Einige Eigenschaften relativistischer Plasmaringe

(Some Properties of Relativistic Plasma Rings)

Wilhelm H. Kegel

IPP 0/1 Dezember 1968

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Einige Eigenschaften relativistischer Plasmaringe

(Some Properties of Relativistic Plasma Rings)

Wilhelm H. Kegel

IPP 0/1 Dezember 1968

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 0/1 W.H. Kegel Some Properties of Relativistic Plasma Rings

December, 1968 (in German)

ABSTRACT

In connection with the project of the electron ring accelerator (ERA), plasma rings are considered which consist of electrons with a relativistic mean velocity and fewer ions with a low mean velocity. The purpose of this report is to derive some necessary conditions for such systems to be in equilibrium.

From the relativistic Vlasov equation in cylindrical coordinates moment equations are derived. From these it follows that the electrons are restricted to a finite volume, if one assumes that all macroscopic quantities of the ring vanish at infinity. - Separate radial and axial virial theorems for ions and electrons are derived from the moment equations. They relate the average pressure with the integrals over the spatial moments of the electric and magnetic forces. These relations show that in general the ion pressure is anisotropic. - Approximate expressions are derived for the virial integrals on the assumption of a low aspect ratio r_o/R. In the case of a homogeneous external field one then obtains relations between the average pressure and the line densities (densities integrated over the cross-section) of the electrons and ions. One further obtains an expression, which shows how the major radius R of the ring is increased by the electromagnetic self-interaction of the ring. Finally it is shown that for the case that the external field is not homogeneous, but a mirror field, the pressure of the electrons in the axial direction is increased appreciably.

1. Einleitung

Das Projekt des Elektronenringbeschleunigers (siehe z.B. SESSLER 1968, SCHOPPER 1968 und Physics Today 21, 51 (1968)) hat das Interesse an relativistischen Plasmaringen geweckt. Dabei denkt man an einen Strahl relativistischer Elektronen, der durch ein äußeres Magnetfeld zu einem Ring zusammengebogen ist. In dem Potential dieses Elektronenringes soll dann eine kleinere Zahl von Ionen (vielleicht einige Prozent der Zahl der Elektronen) gefangen sein, deren mittlere Geschwindigkeit klein gegen die der Elektronen ist. Die wesentlichsten Unterschiede einer solchen Konfiguration zu den herkömmlichen toroidalen Plasmakonfigurationen sind: a) Das Plasma ist nicht quasineutral. Es bestehen daher starke elektrische Felder. b) Die Elektronen haben eine große (relativistische) mittlere Geschwindigkeit gegenüber den Ionen. c) Der große Radius des Ringes ist vergleichbar mit dem Gyroradius der Elektronen.

Im Hinblick auf den Elektronenringbeschleuniger interessiert man sich besonders für Konfigurationen, in denen das äußere Magnetfeld homogen ist, denn die Ringe sollen ja in einem im wesentlichen homogenen Magnetfeld entlang der Feldlinien mit elektrischen Feldern beschleunigt werden. Ist das äußere magnetische Feld homogen, so ist es evident, daß die Eigenfelder des Ringes für das Gleichgewicht wesentlich sind. Der durch das Eigenmagnetfeld bedingte Pincheffekt muß die elektrostatischen Abstoßungskräfte kompensieren. Bisher hat man nur für den Fall eines geraden Strahles eine spezielle Lösung des Gleichgewichtsproblems gefunden (BENNETT 1934 u. 1955, KEGEL u. MERKEL 1968). Es stellt sich die Frage, inwieweit Aussagen, die sich für den geraden Strahl ergeben, auch für den Ring Gültigkeit haben, evtl. unter einschränkenden Bedingungen, wie der Annahme kleinen Aspektverhältnisses.
Im folgenden soll das Problem des Ringgleichgewichtes nicht explizit gelöst werden, sondern es sollen aus der Annahme der Existenz eines solchen Gleichgewichtes Aussagen über dieses Gleichgewicht gewonnen werden. So hat z.B. P. MERKEL (1968)

aus dem Virialsatz eine Beziehung hergeleitet, die den großen Radius des Ringes mit der Gesamtenergie des Ringes (d.h. Feldenergie plus Energie der Teilchen) und der Spur des Energie-Impuls-Tensors der Materie verknüpft. Wie im folgenden gezeigt wird, erhält man weitere Aussagen, wenn man detailliertere Virialbeziehungen betrachtet.

Für die interessierenden Parameter (siehe z.B. SESSLER 1968) ist die Annahme der Stoßfreiheit weitgehend gerechtfertigt, so daß die Wlassow-Gleichung eine gute Näherung ist. Insbesondere ist evident, daß ein Gleichgewicht der gesuchten Art nur für Zeiten bestehen kann, die klein sind gegen die mittlere Stoßzeit für Elektron-Ionen-Stöße.

2. Grundgleichungen und einige Folgerungen

Wir betrachten das mikroskopische Gleichgewicht für rotationssymmetrische Plasmaringe unter Vernachlässigung von Stößen. Dazu führen wir zunächst Zylinderkoordinaten ein, wobei die z-Achse der Symmetrieachse entspricht, und machen die folgenden Annahmen: a) Die Konfiguration ist stationär, d.h. wir verlangen, daß alle Zeitableitungen verschwinden ($\partial/\partial t = 0$). b) Die Konfiguration ist rotationssymmetrisch, d.h. alle Ableitungen nach φ verschwinden ($\partial/\partial\varphi = 0$). c) Der Strom habe nur eine φ-Komponente (Ringstruktur!) und das magnetische Feld nur eine r- und eine z-Komponente (für das elektrische Feld folgt dies schon aus der Rotationssymmetrie und der Stationarität). Dann ist für das Vektorpotential nur die φ-Komponente wesentlich ($A_r = A_z = 0$), d.h. es gilt:

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \quad ; \quad r\,B_z = \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \qquad \text{(1a,b)}$$

d) Alle Skalare sowie B_z und E_r seien symmetrisch in z, B_r und E_z seien antisymmetrisch. e) Mit Ausnahme des äußeren Magnetfeldes sollen alle makroskopischen Größen wie Dichte, Druck, E_r, E_z, etc. für großen Abstand vom Koordinatenursprung gegen Null gehen. f) Da wir uns besonders für den Fall eines homogenen äußeren $\vec{B}$-Feldes interessieren, wollen wir zunächst auch annehmen, daß das äußere $\vec{B}$-Feld keine r-Komponente hat und daß $B_{oz} > 0$ ist.

Für ein solches Gleichgewicht gilt dann die relativistische Wlassow-Gleichung*(WEIBEL 1967) in der folgenden Form **:

$$\frac{u_r}{\gamma}\frac{\partial f_e}{\partial r} + \frac{u_z}{\gamma}\frac{\partial f_e}{\partial z} + \left[-\frac{e}{m}\left(E_r + \frac{u_\varphi}{\gamma}B_z\right) + \frac{u_\varphi^2}{r\gamma}\right]\frac{\partial f_e}{\partial u_r}$$

$$-\left[\frac{e}{m}\left(\frac{u_z}{\gamma}B_r - \frac{u_r}{\gamma}B_z\right) + \frac{u_\varphi u_r}{r\,\gamma}\right]\frac{\partial f_e}{\partial u_\varphi} - \frac{e}{m}\left(E_z - \frac{u_\varphi}{\gamma}B_r\right)\frac{\partial f_e}{\partial u_z} = 0 \tag{2}$$

Dabei ist f_e die Verteilungsfunktion der Elektronen, m deren Ruhemasse, die Komponenten des Vektors $\vec{u}$ sind die Raumkomponenten der Vierergeschwindigkeit ($\vec{u} = \gamma\vec{v}$), γ ist die Zeitkomponente. Zwischen γ und $\vec{u}$ besteht die Beziehung

$$\gamma^2 = 1 + u^2 \tag{3}$$

Elektronendichte und Elektronenstrom sind gegeben durch

$$n_e = \int f_e \, d^3u \quad ; \quad \vec{j_e} = -e\int \frac{\vec{u}}{\gamma} f_e \, d^3u \tag{4a,b}$$

In der angenommenen Symmetrie ist nur $j_{e\varphi}$ von Null verschieden, wir werden daher im folgenden $j_{e\varphi}$ mit j_e bezeichnen. - Die der Gleichung (2) entsprechende Gleichung für die Verteilungsfunktion f_i der Ionen erhält man, indem man in (2) e durch $-e$ und m durch M, die Masse der Ionen, ersetzt. - Außerdem gelten die Maxwellschen Gleichungen:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi e(n_i - n_e)\;;\quad \operatorname{rot}\vec{B} = 4\pi(j_e + j_i) \tag{5}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot}\vec{E} = 0$$

---

* Die Einheiten für die Länge und die Zeit sind so gewählt, daß sich für die Lichtgeschwindigkeit 1 ergibt.

**Siehe Anhang C

Wenn man annimmt, daß die Verteilungsfunktion symmetrisch in u_r oder u_x oder z ist, d.h. daß

$$f_e(-u_r) = f_e(u_r) \quad \text{oder} \quad f_e(-u_z) = f_e(u_r) \quad \text{oder} \quad f_e(-z) = f_e(z) \qquad (6a,b,c)$$

gilt, folgt, daß die Gleichung (2) in zwei Gleichungen aufspaltet *.

$$\frac{u_z}{\gamma}\frac{\partial f_e}{\partial z} - \frac{e}{m}\frac{u_z}{\gamma}B_r\frac{\partial f_e}{\partial u_\varphi} - \frac{e}{m}\left(E_z - \frac{u_\varphi}{\gamma}B_r\right)\frac{\partial f_e}{\partial u_z} = 0 \qquad (7a)$$

$$\frac{u_r}{\gamma}\frac{\partial f_e}{\partial r} - \left[\frac{e}{m}\left(E_r + \frac{u_\varphi}{\gamma}B_z\right) - \frac{u_\varphi^2}{r\gamma}\right]\frac{\partial f_e}{\partial u_r} + \left(\frac{e}{m}\frac{u_r}{\gamma}B_z - \frac{u_\varphi u_r}{r\gamma}\right)\frac{\partial f_e}{\partial u_\varphi} = 0 \qquad (7b)$$

Daß die Annahmen (6) vernünftig sind, sieht man aus folgendem: Bei der angenommenen Symmetrie gibt es für die Bewegung der einzelnen Teilchen genau zwei Konstanten der Bewegung, die die Zeit nicht explizit enthalten:

$$C_1 = m\gamma - e\Phi = m\sqrt{1 + u_r^2 + u_\varphi^2 + u_z^2} - e\phi \qquad (8a)$$

$$C_2 = m r u_\varphi - e r A_\varphi \qquad (8b)$$

Man erhält diese Konstanten der Bewegung direkt aus den Bewegungsgleichungen. Die erste entspricht der Energieerhaltung, die zweite der Erhaltung des verallgemeinerten Drehimpulses. Verlangt man, daß die Verteilungsfunktion f_e verhältnismäßig glatt von den Raumkoordinaten abhängt, so folgt i.a., daß sie nur von diesen Konstanten der Bewegung abhängt. Ist dies aber der Fall, so sind die Bedingungen (6) erfüllt.

Wir wollen jetzt von den Gleichungen (7) Momentengleichungen bilden. Dazu multiplizieren wir (7a) mit u_z und (7b) mit u_r und integrieren dann über den Impulsraum. Wir erhalten dann**:

---

* Man sieht dies, wenn man z.B. in (2) u_r durch $-u_r$ ersetzt und dann die ursprüngliche Gleichung (2) addiert oder subtrahiert.

