for damage resulting from the use of any information, apparatus, method or process disclosed in this report.