**Man erhält die Gl.(9) auch direkt aus (2), wenn man $\langle \frac{u_r u_z}{\gamma} \rangle_e = 0$ annimmt, was eine schwächere Bedingung ist als (6).

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\left\langle \frac{u_r^2}{\gamma}\right\rangle_e n_e\right) + \frac{e}{m}E_r n_e + \frac{e}{m}B_z n_e \left\langle\frac{u_\varphi}{\gamma}\right\rangle_e + \frac{n_e}{r}\left(\left\langle\frac{u_r^2}{\gamma}\right\rangle_e - \left\langle\frac{u_\varphi^2}{\gamma}\right\rangle_e\right) = 0 \tag{9a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\left\langle \frac{u_z^2}{\gamma}\right\rangle_e n_e\right) + \frac{e}{m}E_z n_e - \frac{e}{m}B_r n_e \left\langle\frac{u_\varphi}{\gamma}\right\rangle_e = 0 \tag{9b}$$

Dabei sind die Mittelwerte folgendermaßen definiert:

$$\langle A\rangle_e n_e = \int A f_e \, d^3u \tag{10}$$

wenn A irgendeine Funktion von $\vec{u}$ ist.

Wenn wir annehmen, daß f_e nur von C_1 und C_2 abhängt, so folgt:

$$\left\langle\frac{u_r^2}{\gamma}\right\rangle_e = \left\langle\frac{u_z^2}{\gamma}\right\rangle_e \tag{11}$$

Entsprechendes gilt für die Ionen.

Nach Voraussetzung gehen alle makroskopischen Größen für $z \to \infty$ gegen Null, also auch die positive Größe $\left\langle\frac{u_z^2}{\gamma}\right\rangle_e n_e$. Daraus folgt, daß für positive z die Ableitung dieser Größe nicht überall positiv sein kann. Aus (9b) folgt, daß die Ableitung negativ ist, wenn

$$n_e B_r \left\langle\frac{u_\varphi}{\gamma}\right\rangle_e - n_e E_z < 0 \tag{12}$$

ist. Aus (12) folgt für $z>0$ die schwächere Bedingung

$$|B_r| > |E_z| \tag{12a}$$

denn es ist $|u_\varphi/\gamma| = |v_\varphi/c| < 1$. - Auf der Achse $(r=0)$ ist $B_r = 0$. Daraus ersieht man, daß die Bedingung (12a) nirgendwo auf der Achse erfüllt ist. Das bedeutet, daß n_e überall auf der Achse verschwinden muß, wenn $\left\langle\frac{u_z^2}{\gamma}\right\rangle_e n_e$ für $z \to \infty$ gegen Null gehen soll. Für ein gegebenes $r \neq 0$ ergibt sich, daß n_e schon für ein endliches z auf Null gehen muß. Denn, wenn wir annehmen, daß das äußere Feld homogen ist, geht B_r für große z schneller gegen Null als E_z (i.a. entspricht B_r in großer Entfernung dem Magnetfeld eines Dipols, E_z aber dem elektrischen Feld eines Monopols). Das bedeutet aber, daß es für ein gegebenes r ein endliches $z_0 > 0$ gibt, so daß für $|z| > z_0$ die Bedingung (12a) nicht erfüllt ist. D.h. n_e muß schon bei einem z mit $|z| < z_0$ auf Null gegangen sein. Entsprechend gibt es zu einem vorgegebenen z_0 ein r_0, so daß für $r \geq r_0$ und $|z| > z_0$ die Bedingung (12a) nicht erfüllt ist. Es folgt also, daß die Verteilungsfunktion der Elektronen nur in einem endlichen Raumbereich von Null verschieden ist.

Für die Ionen kann man keinen entsprechenden Schluß ziehen, da sie - im Gegensatz zu den Elektronen - durch das elektrische Feld angezogen werden. Wenn wir annehmen, daß die Elektronendichte zum Rand hin stetig gegen Null geht, so folgt aus (9), daß auch $\langle \frac{u_r^2}{r} \rangle_e$ und $\langle \frac{u_z^2}{r} \rangle_e$ zum Rand hin gegen Null gehen müssen. Andernfalls wäre die Ableitung von $\ln n_e$ zum Rand hin beschränkt, was mit der Annahme $n_e \to 0$ nicht vereinbar ist.

3. Die Virialsätze

Wir wollen jetzt aus den Gleichungen (9) einige Integralbeziehungen (Virialsätze) herleiten. Diese verknüpfen die Komponenten des kinetischen Drucktensors mit dem Strom, der Dichte und Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes. Es erweist sich als nützlich, diese Virialsätze einzeln für die Elektronen und die Ionen und die r- und die z-Komponente der Kräfte herzuleiten. Man erhält so vier Relationen, deren Summe dann den üblichen Virialsatz ergibt.

Wir multiplizieren (9a) mit r und (9b) mit z und integrieren beide Gleichungen über den ganzen Ortsraum. Dann ergibt sich durch partielle Integration:

$$m \int_V \left(\langle \frac{u_r^2}{r} \rangle_e + \langle \frac{u_\varphi^2}{r} \rangle_e \right) n_e \, d\tau = \int_V (e n_e E_r - j_e B_{1z}) r \, d\tau - \int_V r j_e B_{0z} \, d\tau \qquad (13a)$$

$$m\int_V \langle \frac{u_z^2}{\gamma} \rangle_e n_e \, d\tau = \int_V (e n_e E_z + j_e B_{1r}) z \, d\tau + \int_V z j_e B_{0r} \, d\tau \tag{13b}$$

Dabei wurde das magnetische Feld $\vec{B}$ aufgeteilt in das äußere Magnetfeld $\vec{B}_0$ und das durch den Ring erzeugte $\vec{B}_1$. Aus Gl. (13b) sieht man, daß der mittlere Druck der Elektronen in z-Richtung wesentlich davon abhängt, ob das äußere magnetische Feld homogen (d.h. $B_{0r} = 0$) ist oder nicht. - Die linke Seite von (13b) ist positiv. Daraus ersieht man, daß im Falle $B_{0r} = 0$ Gl. (13b) besagt, daß die Ungleichung (12) im räumlichen Mittel erfüllt sein muß.

Entsprechend den Gleichungen (13) erhält man für die Ionen:

$$M\int_V (\langle \frac{u_r^2}{\gamma} \rangle_i + \langle \frac{u_\varphi^2}{\gamma} \rangle_i) n_i \, d\tau = -\int_V (e n_i E_r + j_i B_{1z}) r \, d\tau - \int_V r j_i B_{0z} \, d\tau \tag{14a}$$

$$M\int_V \langle \frac{u_z^2}{\gamma} \rangle_i n_i \, d\tau = \int_V (j_i B_{1r} - e n_i E_z) z \, d\tau + \int_V z j_i B_{0r} \, d\tau \tag{14b}$$

Wenn wir jetzt annehmen, daß die mittlere Geschwindigkeit der Ionen verschwindet (d.h. $j_i = 0$), so folgt aus (14b)

$$M\int_V \langle \frac{u_z^2}{\gamma} \rangle_i n_i \, d\tau = -e\int_V z n_i E_z \, d\tau \tag{15a}$$

Mit (15a) und der zu (11) analogen Beziehung für die Ionen folgt dann aus (14a):

$$M\int_V \langle \frac{u_\varphi^2}{\gamma} \rangle_i n_i \, d\tau = e\int_V (z E_z - r E_r) n_i \, d\tau \tag{15b}$$

Setzt man die Feld- und die Dichteverteilung als bekannt voraus, so ergeben sich aus (15) die räumlichen Mittelwerte der Diagonalelemente des Drucktensors für die Ionen. Wir sehen, daß der Druck der Ionen i.a. anisotrop ist. ~~Dies sieht man auch, wenn man die (9a) entsprechende Gleichung für die Ionen (mit $j_i = 0$) direkt integriert:~~

$$M\int_V \frac{1}{r} [\langle \frac{u_r^2}{\gamma} \rangle_i - \langle \frac{u_\varphi^2}{\gamma} \rangle_i] n_i \, d\tau = e\int_V E_r n_i \, d\tau \tag{15c}$$

~~Der Druck der Ionen ist dann und nur dann im räumlichen Mittel isotrop, wenn die rechte Seite von (15c) gleich Null ist.~~

Wir wollen jetzt die sich entsprechenden Gleichungen für die Elektronen und Ionen addieren, d.h. die Gleichungen (13a) und (14a) sowie (13b) und (14b). Dann steht auf der rechten Seite als Koeffizient bei dem $\vec{E}$-Feld die Ladungsdichte und beim $\vec{B}$-Feld die Dichte des Gesamtstroms. Mit den Beziehungen $div\,\vec{B} = 0$ und $rot\,\vec{E} = 0$ folgt dann durch partielle Integration (siehe Anhang A):

$$\int_V \left\{ \left(\left\langle \frac{u_r^2}{\gamma}\right\rangle_e + \left\langle \frac{u_\varphi^2}{\gamma}\right\rangle_e\right) m\, n_e + \left(\left\langle \frac{u_r^2}{\gamma}\right\rangle_i + \left\langle \frac{u_\varphi^2}{\gamma}\right\rangle_i\right) M n_i \right\} d\tau = -\frac{1}{4\pi}\int_V (E_z^2 + B_{1z}^2)\, d\tau - \int_V r\, j\, B_{0z}\, d\tau \tag{16a}$$

$$\int_V \left(\left\langle \frac{u_z^2}{\gamma}\right\rangle_e m\, n_e + \left\langle \frac{u_z^2}{\gamma}\right\rangle_i M n_i\right) d\tau = \frac{1}{8\pi}\int_V (E_z^2 - E_r^2 + B_{1z}^2 - B_{1r}^2)\, d\tau + \int_V z\, j\, B_{0r}\, d\tau \tag{16b}$$

Man sieht, daß der Integrand im ersten Term auf der rechten Seite von (16a) die Summe der rr- und der $\varphi\varphi$-Komponente des Maxwell'schen Spannungstensors ist. Der entsprechende Term in (16b) ist die zz-Komponente. Aus (16b) sieht man, daß bei homogenem äußeren Feld ($B_{0r} = 0$) das Integral über die zz-Komponente des Drucktensors immer kleiner ist als die Energie der Eigenfelder des Ringes. - Setzt man (16b) in (16a) ein, so erhält man mit (11) und der analogen Beziehung für die Ionen:

$$\int_V \left(\left\langle \frac{u_\varphi^2}{\gamma}\right\rangle_e m\, n_e + \left\langle \frac{u_\varphi^2}{\gamma}\right\rangle_i M n_i\right) d\tau = \int_V (E_r^2 + B_{1r}^2 - 3E_z^2 - 3B_{1z}^2)\, d\tau - \int_V (r B_{0z} + z B_{0r})\, j\, d\tau \tag{17}$$

Die Summe von (16a) und (16b) ergibt den üblichen Virialsatz, wie er z.B. für einen ganz allgemeinen Energie-Impuls-Tensor von P. MERKEL (1968) hergeleitet wurde:

$$\int_V \left[P_{kin} + \frac{1}{8\pi}(E^2 + B_1^2)\right] d\tau = -2\int_V \vec{\mu}\cdot\vec{B}_0\, d\tau \tag{18}$$

Dabei ist P_{kin} die Spur des (3-dim.) kinetischen Drucktensors

$$P_{kin} = n_e m \left\langle \frac{u^2}{\gamma}\right\rangle_e + n_i M \left\langle \frac{u^2}{\gamma}\right\rangle_i \tag{19}$$

und

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\,\vec{r} \times \vec{j} \tag{20}$$

ist die magnetische Dipoldichte. Ist das äußere Magnetfeld homogen, so ist die rechte Seite von (18) gleich $-2\,\vec{m}\,\vec{B}_0$, wobei $\vec{m}$ das magnetische Moment des Ringes ist:

$$\vec{m} = \int_V \vec{\mu}\, d\tau \tag{21}$$

Das magnetische Moment kann man durch den großen Radius R des Ringes und den Gesamtstrom charakteresieren. Setzt man den Strom, die Felder und den Drucktensor als bekannt voraus, so kann man aus (18) R bestimmen (MERKEL 1968). Insbesondere sieht man, daß R durch die Eigenfelder und die thermische Bewegung der Teilchen vergrößert wird.

4. Approximationen für den Fall eines kleinen Aspektverhältnisses

Wenn wir für den Plasmaring ein kleines Aspektverhältnis r_0/R annehmen (r_0 = kleiner Radius, R = großer Radius), lassen sich Näherungsausdrücke für die Felder und insbesondere für die auf den rechten Seiten der Gleichungen (13 - 17) auftretenden Integrale angeben (siehe Anhang B). Mit diesen Näherungsausdrücken ergeben sich dann aus den Virialsätzen Beziehungen zwischen den räumlichen Mittelwerten für die Komponenten des Drucktensors und dem Gesamtstrom und den Liniendichten (über den Querschnitt integrierten Dichten) der Teilchen. Die letzteren Größen sind experimentell vorgebbar.

Für das Weitere sollen zunächst noch einige Größen definiert werden:

$$\overline{a} = \frac{1}{2\pi R\, N_{e,i}} \int_V a\, n_{e,i}\, d\tau \tag{22}$$

wobei α für eine beliebige ortsabhängige Funktion steht, die die Elektronen bzw. Ionen charakteresiert, und die Liniendichte $N_{e,i}$ durch (B8) definiert ist. Weiter sei:

$$\frac{U}{\Gamma} = \langle \frac{u_\varphi}{r} \rangle_e \qquad \text{mit} \qquad \Gamma^2 = U^2 + 1 \tag{23}$$

$$\text{und} \qquad \eta = 1 - \frac{U}{\Gamma} \tag{24}$$

Wir wollen annehmen, daß die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen relativistisch ist, d.h.

$$\Gamma \gg 1 \qquad \text{und damit} \qquad \eta \approx \frac{1}{2\Gamma^2} \tag{24a}$$

Aus Gl. (4b) und (B36) folgt mit (23) und (24) für den gesamten Elektronen-Ringstrom:

$$J_e = -e N_e (1-\eta) \tag{25}$$

Für das Weitere wollen wir jetzt noch annehmen, daß die mittlere Geschwindigkeit der Ionen verschwindet, d.h.

$$J_i = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad J = J_e \tag{26}$$

Wir betrachten jetzt zunächst die axialen Virialsätze und berechnen daraus die Mittelwerte der zz-Komponenten des kinetischen Drucktensors der Ionen und der Elektronen. Mit (B24) und (B44) ergibt sich aus Gl. (13b):

$$m \langle \overline{\frac{u_z^2}{r}} \rangle_e = \frac{e^2 N_e}{2} (\varepsilon - 2\eta) + \frac{1}{2\pi R N_e} \int_V z \, j_e B_{or} \, d\tau \tag{27}$$

Dabei ist $\varepsilon = N_i / N_e$. Außerdem wurde ein Term $\sim \eta^2$ vernachlässigt. Entsprechend erhält man aus Gl. (15a):

$$M \langle \frac{u_z^2}{r} \rangle_i = \frac{e^2 N_e}{2} (1 - \varepsilon) \tag{28}$$

Gl. (28) ist eine Beziehung, die für den geraden Strahl exakt gilt. - Nimmt man an, daß das äußere Magnetfeld homogen ist, d.h.

$$B_{or} = 0 \tag{29}$$

so folgt aus der Bedingung, daß die linken Seiten der Gleichungen (27) und (28) positiv sind, mit (24a) die Ungleichung

$$1 > \epsilon > \frac{1}{\Gamma^2} \tag{30}$$

Dabei besagt die linke Ungleichung, daß die Ionen nur gebunden sind, wenn der Ring negativ geladen ist und die rechte Ungleichung, daß die Lorentzkräfte, die auf die Elektronen wirken, größer sein müssen als die elektrostatische Abstoßung. Die Selbstfokussierungsbedingung (30) ist wiederum eine Beziehung, die für den geraden Strahl exakt gilt. Es sei darauf hingewiesen, daß in (27) und (28) Terme der Ordnung $e^2 N_e \frac{r_0^2}{R^2} \ln \frac{R}{r_0}$ vernachlässigt wurden. In wirklichen Experimenten (SESSLER 1968) können diese Terme vergleichbar werden mit $e^2 N_e \eta$. -
Die Korrekturterme erster Ordnung zu den Gleichungen (27) und (28) verändern die Ungleichung (30) nicht. Denn, wie man aus (B60) und (B71) sieht, ergeben die Terme erster Ordnung nur einen Korrektur<u>faktor</u> für die rechte Seite von (28) und den ersten Term der rechten Seite von (27), wenn man annimmt, daß $J_z = -eN_{ez}(1-\eta)$. - Mit der Annahme (29) erhält man weiterhin aus (27) und (28):

$$\frac{m\langle \overline{\frac{u_z^2}{\gamma}}\rangle_e}{M\langle \overline{\frac{u_z^2}{\gamma}}\rangle_i} = \frac{\epsilon - 2\eta}{1-\epsilon} \tag{31}$$

In dem Bereich, in dem

$$1 \gg \epsilon \gg \eta \tag{32}$$

ist, gilt dann näherungsweise:

$$m\langle \overline{\frac{u_z^2}{\gamma}}\rangle_e = \epsilon M\langle \overline{\frac{u_z^2}{\gamma}}\rangle_i \tag{31a}$$

Im Prinzip läßt sich aus dem radialen <u>Virialsatz</u> für die Ionen (15b) ein Ausdruck für die Größe $M\langle \overline{u_\varphi^2/\gamma}\rangle_i$ herleiten. Das Integral auf der rechten Seite von (15b) hängt aber sehr empfindlich von der genauen Dichteverteilung der Ionen ab. Weicht die Dichteverteilung in erster Ordnung im Aspektverhältnis von einer angenommenen Verteilung ab, so kann das zu Korrekturtermen nullter

Ordnung für das Integral führen (siehe Nachtrag zu Anhang B).

Aus der Gleichung (17) ergibt sich (unter Berücksichtigung der Relationen aus Anhang A):

$$\left\langle \frac{\overline{u_\varphi^2}}{r} \right\rangle_e + \varepsilon \frac{M}{m} \left\langle \frac{\overline{u_\varphi^2}}{r} \right\rangle_i = \frac{e B_{oz} R U}{m \Gamma} + I \tag{33}$$

mit
$$I = \frac{1}{2\pi R N_e m} \int_V [z \varrho E_z - r \varrho E_r - r j B_{1z} - z j B_{1r}] \, d\tau \tag{34}$$

Nimmt man ein parabolisches Dichte- und Stromprofil an, so ist in niedrigster Ordnung (B21, B27b, B43, B46b):

$$I = -\frac{e^2}{m} N_e \left[(1-\varepsilon)^2 + \frac{U^2}{\Gamma^2}\right] \left(\ln 8 + \ln \frac{R}{r_0} - \frac{13}{24}\right) \tag{34a}$$

In (33) wurde B_{oz} als konstant über den Plasmaquerschnitt angenommen. Aus dieser Gleichung kann man eine Abschätzung für den großen Radius R des Ringes bekommen (MERKEL 1968). Wir fragen insbesondere danach wie R durch die kollektiven Effekte beeinflußt wird, d.h. wir wollen R mit dem Gyroradius eines einzelnen Elektrons vergleichen. Für diesen gilt:

$$r_G = \frac{u_\varphi m}{e B_{oz}} \tag{35}$$

Entsprechend definieren wir R_G als den Gyroradius eines einzelnen Elektrons mit dem mittleren Impuls $m \langle u_\varphi \rangle_e$:

$$R_G = \frac{\overline{\langle u_\varphi \rangle_e}\, m}{e B_{oz}} = \frac{U m}{e B_{oz}} \left(1 + \left\langle \frac{\overline{\tilde{u}_\varphi}}{U} \right\rangle_e\right) \tag{36}$$

mit $\tilde{u}_\varphi = u_\varphi - U$ (37)

(Falls f_e symmetrisch in $\tilde{u}_\varphi$ ist, ist $\langle u_\varphi \rangle_e = U$)

Wir wollen jetzt noch den ersten Term auf der linken Seite von (33) genauer betrachten. Mit der Definition (37) erhalten wir:

$$\left\langle \frac{\overline{u_\varphi^2}}{r} \right\rangle_e = \left\langle \frac{\overline{U^2 + 2U\tilde{u}_\varphi + \tilde{u}_\varphi^2}}{r} \right\rangle_e = \frac{U^2}{\Gamma} + \left\langle \frac{\overline{U\tilde{u}_\varphi + \tilde{u}_\varphi^2}}{r} \right\rangle_e \tag{38}$$

Wir schreiben

$$\langle \overline{\frac{u_\varphi^2}{r}} \rangle_e = \frac{U^2}{\Gamma}(1+\delta) \tag{39}$$

wobei sich δ aus (38) ergibt. Wenn man annimmt, daß die Impulsstreuung der Elektronen klein ist gegen den makroskopischen Impuls *, d.h.

$$U \gg \langle \overline{|\tilde{u}_\varphi|} \rangle_e \, , \; \langle \overline{|u_r|} \rangle_e \, , \; \langle \overline{|u_z|} \rangle_e \tag{40}$$

und entwickelt δ nach dem Verhältnis Impulsstreuung zu mittlerem Impuls, so erhält man

$$\delta = \langle \overline{\frac{\tilde{u}_\varphi}{U}} \rangle_e - \langle \overline{\frac{\tilde{u}_\varphi (u_r^2 + u_z^2)}{2\, U^3}} \rangle_e - \langle \overline{\frac{\tilde{u}_\varphi^2 (u_r^2 + u_z^2)}{2\, U^4}} \rangle_e + \langle \overline{\frac{\tilde{u}_\varphi^4}{U^4}} \rangle_e + \; \ldots \tag{41}$$

Falls die Verteilungsfunktion der Elektronen symmetrisch in $\tilde{u}_\varphi$ ist, sind die ersten beiden Terme in (41) Null und δ ist von vierter Ordnung im Entwicklungsparameter.

Mit (36) und (39) ergibt sich aus Gleichung (33) für den Ringradius:

$$\frac{R}{R_G}\left(1 + \langle \overline{\frac{\tilde{u}_\varphi}{U}} \rangle_e \right) = 1 + \delta + \frac{\Gamma}{U^2}\left(-I + \varepsilon \frac{M}{m} \langle \overline{\frac{u_\varphi^2}{r}} \rangle_i \right) \tag{42}$$

Der zweite Term in der Klammer auf der rechten Seite der Gleichung (42) hängt, wie schon gesagt, empfindlich von der genauen Dichteverteilung der Ionen ab. Größenordnungsmäßig ist er aber um einen Faktor ε kleiner als $-I$. Dieser Term wäre nicht aufgetreten, wenn wir statt von (17) von der Beziehung (13a) ausgegangen wären. Die Unsicherheit hätte sich dann aber in das Virialintegral (34) ver-

---

* Nur mit dieser Annahme bekommt man einen wohldefinierten Ring, d.h. diese Annahme ist konsistent mit der Annahme eines kleinen Aspektverhältnisses.

lagert, in dem in diesem Fall ϱ durch $-en_e$ zu ersetzen wäre. (Vgl. die Diskussion im Nachtrag zu Anhang B). - Wenn wir $\epsilon \ll 1$, $\Gamma \gg 1$ und die Gültigkeit von (40) annehmen und nur die Terme niedrigster Ordnung berücksichtigen, erhalten wir aus Gleichung (42) (mit r_{ke} = klassischer Elektronenradius):

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{r_{ke} N_e}{\Gamma}\left[2\left(\ln 8 + \ln\frac{R}{r_0}\right) - \frac{13}{12}\right]\left(1 - \left\langle\frac{\tilde{u}_\varphi}{U}\right\rangle_e\right) \tag{42a}$$

Dabei wird das Aspektverhältnis r_0/R als gegeben betrachtet. Man sieht, daß eine wesentliche Ringaufweitung nur durch die Energie der Eigenfelder verursacht werden kann, aber solange (39) gilt nicht durch die gaskinetischen Terme. So erhält man z.B. für $R/r_0 = 50$ und $\Gamma = 40$ bei $N_e \approx 7 \cdot 10^{12}\,cm^{-1}$ eine Ringaufweitung von 50 %.

Der Term (-13/12) in (42a) rührt von der Annahme eines parabolischen Dichteprofils her. Mit einer bis zum Rand homogenen Verteilung ergibt sich (-3/2).

Eine weitere interessante Größe ist die elektrische Potentialtiefe des Ringes bzw. die Potentialdifferenz zwischen dem Rand des Ringes und der Seele. Nach (B16) erhalten wir dafür bei einer parabolischen Dichteverteilung:

$$\Delta\phi = \frac{3}{2}(1-\epsilon)\, e N_e \tag{43}$$

Bei den detaillierten Diskussionen hatten wir bisher immer die Annahme (29) gemacht, daß das äußere Feld homogen ist. Wir wollen jetzt noch den axialen Virialsatz für die Elektronen (27) diskutieren für den Fall, daß das äußere Feld ein Spiegelfeld ist. In niedrigster Ordnung ist dann B_{or} linear in z:

$$B_{or} = Az \tag{44}$$

$$\text{mit}\quad A = \frac{\partial B_{or}}{\partial z} < 0 \tag{45}$$

Wir erhalten dann näherungsweise (vgl. Anhang B Gl.(B5), (B35) und (B36))

$$\int_V z\, j_e\, B_{or}\, d\tau = \pi R A [r_0^2 \mathcal{J}_e - 2 \int_0^{r_0} \mathcal{J}_e(s_1)\, s_1\, ds_1] \tag{46}$$

Um das verbleibende Integral auf der rechten Seite von (46) auszuwerten, muß man eine Annahme über die Verteilung der Stromdichte machen. Wenn wir annehmen, daß die Stromdichte parabolisch über dem Querschnitt verteilt ist (analog B14), so erhält man

$$\int_V z\, j_e\, B_{or}\, d\tau = \frac{\pi}{3} A R r_0^2 \mathcal{J}_e \tag{47}$$

und mit (B44) erhalten wir:

$$\frac{\int_V z\, j_e\, B_{or}\, d\tau}{\int_V z\, j_e\, B_{1r}\, d\tau} = \frac{A r_0^2}{3\gamma} \tag{48}$$

Nimmt man andererseits eine bis zum Rand homogene Stromdichte an (analog zu B11), so multiplizieren sich die rechten Seiten von (47) und (48) mit einem Faktor 3/2.

Mit (46) und der Beziehung (25) für den Strom ergibt sich aus (27):

$$m \left\langle \frac{u_z^2}{r} \right\rangle_e = \frac{e^2 N_e}{2} (\varepsilon - 2\eta) - eA \frac{r_0^2}{6} (1 - \eta) \tag{49}$$

Es sei bemerkt, daß für $\varepsilon \gg \eta$ das Verhältnis der beiden Terme auf der rechten Seite gerade $1/\varepsilon$ mal dem Ausdruck (48) ist. Wir wollen noch ein Zahlenbeispiel betrachten: Wählt man $r_0 \approx 0.1$ cm, $N_e \approx 10^{11}$ cm^{-1} und * $A = -10^3$ cm^{-1}, so ist der zweite Term in (49) ungefähr um einen Faktor 3 größer als der erste, obgleich das Verhältnis (48) nur 0,07 beträgt. D.h. der Druck der Elektronen in z-Richtung

---

* Dies entspricht dem geplanten Experiment in Garching (private Mitteilung U. SCHUMACHER)

ist sehr viel größer als in dem entsprechenden Gleichgewicht mit einem homogenen äußeren Magnetfeld. Daß eine kleine Störung des B_{1r} -Feldes durch ein äußeres B_{0r} -Feld zu relativ großen Änderungen des mittleren kinetischen Druckes der Elektronen in z-Richtung führt, kommt daher, daß bei einem homogenen äußeren Feld der "Druck" der Elektronen nur durch die Differenz zwischen elektrostatischer Abstoßung und magnetischer Anziehung bedingt ist. Dieser Effekt könnte es schwierig machen, einen Ring aus einem Spiegelfeld (in dem er notwendigerweise gemacht wird) in ein homogenes Feld (in dem er beschleunigt werden soll) zu bringen. Die Bedeutung dieses Effektes nimmt aber mit der Teilchenzahl ab.

5. Diskussion

In den vorhergehenden Abschnitten wurde gezeigt, daß man, ohne das Gleichgewichtsproblem selbst zu lösen, allein schon aus Symmetriebetrachtungen und den Virialsätzen für die verschiedenen Teilchensorten und Druckkomponenten wichtige Aussagen über das Ringgleichgewicht erhält. Macht man die Annahme, daß das äußere Magnetfeld homogen und das Aspektverhältnis $r_c/R \ll 1$ ist, so erhält man näherungsweise einige Beziehungen, die auch aus den exakten Lösungen für den geraden Strahl folgen. Zu dieser Gruppe von Aussagen gehört Gl. (28), die die Druckkomponente der Ionen senkrecht zur mittleren Bewegung der Elektronen mit der über den Querschnitt integrierten Ladungsdichte verknüpft. Weiterhin gehören zu dieser Gruppe die Selbstfokussierungsbedingung (30) und - wenn wir für den geraden Strahl $\Gamma \gg T_i/T_e \gg 1/\Gamma$ annehmen und berücksichtigen, daß die Komponente des Elektronendrucks senkrecht zur mittleren Bewegung der Elektronen um einen Faktor $1/\Gamma$ kleiner ist als im Ruhesystem der Elektronen - die Beziehung (27), die den Elektronendruck senkrecht zur mittleren Bewegung angibt, sowie die Gleichung (31a), die das Verhältnis dieser Druckkomponente zu der entsprechenden der Ionen angibt. - Anders als bei der von BENNETT (1934, 1955) angegebenen Lösung für den geraden Strahl ist das Ergebnis, daß beim Ring die Elektronen auf ein endliches Volumen beschränkt sind. - Weiter wurde gezeigt, daß der Ionendruck i.a. anisotrop ist.

Während sich für den Fall eines homogenen äußeren Magnetfeldes (und $r_0/R \ll 1$) Bedingungen ergeben, die denen im geraden Strahl entsprechen, ergibt sich für den Fall, daß das äußere Feld ein Spiegelfeld ist, daß der mittlere kinetische Druck der Elektronen in z-Richtung (und damit wegen (11) auch in r-Richtung) höher ist als im homogenen äußeren Feld.

Schließlich wurde mit (42) eine Relation angegeben, die die Ringaufweitung durch die Eigenfelder der Ringe beschreibt. Dieser Effekt wird aber erst bei relativ hohen Dichten wesentlich (für $R \approx 3.5$ cm und $R/r_0 \approx 50$ bei einer Gesamtteilchenzahl von 10^{14}).

Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Existenz von Gleichgewichtslösungen nicht bewiesen wurde. Das bedeutet, daß die angegebenen Relationen notwendige, nicht aber hinreichende Bedingungen für ein Ringgleichgewicht sind.

Prof. A. Schlüter, Dr. P. Merkel und Dr. H.K. Wimmel danke ich für zahlreiche Diskussionen.

Anhang

A. Umformung der Integrale in Gl. (13)

Wenn wir zu den Gleichungen (13) die entsprechenden Gleichungen für die Ionen addieren, erhalten wir auf der rechten Seite Integrale der Art $\int_V z\varrho E_z \, d\tau$ und $\int_V z j B_{1r} \, d\tau$. Dabei ist

$$\varrho = e(n_i - n_e) \quad ; \quad j = j_e + j_i \tag{A 1}$$

Diese Integrale wollen wir umformen. Aus (5) folgt:

$$\varrho E_z = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right]E_z \tag{A 2}$$

Aus dieser Beziehung folgt:

$$\int_V z\varrho E_z \, d\tau = \frac{1}{8\pi}\int_V z\frac{\partial}{\partial z}E_z^2 \, d\tau + \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{z}{r}E_z\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} \, d\tau \tag{A 3}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\int_V \frac{z}{r}E_z\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)\, d\tau &= 2\pi\int z E_z \frac{\partial}{\partial r}(rE_r)\, dr\, dz \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[E_z rE_r\right]_{r=0}^{r=\infty} - \int_0^\infty r E_r \frac{\partial}{\partial r}E_z\, dr\right\} z\, dz\end{aligned} \tag{A 4}$$

Da wir annehmen, daß das $\vec{E}$-Feld im Unendlichen wie ein Monopolfeld abfällt, gibt der erste Term auf der rechten Seite von (A 4) keinen Beitrag. Im zweiten Term ersetzen wir $\partial E_z/\partial r$ durch $\partial E_r/\partial z$ (Gl. 5) und erhalten dann

$$\int_V z\varrho E_z \, d\tau = \frac{1}{8\pi}\int_V z\frac{\partial}{\partial z}(E_z^2 - E_r^2)\, d\tau = \frac{1}{8\pi}\int_V (E_r^2 - E_z^2)\, d\tau \tag{A 5}$$

Ganz analog erhält man

$$\int_V r\varrho E_r \, d\tau = \frac{1}{4\pi}\int_V E_z^2 \, d\tau \tag{A 6}$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Integrale, die j und $\vec{B}_1$ enthalten umformen: Es ist

$$j B_{1r} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B_{1r}}{\partial z} - \frac{\partial B_{1z}}{\partial r}\right)B_{1r} \tag{A 7}$$

Weiterhin gilt:

$$\int_V z B_{1r} \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} d\tau = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \{ [r B_{1r} B_{1z}]_{r=0}^{r=\infty} - \int_0^\infty B_{1z} \frac{\partial}{\partial r}(r B_{1r}) dr \} z dz \quad \text{(A 8)}$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (19) ist wieder Null. Aus div $\vec{B} = 0$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial r}(r B_1) = -r \frac{\partial B_{1z}}{\partial z} \quad \text{(A 9)}$$

Diese Beziehung setzen wir in (A 8) ein und erhalten dann

$$\int_V z j B_{1r} d\tau = \frac{1}{8\pi} \int z \frac{\partial}{\partial z}(B_{1r}^2 - B_{1z}^2) d\tau = \frac{1}{8\pi} \int_V (B_{1z}^2 - B_{1r}^2) d\tau \quad \text{(A 10)}$$

Entsprechend gilt

$$\int_V r j B_{1z} d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_V B_{1z}^2 \, d\tau \quad \text{(A 11)}$$

Die Integrale in (13), die das äußere Magnetfeld $\vec{B}_0$ enthalten, lassen sich nicht in analoger Weise umformen, da das äußere Feld im Unendlichen nicht auf Null geht, so daß der Term, der dem ersten auf der rechten Seite von (A 8) entspricht, nicht verschwindet.

B. Näherungsausdrücke für die Potentiale, die Felder und die Virialintegrale

Das skalare Potential einer stationären Konfiguration ist gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = -e \int_V \frac{n_e(\vec{r}') - n_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad \text{(B 1)}$$

wobei $\vec{r}$ der Ortsvektor ist. Bei der angenommenen Rotationssymmetrie führt man zweckmäßigerweise Zylinderkoordinaten ein. Die Winkelintegration läßt sich dann ausführen und man erhält:

$$\phi(r,z) = -4e\int \frac{[n_e(r',z') - n_i(r',z')]\,K(\alpha)}{\sqrt{(z-z')^2 + (r+r')^2}}\, r'\,dr'\,dz' \qquad \text{(B 2)}$$

Dabei ist $K(\alpha)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung und

$$\alpha^2 = \frac{4rr'}{(z-z')^2 + (r+r')^2} \qquad \text{(B 3)}$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß das Aspektverhältnis r_0/R klein ist, und fragen nur nach dem Potential innerhalb des Plasmaringes (bzw. in dessen Nähe). In diesem Gebiet ist α nahe bei eins und $K(\alpha)$ läßt sich entwickeln (s. z.B. GRADSTEYN u. RYZHIK 1965):

$$K(\alpha) = \ln 4 - \ln\sqrt{1-\alpha^2} + \frac{1}{4}\left(\ln 4 - \ln\sqrt{1-\alpha^2} - 1\right)(1-\alpha^2) + \dots \qquad \text{(B 4)}$$

Um die Integrationen in (B 2) auszuführen, ist es zweckmäßig, in der r-z-Ebene auf ein System von Polarkoordinaten überzugehen, dessen Mittelpunkt bei $r = R$ und z = 0 liegt. Wir haben dann

$$r - R = s_1 \sin\vartheta_1 \;; \qquad r' - R = s_2 \sin\vartheta_2$$

$$z = s_1 \cos\vartheta_1 \;; \qquad z' = s_2 \cos\vartheta_2 \qquad \text{(B 5)}$$

Wenn wir den Integranden von (B 2) nach dem Aspektverhältnis entwickeln und Terme bis zur ersten Ordnung mitnehmen, erhalten wir als Näherungsausdruck für (B 2):

$$\phi(r,z) = -2e\int [n_e(s_2,\vartheta_2) - n_i(s_2,\vartheta_2)]\,\Big\{\ln 8 + \ln R - \frac{1}{2}\ln[s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)]$$

$$+ \frac{s_1\sin\vartheta_1}{2R} + \frac{s_2\sin\vartheta_2}{2R}\Big\}\Big(1 - \frac{s_1\sin\vartheta_1}{2R} + \frac{s_2\sin\vartheta_2}{2R}\Big)\, d\vartheta_2\, s_2\, ds_2 \qquad \text{(B 6)}$$

Um das Integral (B 6) explizite berechnen zu können, machen wir die weitere Annahme (die in Strenge in einem Experiment sicher nicht erfüllt ist), daß n_e und n_i und damit auch die Ladungsdichte ρ nur von dem Abstand von der Ringseele, d.h. von der Koordinate s abhängen

$$n_e(r,z) = n_e(s_1)\ ;\ n_i(r,z) = n_i(s_1)\ ;\ \varrho(r,z) = \varrho(s_1) \tag{B 7}$$

Wir definieren jetzt noch folgende Größen:

$$N_e(s_1) = 2\pi\int_0^{s_1} n_e(s_2)s_2 ds_2\ ;\ N_i(s_1) = 2\pi\int_0^{s_1} n_i(s_2)s_2 ds_2\ ;\ P(s_1) = 2\pi\int_0^{s_1}\varrho(s_2)s_2 ds_2 \tag{B 8}$$

$$N_e = N_e(r_0)\ ;\ N_i = N_i(r_0)\ ;\ P = P(r_0)$$

$$\epsilon = \frac{N_i}{N_e} \quad\Rightarrow\quad P = -e(1-\epsilon)N_e \tag{B 9}$$

Die Größen N_e, N_i, P sind die Liniendichten, d.h. die Zahl der Teilchen (Ladungen) pro cm Strahl.

Mit der Annahme (B 7) läßt sich die Integration in (B 6) ausführen. Mit (B 8) und (B 9) ergibt sich dann für das Potential:

$$\begin{aligned}\phi(r,z) = {} & 2P(\ln 8 + \ln\frac{R}{r_0})(1-\frac{r-R}{2R}) + 2(1-\frac{r-R}{2R})\int_{s_1}^{r_0} P(s_2)\frac{ds_2}{s_2} \\ & + \frac{3}{2}P\frac{r-R}{R} - \frac{r-R}{s_1^2 R}\int_0^{s_1} P(s_2)s_2 ds_2 + O(P\frac{r_0^2}{R^2}\ln\frac{R}{r_0})\end{aligned} \tag{B 10}$$

D.h. in nullter Näherung haben wir

$$\phi(r,z) = 2P(\ln 8 + \ln\frac{R}{r_0}) + 2\int_{s_1}^{r_0} P(s_2)\frac{ds_2}{s_2} \tag{B 10a}$$

Das verbleibende Integral in (B 10a) läßt sich nur berechnen, wenn man die Funktion $\varrho(s)$ vorgibt. Wir wollen zwei verschiedene Modelle betrachten:

$$\text{Modell A:}\quad \varrho(s) = \begin{cases} \varrho_0 & \text{für } s \le r_0 \\ 0 & \text{für } s > r_0 \end{cases} \tag{B 11}$$

Damit ergibt sich:

$$\phi_A(s_1) = 2(\ln\frac{R}{r_0} + \ln 8 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{s_1^2}{r_0^2})P \tag{B 12}$$

oder mit (B 9):

$$\phi_A(s_1) = -2e(1-\epsilon)N_e(\ln\frac{R}{r_0} + \ln 8 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{s_1^2}{r_0^2}) \tag{B 12a}$$

Für die Potentialdifferenz zwischen Ringseele und Rand ergibt sich dann

$$\Delta\phi_A = \phi_A(r_0) - \phi_A(0) = -P = (1-\varepsilon)eN_e \tag{B 13}$$

Modell B: $$\varrho(s) = \begin{cases} \varrho_c(1-s^2/r_0^2) & \text{für } s \le r_0 \\ 0 & \text{für } s > r_0 \end{cases} \tag{B 14}$$

Dann folgt

$$\phi_B(s_1) = 2\left(\ln\frac{R}{r_0} + \ln 8 + \frac{3}{4} - \frac{s_1^2}{r_0^2} + \frac{1}{4}\frac{s_1^4}{r_0^4}\right)P \tag{B 15}$$

bzw.

$$\phi_B(s_1) = -2eN_e(1-\varepsilon)\left(\ln\frac{R}{r_0} + \ln 8 + \frac{3}{4} - \frac{s_1^2}{r_0^2} + \frac{1}{4}\frac{s_1^4}{r_0^4}\right) \tag{B 15a}$$

und $$\Delta\phi_B = -\frac{3}{2}P = \frac{3}{2}(1-\varepsilon)eN_e \tag{B 16}$$

Da wir nur stationäre Konfigurationen betrachten, ergibt sich das elektrische Feld allein aus dem Gradienten des skalaren Potentials. Aus dem exakten Ausdruck (B 2) ergibt sich für die Komponenten des elektrischen Feldes:

$$E_z(r,z) = 4e\int \frac{[n_e(r',z') - n_i(r',z')](z-z')}{\sqrt{(z-z')^2 + (r+r')^2}^{\,3}} \cdot \frac{E(\alpha)}{1-\alpha^2}\, r'dr'\,dz' \tag{B 17}$$

und

$$E_r(r,z) = 2e\int \frac{n_e(r',z') - n_i(r',z')}{r\sqrt{(z-z')^2+(r+r')^2}}\left\{\left(1 - \frac{2(r+r')r}{(z-z')^2+(r+r')^2}\right)\frac{E(\alpha)}{1-\alpha^2} - K(\alpha)\right\} r'dr'dz' \tag{B 18}$$

Dabei ist $E(\alpha)$ das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung. - Entsprechend ergibt sich aus dem Näherungsausdruck (B 10):

$$E_z(r,z) = 2\,\frac{zP(s_1)}{s_1^2} - \frac{2z(r-R)}{s_1^4 R}\int_0^{s_1} P(s_2)\,s_2\,ds_2 + O\left(\frac{P}{r_0}\frac{r_0^2}{R^2}\ln\frac{R}{r_0}\right) \tag{B 19}$$

und

$$E_r(r,z) = \frac{2(r-R)}{s_1^2} P(s_1) + \frac{P}{R}\left(\ln 8 + \ln\frac{R}{r_0} - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{R}\int_{s_1}^{r_0} P(s_2)\frac{ds_2}{s_2}$$
$$- \frac{(r-R)^2 - z^2}{s_1^4 R}\int_0^{s_1} P(s_2) s_2 ds_2 + O\left(\frac{P}{r_0}\frac{r_0^2}{R^2}\ln\frac{R}{r_0}\right) \tag{B 20}$$

Nachdem wir Näherungsausdrücke für die Komponenten des elektrischen Feldes gefunden haben, lassen sich die elektrischen Anteile der Virialintegrale bestimmen. Für den Ausdruck (A 5) ergibt sich mit (B 19):

$$\int_V z \varrho E_z \, d\tau = 2\pi R\left\{\frac{1}{2}P^2 + O\left(P^2 \frac{r_0^2}{R^2}\ln\frac{R}{r_0}\right)\right\} \tag{B 21}$$

Ersetzt man in (B 21) ϱ durch n_e, so ergibt sich

$$\int_V z n_e E_z \, d\tau = 4\pi^2 R \int_0^{r_0} P(s_1)\, n_e(s_1)\, s_1 \, ds_1$$
$$= 2\pi R\left\{ P N_e - 2\pi \int_0^{r_0} N_e(s_1)\, \varrho(s_1)\, s_1 \, ds_1 \right\} \tag{B 22}$$

Nimmt man an, daß die Elektronendichte proportional zu der Ionendichte ist, d.h.

$$\varrho(s) = -e(1-\epsilon)\, n_e(s) \tag{B 23}$$

so folgt

$$\int_V z n_e E_z \, d\tau = \pi R N_e P = -\pi R e(1-\epsilon) N_e^2 \tag{B 24}$$

Ebenso erhält man mit (B 23)

$$\int_V z n_i E_z \, d\tau = \pi R P N_i = -\pi R e \epsilon (1-\epsilon) N_e^2 \tag{B 25}$$

Entsprechend ergibt sich für die r-Komponente:

$$\int_V r \varrho E_r \, d\tau = 2\pi R\left\{ P^2\left(\ln 8 + \ln\frac{R}{r_0} - \frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \int_0^{r_0} P^2(s_1)\frac{ds_1}{s_1} + O\left(P^2 \frac{r_0^2}{R^2}\ln\frac{R}{r_0}\right)\right\} \tag{B 26}$$

Das Integral in (B 26) läßt sich wieder nur auswerten, wenn man etwas über die Verteilung der Ladungsdichte $\varrho(s)$ annimmt. Mit der Verteilung (B 11) ergibt sich:

$$\int_V r\varrho E_r \, d\tau = 2\pi R P^2 \left(\ln 8 + \ln \frac{R}{r_0} - \frac{1}{4}\right) \tag{B 26a}$$

und mit (B 14) folgt:

$$\int_V r\varrho E_r \, d\tau = 2\pi R P^2 \left(\ln 8 + \ln \frac{R}{r_0} - \frac{1}{24}\right) \tag{B 26b}$$

Analog zu (B 22) erhalten wir

$$\int_V r n_e E_r \, d\tau = 2\pi R \Big\{ P N_e \left(\ln 8 + \ln \frac{R}{r_0} + \frac{1}{2}\right) - 4\pi \int_0^{r_0} N_e(s_1) \varrho(s_1) s_1 \, ds_1 + \int_0^{r_0} N_e(s_1) P(s_1) \frac{ds_1}{s_1} \Big\} \tag{B 27}$$

Mit der Annahme (B 23) und der Verteilung (B 11) folgt:

$$\int_V r n_e E_r \, d\tau = 2\pi R P N_e \left(\ln 8 + \ln \frac{R}{r_0} - \frac{1}{4}\right) \tag{B 27a}$$

und mit (B 14):

$$\int_V r n_e E_r \, d\tau = 2\pi R P N_e \left(\ln 8 + \ln \frac{R}{r_0} - \frac{1}{24}\right) \tag{B 27b}$$

Entsprechend gilt mit (B 11):

$$\int_V r n_i E_r \, d\tau = 2\pi R P N_i \left(\ln 8 + \ln \frac{R}{r_0} - \frac{1}{4}\right) \tag{B 28a}$$

und mit (B 14):

$$\int_V r n_i E_r \, d\tau = 2\pi R P N_i \left(\ln 8 + \ln \frac{R}{r_0} - \frac{1}{24}\right) \tag{B 28b}$$

Mit (A 5) und (A 6) erhalten wir aus (B 21) und (B 26) einen Ausdruck für die elektrische Feldenergie:

$$\frac{1}{8\pi} \int_V (E_r^2 + E_z^2) \, d\tau = \int_V (r E_r + z E_z) \varrho \, d\tau = 2\pi R \Big\{ P^2 \left(\ln 8 + \ln \frac{R}{r_0}\right) + \int_0^{r_0} P^2(s_1) \frac{ds_1}{s_1} + O\left(P^2 \frac{r_0^2}{R^2} \ln \frac{R}{r_0}\right) \Big\} \tag{B 29}$$

Mit (B 11) folgt dann

$$\frac{1}{8\pi} \int_V (E_r^2 + E_z^2) \, d\tau = 2\pi R P^2 \left(\ln 8 + \ln \frac{R}{r_0} + \frac{1}{4}\right) \tag{B 29a}$$

und mit (B 14):

$$\frac{1}{8\pi}\int_V (E_r^2 + E_z^2)\,d\tau = 2\pi R P^2 \left(\ln 8 + \ln\frac{R}{r_0} + \frac{11}{24}\right) \qquad \text{(B 29b)}$$

Den Ausdruck (B 29) kann man einfacher gewinnen, wenn man von der Beziehung

$$\frac{1}{8\pi}\int_V (E_r^2 + E_z^2)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_V \varrho\,\phi\,d\tau \qquad \text{(B 30)}$$

und dem Ausdruck (B 10) Gebrauch macht.

Es sei bemerkt, daß sich in den Ausdrücken (B 21 - B 29) die Terme, die Korrekturen erster Ordnung im Aspektverhältnis ergäben, bei der Integration herausmitteln. Das ist durch die Annahme (B 7) bedingt.

Für das Vektorpotential und das Magnetfeld ergeben sich ganz ähnliche Näherungsausdrücke. In der angenommenen Geometrie hat das Vektorpotential nur eine φ-Komponente und es gilt

$$A_\varphi(r,z) = A_{o\varphi}(r,z) + A_{1\varphi}(r,z) \qquad \text{(B 31)}$$

wobei $A_{o\varphi}(r,z)$ das Vektorpotential des äußeren Magnetfeldes ist und

$$A_{1\varphi}(r,z) = 2\int \frac{j(r',z')}{\sqrt{(z-z')^2+(r+r')^2}}\Big\{-2r'K(\alpha) + \frac{1}{r}\left[(z-z')^2+(r+r')^2\right]\left[K(\alpha)-E(\alpha)\right]\Big\}\,dr'\,dz' \qquad \text{(B 32)}$$

Wir suchen jetzt wieder einen Näherungsausdruck unter der Annahme $r_0/R \ll 1$. Damit ist α nahe bei eins und es gilt für $E(\alpha)$ (siehe z.B. GRADSTEYN u. RYZHIK):

$$E(\alpha) = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln 4 - \ln\sqrt{1-\alpha^2} - \frac{1}{2}\right)(1-\alpha^2) + \ldots \qquad \text{(B 33)}$$

Wir gehen jetzt wieder zu dem Koordinatensystem (B 5) über. Entwickelt man dan Integranden von (B 32) nach dem Aspektverhältnis und nimmt Terme bis zur ersten Ordnung mit, so ergibt sich

$$A_{1\varphi}(r,z) = 2\int j(s_2,\psi_2)\left(1 - \frac{s_1 \sin\psi_1}{2R} + \frac{s_2 \sin\psi_2}{2R}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\ln 8 + \ln R - 2 - \tfrac{1}{2}\ln[s_1^2 + s_2^2 - 2\cos(\psi_1 - \psi_2)]\right) d\psi_2\, s_2\, ds_2 \tag{B 34}$$

Entsprechend der Annahme (B 7) wollen wir im weiteren annehmen, daß die Stromdichte (für jede Plasmakomponente) nur von der Koordinate s abhängt:

$$j_e(r,z) = j_e(s_1) \; ; \quad j_i(r,z) = j_i(s_1) \; ; \quad j(r,z) = j(s_1) \tag{B 35}$$

Analog zu (B 8) definieren wir:

$$J_e(s) = 2\pi\int_0^s j_e(s_2)\, s_2\, ds_2 \; ; \; J_i(s) = 2\pi\int_0^s j_i(s_2)\, s_2\, ds_2 \; ; \; J(s) = 2\pi\int_0^s j(s_2)\, s_2\, ds_2$$

$$J_e = J_e(r_0) \quad ; \quad J_i = J(r_i) \quad ; \quad J = J(r_0) \tag{B 36}$$

J ist der Gesamtstrom, der im Ring fließt. Mit (B 35) folgt dann aus (B 34):

$$A_{1\varphi}(r,z) = 2\left(1 - \frac{r-R}{2R}\right)\left[J\left(\ln 8 - 2 + \ln\frac{R}{r_0}\right) + \int_{s_1}^{r_0} J(s_2)\frac{ds_2}{s_2}\right]$$

$$+ \frac{r-R}{2R}J - \frac{\sin\psi_1}{R s_1}\int_0^{s_1} J(s_2)\, s_2\, ds_2 + O\left(J\frac{r_0^2}{R^2}\ln\frac{R}{r_0}\right) \tag{B 37}$$

D.h. in nullter Näherung haben wir

$$A_{1\varphi}(r,z) = 2J\left(\ln 8 - 2 + \ln\frac{R}{r_0}\right) + 2\int_{s_1}^{r_0} J(s_2)\frac{ds_2}{s_2} \tag{B 37a}$$

Nehmen wir (analog zu (B 11)) eine bis zum Rand homogene Stromdichteverteilung an, so ergibt sich aus (B 37a):

$$A_{1\varphi A}(s_1) = 2J\left(\ln 8 - \frac{3}{2} + \ln\frac{R}{r_0} - \frac{1}{2}\frac{s_1^2}{r_0^2}\right) \tag{B 38a}$$

Nimmt man andererseits (analog zu (B 14)) eine parabolische Stromdichteverteilung an, so erhält man:

$$A_{1\varphi B}(s_1) = 2J\left(\ln 8 - \frac{5}{4} + \ln\frac{R}{r_0} - \frac{1}{2}\frac{s_1^2}{r_0^2}\right) \tag{B 38b}$$

Der Zusammenhang von A_φ mit dem Magnetfeld ist durch Gl. (1) gegeben. Aus dem exakten Ausdruck (B 32) folgt:

$$B_{1r}(r,z) = -2\int \frac{(z-z')\, j(r',z')}{r\sqrt{(z-z')^2+(r+r')^2}} \left[K(\alpha) - \frac{1-\alpha^2/2}{1-\alpha^2} E(\alpha) \right] dr'dz' \qquad \text{(B 39)}$$

$$B_{1z}(r,z) = 2\int \frac{j(r',z')}{\sqrt{(z-z')^2+(r+r')^2}} \left[K(\alpha) - \frac{1-\frac{\alpha^2}{2}(1+\frac{r'}{r})}{1-\alpha^2} E(\alpha) \right] dr'dz' \qquad \text{(B 40)}$$

Entsprechend folgt aus dem Näherungsausdruck (B 37):

$$B_{1r}(r,z) = 2\frac{z}{s_1^2} J(s_1) - \frac{2z(r-R)}{R\, s_1^4} \int_0^{s_1} J(s_2)\, s_2\, ds_2 + O\left(\frac{J}{r_0} \frac{r_0^2}{R^2} \ln\frac{R}{r_0}\right) \qquad \text{(B 41)}$$

$$B_{1z}(r,z) = -2\frac{r-R}{s_1^2} J(s_1) + \frac{J}{R}\left(\ln 8 - \frac{1}{2} + \ln\frac{R}{r_0}\right) + \frac{1}{R}\int_{s_1}^{r_0} J(s_2) \frac{ds_2}{s_2}$$
$$+ \frac{z^2-(r-R)^2}{R\, s_1^4} \int_0^{s_1} J(s_2)\, s_2\, ds_2 + O\left(\frac{J}{r_0} \frac{r_0^2}{R^2} \ln\frac{R}{r_0}\right) \qquad \text{(B 42)}$$

Mit den Ausdrücken (B 41) und (B 42) lassen sich jetzt die magnetischen Anteile der Virialintegrale bestimmen. Aus (B 41) folgt:

$$\int_V z\, j\, B_{1r}\, d\tau = 2\pi R\left\{ \frac{1}{2} J^2 + O\left(J^2 \frac{r_0^2}{R^2} \ln\frac{R}{r_0}\right) \right\} \qquad \text{(B 43)}$$

Nimmt man an, daß j_e und j_i proportional zu j sind, so gilt entsprechend:

$$\int_V z\, j_e\, B_{1r}\, d\tau = \pi R J J_e \qquad \text{(B 44)}$$

und

$$\int_V z\, j_i\, B_{1r}\, d\tau = \pi R J J_i \qquad \text{(B 45)}$$

Entsprechend erhält man für die r-Komponente:

$$\int_V r j B_{1z}\, d\tau = 2\pi R \{ j^2 (\ln 8 + \ln \tfrac{R}{r_0} - \tfrac{3}{2}) + \int_0^{r_0} j^2(s_1) \frac{ds_1}{s_1} + O(j^2 \frac{r_0^2}{R^2} \ln \frac{R}{r_0}) \} \tag{B 46}$$

Unter Annahme einer bis zum Rand homogenen Stromdichte folgt aus (B 46):

$$\int_V r j B_{1z}\, d\tau = 2\pi R j^2 (\ln 8 + \ln \tfrac{R}{r_0} - \tfrac{5}{4}) \tag{B 46a}$$

und im Falle einer parabolischen Stromdichteverteilung gilt:

$$\int_V r j B_{1z}\, d\tau = 2\pi R j^2 (\ln 8 + \ln \tfrac{R}{r_0} - \tfrac{25}{24}) \tag{B 46b}$$

Ersetzt man auf der linken Seite in (B 46a,b) j durch j_e bzw. j_i so bleibt die Beziehung richtig, wenn man auf der rechten Seite j^2 durch $j j_e$ bzw. $j j_i$ ersetzt, vorausgesetzt $j \sim j_e \sim j_i$.

Aus (B 43) und (B 46) ergibt sich mit (A 11) und (A 12) für die magnetische Energie des Eigenfeldes:

$$\frac{1}{8\pi} \int_V (B_{1r}^2 + B_{1z}^2)\, d\tau = \int_V (r B_{1z} - z B_{1r})\, d\tau \tag{B 47}$$

$$= 2\pi R \{ j^2 (\ln 8 + \ln \tfrac{R}{r_0} - 2) + \int_0^{r_0} j^2(s_1) \frac{ds_1}{s_1} + O(j^2 \frac{r_0^2}{R^2} \ln \frac{R}{r_0}) \}$$

D.h. für die bis zum Rand homogene Verteilung der Stromdichte gilt:

$$\frac{1}{8\pi} \int_V (B_{1r}^2 + B_{1z}^2)\, d\tau = 2\pi j^2 (\ln 8 + \ln \tfrac{R}{r_0} - \tfrac{7}{4}) \tag{B 47a}$$

und für die parabolische Verteilung:

$$\frac{1}{8\pi} \int_V (B_{1r}^2 + B_{1z}^2)\, d\tau = 2\pi j^2 (\ln 8 + \ln \tfrac{R}{r_0} - \tfrac{37}{24}) \tag{B 47b}$$

Den Ausdruck (B 47) für die Energie des magnetischen Eigenfeldes des Ringes kann man einfacher direkt aus dem Vektorpotential (B 37) erhalten über die Beziehung

$$\frac{1}{8\pi}\int_V (B_{1r}^2 + B_{1z}^2)\, d\tau = \frac{1}{2}\int_V j A_\varphi \, d\tau \tag{B 48}$$

Bei der Herleitung der in diesem Abschnitt gewonnenen Näherungsausdrücken wurden mehrere Annahmen gemacht. Die einschneidendste davon war (B 7) bzw. (B 35). Bei dieser Dichteverteilung fällt das Dichtemaximum bei $s = 0$ nicht mit dem Potentialminimum zusammen. Der Abstand dieser beiden Punkte hängt vom Aspektverhältnis ab und geht mit $(r_0^2/R)\,\ln(R/r_0)$ gegen Null. - Weiter sei bemerkt, daß in die Ausdrücke (B 21 - B 25) und (B 43 - B 45) in der benutzten Näherung die genaue Dichte- bzw. Stromverteilung <u>nicht</u> eingeht (abgesehen von der Annahme (B 7) und (B 35)), im Gegensatz zu den entsprechenden Ausdrücken der r-Komponente.

Nachtrag zu Anhang B.

Die Virialintegrale wurden bis jetzt unter Annahme der strengen Gültigkeit von (B 7) und (B 35) berechnet. Andererseits ist eine solche Symmetrie bei einem Ring in Strenge nicht zu erwarten. Weiter sieht man, daß bei den radialen Virialintegralen sich die Terme niedrigster Ordnung bei der Integration herausheben. Man wird also erwarten, daß kleine Abweichungen von der in (B 7) und (B 35) geforderten Symmetrie die Ausdrücke (B 26 - B 29) und (B 46 - B 47) wesentlich ändern können.

Wir wollen jetzt annehmen, daß (B 7) und (B 35) nur in nullter Ordnung in Aspektverhältnis gilt. Für die Ladungsdichte machen wir den Ansatz:

$$\varrho(s_1, \vartheta_1) = \varrho_0(s_1) + \tilde{\varrho}(s_1, \vartheta_1) \tag{B 49}$$

mit $\tilde{\varrho}(s_1, \vartheta_1) = \varrho_1(s_1)\sin\vartheta_1 + \varrho_2(s_1)\cos 2\vartheta_1 + \varrho_3(s_1)\sin 3\vartheta_1 + \dots$ (B 50)

Im weiteren werden wir nur die beiden ersten Terme in (B 50) berücksichtigen. Der erste Term entspricht einer Asymmetrie in (r - R), der zweite Term ist symmetrisch in (r - R) und z und beschreibt eine elliptische Verformung des Dichteprofils. Analog zu (B 8) definieren wir

$$P_\ell(s_1) = 2\pi\int_0^{s_1}\varrho_\ell(s_2)\,s_2\,ds_2 \quad ; \quad P_\ell = P_\ell(r_0) \quad \text{mit } \ell = 1, 2 \tag{B 51}$$

Für die Elektronen- und Ionendichte machen wir den analogen Ansatz und definieren die entsprechenden Größen. - Wir wollen annehmen, daß die Abweichung von der Kreissymmetrie klein ist. Dementsprechend fordern wir

$$P_\ell \lesssim O\left(P_0\,\frac{r_0}{R}\,\ln\frac{R}{r_0}\right) \tag{B 52}$$

Wenn man (B 50) in (B 6) einsetzt und nur Terme 1. Ordnung (unter Berücksichtigung von B 52) mitnimmt, so erhält man für das durch $\tilde{\varrho}$ verursachte Potential

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(s_1,\vartheta_1) = {} & P_1\cdot\frac{s_1\sin\vartheta_1}{r_0} - \frac{\sin\vartheta_1}{s_1}\int_0^{s_1}P_1(s_2)\,ds_2 + s_1\sin\vartheta_1\int_{s_1}^{r_0}P_1(s_2)\frac{ds_2}{s_2^2} \\ & + P_2\cdot\frac{s_1^2\cos2\vartheta_1}{2r_0^2} - \frac{\cos2\vartheta_1}{s_1^2}\int_0^{s_1}P_2(s_2)\,s_2\,ds_2 + s_1^2\cos2\vartheta_1\int_{s_1}^{r_0}P_2(s_2)\frac{ds_2}{s_2^3} \end{aligned} \tag{B 53}$$

Das zugehörige elektrische Feld hat die Komponenten:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r(s_1,\vartheta_1) = {} & -\frac{P_1}{r_0} + \frac{2P_1(s_1)}{s_1}\sin^2\vartheta_1 + \frac{\cos2\vartheta_1}{s_1^2}\int_0^{s_1}P_1(s_2)\,ds_2 - \int_{s_1}^{r_0}P_1(s_2)\frac{ds_2}{s_2^2} \\ & + \frac{P_2}{r_0^2}\,s_1\sin\vartheta_1 + \frac{2P_2(s_1)}{s_1}\sin\vartheta_1\cos2\vartheta_1 + 2s_1\sin\vartheta_1\int_{s_1}^{r_0}P_2(s_2)\frac{ds_2}{s_2^2} \\ & - \frac{2\sin\vartheta_1}{s_1^3}(1+2\cos2\vartheta_1)\int_0^{s_1}P_2(s_2)\,s_2\,ds_2 \end{aligned} \tag{B 54}$$

und

$$\tilde{E}_z(s_1,\psi_1) = \frac{P_1(s_1)}{s_1}\sin 2\psi_1 - \frac{\sin 2\psi_1}{s_1^2}\int_0^{s_1} P_1(s_2)\,ds_2 - \frac{s_1\cos\psi_1}{r_0^2}P_2$$

$$+ \frac{2P_2(s_1)}{s_1}\cos\psi_1\cos 2\psi_1 - 2s_1\cos\psi_1\int_{s_1}^{r_0} P_2(s_2)\frac{ds_2}{s_2^3} \qquad \text{(B 55)}$$

$$+ \frac{2\cos\psi_1}{s_1^3}(1-2\cos 2\psi_1)\int_0^{s_1} P_2(s_2)s_2\,ds_2$$

Mit diesen Ausdrücken lassen sich jetzt Korrekturterme für die elektrischen Anteile der Virialintegrale angeben. Für die axialen Komponenten erhalten wir:

$$\int_V z(\varrho_0\tilde{E}_z + \tilde{\varrho}E_z^0)\,d\tau = 2\pi^2 R\int_0^{r_0}\varrho_0(s_1)\Big[s_1\Big(1-\frac{s_1^2}{r_0^2}\Big)P_2 - 2s_1^3\int_{s_1}^{r_0}P_2(s_2)\frac{ds_2}{s_2^3}\Big]ds_1 \qquad \text{(B 56)}$$

Dieser Ausdruck ist verglichen mit (B 21) - aufgrund der Annahme (B 52) - klein von erster Ordnung. Um das Integral auf der rechten Seite von (B 56) berechnen zu können, muß man wieder detailiertere Annahmen über die Dichteverteilung machen. Wenn wir annehmen, daß

$$\varrho_2(s) = \alpha\frac{s}{r_0}\varrho_0(s) \qquad \text{(B 57)}$$

und daß $\varrho_0(s)$ durch (B 14) gegeben ist (parabolisches Dichteprofil), so erhalten wir an Stelle von (B 21):

$$\int_V z\varrho E_z\,d\tau = \pi R P_0^2\Big[1 + \frac{2P_2}{21 P_0} + O\Big(\frac{r_0^2}{R^2}\ln\frac{R}{r_0}\Big)\Big] \qquad \text{(B 58)}$$

Für die Elektronen alleine gilt:

$$\int_V z\tilde{n}_e E_z^0\,d\tau = 2\pi^2 R\int_0^{r_0} n_{e2}(s_1)P_0(s_1)s_1\,ds_1 \qquad \text{(B 59a)}$$

$$\int_V z\,n_{e0}\tilde{E}_z\,d\tau = 2\pi^2 R\int_0^{r_0} n_{e0}(s_1)\Big[s_1 P_2(s_1) - \frac{s_1^3}{r_0^2}P_2 - 2s_1^3\int_{s_1}^{r_0}P_2(s_2)\frac{ds_2}{s_2^3}\Big]ds_1 \qquad \text{(B 59b)}$$

Für die Ionen gelten entsprechende Beziehungen. Nimmt man die Gültigkeit von (B 23) nicht nur für $\varrho_0(s)$ sondern auch für $\varrho_2(s)$ an, so folgt mit (B 57) und (B 14)

$$\int\limits_V z\, n_e E_z\, d\tau = -\pi R e(1-\epsilon) N_{ec}^2 \left(1 + \frac{2}{21} \frac{N_{e2}}{N_{ec}}\right) \tag{B 60a}$$

und

$$\int\limits_V z\, n_i E_z\, d\tau = -\pi R e \epsilon (1-\epsilon) N_{e0}^2 \left(1 + \frac{2}{21} \frac{N_{e2}}{N_{e0}}\right) \tag{B 60b}$$

Nimmt man statt (B 14) für $\varrho_c(s)$ eine bis zum Rand homogene Verteilung (B 11) an, so ist in (B 58) und (B 60) der Faktor 2/21 durch 1/30 zu ersetzen.

Bei den radialen Virialintegralen wird durch die Multiplikation mit r die Ordnung der einzelnen Terme um eins erhöht. D.h., daß die Korrekturterme von nullter Ordnung, bzw. logarithmisch divergent sind. In niedrigster Ordnung erhalten wir:

$$\int\limits_V r \tilde{\varrho} E_r^0\, d\tau = (2\pi R)^2 \int_0^{r_0} \varrho_1(s_1) P_0(s_1)\, ds_1 \tag{B 61a}$$

$$\int\limits_V r \varrho_c \tilde{E}_r\, d\tau = (2\pi R)^2 \int_0^{r_0} \varrho_0(s_1) \left[P_1(s_1) - \frac{s_1}{r_0} P_1 - s_1 \int_{s_1}^{r_0} P_1(s_2) \frac{ds_2}{s_2^2} \right] ds_1 \tag{B 61b}$$

Nach partieller Integration ergibt sich, daß die Summe der beiden Ausdrücke genau Null ergibt. D.h. die Korrekturterme niedrigster Ordnung heben sich genau auf und die Beziehung (B 26) ist mit der Annahme (B 52) bis auf Terme erster Ordnung korrekt. Analog zu (B 61) gilt für die Elektronen und Ionen alleine

$$\int\limits_V r \tilde{n}_e E_r^0\, d\tau = (2\pi R)^2 \int_0^{r_0} n_{e1}(s_1) P_0(s_1)\, ds_1 \tag{B 62a}$$

$$\int\limits_V r n_{e0} \tilde{E}_r\, d\tau = (2\pi R)^2 \int_0^{r_0} n_{e0}(s_1) \left[P_1(s_1) - \frac{s_1}{r_0} P_1 - s_1 \int_{s_1}^{r_0} P_1(s_2) \frac{ds_2}{s_2^2} \right] ds_1 \tag{B 62b}$$

$$\int_V r\, \tilde{n}_i\, E_r^\circ\, d\tau = (2\pi R)^2 \int_0^{r_0} n_{i1}(s_1)\, P_0(s_1)\, ds_1 \tag{B 62c}$$

$$\int_V r\, n_{i0}\, \tilde{E}_r\, d\tau = (2\pi R)^2 \int_0^{r_0} n_{i0}(s_1)\Big[P_1(s_1) - \frac{s_1}{r_0} P_1 - s_1 \int_{s_1}^{r_0} P_1(s_2) \frac{ds_2}{s_2^2}\Big] ds_1 \tag{B 62d}$$

Diese Ausdrücke sind von derselben Größenordnung wie (B 27) bzw. (B 28). Die Summe von (B 62a) und (B 62b) bzw. (B 62c) und (B 62d) ist nur dann Null, wenn man fordert, daß

$$n_{e1}(s) \sim \varrho_1(s) \qquad \text{und damit} \qquad n_{i1}(s) \sim \varrho_1(s) \tag{B 63}$$

exakt erfüllt ist. Diese Annahme kann man aber i.A. nicht machen. Denn wir hatten gesehen, daß das Dichtemaximum und das Minimum des elektrostatischen Potentials i.A. nicht zusammenfallen (der Abstand ist klein von erster Ordnung im Aspektverhältnis). Wir interessieren uns aber besonders für den Fall, daß die Dichteverteilung der Elektronen durch die magnetischen und die elektrischen Kräfte bestimmt ist, die Ionen aber nicht zum Strom beitragen und deswegen die Ionendichte nur durch die elektrischen Kräfte bestimmt ist. Dann sollte man aber in den Termen erster Ordnung Ladungstrennungseffekte, d.h. eine Verletzung von (B 63), erwarten. Da die Terme (B 62c) und (B 62d) von derselben Ordnung sind wie (B 28) bedeutet dies, daß man das radiale Virialintegral für die Ionen nur auswerten kann, wenn man eine genauere Kenntnis der Dichteverteilung der Ionen hat. - Die Ausdrücke (B 62a) und (B 62b) sind zwar bezogen auf das Aspektverhältnis von derselben Ordnung wie (B 27), andererseits haben wir aber gesehen, daß die Summe von (B 61a) und (B 61b) Null ist. Für $\epsilon \ll 1$ ist die Ladungsdichte im wesentlichen durch die Elektronen bestimmt. Man wird daher erwarten, daß die Summe von (B 62a) und (B 62b) um einen Faktor ϵ kleiner ist als (B 27).

Berechnet man die Energie des elektrischen Feldes aus (B 30), so sieht man, daß sich die Korrekturterme nicht nur in nullter sondern auch in erster Ordnung bei der Integration herausheben. D.h. der Ausdruck (B 29) ist korrekt bis auf Terme zweiter Ordnung.

Analog zu (B 49) machen wir für den Strom den Ansatz

$$j(s_1, \varphi_1) = j_0(s_1) + \tilde{j}(s_1, \varphi_1) \tag{B 64}$$

mit

$$\tilde{j}(s_1, \varphi_1) = j_1(s_1) \sin\varphi_1 + j_2(s_1) \cos 2\varphi_1 \tag{B 65}$$

Entsprechend (B 51) definieren wir

$$J_\ell(s_1) = 2\pi \int_0^{s_1} j_\ell(s_2)\, s_2\, ds_2 \quad ; \quad J_\ell = J_\ell(r_0) \qquad \text{mit } \ell = 1,2 \tag{B 66}$$

und entsprechend (B 52) nehmen wir an, daß

$$J_\ell \leq O\left(J_0 \frac{r_0}{R} \ln \frac{R}{r_0}\right) \tag{B 67}$$

Dann ergibt sich für das durch $\tilde{j}$ verursachte Vektorpotential:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1\varphi}(s_1, \varphi_1) = {} & \sin\varphi_1 \left[\frac{s_1}{r_0} J_1 - \frac{1}{s_1} \int_0^{s_1} J_1(s_2)\, ds_2 + s_1 \int_{s_1}^{r_0} J_1(s_2) \frac{ds_2}{s_2^2} \right] \\ & + \cos 2\varphi_1 \left[\frac{s_1^2}{2 r_0^2} J_2 - \frac{1}{s_1^2} \int_0^{s_1} J_2(s_2)\, s_2\, ds_2 + s_1^2 \int_{s_1}^{r_0} J_2(s_2) \frac{ds_2}{s_2^3} \right] \end{aligned} \tag{B 68}$$

Das zugehörige magnetische Feld hat die Komponenten:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{1r}(s_1, \varphi_1) = {} & \frac{J_1(s_1)}{s_1} \sin 2\varphi_1 - \frac{\sin 2\varphi_1}{s_1^2} \int_0^{s_1} J_1(s_2)\, ds_2 - \frac{s_1 \cos\varphi_1}{r_0^2} J_2 \\ & + \frac{2 J_2(s_1)}{s_1} \cos\varphi_1 \cos 2\varphi_1 - 2 s_1 \cos\varphi_1 \int_{s_1}^{r_0} J_2(s_2) \frac{ds_2}{s_2^3} \\ & + \frac{2\cos\varphi_1}{s_1^3} (1 - 2\cos 2\varphi_1) \int_0^{s_1} J_2(s_2)\, s_2\, ds_2 \end{aligned} \tag{B 69a}$$

$$\widetilde{B}_{1z}(s_1,\psi_1) = \frac{j_1}{r_0} - \frac{2j_1(s_1)}{s_1}\sin^2\psi_1 - \frac{\cos 2\psi_1}{s_1^2}\int_0^{s_1} j_1(s_2)\,ds_2 + \int_{s_1}^{r_0} j_1(s_2)\frac{ds_2}{s_2^2}$$

$$+\frac{j_2}{r_0^2}s_1\sin\psi_1 - \frac{2j_2(s_1)}{s_1}\sin\psi_1\cos 2\psi_1 - 2s_1\sin\psi_1\int_{s_1}^{r_0} j_2(s_2)\frac{ds_2}{s_2^3} \qquad \text{(B 69b)}$$

$$+\frac{2\sin\psi_1}{s_1^3}(1+2\cos 2\psi_1)\int_0^{s_1} j_2(s_2)\,s_2\,ds_2$$

Analog zu (B 56) erhalten wir:

$$\int_V z(j_0\widetilde{B}_{1r} + \tilde{j}B^0_{1r})\,d\tau = 2\pi^2 R\int_0^{r_0} j_0(s_1)\Big[s_1\Big(1-\frac{s_1^2}{r_0^2}\Big)j_2 - 2s_1^3\int_{s_1}^{r_0} j_2(s_2)\frac{ds_2}{s_2^3}\Big]ds_1 \qquad \text{(B 70)}$$

Nimmt man analog zu (B 57) an, daß $j_2(s)$ proportional ist zu $j_0(s)\,s/r_0$, so erhält man, wenn man für $j_0(s)$ eine parabolische Verteilung ansetzt:

$$\int_V zjB_{1r}\,d\tau = \pi R j_0^2\Big[1+\frac{2}{21}\frac{j_2}{j_0} + O\Big(\frac{r_0^2}{R^2}\ln\frac{R}{r_0}\Big)\Big] \qquad \text{(B 71)}$$

Für das radiale Virialintegral $\int_V rjB_{1z}\,d\tau$ ergibt sich wieder, daß sich die Korrekturterme nullter Ordnung genau herausheben, so daß (B 46) bis auf Terme erster Ordnung richtig bleibt. Die Korrekturterme erster Ordnung lassen sich nicht direkt angeben, da durch die Multiplikation mit r die Ordnung der einzelnen Terme um eins erhöht wurde, die Felder aber nur bis zur ersten Ordnung angegeben wurden. Man sieht aber aus (B 48), daß der Ausdruck für die Energie des magnetischen Eigenfeldes (B 47) trotz der Annahme (B 64) bis auf Terme zweiter Ordnung korrekt bleibt (unter Berücksichtigung von B 67). Das bedeutet aber - aufgrund der Beziehung (B 47) - daß der lineare Term (B 70) im axialen Virialintegral gleich dem linearen Term im radialen Virialintegral sein muß.

C. Die Wlassow-Gleichung für das Ringgleichgewicht

In cartesischen Koordinaten lautet nach WEIBEL (1967) die relativistische Wlassow-Gleichung für die Elektronen:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{\vec{u}}{\gamma}\frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m}\left(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{\gamma} \times \vec{B}\right)\frac{\partial f_e}{\partial \vec{u}} = 0 \qquad \text{(C 1)}$$

In Zylinderkoordinaten erhält man dann

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{u_r}{\gamma}\frac{\partial f_e}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r\gamma}\frac{\partial f_e}{\partial \varphi} + \frac{u_z}{\gamma}\frac{\partial f_e}{\partial z} \\ &- \left[\frac{e}{m}\left(E_r + \frac{u_\varphi}{\gamma}B_z - \frac{u_z}{\gamma}B_\varphi\right) - \frac{u_\varphi^2}{r\gamma}\right]\frac{\partial f_e}{\partial u_r} - \frac{e}{m}\left(E_z + \frac{u_r}{\gamma}B_\varphi - \frac{u_\varphi}{\gamma}B_r\right)\frac{\partial f_e}{\partial u_z} \\ &- \left[\frac{e}{m}\left(E_\varphi + \frac{u_z}{\gamma}B_r - \frac{u_r}{\gamma}B_z\right) + \frac{u_\varphi u_r}{r\gamma}\right]\frac{\partial f_e}{\partial u_\varphi} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(C 2)}$$

Mit

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial f_e}{\partial \varphi} = E_\varphi = B_\varphi = 0 \qquad \text{(C 3)}$$

folgt dann Gleichung (2).

Literatur

BENNETT, W.H.: Phys. Rev. 45, 890 (1934) u. 98, 1584 (1955)

GRADSHTEYN, I.S. u. I.M. RYZHIK: Table of Integrals, Series, and Products, New York u. London: Academic Press 1965

KEGEL, W.H. u. P. MERKEL: Relativistische magnetohydrodynamische Gleichungen und spezielle Lösungen. IPP interner Bericht 1968

MERKEL, P.: Zur Bestimmung des Radius relativistischer Elektronenringe. IPP interner Bericht 1968

SCHOPPER, H.: Phys. Bl. 24, 201 u. 24, 255 (1968)

SESSLER, A.M.: Proc. of Symp. on Electron Ring Accelerators (Report UCRL 18103) p. 11 (1968)

WEIBEL, E.S.: Plasma Physics 9, 665 (1967)